МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет компьютерных технологий и управления

Кафедра систем управления и информатики

Студент: Артемов Кирилл

группа P4135

Домашнее задание № 2

Вывод уравнений движения плоского двухзвенного маятника на основе метода Ньютона-Эйлера и численная реализация в рекуррентном виде

Преподаватель

__________ С. А. Колюбин

«___» ________ 2016 г.

Санкт-Петербург, 2016 г.

Содержание

1 Задание

1. Вывести аналитически уравнения движения плоского двухзвенного маятника (рисунок 1) на основе метода Ньютона-Эйлера;

2. Разработать программу, реализующую полученную динамическую модель робота для решения обратной задачи динамики (численная реализация уравнений Ньютона-Эйлера в рекуррентном виде).

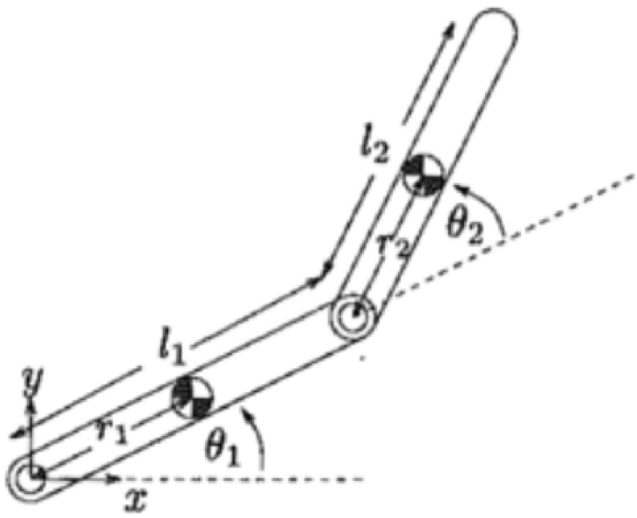

Рис. 1: Плоский двухзвенный маятник: 2 вращательных сочленения. Оба звена – цилиндрические стержни.

На рисунке 1: l_1, l_2 – длины звеньв, r_1, r_2 – расстояния от начала звена до центра масс каждого из звеньев, θ_1, θ_2 – углы поворота звеньев.

2 Вывод уравнений движения

2.1 Инициализация

Звенья вращательые, следователньо обобщенные координаты q_i это θ_i.

Входные данные: $q, \dot{q}, \dot{q}$ – траектория движения, $l_1, l_2, r_1, r_2, d_1^{link}, d_2^{link}$ – геометричческие параметры, $m1, m2, I_i$ – динамические параметры.

Первым делом прикрепим системы координат к маятнику в соответсвии с методом Денавита-Хартенберга как показано на рисунке 2.

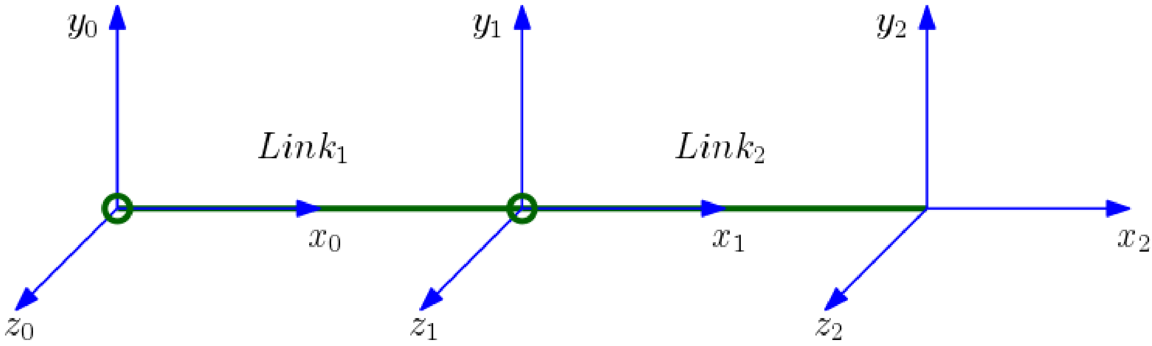

Рис. 2: Системы координат по методу ДХ

Составим таблицу 1 с параметрами ДХ.

Таблица 1: Параметры ДХ

№	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	0
2	l_2	0	0	0

Матрицы поворота:

$$^0R_1 = \begin{bmatrix} cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$^1R_2 = \begin{bmatrix} cos(q_2) & -sin(q_2) & 0 \\ sin(q_2) & cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2.2 Вывод уравнений

Расчет тензора инерции

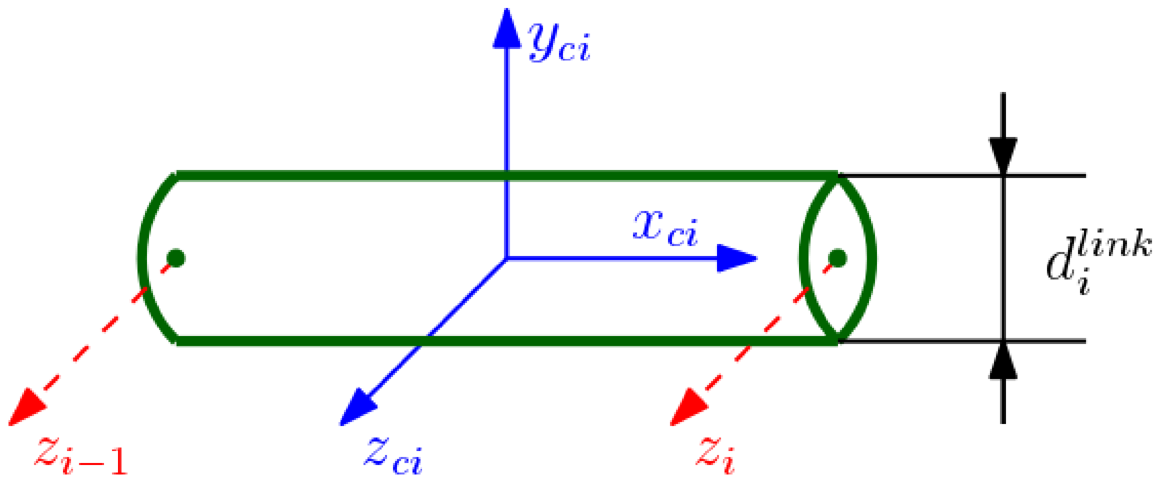

Рис. 3: Системы координат в звене

Примем за радиус $r_{link_i} = \frac{d_2^{link}}{2}$. Запишем моменты инерции для каждой из осей СК закрепленной в центре масс, как на рисунке 3.

$$I_i^{xx} = \frac{m_i r^2}{2} \tag{3}$$

$$I_i^{yy} = \frac{m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)}{12} \tag{4}$$

$$I_i^{zz} = \frac{m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)}{12} \tag{5}$$

Тензор инерции примет вид:

$$I_i = \begin{bmatrix} m_i r^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)/2 & 0 \\ 0 & 0 & m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)/2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Так как ось вращения проходит через начало звена, а не через центр, то воспользовавшись теоремой Гюйгенса - Штейнера, получим тензор инерции относительно оси вращения звена. Формула для пересчета:

$$J_{ij} = I_{ij} + m(\mathbf{d}^2 * \delta_{ij} - a_i a_j) \tag{7}$$

где J_{ij} – элемент полученного тензора, I_{ij} – элемент исходного тензора, $\mathbf{d} = (a_1, a_2, a_3)$ – вектор смещения центра масс (r_1, r_2 по оси X для каждого звена из рисунка 1), δ_{ij} – символ Кронекера.

Получаем тензор инерции для оси вращения звена (начало звена):

$$J_i = \begin{bmatrix} m_i r^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)/2 + m_i r_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)/2 + m_i r_i^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

где r_i – расстояние до центра масс звена i. Так как оба звена цилиндрические стержни, то полученный тензор инерции справедлив для обоих звеньев.

Начальные условия

$$n = 2 \quad (9)$$

$$i = 1..2 \quad (10)$$

$$g = 9.81 \quad (11)$$

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

$$a_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$a_0 = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$f_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

$$\tau_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

Уравнения для прямой рекурсии

- Звено 1

$$\omega_1 =^0 R_1^T[\omega_0 + \dot{q}_1 z_0] = \begin{bmatrix} cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\omega}_1 =^0 R_1^T[\dot{\omega}_0 + \ddot{q}_1 z_0 + \dot{q}_1 \omega_0 \times z_0] = \begin{bmatrix} cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 =^0 R_1^T[a_0 + \dot{\omega}_1 \times^1 r_{01} + \omega_1 \times (\omega_1 \times^1 r_{01})] =$$
$$= \begin{bmatrix} cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \ddot{1}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -gsin(q_1) - l_1 \ddot{q}_1^2 \\ gcos(q_1) + l_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{c1} = a_1 + \dot{\omega}_1 \times r_{1,c1} + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{1,c1}) = \begin{bmatrix} -gsin(q_1) - l_1 \ddot{q}_1^2 \\ gcos(q_1) + l_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{q}_1 & 0 \\ \ddot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{q}_1 & 0 \\ \ddot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \begin{bmatrix} -gsin(q_1) - l_1 \ddot{q}_1^2 \\ gcos(q_1) + l_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -r_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \dot{q}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -gsin(q_1) - l_1 \ddot{q}_1^2 + r_1 \dot{q}_1^2 \\ gcos(q_1) + l_1 \ddot{q}_1 - r_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Звено 2

$$\omega_2 =^1 R_2^T[\omega_1 + \dot{q}_2 z_1] = \begin{bmatrix} cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\omega}_2 =^1 R_2^T[\dot{\omega}_1 + \ddot{q}_2 z_1 + \dot{q}_2 \omega_1 \times z_1] =$$

$$= \begin{bmatrix} cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2\ddot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_2\ddot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$a_2 =^1 R_2^T a_1 + \dot{\omega}_2 \times^2 r_{12} + \omega_2 \times (\omega_2 \times^2 r_{11}) =$$

$$= \begin{bmatrix} cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2 \\ gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) & 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} cos(q_2)(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - sin(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) + r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ sin(q_2))(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - cos(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) - r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{c2} = a_2 + \dot{\omega}_2 \times r_{2,c2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{2,c2}) =$$

$$= \begin{bmatrix} cos(q_2)(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - sin(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) + r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ sin(q_2))(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - cos(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) - r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) & 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} cos(q_2)(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - sin(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) + r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ sin(q_2))(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - cos(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) - r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Уравнения для обратной рекурсии

- Звено 2

$$f_2 = f_3 + m_2 a_{c2} =$$

$$= \begin{bmatrix} m_2 cos(q_2)(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - m_2 sin(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) \\ m_2 sin(q_2))(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - m_2 cos(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} m_2 r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ m_2 r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_2 r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_2 = \tau_3 - f_2 \times (^2r_{12} + r_{2,c2}) + f_3 \times r_{2c2} + J_2\dot{\omega}_2 + \omega_2 \times (J_2\omega_2) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} m_2cos(q_2)(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - m_2sin(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) \\ m_2sin(q_2))(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - m_2cos(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} m_2r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ m_2r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_2r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} l_2 - r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{m_ir^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)}{2} + m_ir_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)}{2} + m_ir_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\frac{m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)}{2} + m_ir_i^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} m_2cos(q_2)(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - m_2sin(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) \\ m_2sin(q_2))(-gsin(q_1) - l_1\ddot{q}_1^2) - m_2cos(q_2)(gcos(q_1) + l_1\ddot{q}_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} m_2r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2r_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ m_2r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) - m_2r_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} l_2 - r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\frac{m_i(3r_{link_i}^2 + l_i^2)}{2} + m_ir_i^2 \end{bmatrix}$$

- Звено 1

$$f_1 = f_2 + m_1a_{c1}$$

$$\tau_1 = \tau_2 - f_1 \times (^1r_{01} + r_{1,c1}) + f_2 \times r_{1c1} + J_1\dot{\omega}_1 + \omega_1 \times (J_1\omega_1)$$

$$\left[\ddot{q}_1 \left(m_1 r_1^{l\,2} + \frac{1}{12}\,\mathrm{m}_1 \left(l_1^2 + 3 r_1^{l\,2} \right) \right) + m_2 r_2 \left(l_2 \left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \right) + \left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \right) \left(-l_2 + r_2 \right) + \left(\ddot{q}_1 l_1 + g \cos \right.\right.\right.$$

2.3