

Haitham Abdel Razaq Moh'd Almatani 407920

Themistoklis Dimaridis 355835

Kirill Beskorovainyi 451420

Aufgabe 1:

a) i)

$$z^3 = -8i$$

Wir bringen erstmal die Zahl $-8i = 0 + (-8i)$ in Eulerdarstellung, der Form $z = re^{i\phi}$.

- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{8^2} = 8$

- $\phi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$

In unserem Fall der Winkel $\phi = -\frac{\pi}{2}$, da $x = 0$ und $y < 0$.

Also gilt:

$$\begin{aligned} -8i &= re^{i\phi} \\ -8i &= 8e^{-\frac{\pi}{2}i} \end{aligned}$$

Das heißt also:

$$\begin{aligned} z^3 &= -8i \\ \Leftrightarrow z^3 &= 8e^{-\frac{\pi}{2}i} \\ \Rightarrow r^3 &= 8 & 3\phi &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ r &= \sqrt[3]{8} = 2 & \phi &= -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Für $k = 0, 1, 2$ bekommen wir unsere 3 verschiedenen Lösungen wie folgendes:

$$k = 0 \quad : \quad \phi_0 = -\frac{\pi}{6} \text{ und somit } z_0 = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

$$k = 1 \quad : \quad \phi_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ und somit } z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$k = 2 \quad : \quad \phi_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2 \times 2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \text{ und somit } z_2 = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

Allgemeine Polardarstellung:

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

Somit sehen unsere Lösungen wie folgt aus:

$$z_0 = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$$

$$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$$

$$z_2 = 2(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6}))$$

a) ii)

$$z^4 + 2(\sqrt{12} - 2i)z^2 + 8 - 4\sqrt{12}i = 0$$

$$z^4 + 2 \times z^2(\sqrt{12} - 2i) + (\sqrt{12} - 2i)^2 = 0$$

Laut der binomischen Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ können wir die Gleichung umformen:

$$(z^2 + \sqrt{12} - 2i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \sqrt{12} - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -\sqrt{12} + 2i$$

$-\sqrt{12} + 2i$ bringen wir zunächst in Eulerdarstellung.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-12)^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\phi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi, \text{ da } x < 0.$$

$$\text{Also } \arctan\left(\frac{2}{-\sqrt{12}}\right) + \pi = \arctan\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

Also gilt:

$$-\sqrt{12} + 2i = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z^2 \text{ in Eulerdarstellung: } z^2 = (re^{i\phi})^2 = r^2e^{i2\phi}$$

Also gilt:

$$z^2 = -\sqrt{12} + 2i$$

$$\Leftrightarrow r^2e^{i2\phi} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow r^2 = 4 \quad \text{und} \quad 2\phi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$r = 2 \quad \phi = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Also für $k = 0, 1$ bekommen wir unsere 2 verschiedenen Lösungen wie folgendes:

$$k = 0: \quad \phi_0 = \frac{5\pi}{12} \text{ und somit } z_0 = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$k = 1: \quad \phi_1 = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12} \text{ und somit } z_1 = 2e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

Allgemeine Polardarstellung:

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

Somit sehen unsere Lösungen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})) \\ z_1 &= 2(\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\sin(\frac{17\pi}{12})) \\ \text{b)} \end{aligned}$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

z_1 in allgemeine Eulerdarstellung:

$$z_1 = re^{i\phi}$$

Also gilt: $re^{i\phi} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2} \quad \phi = -\frac{\pi}{4}$$

Also ist z_1 in Polardarstellung:

$$\begin{aligned} z_1 &= r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \\ z_1 &= \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) \\ z_1 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_1 &= 1 - i \end{aligned}$$

Also $z_1 = 1 - i$ in kartesische Darstellung.

c)

Sei $z = e^{\frac{5\pi}{12}i}$ in Eulerdarstellung.

Allgemein gilt: $z = re^{i\phi}$

Also ist $re^{i\phi} = e^{\frac{5\pi}{12}i}$

$\Rightarrow r = 1$ und $\phi = \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

Für die Polardarstellung gilt:

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \\ &= 1 \times (\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})) \\ z &= (\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})) \end{aligned}$$

Allgemein gilt für die Additionstheoreme:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Mithilfe also der Additionstheoreme haben wir:

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \right) + i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$z = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + i \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + i \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) \text{ in kartesische Darstellung}$$

Aufgabe 2:

$$p(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4$$

a)

$$\begin{aligned} p(2i) &= (2i)^4 + (2i)^3 + 3(2i)^2 + 4(2i) - 4 \\ &= 2^4 \cdot i^4 + 2^3 \cdot i^3 + 3 \cdot 4i^2 + 8i - 4 \\ &= 16(1) + 8(-i) + 12(-1) + 8i - 4 \\ &= 16 - 12 - 4 + 8i - 8i \\ &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} q(z) &= z^2 + 4 \\ (z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4) &\div (z^2 + 4) = z^2 + z - 1 \\ \begin{array}{r} z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4 \\ - z^4 - 4z^2 \\ \hline z^3 - z^2 + 4z \\ - z^3 - 4z \\ \hline - z^2 - 4 \\ z^2 + 4 \\ \hline 0 \end{array} \end{aligned}$$

c)

Bestimmung der Nullstellen von $z^2 + z - 1$ und $x^2 + 4$:

$$\begin{array}{ll}
 z^2 + 4 = 0 & z^2 + z - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow z^2 = -4 & z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
 \Leftrightarrow z^2 = 4i^2 & = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} \\
 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{4i^2} & = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \\
 \Leftrightarrow z = \pm 2i & = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}
 \end{array}$$

Also die komplexe Linearfaktorzerlegung von $p(z)$:

$$p(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4 = (z - 2i)(z + 2i)\left(z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

d)

Die reelle Zerlegung von $p(z)$:

$$p(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z - 4 = (z^2 + 4)\left(z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

Aufgabe 3:

a)

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 4x + 13}$$

Wir müssen erstmal die Nullstellen des Nenners, $x^2 - 4x + 13$, bestimmen.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 13 &= 0 \\
 \text{p-q Formel: } x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
 &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 13} \\
 &= 2 \pm \sqrt{-9} \\
 &= 2 \pm \sqrt{9i^2}
 \end{aligned}$$

$$= 2 \pm 3i$$

Also $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-4x+13} = \frac{3x-1}{(x-(2+3i))(x-(2-3i))}$

Also der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung von $f(x)$ lautet:

$$\frac{3x-1}{x^2-4x+13} = \frac{A}{x-(2+3i)} + \frac{B}{x-(2-3i)}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2+i}{x-(3+2i)} + \frac{2-i}{x-(3-2i)} \\ &= \frac{(2+i)(x-(3-2i)) + (2-i)(x-(3+2i))}{(x-(3+2i))(x-(3-2i))} \\ &= \frac{(2+i)(x-3+2i) + (2-i)(x-3-2i)}{(x-3-2i)(x-3+2i)} \\ &= \frac{2x-6+4i+xi-3i-2+2x-6-4i-xi+3i-2}{x^2-3x+2xi-3x+9-6i-2xi+6i+4} \\ &= \frac{4x-16}{x^2-6x+13} \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

a)

$$\frac{11x+18}{x^2+x-6} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$1 = \deg(p) < \deg(q) = 2$, also keine Polynomdivision nötig.

Bestimme die Nullstellen des Nenners mit p-q Formel:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Also:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$$

Also gilt:

$$\frac{11x+18}{x^2+x-6} = \frac{11x+18}{(x-2)(x+3)}$$

$$\frac{11x+18}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \quad | \times (x-2)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 11x+18 = \frac{A(x-2)(x+3)}{(x-2)} + \frac{B(x-2)(x+3)}{(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow 11x+18 = Ax+3A+Bx-2B$$

$$\Leftrightarrow 11x+18 = (A+B)x+3A-2B$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$x^1 : \quad 11 = A+B \Rightarrow A = 11-B \quad \textcircled{1}$$

$$x^0 : \quad 18 = 3A-2B \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ in } \textcircled{2}: \quad 18 = 3(11-B)-2B$$

$$\Leftrightarrow 18 = 33-3B-2B$$

$$\Leftrightarrow 33-18 = 5B$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{33-18}{5}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{15}{5} \Rightarrow B = 3$$

$$B = 3 \text{ in } \textcircled{1}: \quad$$

$$A = 11-3$$

$$A = 8$$

In unserem Fall, da unsere Nullstellen reelle Zahlen sind, stimmen die reelle und komplexe Partialbruchzerlegung überein und somit ist:

$$\frac{11x+18}{x^2+x-6} = \frac{8}{x-2} + \frac{3}{x+3}$$

b)

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 17}{x^2 - 6x + 9}$$

Sei $p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 17$

und $q(x) = x^2 - 6x + 9$

Da $3 = \deg(p) > \deg(q) = 2$ ist hier eine Polynomdivision notwendig.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 - 2x + 17) \div (x^2 - 6x + 9) = x + 2 + \frac{x-1}{x^2-6x+9} \\ -x^3 + 6x^2 - 9x \\ \hline 2x^2 - 11x + 17 \\ -2x^2 + 12x - 18 \\ \hline x - 1 \end{array}$$

Also:

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 17}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(x+2)(x^2 - 6x + 9) + x - 1}{x^2 - 6x + 9} = x + 2 + \frac{x-1}{x^2 - 6x + 9}$$

Das heißt also, wir müssen nun die Partialbruchzerlegung für $\frac{x-1}{x^2-6x+9}$ bestimmen. $\frac{x-1}{x^2-6x+9} = \frac{x-1}{(x-3)^2}$ Das heißt also, wir haben die Polstelle 3 mit Vielfachheit 2.

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{(x-3)^2} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} \quad | \times (x-3)^2 \\ \Rightarrow x-1 &= A(x-3) + B \\ x-1 &= Ax + B - 3A \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich:

$$x^1: 1 = A \quad \textcircled{1}$$

$$x^0: -1 = B - 3A \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ in } \textcircled{2}: -1 = B - 3(1) \Rightarrow B = 2$$

In unserem Fall stimmen wieder reelle und komplexe Partialbruchzerlegung überein mit:

$$\frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 17}{x^2 - 6x + 9} = x + 2 + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}$$

c)

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Keine Polynomdivision nötig, da $2 = \deg(p) < \deg(q) = 3$.

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x^2 + 2)}$$

Bestimmung der Nullstellen des Nenners $x^2 + 2$:

$$x^2 + 2 = 0$$

$$x^2 = -2$$

$$x^2 = 2i^2$$

$$x = \pm\sqrt{2}i$$

Also gilt:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x^2 + 2)} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)}$$

Der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung ist:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - \sqrt{2}i} + \frac{C}{x + \sqrt{2}i}$$

Bestimmung der Koeffizienten A, B, C mithilfe der Zuhalttemethode:

$$A = \frac{2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1}{(0 - \sqrt{2}i)(0 + \sqrt{2}i)} = \frac{-1}{-\sqrt{2}^2 i^2} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}i)^2 - 2\sqrt{2}i - 1}{\sqrt{2}i \cdot 2 \cdot \sqrt{2}i} = \frac{-4 - 2\sqrt{2}i - 1}{2 \cdot 2 \cdot i^2} = \frac{-5 - 2\sqrt{2}i}{-4}$$

$$\Rightarrow B = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i$$

$$C = \frac{2(-\sqrt{2}i)^2 - 2(-\sqrt{2}i) - 1}{(-\sqrt{2}i)(-2\sqrt{2}i)} = \frac{2(-2) + 2\sqrt{2}i - 1}{2\sqrt{2}^2 i^2} = \frac{-5 + 2\sqrt{2}i}{-2 \cdot 2} = \frac{-(5 - 2\sqrt{2}i)}{-4}$$

$$\Rightarrow C = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i$$

Damit ist die komplexe Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}i}{x - \sqrt{2}i} + \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i}{x + \sqrt{2}i}$$

Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung lautet:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} \quad | \times x(x^2 + 2) \\ \Rightarrow 2x^2 - 2x - 1 &= A(x^2 + 2) + (Bx + C) \times x \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 &= Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 &= (A + B)x^2 + Cx + 2A\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$x^2: 2 = A + B \quad (1)$$

$$x^1: -2 = C \quad (2)$$

$$x^0: -1 = 2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

(3) in (1) einsetzen:

$$2 = A + B$$

$$B = 2 - A$$

$$B = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Somit ist die reelle Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^3 + 2x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{2}x - 2}{x^2 + 2}$$