Haitham Abdel Razaq Moh'd Almatani 407920
Themistoklis Dimaridis 355835
Kirill Beskorovainyi 451420

Aufgabe 1:

a) i)

$$z^3 = -8i$$

Wir bringen erstmal die Zahl $-8i = 0 + (-8i)$ in Eulerdarstellung, der Form $z = re^{i\phi}$.

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{8^2} = 8$
- $\phi = arg(z) = arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$

In unserem Fall der Winkel $\phi = -\frac{\pi}{2}$, da $x = 0$ und $y < 0$.

Also gilt:

$$-8i = re^{i\phi}$$
$$-8i = 8e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

Das heißt also:

$$z^3 = -8i$$
$$<=> z^3 = 8e^{-\frac{\pi}{2}i}$$
$$=> r^3 = 8 \qquad 3\phi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$r = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad \phi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Für $k = 0, 1, 2$ bekommen wir unsere 3 verschiedenen Lösungen wie folgendes:

$k = 0$: $\phi_0 = -\frac{\pi}{6}$ und somit $z_0 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$
$k = 1$: $\phi_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ und somit $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$
$k = 2$: $\phi_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\times 2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ und somit $z_2 = 2e^{\frac{7\pi}{6}}i$

Allgemeine Polardarstellung:

$$z = r(cos(\phi) + isin(\phi))$$

Somit sehen unsere Lösungen wie folgt aus:

$z_0 = 2(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right))$

$z_1 = 2(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right))$

$z_2 = 2(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right))$

a) ii)

$$z^4 + 2(\sqrt{12} - 2i)z^2 + 8 - 4\sqrt{12}i = 0$$
$$z^4 + 2 \times z^2(\sqrt{12} - 2i) + (\sqrt{12} - 2i)^2 = 0$$

Laut der binomischen Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ können wir die Gleichung umformen:

$$(z^2 + \sqrt{12} - 2i)^2 = 0$$
$$<=> z^2 + \sqrt{12} - 2i = 0$$
$$<=> z^2 = -\sqrt{12} + 2i$$

$-\sqrt{12} + 2i$ bringen wir zunächst in Eulerdarstellung.
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-12)^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$
$\phi = arg(z) = arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) + \pi$, da $x < 0$.

Also $arctan\left(\frac{2}{-\sqrt{12}}\right) + \pi = arctan\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) + \pi = arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$
Also gilt:

$$-\sqrt{12} + 2i = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

z^2 in Eulerdarstellung: $z^2 = (re^{i\phi})^2 = r^2e^{i2\phi}$
Also gilt:

$$z^2 = -\sqrt{12} + 2i$$
$$<=> r^2e^{i2\phi} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$
$$=> r^2 = 4 \qquad \text{und} \qquad 2\phi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$r = 2 \qquad\qquad \phi = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Also für $k = 0, 1$ bekommen wir unsere 2 verschiedene Lösungen wie folgendes:

$k = 0$: $\phi_0 = \frac{5\pi}{12}$ und somit $z_0 = 2e^{\frac{5\pi}{12}i}$

$k = 1$: $\phi_1 = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$ und somit $z_1 = 2e^{\frac{17\pi}{12}i}$

Allgemeine Polardarstellung:

$$z = r(cos(\phi) + isin(\phi))$$

Somit sehen unsere Lösungen wie folgt aus:
$z_0 = 2(cos(\frac{5\pi}{12} + isin(\frac{5\pi}{12}))$
$z_1 = 2(cos(\frac{17\pi}{12} + isin(\frac{17\pi}{12}))$
b)

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

z_1 in allgemeine Eulerdarstellung:

$$z_1 = re^{i\phi}$$

Also gilt: $re^{i\phi} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$$=> r = \sqrt{2} \qquad \phi = -\frac{\pi}{4}$$

Also ist z_1 in Polardarstellung:

$$z_1 = r(cos(\phi) + isin(\phi))$$

$$z_1 = \sqrt{2}(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_1 = 1 - i$$

Also $z_1 = 1 - i$ in kartesische Darstellung.
c)
Sei $z = e^{\frac{5\pi}{12}i}$ in Eulerdarstellung.
Allgemein gilt: $z = re^{i\phi}$
Also ist $re^{i\phi} = e^{\frac{5\pi}{12}i}$
$=> r = 1$ und $\phi = \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$
Für die Polardarstellung gilt:

$$z = r(cos(\phi) + isin(\phi))$$

$$1 \times (cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{12}\right))$$

$$z = \left(cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Allgemein gilt für die Additionstheoreme:

$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$

$sin(x+y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y)$

Mithilfe also der Additionstheoreme haben wir:

$$z = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\left(sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$z = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \text{ in kartesische Darstellung}$$

Aufgabe 2:

$$p(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4$$

a)

$$\begin{aligned} p(2i) &= (2i)^4 + (2i)^3 + 3(2i)^2 + 4(2i) - 4 \\ &= 2^4 \cdot i^4 + 2^3 \cdot i^3 + 3 \cdot 4i^2 + 8i - 4 \\ &= 16(1) + 8(-i) + 12(-1) + 8i - 4 \\ &= 16 - 12 - 4 + 8i - 8i \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$q(z) = z^2 + 4$$

$$\begin{array}{l} (\quad z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4) \div (z^2+4) = z^2 + z - 1 \\ \underline{-z^4 \qquad - 4z^2} \\ \qquad z^3 \quad - z^2 + 4z \\ \qquad \underline{-z^3 \qquad\quad - 4z} \\ \qquad\qquad - z^2 \qquad - 4 \\ \qquad\qquad \underline{\ \ z^2 \qquad + 4} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

c)

Bestimmung der Nullstellen von $z^2 + z - 1$ und $x^2 + 4$:

$$z^2 + 4 = 0 \qquad\qquad z^2 + z - 1 = 0$$

$$<=> z^2 = -4 \qquad\qquad z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$<=> z^2 = 4i^2 \qquad\qquad = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$<=> z = \pm\sqrt{4i^2} \qquad\qquad = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$<=> z = \pm 2i \qquad\qquad = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Also die komplexe Linearfaktorzerlegung von $p(z)$:

$$p(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4 = (z-2i)(z+2i)(z-\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right))(z-\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right))$$

d)

Die reelle Zerlegung von $p(z)$:

$$p(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4 = (z^2 + 4)(z-\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right))(z-\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right))$$

Aufgabe 3:

a)

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 4x + 13}$$

Wir müssen erstmal die Nullstellen des Nenners, $x^2 - 4x + 13$, bestimmen.

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

$$\text{p-q Formel: } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2^2 - 13}$$

$$= 2 \pm \sqrt{-9}$$

$$= 2 \pm \sqrt{9i^2}$$

$$= 2 \pm 3i$$

Also $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-4x+13} = \frac{3x-1}{(x-(2+3i))(x-(2-3i))}$
Also der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung von $f(x)$ lautet:

$$\frac{3x-1}{x^2-4x+13} = \frac{A}{x-(2+3i)} + \frac{B}{x-(2-3i)}$$

b)

$$f(x) = \frac{2+i}{x-(3+2i)} + \frac{2-i}{x-(3-2i)}$$
$$= \frac{(2+i)(x-(3-2i)) + (2-i)(x-(3+2i))}{(x-(3+2i))(x-(3-2i))}$$
$$= \frac{(2+i)(x-3+2i) + (2-i)(x-3-2i)}{(x-3-2i)(x-3+2i)}$$
$$= \frac{2x-6+4i+xi-3i-2+2x-6-4i-xi+3i-2}{x^2-3x+2xi-3x+9-6i-2xi+6i+4}$$
$$= \frac{4x-16}{x^2-6x+13}$$

Aufgabe 4:

a)

$$\frac{11x+18}{x^2+x-6} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$1 = deg(p) < deg(q) = 2$, also keine Polynomdivision nötig.
Bestimme die Nullstellen des Nenners mit p-q Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Also:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$
$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$$

Also gilt:

$$\frac{11x+18}{x^2+x-6} = \frac{11x+18}{(x-2)(x+3)}$$
$$\frac{11x+18}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \qquad \Big| \times (x-2)(x+3)$$
$$<=> 11x+18 = \frac{A(x-2)(x+3)}{(x-2)} + \frac{B(x-2)(x+3)}{(x+3)}$$
$$<=> 11x+18 = Ax+3A+Bx-2B$$
$$<=> 11x+18 = (A+B)x+3A-2B$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$x^1: \qquad 11 = A + B => A = 11 - B \quad 1$$
$$x^0: \qquad 18 = 3A - 2B \quad 2$$

1 in 2:

$$18 = 3(11-B) - 2B$$
$$<=> 18 = 33 - 3B - 2B$$
$$<=> 33 - 18 = 5B$$
$$<=> B = \frac{33-18}{5}$$
$$<=> B = \frac{15}{5} => B = 3$$

$B = 3$ in 1:

$$A = 11 - 3$$
$$A = 8$$

In unserem Fall, da unsere Nullstellen reelle Zahlen sind, stimmen die reele und komplexe Partialbruchzerlegung überein und somit ist:

$$\frac{11x+18}{x^2+x-6} = \frac{8}{x-2} + \frac{3}{x+3}$$

b)

$$\frac{x^3-4x^2-2x+17}{x^2-6x+9}$$

Sei $p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 17$
und $q(x) = x^2 - 6x + 9$
Da $3 = deg(p) > deg(q) = 2$ ist hier eine Polynomdivision notwendig.

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 4x^2 \quad - 2x + 17\big) \div \big(x^2 - 6x + 9\big) = x + 2 + \dfrac{x-1}{x^2-6x+9} \\
\underline{-\,x^3 + 6x^2 \quad - 9x} \\
\qquad\qquad 2x^2 - 11x + 17 \\
\qquad\quad \underline{-\,2x^2 + 12x - 18} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x \quad - 1
\end{array}$$

Also:

$$\frac{x^3-4x^2-2x+17}{x^2-6x+9} = \frac{(x+2)(x^2-6x+9)+x-1}{x^2-6x+9} = x+2+\frac{x-1}{x^2-6x+9}$$

Das heißt also, wir müssen nun die Partialbruchzerlegung für $\frac{x-1}{x^2-6x+9}$ bestimmen. $\frac{x-1}{x^2-6x+9} = \frac{x-1}{(x-3)^2}$ Das heißt also, wir haben die Polstelle 3 mit Vielfachheit 2.
Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-1}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} \quad \Big| \times (x-3)^2$$

$$=> x - 1 = A(x-3) + B$$

$$x - 1 = Ax + B - 3A$$

Durch Koeffizientenvergleich:
x^1: $1 = A$ (1)
x^0: $-1 = B - 3A$ (2)
(1) in (2): $-1 = B - 3(1) => B = 2$
In unserem Fall stimmen wieder reelle und komplexe Partialbruchzerlegung überein mit:

$$\frac{x^3-4x^2-2x+17}{x^2-6x+9} = x+2+\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-3)^2}$$

c)

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^3+2x} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Keine Polynomdivision nötig, da $2 = deg(p) < deg(q) = 3$.

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x^2 + 2)}$$

Bestimmung der Nullstellen des Nenners $x^2 + 2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= 0 \\ x^2 &= -2 \\ x^2 &= 2i^2 \\ x &= \pm\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x^2 + 2)} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)}$$

Der Anzatz für die komplexe Partialbruchzerlegung ist:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - \sqrt{2}i} + \frac{C}{x + \sqrt{2}i}$$

Bestimmung der Koeffizienten A, B, C mithilfe der Zuhaltemethode:

$$A = \frac{2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1}{(0 - \sqrt{2}i)(0 + \sqrt{2}i)} = \frac{-1}{-\sqrt{2}^2 i^2} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}i)^2 - 2\sqrt{2}i - 1}{\sqrt{2}i \cdot 2 \cdot \sqrt{2}i} = \frac{-4 - 2\sqrt{2}i - 1}{2 \cdot 2 \cdot i^2} = \frac{-5 - 2\sqrt{2}i}{-4}$$

$$=> B = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$$

$$C = \frac{2(-\sqrt{2}i)^2 - 2(-\sqrt{2}i) - 1}{(-\sqrt{2}i)(-2\sqrt{2}i)} = \frac{2(-2) + 2\sqrt{2}i - 1}{2\sqrt{2}^2 i^2} = \frac{-5 + 2\sqrt{2}i}{-2 \cdot 2} = \frac{-(5 - 2\sqrt{2}i)}{-4}$$

$$=> C = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$$

Damit ist die komplexe Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}i}{x - \sqrt{2}i} + \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i}{x + 2\sqrt{2}i}$$

Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^3+2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \quad \Big| \times x(x^2+2)$$
$$=> 2x^2-2x-1 = A(x^2+2) + (Bx+C) \times x$$
$$<=> 2x^2-2x-1 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx$$
$$<=> 2x^2-2x-1 = (A+B)x^2 + Cx + 2A$$

Koeffizientenvergleich:

x^2: $2 = A + B$ (1)

x^1: $-2 = C$ (2)

x^0: $-1 = 2A => A = -\frac{1}{2}$ (3)

(3) in (1) einsetzen:

$$2 = A + B$$
$$B = 2 - A$$
$$B = 2 - (-\frac{1}{2}) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Somit ist die reelle Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^3+2x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{2}x-2}{x^2+2}$$