Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра Систем управления и информатики Группа P4235

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

по курсу: «Методы оптимального и адаптивного управления»

Синтез оптимального стабилизирующего регулятора

Вариант №2

Авторы работы: Антонов Е.С.,
Артемов К.А.

Преподаватель: Герасимов Д.Н.

«09» декабря 2017 г.

Работа выполнена с оценкой ______________

Дата защиты «__» ________2017 г.

Санкт-Петербург

2017 г.

1 Цель работы

Рассчитать коэффициенты регулятора, оптимально решающего задачу стабилизации заданного ОУ при заданном критерии качества.

2 Теоретические сведения

Рассматриваемый объект управления:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0), \tag{1}$$

где x — переменная состояния объекта, u — сигнал управления, A, b — постоянные и известные матрицы.

Структура синтезируемого регулятора:

$$u = -Kx; \tag{2}$$

уравнения для расчета матрицы K:

$$A^T P + PA + Q - Pbr^{-1}b^T P = 0, \tag{3}$$

$$K = r^{-1}b^T P. \tag{4}$$

Заданный критерий качества:

$$J = \int_0^t x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau)d\tau. \tag{5}$$

3 Исходные данные

Варианту №2 соответствует следующий набор исходных данных:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = 2. \tag{6}$$

4 Результаты практических действий

Некоторые преобразования над расчетной формулой значения критерия качества:

$$J(t) = \int\limits_0^t x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \left(e^{F\tau}x(0)\right)^T Qe^{F\tau}x(0) + r\big(-Kx(\tau)\big)\big(-Kx(\tau)\big)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t x^T(0)\big(e^{F\tau}\big)^T Qe^{F\tau}x(0) + rx^T(\tau)K^T Kx(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t x^T(0)\big(e^{F\tau}\big)^T Q e^{F\tau} x(0) + x^T(0)\big(e^{F\tau}\big)^T r K^T K e^{F\tau} x(0)\, d\tau =$$

$$= x^T(0)\left(\int_0^t \big(e^{F\tau}\big)^T (Q + rK^T K) e^{F\tau}\, d\tau\right) x(0) =$$

$$= x^T(0)\left(\int_0^t \big(M e^{\Lambda\tau} M^{-1}\big)^T (Q + rK^T K) M e^{\Lambda\tau} M^{-1}\, d\tau\right) x(0) =$$

$$= \big(M^{-1}x(0)\big)^T \left(\int_0^t e^{\Lambda\tau} R e^{\Lambda\tau}\, d\tau\right) M^{-1}x(0) \overset{\circ}{=}$$

$$\int_0^t e^{\Lambda\tau} R e^{\Lambda\tau}\, d\tau = \int_0^t e^{\Lambda\tau} R\, d\big(\Lambda^{-1} e^{\Lambda\tau}\big) = \left(\int_0^t e^{\Lambda\tau}\, d\big(\Lambda^{-1}e^{\Lambda\tau}\big)\right) R =$$

$$= \left(e^{\Lambda\tau}\Lambda^{-1}e^{\Lambda\tau}\Big|_0^t - \int_0^t \Lambda^{-1} e^{\Lambda\tau}\, d\big(e^{\Lambda\tau}\big)\right) R = \left(e^{\Lambda\tau}\Lambda^{-1}e^{\Lambda\tau} - \Lambda^{-1}\frac{(e^{\Lambda\tau})^2}{2}\right)\Bigg|_0^t \cdot R$$

$$\overset{\circ}{=} \big(M^{-1}x(0)\big)^T \left(\left(e^{\Lambda\tau}\Lambda^{-1}e^{\Lambda\tau} - \Lambda^{-1}\frac{(e^{\Lambda\tau})^2}{2}\right)\Bigg|_0^t\right) R\, M^{-1}x(0), \tag{7}$$

где $F = A - bK$;

M — матрица собственных векторов матрицы F;

Λ — диагональная каноническая форма матрицы F;

$R = M^T(Q + rK^T K)M$.

Результаты решения уравнений (3) и (4):

$$P = \begin{bmatrix} 0.7437018 & 0.2881293 \\ 0.2881293 & 0.4990547 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.8877665 & 0.5376567 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Соответствующие случаю использования данной версии K значения критерия качества и промежуточных величин:

$$F = \begin{bmatrix} -1.775533 & -0.0753133 \\ 0.1122335 & -1.5376567 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} -0.8660254 & 0.3612610 \\ 0.5 & -0.9324647 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1.7320508 & 0 \\ 0 & -1.5811388 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5984631 \\ -0.5984631 & 1.0652547 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$J(5) = 0.7428108. \tag{11}$$

При увеличении компонентов матрицы K на 20%:

$$K = \begin{bmatrix} 1.0653198 & 0.6451880 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

значения этих же величин окажутся следующими:

$$F = \begin{bmatrix} -2.1306396 & -0.2903760 \\ -0.0653198 & -1.645188 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} -0.9922557 & 0.4862652 \\ -0.1242119 & -0.8738113 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2.1669892 & 0 \\ 0 & -1.6088383 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 3.5864917 & -0.2699194 \\ -0.2699194 & 1.0041851 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$J(5) = 0.7586280. \tag{15}$$

Графики переходных процессов в рассматриваемой системе при двух выше приведенных версиях матрицы K показаны на рисунке 1, а использованная для их получения схема моделирования — на рисунке 2.

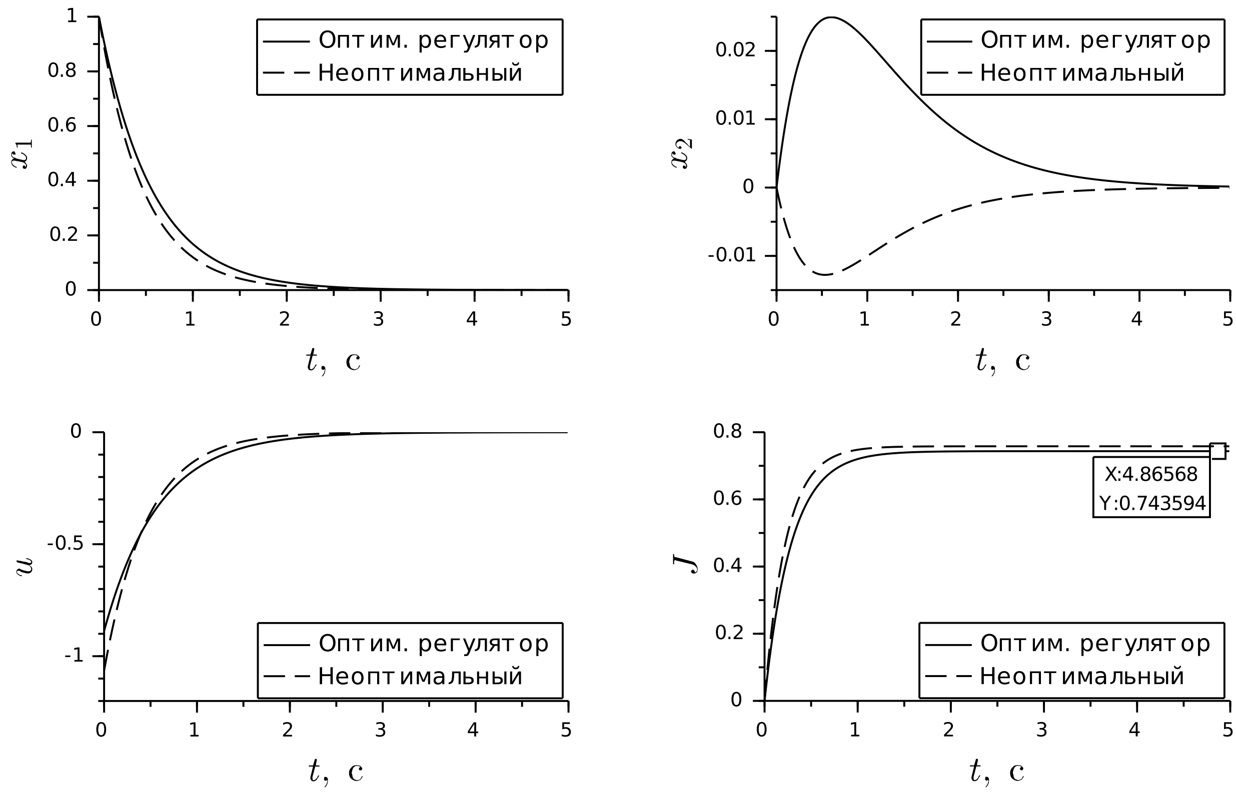

Рисунок 1 – Графики переходных процессов при оптимальном и неоптимальном регуляторах.

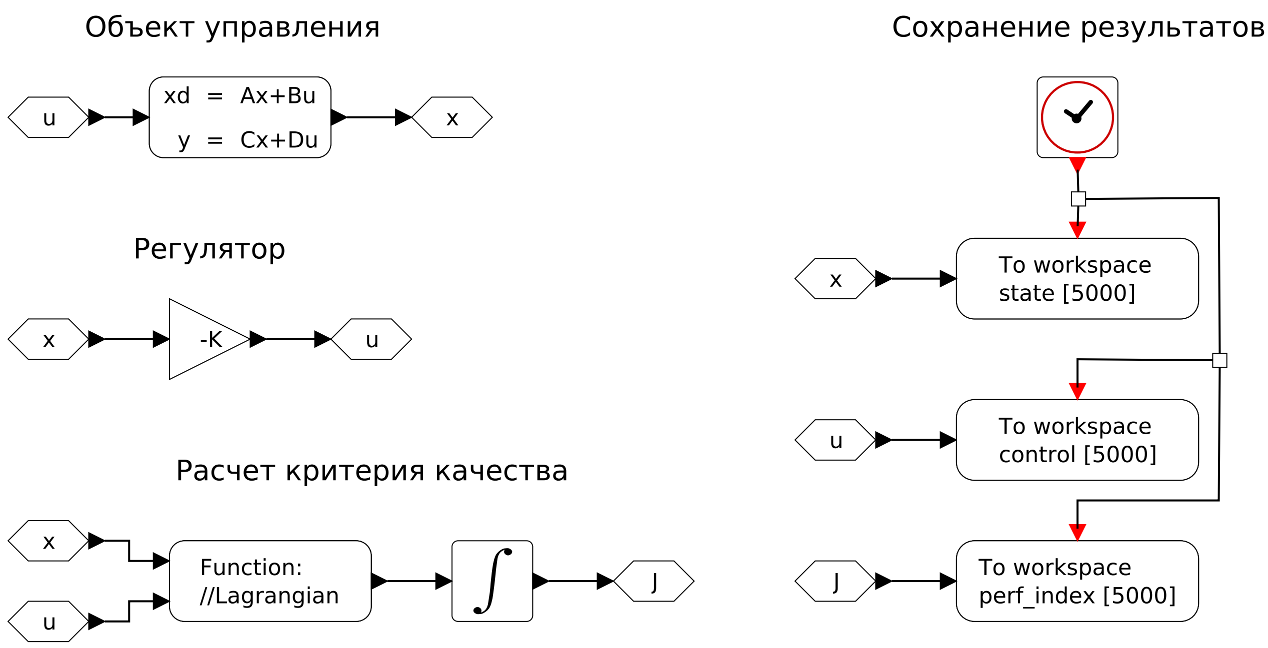

Рисунок 2 – Схема моделирования рассматриваемой системы управления.

5 Выводы по работе

В результате проделанной работы для заданного объекта управления был рассчитан регулятор, оптимальным образом решающий задачу его стабилизации с точки зрения минимизации значения конкретного критерия качества. Последнее было проверено отклонением коэффициентов регулятора от их рассчитанных значений — как и следовало ожидать, установившееся значение критерия качества в таком случае оказалось больше, чем при оптимальном K.