Министерство образования и науки Российской Федерации

Университет ИТМО

Кафедра Систем Управления и Информатики

Лабораторная работа №2
Исследование переходных процессов
в зависимости от расположения корней дискретной системы
Вариант №2

Выполнил: студент группы P4135,
Артемов Кирилл
Проверил: Литвинов Ю. В.

Санкт-Петербург, 2016

1 Цель работы

Исследование динамических свойств линейных дискретных систем второго порядка.

2 Задание

Таблица 1 - Вариант задания

№	Номер эксперимента											
	1		2		3		4		5		6	
	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2	z_1	z_2
2	0.9	1	-0.9	-1	0	0.2	0.1j	-0.1j	-0.2+0.8j	-0.2-0.8j	0.8+0.2j	0.8-0.2j

Время дискретности T = 0.2 сек.

3 Ход работы

а) Модель ВСВ для дифференциального уравнения $\dot{y}=u$.

Введем следующие переменные: $x_1=y, \dot{x}_1=\dot{y}=x_2, \dot{x}_2=u$

Составим модель ВСВ:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

б) Переход к дискретному описанию системы.

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

где

$$A_d = e^{AT}$$

$$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B$$

Так как матрица A вырождена, то матрицы B_d находится по следующей формуле:

$$B_d \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{A^{i-1}T^i}{i!} B$$

Вычисления производились в среде моделирования Scilab, при помощи следующего скрипта.

Листинг 1 – Скрипт расчета матриц дискретной системы

```
T = 0.2;
A = [0, 1; 0, 0];
B = [0; 1];
C = [1, 0];
Ad = expm(A*T);
Bd = [0; 0];
for i=1:10
    Bd = Bd + (A^(i-1) * T^i) / prod(1:i) * B;
end
```

Получены матрицы:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ \mathrm{B}_d = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix};$$

в) Получение описани дискретной системы.

Управляющее воздействие имеет вид:

$$u(k) = Kx(k) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Матрица описания дискретной системы:

$$F_d = A_d - B_d K$$

где K – матрица линейных стационарных обратных связей.

Подставляя полученные матрицы A_d и B_d, получим:

$$F_d = \begin{bmatrix} 1 - 0.02k_1 & 0.2 - 0.02k_2 \\ -0.2k_1 & 1 - 0.2k_2 \end{bmatrix}$$

Вычислим характеристический полином:

$$\det(\mathrm{Iz}\text{-}\mathrm{F}_d) = 0$$

$$\mathrm{z}^2 + (0.2k_2 + 0.02k_1 - 2)z + (-0.2k_2 + 0.02k_1 + 1) = 0$$

г) Поиск дискретных характеристических уравнений.

Для системы второго порядка, характеристический полином матрицы описания имеет вид:

$$\mathrm{D(z)} = \det(\mathrm{Iz}\ \text{-}\ \mathrm{F}_d) = z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

В таблице 1 представленны шесть экспериментов для каждого из которых заданы по два корня характеристического полинома z_1 и z_2.

Составим для них систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1^2 + a_1 z_1 + a_0 = 0 \\ z_2^2 + a_1 z_2 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Отсюда выразим коэффициенты a_0 и a_1, тогда в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -z_1^2 \\ -z_2^2 \end{bmatrix}$$

И рассчитаем в Scilab.

Таблица 2 – Коэффициенты характеристических полиномов

№	a_0	a_1
1	0.9	-1.9
2	0.9	1.9
3	0	-0.2
4	0.01	0
5	0.68	0.4
6	0.68	-1.6

Полиномы принимают вид:

$$D_1(z) = z^2 - 1.9z + 0.9$$
$$D_2(z) = z^2 + 1.9z + 0.9$$
$$D_3(z) = z^2 - 0.2z$$
$$D_4(z) = z^2 + 0.01$$
$$D_5(z) = z^2 + 0.4z + 0.68$$
$$D_6(z) = z^2 - 1.6z + 0.68$$

д) Поиск элементов МЛСОС.

МЛСОС представляет из себя:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

Приравнивая коэффициенты заданных полиномов и полинома описания системы, получсим систему:

$$\begin{cases} \frac{k_2}{5} + \frac{k_1}{50} & = a_1 + 2 \\ -\frac{k_2}{5} + \frac{k_1}{50} & = a_0 - 1 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.02 \\ -0.2 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 2 \\ a_0 - 1 \end{bmatrix}$$

И, выражая вектор К, получаем:

$$\begin{bmatrix} k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.02 \\ -0.2 & 0.02 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 + 2 \\ a_0 - 1 \end{bmatrix}$$

Расчитываем МЛСОС для каждой из полученных пар коэффициентов полиномов из таблицы 2.

Таблица 3 – Результаты вычисления МЛСОС

№	k_1	k_2
1	0	0.5
2	95	10
3	20	7
4	25.25	7.475
5	52	6.8
6	2	1.8

е) Моделирование.

Схема моделирования представлена на рисунке 1.

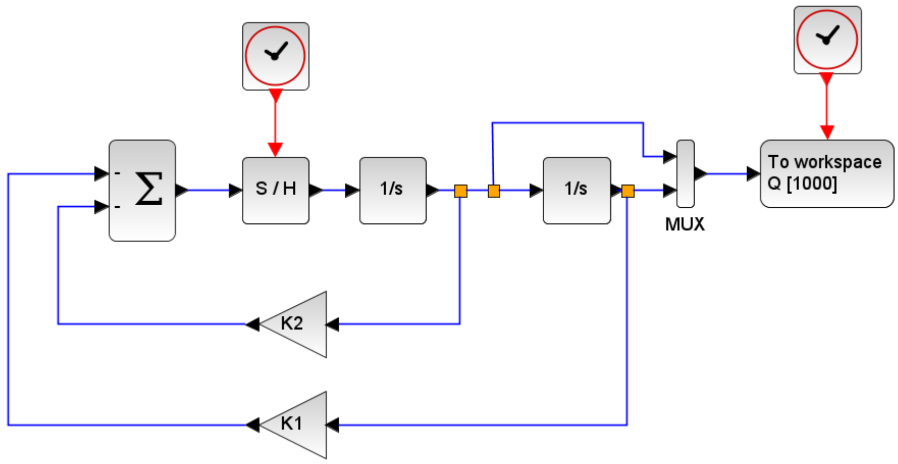


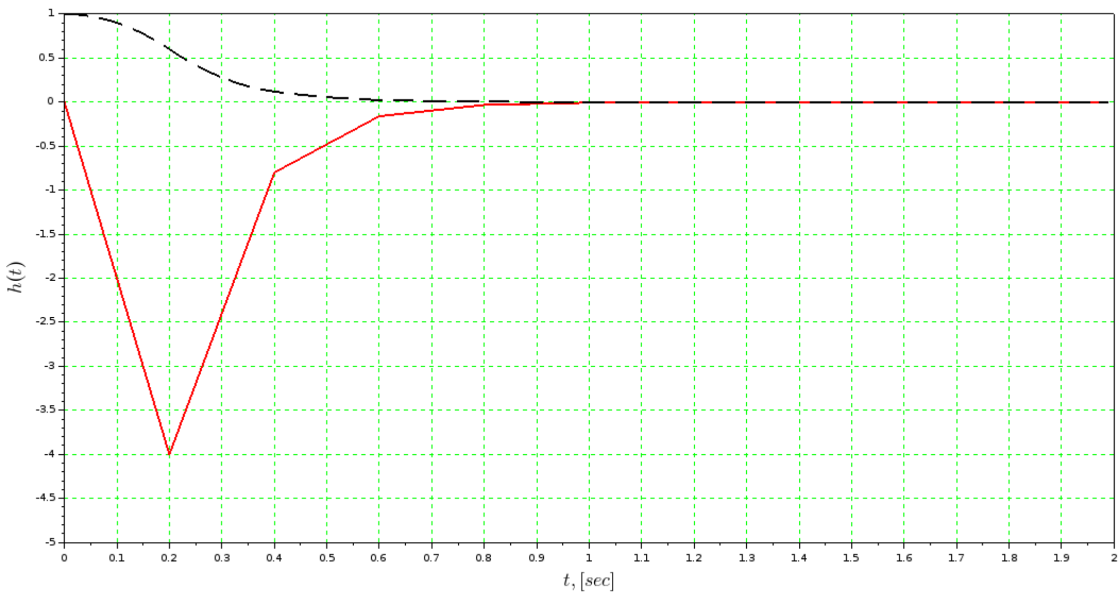
Рисунок 1 – Схема моделирования

Моделирование производитя для каждой из пар коэффикиентов из таблицы 3. Начальные условия: $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$. На графиках пунктирной линией обозначена y(t), сплошной $\dot{y}(t)$.

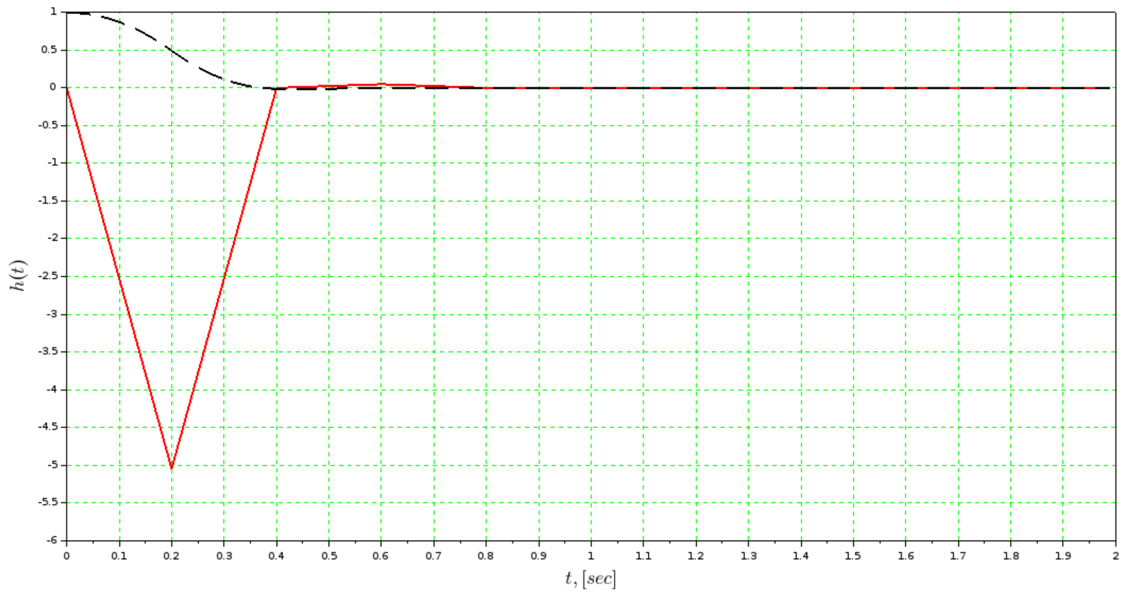
1) Эксперимент №1. Так как коэффициент $k_1 = 0$, то на выходе системы также ноль.

2) Эксперимент №2.

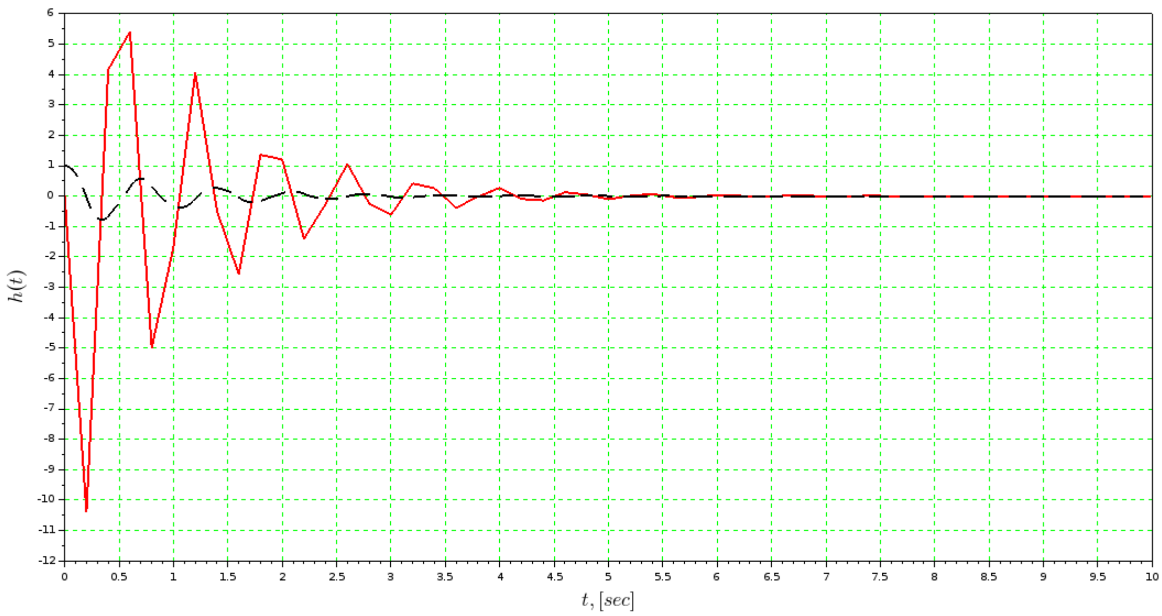
3) Эксперимент №3.



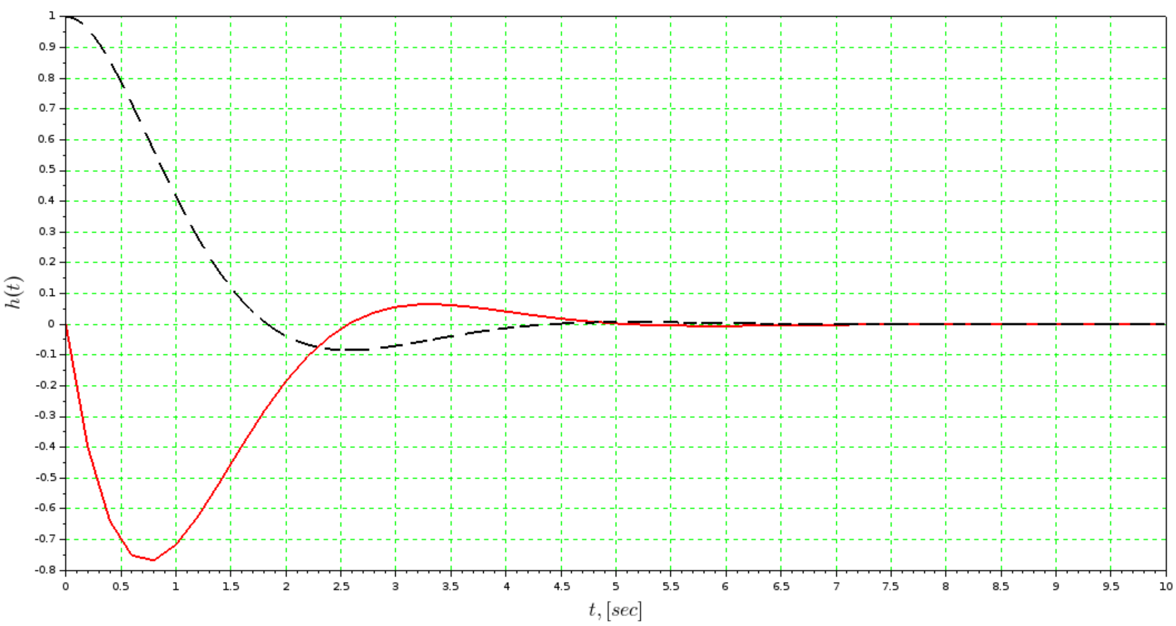
4) Эксперимент №4.



5) Эксперимент №5.



6) Эксперимент №6.

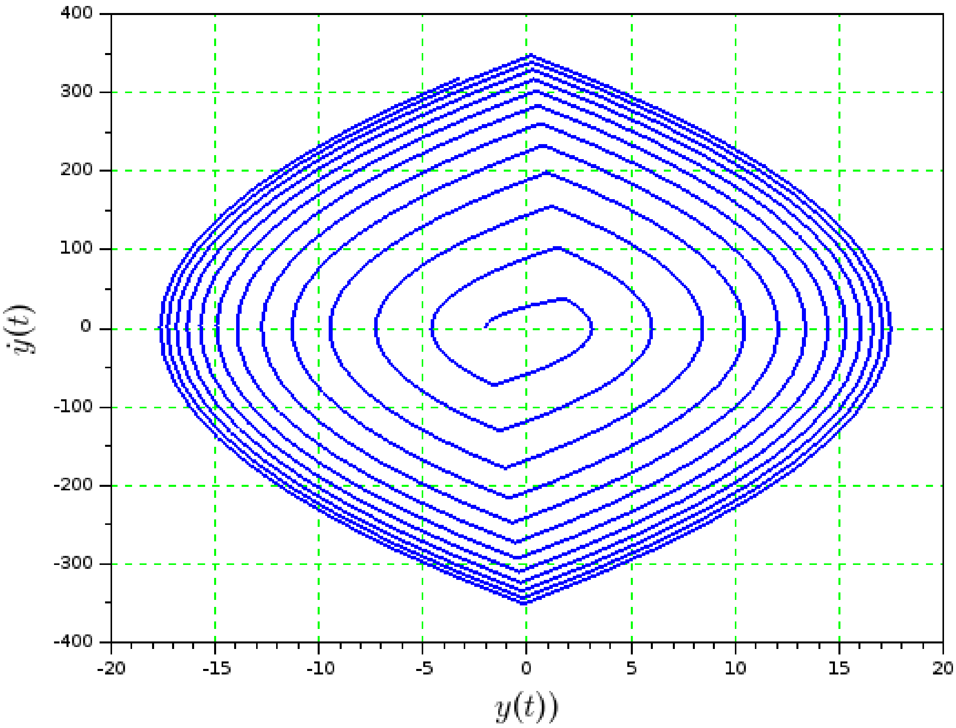


ж) Построение фазовых траеткорий.

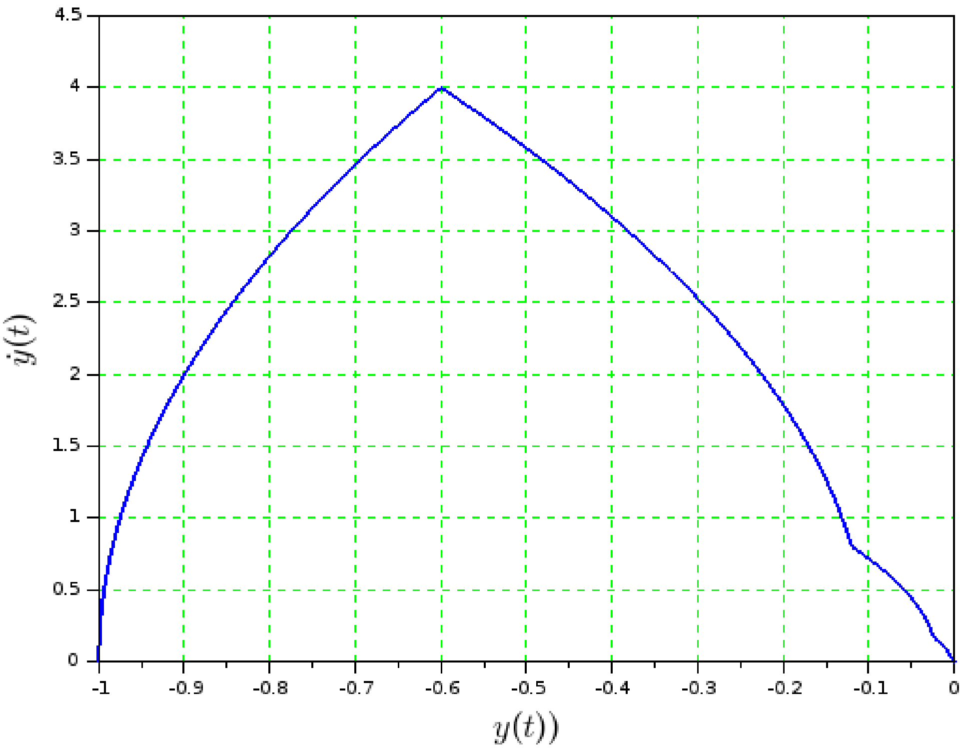
1) Фазовая траектория для начальных условий $y(0) = -3, \dot{y}(0) = 0$. Для второго жксперимента

На выходе системы нет сигнала.

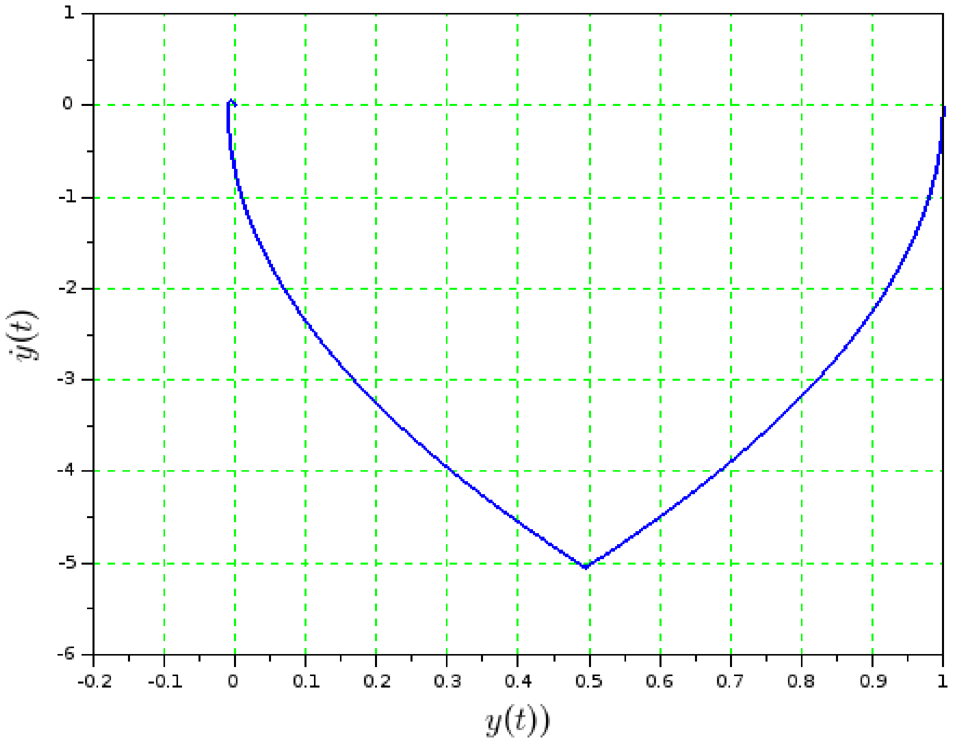
2) Фазовая траектория для начальных условий $y(0) = -2, \dot{y}(0) = 0$. Для второго эксперимента.



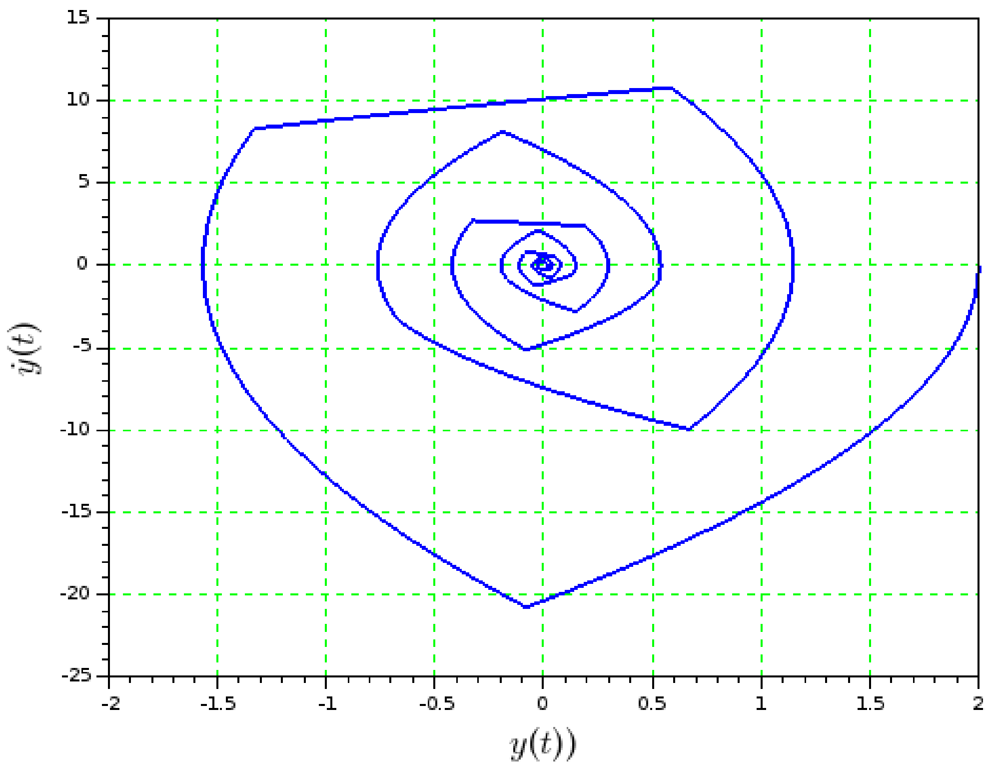
3) Фазовая траектория для начальных условий $y(0) = -1, \dot{y}(0) = 0$. Для третьего эксперимента.



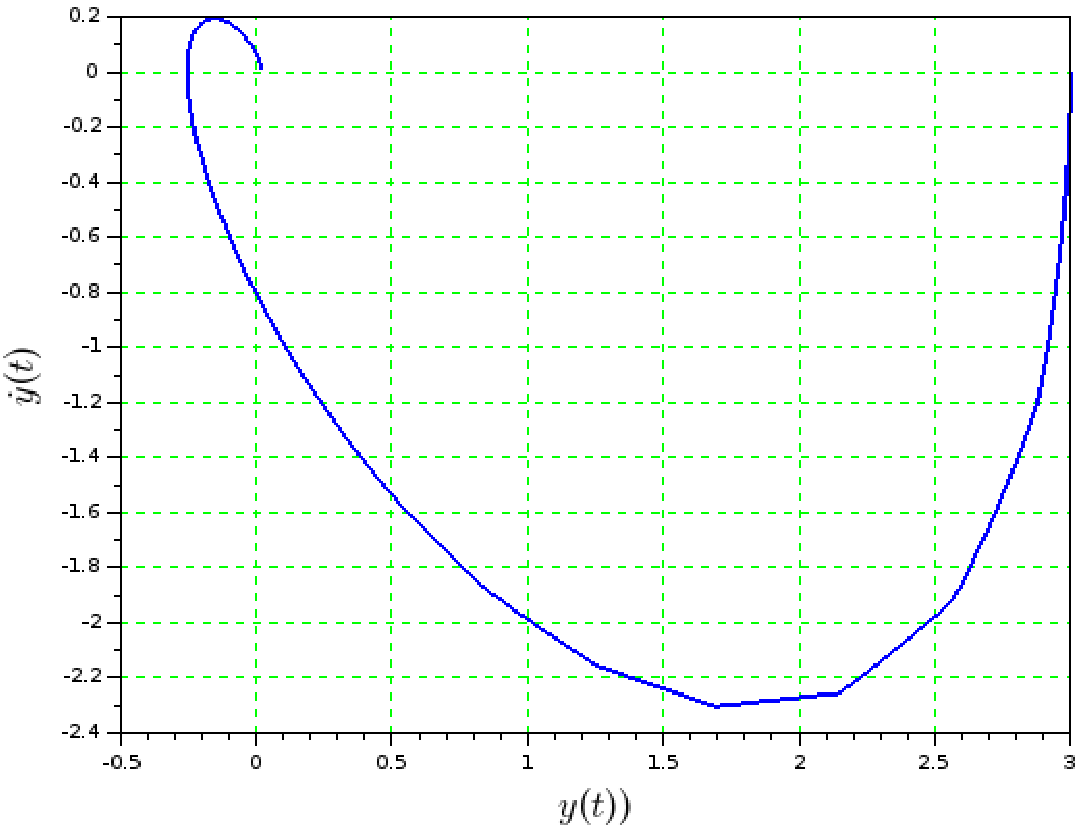
4) Фазовая траектория для начальных условий $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$. Для четвертого эксперимента.



5) Фазовая траектория для начальных условий $y(0) = 2, \dot{y}(0) = 0$. Для пятого эксперимента.



6) Фазовая траектория для начальных условий $y(0) = 3, \dot{y}(0) = 0$. Для шестого эксперимента.



4 Вывод

В ходе работы были исследованы динамические свойства дискретных систем второго порядка.

Исследованы модели «Вход-состояние-выход» для линейной дискретной системы второго порядка, в том числе – замкнутые и их характеристические полиномы. Построены графики для каждого из заданных полиномов и фазовые траектории с заданными начальными условиями.