Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра ___Систем управления и информатики____ Группа__P4235__

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

по курсу: «Методы оптимального и адаптивного управления»

Поиск минимума критерия качества
для статической задачи оптимизации

Вариант №2

Авторы работы: Антонов Е.С.,
Артемов К.А.

Преподаватель: Герасимов Д.Н.

«__» декабря 2017 г.

Работа выполнена с оценкой ______________

Дата защиты «___» ________ 2017 г.

Санкт-Петербург

2017 г.

1 Цель работы

Применяя разные методы, найти минимум заданного функционала.

2 Теоретические сведения

Функция $J(\xi)$ в точке ξ^* имеет минимум, если выполняются два условия:

а) Необходимое условие:

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = grad\ J = 0, \tag{1}$$

б) Достаточное условие:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} > 0. \tag{2}$$

Функция Лагранжа представляется следующим выражением:

$$J_A(x, u, \lambda) = J(x, u) + \lambda \cdot c(x, u), \tag{3}$$

где $J(x, u)$ – некоторая функция, λ – множитель Лагранжа, $c(x, u)$ – уравнение связи.

3 Исходные данные

Варианту №2 соответствует следующий набор исходных данных.
Функционал:

$$J(x, u) = 2x^2 + u^2 + 2xu + 3x + 5u - 10 \tag{4}$$

Ограничение:

$$c(x, u) = x - 2u^2 \tag{5}$$

4 Поиск глобального минимума на основе необходимого и достаточного условий

4.1 Без ограничений

Из необходимого условия (1) экстремума функции, при $\xi = \begin{bmatrix} x & u \end{bmatrix}^T$:

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} 4x + 2u + 3 \\ 2x + 2u + 5 \end{bmatrix}; \tag{6}$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 2u + 3 = 0 \\ 2x + 2u + 5 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Откуда, точка экстремума:

$$\xi^* = \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{7}{2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Из достаточного условия (2), запишем матрицу Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 J}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial x \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial u \partial x} & \dfrac{\partial^2 J}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Так как первый и второй миноры матрицы Гессе H положительны, заключаем, что точка $\xi^* = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{7}{2} \end{bmatrix}^T$ — глобальный минимум $J(\xi)$. Поверхность заданной функции (4) можно увидеть на рисунке 4.1

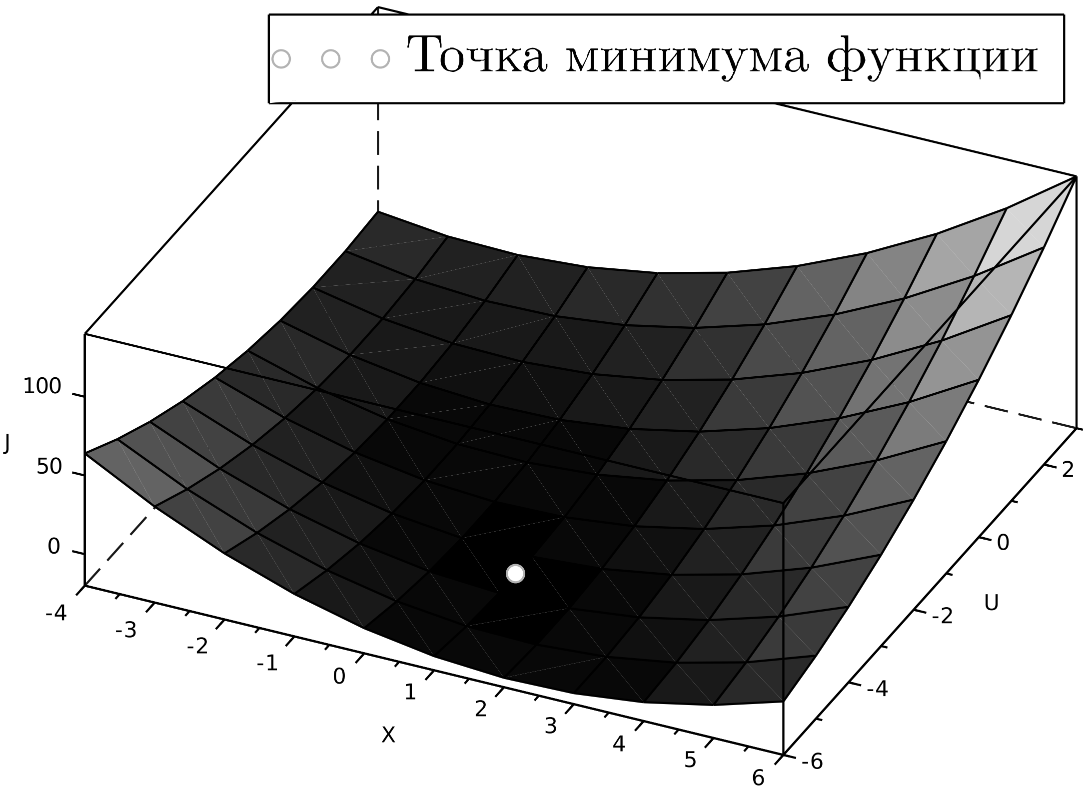

Рисунок 1 – Глобальный минимум функции $J(x, u)$

4.2 С ограничением в виде равенства $c(x, u) = 0$

а) Первый способ решения.

Выразим из ограничения (5) x:

$$x = 2u^2 \tag{10}$$

Подставим в (4):

$$J(u) = 8u^4 + 4u^3 + 7u^2 + 5u - 10 \tag{11}$$

Найдем критические точки функции $J(u)$, в соответствии с необходимым условием (1).

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 32u^3 + 12u^2 + 14u + 5 = 0 \tag{12}$$

Уравнение имеет единственный действительный корень $u = -0.3612456$, подставив который в (10), найдем $x = 0.2609967$. Таким образом, точка экстремума представляется, как:

$$\xi^* = \begin{bmatrix} x^* \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2609967 \\ -0.3612456 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Проверим достаточное условие (2) экстремума для найденной точки ξ^*, для это найдем частную производную второго порядка функции J:

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 4 > 0 \tag{14}$$

Так как достаточное условие выполняется, заключаем, что в точке ξ^* находится минимум функции $J(x, u)$.

Итак, в условиях ограничения $c(x, u) = 0$, минимум функции (4) равен:

$$J(x, u)_{min} = -10.945069 \tag{15}$$

б) Второй способ решения. Метод множителей Лагранжа.

Составим расширенный критерий, записав функцию Лагранжа для заданной функции (4) и условия ограничения (5):

$$J_A(x, u, \lambda) = 2x^2 + u^2 + 2xu + 3x + 5u - 10 + \lambda(x - 2u^2), \tag{16}$$

В соответствии с необходимым условием (5), найдем частные производные J_A:

$$\frac{\partial J_A}{\partial x} = 4x + 2u + 3 + \lambda; \ \frac{\partial J_A}{\partial u} = 2x + 2u + 5 - 4\lambda u \tag{17}$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_A}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial J_A}{\partial u} = 0 \\ c(x, u) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x + 2u + 3 + \lambda = 0 \\ 2x + 2u + 5 - 4\lambda u = 0 \\ x - 2u^2 = 0 \end{cases}; \tag{18}$$

(19)

Домножим обеи части первого уравнения на $4u$, затем сложим первые два уравнения, а из второго выразим x:

$$\begin{cases} 16ux + 8u^2 + 14u + 2x + 5 = 0 \\ x = 2u^2 \end{cases}; \tag{20}$$

Подставляя второе в первое, в итоге получим кубическое уравнение:

$$32u^3 + 12u^2 + 14u + 5 = 0, \tag{21}$$

Решением которого является единственный действительный корень $u^* = -0.3612456$. Отсюда $x^* = 0.2609967$ и точка $\xi^* = \begin{bmatrix} 0.2609967 \\ -0.3612456 \end{bmatrix}$.

Если сейчас найти λ из первого и второго уравнений, она выйдет разной. и, если продолжить выполнять проверку подставляя полученные u и x в систему уравнений, то проверка не удовлетворит равенствам.

Проверим полученную точку ξ^* на достаточное условие. Для этого, найдем частные производные функции $J_A(x, u, \lambda)$ по λ:

$$\frac{\partial^2 J_A}{\partial\lambda\partial x} = 1; \quad \frac{\partial^2 J_A}{\partial\lambda\partial u} = -4u; \tag{22}$$

Также найдем частные производные второго порядка относительно аргументов x и u:

$$\frac{\partial^2 J_A}{\partial x^2} = 4; \quad 0\frac{\partial^2 J_A}{\partial u^2} = 2 - 4\lambda; \quad \frac{\partial^2 J_A}{\partial x\partial u} = 2. \tag{23}$$

Из полученных производных составим матрицу в виде:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial J_A}{\partial\lambda\partial x} & \frac{\partial J_A}{\partial\lambda\partial u} \\ \frac{\partial J_A}{\partial\lambda\partial x} & \frac{\partial^2 J_A}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 J_A}{\partial x\partial u} \\ \frac{\partial J_A}{\partial\lambda\partial u} & \frac{\partial^2 J_A}{\partial u\partial x} & \frac{\partial^2 J_A}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4u \\ 1 & 4 & 2 \\ -4u & 2 & 2-4\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.44 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1.44 & 2 & 15.28 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Найдем определитель:

$$\det A = -17.857949 < 0 \tag{25}$$

Следовательно, при ограничениях (5) функция $J_A(x, u, \lambda)$ в точке ξ^* имеет минимум, равный:

$$J(x, u)_{min} = -10.945069 \tag{26}$$

Полученная точка изображена на рисунке 6.

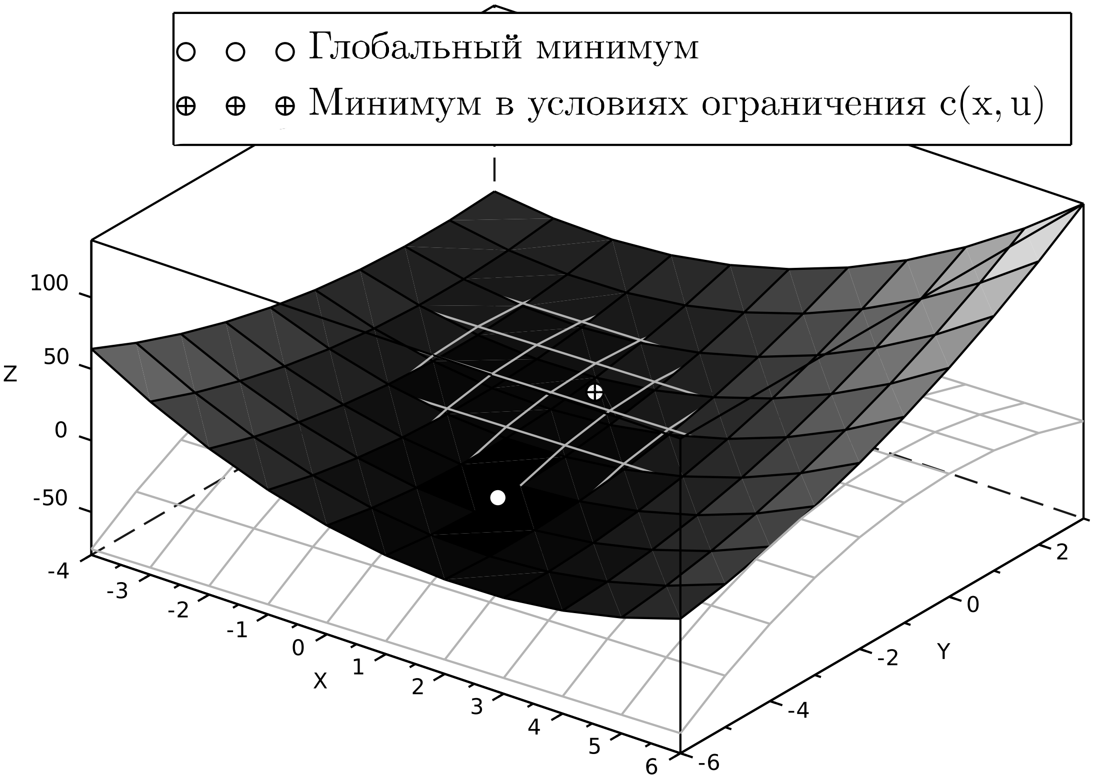

Рисунок 2 – Минимум функции $J(x, u)$ в условиях ограничения $c(x, u)$

4.3 С ограничением в виде неравенства $c(x, u) \leq 0$

Выполним проверку на ограничение в виде $c(x, u) \leq 0$, для этого подставим точку глобального минимума (8) в функцию Лагранжа (16), получим, $\lambda = 3.33$ из (18):

$$J_A(x, u, \lambda) = -95.505, \tag{27}$$

что не соответствует значению глобального минимума и, следовательно несправедливо для рассматриваемого ограничения.

5 Градиентный поиск минимума критерия качества

5.1 Пошаговый расчет экстремума методом Ньютона-Рафсона

Алгоритм численного поиска минимума функции (4) методом Ньютона-Рафсона представляется следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} - H^{-1} \cdot grad\, J\Big|_{x_k, u_k} \tag{28}$$

где $\xi_k = \begin{bmatrix} x_k & u_k \end{bmatrix}^T$, H — матрица Гессе (9), $gradJ$ — градиент функции $J(x, u)$ (6).

Произведем инициализацию:

$$\xi_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix};\ H^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{4} & -\dfrac{2}{4} \\ -\dfrac{2}{4} & 1 \end{bmatrix};\ grad\, J\Big|_{x,u} = \begin{bmatrix} 4x + 2u + 3 \\ 2x + 2u + 5 \end{bmatrix}.$$

Будем применять выражение (28) для $k \geq 0$, пока $grad\, J \neq 0$.

Для $\boxed{k = 0}$:

$$grad\, J\Big|_{10,10} = \begin{bmatrix} 27 \\ 19 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{2}{4} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13.5 - 9.5 \\ -13.5 + 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 4 \\ 2 - 5.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 1}$, получаем:

$$grad\, J\Big|_{-15,14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Итак, так как градиент в найденной точке равен нулю, заключаем, что нашли точку экстремума $\xi^*(1, -3.5)$ функции (4), что полностью совпадает с решением из пункта 4.1. Графическую интерпретацию поиска этой точки можно увидеть на рисунке 3

5.2 Пошаговый расчет экстремума методом наискорейшего спуска

Алгоритм численного поиска минимума функции (4) методом наискорейшего спуска представляется следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} - \gamma \cdot grad\, J\Big|_{x_k, u_k} \tag{31}$$

где $\xi_k = \begin{bmatrix} x_k & u_k \end{bmatrix}^T$, γ — коэффициент скорости поиска, $gradJ$ — градиент функции $J(x, u)$ (6).

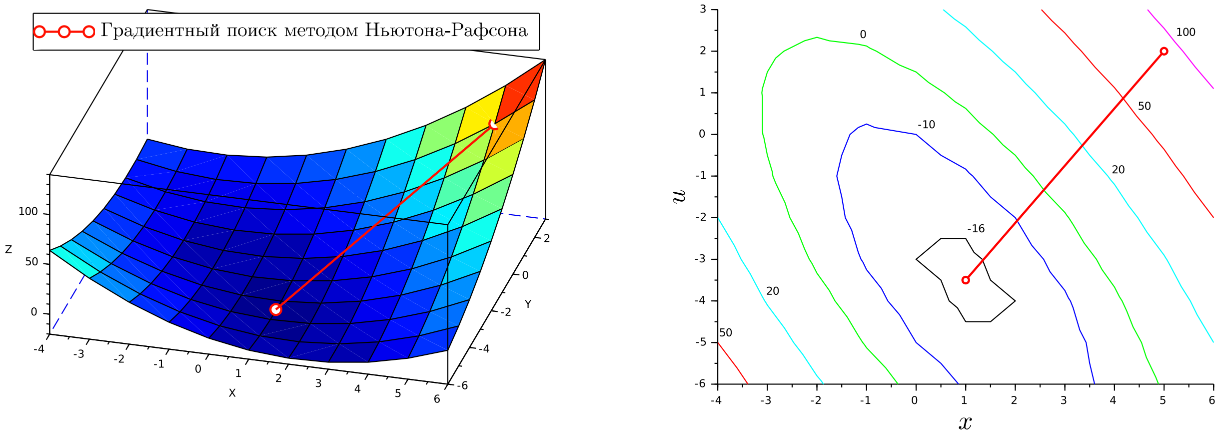

Рисунок 3 – Графическая интерпретация метода Ньютона— Рафсона

Произведем инициализацию:

$$\xi_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \ grad\, J\Big|_{x,u} = \begin{bmatrix} 4x + 2u + 3 \\ 2x + 2u + 5 \end{bmatrix}.$$

Будем применять выражение (31) для $k \geq 0$, пока $grad\, J \neq 0$.

а) $\gamma = 0.3$ – колебательная сходимость.

Для $\boxed{k = 0}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 27 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 8.1 \\ 2 - 5.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.1 \\ -3.7 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 1}$:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.1 \\ -3.7 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} -16.8 \\ -8.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.1 + 16.8 \\ -3.7 + 2.58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.94 \\ -1.12 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 2}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.94 \\ -1.12 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 8.52 \\ 6.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.94 + 0.616 \\ -1.12 + 3.112 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.616 \\ -3.112 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 3}$:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.616 \\ -3.112 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} -5.688 \\ -2.456 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.616 - 1.0904 \\ -3.112 + 2.3752 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.0904 \\ -2.3752 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 4}$:

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0904 \\ -2.3752 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 2.6112 \\ 2.4304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0904 - 0.7833 \\ -2.3752 - 0.72912 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30704 \\ -3.10432 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k=5}$:

$$\begin{bmatrix} x_6 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30704 \\ -3.10432 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} -1.98048 \\ -0.59456 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30704 + 0.5941 \\ -3.10432 + 0.1783 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9011 \\ -2.9259 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k=6}$:

$$\begin{bmatrix} x_7 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.901184 \\ -2.925952 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 0.752832 \\ 0.950464 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.901184 - 0.2258 \\ -2.9259 - 0.2851 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6753 \\ -3.21109 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k=7}$:

$$\begin{bmatrix} x_8 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6753344 \\ -3.2110912 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} -0.7208448 \\ -0.0715136 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6753 + 0.2162 \\ -3.21109 + 0.0214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8915878 \\ -3.1896371 \end{bmatrix}$$

Подобные шаги повторяются для $k = \overline{8, 135}$, где при $\boxed{k = 135}$:

$$\begin{bmatrix} x_{136} \\ u_{136} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.5 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$

Градиент принимает значение равное нулю, следовательно точка $\xi^*(x_{136}, u_{136})$ – точка минимума функции $J(x, u)$. На рисунке 4 изображены шаги поиска минимума с колебательной сходимостью.

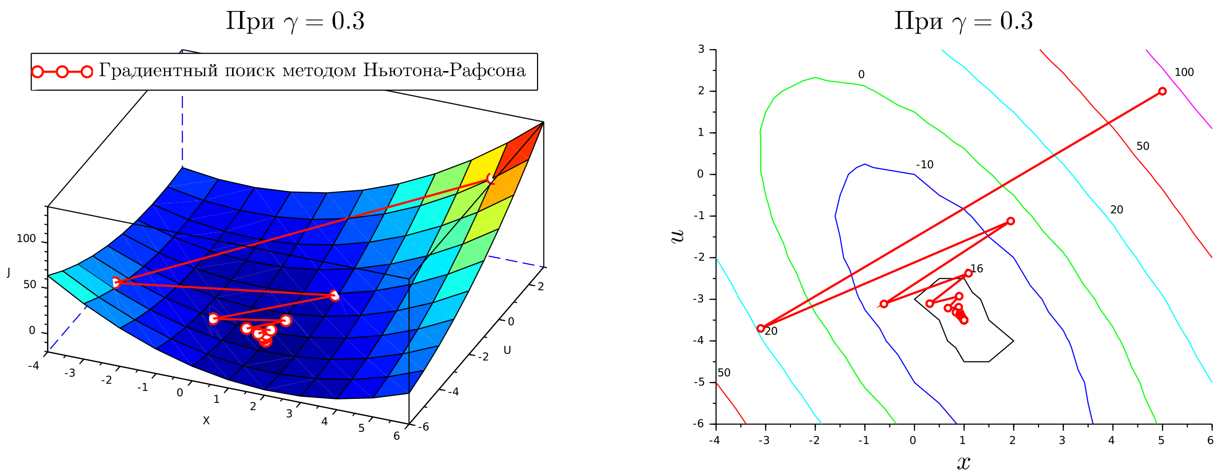

Рисунок 4 – Графическая интерпретация метода Ньютона-Рафсона

б) $\gamma = 0.01$ – апериодическая сходимость.

Для $\boxed{k=0}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 27 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 0.27 \\ 2 - 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.73 \\ 1.81 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 1}$:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.73 \\ 1.81 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 25.54 \\ 18.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.73 - 0.255 \\ 1.81 - 18.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.474 \\ 1.629 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 2}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.474 \\ 1.629 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 24.156 \\ 17.207 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.474 - 0.241 \\ 1.629 - 0.172 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.233 \\ 1.457 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 3}$:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.233 \\ 1.457 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 22.846 \\ 16.38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.233 - 0.228 \\ 1.457 - 0.163 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.004 \\ 1.293 \end{bmatrix}$$

Для $\boxed{k = 4}$:

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.004 \\ 1.293 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 21.604 \\ 15.595 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.004 - 0.216 \\ 1.293 - 0.155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.788 \\ 1.137 \end{bmatrix}$$

И так 4131 раз, где при $\boxed{k = 4130}$:

$$\begin{bmatrix} x_{4131} \\ u_{4131} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.5 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$

Градиент принимает значение равное нулю, следовательно точка $\xi^*(x_{4131}, u_{4131})$ — точка минимума функции $J(x, u)$. На рисунке 5 изображены шаги поиска минимума с апериодической сходимостью.

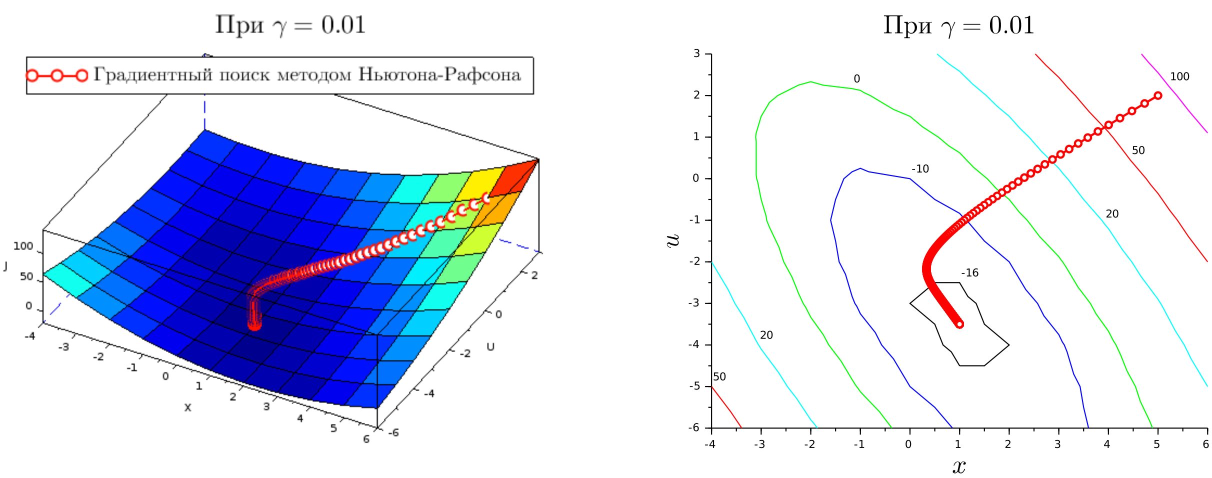

Рисунок 5 – Графическая интерпретация метода наискорейшего спуска

6 Выводы по работе

В результате проделанной работы были:

а) найдены минимумы критерия качества заданной функции (4) как безусловные, так и в условиях заданного ограничения (5). Построены соответствующие поверхности, на которых отмечены соответствующие точки разыскиваемых экстремумов, рисунки 4.1—4.2.

б) пошагово выполнены два метода градиентного поиска минимума: метод Ньэтона—Рафсона и метод наискорейшего спуска. Выполнены необходимые для максимальной наглядности построения, рисунки 3—5.