Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра систем управления и информатики

Отчет по практической работе № 1
«Вывод уравнений движения трехзвенного портального (декартового) манипулятора на основе метода Эйлера-Лагранжа»
по дисциплине «Динамика робототехнических систем»

Выполнил: студент гр. P4135
Артемов К.
Преподаватель: Колюбин С. А.

.

Санкт-Петербург, 2016

Дано:

1. Вывести аналитически уравнение движение трехзвенного портального (декартового) манипулятора на основе метода Эйлера-Лагранжа.

2. В решении представить подробный вывод, включая расчет тензоров инерции, кинетической и потенциальной энергии системы, матрицы инерции, векторов центробежных и Кориолисовых сил, а также вектора гравитации.

Таблица 1 –параметров DH

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_1	0
2	0	$\frac{\pi}{2}$	d_2	$\frac{\pi}{2}$
3	0	0	d_3	0

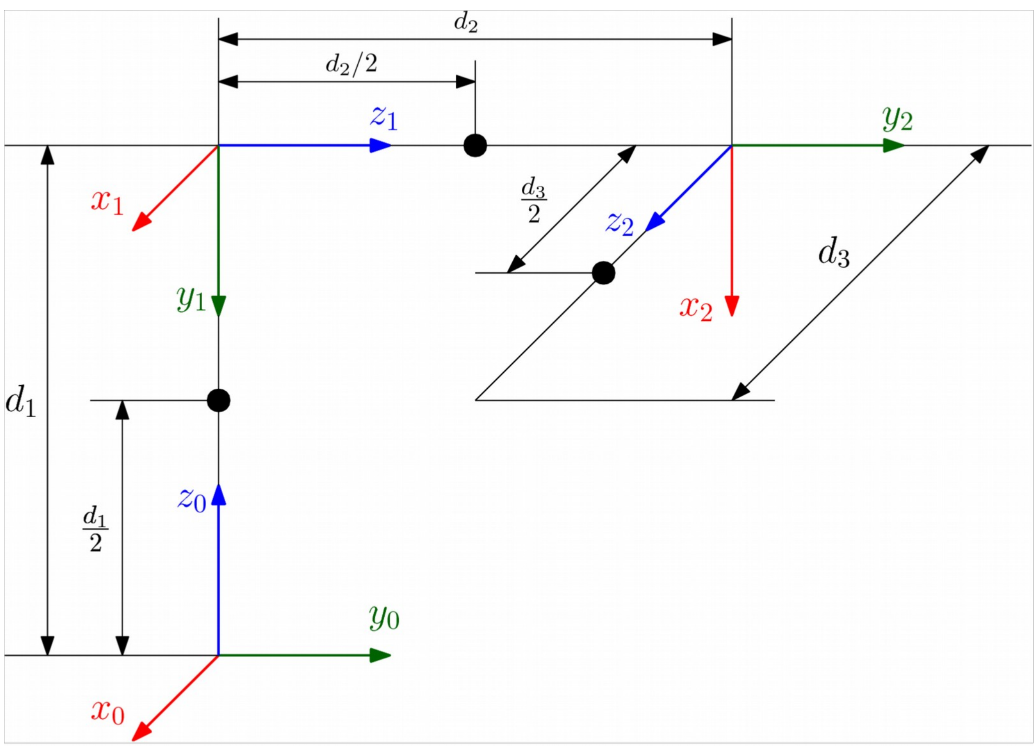

Рисунок 1 – Системы координат заданного манипулятора

1 Ход работы

1.1 Инициализация параметров

Манипулятор имеет только телескопические звенья, следовательно:

$$\sigma_i = 1$$

Для первого, второго и третьего звеньев:

$$i = 1, 2, 3$$

1.2 Расчет матриц поворота

$$^0R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^1R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^2R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Расчет векторов из начала координат в центры масс каждого из звеньев

$$^0r_{c1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$^1r_{c2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$^2r_{c3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d_3}{2} \end{pmatrix}$$

1.4 Начальные условия

$$^0\omega_0 = 0$$

$$^{0}v_0 = 0$$

1.5 Расчет угловых и линейных скоростей

Рекуррентные формулы для расчета скоростей для каждого из звеньев:

$$^{i}\omega_i =^{i-1} R_i(q_i)[^{i-1}\omega_{i-1} + (1-\sigma_i)\ _{i}\ ^{i-1}z_{i-1}]$$

$$^{i}v_i =^{i-1} R_i^T(q_i)[^{i-1}v_{i-1} + \sigma_i\dot{q}_i\ ^{i-1}z_{i-1} +^{i-1}\omega_i \times^{i-1} r_{i-1,i}]$$

Плоский манипулятор не имеет вращательных звеньев, следовательно, угловые скорости каждого из звеньев равны нулю (если подставить параметр [illegible], равный единице, в формулу, получим ноль, вследствие чего все выражение обратиться также в ноль).

$$\omega_1 = 0$$

$$\omega_2 = 0$$

$$\omega_3 = 0$$

$$v_1 =^{0} R_1^T(d_1)[0+\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{d}_1\end{pmatrix}+0] = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{d}_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\dot{d}_1\\0\end{pmatrix}$$

$$v_2 =^{1} R_2^T(d_2)[\begin{pmatrix}0\\-\dot{d}_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{d}_2\end{pmatrix}+0] = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-\dot{d}_1\\\dot{d}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dot{d}_1\\\dot{d}_2\\0\end{pmatrix}$$

$$v_3 =^{2} R_3^T(d_3)[\begin{pmatrix}-\dot{d}_1\\\dot{d}_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{d}_3\end{pmatrix}+0] = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dot{d}_1\\\dot{d}_2\\\dot{d}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dot{d}_1\\\dot{d}_2\\\dot{d}_3\end{pmatrix}$$

1.6 Расчет кинетической энергии. Матрица инерции.

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{d}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{d}_1^2 + \dot{d}_2^2)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{d}_1^2 + \dot{d}_2^2 + \dot{d}_3^2)$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{d}_1^2 + m_2 \dot{d}_1^2 + m_2 \dot{d}_2^2 + m_3 \dot{d}_1^2 + m_3 \dot{d}_2^2 + m_3 \dot{d}_3^2) =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \dot{d}_2 \dot{d}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{pmatrix}$$

Отсюда, матрица инерции:

$$I = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

1.7 Расчет потенциальной энергии

$$U_1 = -m_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d_1}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{m}_1 g \frac{d_1}{2}$$

$$U_2 = -m_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{pmatrix} = \mathrm{m}_2 g d_2$$

$$U_3 = -m_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{pmatrix} = \mathrm{m}_3 g d_3$$

$$U = (\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3) g d_1$$

1.8 Расчет вектора центробежных и кориолисовых сил

Так как манипулятор плоский и угловые скорости всех звеньев равны нулю, то и центробежных сил нет, т.е. они также равны нулю.

1.9 Расчет вектора гравитации

$$g(d) = \frac{\partial U^T}{\partial d} = \begin{pmatrix} g(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.10 Вывод уравнений Эйлера-Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{d}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{d}_1^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{d}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{d}_3^2 - (\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3)gd_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} - \frac{\partial L}{\partial d_1} = U_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} = m_1\dot{d}_1 + m_2\dot{d}_1 + m_3\dot{d}_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} = m_1\ddot{d}_1 + m_2\ddot{d}_1 + m_3\ddot{d}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_1} = -g(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} - \frac{\partial L}{\partial d_2} = U_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} = m_2\dot{d}_2 + m_3\dot{d}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} = m_2\ddot{d}_2 + m_3\ddot{d}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_3} - \frac{\partial L}{\partial d_3} = U_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_3} = m_3\dot{d}_3$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_3} = m_3\ddot{d}_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_3} = 0$$

1.11 Итоговые уравнения движения

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{d}_1 + g(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3) = U_1$$
$$(m_2 + m_3)\ddot{d}_2 = U_2$$

$$m_3\ddot{d}_3 = U_3$$