

Лабораторная работа №5

Задача об эпидемии

Дидусь Кирилл Валерьевич

Содержание

Цель работы	4
Задание	5
Выполнение лабораторной работы	6
Теоретическая основа задачи	6
Входные данные	7
Реализация	7
Результат работы программы	8
Код программы	10
Выводы	13

Список иллюстраций

0.1	Код программы для решения задачи	8
0.2	Первый случай	9
0.3	Второй случай	9

Цель работы

Рассмотреть модель эпидемии. Построить графики иллюстрирующие задачу.

Задание

1. Построить график изменения кол-ва людей в каждой из трех групп
2. Рассмотреть случай, когда $I \leq I^*$
3. Рассмотреть случай, когда $I > I^*$

Выполнение лабораторной работы

Теоретическая основа задачи

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы.

- $S(t)$ — здоровые особи, восприимчивые к заболеванию
- $I(t)$ — инфицированные особи, способные распространять инфекцию
- $R(t)$ — здоровые особи, с иммунитетом к болезни.

Пока число заболевших не превышает некоего критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, инфицирование могут заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{if } I(t) > I^* \\ 0, & \text{if } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \begin{cases} -\alpha S - \beta I, & \text{if } I(t) > I^* \\ -\beta I, & \text{if } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности:

- α — коэффициент заболеваемости
- β — коэффициент выздоровления

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Входные данные

$$N = 5217$$

$$I(0) = 74$$

$$R(0) = 14$$

$$S(0) = N - I(0) - R(0)$$

$$\alpha = 0.72$$

$$\beta = 0.19$$

Реализация

Ниже приведен код программы, реализованный на языке программирования Python (рис 1 @fig:001)

```

8   import numpy as np
9   from scipy.integrate import odeint
10  import matplotlib.pyplot as plt
11
12  a = 0.72 #коэфф заболеваемости
13  b = 0.19 #коэфф выздоровления
14  N = 4973 #кол-во жителей
15  I0 = 49 #кол-во зараженных
16  R0 = 19 #кол-во с иммунитетом
17  S0 = N - I0 - R0 #кол-во восприимчивых
18
19  x0 = [S0, I0, R0] # начальные значения
20
21  #Случай 1 : I0 <= I*
22  def syst(x, t):
23      dx0 = 0
24      dx1 = -b*x[1]
25      dx2 = b*x[1]
26      return dx0, dx1, dx2
27
28  t = np.arange(0, 30, 0.01) # шаг по времени
29
30  y1 = odeint(syst, x0, t)
31
32  plt.plot(t,y1[:,0], label='S(t)')
33  plt.plot(t,y1[:,1], label='I(t)')
34  plt.plot(t,y1[:,2], label='R(t)')
35  plt.legend()
36  plt.title('Случай 1: I0 <= I*',fontsize=14)
37
38  #Случай 2 : I0 > I*
39
40  def syst(x, t):
41      dx0 = -a*x[0]
42      dx1 = a*x[0]-b*x[1]
43      dx2 = b*x[1]
44      return dx0, dx1, dx2
45
46  y2 = odeint(syst, x0, t)
47
48  plt.plot(t,y2[:,0], label='S(t)')
49  plt.plot(t,y2[:,1], label='I(t)')
50  plt.plot(t,y2[:,2], label='R(t)')
51  plt.legend()
52  plt.title('Случай 2: I0 > I*',fontsize=14)

```

Рис. 0.1: Код программы для решения задачи

Результат работы программы

Ниже представлен график изменения кол-ва людей в каждой группе (S,I,R) для первого случая, когда кол-во зараженных не превышает критического значения. (рис .2 @fig:001)

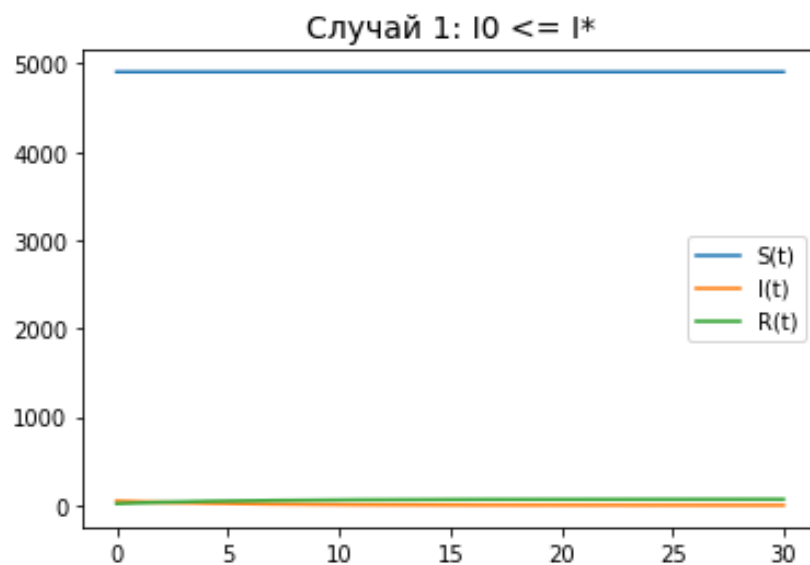


Рис. 0.2: Первый случай

Далее представлен график изменения кол-ва людей в каждой группе (S,I,R) для второго случая, когда кол-во зараженных превышает критическое значение (рис .3 @fig:001)

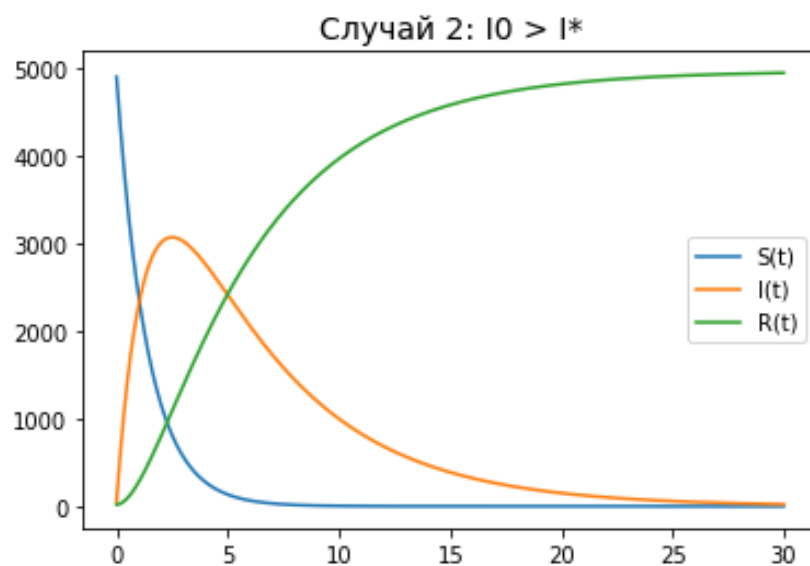


Рис. 0.3: Второй случай

Код программы

Приведу полный код программы (Python):

```
"""
Created on Thu Mar 18 18:56:15 2021
@author: kirilldi
"""

import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

a = 0.72 #коэфф заболеваемости
b = 0.19 #коэфф выздоровления
N = 4973 #кол-во жителей
I0 = 49 #кол-во зараженных
R0 = 19 #кол-во с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 #кол-во восприимчивых

#Случай 1 : I0 <= I*
def syst(x, t):
    dx0 = 0
    dx1 = -b*x[1]
    dx2 = b*x[1]
```

```

    return dx0, dx1, dx2

x0 = [S0, I0, R0] # начальные значения

t = np.arange(0, 30, 0.01) # шаг по времени

y1 = odeint(syst, x0, t)

plt.plot(t,y1[:,0], label='S(t)')
plt.plot(t,y1[:,1], label='I(t)')
plt.plot(t,y1[:,2], label='R(t)')
plt.legend()
plt.title('Случай 1:  $I_0 \leq I^*$ ', fontsize=14)

#Случай 2 :  $I_0 > I^*$ 

def syst(x, t):
    dx0 = -a*x[0]
    dx1 = a*x[0]-b*x[1]
    dx2 = b*x[1]
    return dx0, dx1, dx2

y2 = odeint(syst, x0, t)

"""
plt.plot(t,y2[:,0], label='S(t)')
plt.plot(t,y2[:,1], label='I(t)')

```

```
plt.plot(t,y2[:,2], label='R(t)')
plt.legend()
plt.title('Случай 2:  $I_0 > I^*$ ',fontsize=14)
"""
```

Выводы

Ознакомился с моделью эпидемии. Рассмотрел 2 случая распространения инфекции. Изучил влияние коэффициентов выздоровления и заболеваемости на скорость распространения инфекции.