I Основные задачи и примеры

{ слова длины k } $\xrightarrow{\text{кодир.}}$ { слова длины n }
сообщения (кодовые слова)

} конец 1.5.2.а

сообщ $\xleftarrow[\text{декодир.}]{\text{все}}$ кодовые слова $\xleftarrow{\text{декодир.}}$ искаженные слова

Пример: (i) кратное повторение

$A = \{a, b, c\}$

$abc \longrightarrow abcabcabc \longrightarrow \underset{\text{ошибка}}{acbacbacc}$

$\downarrow$

$abc \longleftarrow abcabcabc$

$abc \to abcabcabc \longrightarrow \underset{\text{стирание}}{\overline{a}?c\,?\,\overline{b}cbabc}$

$\downarrow$

$abc \longleftarrow abcabcabc$

(ii) (7,4) код Хэмминга

$A = \{0,1\}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (\underbrace{x_1}_{c_5}, \underbrace{x_2}_{c_6}, \underbrace{x_3}_{c_7}, \underbrace{x_4}_{c_4}, \underbrace{x_1+x_2+x_3}_{c_5}, \underbrace{x_2+x_3+x_4}_{c_6}, \underbrace{x_3+x_1+x_4}_{c_7})$

1001 → 1001101 ⇝ 1001101

Узн: бороться с неправильными (ошибки, стирания) наиболее эффективным образом
– быстрое кодирование и декодир.
– наименьшая избыточность

Опр. Пусть A - некоторый алфавит, $x, y \in A^n$. Расстоянием Хэмминга между x, y называют

$$d(x,y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \Big]\, 3$$

Теор
1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \geq 0$
4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$|xy| \leq |xz| + |zy|$

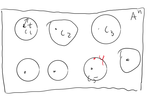
Док-во 1-3 очевидно

4

$\{i \mid x_i \neq y_i\} \subset \{i \mid x_i \neq z_i\} \cup \{i \mid z_i \neq y_i\}$

Опр Кодом C длины n называется подмн. мн-ва слов длины n $(C \subset A^n)$

Опр Код C гарантированно исправляет t ошибок $\Leftrightarrow \forall c, \tilde{c} \in C$ $\quad B_t(c) = \{x \in A^n \mid d(x,c) \leq t\} \cap B_t(\tilde{c}) = \varnothing$



Теор. Пусть C - код, $d = \min\limits_{\substack{c \neq \tilde{c} \\ c, \tilde{c} \in C}} d(c, \tilde{c})$ – минимальное кодовое расстояние.

Если $d \geq 2t+1$, то код исправляет t ошибок

Док-во (от противного)

$d \geq 2t+1$, но $\exists c, \tilde{c}$ $\quad B_t(c) \cap B_t(\tilde{c}) \neq \varnothing$

$\Downarrow$

$\exists y$

$d(c,y) \leq t$
$d(\tilde{c},y) \leq t$
$d(c,\tilde{c}) \leq \underset{\text{перед}}{d(c,y)} + \underset{\leq t}{d(\tilde{c},y)}$

$d(c,\tilde{c}) \geq d \geq 2t+1$

из условий

Противоречие ∎

следств Код C может исправить $t = \left[\frac{d-1}{2}\right]$ ошибок

Упр Если C исп. t ошибок, то $d \geq 2t+1$

Упр. (+2б.) 1) Код C может исправить $d-1$ стирание
2) Код C способен обнаружить то, что произошло $d-1$ ошибка

Пример $abc \to abcabc \xrightarrow{\text{1 ошибка}} \underset{c}{\underline{ab}c\,\underline{ab}c}$

Коды Адамара

D Квадр матр A_n (n×n), сост. из 1 и -1, наз матр. Адамара, если её строки попарно ортогональны $(A \cdot A^T = nE)$
$A^T A = nE$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(\underbrace{(1,1),(1,-1)}) = 1 \cdot -1 - 1 \cdot 1 = 0$ $\quad \det(dx, y) = d \det(x,y)$

$\det(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n$
$\det(x,y) = 0 \Rightarrow x, y$ ортогональны.

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 \otimes A_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Упр Строки матриц Адамара совпадают в половине позиций

Опр A в, $\quad A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1k}B \\ \vdots & & & \\ a_{k1}B & \ldots & & a_{kk}B \end{pmatrix}$

Утв. $A_i \otimes A_j = A_{ij}$

$A_8 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $\quad 4 \quad 4 \quad 8$

$\left(\begin{array}{c} A_8 \\ \hline A_8^{1\to-1} \end{array}\right)$ 16 строк ! новые расст. 4

$1 \to 1$
$-1 \to 0$

$\left\{\begin{array}{l} 11111111, \leftarrow 0000 \\ 10101010, \leftarrow 0001 \\ \vdots \end{array}\right.$

$\left\{ 0110\,1001 \right\} = C$

$|C| = 16$

$d = 4 \Rightarrow$ исправл. 1 ошибку, обнаружит 3 ошибки

$n = 8$

(7,4) код Хэмминга

$n = 7$ исп. 1 ошибку
$|C| = 16$ обнар. 2 ошибки

$\underset{16}{(x_1, y_1, x_3, y_4)} \longmapsto (\qquad\qquad)$

313 → 311 ошиб

8 3