

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Кафедра систем управления и информатики

Реферат

Underactuated systems
Ball and Beam

Преподаватель:

_____ С. А. Чепинский

Студент:

_____ К. Артемов

Санкт-Петербург, 2016 г.

Содержание

1	Описание системы	2
1.1	Что это и как работает?	2
1.2	А нужно ли вообще управлять?	2
2	Динамика системы	4
2.1	Два слова о Лагранже и Ньюtone	4
2.2	Энергия системы Ball and Beam	4
2.3	Уравнения Эйлера-Лагранжа	5
2.4	Как будем управлять?	6
2.5	Линеаризация это просто	7
2.6	Векторно-матричная модель системы	7
2.7	Модель в пространстве состояний	8
3	Управление	8
3.1	Расчет коэффициентов модального регулятора	8
4	Моделирование	10
5	Заключение	13

1 Описание системы

1.1 Что это и как работает?



Рис. 1: Реальная конструкция

Ball and Beam представляет собой шарик лежащий на длинной балке. Балка с одной стороны закреплена на цилиндрическом шарнире, а с другой соединена рычагом с кривошипом, на который передается момент от двигателя. Таким образом при повороте двигателя на угол α рычаг изменяет положение свободного конца балки, тем самым изменяя угол наклона оной на угол θ .

1.2 А нужно ли вообще управлять?

Задача системы Ball and Beam состоит в поддержании постоянной позиции шарика на балке. Прежде всего необходимо выяснить количество степеней свободы системы. В общем случае абсолютно твёрдое тело обладает шестью степенями свободы. Для описания движения такого тела достаточно знать закон движения любой его точки и закон вращения тела относительно этой точки. Другими словами, движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

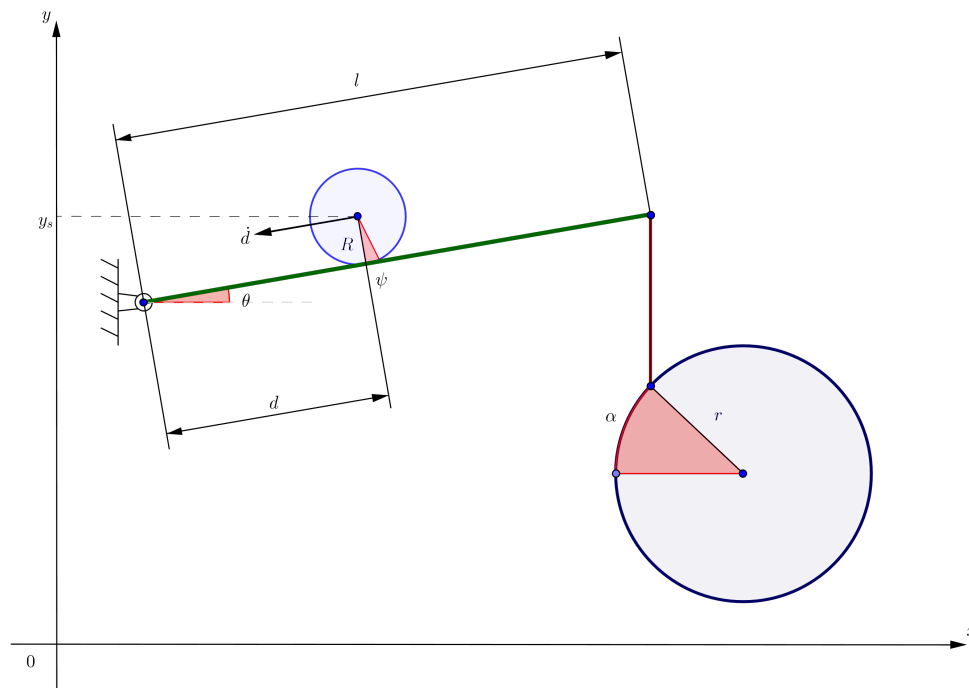


Рис. 2: Схема системы Ball and Beam

Так как в рассматриваемой системе шарик катается по прямой балке, которая вращается на цилиндрическом шарнире, то движение в этой системе является плоским. При плоском движении тело может иметь три степени свободы. Будем считать, что шарик перекатывается по балке без проскальзывания. Тогда связь между шариком и балкой устраняет вращательную степень свободы шарика. Таким образом, шарик имеет две поступательные степени свободы. Балка закреплена одним концом на шарнире, следовательно не имеет поступательных степеней свободы, но имеет вращательную, которая зависит от одной из поступательных шарика, поэтому мы и про нее забываем.

Итак, мы выяснили, что система Ball and Beam имеет две степени свободы: поступательную - перемещение шарика вдоль балки; вращательную - вращение балки вокруг шарнира.

Мы не можем управлять положением шарика на балке непосредственно, в связи с чем нужно синтезировать систему управления.

Это неустойчивая система, так как при постоянном входном воздействии (угол наклона балки) выход системы (позиция шарика) неограниченно возрастает. При нулевом значении входного воздействия система нейтрально устойчива. Для того, чтобы она стала асимптотически устойчивой нужно ввести несколько обратных связей в систему управления.

2 Динамика системы

2.1 Два слова о Лагранже и Ньюtone

Уравнения движения для рассматриваемой системы можно получить двумя разными способами. Первый из них это выписать уравнения для второго закона Ньютона, второй - воспользоваться уравнением Эйлера-Лагранжа.

- Метод Ньютона

- все тела мысленно разединяются;
- для каждого из тел выписываются уравнения движения их центров масс $\Sigma F = ma$;
- используя парные силы реакции опоры в местах соединения тел друг с другом выражаются уравнения движения системы.

- Метод Эйлера-Лагранжа:

- для каждого тела записывается его кинетическая и потенциальная энергии;
- записывается лагранжиан системы $L = K - P$;
- для каждой из обобщенных координат записываются уравнения Эйлера Лагранжа.

2.2 Энергия системы Ball and Beam

Кинетическая энергия системы:

$$\begin{aligned} K &= K_{beam} + K_{sphere} \\ K_{beam} &= K_{beam}^{rot} + K_{beam}^{trans} \\ K_{sphere} &= K_{sphere}^{rot} + K_{sphere}^{trans} \end{aligned}$$

Кинетическая энергия балки:

$$\begin{aligned} K_{beam}^{rot} &= \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 \\ K_{beam}^{trans} &= 0 \\ K_{beam} &= \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Кинетическая энергия шарика:

$$\begin{aligned} K_{sphere}^{rot} &= \frac{1}{2} J_s \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} (m_s d^2) \dot{\theta}^2 \\ K_{sphere}^{trans} &= \frac{1}{2} m_s \dot{d}^2 \end{aligned}$$

Момент инерции полого шарика: $J_s = \frac{2}{3} m_s R^2$

Зависимость перемещения шарика от угла его поворота:

$$d = R\psi$$

Зависимость угловой скорости шарика от линейной:

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{d}}{R}$$

Запишем выражение для полной кинетической энергии шарика:

$$K_{sphere} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} m_s \dot{d}^2 + \frac{1}{2} (m_s d^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{d}^2$$

Полная кинетическая энергия системы:

$$K = \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{3} m_s \dot{d}^2 + \frac{1}{2} (m_s d^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{d}^2$$

Так как шарик и балка связаны силой трения, то потенциальная энергия:

$$P = m_s g d \sin \theta$$

Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{3} m_s \dot{d}^2 + \frac{1}{2} (m_s d^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{d}^2 - m_s g d \sin \theta$$

2.3 Уравнения Эйлера-Лайгранжа

Запишем уравнения для каждой из переменных. В общем виде выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= \tau \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= J_b \dot{\theta} + m_s d^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (J_b + m_s d^2) \ddot{\theta} + 2m_s d \dot{d} \dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m_s g d \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{d}} &= m_s \dot{d} + \frac{2}{3} m_s \dot{d} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{d}} &= \frac{5}{3} m_s \ddot{d} \\ \frac{\partial L}{\partial d} &= m_s d \dot{\theta}^2 - m_s g \sin \theta \end{aligned}$$

В конце концов получаем уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} (J_b + m_s d^2) \ddot{\theta} + 2m_s d \dot{d} \dot{\theta} + m_s g d \cos \theta &= M \\ \frac{5}{3} m_s \ddot{d} - m_s d \dot{\theta}^2 + m_s g \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

2.4 Как будем управлять?

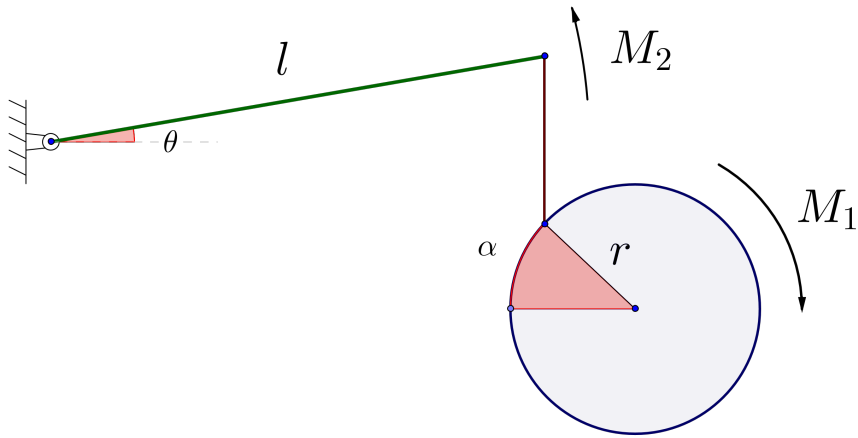


Рис. 3: Моменты в системе

Момент развиваемый двигателем:

$$M = Fr = J\ddot{\alpha}$$

Найдем зависимость угла поворота кривошипа от угла наклона балки:

$$l\theta = r\alpha$$

Отсюда линейная зависимость угловых скоростей и ускорений:

$$\dot{\alpha} = \frac{l}{r}\dot{\theta}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{l}{r}\ddot{\theta}$$

Полный момент:

$$M = K_m I - J\ddot{\alpha}$$

Закон Ома для двигателя:

$$IR = U - K_e \dot{\alpha} - L\dot{I}$$

$$I = \frac{U - K_e \dot{\alpha}}{R}$$

Запишем окончательное выражение для момента, действующего на балку:

$$M = \frac{K_m}{R}U - \frac{K_m K_e l}{Rr}\dot{\theta} - \frac{Jl}{r}\ddot{\theta}$$

2.5 Линеаризация это просто

Линеаризуем полученные уравнения и запишем окончательную модель системы, управляющим воздействием которой является напряжение подаваемое на двигатель.

При углах отклонения балки от горизонтального положения не более чем на $\pm 15^\circ$ применим к уравнениям следующие равенства:

$\sin \theta = \theta$; $\cos \theta = 1$, а также произведения и степенные функции производных по времени примем равными нулю.

Линейная модель системы:

$$\begin{aligned} (J_b + J)\ddot{\theta} + \frac{K_m K_{el}}{Rr}\dot{\theta} + m_s g d &= \frac{K_m}{R} U \\ \ddot{d} + \frac{3}{5}g\theta &= 0 \end{aligned}$$

2.6 Векторно-матричная модель системы

Полученные ранее выражения представим в векторно-матричном виде:

$$E\ddot{q} + F\dot{q} + Gq = Hu \quad (1)$$

где

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ d \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{d} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{d} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u = U \quad (5)$$

$$E = \begin{bmatrix} J_b + J & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{K_m K_{el}}{Rr} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & m_s g \\ \frac{3}{5}g & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{K_m}{R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Выразим из полученного уравнения ускорение:

$$\ddot{q} = -E^{-1}F\dot{q} - E^{-1}Gq + Hu \quad (10)$$

Добавим заведомо верные равенства:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{K_e K_m l}{Rr(J+J_b)}\dot{\theta} - \frac{gm_s}{J+J_b}d - \frac{K_m}{(J+J_b)R}u \\ \dot{d} &= \dot{d} \\ \ddot{d} &= -\frac{3}{5}g\theta\end{aligned}\tag{11}$$

2.7 Модель в пространстве состояний

Модель вход-состояние-выход разомкнутой системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{12}$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{d} \\ \ddot{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_e K_m l}{Rr(J+J_b)} & -\frac{gm_s}{J+J_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{5}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ d \\ \dot{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_m}{(J+J_b)R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \\ \dot{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ d \\ \dot{d} \end{bmatrix}\tag{14}$$

3 Управление

3.1 Расчет коэффициентов модального регулятора

Прежде чем приступить, нужно проверить является ли полученная модель управляемой. Для это составляется матрица следующего вида:

$$Y = [B \quad AB \quad A^2B]\tag{15}$$

Если $\det Y \neq 0$, то наша модель управляема и можно приступить к расчету регулятора.

Для управления рассматриваемой системой, будем использовать пропорциональный регулятор состояния, формирующий управляющие воздействия по следующей формуле:

$$u = Ke\tag{16}$$

где K и e матрицы следующего вида:

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]\tag{17}$$

$$e = x_0 - x \quad (18)$$

где x - вектор переменных состояния полученной модели, а x_0 - вектор желаемых значений:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Теперь соберем все вместе:

$$\dot{x} = Ax + BK(x_0 - x) \quad (20)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKx_0 \quad (21)$$

С учетом вышеизложенного запишем модель ВСВ замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c x_0 \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (22)$$

Поведение исследуемой системы зависит от вида характеристического полинома матрицы A_c :

$$D(\lambda) = \det(\lambda E - A_c) = \lambda^4 + z_3 \lambda^3 + z_2 \lambda^2 + z_1 \lambda + z_0 \quad (23)$$

Чтобы система была устойчива и переменные состояния сходились к желаемым значениям за определенное время нужно рассчитать коэффициенты $z_i, i = 0..3$ характеристического полинома матрицы A_c . Один из способов это сделать - раскрыть по биному Ньютона выражение:

$$D^*(\lambda) = (\lambda + \omega_0)^4 = \lambda^4 + 4\omega_0 \lambda^3 + 6\omega_0^2 \lambda^2 + 4\omega_0^3 \lambda + \omega_0^4 \quad (24)$$

$$D^*(\lambda) = \lambda^4 + z_3^* \lambda^3 + z_2^* \lambda^2 + z_1^* \lambda + z_0^* \quad (25)$$

Значение ω_0 рассчитывается по формуле:

$$\omega_0 = \frac{t_n^*}{t_n} \quad (26)$$

где t_n^* - стандартное время переходного процесса, определяемое по порядку объекта управления (в случае нашей системы это 7.8 с), t_n - желаемое время переходного процесса системы.

Для обеспечения заданных полиномом $D^*(\lambda)$ параметров в нашей системе, нужно решить следующее уравнение:

$$D(\lambda) = D^*(\lambda) \quad (27)$$

Откуда получим:

$$\begin{aligned} z_3^* &= 4\omega_0 \\ z_2^* &= 6\omega_0^2 \\ z_1^* &= 4\omega_0^3 \\ z_0^* &= \omega_0^4 \end{aligned} \quad (28)$$

Наконец, приступим к расчету самого важного - коэффициентов. Для их расчета воспользуемся одним из самых лаконичных методов, заключающемся в одной единственной формуле, носящей название немецкого математика Вильгельма Аккермана.

Формула выглядит следующим образом:

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ 1] Y^{-1} f(A) \quad (29)$$

Функция $f(A)$ определяется выражением:

$$f(A) = A^4 + z_3^* A^3 + z_2^* A^2 + z_1^* A + z_0^* E \quad (30)$$

Подставляя в предыдущее выражение значения $z_i, i = 1..3$ из 28, запишем формулу Аккермана:

$$K = [0 \ 0 \ 0 \ 1] Y^{-1} (A^4 + 4\omega_0 A^3 + 6\omega_0^2 A^2 + 4\omega_0^3 A + \omega_0^4 E) \quad (31)$$

Перепишем, подставляя все известные переменные:

$$[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] = [0 \ 0 \ 0 \ 1] Y^{-1} (A^4 + 4\omega_0 A^3 + 6\omega_0^2 A^2 + 4\omega_0^3 A + \omega_0^4 E) \quad (32)$$

4 Моделирование

Схема моделирования представлена на рисунке 4. Полученные графики на рисунках 5, 6 и 7.

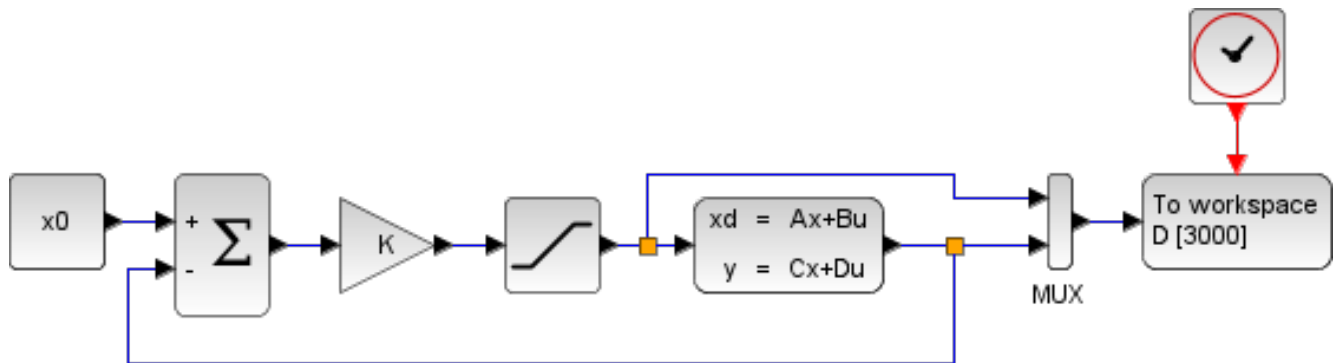


Рис. 4: Модель полученной системы в среде Scilab

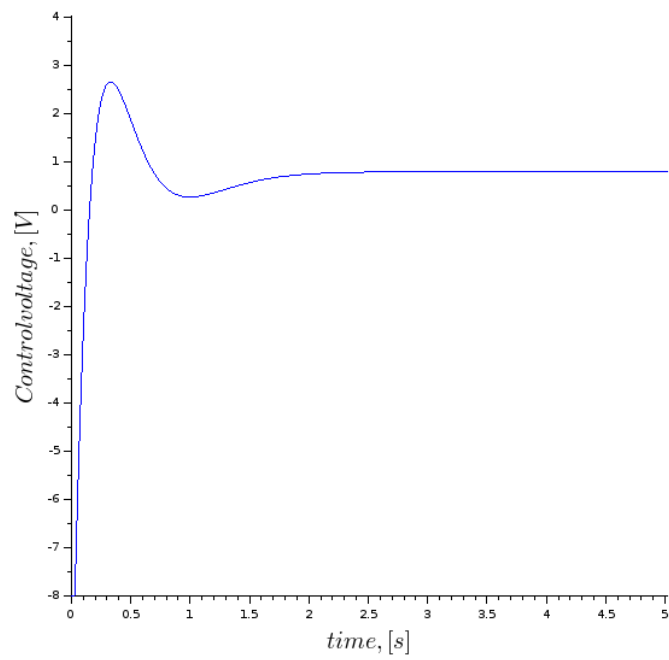
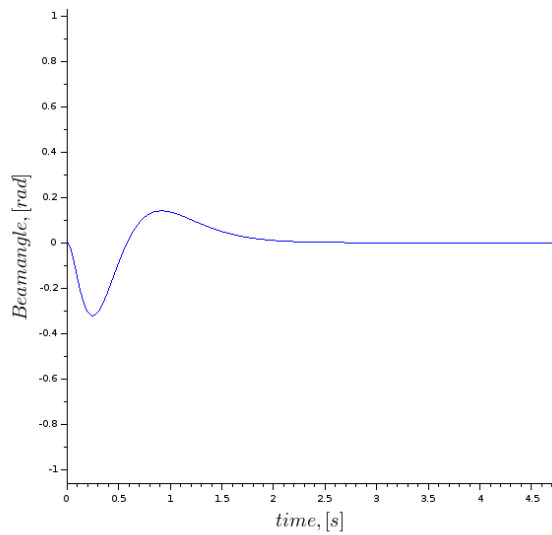
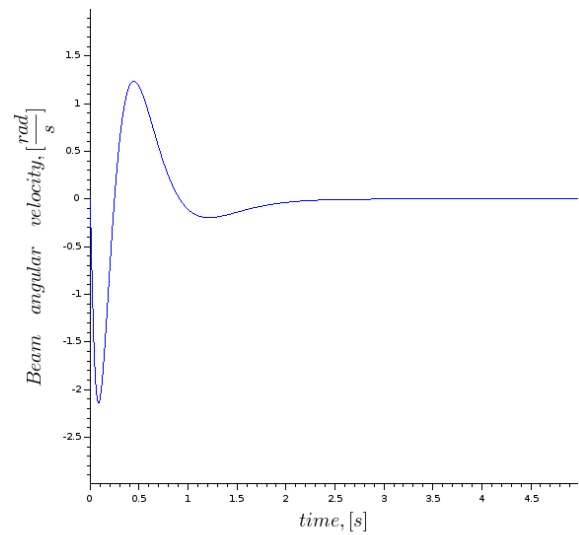


Рис. 5: График изменения напряжения

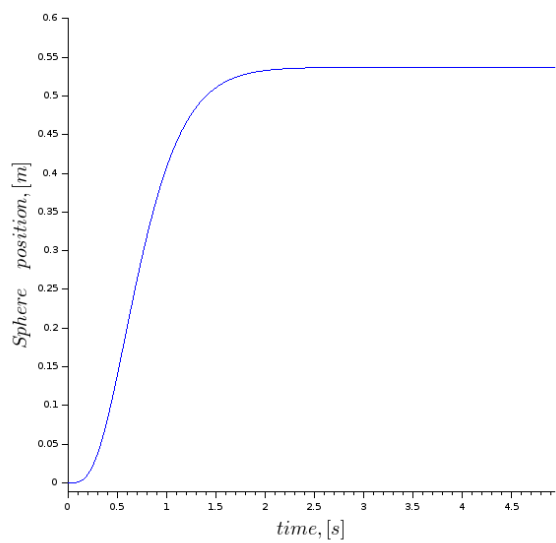


а)

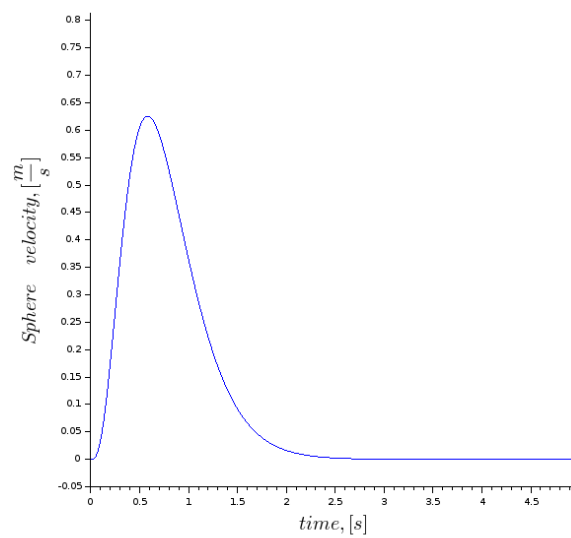


б)

Рис. 6: Графики изменения угла наклона балки (а) и и ее угловой скорости (б)



а)



б)

Рис. 7: Графики изменения позиции шарика (а) и его скорости (б)

5 Заключение

Итак, я рассмотрел неполноприводную систему Ball and Beam. Получил ее математическую модель, пользуясь методом Эйлера-Лагранжа. Выбрал регулятор для управления этой системой и рассчитал для него коэффициенты. После чего провел моделирование полученной замкнутой системы управления в среде scilab.

Результаты проделанной работы:

1. получена математическая модель системы;
2. рассчитан регулятор;
3. произведено моделирование, по результатам которого можно заключить:
 - (a) мячик действительно стабилизируется на балке за заданное время;
 - (b) система имеет статическую ошибку, тем больше, чем больше масса шарика;
 - (c) управляющее напряжение не сходится к нулю, так как при заданной конструкции системы для поддержания балки и шарика в горизонтальном положении с необходимо определенное усилие со стороны двигателя.

Следующим этапом работы, должно стать применение полученных теоретических выкладок в реальной системе. Но, стоит заметить, что поведение реальной системы может кардинально отличаться от поведения ее виртуальной копии ввиду того, что чаще всего модели строятся на всевозможных упрощениях и договоренностях.