

# Kirill Beskorovainyi. Hausaufgabe 2:

## Aufgabe 1:

a)

Induktionsanfang: Für  $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$1^2 = 1$$

$$1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  gelte:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= \sum_{k=1}^n (2k - 1) + 2(n + 1) - 1 \\ &\stackrel{(\text{IV})}{=} (n^2) + 2n + 1 = (n + 1)^2 \end{aligned}$$

b)

Induktionsanfang: Für  $n = 2$

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2 + 1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  gelte:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \stackrel{(\text{IV})}{=} \left(\frac{n+1}{2n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} \end{aligned}$$

c)

Induktionsanfang: Für  $n = 4$

$$2^4 = 16$$

$$4^2 = 16$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$  gelte:

$$2^n \geq n^2$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

Induktionsschluss:

$$2^{n+1} = 2^1 \times 2^n = 2^n + 2^n$$

Aus Induktionsvoraussetzung:  $2^n \geq n^2$ , also  $2 \times 2^n \geq 2 \times n^2$

$$2^n + 2^n \geq n^2 + n^2 \geq n^2 + n \times n$$

Für  $n \geq 4 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &\geq n^2 + 4n \\ &\geq n^2 + 2n + 2n \end{aligned}$$

Für  $n \geq 4 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\geq n^2 + 2n + 2(4) \\ &\geq n^2 + 2n + 1 \geq (n+1)^2 \end{aligned}$$

Teil 2:

Für  $n = 0$

$$2^0 \geq 0^2 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq 0$$

Also die Aussage ist wahr für  $n = 0$ .

Für  $n = 1$

$$2^1 \geq 1^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \geq 2$$

Also die Aussage ist wahr für  $n = 1$ .

Für  $n = 2$

$$2^2 \geq 2^2 \quad \Rightarrow \quad 4 \geq 4$$

Also die Aussage ist wahr für  $n = 2$ .

Für  $n = 3$

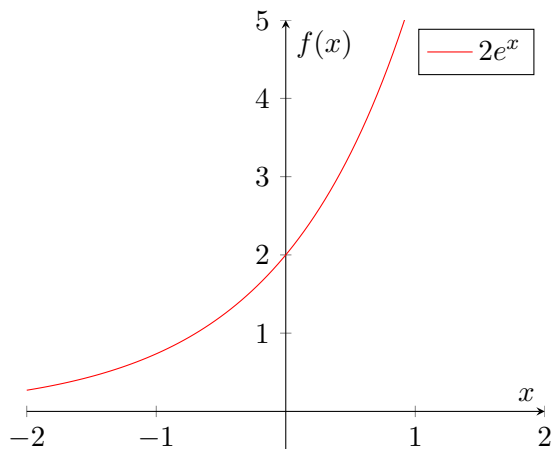
$$2^3 \geq 3^2 \quad \Rightarrow \quad 8 \not\geq 9$$

Also die Aussage ist falsch für  $n = 3$ .

Also die Aussage gilt für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$

Aufgabe 2:

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2e^x$



Seien  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  mit:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow 2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$\Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2}$$

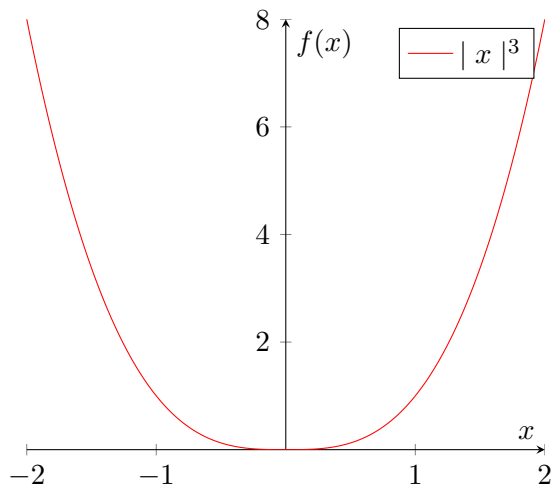
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow$  Damit  $f$  ist injektiv.

Angenommen, es existiert ein  $x \in D_f$ , sodass  $f(x) = -1$ . Dann wäre aber  $-1 = f(x) = 2e^x > 0$ , was einen Widerspruch darstellt. Daher ist  $-1$  nicht im Bild von  $f$  und  $f$  ist nicht surjektiv.

Da  $f$  injektiv, aber nicht surjektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein.

b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^3$



Die Funktion ist nicht injektiv, da  $g(-1) = 1 = g(1)$ , aber  $1 \neq -1$ .

Angenommen, es existiert ein  $x \in D_f$ , sodass  $f(x) = -2$ . Dann wäre aber  $-2 = f(x) = |x|^3 \geq 0$ , was einen Widerspruch darstellt. Daher ist  $-2$  nicht im Bild von  $g$  und  $g$  ist nicht surjektiv.

Da  $g$  weder injektiv noch surjektiv ist, ist sie nicht bijektiv.

### Aufgabe 3:

a)  $f_1(x) = x^2 - 4$  ist ein Polynom 2. Grades und im ganzen  $\mathbb{R}$  definiert.  
Also:

$$D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$f_2(x) = \frac{1}{x^3}$  ist nur dann definiert, wenn  $x^3 \neq 0$ , also  $x \neq 0$ :  
Daher ist:

$$D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$  ist  $\pi$ -periodisch, d.h.  $\tan(\phi) = \tan(\phi + k\pi)$  für alle  $\phi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Somit ist:

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

b)  $f_1 \circ f_2 : D_{f_1 \circ f_2} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_1(f_2(x))$

Sei  $x \in D_{f_1 \circ f_2} \subseteq D_{f_2}$ . Dann gilt:

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 4 = \frac{1}{x^6} - 4$$

Also:

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$f_2 \circ f_1 : D_{f_2 \circ f_1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_2(f_1(x))$

Sei  $x \in D_{f_2 \circ f_1} \subseteq D_{f_1}$ , dann gilt:

$$f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{(x^2 - 4)^3}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)^3 \neq 0$$

$$x \neq \pm 2$$

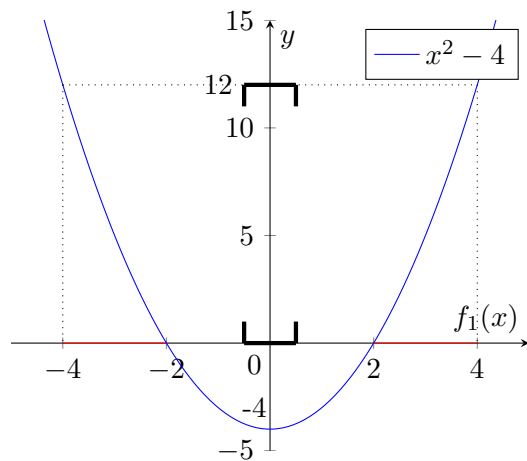
Also:

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

c)

$$f_1(x) = x^2 - 4$$

Urbild  $f_1^{-1}([0, 12]) = ?$



$$0 \leq y = f(x) \leq 12$$

$$0 \leq x^2 - 4 \leq 12 \quad | +4$$

$$4 \leq x^2 \leq 16$$

$$2 \leq |x| \leq 4$$

$$|x| \geq 2$$

$$|x| \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2 \geq x \geq 2$$

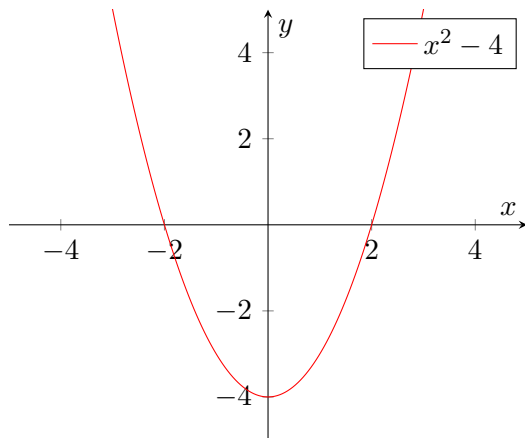
$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$L = (]-\infty, -2] \cup [2, \infty[) \cap [-4, 4] = [-4, -2] \cup [2, 4]$$

Also:

$$f_1^{-1}([0, 12]) = [-4, -2] \cup [2, 4]$$

d)



Wir wissen, dass die Parabel:  $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq -4$

Das heißt unsere Funktion  $f(x)$  ist nach unten durch  $-4$  beschränkt.

e)

$$f_1(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f_1(x)$$

$f_1(x) = f_1(-x)$  für alle  $x \in D_{f_1}$ , also es ist eine gerade Funktion.

$$f_3(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = -f_3(x)$$

$f_3(x) \neq f_3(-x)$  für alle  $x \in D_{f_3}$ , also es ist eine ungerade Funktion.

Aufgabe 4:

a) Um die Umkehrabbildung einer Funktion zu bestimmen, muss man die Gleichung  $y = f(x)$  nach  $x$  auflösen.

$$y = f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1} \Leftrightarrow y(x + 1) = 2x + 3 \Rightarrow$$

$$yx - 2x = 3 - y \Leftrightarrow x(y - 2) = 3 - y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3 - y}{y - 2}$$

Somit ist die Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(y) = \frac{3 - y}{y - 2}$$

Damit sie definiert ist, muss  $x \neq 2$  sein. Somit ist

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b)

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y - 3}{2 - y}\right) =$$

$$\frac{2\left(\frac{y-3}{2-y}\right) + 3}{\frac{y-3}{2-y} + 1} = \frac{2\left(\frac{y-3}{2-y}\right) + 3\left(\frac{2-y}{2-y}\right)}{\frac{y-3}{2-y} + \frac{2-y}{2-y}} =$$

$$\frac{2y - 6 + 6 - 3y}{y - 3 + 2 - y} = \frac{-y}{-1} = y$$

c)

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$$

$$= \frac{2x + 2 + 1}{x + 1}$$

$$= \frac{2x + 2}{x + 1} + \frac{1}{x + 1}$$

$$= \frac{2(x + 1)}{x + 1} + \frac{1}{x + 1}$$

Da  $x \in ] - 1, \infty[$ , wir können vereinfachen:

$$\Rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x + 1}$$

Für alle  $x, y \in ] - 1, \infty[$  mit  $x < y$ :

$$x < y$$

$$\Leftrightarrow x + 1 < y + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + 1} > \frac{1}{y + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x + 1} > 2 + \frac{1}{y + 1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(y)$$

Also die Funktion ist monoton fallend für  $] - 1, \infty[$   
Aufgabe 5:

a)

$$e^{x^2-9} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{x^2-9} = 1$$

$$\Rightarrow \ln(1) = x^2 - 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 0$$



$$x^2 = 9$$

$$x = \{-3, 3\}$$

b)

$$\ln \left( \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} \right)$$

Es muss:  $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} > 0$

Mit Anwendung der p-q Formel findet man die Nullstellen der beiden Polynome:

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -\left(\frac{-4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + 1 = 3 \quad \text{und} \quad x_2 = 2 - 1 = 1$$

$$x_{3,4} = \left(-\frac{-5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \text{und} \quad x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

Damit ist:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-2)} > 0$$

Es muss  $x \neq 3$  sein, damit man beide Terme abkürzen kann

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x-2} > 0$$

Es muss:  $x - 2 \neq 0$ , d.h.  $x \neq 2$

Die Ungleichung gilt nur dann, wenn beide Terme entweder positiv oder negativ sind

1. Fall  $x > 1$  und  $x > 2$  d.h.  $x > 2$ :

$$L_1 = ]2, \infty[$$

2. Fall  $x < 1$  und  $x < 2$ , d.h.  $x < 1$ :

$$L_2 = ]-\infty, 1[$$

Also die Gesamtlösungsmenge lautet:

$$L = (L_1 \cup L_2) \setminus \{3\} = (]-\infty, 1[ \cup ]2, \infty[) \setminus \{3\}$$

Somit  $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{[1, 2], 3\}$