Kirill Beskorovainyi. Hausaufgabe 2:

Aufgabe 1:

a)

Induktionsanfang: Für n = 1

$$\sum_{k=1}^{1} (2k - 1) = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$1^2 = 1$$

$$1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$ gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 =$$
$$= (n^2) + 2n + 1 = (n+1)^2$$

b)

Induktionsanfang: Für n=2

$$\prod_{k=2}^{2} (1 - \frac{1}{2^2}) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{2+1}{2\times 2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gelte:

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$\prod_{k=2}^{n+1} (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{split} \prod_{k=2}^{n+1} (1 - \frac{1}{k^2}) &= \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2}) \times (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \left(\frac{n+1}{2n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{2n(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 2n}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{(n+1) + 1}{2(n+1)} \end{split}$$

 \mathbf{c}

Induktionsanfang: Für n=4

$$2^4 = 16$$

$$4^2 = 16$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein belibiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 4$ gelte:

$$2^n > n^2$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt auch:

$$2^{n+1} \ge (n+1)^2$$

Induktionsschluss:

$$2^{n+1} = 2^n = 2^n + 2^n$$

$$2^n + 2^n \ge n^2 + n^2 \ge n^2 + n \times n$$

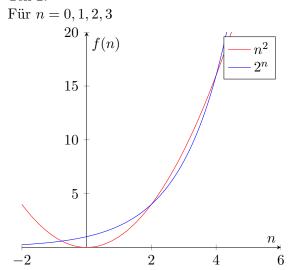
$$n \ge 4 => 2^{n+1} \ge n^2 + 4n$$

$$\ge n^2 + 2n + 2n$$

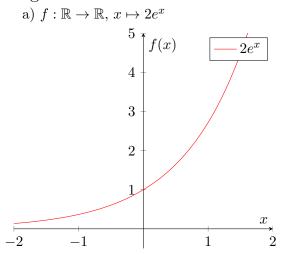
$$\geq n^2 + 2n + 2(4)$$

$$\geq n^2 + 2n + 1 \geq (n+1)^2$$

Teil 2:



Für [0,2] ist $n^2 \ge 2^n$, aber für [2,4] ist $n^2 \le 2^n$ Also die Aussage gilt für n=0,1,2, aber nicht für n=3Aufgabe 2:



Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit:

$$f(x_1) = f(x_2) 2e^{x_1} = 2e^{x_2}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

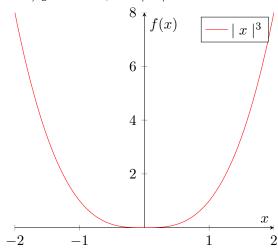
$$x_1 = x_2$$

Damit f ist injektiv.

Angenommen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass f(x) = -1. Dann wäre aber $-1 = f(x) = 2e^x > 0$, was einen Wiederspruch darstellt. Daher ist -1 nicht im Bild von f und f ist nicht surjektiv.

Da f injektiv, aber nicht surjektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein.

b)
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^3$$



Die Fuktion ist nicht injektiv, da g(-1) = 1 = g(1), aber $1 \neq -1$.

Angenomen, es existiert ein $x \in D_f$, sodass f(x) = -2. Dann wäre aber $-2 = f(x) = |x|^3 \ge 0$, was einen Wiederspruch darstellt. Daher ist -2 nicht im Bild von g und g ist nicht surjektiv.

Da g weder injektiv noch surjektiv ist, ist sie <u>nicht bijektiv</u>.

Aufgabe 3:

a) $f_1(x) = x^2 - 4$ ist ein Polynom 2. Grades und im ganzen $\mathbb R$ definiert. Also:

$$D_{f_1} = \mathbb{R}$$

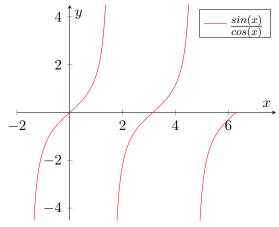
 $f_2(x) = \frac{1}{x^3}$ ist nur dann definiert, wenn $x^3 \neq 0$, also $x \neq 0$: Daher ist:

$$D_{f_2} = \mathbb{R}^{\neq 0}$$

 $f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ ist π -periodisch, d.h. $\tan(\phi + k\pi) = \tan(\phi)$ für alle $\phi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Somit ist:

$$D_{f_3} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$$



b) $f_1 \circ f_2 : D_{f_1 \circ f_2} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(f_2(x))$ Sei $x \in D_{f_1 \circ f_2} \subseteq D_{f_2}$. Dann gilt:

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 - 4 = \frac{1}{x^6} - 4$$

Also:

$$D_{f_1 \circ f_2} = \mathbb{R}^{\neq 0}$$

 $f_2 \circ f_1 : D_{f_1 \circ f_2} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f_2(f_1(x))$ Sei $x \in D_{f_2 \circ f_1} \subseteq D_{f_1}$, dann gilt:

$$f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x)) = \frac{1}{(x^2 - 4)^3}$$
$$= > (x^2 - 4)^3 \neq 0$$
$$x \neq \pm 2$$

Also:

$$D_{f_2 \circ f_1} = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$$

c)
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$$

$$f^{-1}(x) = 0 = \sqrt{x+4} => x = -4$$

$$f^{-1}(x) = 12 = \sqrt{x+4} => x = 140$$

Also das Urbild von $f^{-1}(x)$ ist:

[-4, 140]

d)

$$f_1'(x) = 2x$$
$$f_1''(x) = 2$$

 $f_1''(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv. Das heißt das die Funktion eine Minimumpunkt hat, also es ist nur nach unten beschränkt.

e)

 $f_1(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine gerage Funktion.

 $f_2(x) \neq f_2(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also es ist eine ungerade Fuktion.

Aufgabe 4:

a)

$$y = \frac{2x+3}{x+1} => y(x+1) = 2x+3 =>$$

$$yx - 2x = 3 - y => x(y-2) = 3y =>$$

$$x = \frac{3y}{y-2} =>$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x}{x-2}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\frac{2\left(\frac{3x}{x-2}\right)+3}{\left(\frac{3x}{x-2}\right)+1} = \frac{\left(\frac{6x}{x-2}\right)+\left(\frac{3(x-2)}{x-2}\right)}{\left(\frac{3x}{x-2}\right)+\left(\frac{x-2}{x-2}\right)} =$$
$$=\frac{9x-6}{4x-2} = \frac{3(3x-2)}{2(2x-1)}$$

c)
$$\frac{d}{dx} \left[\frac{2x+3}{x+1} \right] = \frac{(x+1)(2) - (2x+3)(1)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

=> f'(x) < 0 für alle $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

 $=>f_1(x)$ ist monoton fallend für $[-1,\infty]$

Aufgabe 5:

a)
$$e^{x^2-9} - 1 = 0$$

$$= > e^{x^2-9} = 1$$

$$= > \ln(1) = x^2 - 9$$

$$= > x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \{-3, 3\}$$
b)

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} > 0$$

$$\frac{x - 1}{x - 2} > 0$$

Falls x > 2:

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid x>2\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>2\}$$

Falls x < 2:

$${x \in \mathbb{R} \mid x < 1} \cup {x \in \mathbb{R} \mid x < 2} = {x \in \mathbb{R} \mid x < 1}$$

Es folgt: $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{[1,2]\} = [-\infty,1] \cup [2,\infty]$