Technische Universität Berlin **Sommersemester 2020**
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: P. Winkert Ausgabe: 01.05.2020
Ass.: A. Freyer, S. Keiper, M. Raslan Abgabe: 11.05.–15.05.2020

02. Hausaufgabenblatt
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

(vollständige Induktion, Abbildungen, Elementare Funktionen 1)

---

1. Aufgabe (10 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, gilt

$$2^n \geq n^2.$$

Was ist mit $n = 0, 1, 2, 3$?

2. Aufgabe (5 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2e^x$,

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|^3$.

3. Aufgabe (7 Punkte)
Gegeben seien die Zuordnungsvorschriften

$$f_1(x) = x^2 - 4, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^3}, \quad f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

der Funktionen $f_i :\ D_{f_i} \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, 3$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D_{f_i} \subseteq \mathbb{R}$ von f_i, für $i = 1, 2, 3$.

b) Bestimmen Sie die Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $f_2 \circ f_1$ sowie deren maximalen Definitionsbereiche in $\mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie das Urbild $f_1^{-1}([0, 12])$.

d) Ist f_1 nach unten beschränkt? Ist f_1 nach oben beschränkt?

e) Entscheiden Sie, ob f_1 und f_3 jeweils gerade oder ungerade Funktionen sind.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ definiert.

a) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung f^{-1} von f. Welchen Definitionsbereich hat f^{-1} in $\mathbb{R}$?

b) Berechnen Sie zur Probe $(f \circ f^{-1})(y)$. ($f^{-1} \circ f$ brauchen Sie nicht auszurechnen.)

c) Ist f auf $]-1, \infty[$ monoton wachsend oder fallend? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Definition.

5. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Funktionen.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{x^2-9} - 1, \quad f_2 : D_{f_2} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6}\right).$$

Bestimmen Sie

a) alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $f_1(x) = 0$,

b) den maximalen Definitionsbereich D_{f_2} von f_2 in $\mathbb{R}$.

Hinweis: Sie können in b) Zähler und Nenner faktorisieren.

Gesamtpunktzahl: 30