Преобразование Гильберта-Хуанга

Спектральный анализ на базе преобразования Фурье имеет ограничения применения для линейных систем и стационарных сигналов. На практике это условие не всегда может быть выполнено, что приводит к необходимости ряда допущений, которые влияют на точность полученных результатов.

Преобразование Гильберта-Хуанга (Hilbert-Huang transform, HHT) было преложено Норденом Хуангом в конце XX века и основано на спектральном анализе сигналов Гильберта. В отличие от преобразования Фурье, а также подобных преобразований, использующих определенный базис, преобразование Гильберта-Хуанга не требует определенного аналитическим образом базиса и может применяться для нестационарных и нелинейных данных. Базисные функции являются адаптивными и носят название эмпирических мод, а процесс их получения, предложенный Хуангом, называется эмпирической модовой декомпозицией (Empirical Mode Decomposition, EMD).

В процессе эмпирической декомпозиции полученные моды должны представлять собой линейные или нелинейные внутренние колебания (intrinsic mode functions, IMF), для которых с помощью преобразования Гильберта можно получить значения мгновенных частот. Выполнение данного условия обеспечивается, если функции внутренних колебаний обладают свойствами [Huang, ... The empirical mode decomposition and the  
Hilbert spectrum for nonlinear and  
non-stationary time series analysis]:

1. Количество локальных экстремумов и количество пересечений нуля не должны отличаться более, чем на единицу.

2. В любой точке функции среднее значение огибающих, определенных локальными максимумами и локальными минимумами, должно быть нулевым.

Допустим, что имеется произвольный сигнал  *y(t)*. Сущность метода заключается в последовательном вычислении функций эмпирических мод  *cj(t)* и остатков *rj(t) = rj-1(t) - cj(t)*, где *j* = 1, 2, 3, …, *n* при *r0 = y(t)*. Результатом разложения будет представление сигнала в виде суммы модовых функций и конечного остатка:

y(t) = cj(t) + rn(t), (1)

где *n* — количество эмпирических мод, которое устанавливается в ходе вычислений.

Алгоритм разложения произвольного сигнала на моды определяется следующей последовательностью действий [. Давыдов В.А., Давыдов А.В. Уменьшение краевых эффектов при выполнении эмпирической модовой деком-позиции сигналов преобразования Гильберта-Хуанга //Актуальные инновационные исследования: наука и практика. 2011. No 1. ]:

***Действие 1.*** Находим в сигнале *y(k)* положение всех локальных экстремумов, максимумов и минимумов процесса (номера точек *ki.ext* экстремумов), и значения *y(ki.ext)* в этих точках (рис. 2). Между этими экстремумами сосредоточена вся информация сигнала. Группируем раздельно для максимумов и для минимумов массивы координат *ki.ext*  и соответствующих им амплитудных значений *у(ki.ext)*. Число строк в массивах максимумов и минимумов не должно отличаться более чем на 1.



рис 2

***Действие 2.***  Кубическим сплайном (или каким либо другим методом) вычисляем верхнюю *ut(k)* и нижнюю *ub(k)* огибающие процесса соответственно, по максимумам и минимумам, как это показано на рис. 3. Определяем функцию средних значений *m1(k)* между огибающими.

m1(k) = (ut(k)+ub(k))/2.

Разность между сигналом *y(k)* и функцией *m1(k)* дает нам первую компоненту отсеивания (*Sifting) –* функцию h1(k), которая является первым приближением к первой функции IMF:

h1(k) = y(k) – m1(k).

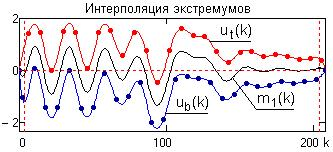


рис 3

***Действие 3.***  Повторяем операции 1 и 2, принимая вместо *y(k)* функцию *h1(k)*, и находим второе приближение к первой модовой функции – функцию *h2(k).*

h2(k) = h1(k) – m2(k).

***Последующие итерации***  выполняются аналогично:

hi(k)  = hi-1(k) – mi(k),

Одним из наиболее эффективных критериев останова итераций [4] является задание предела, вычисленного с использованием двух последних приближений

 k |hi-1(k) - hi(k)|2 / k hi-12(k)

Последнее значение *hi(k)* итераций принимается за наиболее высокочастотную функцию *с1(k) = hi(k)* , которая непосредственно входит в состав исходного сигнала *y(k).* Это позволяет вычесть *с1(k)* из состава сигнала и оставить в нем более низкочастотные составляющие

r1(k) = y(k) – c1(k).

Функция *r1(k)* обрабатывается как новые данные по аналогичной методике с нахождением второй модовой функции – *c2(k)*, после чего процесс продолжается:

r2(k) = r1(k) – c2(k),   и т.д.

            Таким образом, достигается декомпозиция сигнала в n – эмпирическом приближении:, соответствующее (1).

В дальнейшем каждая из модовых функций подвергается cj (t) преобразованию Гильберта **H**, то есть свертке с функцией



, т. е.

cj(t)=**H**[cj (t)]=cj (t)\* = 

По сути преобразование Гильберта изменяет фазу всех частотных составляющих сигнала на /2, и позволяет получить сигнал   ортогональный исходному сигналу Это позволяет сформировать из сигналов cj(t) и cj(t) комплексный аналитический сигнал z(t) (рис 1), как

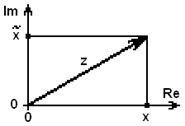
z(t) = xj(t) + icj(t)

рис.1

Подобнле представление позволяет легко определить огибающую A(t) и мгновенную фазу фи(t) сигнала z(t)

A(t)=

фи(t)=arctg[(t)/x(t)]

Мгновенная частота же в этом случае может быть определена как первая произволна от мгновенной фазы.

Итоговый результат преобразования Гильберта-Хуанга графически может быть представлен либо в виде набора двумерных графиков частоты от времени для каждой моды, либо сведен на трехмерный график путем совмещения мод.