МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет компьютерных технологий и управления
Кафедра систем управления и информатики

Студент: Артемов Кирилл
группа P4135

Лабораторная работа №2

Решение обратной задачи кинематики

Преподаватель
_______________ А. А. Пыркин
«___» _________ 2016 г.

Санкт-Петербург, 2016 г.

1 Цель работы

Решение обратной задачи кинематики (ОЗК).

2 Исходные данные

Шестизвенный манипулятор с вращательными звеньями.

Таблица 1: Параметры DH.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\frac{\pi}{2}$	d_1	0
2	a_2	0	0	0
3	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
4	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_4	0
5	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0
6	0	0	d_6	0

Дана матрица однородных преобразований (4x4).

$$H_6^0 = \begin{pmatrix} R & o \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

где вектор положения схвата:

$$o_6^0 = \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} \tag{2}$$

матрица ориентации схвата:

$$R_6^0 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

3 Ход выполнения работы

Так как оси вращения z_4, z_5, z_6 пересекаются в точке o_c, то задача разделяется на две подзадачи:

1. ОЗК по положению - нахождение q_1, q_2, q_3

2. ОЗК по ориентации - нахождение q_4, q_5, q_6

3.1 ОЗК по положению

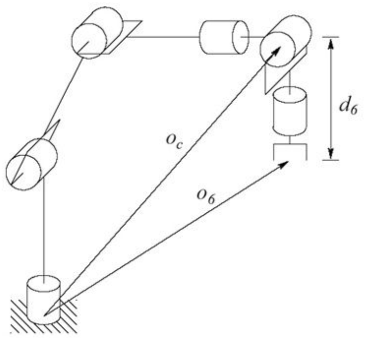


Рис. 1: Kinematic decoupling

Для начала следует найти вектор o_c^0:

$$o_c^0 = o_6^0 - d_6 R_6^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Далее, получив уравнения для проекции каждой из координат точки o_c на соответстующие оси, преступим к геометрическому нахождению углов q_1, q_2, q_3.

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_x - d_6 r_{13} \\ o_y - d_6 r_{23} \\ o_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Решение для q_1

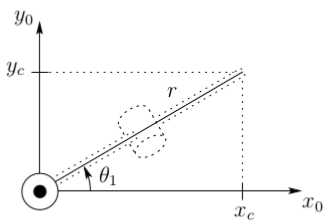


Рис. 2: Угол $q_1 = \theta_1$

$$q_1^1 = atan2(y_c, x_c)$$
$$q_1^2 = \pi + atan2(y_c, x_c)$$
где $x_c \neq 0, y_c \neq 0$

Решение для q_3

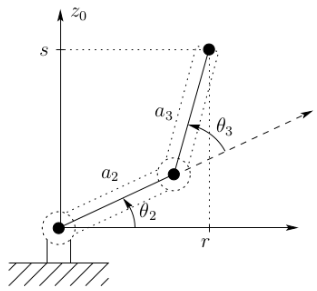


Рис. 3: Угол $q_3 = \theta_3$

По теореме синусов получим:

$$s^2 + r^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3\cos(\pi - q_3)$$
$$\cos q_3 = \frac{s^2+r^2-a_2^2-a_3^2}{2a_2a_3} = D$$
$$s = z_c - d_1$$
$$r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$
$$q_3^1 = atan2(\sqrt{1-D^2}, D)\ q_3^2 = atan2(-\sqrt{1-D^2}, D)$$

Решение для q_2

Тут, необходимо заметить, что плоская часть манипулятора в одну и ту же точку может прийти четырьмя разными способами. Т.е для каждого из q_1 имеем два q_3 и четыре q_2. Таким образом получаем четыре конфигурации манипулятора для углов q_1, q_2, q_3.

$$q_2^{1,2} = atan2(s, r) - atan2(a_3\sin q_3, a_2 + a_3\cos q_3)$$
$$q_2^{3,4} = pi - atan2(s, r) - atan2(a_3\sin q_3, a_2 + a_3\cos q_3)$$

3.2 ОЗК по ориентации

Положение схвата описывается следующим выражением:

$$R_6^0 = R_3^0 R_6^3 \tag{6}$$

Выразим матрицу поворота R_6^3 через известную R_3^0 и заданную R_6^0:

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1}R_6^0 = (R_3^0)^T R_6^0 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Запишем соотношение заданной матрицы и матрицы R_6^3:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{q_1}c_{q_2}c_{q_3} & -c_{q_1}s_{q_2}s_{q_3} & s_{q_1} \\ s_{q_1}c_{q_2}c_{q_3} & -s_{q_1}s_{q2}s_{q_3} & -c_{q_1} \\ s_{q_2}s_{q_3} & c_{q_2}c_{q_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Найдем матрицу $ZYZ - EulerAngleTransformation$

$$R_{ZYZ} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi c_\psi - s_\phi c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix} \tag{9}$$

Пусть:

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \tag{10}$$

Теперь приравням $R_6^3 = R_{ZYZ}$, получим девять уравнений, решая совместно которые найдем нужные нам углы.

Решение для $\theta \neq \pi k$

Если $h_{13} \neq h_{23}$, то $\sin\theta \neq 0$, следовательно $\cos\theta = h_{33} \neq \pm 1, \sin\theta = \pm\sqrt{1 - h_{33}^2}$.

$$\theta_1, 2 = atan2(\pm\sqrt{1 - h_{33}^2}, h_{33}) \tag{11}$$

Если $\sqrt{1 - h_{33}^2} > 0$, тогда:

$$\phi_1 = atan2(h_{23}, h_{13})$$
$$\psi_1 = atan2(h_{32}, -h_{31})$$

Если $\sqrt{1 - h_{33}^2} < 0$, тогда:

$$\phi_2 = atan2(-h_{23}, -h_{13})$$
$$\psi_2 = atan2(-h_{32}, h_{31})$$

Решение для $\theta = \pi k$

Если $h_{13} = h_{23} = 0$ и $h_{31} = h_{32} = 0$, то $h_{33} = \pm 1 = \cos\theta$. Если $h_{33} > 0$, то $\cos\theta = 1, \sin\theta = 0$, следовательно $\theta = 0$

$$\phi + \psi = atan2(h_{21}, h_{11}) = atan2(-h_{12}, h_{11})$$

Если $h_{33} < 0$, то $\cos\theta = -1, \sin\theta = 0$, следовательно $\theta = \pi$

$$\phi - \psi = atan2(h_{21}, h_{11}) = atan2(-h_{12}, -h_{11})$$

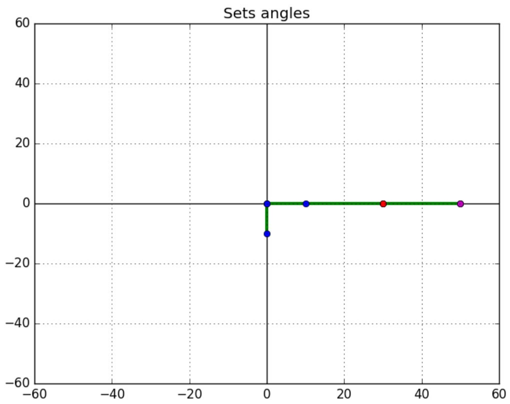
В обоих последних случаях углы ϕ и ψ могут быть любыми, т.е. существует бесконечное количество решений полученных уравнений.

4 Моделирование

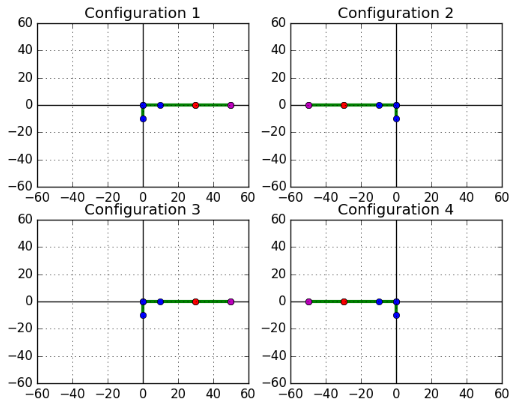
Для проверки полчуенных решений мною была написана программа на языке программирования Pyton, результаты работы которой представленны ниже.

Для приведенных примеров $q_1 = 0$.

На рисунках буквой а) отмечена заданная конфигурация манипулятора для котороый была решена прямая задача кинематики и получена матрица H_6^0. Буквой б) – четыре возможные конфигурации манипулятора для заданной точки *oc* (Конфигурации 2 и 4 изображены зеркально, для большей наглядности). Розовой точке соответствует положение схвата манипулятора. Красная точка изображает положение точки *oc*, найденной ранее в разделе 3.1.

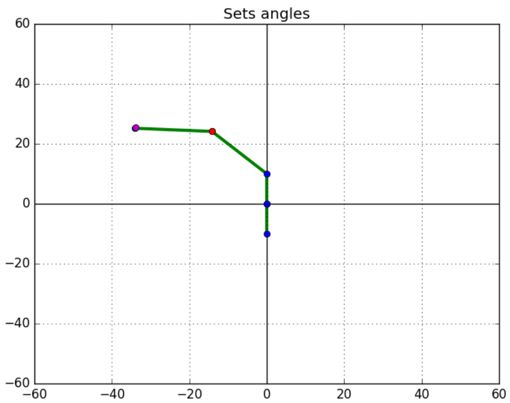


а)

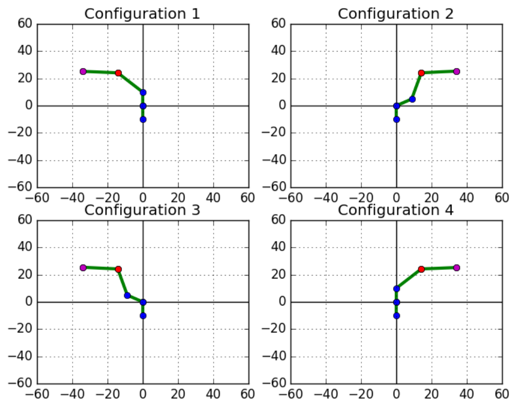


б)

Рис. 4: Для заданных углов в градусах $[0, 0, 0, 0, 0, 0]$.



а)



б)

Рис. 5: Для заданных углов в градусах $[0, 90, 45, 13, 42, 201]$.

И последнее, что остается проверить это ориентацию схвата. Для этого решим прямую задачу кинематики для полученных значений обобщенных координат и сравним их.

$$R_{init}\begin{bmatrix}-0.04587165 & -0.15718776 & -0.98650281 & -33.87219189\\ 0.63195955 & 0.76024362 & -0.15052164 & -3.01043271\\ 0.77364263 & -0.63033455 & 0.06446268 & 35.43138918\\ 0. & 0. & 0. & 1.\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$R_{result}\begin{bmatrix}-0.04587831 & -0.15718265 & -0.98650332 & -33.87220197\\ 0.63196448 & 0.76023956 & -0.15052147 & -3.01042941\\ 0.77363821 & -0.63034073 & 0.06445535 & 35.43124262\\ 0. & 0. & 0. & 1.\end{bmatrix} \tag{13}$$

Матрицы равны с точностью до трех знаков.

5 Вывод

Итак, проделав долгий и тяжелый путь от нахождения параметров Денавита-Хартенберга, решения прямой задачи кинематики, обратной по положению и ориентации, моделировании и анализе полученных результатов можно с уверенностью сказать – задача выполнена.