Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Дидусь К.В.

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

Цель работы

Ознакомиться с задачей о погоне. Научиться ее решать строить графики траектории движения, выводить уравнение, описывающее движение.

Выполнение лабораторной работы

Постановка задачи

1. Место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения: $t_0 = 0, x_{\ddot{e}0} = 0$. Место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки: $x_{\hat{e}0} = 0$

2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_{\ddot{e}0}(0 = x_{\ddot{e}0} = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние X (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер — $k - x$ (или $k + x$ в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/3.9v$ (во втором случае $k + x/3.9v$). Так как

время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{5.2v} \text{ â ïåðâîì ñëó÷àå}$$

или

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{5.2v} \text{ âî âòîðîì.}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{6.2}$ и $x_2 = \frac{k}{4.2}$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r — радиальная скорость и v_τ — тангенциальная скорость . Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ на радиус r, $v_\tau = r\frac{\partial \theta}{\partial t}$

Из рисунка (рис. @fig:002) видно: $v_\tau = \sqrt{27.04v^2 - v^2} = \sqrt{26.04}v$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sqrt{26.04}v$

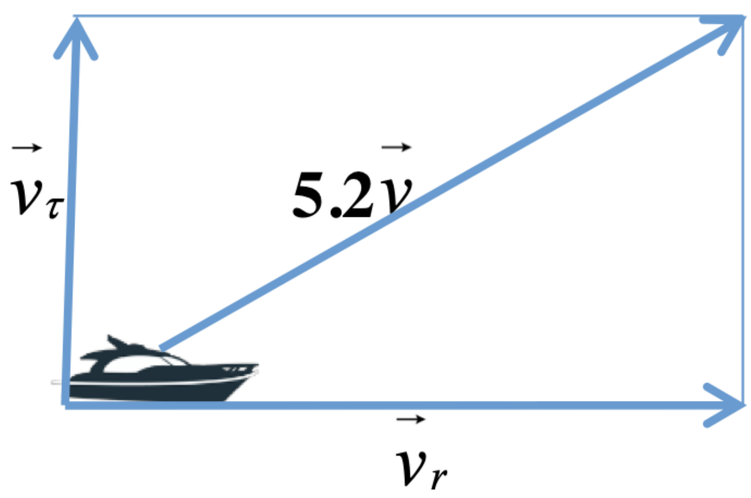

Рис. 0.1: Скорости

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = v \\ r\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sqrt{26.04}v \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{r}{\sqrt{26.04}}.$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Код программы

Приведу полный код программы (Python):

Разработка велась в среде Spyder

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

t = np.arange(0, 15, 1)

k = 17.9 # Растояние между катером и лодкой
fi = 3*math.pi/4 # Направление лодки
tang_vel = 5.2**2-1 # Тангенциальная скорость

# Движение катера
def dr(r, tetha):
    dr = r/math.sqrt(tang_vel)
    return dr

#
def tetha(v, tetha0):
    r0 = k/v
    tetha = np.arange(tetha0, 2*math.pi, 0.01)
```

```
    r = odeint(dr, r0, tetha)
    return r0, tetha, r

# Движение лодки
def f2(t):
    xt=math.tan(fi)*t
    return xt

def plot(tetha, r, tetha2, r2):
    plt.figure(1)
    plt.polar(tetha, r, 'g')
    plt.polar(tetha2, r2, 'b')
    plt.legend(['Катер', 'Лодка'])


ll = t*t + f2(t)*f2(t)
r2 = np.sqrt(ll)
tetha2 = (np.tan(f2(t)/t))**(-1)

r0, tetha, r = tetha(4.2, 0)
plot(tetha, r, tetha2, r2)
```

Результаты выполнения

Случай первый (рис. @fig:001)

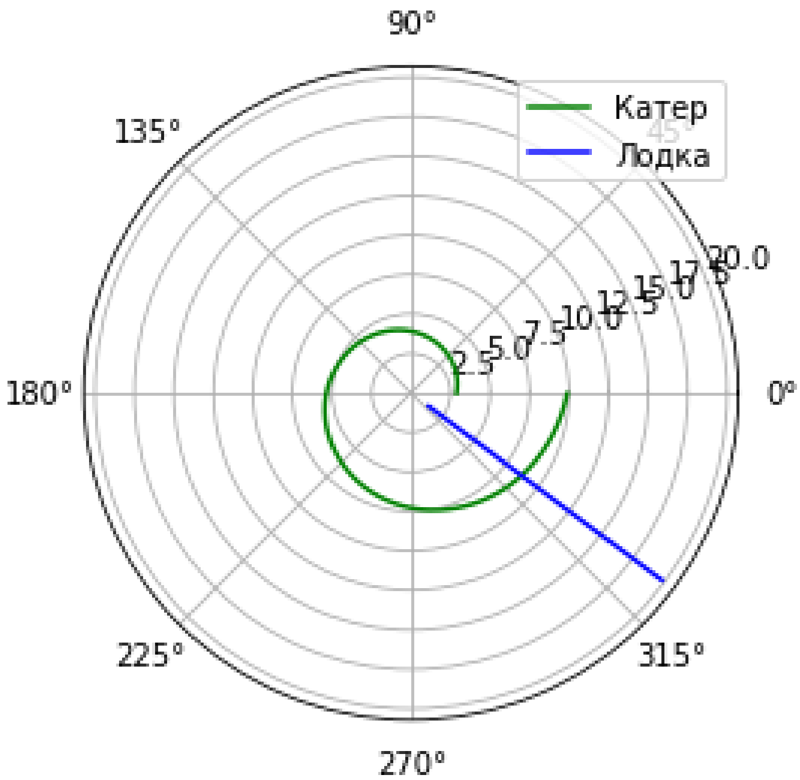

Рис. 0.1: 1

Случай второй (рис. @fig:002)

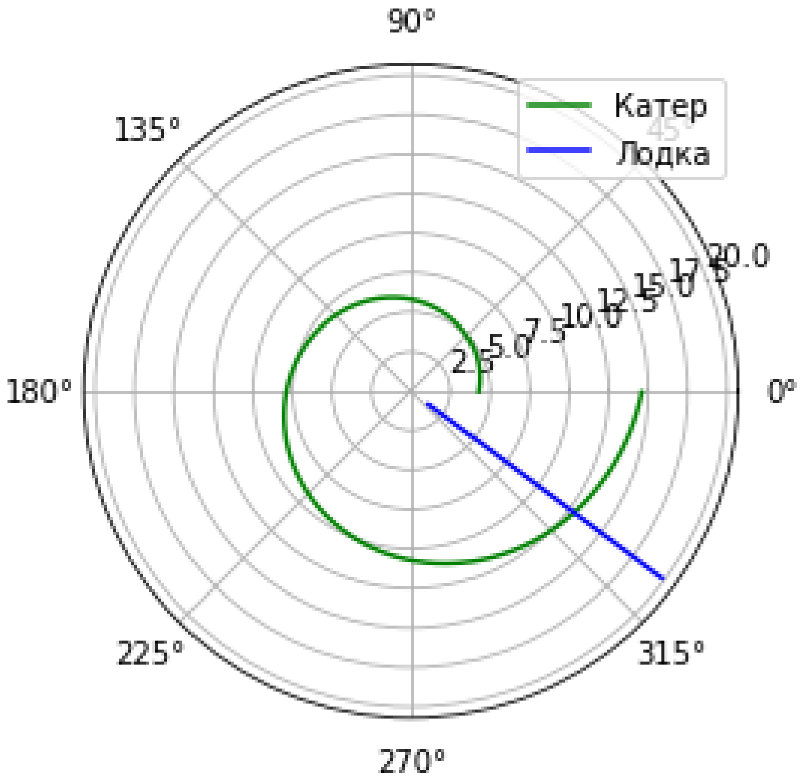
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
270°
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0
Катер
Лодка

Рис. 0.2: 2

Выводы

Ознакомился с задачей о погоне и нашел ее решение