Динамические кратчайшие пути

Иванов Кирилл
371 группа

Вам дан ориентированный взвешенный граф G с положительными весами. Обновление — увеличение веса ребра (уменьшения запрещены). Предполагается, что кратчайшие пути уникальны (между парой вершин x и y есть только один кратчайший путь). Из этого следует, что если между вершинами x и y есть несколько однородных путей, то вершины в этих путях попарно различны (кроме самих конечных вершин x и y).

Задача 1 (a). Доказать: не более, чем n^3 путей в графе после увеличения веса ребра *становятся* однородными. В качестве доказательства придумайте такой худший случай.

Докажем сперва следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. Если в ориентированном взвешенном графе G с положительными весами, обновление которого – увеличение веса ребра, кратчайшие пути уникальны, то между любыми вершинами u и v существует не более $n-1$ однородного пути.

Доказательство. Заметим, что путь, соединяющий u и v и не являющийся ребром (u, v), содержит минимум одну вершину, отличную от u и v. Пусть между вершинами u и v существует $n-1$ или более однородных путей, ни один из которых не является ребром (u, v). Всего в графе $n-2$ вершины, отличные от u и v, тогда по принципу Дирихле есть хотя бы два пути, которые содержат одну и ту же вершину. Пришли к противоречию.

Таким образом, между вершинами u и v существует не более $n-2$ однородных путей, ни один из которых не является ребром (u, v), а учитывая возможное наличие ребра (u, v), приходим к выводу, что между вершинами u и v существует не более $n-1$ однородных путей. $\square$

Теперь докажем утверждение задачи 1 (a).

Доказательство. Всего в графе можно выделить $A_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$ пар вершин (u, v). Между вершинами u и v из каждой пары существует не более $n-1$ однородных путей. Тогда в графе может быть не более $n(n-1)^2$ однородных путей в каждый момент времени, а значит и при изменении веса ребра может появиться не более $n(n-1)^2 < n^3$ однородных путей. $\square$

Задача 1 (b). Доказать: не более, чем n^2 путей в графе после увеличения веса ребра перестают быть однородными.

Доказательство. Допустим, мы увеличили вес ребра (i, j). Заметим, что между любыми двумя вершинами u и v $(u \neq i, v \neq j)$ может существовать максимум 1 однородный путь, содержащий ребро (i, j), иначе бы нарушилось предположение о попарной различности вершин на однородных путях. Также между вершинами i и j может существовать только 1 однородный путь, содержащий (i, j), – само это ребро. То есть между любыми вершинами u и v может существовать максимум 1 однородный путь, содержащий ребро (i, j). Всего в графе можно выделить $A_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$ пар вершин (u, v). Значит, в графе может быть не более $1 \cdot n(n-1)$ однородных путей, содержащих ребро (i, j). Следовательно, при увеличении веса (i, j) только $n(n-1) < n^2$ однородных путей может исчезнуть. $\square$