МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

Университет ИТМО

Кафедра Систем Управления и Информатики Группа P4135

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к расчетно-исследовательской работе магистрантов

по дисциплине

Интеллектуальное управление в условиях неопределенности

Автор РИРМ Артемов К. (подпись)

(фамилия, и.о.)

Руководитель Ушаков А.В. (подпись)

(фамилия, и.о.)

“____“ ___________ 20 _____ г. Санкт-Петербург, 20 ______ г.

Курсовая работа выполнена с оценкой ______________________

Дата защиты “ ____ “ ____________ 20 _____ г.

САНКТ – ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

КАФЕДРА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»
Зав.кафедрой А.А.Бобцов

З А Д А Н И Е

на расчетно – исследовательскую работу (РИРМ)магистрантов по дисциплине
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

СТУДЕНТУ: Артемову Кириллу, группа P4135, кафедра СУиИ

РУКОВОДИТЕЛЬ: д.т.н., профессор А.В.Ушаков

1.ТЕМА РИРМ: **ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ, СИНТЕЗ НЕАДАПТИВНЫХ И АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ НЕОБХОДИМУЮ РОБАСТНОСТЬ ИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ**

2.СРОКИ выполнения РИРМ . 17 – я неделя семестра (30 мая 2017 года)

3.СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ:

3.1. Построить МТЧ **непрерывного ОУ(НОУ)**; с использованием матрицы управляемости агреги-рованной системы ранжировать параметры q_j по потенцииальной чувствительности
3.2. Построить МТЧ **дискретного ОУ(ДОУ)** к вариации интервала дискретности.
3.3. Построить МТЧ спроектированной непрерывной системы(СНС) по каждому из параметров и для значения $|\Delta q_j| = 0.3$; выделить доминирующие параметры по степени их влияния на величину σ перерегулирования и длительность t_n переходного процесса;
3.4. Построить матрицу функций модальной чувствительности (МФМЧ) и выделить неблагоприятное сочетание вариаций параметров.
3.5. Методом модального управления (МУ), базовый алгоритм которого дополняется контролем нормы $\|F_O\|$ медианной составляющей интервальной матрицы $[F]$ спроектированной системы для целей вычисления оценки $\delta_I F$ ее относительной интервальности. Исследовать свойство робастностной устойчивости полученной системы с помощью метода В.Л. Харитонова.
3.6. Оценить алгебраическую реализуемость неадаптивного и адаптивного управления, обеспечивающего параметрическую инвариантность выхода системы, и синтезировать их.

3.7.ВАРИАНТ ЗАДАНИЯ (ВПИСАТЬ СВОЙ) 1.1А-1.2А-2.1Б-2.2Б-3А-4-А5А-6А-7А

4.СОДЕРЖАНИЕ пояснительной записки (перечень подлежащих разработке вопросов):

4.1.Введение.Постановка задачи ____

4.2.Построение МТЧ НОУи результаты ее исследования____________________________

4.3.Построение МТЧ ДОУи и результаты ее исследования___________________________

4.4.Построение МТЧ СНС и результаты ее исследования____________________________

4.5.Построение МФМЧ и результаты ее исследования_______________________________

4.6.Построение медианного МУ НОУ и оценка его результатов_______________________

4.7.Синтез неадаптивного и адаптивного управления, обеспечивающего параметрическую инвариантность выхода СНС относительно неопределенности НОУ

4.8.Заключение____

4.9.Литература____

4.10.Приложение____

5.ИСХОДНЫЕ материалы и пособия к РИРМ:

5.1.Никифоров В.О., Слита О.В., Ушаков А.В. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие. СПб.: СПбГУИТМО, 2011.

5.2.Никифоров В.О. ,Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация и робастность. СПб.: СПбГИТМО(ТУ), 2002.

5.3.Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений.-СПб.: Наука, 2003.

5.4. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: учебное пособие. / Под ред. Ушакова А.В. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. – 323 с.

6.ДАТА выдачи задания на РИРМ____

*РУКОВОДИТЕЛЬ*____

7.ДАТА начала выполнения РИРМ____

*СТУДЕНТ*____

Содержание

Введение. Постановка задачи

Задан непрерывный объект управления (НОУ) с помощью передаточной функции (ПФ) «вход-выход (ВВ)»

$$\Phi(s,q) = \frac{b_0(1+q_1)s + b_1(1+q_2)}{\left[a_0(1+q_3)s + a_1(1+q_4)\right]\left[a_2(1+q_5)s^2 + a_3(1+q_6)s + a_4(1+q_7)\right]} \quad (1)$$

где $q_{10} = q_{20} = q_{30} = q_{40} = q_{50} = q_{60} = q_{70} = 0$ — номинальные значения параметров $q_{j0}, j = \overline{1,7}$.

Необходимо проделать работу в соответствии с заданием на расчетно-исследовательскую работу магистранта (РИРМ). Исходные данные для варианта №6 ААББАААА указаны в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные

1.1. Значения параметров ПФ	$b_0 = 3; b_1 = 0.4; a_0 = 2; a_1 = 0.6; a_2 = 0; a_3 = 6; a_4 = 10$
1.2. Базис описания НОУ	канонический управляемый
2.1. Интервал дискретности	$\Delta t = 0.03$с
2.2. Метод перехода к ДОУ	с помощью интегральной модели ВСВ НОУ
3. Характеристическая частота	$\omega_0 = 3c^{-1}$
5. Граничные (угловые) значения параметра q_j	$\underline{q_j} = -0.2; \overline{q_j} = 0.2$
6. Относительная интервальность матрицы состояния системы	$\delta_{IR}F = 0.02$
7. Величина параметрической неопределенности	$\underline{q_j} = -0.2; \overline{q_j} = 0.2$

1 Построение МТЧ НОУ и результаты ее исследования

1) Записать непрерывный ОУ (НОУ) в форме «вход-состояние-выход (ВСВ)» в требуемом базисе;
2) Построить модель траекторной чувствительности (МТЧ) НОУ;
3) Произвести ранжирование параметров по потенциальной чувствительности к ним выхода ОУ с использованием матрицы управляемости агрегированной системы; Оценить, какое из дополнительных движений, вызванных вариацией, потребует максимальных затрат управления при обеспечении его асимптотической сходимости к нулю.

1.1 Непрерывный ОУ в форме ВСВ

Заданный ОУ описывается ПФ

$$\Phi(s,q) = \frac{3(1+q_1)s + 0.4(1+q_2)}{(2(1+q_3)s + 0.6(1+q_4))(6(1+q_6)s + 10(1+q_7))} \tag{1.1}$$

Для составления векторно-матричного описания ОУ запишем ПФ в форме

$$\Phi(s,q) = \frac{\dfrac{(1+q_1)}{4(1+q_3)(1+q_6)}s + \dfrac{(1+q_2)}{30(1+q_3)(1+q_6)}}{s^2 + \dfrac{20(1+q_3)(1+q_7) + 3.6(1+q_4)(1+q_6)}{12(1+q_3)(1+q_6)}s + \dfrac{(1+q_4)(1+q_7)}{2(1+q_3)(1+q_6)}}$$

В каноническом управляемом базисе векторно-матричное представление ОУ принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t,q) & = A(q)x(t,q) + Bu(t) \\ y(t,q) & = C(q)x(t,q) \end{cases} \tag{1.2}$$

в котором

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{(1+q_4)(1+q_7)}{2(1+q_3)(1+q_6)} & -\dfrac{20(1+q_3)(1+q_7) + 3.6(1+q_4)(1+q_6)}{12(1+q_3)(1+q_6)} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$C(q) = \begin{bmatrix} \dfrac{(1+q_2)}{30(1+q_3)(1+q_6)} & \dfrac{(1+q_1)}{4(1+q_3)(1+q_6)} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

1.2 Модель траекторной чувствительности НОУ

ПФ номинального ОУ, когда параметры $q_j = 0, j = \overline{1,7}$, представляет собой

$$\Phi(s,0) = \frac{\dfrac{1}{4}s + \dfrac{1}{30}}{s^2 + \dfrac{236}{120}s + \dfrac{1}{2}} \tag{1.6}$$

Матрицы модели ВСВ номинального ОУ имеют реализации

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{236}{120} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{30} & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&A_{q_j} = \left.\frac{\partial A(q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0}; B_{q_j} = \left.\frac{\partial B(q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0}; C_{q_j} = \left.\frac{\partial C(q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0};\\
&A(q)|_{q=q_0} = A; B(q)|_{q=q_0} = B; C(q)|_{q=q_0} = C;\\
&x(t,q)|_{q=q_0} = x(t); y(t,q)|_{q=q_0} = y(t);\\
&\left.\frac{\partial x(t,q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0} = \sigma_j(t); \left.\frac{\partial y(t,q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0} = \eta_j(t);
\end{aligned}$$

Теперь для j-й модели траекторной чувствительности получим представление МТЧ

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_j(t) &= A\sigma_j(t) + A_{q_j}x(t) + B_{q_j}u(t); \sigma_j(0) = 0 \\ \eta_j(t) &= C\sigma_j(t) + C_{q_j}x(t) \end{cases} \tag{1.7}$$

МТЧ будет генерировать функции траекторной чувствительности $\sigma_j(t)$ по состоянию и $\eta_j(t)$ по выходу, если ее дополнить моделью номинального ОУ 1.2.

На состояние заданного ОУ влияют $p = 6$ (далее, под записью $j = \overline{1, p}$ будет подразумеваться, что $j = 1, 2, 3, 4, 6, 7$) параметров: $q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, q_7$. Вычислим матрицы моделей траекторной чувствительности

$$A_{q_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_{q_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q_1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad (1.8)$$

$$A_{q_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_{q_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.9)$$

$$A_{q_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{36}{120} \end{bmatrix}; B_{q_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q_3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad (1.10)$$

$$A_{q_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -3.6 \end{bmatrix}; B_{q_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.11)$$

$$A_{q_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{20}{12} \end{bmatrix}; B_{q_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q_6} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad (1.12)$$

$$A_{q_7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{20}{12} \end{bmatrix}; B_{q_7} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q_7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.13)$$

1.3 Ранжирование параметров

Сконструируем агрегированную систему с составным вектором $\tilde{x}_j = col\{x, \sigma_j\}$ размерности $\dim \tilde{x} = 2n$, которая объединением 1.7 и 1.2, получает представление

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \tilde{A}_j \tilde{x}_j(t) + \tilde{B}_j u(t); \tilde{x}_j(0) = col\{x(0), 0\} \quad (1.14)$$

$$x(t) = \tilde{C}_{x_j} \tilde{x}_j; \quad (1.15)$$

$$y(t) = \tilde{C}_j \tilde{x}_j(t); \quad (1.16)$$

$$\sigma_j(t) = \tilde{C}_{\sigma_j} \tilde{x}_j(t); \quad (1.17)$$

$$\eta_j(t) = \tilde{C}_{\eta_j} \tilde{x}_j(t) \quad (1.18)$$

где

$$j=\overline{1,p}, \tilde{A}_j=\begin{bmatrix} A & 0 \\ A_{q_j} & A \end{bmatrix}, \tilde{B}_j=\begin{bmatrix} B \\ B_{q_j} \end{bmatrix},$$
$$\tilde{C}_{x_j}=\begin{bmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}, \tilde{C}_j=\begin{bmatrix} C & 0_{m\times n} \end{bmatrix}, \tilde{C}_{\sigma_j}=\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \end{bmatrix}, \tilde{C}_{\eta_j}=\begin{bmatrix} C_{q_j} & C \end{bmatrix}.$$

Составим необходимые матрицы

$$\tilde{A}_{1,2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} \end{bmatrix}; \tilde{A}_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{36}{120} & -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} \end{bmatrix};$$
$$\tilde{A}_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -3.6 & -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} \end{bmatrix}; \tilde{A}_6=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{20}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} \end{bmatrix};$$
$$\tilde{A}_7=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{20}{12} & -\frac{1}{2} & -\frac{236}{120} \end{bmatrix}; \tilde{B}_{1,2,3,4,6,7}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C}_{x_{1,2,3,4,6,7}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tilde{C}_{1,2,3,4,6,7} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C}_{\sigma_{1,2,3,4,6,7}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C}_{\eta_1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{30} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \tilde{C}_{\eta_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C}_{\eta_3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{30} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \tilde{C}_{\eta_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C}_{\eta_6} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{30} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \tilde{C}_{\eta_7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

Для ранжирования параметров по возможным затратам ресурсов управления для достижения нечувствительности траектории проектируемой системы к этим вариациям проведем анализ управляемости системы 1.14 по ее выходу η_j.

Требования к ресурсам управления заметно снижаются, если изначально ограничиться задачей обеспечения траекторной нечувствительности выхода проектируемой системы. На уровне требований к структурным свойствам агрегированной системы 1.14 задача сводится к контролю управляемости тройки матриц $(\tilde{C}_{\eta_j}, \tilde{A}_j, \tilde{B}_j)$ и количественной оценке эффекта управления по переменной η_j при приложении управления $u(t)$ фиксированной нормы с помощью сингулярных чисел матрицы управляемости

$$\tilde{W}_{y\eta_j} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{\eta_j}\tilde{B}_j & \tilde{C}_{\eta_j}\tilde{A}_j\tilde{B}_j & \tilde{C}_{\eta_j}\tilde{A}_j^2\tilde{B}_j & \cdots & \tilde{C}_{\eta_j}\tilde{A}_j^{2n-1}\tilde{B}_j \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

С учетом $n = 2$, рассчитаем матрицы управляемости $\tilde{W}_{\eta_j}$

$$\tilde{W}_{y\eta_1} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.4916667 & 0.8419444 & -1.4099907 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{W}_{y\eta_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0333333 & -0.0655556 & 0.1122593 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{W}_{y\eta_3} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.5333333 & -0.9363889 & 1.5786481 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{W}_{y\eta_4} = \begin{bmatrix} 0. & -0.9 & 3.295 & -8.596 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{W}_{y\eta_6} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0.875 & -2.2347222 & 5.0222685 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{W}_{y\eta_7} = \begin{bmatrix} 0. & -0.4166667 & 1.4583333 & -3.724537 \end{bmatrix}$$

Вычислим для полученных матриц управляемости сингулярные числа

$$\alpha\{\tilde{W}_{y\eta_1}\} = 1.7323915, \alpha\{\tilde{W}_{y\eta_2}\} = 0.1342043, \quad (1.20)$$
$$\alpha\{\tilde{W}_{y\eta_3}\} = 1.9276666, \alpha\{\tilde{W}_{y\eta_4}\} = 9.2497698, \quad (1.21)$$
$$\alpha\{\tilde{W}_{y\eta_6}\} = 5.57183, \alpha\{\tilde{W}_{y\eta_7}\} = 4.0215076 \quad (1.22)$$

Ранги матриц $\tilde{W}_{\eta_j}$ равны $rang(\tilde{W}_{\eta_j}) = 1$, что совпадает с размерностью $m = 1$ вектора выхода. Таким образом, выбором закона управления можно обеспечить сходимость $\lim_{t\to\infty} \Delta y(t, q_0, \Delta q_j) = 0; j = \overline{1, p}$ с заданным темпом [1]. Сингулярные числа матриц $\tilde{W}_{\eta_j}$ принимают значения 1.20–1.22. Проранжируем параметры q_j в порядке увеличения затрат ресурсов на управление

1) q_4
2) q_6
3) q_7
4) q_3
5) q_1
6) q_2

Отсюда следует, что асимптотическая сходимость к нулю дополнительного движения $\Delta y(t, q_0, \Delta q_2)$ будет требовать наибольших затрат на управление, чем сходимость остальных дополнительных движений, с тем же темпом.

2 Построение МТЧ ДОУ и результаты ее исследования

1) Перейти к дискретному описанию ОУ с помощью интегральной модели ВСВ НОУ;
2) Построить модель траекторной чувствительности (МТЧ) дискретного ОУ (ДОУ) к вариации интервала дискретности;

2.1 Переход к дискретному описанию ОУ

ДОУ представляет собой дискретную по времени с интервалом дискретности длительности Δt выборку из непрерывных процессов по вектору состояния $x(t, q)$ и выходу $y(t, q)$ при фиксированном на интервале $t \in [\Delta tk, \Delta t(k+1)]$ значении управления $u(t) = u(\Delta tk) = u(k)$. Имеет следующий вид

$$\begin{cases} x(k+1, q) = \overline{A}(q)x(k, q) + \overline{B}(q)u(k) \\ y(k, q) = \overline{C}(q)x(k, q) \end{cases} \tag{2.1}$$

где матрицы непрерывного 1.2 и дискретного 2.1 ОУ связаны следующими функциональными соотношениями

$$\overline{A}(q) = e^{A(q)\Delta t}; \overline{B}(q) = A^{-1}(q)(e^{A(q)\Delta t} - I)B(q); \overline{C}(q) = C(q) \tag{2.2}$$

Номинальная модель ДОУ получается из 2.1 при векторе параметров $q = q_0$

$$\begin{cases} x(k+1) = \overline{A}x(k) + \overline{B}u(k) \\ y(k) = \overline{C}x(k) \end{cases} \tag{2.3}$$

Общий вид интегральной модели [2] ВСВ НОУ имеет вид

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_0^t C\Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau \tag{2.5}$$

где $\Phi(t) = e^{At}, \Phi(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = e^{A(t-\tau)}$.

Используя интегральную запись модели ВСВ непрерывного динамического объекта, нетрудно получить связь между матрицами модели ВСВ дискретного и непрерывного объектов в форме

$$\overline{A} = \Phi(\Delta t) = e^{A\Delta t}, \overline{B} = \Phi(\Delta t)\int_0^{\Delta t} \Phi^{-1}(\tau)d\tau B, \overline{C} = C \tag{2.6}$$

И окончательные формулы для перехода

$$\overline{A} = e^{A\Delta t}, \overline{B} = A^{-1}(e^{A\Delta t} - I)B, \overline{C} = C \tag{2.7}$$

При $\Delta t = 0.03$с, рассчитаем матрицы модели ВСВ ДОУ

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0.9997794 & 0.0291300 \\ -0.0145650 & 0.9424904 \end{bmatrix}; \overline{B} = \begin{bmatrix} 0.0004413 \\ 0.0291300 \end{bmatrix}; \overline{C} = \begin{bmatrix} 0.0333333 & 0.25 \end{bmatrix};$$

2.2 Построение МТЧ ДОУ к вариации интервала дискретности

Модель траекторной чувствительности, необходимая для генерирования функций траекторной чувствительности $\sigma(k)$ и $\eta(k)$ по состоянию и выходу ДОУ, строится путем дифференцирования компонентов представления 2.1 по компонентам q_j вектора параметров q при его номинальном значении (в нашем случае $q = \Delta t$), в результате чего для МТЧ получаем

$$\begin{cases} \sigma(k+1) = \overline{A}\sigma(k) + \overline{A}_q x(k) + \overline{B}_q u(k) \\ \eta(k) = \overline{C}\sigma(k) + \overline{C}_q x(k) \end{cases} \tag{2.8}$$

где

$$\overline{A}_q = \left.\frac{\partial \overline{A}(q)}{\partial \Delta t}\right|_{q=q_0}; \overline{B}_q = \left.\frac{\partial \overline{B}(q)}{\partial \Delta t}\right|_{q=q_0}; \overline{C}_q = \left.\frac{\partial \overline{C}(q)}{\partial \Delta t}\right|_{q=q_0};$$

$$\sigma(t) = \left.\frac{\partial x(k,q)}{\partial \Delta t}\right|_{q=q_0}; \eta(t) = \left.\frac{\partial y(k,q)}{\partial \Delta t}\right|_{q=q_0};$$

$$\frac{\partial \overline{A}(q)}{\partial \Delta t} = \frac{\partial\left(e^{A(q)\Delta t}\right)}{\partial \Delta t} = A(q)e^{A(q)\Delta t} = e^{A(q)\Delta t}A(q) \ = \overline{A}(q)A(q);$$

$$\frac{\partial \overline{B}(q)}{\partial \Delta t} = \frac{\partial}{\partial \Delta t}\left[A^{-1}(q)(e^{A(q)\Delta t} - I)B(q)\right] = A^{-1}(q)A(q)e^{A(q)\Delta t}B = \overline{A}(q)B(q);$$

$$\frac{\partial \overline{C}(q)}{\partial \Delta t} = \frac{\partial C(q)}{\partial \Delta t} = 0.$$

Используя полученные выражения вычислим матрицы МТЧ ДОУ

$$\overline{A}_q = \begin{bmatrix} -0.0145650 & 0.9424904 \\ -0.4712452 & -1.8681295 \end{bmatrix}; \overline{B}_q = \begin{bmatrix} 0.0291300 \\ 0.9424904 \end{bmatrix}; \overline{C}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Сконструируем агрегированную систему с составным вектором $\tilde{x} = col\{x, \sigma\}$ размерности $\dim \tilde{x} = 2n$, которая объединением 2.3 и 2.8, получает представление

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{\overline{A}}\tilde{x}(k) + \tilde{\overline{B}}u(k); \tilde{x}(0) = col\{x(0), 0\} \tag{2.9}$$

$$x(k) = \tilde{\overline{C}}_{x_j}\tilde{x}(k); \tag{2.10}$$

$$y(k) = \tilde{\overline{C}}\tilde{x}(k); \tag{2.11}$$

$$\sigma(k) = \tilde{\overline{C}}_{\sigma}\tilde{x}(k); \tag{2.12}$$

$$\eta(k) = \tilde{\overline{C}}_{\eta}\tilde{x}(k) \tag{2.13}$$

где

$$\tilde{\overline{A}} = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 \\ \overline{A}_q & \overline{A} \end{bmatrix}, \tilde{\overline{B}} = \begin{bmatrix} \overline{B} \\ \overline{B}_q \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\overline{C}}_x = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times n} \end{bmatrix}, \tilde{\overline{C}} = \begin{bmatrix} \overline{C} & 0_{m\times n} \end{bmatrix}, \tilde{\overline{C}}_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \end{bmatrix}, \tilde{\overline{C}}_{\eta} = \begin{bmatrix} \overline{C}_q & \overline{C} \end{bmatrix}.$$

Составим необходимые матрицы

$$\tilde{\overline{A}} = \begin{bmatrix} 0.9997794 & 0.0291300 & 0 & 0 \\ -0.0145650 & 0.9424904 & 0 & 0 \\ -0.0145650 & 0.9424904 & 0.9997794 & 0.0291300 \\ -0.4712452 & -1.8681295 & -0.0145650 & 0.9424904 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\overline{B}} = \begin{bmatrix} 0.0004413 \\ 0.0291300 \\ 0.0291300 \\ 0.9424904 \end{bmatrix}; \tilde{\overline{C}}_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0333333 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Проверим управляемость агрегированной системы по выходу $\eta(k)$ с помощью матрицы управляемости $\tilde{\overline{W}}_{y\eta}$

$$\tilde{\overline{W}}_{y\eta} = \begin{bmatrix} \tilde{\overline{C}}_\eta \tilde{\overline{B}} & \tilde{\overline{C}}_\eta \tilde{\overline{A}} \tilde{\overline{B}} & \tilde{\overline{C}}_\eta \tilde{\overline{A}}^2 \tilde{\overline{B}} & \dots & \tilde{\overline{C}}_\eta \tilde{\overline{A}}^{2n-1} \tilde{\overline{B}} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

которая с учетом $n = 2$ имеет реализацию

$$\tilde{\overline{W}}_{y\eta} = \begin{bmatrix} 0.2365936 & 0.2111102 & 0.1875234 & 0.1657095 \end{bmatrix}$$

Ранги матриц $\tilde{W}_\eta$ равны $rang(\tilde{W}_\eta) = 1$, что совпадает с размерностью $m = 1$ вектора выхода. Таким образом, выбором закона управления можно обеспечить сходимость $\lim_{t\to\infty} \Delta y(t, q_0, \Delta t) = 0$ с заданным темпом.

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

3 Построение МТЧ СНС и результаты ее исследования

1) Синтезировать закон управления (ЗУ) вида $u(t) = K_g g(t) + Kx(t)$, который должен обеспечивать системе:

$$\begin{cases} \dot{x}(t,q) = F(q)x(t,q) + G(q)g(t); \\ y(t,q) = C(q)x(t,q) \end{cases}, \tag{3.1}$$

где $F(q) = A(q) - B(q)K, G(q) = B(q)K_g$, образованной объединением НОУ и ЗУ равенство входа $g(t)$ и выхода $y(t)$ в неподвижном состоянии при номинальных значениях параметров с помощью:

   1) матрицы K_g прямой связи по входу $g(t)$;
   2) матрыцы K обратной связи по состоянию $x(t)$

распределение мод Баттерворта с характеристической частотой $\omega_0 = 3c^{-1}$;

2) Построить МТЧ спроектированной системы по каждому из параметров и для значения $|\Delta q_j| = 0.3$;
3) Выделить доминирующие параметры по степени их влияния на величину σ перерегулирования и длительности $t_п$ переходного процесса.

3.1 Синтез закона модального управления

Замкнутая система 3.1 образована агрегированием ОУ 1.2 и регулятора, реализующего закон управления:

$$u(t) = K_g g(t) + Kx(t) \tag{3.2}$$

в виде прямой связи (ПС) по внешнему воздействию и отрицательной обратной связи (ОС) по вектору состояния ОУ, матрицы которого K_g и K просинтезированы для случая номинальной версии ОУ.

Перед началом расчета матриц коэффициентов регулятора 3.2 убедимся, что система 1.2 обладает свойством управляемости. Для этого найдем матрицу управляемости и ее определитель

$$U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1.9666667 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$det(U) = -1 \tag{3.4}$$

Номинальна система ОУ 1.2 полностью управляема, так как матрица управляемости U не вырождена. $rang(U) = 2$ и равен порядку систему.

Для придания матрице $F = A - BK$ распределения мод Баттерворта с характеристической частотой $\omega_0 = 3c^{-1}$ составим эталонную модель ОУ

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \Gamma\xi(t) \\ v(t) = H\xi(t) \end{cases} \tag{3.5}$$

где Γ и H — матрицы состояния и выхода эталонной системы.

Решим стандартный полином Баттерворта второго порядка

$$\lambda^2 + 1.414\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{3.6}$$

$$\lambda^2 + 4.242\lambda + 9 = 0, \tag{3.7}$$

корни которого $\lambda_{1,2} = -2.121 \pm j2.1216406$

Определим матрицы состояния и выхода эталонной модели. Так как корни желаемого полинома получились комплексные, то матрица Γ примет вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.121 & 2.1216406 \\ -2.1216406 & -2.121 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Матрица H выбирается из условия полной наблюдаемости матриц Γ и H

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Матрицу коэффициентов ОС K найдем, решая уравнение Сильвестра

$$\begin{cases} BH = M\Gamma - AM \\ K = -HM^{-1} \end{cases} \tag{3.10}$$

Вычислим матрицу преобразования M

$$M = \begin{bmatrix} -0.0998304 & 0.1311712 \\ -0.0665578 & -0.4900185 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Найдем матрицу коэффициентов K

$$K = \begin{bmatrix} 8.5 & 2.2753333 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Запишем матрицу замкнутой системы F при номинальных значениях параметров q_j

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -4.242 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Найдем коэффициент ПС K_g из выражения

$$K_g = -(CF^{-1}B)^{-1} \tag{3.14}$$

$$K_g = 270 \tag{3.15}$$

Тогда матрица G принимает вид

$$G = BK_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 270 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Смоделируем полученную систему в пакете прикладных математических программ Scilab, подав в качестве входного сигнала единичное ступенчатое воздействие

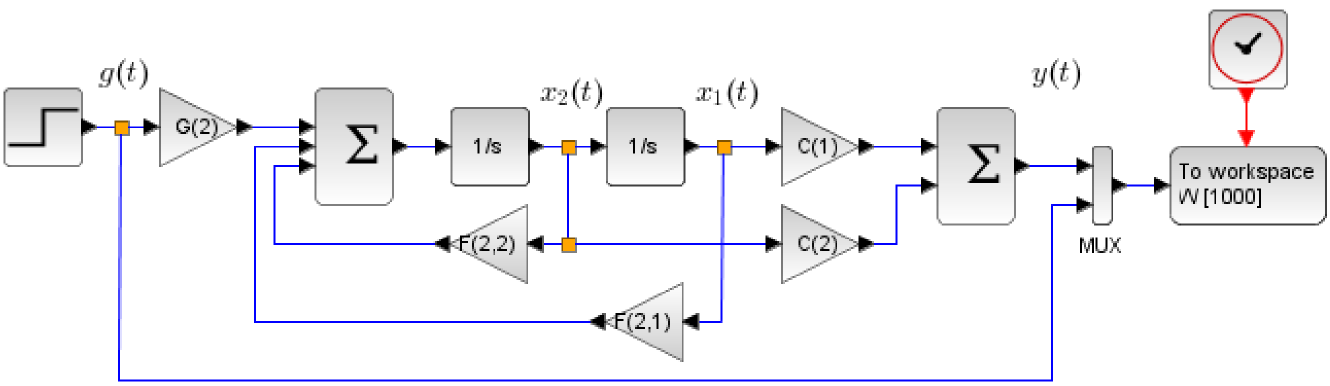

Рисунок 3.1 – Схема моделирования замкнутой системы 3.1

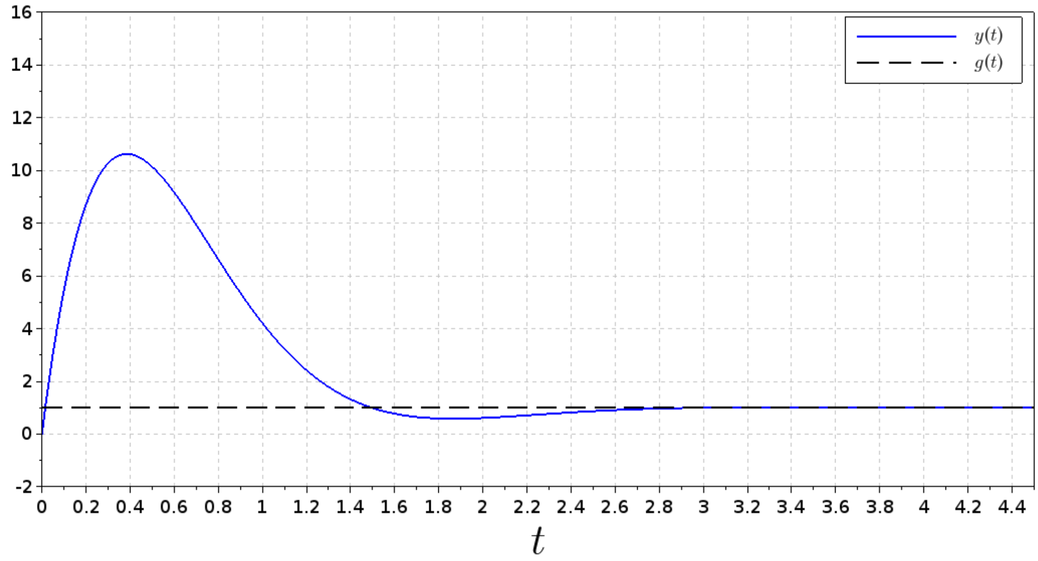

Рисунок 3.2 – Переходная характеристика замкнутой системы 3.1

Таким образом, система обеспечивает равенство входа $g(t)$ и выхода $y(t)$ в неподвижном состоянии при номинальных значениях параметров q_j.

3.2 Построение МТЧ спроектированной системы для каждого из параметров q_j

Введем обозначения

$$F_{q_j} = \left.\frac{\partial F(q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0}; G_{q_j} = \left.\frac{\partial G(q)}{\partial q_j}\right|_{q=q_0}; \qquad F(q)|_{q=q_0} = F; G(q)|_{q=q_0} = G;$$

Подобно тому, как МТЧ строилась ранее, МТЧ замкнутой системы (ЗС)

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_j(t) & = F\sigma_j(t) + F_{q_j}x(t) + G_{q_j}g(t); \sigma_j(0) = 0 \\ \eta_j(t) & = C\sigma_j(t) + C_{q_j}x(t) \end{cases} \tag{3.17}$$

Пользуясь матрицами НОУ 1.3 и 1.4, рассчитаем матрицу $F(q) = A(q) - B(q)K$, где K — рассчитанная матрица коэффициентов ОС 3.12 (матрица $F(q)$

изображена транспонированной из соображений компактности записи)

$$F(q) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(1+q_4)(1+q_7)}{2(1+q_3)(1+q_6)} - 8.5 \\ 1 & -\dfrac{20(1+q_3)(1+q_7) + 3.6(1+q_4)(1+q_6)}{12(1+q_3)(1+q_6)} - 2.2753333 \end{bmatrix}^T \tag{3.18}$$

Рассчитаем матрицы для системы 3.17 (матрицы F_{q_j} приведены без операции транспонирования)

$$F_{q_{1,2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; F_{q_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{36}{120} \end{bmatrix}; F_{q_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & -3.6 \end{bmatrix}; F_{q_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{20}{12} \end{bmatrix}; \tag{3.19}$$

$$F_{q_7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{20}{12} \end{bmatrix}; G_{q_{1,2,3,4,6,7}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_{q_1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}; C_{q_2} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{30} & 0 \end{bmatrix}; \tag{3.20}$$

$$C_{q_3} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{30} & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix}; C_{q_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; C_{q_6} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{30} & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix}; C_{q_7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{3.21}$$

Матрицы эквивалентны матрицам ОУ, так как матрица управления B не зависит от параметров q_j.

Сконструируем агрегированную систему с составным вектором $\tilde{x}_j = col\{x_j, \sigma_j\}$ размерности $\dim \tilde{x} = 2n$, которая объединением 3.1 и 3.17, получает представление

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \tilde{F}_j \tilde{x}_j(t) + \tilde{G}_j g(t); \tilde{x}_j(0) = col\{x(0), 0\} \tag{3.22}$$

$$x(t) = \tilde{C}_{x_j} \tilde{x}_j; \tag{3.23}$$

$$y(t) = \tilde{C}_j \tilde{x}_j(t); \tag{3.24}$$

$$\sigma_j(t) = \tilde{C}_{\sigma_j} \tilde{x}_j(t); \tag{3.25}$$

$$\eta_j(t) = \tilde{C}_{\eta_j} \tilde{x}_j(t) \tag{3.26}$$

где

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ F_q & F \end{bmatrix}, \tilde{G} = \begin{bmatrix} G \\ G_q \end{bmatrix},$$

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	КСУИ.06.4135.001 ПЗ	Лист 21

Структура матриц выхода C совпадают с матрицами системы 1.14. Составим матрицы агрегированной системы 3.22

$$\tilde{F_{1,2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -4.242 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -4.242 \end{bmatrix}; \tilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0. \\ -9 & -4.242 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1. \\ 0.5 & 0.3 & -9 & -4.242 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{F_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0. \\ -9 & -4.242 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1. \\ -0.5 & -0.3 & -9 & -4.242 \end{bmatrix}; \tilde{F_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0. \\ -9 & -4.242 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1. \\ 0.5 & 1.6666667 & -9 & -4.242 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{F_7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0. \\ -9 & -4.242 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 1. \\ -0.5 & -1.6666667 & -9 & -4.242 \end{bmatrix}; \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{C}_{\eta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.0333333 & 0.25 \end{bmatrix} \tilde{C}_{\eta_2} = \begin{bmatrix} 0.0333333 & 0 & 0.0333333 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{\eta_{3,7}} = \begin{bmatrix} -0.0333333 & -0.25 & 0.0333333 & 0.25 \end{bmatrix} \tilde{C}_{\eta_{4,7}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0333333 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Смоделируем полученную систему в пакете прикладных математических программ Scilab, подав в качестве входного сигнала единичное ступенчатое воздействие

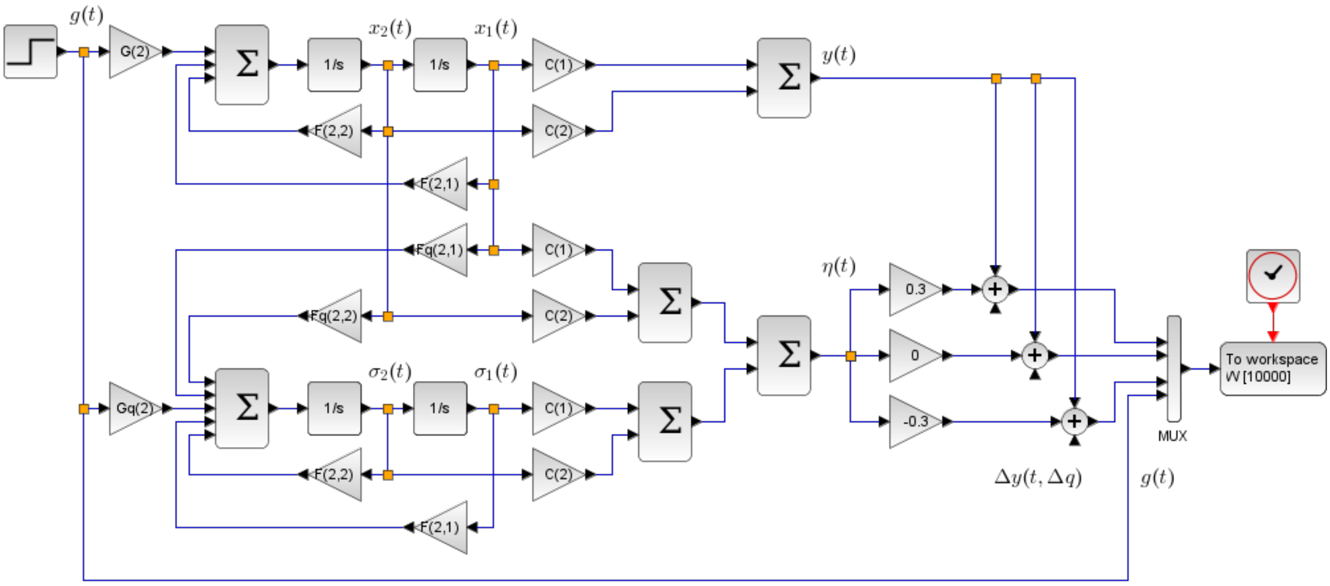

Рисунок 3.3 – Схема моделирования МТЧ дополненной НОУ 3.1

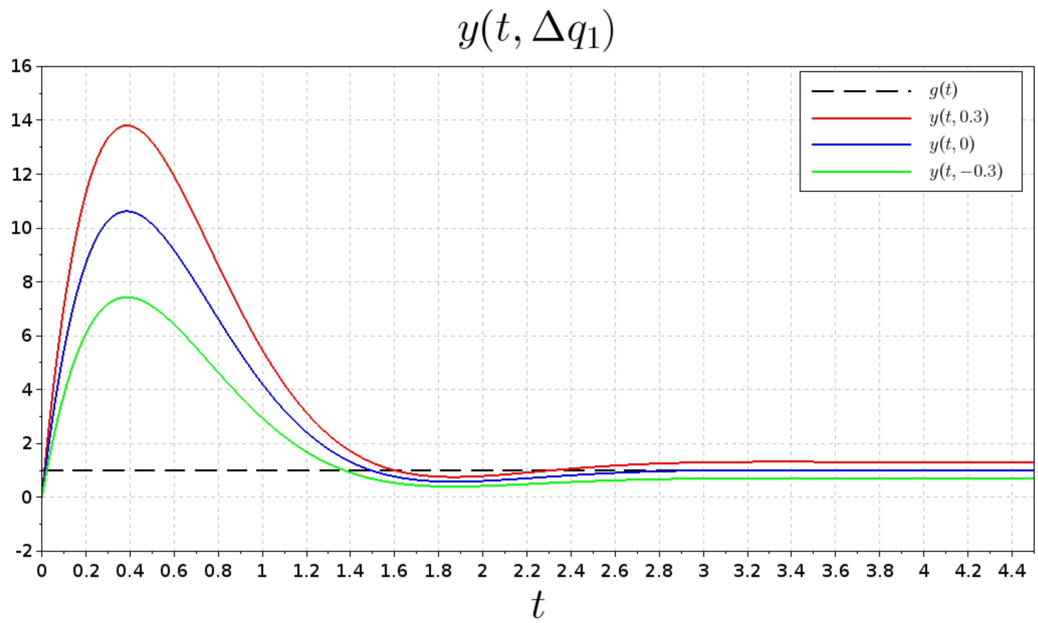

Рисунок 3.4 – Переходные процессы при вариации параметра q_1

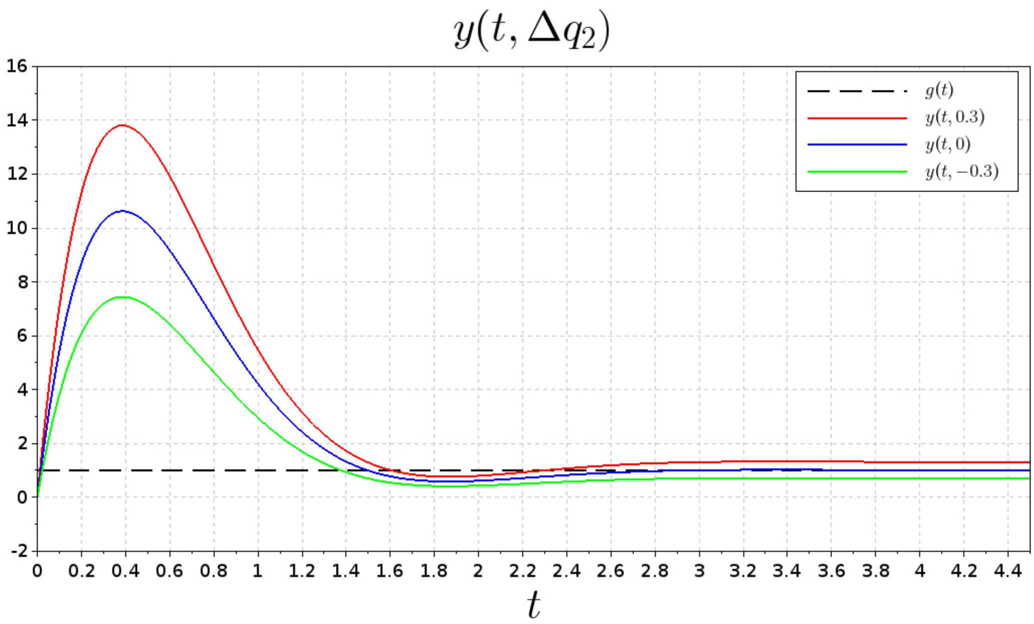

Рисунок 3.5 – Переходные процессы при вариации параметра q_2

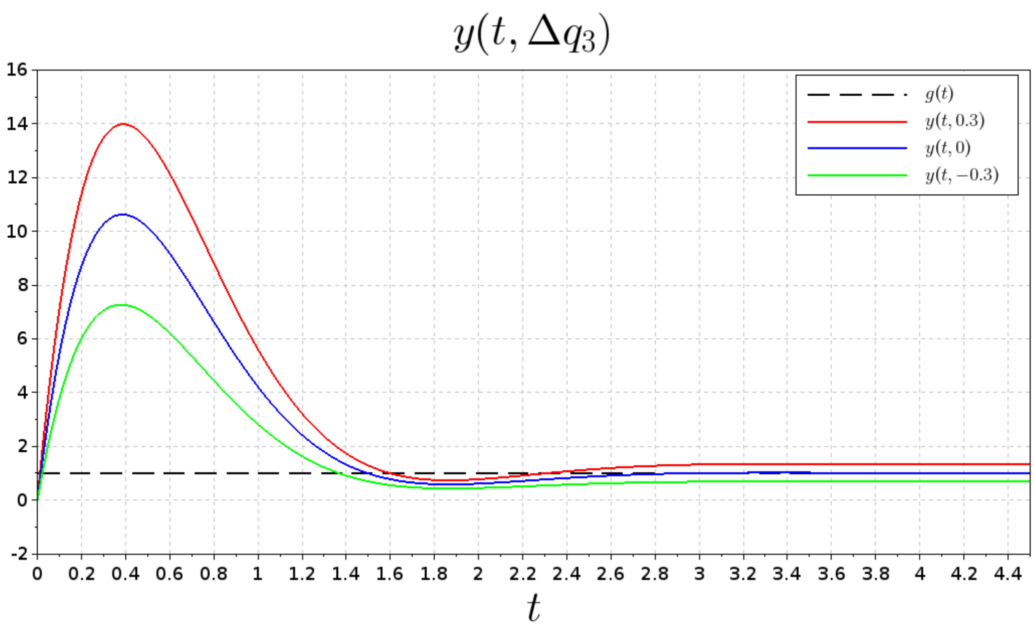

Рисунок 3.6 – Переходные процессы при вариации параметра q_3

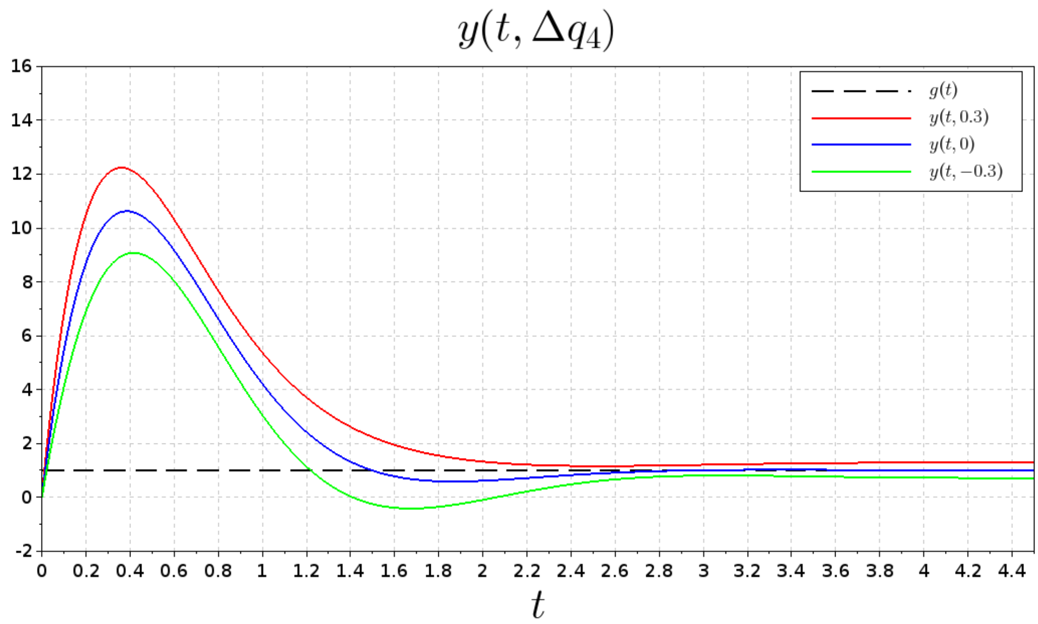

Рисунок 3.7 – Переходные процессы при вариации параметра q_4

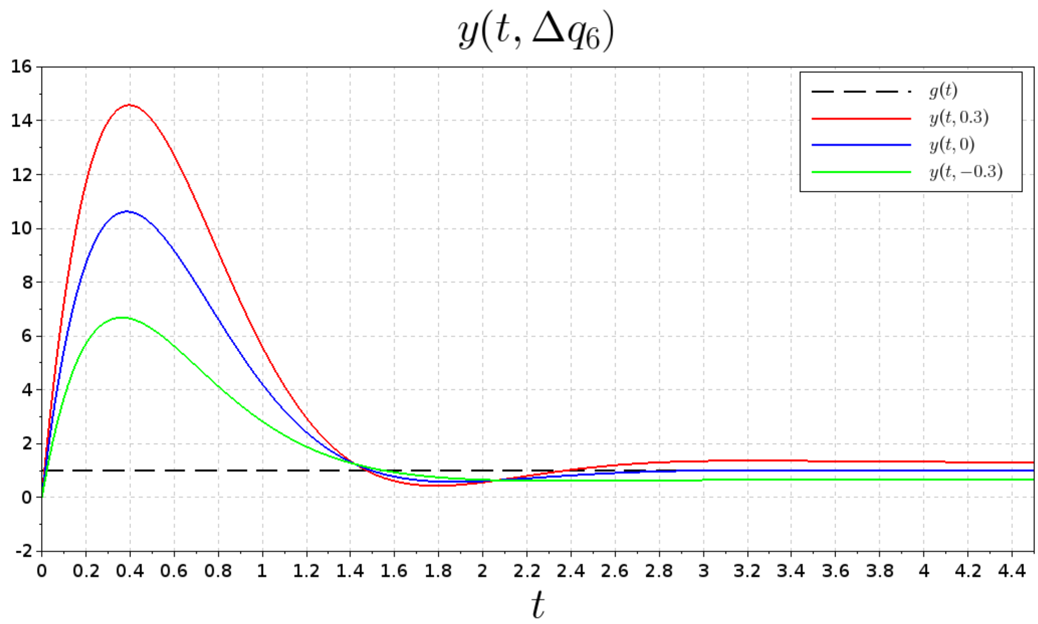

Рисунок 3.8 – Переходные процессы при вариации параметра q_6

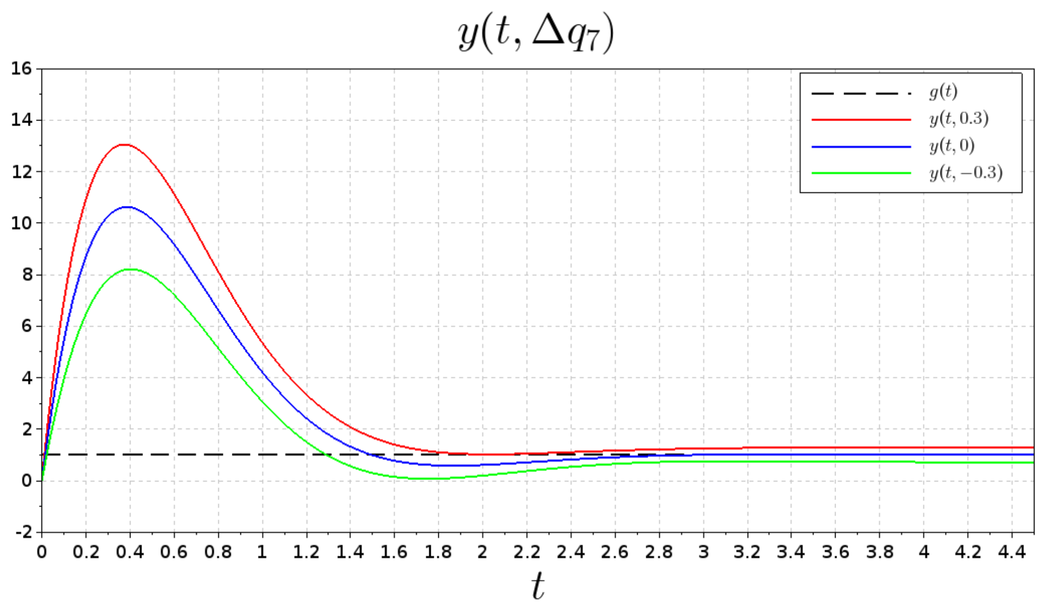

Рисунок 3.9 – Переходные процессы при вариации параметра q_7

3.3 Определение доминирующих параметров

Занесем полученные из построенных графиков значения перерегулирования σ и времени переходного процесса $t_п$ в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Значения переререгулирования и времени преходного процесса для варьируемых парметров q_j

<table>
<tr><th rowspan="2">Параметр</th><th colspan="3">Перерегулирование σ, % при $\Delta q =$</th><th colspan="3">Вр.перех.процесса $t_п$, сек. при $\Delta q =$</th></tr>
<tr><th>0.2</th><th>0</th><th>-0.2</th><th>0.2</th><th>0</th><th>-0.2</th></tr>
<tr><td>q_1</td><td>1380</td><td rowspan="6">1062</td><td>745</td><td>2.72</td><td rowspan="6">2.72</td><td>2.72</td></tr>
<tr><td>q_2</td><td>1381</td><td>744</td><td>2.72</td><td>2.72</td></tr>
<tr><td>q_3</td><td>1398</td><td>727</td><td>2.69</td><td>2.81</td></tr>
<tr><td>q_4</td><td>1225</td><td>907</td><td>3.24</td><td>3.84</td></tr>
<tr><td>q_6</td><td>1458</td><td>669</td><td>3.37</td><td>3.26</td></tr>
<tr><td>q_7</td><td>1306</td><td>821</td><td>2.89</td><td>3.71</td></tr>
</table>

Рассчитаем отклонения значений перерегулирования $\Delta\sigma$ и времени переходного процесса $t_п$ характеристик системы при вариациях параметров q_j от номинальной характеристики и занесем их в таблицу 3.2.

Таблица 3.2 – Отклонения характеристик системы с варьируемыми параметрами от номинальной системы

Параметр	$\Delta\sigma$, % при $\Delta q =$		$\Delta t_п$, сек. при $\Delta q =$	
	0.2	-0.2	0.2	-0.2
q_1	318	317	0	0
q_2	318	319	0	0
q_3	336	335	0.03	0.09
q_4	163	155	0.52	1.12
q_6	396	393	0.65	0.54
q_7	244	241	0.17	0.99

где

$$\Delta\sigma_{\Delta q=\pm 0.2} = |\sigma_{\Delta q=\pm 0.2} - \sigma_{\Delta q=0}| \tag{3.27}$$

$$\Delta t_{п,\Delta q=\pm 0.2} = |t_{п,\Delta q=\pm 0.2} - t_{п,\Delta q=0}| \tag{3.28}$$

Выделим доминирующие параметры по степени их влияния на величину σ перерегулирования и длительности $t_п$ переходного процесса

1) Влияние на величину перерегулирования (в порядке уменьшения)

    1) при $\Delta q = 0.2$: q_6, q_3, q_2, q_1, q_7, q_4;
    2) при $\Delta q = -0.2$ q_6, q_3, q_2, q_1, q_7, q_4;

2) Влияние на время переходного процесса(в порядке уменьшения)

    1) при $\Delta q = 0.2$: q_6, q_5, q_7, q_3, $q_{1,2}$;
    2) при $\Delta q = -0.2$: q_4, q_7, q_6, q_3, $q_{1,2}$.

4 Построение МФМЧ и результаты ее исследования

1) Построить матрицу функций модальной чувствительности;
2) Выделить неблагоприятное сочетание вариаций параметров.

4.1 Построение МФМЧ

Для вычисления функций чувствительности δq_j и βq_j соответственно вещественных и мнимых частей комплексно-сопряженных собственных значений к вариациям параметра q_j следует вычислить матрицу $M^{-1}F_{q_j}M$ и на элементах этой матрицы сконструировать функции чувствительности δq_j и βq_j с помощью соотношений

$$\delta_{q_j} = \frac{1}{2}\left((M^{-1}F_{q_j}M)_{11} + (M^{-1}F_{q_j}M)_{22}\right) \tag{4.1}$$

$$\beta_{q_j} = \frac{1}{2}\left((M^{-1}F_{q_j}M)_{12} - (M^{-1}F_{q_j}M)_{21}\right) \tag{4.2}$$

где матрица M — матрица диагонального преобразования, F_{q_j} — матрица чувствительности замкнутой системы к вариации параметра q_j.

Найдем спектр собственных значений матрицы $F(q)$ при номинальном векторе параметров q

$$\sigma\{F\} = \{[\lambda_1, \lambda_2] : det[\lambda I - F] = 0\} = \{-2.121 \pm j2.1216406\} \tag{4.3}$$

Для анализа модальной чувствительности спроектированной системы произведем следующие вычисления. Матрицы чувствительности F_{q_j} были рассчитаны ранее в 3.19.

Матрица M находится из выражения

$$M\Lambda = FM \tag{4.4}$$

Так как в спектре $\sigma\{F\}$ имеются комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_{1,2} = \delta \pm j\beta$, то вещественная матрица подобия Λ будет блочнодиагональной

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \delta & \beta \\ -\beta & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.121 & 2.1216406 \\ -2.1216406 & -2.121 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Тогда, нужно записать матрицу M в форме обобщенной матрицы Вандермонда

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2.121 & 2.1216406 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Матрица M^{-1}

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.9997105 & 0.4519487 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Вычислим матрицы $(M^{-1}F_{q_j}M)$, при $j = \overline{1, 2, 3, 4, 6, 7}$

$$M^{-1}F_{q_{1,2}}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$M^{-1}F_{q_3}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0739388 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$M^{-1}F_{q_4}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.3729834 & -3.6 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$M^{-1}F_{q_6}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.4402098 & 1.6666667 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$M^{-1}F_{q_7}M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.4402098 & -1.6666667 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

В соответствии с выражениями 4.1, вычислим функции модальной чувствительности $\lambda_{q_j} = \delta_{q_j} \pm j\beta_{q_j}$

$$\lambda_{q_{1,2}} = 0 \tag{4.13}$$

$$\lambda_{q_3} = 0.15 + j0.0369694 \tag{4.14}$$

$$\lambda_{q_4} = -1.8 - j1.6864917 \tag{4.15}$$

$$\lambda_{q_6} = 0.8333333 + j0.7201049 \tag{4.16}$$

$$\lambda_{q_7} = -0.8333333 - j0.7201049 \tag{4.17}$$

Сконструируем матрицу функций модальной чувствительности в виде функций чувствительности вещественной и мнимой частей:

$$S_\lambda = \begin{bmatrix} \delta_q \\ \beta_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.15 & -1.8 & 0.8333333 & -0.8333333 \\ 0 & 0 & 0.0369694 & -1.6864917 & 0.7201049 & -0.7201049 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

4.2 Выделить неблагоприятное сочетание вариаций параметров

Для выделения неблагоприятного сочетания вариаций параметров воспользуемся сингулярным разложением матрицы модальной чувствительности

$$S_\lambda = U_\lambda \Sigma_\lambda V_\lambda^T$$

$$U_\lambda = \begin{bmatrix} -0.7383 & -0.6744 \\ -0.6744 & 0.7383 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_\lambda = \begin{bmatrix} 2.9199 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0909 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0695 & -0.8346 & 0.3863 & -0.3863 \\ 0 & 0 & -0.8105 & -0.3666234 & -0.3230 & 0.3230 \\ -0.0464 & -0.8121 & 0.3382 & -0.2391 & -0.2886 & 0.2886 \\ 0.8446 & -0.3427 & -0.2391 & 0.169 & 0.204 & -0.204 \\ -0.377 & -0.3338 & -0.2886 & 0.204 & 0.7463 & 0.2536 \\ 0.377 & 0.3338 & 0.2886 & -0.204 & 0.2536 & 0.7463 \end{bmatrix}$$

Запишем оценки вариации

$$\max_{\Delta q} ||\Delta\lambda|| = 2.9199||\Delta q|| \tag{4.19}$$

$$\min_{\Delta q} ||\Delta\lambda|| = 0.0909||\Delta q|| \tag{4.20}$$

Наиболее неблагоприятное сочетание вариаций параметров характеризуется вектором

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0464681 & 0.8446960 & -0.3770473 & 0.3770473 \end{bmatrix}^T ||\Delta q|| \tag{4.21}$$

Наименее неблагоприятное характеризуется вектором

$$\Delta q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.8121559 & -0.3427354 & -0.3338676 & 0.3338676 \end{bmatrix} ||\Delta q|| \tag{4.22}$$

5 Получение ВМО НОУ с интервальными параметрами

1) Получение векторно-матричное описание (ВМО) НОУ с интервальными параметрами с использованием интервальной арифметики на основе интервальной реализации параметров q_j, записываемых в форме $[q_j] = [\underline{q_j}, \overline{q_j}]$ при заданных граничных (угловых) значениях $[q_j] = [\underline{-0.2}, \overline{0.2}]$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t); \\ y(t) = [C]x(t) \end{cases} \tag{5.1}$$

$$[A] = A_0 + [\Delta A], [B] = B_0 + [\Delta B], [C] = C_0 + [\Delta C] \tag{5.2}$$

где $[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}]$ — интервальный матричный компонент матрицы $[A]$, $A_0 = mid[A]$ — медиана матрицы $[A]$, $[\Delta C] = [\underline{\Delta C}, \overline{\Delta C}]$ — интервальный матричный компонент матрицы $[C]$, $C_0 = mid[C]$ — медиана матрицы $[C]$, матрица $[B]$ — в случае НОУ 1.2 не зависит от вектора параметров q.

5.1 Построение векторно-матричное описание НОУ

Используя 1.3 и 1.5 и интервальную арифметику, найдем матрицы $A(q)$ и $C(q)$ при угловых значениях параметра $[q_j] = [\underline{q_j}, \overline{q_j}] = [\underline{-0.2}, \overline{0.2}]$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.115 & -4.425 \end{bmatrix}; \overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.22 & -0.874 \end{bmatrix}; \tag{5.3}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0.0058 & 0.1389 \end{bmatrix}; \overline{C} = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0.4688 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Теперь, в соответствии с 5.2, необходимо определить матрицы A_0, C_0 и $[\Delta A], [\Delta C]$

$$A_0 = 0.5(\underline{A} + \overline{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6736 & -2.6495 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$$C_0 = 0.5(\underline{C} + \overline{C}) = \begin{bmatrix} 0.0405 & 0.3038 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

$$[\Delta A] = [\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [-0.4514, 0.4514] & [-1.7755, 1.7755] \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$[\Delta C] = [\underline{\Delta C}, \overline{\Delta C}] = \begin{bmatrix} [-0.02199, 0.02199] & [-0.1649, 0.1649] \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Запишем выражения для матриц $[A]$ и $[C]$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6736 & -2.6495 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [-0.4514, 0.4514] & [-1.7755, 1.7755] \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.0405 & 0.3038 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-0.02199, 0.02199] & [-0.1649, 0.1649] \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

6 Построение медианного МУ НОУ и оценка его результатов

1) *Представить ОУ 1.2 в базисе, в котором неопределенность физических параметров представлена неопределенностью значений только матрицы состояния в форме матричного компонента ΔA;
2) Синтезировать закон медианного модального управления, базовый алгоритм которого дополняется контролем нормы медианной составляющей интервальной матрицы спроектированной системы с последующим вычислением оценки, вычислить матрицы K_g и K. Закон управления (ЗУ) вида $u(t) = K_g g(t) - Kx(t)$ должен доставлять системе

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t); \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{6.1}$$

образованной объединением НОУ и ЗУ равенство входа $g(t)$ и выхода $y(t)$ в неподвижном состоянии при номинальных значениях параметров с помощью:

    1) матрицы K_g прямой связи по входу $g(t)$;
    2) матрыцы K обратной связи по состоянию $x(t)$

распределение мод Баттерворта с характеристической частотой $\omega_0 = 3c^{-1}$, которая гарантирует достижение значение оценки относительной интервальности матрицы состояния системы $\delta_I = \dfrac{||\Delta F||}{||F_0||}$ не больше заданной $\delta_{IR}F = 0.02$;

3) Исследовать свойство робастности системы, полученной в п.1, с помощью метода В.Л. Харитонова;
4) Моделирование полученной системы.

6.1 Получение ВМО НОУ с интервальными параметрами только матрицы состояния

Модельная параметрическая неопределенность может быть представлена неопределенностью (интервальностью) задания только матрицы состояния объекта управления. Таким образом, объект управления с интервальными параметрами задается векторно-матричной моделью

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t); \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{6.2}$$

где $x \in R^n, u \in R^r, y \in R^m$ – соответственно векторы состояния, управления и выхода ОУ; $[A], B, C$ – интервальная матрица состояния, матрица управления и выхода, согласованные по размерности с переменными модели 6.2.

Из предыдущего утверждения становится очевидным, что матрицы ОУ полученные в п.5 не соответствуют предъявляемым к ним требованиям и нужно представить ОУ в форме 6.2.

Для этого нужно ОУ 1.1 привести к наблюдаемой (фробениусовой) канонической форме, тогда его матрицы примут вид

$$A(q) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(1+q_4)(1+q_7)}{2(1+q_3)(1+q_6)} \\ 1 & -\dfrac{20(1+q_3)(1+q_7)+3.6(1+q_4)(1+q_6)}{12(1+q_3)(1+q_6)} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} \dfrac{(1+q_2)}{30(1+q_3)(1+q_6)} \\ \dfrac{(1+q_1)}{4(1+q_3)(1+q_6)} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Затем, так как полученные ОУ в каноническом наблюдаемом базисе не позволяет параметрическую неопределенность представить только в виде вариации ΔA матрицы состояния, то на входе ОУ достаточно включить буферную систему [1]

$$\begin{cases} \dot{x}_B(t) = A_B x_B(t) + B_B u_B(t) u(t); \\ y(t) = C_B x_B(t) \end{cases} \tag{6.6}$$

минимальной размерности $\dim x_B = \dim u = r = 1$ и ввести в рассмотрение составной вектор $\tilde{x} = col\{x, x_B\}$ и $\tilde{u} = col\{u, u_B\}$, получим систему

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t); \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \tag{6.7}$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A(q) & B(q)C_B \\ 0 & A_B \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_B \end{bmatrix}; \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

Составим матрицы, при $A_B = 0, B_B = 1, C_B = 1$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{(1+q_4)(1+q_7)}{2(1+q_3)(1+q_6)} & \dfrac{(1+q_2)}{30(1+q_3)(1+q_6)} \\ 1 & -\dfrac{20(1+q_3)(1+q_7)+3.6(1+q_4)(1+q_6)}{12(1+q_3)(1+q_6)} & \dfrac{(1+q_1)}{4(1+q_3)(1+q_6)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{6.9}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

В соответствии с 5.2, 5.5, 5.7, запишем интервальную матрицу $[\tilde{A}] = \tilde{A}_0 + [\Delta A]$

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} 0 & -0.6736111 & 0.0405093 \\ 1 & -2.649537 & 0.3038194 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & [-0.4514, 0.4514] & [-0.02199, 0.02199] \\ 0 & [-1.7755, 1.7755] & [-0.1649, 0.1649] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

Таким образом, ОУ 6.2 характеризуется параметрической неопределенностью только матрицы состояния.

6.2 Синтез медианного МУ НОУ

Порядок полученного в пункте 6.1 ОУ $\dim n = 3$, а ранг матрицы $\tilde{B}$ $rang\tilde{B} = 2$ и $rang\tilde{B} < \dim n$, следовательно возможно решение только неполной задачи обобщенного модального управления (ОМУ).

Агрегирование полученного ОУ и ЗУ

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t) \tag{6.12}$$

образует систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t); \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{6.13}$$

где

$$[F] = F_0 + \Delta F, \Delta F = \Delta A, G = BK_g. \tag{6.14}$$

Найдем нормы медианной и интервальной составляющих матрицы $\tilde{A}$ (далее будем ее обозначать как A)

$$||A_0|| = 2.92; ||\Delta A|| = 1.84 \tag{6.15}$$

Выберем наблюдаемую пару матрицу модальной модели (Λ, H). Назначим матрицу Λ, соответствующую круговому распределению мод с характеристической частотой ω_0 такой, что $||\Lambda|| \geq \omega_0$ и

$$\Lambda = \arg\{||\Lambda|| \geq \frac{||\Delta A||}{\delta_I F} \& \sigma\{\Lambda\} = \sigma\{F\}\} \tag{6.16}$$

Значение характеристической частоты ω_0 определяется в силу технических требований к проектируемой системе из условия

$$\omega_0 = max\{\omega_0 <= \frac{6}{2} = 3c^{-1}; \omega_0 <= \frac{||\Delta A||}{\delta_{IR}} = \frac{2.92}{0.02} = 146c^{-1}\} = 146c^{-1} \tag{6.17}$$

Найдем матрицу Λ

$$\Lambda = \omega_0 \begin{bmatrix} -0.0260481 & 0. & 0. \\ 0. & -0.0011358 & 0. \\ 0. & 0. & -12.057286 \end{bmatrix} = \quad (6.18)$$

$$= \begin{bmatrix} -3.8030252 & 0. & 0. \\ 0. & -0.1658288 & 0. \\ 0. & 0. & -1760.3637 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$||\Lambda|| = 1760.36 \quad (6.20)$$

Модификация матрицы H осуществляется в силу алгоритмов линейного программирования, таких как алгоритм Нелдера–Мида. В итоге матрица M ищется с помощью итерационной процедуры, приводящей к выполнению условия:

$$M = \arg\min_H \{C\{M(H)\} : M\Lambda - AM = -BH : \Lambda = fix, H = var\} \quad (6.21)$$

где начальное значение $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Выполнение этой процедуры дает следующие реализации матриц

$$H = \begin{bmatrix} -0.0053596 & 0.000099 & 2.3063721 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.00007 & -0.0002374 & -3.024D-08 \\ 0.0003105 & -0.0000225 & -0.0000002 \\ -0.0014093 & 0.0005972 & 0.0013102 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Наименьшее число обусловленностей, которой удалось получить при задании различных комбинация матриц Λ

$$C\{M\} = 9.45 \quad (6.24)$$

Произведем расчет матриц регулятора. Матрицы ОС K имеет реализацию

$$K = HM^{-1} = \begin{bmatrix} 3754.6837 & 7131.9983 & 1761.6831 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Матрица прямых связей K_g

$$K_g = -(C * F^(-1) * B)^(-1) = \begin{bmatrix} 27422.098 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Вычислим матрицу замкнутой системы F

$$F0 = A0 - BK = \begin{bmatrix} 0. & -0.6736111 & 0.0405093 \\ 1. & -2.649537 & 0.3038194 \\ -3754.6837 & -7131.9983 & -1762.6831 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Вычислим полученную оценку относительной интервальности матрицы F

$$\delta_{IF} = \frac{||\Delta A||}{||F0||} = \frac{1.84}{8250.46} = 0.0002229 < 0.02 \quad (6.28)$$

6.3 Исследование свойства робастности системы

Представим матрицу F в интервальном виде

$$\Delta F = \Delta A = \begin{bmatrix} 0 & [-0.45138, 0.45138] & [-0.02199, 0.02199] \\ 0 & [-1.7754, 1.7754] & [-0.16493, 0.16493] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & [-1.125, -0.2222222] & [0.0185185, 0.0625] \\ 1 & [-4.425, -0.8740741] & [0.1388889, 0.46875] \\ -3754.6837 & -7131.9983 & -1762.6831 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Найдем характеристический полином $D(\lambda, q)$ матрицы $F(q)$

$$D(\lambda, q) = det(\lambda I - F(q)) = [a_0]\lambda^3 + [a_1]\lambda^2 + [a_2]\lambda + [a_3] \quad (6.31)$$

где $[a_n]$ – интервальный параметр вида $[\underline{a_n}, \overline{a_n}]$.

По теореме В. Л. Харитонова, чтобы интервальный характеристический полином 6.31 был гурвицевым необходимо и достаточно, чтобы были гурвицевыми четыре его угловые версии, имеющие представления

$$D(\lambda) = \underline{a_3} + \underline{a_2}\lambda + \overline{a_1}\lambda^2 + \overline{a_0}\lambda^3 \quad (6.32)$$

$$D(\lambda) = \overline{a_3} + \underline{a_2}\lambda + \underline{a_1}\lambda^2 + \overline{a_0}\lambda^3 \quad (6.33)$$

$$D(\lambda) = \overline{a_3} + \overline{a_2}\lambda + \underline{a_1}\lambda^2 + \underline{a_0}\lambda^3 \quad (6.34)$$

$$D(\lambda) = \underline{a_3} + \overline{a_2}\lambda + \overline{a_1}\lambda^2 + \underline{a_0}\lambda^3 \quad (6.35)$$

Найдем интервальные коэффициенты ИХП 6.31 методом Крамера

$$[a_0] = [1, 1]; \quad (6.36)$$

$$[a_1] = -tr[F] = [178579.4658, 178583.0167]; \quad (6.37)$$

$$[a_2] = [M_{11}] + [M_{22}] = [136062041.6772, 136697531.9607]; \quad (6.38)$$

$$[a_3] = -det[F] = [43933256.2435, 156394735.1753] \quad (6.39)$$

Тогда полиномы запишутся, как

$$D(\lambda) = 43933256.2435 + 136062041.6772\lambda + 178583.0167\lambda^2 + \lambda^3 \quad (6.40)$$

$$D(\lambda) = 156394735.1753 + 136062041.6772\lambda + 178579.4658\lambda^2 + \lambda^3 \quad (6.41)$$

$$D(\lambda) = 156394735.1753 + 136697531.9607\lambda + 178579.4658\lambda^2 + \lambda^3 \quad (6.42)$$

$$D(\lambda) = 43933256.2435 + 136697531.9607\lambda + 178583.0167\lambda^2 + \lambda^3 \quad (6.43)$$

Все полиномы В. Л. Харитонова гурвицевы, следовательно, гурвицев ИХП $[D(\lambda)]$. Система робастно устойчива.

6.4 Моделирование полученной системы

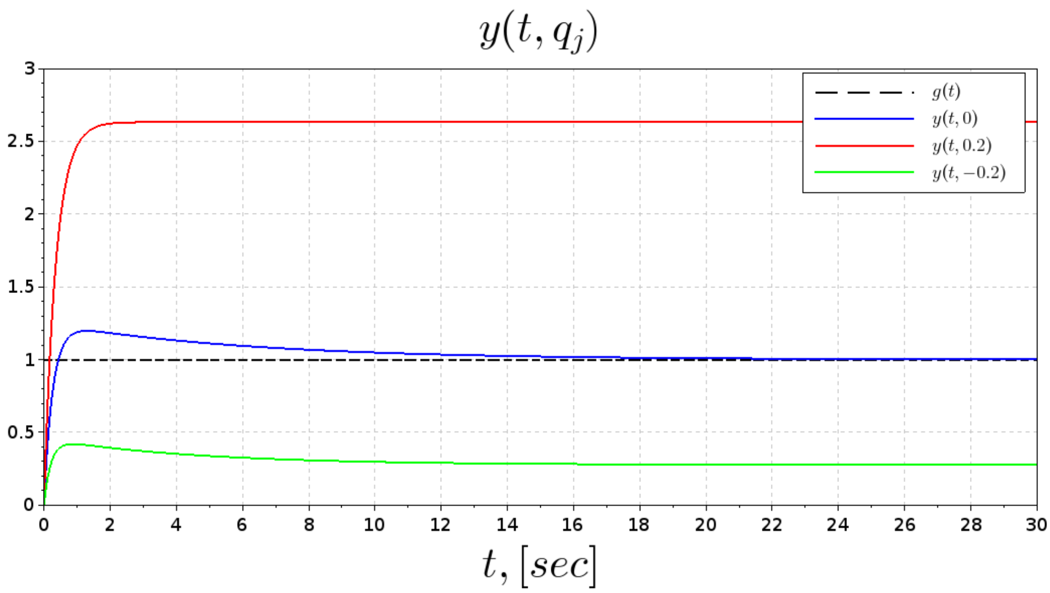

Рисунок 6.1 – Результаты моделирования ММУ при $q = [\underline{-0.2}, \overline{0.2}]$

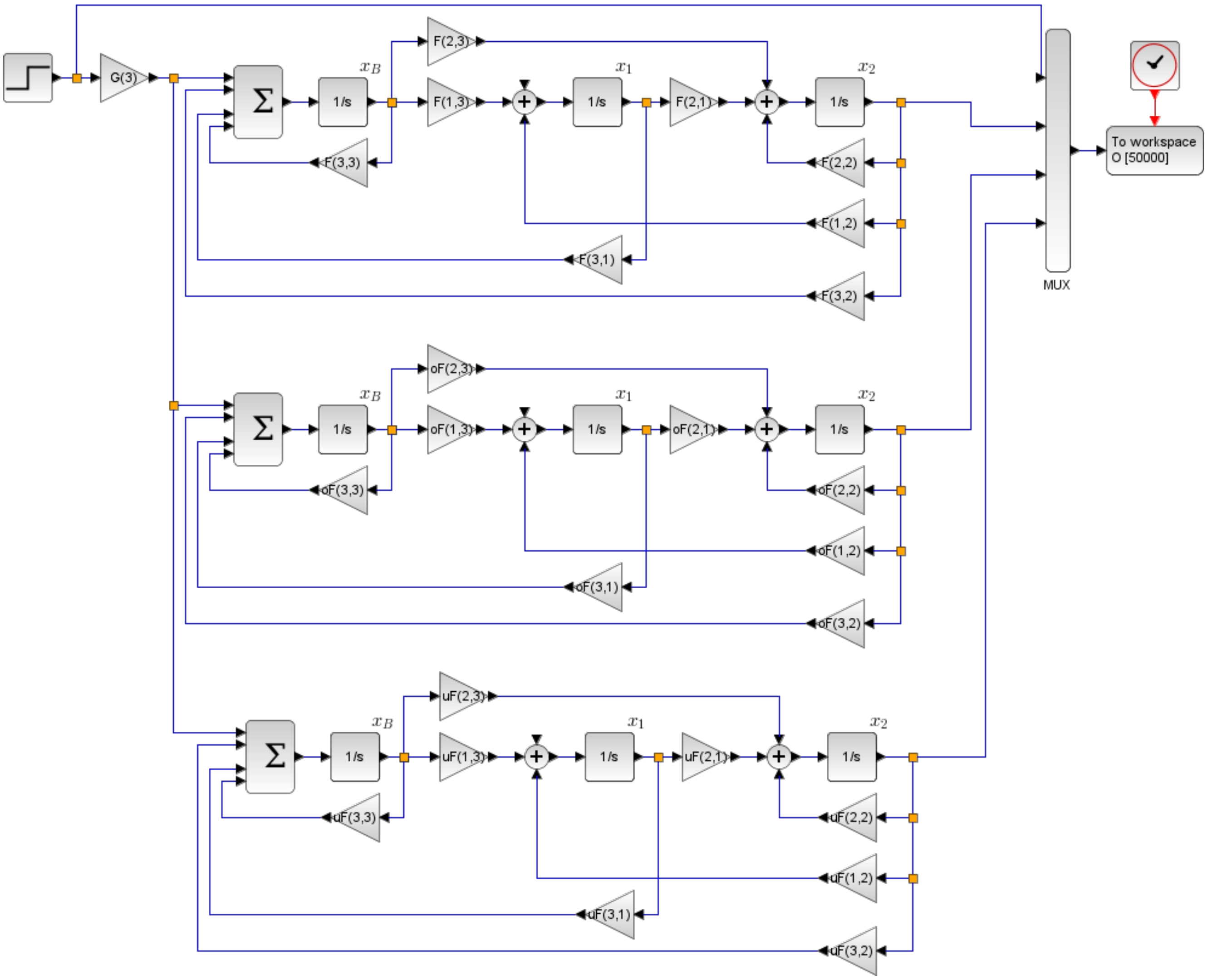

Рисунок 6.2 – Схема моделирования ММУ

7 Синтез неадаптивного и адаптивного управления, обеспечивающего параметрическую инвариантность выхода СНС относительно неопределенности НОУ

1) Составление НОУ и эталонной модели (ЭМ)
2) Синтез неадаптивного управления
3) Синтез адаптивного управления
4) Моделирование

7.1 Составление НОУ и эталонной модели (ЭМ)

Итак, для некоторого упрощения, представим ПФ НОУ 1.1 со следующими обозначениями:

$$\Phi(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{7.1}$$

И представим этот НОУ в каноническом наблюдаемом базисе векторно-матричного представления, матрицы которого равны (при величине параметрической неопределенности $[q_j] = [-0.2, 0.2]$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.6736 & -2.6495 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [-0.4513, 0.4513] & [-1.7754, 1.7754] \end{bmatrix}; \tag{7.2}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3038 \\ 0.0405 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-0.0219, 0.0219] \\ [-0.1649, 0.1649] \end{bmatrix}; \tag{7.3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

НОУ:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; \\ y = Cx \end{cases} \tag{7.5}$$

Составим эталонную модель, коэффициенты которой зададим методом стандартных характеристических полиномов на основании заданных показателей качества замкнутой системы:

$$\omega_0 = 3; t_{\text{п}} = 4.8 \text{ сек.}; \sigma = 0\% \tag{7.6}$$

Биноминальное разложение для ОУ второго порядка имеет вид:

$$D(s) = s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2 \tag{7.7}$$

Получаем коэффициенты характеристического полинома эталонной модели:

$$a_{M,0} = \omega_0^2; \tag{7.8}$$

$$a_{M,1} = 2\omega_0. \tag{7.9}$$

Составляем матрицы эталонной модели:

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{M,0} & -a_{M,1} \end{bmatrix}; B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{M,0} \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

И получаем эталонную модель:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = A_M x_M + B_M g; \\ y_M = C x_M \end{cases} \tag{7.11}$$

7.2 Синтез неадаптивного управления

Построим сначала неадаптивное управление в предположении, что параметры объекта точно известны. Для этого выведем модель ошибки слежения по состоянию:

$$e = x - x_M \tag{7.12}$$

Дифференцируя по времени 7.12 с учетом НОУ и ЭМ, имеем

$$\dot{e} = Ax - A_M x_M + Bu - B_M g \tag{7.13}$$

Учтем, что

$$Ax - A_M x_M = Ax - A_M x_M + A_M x - A_M x = \tag{7.14}$$

$$= A_M(x - x_M) + (A - A_M)x = A_M e + h\Delta^T x \tag{7.15}$$

$$Bu - B_M g = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{M,0} \end{bmatrix} g \tag{7.16}$$

где

$$A - A_M = h\Delta^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 - a_{M,0} & a_1 - a_{M,1} \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

Вектор ошибок:

$$\dot{e}_1 = e_2 + b_1 u; \tag{7.18}$$

$$\dot{e}_2 = -a_{M,0}e_1 - a_{M,1}e_2 + \Delta^T x + b_0 u - b_{M,0} g \tag{7.19}$$

Вводя обозначения:

$$\omega^T = \begin{bmatrix} x^T & g \end{bmatrix}; q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_0}\Delta^T & -\frac{b_{M,0}}{b_0} \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

окончательно получаем:

$$\dot{e}_1 = e_2 + b_1 u; \tag{7.21}$$

$$\dot{e}_2 = -a_{M,0}e_1 - a_{M,1}e_2 + b_0(u + \omega^T q) \tag{7.22}$$

Если выбрать в качестве ЗУ:

$$u = -\omega^T q = -q_1 x_1 - q_2 x_2 + q_3 g \tag{7.23}$$

то, при подстановке в модель ошибок, получим

$$\dot{e}_1 = e_2 - b_1 \omega^T q; \tag{7.24}$$

$$\dot{e}_2 = -a_{M,0}e_1 - a_{M,1}e_2 \tag{7.25}$$

7.3 Синтез адаптивного управления

Однако управление 7.23 является физически нереализуемым, так как вектор параметров q неизвестен. Поэтому заменим в регуляторе вектор неизвестных постоянных параметров q вектором настраиваемых параметров $\hat{q}$. Получим выражение для настраиваемого регулятора вида

$$u = -\hat{q}_1 x_1 - \hat{q}_2 x_2 + \hat{q}_3 g \tag{7.26}$$

Подставляя 7.26 в 7.21 выводим модель ошибки слежения для адаптивной системы:

$$\dot{e}_1 = e_2 + b_1(-\hat{q}_1 x_1 - \hat{q}_2 x_2 + \hat{q}_3 g); \tag{7.27}$$

$$\dot{e}_2 = -a_{M,0} e_1 - a_{M,1} e_2 + b_0 \omega^T \tilde{q} \tag{7.28}$$

где

$$\tilde{q} = q - \hat{q} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{b_0}\Delta - \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{bmatrix} \right) \\ -\frac{b_{M,0}}{b_0} - \hat{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{M,0} - a_0}{b_0} - \hat{q}_1 \\ \frac{a_{M,1} - a_0}{b_1} - \hat{q}_2 \\ -\frac{b_{M,0}}{b_0} - \hat{q}_3 \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

Модель 7.27 является типовой динамической моделью ошибки с измеряемым состоянием. С учетом принятых в этот разделе обозначений алгоритм адаптации принимает вид:

$$\dot{\hat{q}} = \gamma \omega h^T P e \tag{7.30}$$

где $\gamma > 0$ – коэффициент адаптации,

$$h^T P e = p_{2,1} e_1 + p_{2,2} e_2, \tag{7.31}$$

а симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения:

$$A_M^T P + P A_M = -Q, Q = Q^T > 0 \tag{7.32}$$

Подп. и дата | Инв. № дубл. | Взам. инв. № | Подп. и дата | Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Для расчета матрицы P зададимся симметрической положительно определенной матрицей Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

Тогда при решении уравнения 7.32 получим реализацию матрицы P:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49.16 & -5.56 \\ -5.56 & -1.76 \end{bmatrix} \tag{7.34}$$

7.4 Моделирование

Результаты моделирования приведены для $\omega_0 = 10, \gamma = 30$.

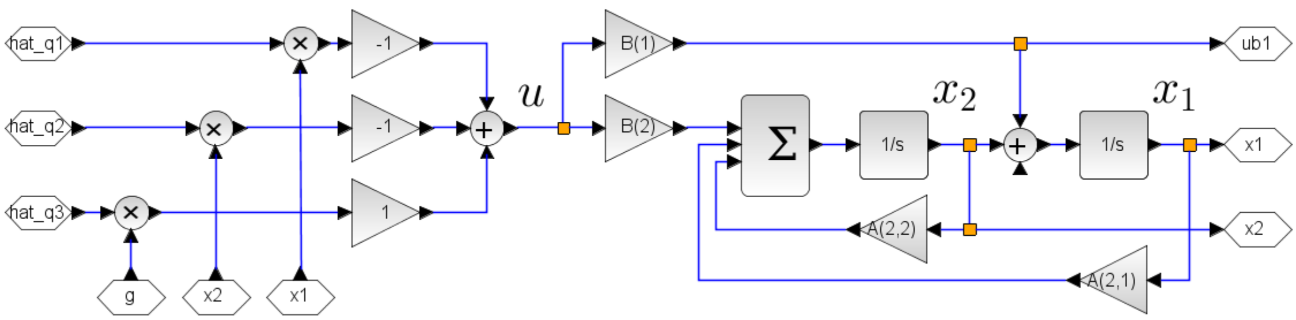

Рисунок 7.1 – Схема моделирования – ОУ и Регулятор

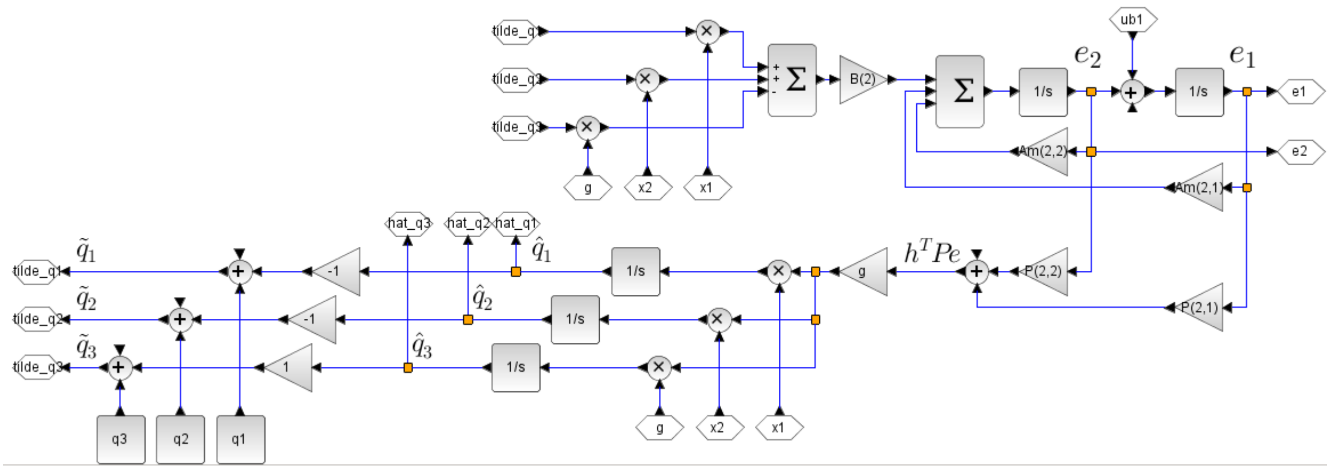

Рисунок 7.2 – Схема моделирования – Модель ошибки

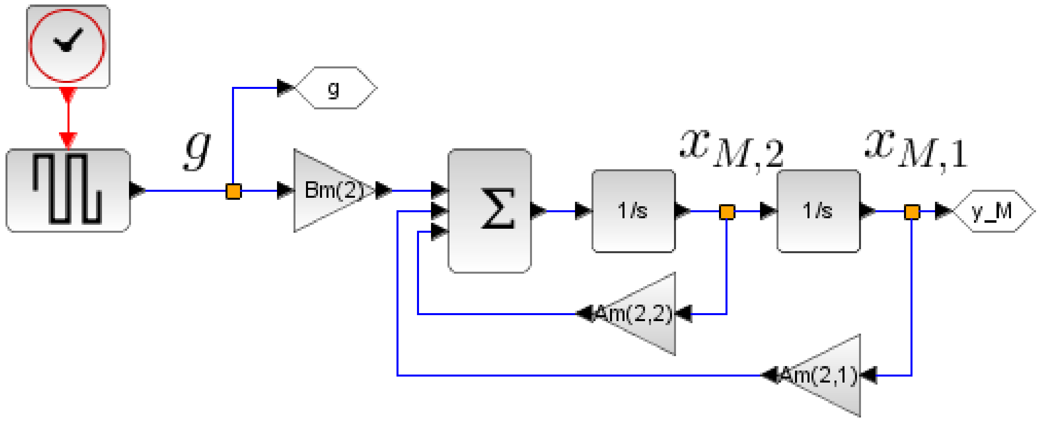

Рисунок 7.3 – Схема моделирования – Эталонная модель

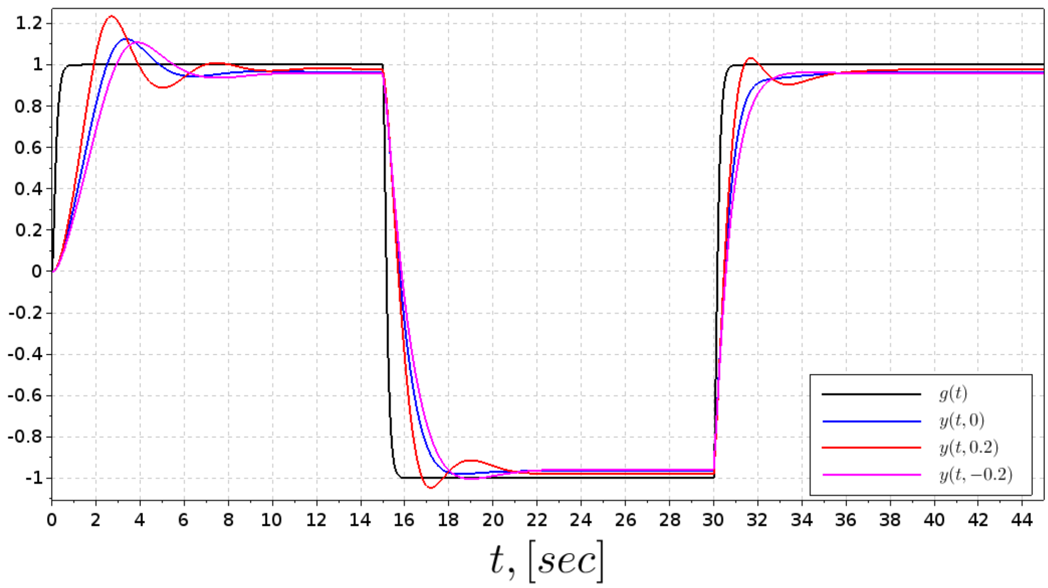

Рисунок 7.4 – Результаты моделирования – Выходной сигнал при вариации вектора q_j

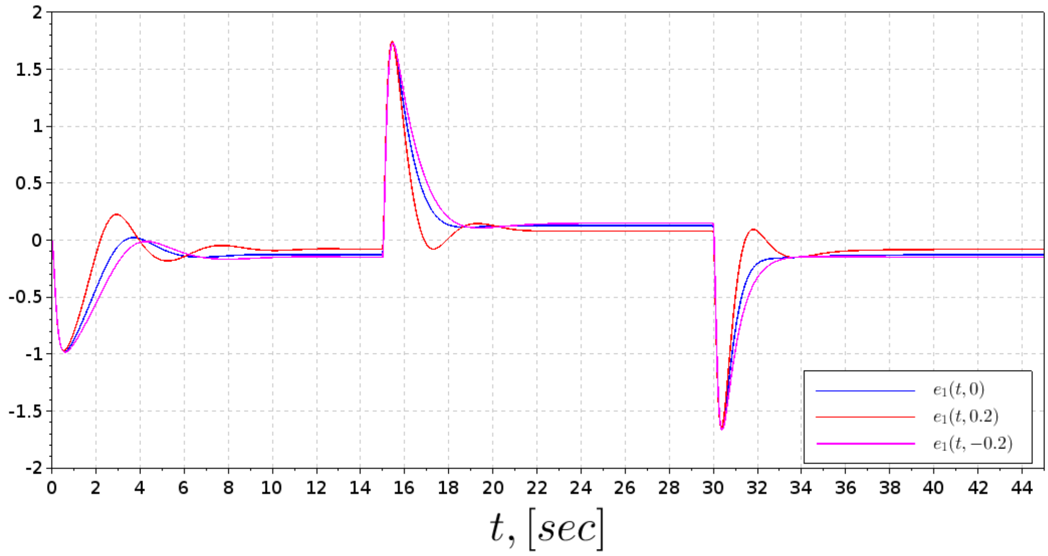

Рисунок 7.5 – Результаты моделирования – Выходной сигнал модели ошибки e_1 при вариации вектора q_j

8 Заключение

В этой расчетно-исследовательской работе мною были рассмотрены некоторые вопросы управления в условиях неопределенности с использованием возможностей неадаптивных и адаптивных алгоритмов применительно к непрерывным объектам.

В первой части была построена и исследована модель траекторной чувствительности неопределенного объекта управления. Во второй части была построена и исследована модель траекторной чувствительности дискретного объекта управления. В третьей части был синтезирован закон управления для непрерывного объекта управления и произведены исследования с применением аппарата траекторной чувствительности. В четвертой части была составлена матрица функций модальной чувствительности и выделены неблагоприятные сочетания вариаций параметров. В пятой части работы с использованием интервальной арифметики было получено интервальное представление непрерывного объекта управления. В шестой части был синтезирован закон медианного модального управления непрерывным объектом управления, были исследованы свойства робастности полученной системы с помощью метода В.Л. Харитонова. В седьмой части был синтезирован адаптивный закон управления.

Список использованных источников

1 В.О.Никифоров О.В.Слита А.В.Ушаков. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. — Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2011. — P. 226.

2 И.В. Мирошник. Теория автоматического управления. Линейные системы. — Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2005. — P. 336.