МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет компьютерных технологий и управления

Кафедра систем управления и информатики

Студент: Артемов Кирилл

группа P4135

Домашнее задание № 2

Вывод уравнений движения плоского двухзвенного маятника на основе метода Ньютона-Эйлера и численная реализация в рекуррентном виде

Преподаватель

__________ С. А. Колюбин

«___» ________ 2016 г.

Санкт-Петербург, 2016 г.

Содержание

1 Задание

1. Вывести аналитически уравнения движения плоского двухзвенного маятника (рисунок 1) на основе метода Ньютона-Эйлера;

2. Разработать программу, реализующую полученную динамическую модель робота для решения обратной задачи динамики (численная реализация уравнений Ньютона-Эйлера в рекуррентном виде).

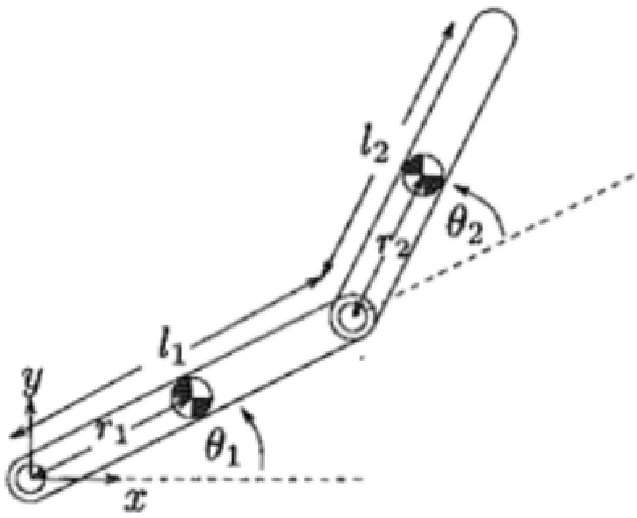

Рис. 1: Плоский двухзвенный маятник: 2 вращательных сочленения. Оба звена – цилиндрические стержни.

На рисунке 1: l_1, l_2 – длины звеньев, r_1, r_2 – расстояния от начала звена до центра масс каждого из звеньев, θ_1, θ_2 – углы поворота звеньев.

2 Вывод уравнений движения

2.1 Инициализация

Звенья вращательные, тогда пусть $q_i = \theta_i$.

Входные данные: $q, \dot{q}, \dot{q}$ – траектория движения, $l_1, l_2, r_1, r_2, d_1^{link}, d_2^{link}$ – геометрические параметры, $m1, m2, I_i$ – динамические параметры.

Первым делом прикрепим системы координат к маятнику в с методом Денавита-Хартенберга как показано на рисунке 2.

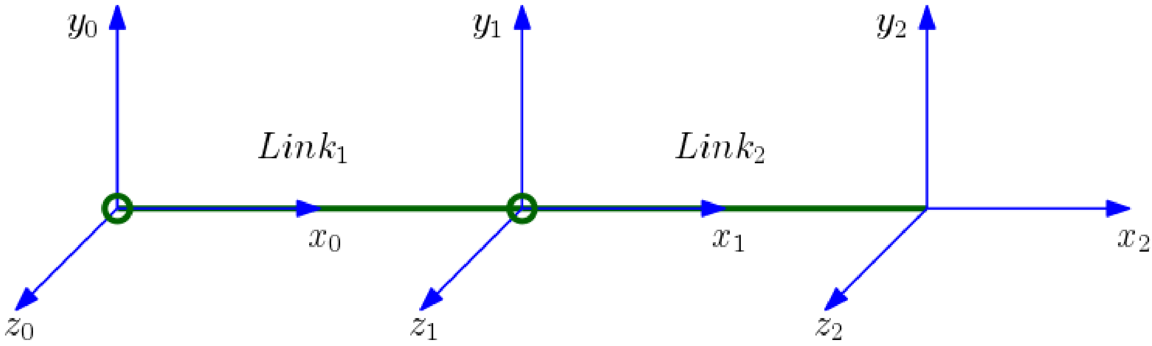

Рис. 2: Системы координат по методу ДХ

Составим таблицу 1 с параметрами ДХ.

Таблица 1: Параметры ДХ

№	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_1	0	0	q_1
2	l_2	0	0	q_2

Матрицы поворота:

$$^0R_1 = \begin{bmatrix} cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$^1R_2 = \begin{bmatrix} cos(q_2) & -sin(q_2) & 0 \\ sin(q_2) & cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2.2 Вывод уравнений

Расчет тензора инерции

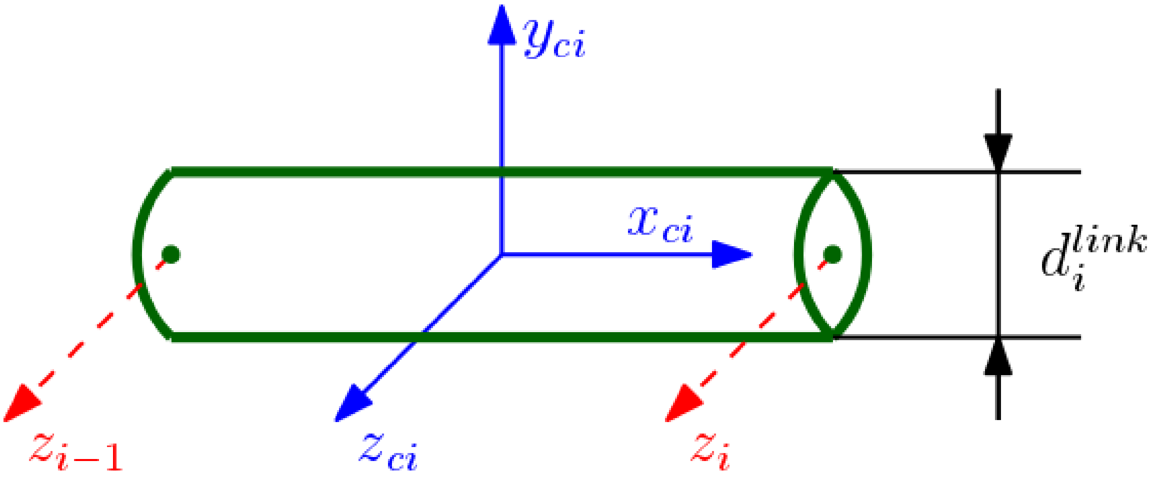

Рис. 3: Системы координат в звене

Примем за радиус $r_{li} = \frac{\frac{d_i^{link}}{2}}{2}$. Запишем моменты инерции для каждой из осей СК закрепленной в центре масс, как на рисунке 3. Для цилиндрического стержня это:

$$I_i^{xx} = \frac{m_i r_{li}^2}{2} \tag{3}$$

$$I_i^{yy} = \frac{m_i(3r_{li}^2 + l_i^2)}{12} \tag{4}$$

$$I_i^{zz} = \frac{m_i(3r_{li}^2 + l_i^2)}{12} \tag{5}$$

Тензор инерции примет вид:

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i r_{li}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i(3r_{li}^2+l_i^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i(3r_{li}^2+l_i^2)}{12} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Так как ось вращения проходит через начало звена, а не через центр, то воспользовавшись теоремой Гюйгенса - Штейнера, получим тензор инерции относительно оси вращения звена. Формула для пересчета:

$$J_{ij} = I_{ij} + m(\mathbf{d}^2 * \delta_{ij} - d_i d_j) \tag{7}$$

где J_{ij} – элемент полученного тензора, I_{ij} – элемент исходного тензора, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ – вектор смещения центра масс ($r_1 = d_1, r_2 = d_1$ по оси X для каждого звена из рисунка 1), δ_{ij} – символ Кронекера.

Получаем тензор инерции для оси вращения звена (начало звена):

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i r_{li}^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i(3r_{li}^2 + l_i^2)}{12} + m_i r_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i(3r_{li}^2 + l_i^2)}{12} + m_i r_i^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

где r_i – расстояние до центра масс звена i. Так как оба звена цилиндрические стержни, то полученный тензор инерции справедлив для обоих звеньев.

Начальные условия

$$n = 2 \tag{9}$$

$$i = 1..2 \tag{10}$$

$$g = 9.82 \tag{11}$$

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{12}$$

$$a_0 = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \end{bmatrix}^T \tag{13}$$

$$a_{c0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{14}$$

$$f_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{15}$$

$$\tau_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{16}$$

Уравнения для прямой рекурсии

Далее, все векторы у которых нет верхнего левого индекса выражены в собственной системе координат каждого из звеньев.

- Звено 1

  Запишем выражение для угловой скорости:

$$\omega_1 =^0 R_1^T[\omega_0 + \dot{q}_1 z_0] = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 \\ -\sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Запишем выражение для углового ускорения:

$$\dot{\omega}_1 =^0 R_1^T[\dot{\omega}_0 + \ddot{q}_1 z_0 + \dot{q}_1 \omega_0 \times z_0] = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 \\ -\sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Запишем выражение для линейного ускорения:

$$a_1 =^0 R_1^T a_0 + \dot{\omega}_1 \times^1 r_{01} + \omega_1 \times (\omega_1 \times^1 r_{01}) =$$
$$= \begin{bmatrix} g\sin(q_1) \\ g\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_1 l_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{q}_1^2 l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1) \\ \ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Запишем выражение для линейного ускорения центра масс:

$$a_{c1} = a_1 + \dot{\omega}_1 \times r_{1,c1} + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{1,c1}) =$$
$$= \begin{bmatrix} -\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1) \\ \ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_1(-l_1 + r_1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{q}_1^2(-l_1 + r_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\dot{q}_1^2 l_1 - \dot{q}_1^2(-l_1 + r_1) + g\sin(q_1) \\ \ddot{q}_1 l_1 + \ddot{q}_1(-l_1 + r_1) + g\cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Звено 2

Запишем выражение для угловой скорости:

$$\omega_2 =^1 R_2^T[\omega_1 + \dot{q}_2 z_1] = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 \\ -\sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Запишем выражение для углового ускорения:

$$\dot{\omega}_2 =^1 R_2^T[\dot{\omega}_1 + \ddot{q}_2 z_1 + \dot{q}_2 \omega_1 \times z_1] =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(q_2) & \sin(q_2) & 0 \\ -\sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Запишем выражение для линейного ускорения:

$$a_2 =^1 R_2^T a_1 + \dot{\omega}_2 \times^2 r_{12} + \omega_2 \times (\omega_2 \times^2 r_{11}) =$$
$$= \begin{bmatrix} (\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1))\sin(q_2) + \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1)\right)\cos(q_2) \\ (\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1))\cos(q_2) - \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1)\right)\sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + (\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1))\sin(q_2) + \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1)\right)\cos(q_2) \\ l_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + (\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1))\cos(q_2) - \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1)\right)\sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Запишем выражение для линейного ускорения центра масс:

$$a_{c2} = a_2 + \dot{\omega}_2 \times r_{2,c2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{2,c2}) =$$
$$= \begin{bmatrix} -l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + (\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1))\sin(q_2) + \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1)\right)\cos(q_2) \\ l_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + (\ddot{q}_1 l_1 + g\cos(q_1))\cos(q_2) - \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1)\right)\sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)(-l_2 + r_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2(-l_2 + r_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2(-l_2 + r_2) + (\ddot{q}_1 l_1 + \\ + g\cos(q_1))\sin(q_2) + \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1)\right)\cos(q_2) \\ l_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)(-l_2 + r_2) + (\ddot{q}_1 l_1 + \\ + g\cos(q_1))\cos(q_2) - \left(-\dot{q}_1^2 l_1 + g\sin(q_1)\right)\sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Уравнения для обратной рекурсии

- Звено 2

Запишем выражение для силы:

$$f_2 = f_3 + m_2 a_{c2} =$$
$$= \begin{bmatrix} -m_2\left(-\ddot{q}_1 l_1 \sin\left(q_2\right) + \dot{q}_1^2 l_1 \cos\left(q_2\right) + \dot{q}_1^2 r_2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r_2 + \dot{q}_2^2 r_2 - g\sin\left(q_1 + q_2\right)\right) \\ m_2\left(\ddot{q}_1 l_1 \cos\left(q_2\right) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin\left(q_2\right) + g\cos\left(q_1 + q_2\right)\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Запишем выражение для момента:

$$\tau_2 = \tau_3 - f_2 \times \left({}^2 r_{12} + r_{2,c2}\right) + f_3 \times r_{2c2} + J_2\dot{\omega}_2 + \omega_2 \times \left(J_2\omega_2\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 r_2\left(\ddot{q}_1 l_1 \cos\left(q_2\right) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin\left(q_2\right) + g\cos\left(q_1 + q_2\right)\right) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{12}\left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right)\left(12 m_2 r_2^{l2} + \mathrm{m}_2\left(2l_2 + 3r_2^{l2}\right)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 r_2\left(\ddot{q}_1 l_1 \cos\left(q_2\right) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin\left(q_2\right) + g\cos\left(q_1 + q_2\right)\right) + \\ \frac{1}{12}\left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right)\left(12 m_2 r_2^{l2} + \mathrm{m}_2\left(2l_2 + 3r_2^{l2}\right)\right) \end{bmatrix}$$

- Звено 1

Запишем выражение для силы:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= f_2 + m_1 a_{c1} = \\
&= \begin{bmatrix} -m_2\left(-\ddot{q}_1 l_1 \sin(q_2) + \dot{q}_1^2 l_1 \cos(q_2) + \dot{q}_1^2 r_2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r_2 + \dot{q}_2^2 r_2 - g\sin(q_1+q_2)\right) \\ m_2\left(\ddot{q}_1 l_1 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin(q_2) + g\cos(q_1+q_2)\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} m_1\left(-\dot{q}_1^2 r_1 + g\sin(q_1)\right) \\ m_1\left(\ddot{q}_1 r_1 + g\cos(q_1)\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} m_1\left(-\dot{q}_1^2 r_1 + g\sin(q_1)\right) - m_2\left(-\ddot{q}_1 l_1 \sin(q_2) + \right. \\ \left. + \dot{q}_1^2 l_1 \cos(q_2) + \dot{q}_1^2 r_2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 r_2 + \dot{q}_2^2 r_2 - g\sin(q_1+q_2)\right) \\ m_1\left(\ddot{q}_1 r_1 + g\cos(q_1)\right) + m_2\left(\ddot{q}_1 l_1 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 r_2 + \right. \\ \left. + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin(q_2) + g\cos(q_1+q_2)\right) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Запишем выражение для момента:

$$\tau_1 = \tau_2 - f_1 \times ({}^1r_{01} + r_{1,c1}) + f_2 \times r_{1c1} + J_1\dot{\omega}_1 + \omega_1 \times (J_1\omega_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 r_2 \left(\ddot{q}_1 l_1 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin(q_2) + \right. \\ \left. + g\cos(q_1+q_2)\right) + \frac{1}{12}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\left(12 m_2 r_{l2}^2 + \mathrm{m}_2\left(2l_2 + 3r_{l2}^2\right)\right) \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_1\left(m_1\left(\ddot{q}_1 r_1 + g\cos(q_1)\right) + m_2\left(\ddot{q}_1 l_1 \cos(q_2) + \right.\right. \\ \left.\left. + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin(q_2) + g\cos(q_1+q_2)\right)\right) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2(l_1 - r_1)\left(\ddot{q}_1 l_1 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin(q_2) + g\cos(q_1+q_2)\right) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\ddot{q}_1}{12}\left(12 m_1 r_{l1}^2 + \mathrm{m}_1\left(l_1^2 + 3r_{l1}^2\right)\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 l_1^2 m_2 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 l_1 m_2 r_2 \cos(q_2) + \ddot{q}_1 l_1 m_2 r_2 + \ddot{q}_1 m_1 r_1^2 + \\ + \ddot{q}_1 m_1 r_{l1}^2 + \ddot{q}_1 m_2 r_2^2 + \ddot{q}_1 m_2 r_{l2}^2 + \frac{\ddot{q}_1}{12}\mathrm{m}_1\left(l_1^2 + 3r_{l1}^2\right) + \\ + \frac{\ddot{q}_1}{12}\mathrm{m}_2\left(2l_2 + 3r_{l2}^2\right) + \ddot{q}_2 l_1 m_2 r_2 + \\ + \ddot{q}_2 m_2 r_2^2 + \ddot{q}_2 m_2 r_{l2}^2 + \frac{\ddot{q}_2}{12}\mathrm{m}_2\left(2l_2 + 3r_{l2}^2\right) + \\ + \dot{q}_1^2 l_1^2 m_2 \sin(q_2) + \dot{q}_1^2 l_1 m_2 r_2 \sin(q_2) + \\ + g l_1 m_2 \cos(q_1+q_2) + g m_1 r_1 \cos(q_1) + g m_2 r_2 \cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

Уравнения движения

Так как звенья рассматриваемого плоского маятника вращательные, то необходимо произвести проекцию моментов на оси их вращения.

$$
\begin{aligned}
u_1 = \tau_1^T z_0 = \ddot{q}_1 l_1^2 m_2 \cos\left(q_2\right) + \ddot{q}_1 l_1 m_2 r_2 \cos\left(q_2\right) + \ddot{q}_1 l_1 m_2 r_2 + \\
+ \ddot{q}_1 m_1 r_1^2 + \ddot{q}_1 m_1 r_{l1}^2 + \ddot{q}_1 m_2 r_2^2 + \ddot{q}_1 m_2 r_{l2}^2 + \frac{\ddot{q}_1}{12} \mathrm{m}_1 \left(l_1^2 + 3 r_{l1}^2\right) + \\
+ \frac{\ddot{q}_1}{12} \mathrm{m}_2 \left(2 l_2 + 3 r_{l2}^2\right) + \ddot{q}_2 l_1 m_2 r_2 + \ddot{q}_2 m_2 r_2^2 + \ddot{q}_2 m_2 r_{l2}^2 + \\
+ \frac{\ddot{q}_2}{12} \mathrm{m}_2 \left(2 l_2 + 3 r_{l2}^2\right) + \dot{q}_1^2 l_1^2 m_2 \sin\left(q_2\right) + \dot{q}_1^2 l_1 m_2 r_2 \sin\left(q_2\right) + \\
+ g l_1 m_2 \cos\left(q_1 + q_2\right) + g m_1 r_1 \cos\left(q_1\right) + g m_2 r_2 \cos\left(q_1 + q_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 = \tau_2^T z_1 = m_2 r_2 \left(\ddot{q}_1 l_1 \cos\left(q_2\right) + \ddot{q}_1 r_2 + \ddot{q}_2 r_2 + \dot{q}_1^2 l_1 \sin\left(q_2\right) + g \cos\left(q_1 + q_2\right)\right) + \\
+ \frac{1}{12} \left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right) \left(12 m_2 r_{l2}^2 + \mathrm{m}_2 \left(2 l_2 + 3 r_{l2}^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Сгруппировав, получим окончательные уравнения движения плоского двухзвенного маятника:

$$
\begin{aligned}
\Big(l_1^2 m_2 \cos\left(q_2\right) + l_1 m_2 r_2 \cos\left(q_2\right) + l_1 m_2 r_2 + m_1 r_1^2 + m_1 r_{l1}^2 + m_2 r_2^2 + m_2 r_{l2}^2 + \\
+ \frac{1}{12} \mathrm{m}_1 \left(l_1^2 + 3 r_{l1}^2\right) + \frac{1}{12} \mathrm{m}_2 \left(2 l_2 + 3 r_{l2}^2\right) + \Big) \ddot{q}_1 + \\
+ \left(l_1 m_2 r_2 + m_2 r_2^2 + m_2 r_{l2}^2 + \frac{1}{12} \mathrm{m}_2 \left(2 l_2 + 3 r_{l2}^2\right) + \right) \ddot{q}_2 + \\
+ \left(l_1^2 m_2 \sin\left(q_2\right) + l_1 m_2 r_2 \sin\left(q_2\right)\right) \dot{q}_1^2 + \\
+ g l_1 m_2 \cos\left(q_1 + q_2\right) + g m_1 r_1 \cos\left(q_1\right) + g m_2 r_2 \cos\left(q_1 + q_2\right) = u_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(m_2 r_{l2}^2 + \frac{1}{12} \mathrm{m}_2 \left(2 l_2 + 3 r_{l2}^2\right)\right) \left(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right) + \\
+ \left(m_2 r_2 l_1 \cos\left(q_2\right) + m_2 r_2 r_2\right) \ddot{q}_1 + \\
+ m_2 r_2 r_2 \ddot{q}_2 + \\
+ m_2 r_2 l_1 \sin\left(q_2\right) \dot{q}_1^2 + \\
+ m_2 r_2 g \cos\left(q_1 + q_2\right) = u_2
\end{aligned}
$$

3 Расчет траектории

Для моделирования численного алгоритма, на вход которого нужно подавать траекторию движения, рассчитаем ее методом сплайн-функций.

Для упрощения расчетов воспользуемся нормированным временем $t \in [0, 1]$.

$$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}}; \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]; t \in [0, 1]$$

Траектория для звена i представляет собой три полинома:

$$\begin{cases} q_i(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \\ \dot{q}_i(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \\ \ddot{q}_i(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^2 \end{cases}$$

Начальные и конечные значения для траектории представлены в таблице 1.

Таблица 2: Граничные условия траектории

Начало	Конец
$q_i(0) = q_s$	$q_i(1) = q_e$
$\dot{q}_i(0) = dq_s$	$\dot{q}_i(1) = dq_e$
$\ddot{q}_i(0) = ddq_s$	$\ddot{q}_i(1) = ddq_e$

Далее, запишем шесть уравнений, необходимых для нахождения неизвестных коэффициентов полиномов:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_{is} \\ a_1 &= dq_{is} \\ 2a_2 &= ddq_{is} \\ a_0 + a_1 + a2 + a3 + a4 + a5 &= q_{ie} \\ a_1 + 2a2 + 3a3 + 4a4 + 5a5 &= dq_{ie} \\ 2a2 + 6a3 + 12a4 + 20a5 &= ddq_{ie} \end{aligned}$$

Упростив:

$$
\begin{aligned}
a3 + a4 + a5 &= q_{ie} - q_{is} - dq_{is} - \frac{1}{2}ddq_{is} \\
3a3 + 4a4 + 5a5 &= dq_{ie} - q_{is} - ddq_{is} \\
6a3 + 12a4 + 20a5 &= ddq_{ie} = ddq_{is}
\end{aligned}
$$

Получим матричное уравнение (полученные матрицы расположены не в модуле *init.py*, а непосредственно в *trajectory.py*):

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{ie} - q_{is} - dq_{is} - \frac{1}{2}ddq_{is} \\ dq_{ie} - q_{is} - ddq_{is} \\ ddq_{ie} = ddq_{is} \end{bmatrix}
$$

Откуда найдем неизвестные коэффициенты:

$$
\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{ie} - q_{is} - dq_{is} - \frac{1}{2}ddq_{is} \\ dq_{ie} - q_{is} - ddq_{is} \\ ddq_{ie} = ddq_{is} \end{bmatrix}
$$

И наконец, задаем время движения манипулятора между точками и вычисляем для заданных интервалов времени значения полиномов.

4 Численная реализация в рекуррентном виде

Программа представляет из себя несколько модулей написанных на языке программирования Python. Список разработанных модулей:

1. *init.py* – содержит параметры, необходимые для расчета динамики робота, а также параметры траектории.
2. *task.py* – содержит функцию *main*, которая рассчитывает траекторию для заданных граничных условий в модуле *init.py*, строит ее график, а также для всех звеньев вычисляет:
   (a) полную динамику;
   (b) вектор гравитации;

(c) Кориолисовы/центробежные силы;

(d) матрицу инерции;

(e) обобщенные моменты.

и строит графики зависимости вычисленных данных от времени.

3. $Kinematics.py$ – содержит класс $Kinematics$ отвечающий за кинематику маятника, решение прямой и обратной задач кинематики. Был реализован в рамках курса лабораторных работ $ControlMethotsforRobotics$. Для инициализации экземпляра класса в конструктор передаются массивы a, α, d, θ – параметры ДХ.

4. $Dynamics.py$ содержит функции расчета тензоров инерции $j = J(I_c, m, d)$, матриц трансформации $h = H(kinematicsObject, q, from, to)$, матриц поворота $r = R(kinematicsObject, q, from, to)$ и функцию решения обратной задачи динамики $u = NE(q, \dot{q}, \ddot{q}, kinematicsObject, g)$.

5. $trajectory.py$ содержит функции построения траектории движения для заданных начальных условий $q, \dot{q}, \ddot{q} = getTrajectories(initQ, initDQ, initDDQ, interval)$, где $initQ$ массив $n \times 2$ – каждая строка содержит начальное и конечное значение обобщенной координаты. Тоже и для $initDQ, initDDQ$. $interval = [time_{start}, time_{end}, step]$.

6. $transformations.py$ – содержит несколько функция для удобной работы с матрицами однородных преобразований.

7. $graphics.py$ – содержит функции для построения графиков.

На рисунках ниже изображены результаты работы программы.

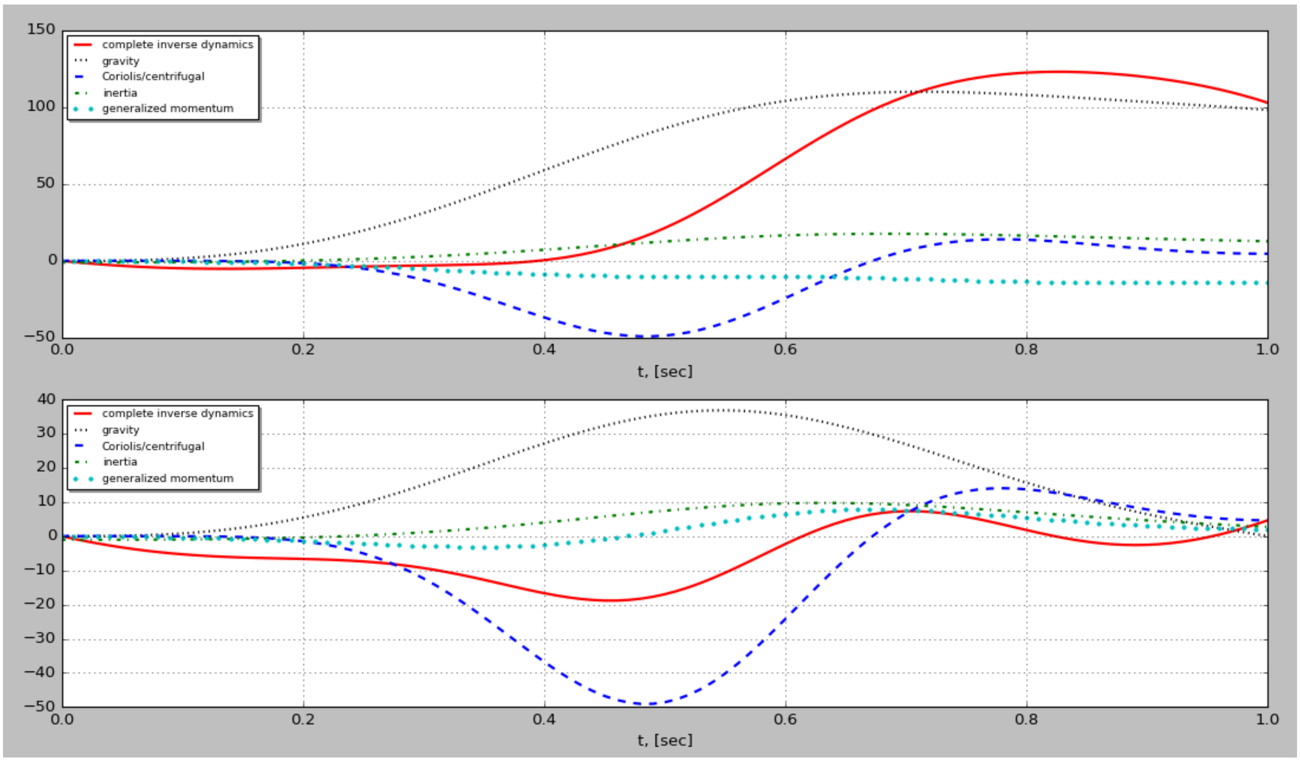

Рис. 4: Результаты выполнения задания

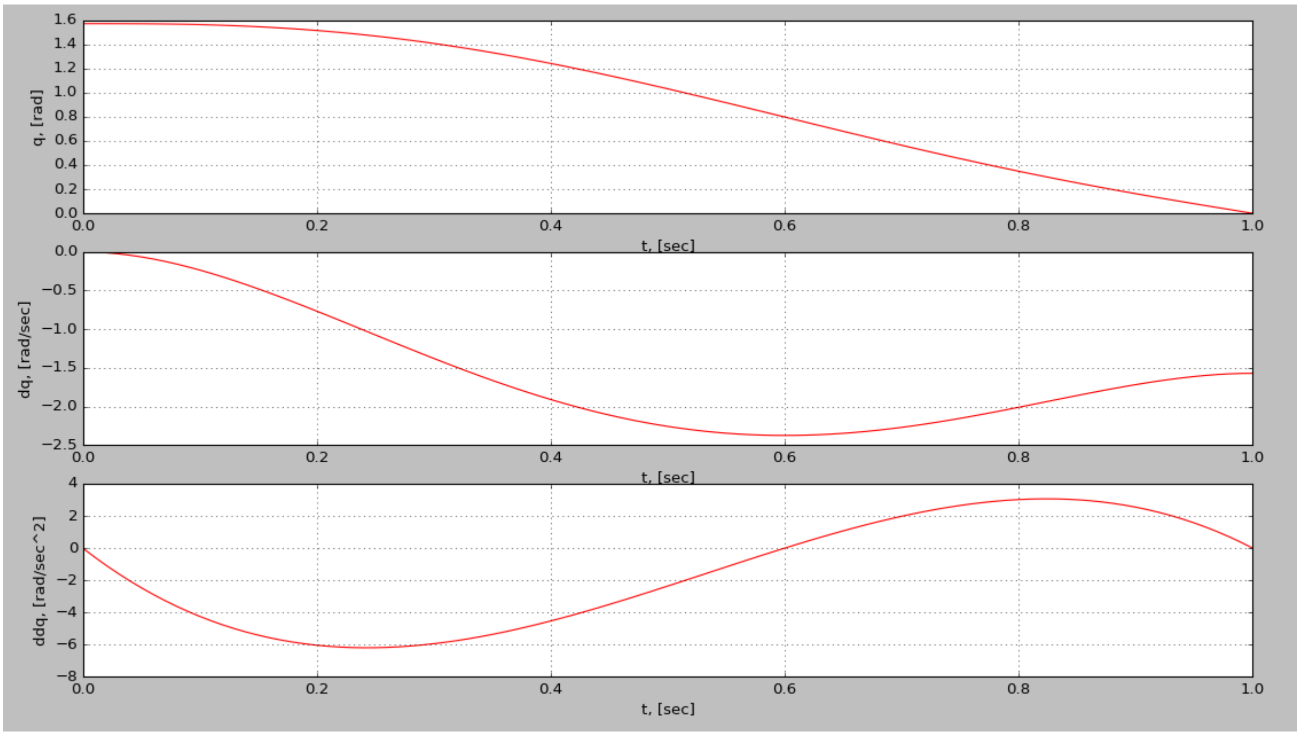

Рис. 5: Траектория для звена 1

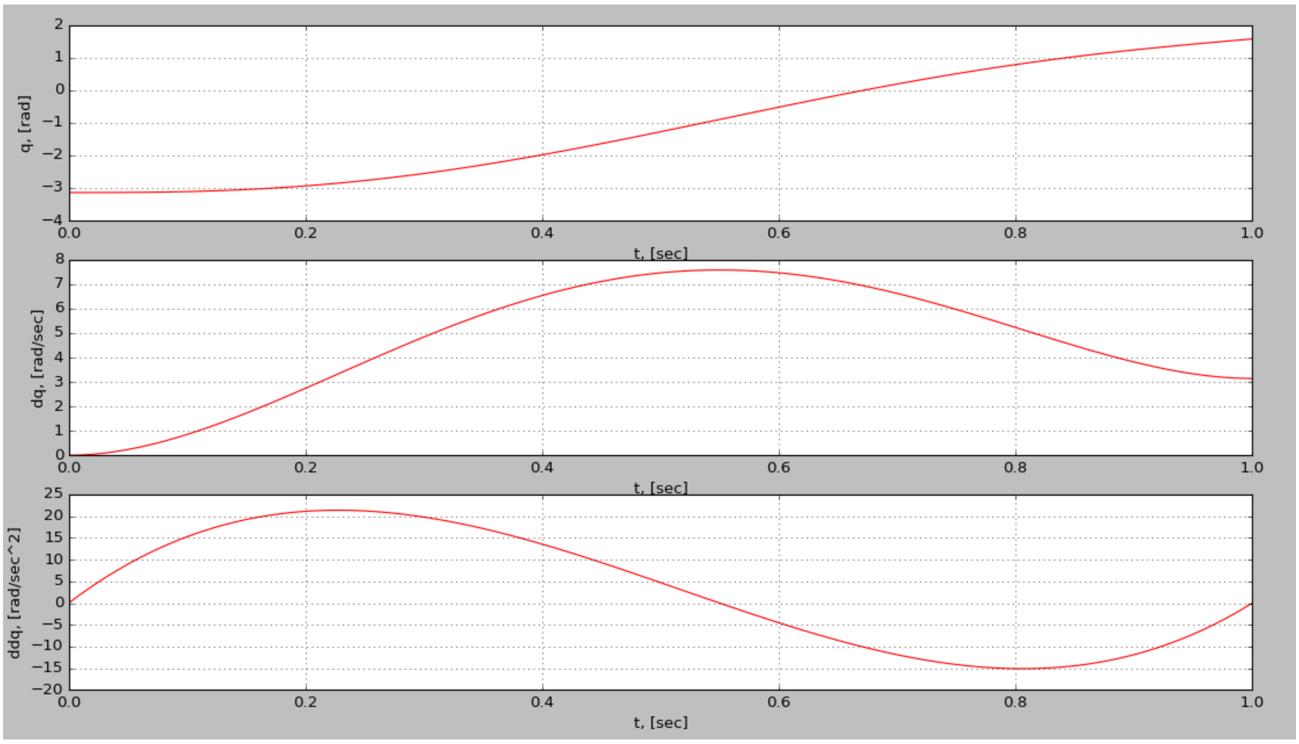

Рис. 6: Траектория для звена 2

5 Вывод

В этой работе были получены уравнения движения для плоского двухзвенного маятника методом Ньютона-Эйлера, а также реализовано численное вычисление динамики для заданной траектории движения.

Следует отметить, что аналитический вывод уравнений методом Ньютона-Эйлера весьма сложен и уравнения получаются достаточно громоздкими, что бы допустить в них внушительное количество ошибок, в то время как численная реализация в программе укладывается в два десятка строк кода.