

Kirill Beskorovainyi. Hausaufgabe 2:

Aufgabe 1:

a)

Induktionsanfang: Für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$1^2 = 1$$

$$1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gelte:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= \sum_{k=1}^n (2k - 1) + 2(n + 1) - 1 \\ &\stackrel{(\text{IV})}{=} (n^2) + 2n + 1 = (n + 1)^2 \end{aligned}$$

b)

Induktionsanfang: Für $n = 2$

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2 + 1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gelte:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \stackrel{(\text{IV})}{=} \left(\frac{n+1}{2n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} \end{aligned}$$

c)

Induktionsanfang: Für $n = 4$

$$2^4 = 16$$

$$4^2 = 16$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ gelte:

$$2^n \geq n^2$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

Induktionsschluss:

$$2^{n+1} = 2^1 \times 2^n = 2^n + 2^n$$

Aus Induktionsvoraussetzung: $2^n \geq n^2$, also $2 \times 2^n \geq 2 \times n^2$

$$2^n + 2^n \geq n^2 + n^2 \geq n^2 + n \times n$$

Für $n \geq 4 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &\geq n^2 + 4n \\ &\geq n^2 + 2n + 2n \\ &\geq n^2 + 2n + 2(4) \\ &\geq n^2 + 2n + 1 \geq (n+1)^2 \end{aligned}$$

Teil 2:

Für $n = 0$

$$2^0 = 0^2 \quad \Rightarrow \quad 1 > 0$$

Also die Aussage ist wahr für $n = 0$.

Für $n = 1$

$$2^1 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$$

Also die Aussage ist wahr für $n = 1$.

Für $n = 2$

$$2^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 4$$

Also die Aussage ist wahr für $n = 2$.

Für $n = 3$

$$2^3 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad 8 \neq 9$$

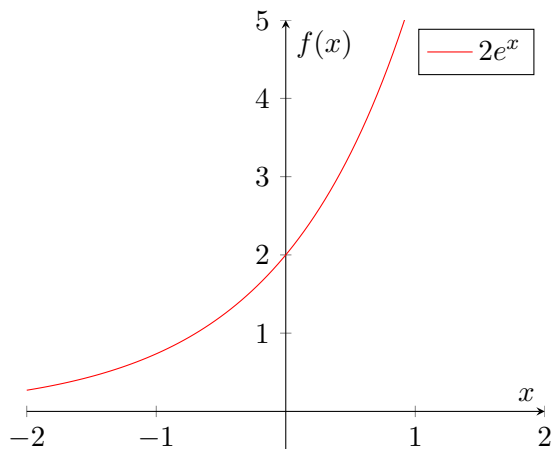
Also die Aussage ist falsch für $n = 3$.

Für $[0, 2]$ ist $2^n \geq n^2$, aber für $[2, 4]$ ist $2^n \leq n^2$

Also die Aussage gilt für $n = 0, 1, 2$, aber nicht für $n = 3$

Aufgabe 2:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2e^x$



Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow 2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$\Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2}$$

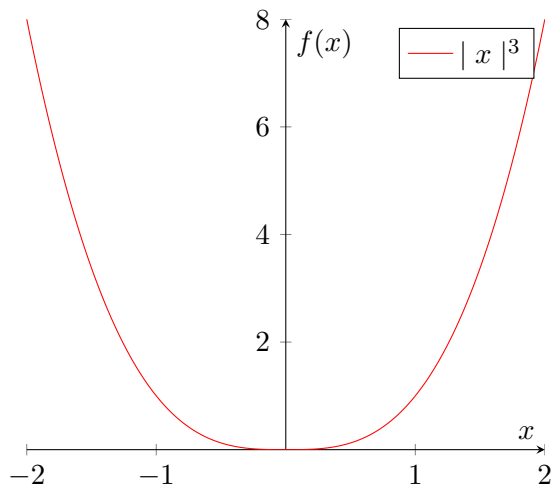
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

\Rightarrow Damit f ist injektiv.

Angenommen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass $f(x) = -1$. Dann wäre aber $-1 = f(x) = 2e^x > 0$, was einen Widerspruch darstellt. Daher ist -1 nicht im Bild von f und f ist nicht surjektiv.

Da f injektiv, aber nicht surjektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein.

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^3$



Die Funktion ist nicht injektiv, da $g(-1) = 1 = g(1)$, aber $1 \neq -1$.

Angenommen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass $f(x) = -2$. Dann wäre aber $-2 = f(x) = |x|^3 \geq 0$, was einen Widerspruch darstellt. Daher ist -2 nicht im Bild von g und g ist nicht surjektiv.

Da g weder injektiv noch surjektiv ist, ist sie nicht bijektiv.

Aufgabe 3:

a) $f_1(x) = x^2 - 4$ ist ein Polynom 2. Grades und im ganzen \mathbb{R} definiert.

Also:

$$D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$f_2(x) = \frac{1}{x^3}$ ist nur dann definiert, wenn $x^3 \neq 0$, also $x \neq 0$:

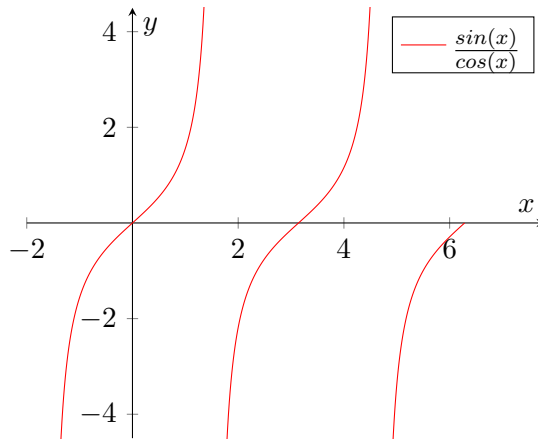
Daher ist:

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ ist π -periodisch, d.h. $\tan(\phi) = \tan(\phi + k\pi)$ für alle $\phi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Somit ist:

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$



b) $f_1 \circ f_2 : D_{f_1 \circ f_2} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_1(f_2(x))$

Sei $x \in D_{f_1 \circ f_2} \subseteq D_{f_2}$. Dann gilt:

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 4 = \frac{1}{x^6} - 4$$

Also:

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f_2 \circ f_1 : D_{f_1 \circ f_2} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_2(f_1(x))$$

Sei $x \in D_{f_2 \circ f_1} \subseteq D_{f_1}$, dann gilt:

$$f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{(x^2 - 4)^3}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)^3 \neq 0$$

$$x \neq \pm 2$$

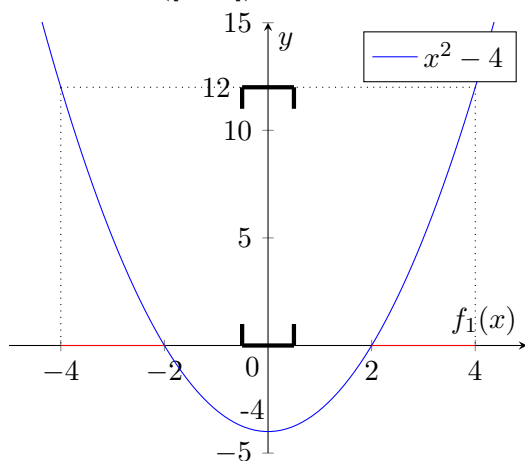
Also:

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

c)

$$f_1(x) = x^2 - 4$$

Urbild $f_1^{-1}([0, 12]) = ?$



Für $y = 0$:

$$0 = x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

Für $y = 12$:

$$12 = x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16$$

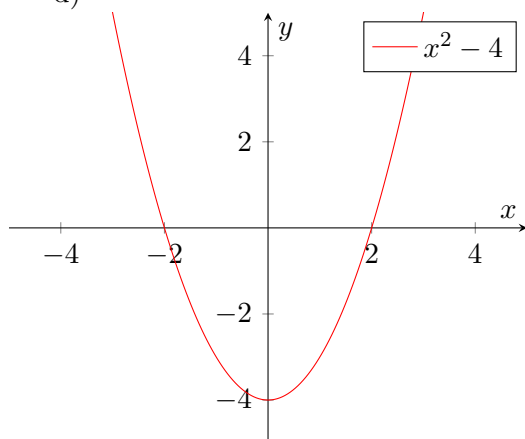
$$\Leftrightarrow x = \pm 4$$

Das heißt, um das Urbild zu bestimmen, wir brauchen alle $x \in [-4, -2]$ und alle $x \in [2, 4]$

Also:

$$f_1^{-1}([0, 12]) = [-4, -2] \cup [2, 4]$$

d)



$f(x) = x^2 - 4$ ist ein positiver Polynom 2. Grades, also es ist nach unten beschränkt.

e)

$$f_1(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f_1(x)$$

$f_1(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine gerade Funktion.

$$f_3(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = -f_3(x)$$

$f_2(x) \neq f_2(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine ungerade Funktion.

Aufgabe 4:

a) Um die Umkehrabbildung einer Funktion zu bestimmen, muss man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen.

$$y = f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1} \Leftrightarrow y(x + 1) = 2x + 3 \Rightarrow$$

$$yx - 2x = 3 - y \Leftrightarrow x(y - 2) = 3 - y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3 - y}{y - 2}$$

Somit ist die Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(x) = \frac{3 - x}{x - 2}$$

Damit sie Definiert ist muss $x \neq 2$ sein. Somit ist

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b)

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(y) &= f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y-3}{2-y}\right) = \\ &= \frac{2\left(\frac{y-3}{2-y}\right) + 3}{\frac{y-3}{2-y} + 1} = \frac{2\left(\frac{y-3}{2-y}\right) + 3\left(\frac{2-y}{2-y}\right)}{\frac{y-3}{2-y} + \frac{2-y}{2-y}} = \\ &= \frac{2y - 6 + 6 - 3y}{y - 3 + 2 - y} = \frac{-y}{-1} = y \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x &< y \\ x + 1 &< y + 1 \\ \frac{1}{x+1} &> \frac{1}{y+1} \end{aligned}$$

Damit ist $f(x) = (2x + 3)$. Da $x \in]-1, \infty[$ gilt $2x + 3 > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &> (2y + 3) \\ \frac{1}{y+1} &= f(y) \end{aligned}$$

Also die Funktion ist monoton fallend für $] -1, \infty[$
Aufgabe 5:

a)

$$\begin{aligned} e^{x^2-9} - 1 &= 0 \\ \Rightarrow e^{x^2-9} &= 1 \\ \Rightarrow \ln(1) &= x^2 - 9 \\ \Rightarrow x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \{-3, 3\} \end{aligned}$$

b)

$$\ln\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6}\right)$$

Es muss: $\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6} > 0$

Mit Anwendung der p-q Formel findet man die Nullstellen der beiden Polynome:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \Rightarrow x_{1,2} &= -\left(\frac{-4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1} \\ \Rightarrow x_1 &= 2 + 1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = 2 - 1 = 1 \\ x_{3,4} &= \left(-\frac{-5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ x_3 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \text{und} \quad x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Wir können zunächst vereinfachen:

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-2)} &> 0\end{aligned}$$

Für $x \neq 3$ darf man beide Terme abkürzen

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} > 0$$

Es muss: $x-2 \neq 0$, d.h. $x \neq 2$

Die Ungleichung gilt nur dann, wenn beide Terme entweder positiv oder negativ sind

1. Fall $x > 1$ und $x > 2$ d.h. $x > 2$:

$$L_1 =]2, \infty[$$

2. Fall $x < 1$ und $x < 2$, d.h. $x < 1$:

$$L_2 =]-\infty, 1[$$

Daraus folgt:

$$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, 1[\cup]2, \infty[$$

Somit $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{[1, 2]\}$