Haitham Abdel Razaq Moh'd Almatani 407920

Themistoklis Dimaridis 355835

Kirill Beskorovainyi 451420

Aufgabe 1:

a)

$$T_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 = x_2 \right\} \qquad T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^3 = 1 \right\}$$

Wir verwenden das Teilraum kriterium. T_1, T_2 sind Teilräume des $\mathbb{R}^2$, falls diese den Nullvektor enthalten und abgeschlossen bezüglich Addition und skalarer Multiplikation sind.

<u>Über T_1 gilt:</u>

- $\vec{0} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \in T_1$, da $2 \cdot 0 = 0$
- Für $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right] \in T_1$ ist $x_2 = 2x_1$ und $y_2 = 2y_1$

Dann gilt: $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{smallmatrix}\right]$ mit

$$x_2 + y_2 = 2x_1 + 2y_1 = 2(x_1 + y_1)$$

Also ist $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right] \in T_1$ und damit ist T_1 abgeschlossen bezüglich der Addition.

- Sei $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] \in T_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt per Definition:

$$x_2 = 2x_1$$

Also ist für $\alpha\left[\begin{smallmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{smallmatrix}\right]$, dass $\alpha x_2 = \alpha(2x_1) = 2(\alpha x_1)$

Damit ist $\alpha\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] \in T_1$ und T_1 ist auch abgeschlossen bezüglich skalarer Multiplikation.

Damit ist T_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

<u>Über T_2 gilt:</u>

- $\vec{0} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \notin T_1$, da $0^3 + 0^3 = 0 \neq 1$

=> Somit ist der Nullvektor nicht in T_2 enthalten und damit ist T_2 kein Teilraum des $\mathbb{R}^2$.

b)

$$V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

$$T = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$$

Wir verwenden wieder das im Aufgabenteil a) erwähnte Teilraumkriterium.

- $\vec{0} \in T$, da $f(1)$ ist auf 0 abgebildet
- Seinen $f(1)$ und $g(1) \in T$ mit $f(1) = 0$ und $g(1) = 0$.

Dann gilt:

$$f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$$

Somit ist $f(1) + g(1) \in T$ und damit T ist abgeschlossen bezüglich der Addition.

- Seinen $f(1) \in T$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f(1) = 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha f(1) = \alpha \cdot 0 = 0, \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

Somit ist T abgeschlossen bezüglich skalarer Multiplikation und da slle Bedingungen erfüllt sind, ist T ein Teilraum von V.

Aufgabe 2:

a)

Die Vektoren sind nur dann linear unabhängig, wenn für alle $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \in \mathbb{R}$, die folgende Gleichung

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

die nür triviale Lösung: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ hat.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_3 \\ -\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=> \lambda_1 + \lambda_2 = 0 => \lambda_1 = -\lambda_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0 => \lambda_1 = -\lambda_3$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0 => \lambda_2 = \lambda_3$$

Da wir zum Beispiel keine eindeutige Auskunft für λ_1 haben hat das obige LGS nicht nur die Einzige triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Deswegen sind unsere Vektoren linear abhängig.

b)

Wir überprufen die Definition
Sei α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 p_1(z) + \alpha_2 p_2(z) + \alpha_3 p_3(z) + \alpha_4 p_4(z) = 0$$

$$=> \alpha_1 + \alpha_2 z + 2\alpha_3 z^3 - \alpha_3 + 4\alpha_4 z^3 - 3\alpha_4 z = 0$$

$$4\alpha_4 z^3 + 2\alpha_3 z^2 + (\alpha_2 - 3\alpha_4)z + (\alpha_1 - \alpha_3) = 0$$

Wir vergleichen die Koeffizienten:

$$4\alpha_4 = 0 \quad => \quad \alpha_4 = 0$$

$$2\alpha_3 = 0 \quad => \quad \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 - 3\alpha_4 = 0 \quad => \quad \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \quad => \quad \alpha_1 = 0$$

Somit ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ die einzige Lösung.
Damit sind $p_1(z)$, $p_2(z)$, $p_3(z)$, $p_4(z)$ linear unabhängig.

c)

Seien λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sodass:

$$0 = \lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x)$$

$$<=> 0 = \lambda_1 \cdot cos(x) + \lambda_2 \cdot cos(2x)$$

Für spezielle x können wir etwas über λ_1, λ_2 herausfinden.
<u>Für $x = \frac{\pi}{2}$:</u>

$$0 = \lambda_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 \cdot cos\left(2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$<=> 0 = \lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2$$

$$<=> \lambda_2 = 0$$

Für $x = \frac{\pi}{4}$:

$$0 = \lambda_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \lambda_2 \cdot cos\left(2\frac{\pi}{4}\right)$$

$$0 = \lambda_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda_2 \cdot 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

Also Gleichungen:

$$1 \quad \lambda_2 = 0$$

$$2 \quad \lambda_1 = 0$$

Also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ist die einzige Lösung des LGS und somit sind $cos(x)$ und $cos(2x)$ linear unabhängig.

Aufgabe 3:

a)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$<=> \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot 1 \\ \alpha \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$=> x = \alpha \cdot 1 => x = \alpha$$

$$=> y = \alpha \cdot 0 => y = x \cdot 0 => y \neq 0$$

Deswegen $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \right\}$ ist nicht ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

b)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 2\lambda_1 + \lambda_3 => x = 2x - x$$

$$<=> \lambda_1 = x \qquad \lambda_3 = -x$$

$$y = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4$$

$$=> y = x - x + \lambda_4 => \lambda_4 = y$$

$$= x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (y-x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (0-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4:

a)

Die Addition zweier Matrizen ist nur möglich wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten der beiden Matrizen übereinstimmen.

Das heißt also A+C ist m