Kirill Beskorovainyi. Hausaufgabe 2:

Aufgabe 1:

a)

Induktionsanfang: Für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$1^2 = 1$$

$$1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k+1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 =$$

$$= (n^2) + 2n + 1 = (n+1)^2$$

b)

Induktionsanfang: Für $n = 2$

$$\prod_{k=2}^{2}(1 - \frac{1}{2^2}) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch:

$$\prod_{k=2}^{n+1}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Induktionsschluss:

$$\prod_{k=2}^{n+1}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) \times (1-\frac{1}{(n+1)^2}) = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \times \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2+2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$$

c)
Induktionsanfang: Für $n = 4$

$$2^4 = 16$$

$$4^2 = 16$$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ gelte:

$$2^n \geq n^2$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

Induktionsschluss:

$$2^{n+1} = 2^n = 2^n + 2^n$$

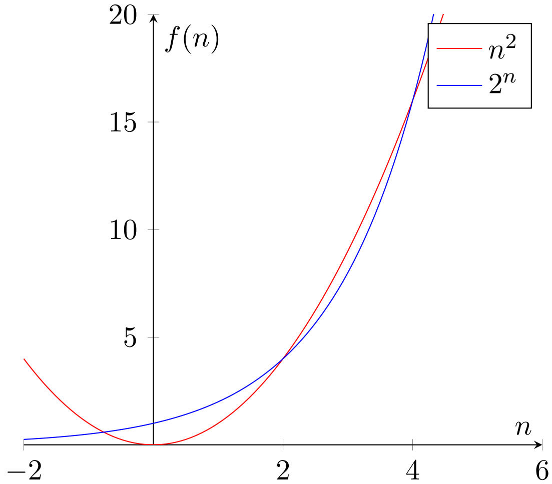
$$2^n + 2^n \geq n^2 + n^2 \geq n^2 + n \times n$$

$$n \geq 4 => 2^{n+1} \geq n^2 + 4n$$

$$\geq n^2 + 2n + 2n$$

$$\geq n^2 + 2n + 2(4)$$
$$\geq n^2 + 2n + 1 \geq (n+1)^2$$

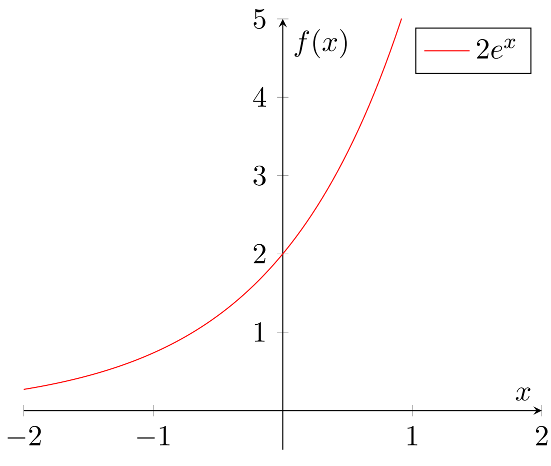
Teil 2:
Für $n = 0, 1, 2, 3$



Für $[0, 2]$ ist $n^2 \geq 2^n$, aber für $[2, 4]$ ist $n^2 \leq 2^n$
Also die Aussage gilt für $n = 0, 1, 2$, aber nicht für $n = 3$

Aufgabe 2:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2e^x$



Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit:

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

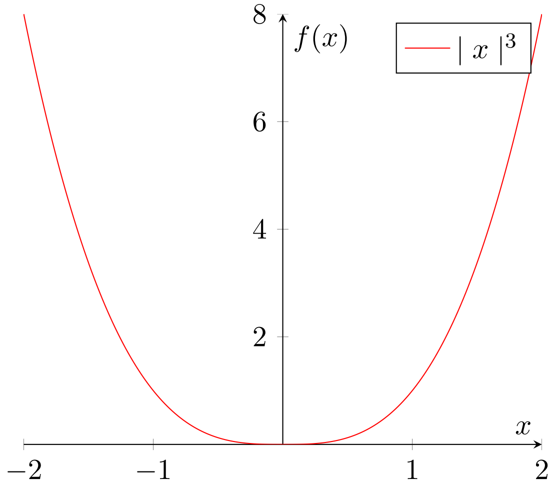
$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

Damit f ist injektiv.

Angenommen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass $f(x) = -1$. Dann wäre aber $-1 = f(x) = 2e^x > 0$, was einen Wiederspruch darstellt. Daher ist -1 nicht im Bild von f und f ist nicht surjektiv.
Da f injektiv, aber nicht surjektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mid x \mid^3$



Die Fuktion ist nicht injektiv, da $g(-1) = 1 = g(1)$, aber $1 \neq -1$.
Angenomen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass $f(x) = -2$. Dann wäre aber $-2 = f(x) = \mid x \mid^3 \geq 0$, was einen Wiederspruch darstellt. Daher ist -2 nicht im Bild von g und g ist nicht surjektiv.
Da g weder injektiv noch surjektiv ist, ist sie nicht bijektiv.

Aufgabe 3:

a) $f_1(x) = x^2 - 4$ ist ein Polynom 2. Grades und im ganzen $\mathbb{R}$ definiert. Also:

$$D_{f_1} = \mathbb{R}$$

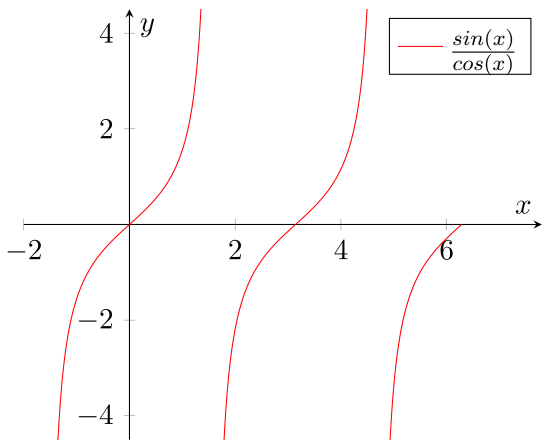
$f_2(x) = \frac{1}{x^3}$ ist nur dann definiert, wenn $x^3 \neq 0$, also $x \neq 0$:
Daher ist:

$$D_{f_2} = \mathbb{R}^{\neq 0}$$

$f_3(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = tan(x)$ ist π-periodisch, d.h. $tan(\phi + k\pi) = tan(\phi)$ für alle $\phi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Somit ist:

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$



b)$f_1 \circ f_2 : D_{f_1 \circ f_2} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_1(f_2(x))$
Sei $x \in D_{f_1 \circ f_2} \subseteq D_{f_2}$. Dann gilt:

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 4 = \frac{1}{x^6} - 4$$

Also:

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R}^{\neq 0}$$

$f_2 \circ f_1 : D_{f_1 \circ f_2} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_2(f_1(x))$
Sei $x \in D_{f_2 \circ f_1} \subseteq D_{f_1}$, dann gilt:

$$f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{(x^2 - 4)^3}$$

$$=> (x^2 - 4)^3 \neq 0$$

$$x \neq \pm 2$$

Also:

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

c)

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}$$

$$f^{-1}(x) = 0 = \sqrt{x + 4} => x = -4$$

$$f^{-1}(x) = 12 = \sqrt{x + 4} => x = 140$$

Also das Urbild von $f^{-1}(x)$ ist:

$$[-4, 140]$$

d)

$$f_1{}'(x) = 2x$$
$$f_1{}''(x) = 2$$

$f_1{}''(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv. Das heißt das die Funktion eine Minimumpunkt hat, also es ist nur nach unten beschränkt.

e)

$f_1(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine gerage Funktion.
$f_2(x) \neq f_2(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine ungerade Fuktion.

Aufgabe 4:

a)

$$y = \frac{2x+3}{x+1} => y(x+1) = 2x+3 =>$$
$$yx - 2x = 3 - y => x(y-2) = 3y =>$$
$$x = \frac{3y}{y-2} =>$$
$$f^-1(x) = \frac{3x}{x-2}$$
$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b)

$$\frac{2\left(\frac{3x}{x-2}\right)+3}{\left(\frac{3x}{x-2}\right)+1} = \frac{\left(\frac{6x}{x-2}\right)+\left(\frac{3(x-2)}{x-2}\right)}{\left(\frac{3x}{x-2}\right)+\left(\frac{x-2}{x-2}\right)} =$$
$$= \frac{9x-6}{4x-2} = \frac{3(3x-2)}{2(2x-1)}$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x+3}{x+1}\right] = \frac{(x+1)(2)-(2x+3)(1)}{(x+1)^2} =$$
$$= -\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=> f'(x) < 0 \text{ für alle } \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$$
$$=> f_1(x) \text{ ist monoton fallend für } [-1, \infty]$$

Aufgabe 5:

a)

$$e^{x^2-9} - 1 = 0$$

$$=> e^{x^2-9} = 1$$

$$=> ln(1) = x^2 - 9$$

$$=> x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \{-3, 3\}$$

b)

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} > 0$$

$$\frac{x-1}{x-2} > 0$$

Falls $x > 2$:

$$x > 1$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

Falls $x < 2$:

$$x < 1$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$$

Es folgt: $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{[1, 2]\} = [-\infty, 1] \cup [2, \infty]$