МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет компьютерных технологий и управления
Кафедра систем управления и информатики

Студент: Артемов Кирилл
группа P4135

Лабораторная работа №3

Планирование траектории движения с использованием сплайнов

Преподаватель
______________ А. А. Пыркин
«___» ________ 2016 г.

Санкт-Петербург, 2016 г.

1 Цель работы

Решить задачу планирования траектории движения манипулятора методом сплайнов.

2 Исходные данные

Заданы четыре точки в пространстве, через которые должен пройти схват манипулятора. А также его скорости и ускорения в начальных точках.

$$I = (x^I, y^I, z^I)$$
$$D = (x^D, y^D, z^D)$$
$$A = (x^A, y^A, z^A)$$
$$F = (x^F, y^F, z^F)$$

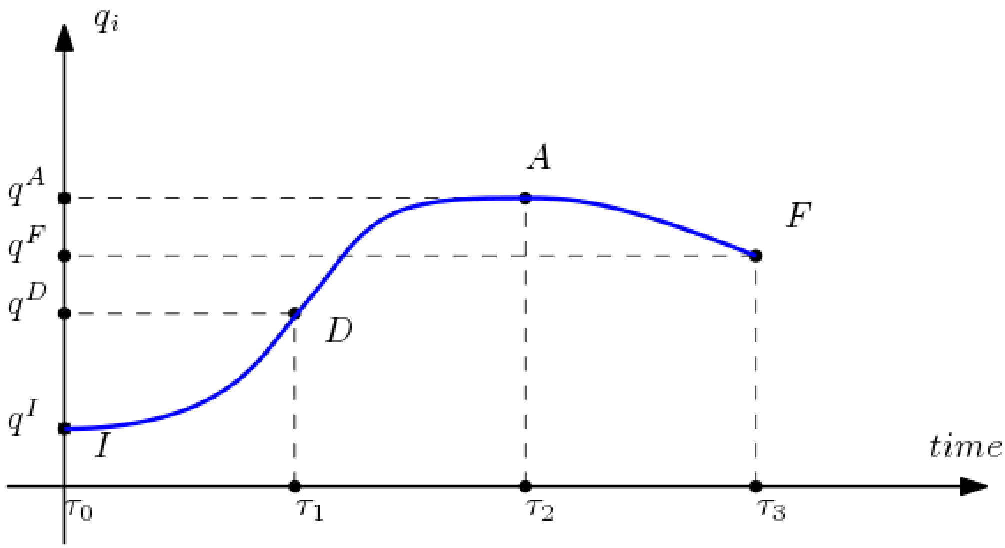

Рис. 1: Траектория. Зависимость вектора обобщенных координат q от времени

3 Ход выполнения работы

Прежде чем приступить к планированию траектории движения, необходимо опредилить конфигурацию манипулятора в четырех заданных точках. Для этого, для каждой из точек, решается обратная задача кинемматики, в результате чего получается четыре вектора обобщенных координат q^I, q^D, q^A, q^F.

Далее, необходимо выбрать способ разбиения траектории на участки. В этой лабораторной работе им стал способ разбиение траектории на полиномы степеней 4-3-4.

Таким образом, траектория изменения каждой из обобщенных координат разбивается на три участка. Превый участок, задающий движение между начальной точкой I и точко ухода D, описывается полиномом четвертой степени. Второй участок траектории между точкой ухода D и точкой подхода A описывается полиномом третьей степени. Последний участок между точками подхода A и конечной F описывается полиномом четвертой степени.

3.1 Расчет 4-3-4 траектории

В связи с тем, что для каждого участка траеткории требуется определить N траекторий обобщенных координат, удобно воспользоваться нормированным временем $t \in [0, 1]$. Это позволяет достичь единообразия уравнений, описывающих изменение каждой из обобщенных координат на каждом уччастке траектории.

$$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}};\ \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]; t \in [0, 1]$$

Траектория движения i обобщенной координаты задется в виде последовательности полиномов. Полиномы выражены в нормированном времени. Скорости и ускорения находят взятием соответствующей производной от представленной ниже системы.

$$q_i(t) = \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 \end{cases}$$

Граничные условия, которым должна удовлетворять система полиномов представлены в таблице 1.

Таблица 1: Граничные условия

Первый участок	Второй участок	Последний участок
$q_{1i}(0) = q_i^I$	$q_{2i}(0) = q_i^D$	$q_{ni}(0) = q_i^A$
$\dot{q}_{1i}(0) = v^I$	$\dot{q}_{2i}(0) = \dot{q}_{1i}(1)$	$\dot{q}_{ni}(0) = \dot{q}_{2i}(1)$
$\ddot{q}_{1i}(0) = a^I$	$\ddot{q}_{2i}(0) = \ddot{q}_{1i}(1)$	$\ddot{q}_{ni}(0) = \ddot{q}_{2i}(1)$
$q_{1i}(1) = q_i^D$	$q_{2i}(1) = q_i^A$	$q_{ni}(1) = q_i^F$
		$q_{ni}(1) = v^F$
		$q_{ni}(1) = a^F$

Применим граничные условия и нормированное время для того, чтобы склеить полиномы меду собой в заданных точках.

1. $t = 0$

$$q_i(0) = \begin{cases} a_0 = q^I \\ b_0 = q^D \\ c_0 = q^A \end{cases}$$

$$\dot{q}_i(0) = \begin{cases} a_1 = v^I \\ b_1 = \dot{q}_1(1) \\ c_1 = \dot{q}_2(1) \end{cases}$$

$$\ddot{q}_i(0) = \begin{cases} 2a_2 = a^I \\ 2b_2 = \ddot{q}_1(1) \\ 2c_2 = \ddot{q}_2(1) \end{cases}$$

2. $t = 1$

$$q_i(1) = \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = q^D \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = q^A \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = q^F \end{cases}$$

$$\dot{q}_i(1) = \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = v^D \\ b_1 + 2b_2 + 3b_3 = v^A \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 = v^F \end{cases}$$

$$\ddot{q}_i(1) = \begin{cases} 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = a^D \\ 2b_2 + 6b_3 = a^A \\ 2c_2 + 6c_3 + 12c_4 = a^F \end{cases}$$

Далее, запишем четырнадцать уравнений, необходимых для решения уравнения движения. Принимая $v^I = 0, a^I = 0$, получим:

$$\begin{aligned}
q^I &= a_0 \\
0 &= a_1 \\
0 &= a_2 \\
q^D - q^I &= a_3 + a_4 \\
q_D &= b_0 \\
0 &= b_1 - 3a_3 - 4a_4 \\
0 &= b_2 - 3a_3 - 6a_4 \\
q^A - q^D &= b_1 + b_2 + b_3 \\
q^A &= c_0 \\
0 &= c_1 - b_1 - 2b_2 - 3b_3 \\
0 &= c_2 - b_2 - 3b_3 \\
q^F - q^A &= c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\
0 &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 \\
0 &= 2c_2 + 6c_3 + 12c_4
\end{aligned}$$

Теперь, из того, что стоит слева от знака равенства составляем вектор-столбец b известных величин, а из того, что справа – матрицу коэффициентов C. Составляем матричное уравнение:

$$Cx = b \tag{1}$$

И наконец, задаем время движения манипулятора между точками и вычисляем для заданных интервалов времени значения полиномов. Решая прямую задачу кинематики находим декартовы координаты схвата в каждый из заданных моментов времени.

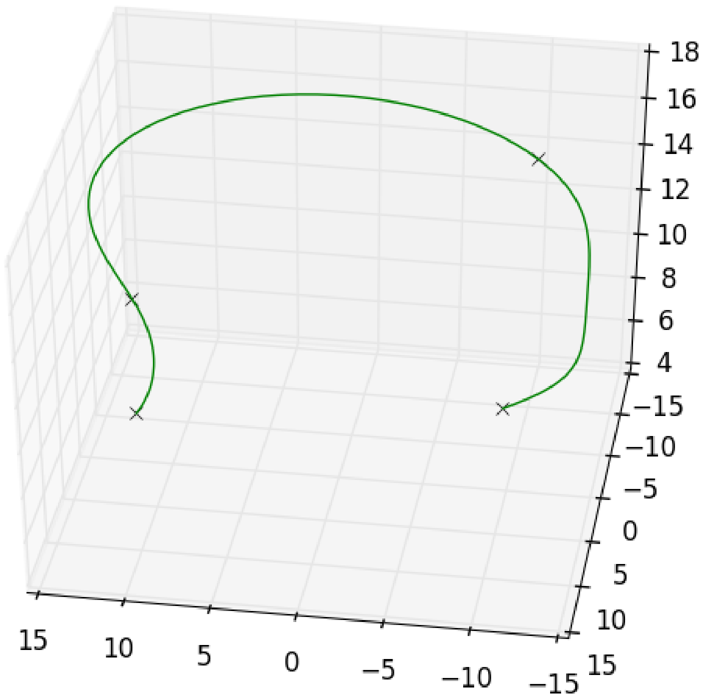

Рис. 2: Траектория движения схвата манипулятора

4 Вывод

Мною была решена задача планирования траектории движения схвата манипулятора с использованием метода сплайнов. Как видно из рисунка 2, траектория удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям, а именно: проходит через заданные точки, при этом без скачков, что соответствует поставленной задаче.