Haitham Abdel Razaq Moh'd Almatani 407920

Themistoklis Dimaridis 355835

Kirill Beskorovainyi 451420

Aufgabe 1:

a)

$$T_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 = x_2 \right\} \qquad T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^3 = 1 \right\}$$

Wir verwenden das Teilraum kriterium. T_1, T_2 sind Teilräume des $\mathbb{R}^2$, falls diese den Nullvektor enthalten und abgeschlossen bezüglich Addition und skalarer Multiplikation sind.

<u>Über T_1 gilt:</u>

- $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in T_1$, da $2 \cdot 0 = 0$
- Für $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in T_1$ ist $x_2 = 2x_1$ und $y_2 = 2y_1$

Dann gilt: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}$ mit

$$x_2 + y_2 = 2x_1 + 2y_1 = 2(x_1 + y_1)$$

Also ist $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in T_1$ und damit ist T_1 abgeschlossen bezüglich der Addition.

- Sei $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in T_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt per Definition:

$$x_2 = 2x_1$$

Also ist für $\alpha\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}$, dass $\alpha x_2 = \alpha(2x_1) = 2(\alpha x_1)$

Damit ist $\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in T_1$ und T_1 ist auch abgeschlossen bezüglich skalarer Multiplikation.

Damit ist T_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

<u>Über T_2 gilt:</u>

- $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin T_1$, da $0^3 + 0^3 = 0 \neq 1$

=> Somit ist der Nullvektor nicht in T_2 enthalten und damit ist T_2 kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

b)

$$V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

$$T = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$$

Wir verwenden wieder das im Aufgabenteil a) erwähnte Teilraumkriterium.

- $\vec{0} \in T$, da $f(1)$ ist auf 0 abgebildet
- Seinen $f(1)$ und $g(1) \in T$ mit $f(1) = 0$ und $g(1) = 0$.

Dann gilt:

$$f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$$

Somit ist $f(1) + g(1) \in T$ und damit T ist abgeschlossen bezüglich der Addition.

- Seinen $f(1) \in T$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f(1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha f(1) = \alpha \cdot 0 = 0, \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

Somit ist T abgeschlossen bezüglich skalarer Multiplikation und da slle Bedingungen erfüllt sind, ist T ein Teilraum von V.

Aufgabe 2:

a)

Die Vektoren sind nur dann linear unabhängeg, wenn für alle $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \in \mathbb{R}$, die folgende Gleichung

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

die nür triviale Lösung: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ hat.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_3 \\ -\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=> \lambda_1 + \lambda_2 = 0 => \lambda_1 = -\lambda_2$$
$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0 => \lambda_1 = -\lambda_3$$
$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0 => \lambda_2 = \lambda_3$$