

Kirill Beskorovainyi. Hausaufgabe 2:

Aufgabe 1:

a)

Induktionsanfang: Für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$1^2 = 1$$

$$1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gelte:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= \sum_{k=1}^n (2k - 1) + 2(n + 1) - 1 = \\ &= (n^2) + 2n + 1 = (n + 1)^2 \end{aligned}$$

b)

Induktionsanfang: Für $n = 2$

$$\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2 + 1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gelte:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

c)

Induktionsanfang: Für $n = 4$

$$2^4 = 16$$

$$4^2 = 16$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ gelte:

$$2^n \geq n^2$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

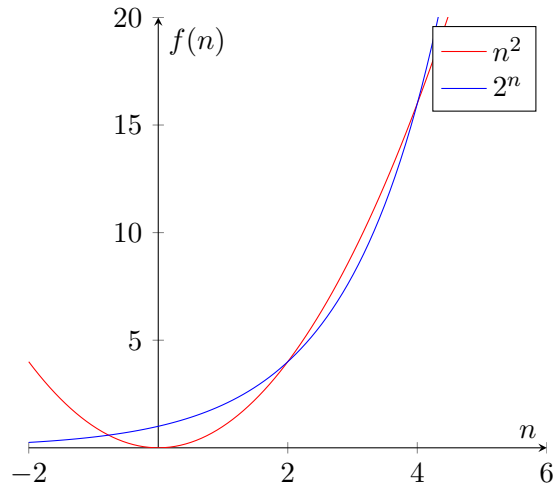
Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n = 2^n + 2^n \\ 2^n + 2^n &\geq n^2 + n^2 \geq n^2 + n \times n \\ n \geq 4 &\Rightarrow 2^{n+1} \geq n^2 + 4n \\ &\geq n^2 + 2n + 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq n^2 + 2n + 2(4) \\ &\geq n^2 + 2n + 1 \geq (n+1)^2 \end{aligned}$$

Teil 2:

Für $n = 0, 1, 2, 3$

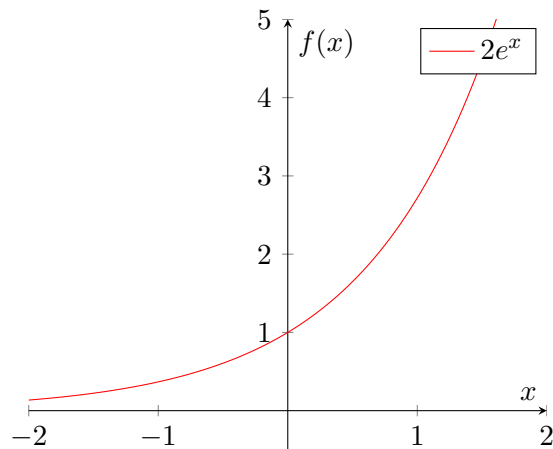


Für $[0, 2]$ ist $n^2 \geq 2^n$, aber für $[2, 4]$ ist $n^2 \leq 2^n$

Also die Aussage gilt für $n = 0, 1, 2$, aber nicht für $n = 3$

Aufgabe 2:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2e^x$



Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

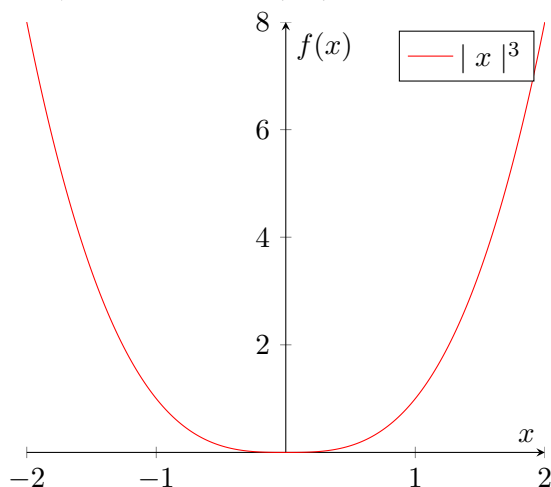
$$x_1 = x_2$$

Damit f ist injektiv.

Angenommen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass $f(x) = -1$. Dann wäre aber $-1 = f(x) = 2e^x > 0$, was einen Widerspruch darstellt. Daher ist -1 nicht im Bild von f und f ist nicht surjektiv.

Da f injektiv, aber nicht surjektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein.

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^3$



Die Funktion ist nicht injektiv, da $g(-1) = 1 = g(1)$, aber $1 \neq -1$.

Angenommen, es existiert ein $x \in D_g$, sodass $f(x) = -2$. Dann wäre aber $-2 = f(x) = |x|^3 \geq 0$, was einen Widerspruch darstellt. Daher ist -2 nicht im Bild von g und g ist nicht surjektiv.

Da g weder injektiv noch surjektiv ist, ist sie nicht bijektiv.

Aufgabe 3:

a) $f_1(x) = x^2 - 4$ ist ein Polynom 2. Grades und im ganzen \mathbb{R} definiert.

Also:

$$D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$f_2(x) = \frac{1}{x^3}$ ist nur dann definiert, wenn $x^3 \neq 0$, also $x \neq 0$:

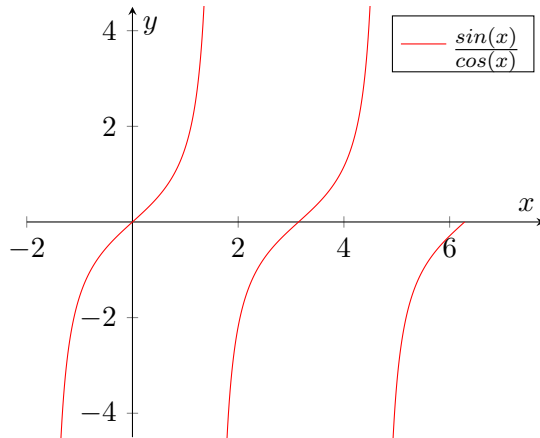
Daher ist:

$$D_{f_2} = \mathbb{R}^{\neq 0}$$

$f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ ist π -periodisch, d.h. $\tan(\phi + k\pi) = \tan(\phi)$ für alle $\phi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Somit ist:

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$



b) $f_1 \circ f_2 : D_{f_1 \circ f_2} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_1(f_2(x))$

Sei $x \in D_{f_1 \circ f_2} \subseteq D_{f_2}$. Dann gilt:

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 4 = \frac{1}{x^6} - 4$$

Also:

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R}^{\neq 0}$$

$f_2 \circ f_1 : D_{f_2 \circ f_1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f_2(f_1(x))$

Sei $x \in D_{f_2 \circ f_1} \subseteq D_{f_1}$, dann gilt:

$$f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{(x^2 - 4)^3}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)^3 \neq 0$$

$$x \neq \pm 2$$

Also:

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

c)

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$$

$$f^{-1}(x) = 0 = \sqrt{x+4} \Rightarrow x = -4$$

$$f^{-1}(x) = 12 = \sqrt{x+4} \Rightarrow x = 140$$

Also das Urbild von $f^{-1}(x)$ ist:

$$[-4, 140]$$

d)

$$f_1'(x) = 2x$$

$$f_1''(x) = 2$$

$f_1''(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv. Das heißt das die Funktion einen Minimumpunkt hat, also es ist nur nach unten beschränkt.

e)

$f_1(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine gerade Funktion.

$f_2(x) \neq f_2(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine ungerade Funktion.

Aufgabe 4:

a)

$$y = \frac{2x+3}{x+1} \Rightarrow y(x+1) = 2x+3 \Rightarrow$$

$$yx - 2x = 3 - y \Rightarrow x(y-2) = 3y \Rightarrow$$

$$x = \frac{3y}{y-2} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x}{x-2}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{2\left(\frac{3x}{x-2}\right) + 3}{\left(\frac{3x}{x-2}\right) + 1} &= \frac{\left(\frac{6x}{x-2}\right) + \left(\frac{3(x-2)}{x-2}\right)}{\left(\frac{3x}{x-2}\right) + \left(\frac{x-2}{x-2}\right)} = \\ &= \frac{9x-6}{4x-2} = \frac{3(3x-2)}{2(2x-1)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{2x+3}{x+1} \right] &= \frac{(x+1)(2) - (2x+3)(1)}{(x+1)^2} = \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \text{ für alle } \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$$

$$\Rightarrow f_1(x) \text{ ist monoton fallend für } [-1, \infty]$$

Aufgabe 5:

a)

$$\begin{aligned}e^{x^2-9} - 1 &= 0 \\ \Rightarrow e^{x^2-9} &= 1 \\ \Rightarrow \ln(1) &= x^2 - 9 \\ \Rightarrow x^2 - 9 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \{-3, 3\}\end{aligned}$$

b)

$$(1) \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} > 0 \quad \text{und} \quad (2) x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

(1)

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} &> 0 \\ \frac{x-1}{x-2} &> 0\end{aligned}$$

Falls $x > 2$:

$$\begin{aligned}x &> 1 \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}\end{aligned}$$

Falls $x < 2$:

$$\begin{aligned}x &< 1 \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 6 &\neq 0 \\ (x-3)(x-2) &\neq 0 \\ x &\neq \{3, 2\}\end{aligned}$$

Von (1) und (2) folgt: $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{3, [1, 2]\}$