Kirill Beskorovainyi. Hausaufgabe 2:

Aufgabe 1:

a)

Induktionsanfang: Für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$1^2 = 1$$

$$1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

<u>(IV:)</u>

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k+1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 =$$

$$= (n^2) + 2n + 1 = (n+1)^2$$

b)

Induktionsanfang: Für $n = 2$

$$\prod_{k=2}^{2}(1 - \frac{1}{2^2}) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch:

$$\prod_{k=2}^{n+1}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

(IV:)

$$\prod_{k=2}^{n+1}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) \times (1-\frac{1}{(n+1)^2}) = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \times \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2+2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

c)
Induktionsanfang: Für $n = 4$

$$2^4 = 16$$

$$4^2 = 16$$

Induktionsvoraussetzung:
Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ gelte:

$$2^n \geq n^2$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

(IV:)

$$2^{n+1} = 2^1 \times 2^n = 2^n + 2^n$$

Aus Induktionsvoraussetzung: $2^n \geq 2^n$, also $2 \times 2^n \geq 2 \times 2^n$

$$2^n + 2^n \geq n^2 + n^2 \geq n^2 + n \times n$$

$$
\begin{aligned}
n \geq 4 => 2^{n+1} &\geq n^2 + 4n \\
&\geq n^2 + 2n + 2n \\
&\geq n^2 + 2n + 2(4) \\
&\geq n^2 + 2n + 1 \geq (n+1)^2
\end{aligned}
$$

Teil 2:
Für $n = 0$

$$2^0 = 0^2 \qquad => \qquad 0 = 0$$

Also die Aussage ist wahr für $n = 0$.
Für $n = 1$

$$2^1 = 1^2 \qquad => \qquad 2 = 2$$

Also die Aussage ist wahr für $n = 1$.
Für $n = 2$

$$2^2 = 2^2 \qquad => \qquad 4 = 4$$

Also die Aussage ist wahr für $n = 2$.
Für $n = 3$

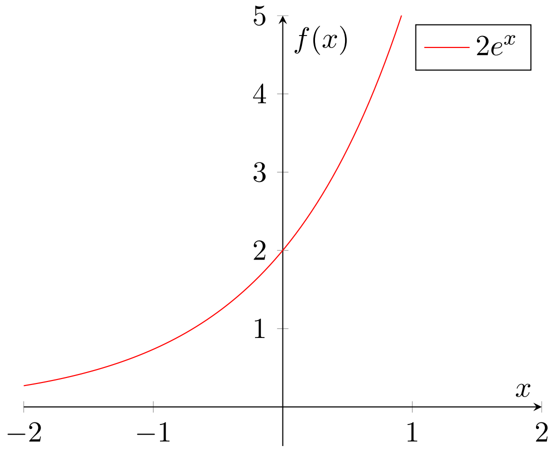
$$2^3 = 3^2 \qquad => \qquad 8 \neq 9$$

Also die Aussage ist falsch für $n = 3$.

Für $[0, 2]$ ist $2^n \geq n^2$, aber für $[2, 4]$ ist $2^n \leq n^2$
Also die Aussage gilt für $n = 0, 1, 2$, aber nicht für $n = 3$

Aufgabe 2:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2e^x$



Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$=> 2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$=> e^{x_1} = e^{x_2}$$

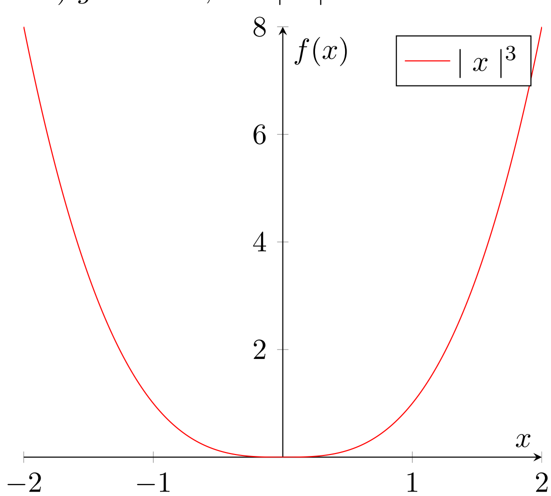
$$=> x_1 = x_2$$

$$=> \text{Damit } f \text{ ist } \underline{\text{injektiv}}.$$

Angenommen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass $f(x) = -1$. Dann wäre aber $-1 = f(x) = 2e^x > 0$, was einen Wiederspruch darstellt. Daher ist -1 nicht im Bild von f und f ist <u>nicht surjektiv</u>.

Da f injektiv, aber nicht surjektiv ist, kann sie <u>nicht bijektiv</u> sein.

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mid x \mid^3$



Die Fuktion ist nicht injektiv, da $g(-1) = 1 = g(1)$, aber $1 \neq -1$.
Angenomen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass $f(x) = -2$. Dann wäre aber $-2 = f(x) = \mid x \mid^3 \geq 0$, was einen Wiederspruch darstellt. Daher ist -2 nicht im Bild von g und g ist nicht surjektiv.
Da g weder injektiv noch surjektiv ist, ist sie nicht bijektiv.

Aufgabe 3:

a) $f_1(x) = x^2 - 4$ ist ein Polynom 2. Grades und im ganzen $\mathbb{R}$ definiert. Also:

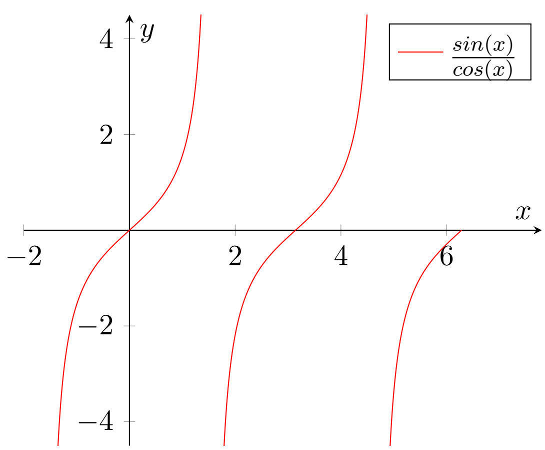
$$D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$f_2(x) = \frac{1}{x^3}$ ist nur dann definiert, wenn $x^3 \neq 0$, also $x \neq 0$:
Daher ist:

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f_3(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = tan(x)$ ist π-periodisch, d.h. $tan(\phi + k\pi) = tan(\phi)$ für alle $\phi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Somit ist:

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$



b) $f_1 \circ f_2 : D_{f_1 \circ f_2} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_1(f_2(x))$
Sei $x \in D_{f_1 \circ f_2} \subseteq D_{f_2}$. Dann gilt:

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 4 = \frac{1}{x^6} - 4$$

Also:

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f_2 \circ f_1 : D_{f_1 \circ f_2} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_2(f_1(x))$
Sei $x \in D_{f_2 \circ f_1} \subseteq D_{f_1}$, dann gilt:

$$f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{(x^2-4)^3}$$

$$=> (x^2-4)^3 \neq 0$$

$$x \neq \pm 2$$

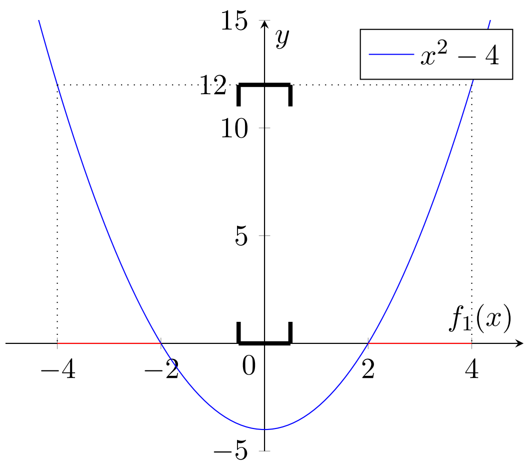
Also:

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

c)

$$f_1(x) = x^2 - 4$$

Urbild ${f_1}^{-1}([0, 12]) =?$



Für $y = 0$:

$$0 = x^2 - 4$$

$$<=> x^2 = 4$$

$$<=> x = \pm 2$$

Für $y = 12$:

$$12 = x^2 - 4$$

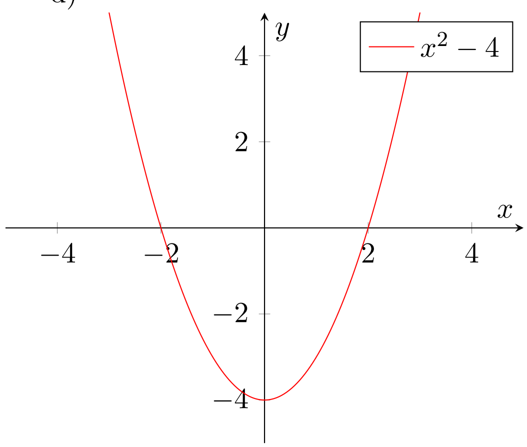
$$<=> x^2 = 16$$

$$<=> x = \pm 4$$

Das heißt, um das Urbild zu bestimmen, wir brauchen alle $x \in [-4, -2]$ und alle $x \in [2, 4]$
Also:

$$f_1{}^{-1}([0, 12]) = [-4, -2] \ \cup \ [2, 4]$$

d)



$f(x) = x^2 - 4$ ist ein positiver Polynom 2. Grades, also es ist nach unten beschränkt.

e)

$f_1(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine gerage Funktion.
$f_2(x) \neq f_2(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine ungerade Fuktion.

Aufgabe 4:

a)

$$y = \frac{2x+3}{x+1} => y(x+1) = 2x+3 =>$$

$$yx - 2x = 3 - y => x(y-2) = 3y =>$$

$$x = \frac{3y}{y-2} =>$$

$$f^-1(x) = \frac{3x}{x-2}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b)

$$\frac{2\left(\frac{3x}{x-2}\right)+3}{\left(\frac{3x}{x-2}\right)+1} = \frac{\left(\frac{6x}{x-2}\right)+\left(\frac{3(x-2)}{x-2}\right)}{\left(\frac{3x}{x-2}\right)+\left(\frac{x-2}{x-2}\right)} =$$

$$= \frac{9x-6}{4x-2} = \frac{3(3x-2)}{2(2x-1)}$$

c)

$f(x)$ ist ein ungerader, negativer Exponent, also es ist immer moton fallend

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x+3}{x+1}\right] = \frac{(x+1)(2)-(2x+3)(1)}{(x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=> f'(x) < 0 \text{ für alle } \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$$

$$=> f_1(x) \text{ ist monoton fallend für } [-1, \infty]$$

Aufgabe 5:

a)

$$e^{x^2-9} - 1 = 0$$

$$=> e^{x^2-9} = 1$$

$$=> ln(1) = x^2 - 9$$

$$=> x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \{-3, 3\}$$

b)

$$ln\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}\right)$$

Es müss: $\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6} > 0$

Mit Anwendung der p-q Formel findet man die Nullstellen der beiden Polynome:

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$=> x_{1,2} = -\left(\frac{-4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1}$$

$$=> x_1 = 2+1 = 3 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 2-1 = 1$$

$$x_{3,4} = \left(-\frac{-5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \qquad \text{und} \qquad x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

Wir können zunächst vereinfachen:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} > 0$$

$$<=> \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-2)} > 0$$

Für $x \neq 3$ darf man beide Terme abkürzen

$$<=> \frac{x-1}{x-2} > 0$$

Es müss: $x - 2 \neq 0$, d.h $x \neq 2$
Die Ungleichung gilt nur dann, wenn beide Terme entweder positiv oder negativ sind
1.Fall $x > 1$ und $x > 2$ d.h $x > 2$:

$$L_1 =]2, \infty[$$

2.Fall $x < 1$ und $x < 2$, d.h $x < 1$:

$$L_2 =] - \infty, 1[$$

Daraus folgt:

$$L = L_1 \cup L_2 =] - \infty, 1[\ \cup \ ]2, \infty[$$

Somit $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{[1, 2]\}$