Вступительный экзамен в аспирантуру 27.06.01

Kirill Artemov
kaartemov@gmail.com

July 2018

РАЗДЕЛ I. Модели объектов управления

1 Преобразование Лапласа и его основные свойства

Преобразование Лапласа — интегральное преобразование, связывающее функцию $F(s)$ (изображение) комплексного аргумента с функцией $f(t)$ (оригинал) действительного аргумента.

Преобразование Лапласа справедливо только для оригиналов. Оригинал — это комплекснозначная функция $f(t)$ действительного аргумента t, которая удовлетворяется свойствам:

1. $f(t) = 0$, при $t < 0$;
2. на любом конечном интервале имеет не более чем конечное число точек разрыва;
3. f(t) имеет ограниченный рост, т.е. возрастает не быстрее показательной функции: существуют такие постоянные $M > 0$ и $a >= 0$, что $|f(t)| < Me^{at}$, при $t > 0$.

Также, для всякого оригинала $f(t)$ изображение по Лапласу $F(s)$ определено в полуплоскости $Res > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Преобразование Лапласа $\mathfrak{L}\{f(x)\}$ — позволяет перейти от функции $f(t)$ действительной переменной к функции $F(s)$ комплексной переменной:

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

где $s = \sigma + jw$ — комплексная переменная, которая выбирается так, чтобы интеграл (1) сходился. Правая часть выражения (1) называется *интегралом Лапласа*.

Обратное преобразования Лапласа $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$ позволяет все сделать наоборот:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma - j\cdot\infty}^{\sigma + j\cdot\infty} F(s)e^{s\tau}ds \tag{2}$$

где $j = \sqrt{-1}$, σ — выбирается так, чтобы интеграл сходился. Интеграл (2) называется *интегралом Бромвича*.

Примеры:

$$\mathfrak{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathfrak{L}\{\mathbf{1}(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}.$$

Свойства

1. Линейность
$$af(t) + bg(t) = aF(s) + bG(s) \tag{3}$$
2. Теорема подобия
$$f(at) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{4}$$
3. Теорема запаздывания
для любого $\tau > 0$:
$$f(t-\tau) = e^{-st}F(s) \tag{5}$$
4. Теорема смещения
для любого s_0:
$$e^{s_0 t}f(t) = F(s - s_0) \tag{6}$$

5. Дифференцирование оригинала

$$f^{(n)}(t) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0), \tag{7}$$

где $f^{(k)}(0)$ — предел справа в т. $t = 0$.

6. Дифференцирование изображения

Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)$:

$$F^n(s) = (-t)^n f(t) \tag{8}$$

7. Интегрирование оригинала и изображения

$$\int_0^\infty f(\tau) d\tau = \frac{F(s)}{s} \tag{9}$$

Если интеграл с изображением сходится, то справедливо:

$$\int_s^\infty F(s) ds = \frac{f(t)}{t} \tag{10}$$

8. Теорема о свертке

Свертке оригиналов соответствует произведение изобраений

$$f(t) \circledast g(t) = F(s) \cdot G(s) \tag{11}$$

9. Теоремы о начальном и конечном значении (предельные теоремы)

Теорема о конечном значении очень полезна, так как описывает поведение оригинала на бесконечности с помощью простого соотношения. Это, например, используется для анализа устойчивости траектории динамической системы.

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s) \tag{12}$$

2 Понятие передаточной функции и передаточной матрицы непрерывных систем

Передаточная функция — один из способов математического описания динамической системы. Представляет собой дифференциальный оператор, выражающий связь между входом и выходом линейной стационарной системы. Зная входной сигнал системы и передаточную функцию, можно восстановить выходной сигнал.

Например, для линейной модели ВВ одноканального объекта управления:

$$a(p)y(t) = b(p)u(t), \tag{13}$$

передаточкая фукция будет иметь вид:

$$y(t) = \frac{b(p)}{a(p)} u(t) = W(p)u(t), \tag{14}$$

где $W(p)$ — интегралльно–дфифференциальный опрератор или передаточная функция, a_i, b_i — параметры модели, n — порядок модели, $r = n - m \geq 1$ — относительная степень модели. В физически реализуемых системах относительная степень модели не должна быть меньшей единицы.

В случае $u(t) = 0$ система называется автономной. $a(p) = 0$ — характеристический полином, где его корни p_i — полюсы системы. $b(p) = 0$ — характеристический полином правой части, где его корни p_i^0 — нули системы. В случае $a_0 = 1$ — характеристический полином называется приведенным.

Преимущество использования таких операторных моделей: краткость записи уравнений; удобство преобразования сложных моделей.

Для MIMO-систем вводится понятие **матричной передаточной функции**. Если для системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = Cx \tag{15}$$

для нулевых начальных условий и при $p = d/dt$ записать:

$$x = (pI - A)^{-1} B \cdot u \quad \Rightarrow \quad y = C(pI - A)^{-1} B \cdot u, \tag{16}$$

то получим передаточную матрицу системы

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}. \tag{17}$$

где $(pI - A)^{-1}$ — резольвента, которую можно переписать в виде:

$$(pI - A)^{-1} = \frac{adj(pI - A)}{det(pI - A)} = \frac{p^{n-1} + R_1 p^{n-2} + \cdots + R_n}{det(pI - A)} \tag{18}$$

где характеристический полином системы:

$$det(pI - A) = a(p) \tag{19}$$

где собственные числа матрица A в точности совпадают с полюсами системы $\lambda_i\{A\} = p_i$.

В матрица $W(p)$ на месте ij элемента стоит обычная передаточная функция от i-ого входа к j-у выходу.

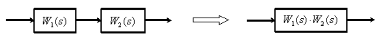
3 Понятия структурных схем и структурных преобразований

Структурная схема — это графическое изображение системы в виде блоков с передаточными функциями и связей между ними. На схемах указываеются входныя, промежуточные и выходные переменные.

Структурная схема САУ в простейшем случае строится из элементарных динамических звеньев. Но несколько элементарных звеньев могут быть заменены одним звеном со сложной передаточной функцией. Для этого существуют правила эквивалентного преобразования структурных схем. Рассмотрим возможные способы преобразований для трех элементарных звеньев:

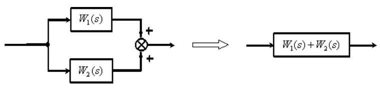
$$y_1 = W_1 x_1, \quad y_2 = W_2 x_2, \quad y_3 = W_3 x_3. \tag{20}$$

1. Последовательное соединение:



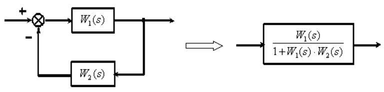
$$y = W_1 W_2 W_3 x \tag{21}$$

2. Параллельное соединение:



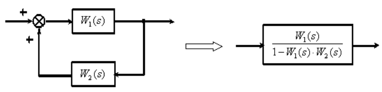
$$y = (W_1 + W_2 + W_3)x \tag{22}$$

3. Замкнутая система с ООС (ОС — W_3):



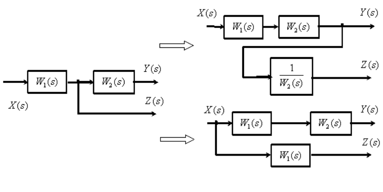
$$y = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 W_3} x \tag{23}$$

4. Замкнутая система с ПОС (ОС — W_3):



$$y = \frac{W_1 W_2}{1 - W_1 W_2 W_3} x \tag{24}$$

5. Перенос точки ветвления через динамическое звено:

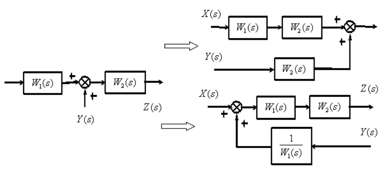


$$y = W_1 W_2 x, \tag{25}$$

$$z_{fwd} = W_1 W_2 \frac{1}{W_2}, \tag{26}$$

$$z_{bwd} = W_1 \tag{27}$$

6. Перенос суммирующего звена через динамическое звено:



$$z = (W_1 + W_2 y)x, \tag{28}$$

$$z_{fwd} = W_1 W_2 x + W_2 y, \tag{29}$$

$$z_{bwd} = W_1 W_2 (\frac{1}{W_2} y + x) \tag{30}$$

4 Аппарат частотных характеристик систем управления: амплитудно-фазовые характеристики; амплитудная и фазовая частотные характеристики и логарифмические амплитудно-фазовые частотные характеристики

Различают два вида характеристик САУ и их звеньев: временные и частотные.

Временные характеристики (переходная, весовая) получают подавая на вход СУ эталонные сигналы: $\mathbf{1}(t), \delta(t)$.

Частотные характеристики СУ и их звеньев получаются рассмотрением вынужденных движений системы (звена) при подаче на ее вход гармонического сигнала:

$$x(t) = A\sin\omega t, \tag{31}$$

где ω — частота.

При таком входе на выходе линейной системы в установившемся режиме (при больших t) будет синус той же частоты (для устойчивых систем), но с другой амплитудой A и сдвигом фазы ϕ:

$$x(t) = A(\omega)\sin\left(\omega t + \phi(\omega)\right). \tag{32}$$

Зная ПФ СУ можно вычислить амплитуду и сдвиг фазы:

$$A(\omega) = |(j\omega)|, \quad \phi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctan\frac{ImW(j\omega)}{ReW(j\omega)}. \tag{33}$$

где $j\omega = s$, т.е. в обычную ПФ вместо s подставляется только мнимая ее часть. Для кажой частсоты ω значение $W(j\omega) = P + jQ = A(\omega)e^{-j\phi(\omega)}$ — это некторое комплексное число с амплитудой $|W(j\omega)| = \sqrt{P^2+Q^2}$ и фазой $\arg W(j\omega) = \arctan\dfrac{Q}{P}$.

ПФ $W(j\omega$ — называется **частотной характеристикой звена**, т.к она характеризует выход системы при гармонических сигналах разной частоты. Где P, Q — вещественная и мнимая частотные характеристики.

Функции $A(), \phi(\omega)$ — называются соответственно **амплитудной и фазовой характеристиками** (АЧХ и ФЧХ). *Амплитудная характеристика* — это коэффициент усиления гармонического сигнала.

По форме АЧХ различают несколько основных типов звеньев:

1. ФНЧ — пропускает низкочастотные сигналы примерно с одинаковым коэффициентом усиления, ослабляет высокочистотные шумы и помехи;

2. ФВЧ — пропускает высокие, ослаблляет низкие;

3. полосовой фильтр — комбинация предыдущих;

4. полосовой режекторный фильтр — инвертированные предыдущий.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) — удобное представление частотного отклика линейной стационарной динамической системы в виде графика в комплексных координатах.

На комплексной плоскости W (см. рисунок) комплексное число изображается вектором OC, длина которого равна $A(\omega)$, а аргумент это угол $\phi(\omega)$ образованный этим вектором с действительной положительной полуосью.

При изменении частоты от 0 до ∞ вектора OC (точка) опишет некоторую кривую, которая называется годографом амплитудно-фазо-частотной характеристики.

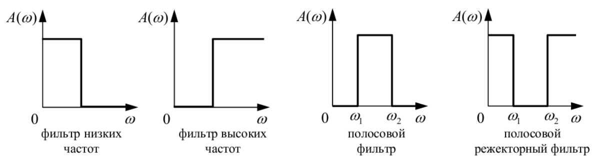


Рис. 1: Амплитудные характеристики идеальных фильтров

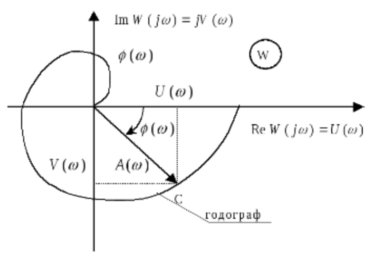


Рис. 2: АФЧХ

В практике исследований систем автоматического управления широко применяются логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики.

Частотные характеристики достаточно сложно строить вручную. В 60-е годы, когда раз вивалась классическая теория управления, не было мощных компьютеров, поэтому наибольшую популярность приобрели приближенные методы, с помощью которых можно было проектировать регуляторы с помощью ручных вычислений и построений. Один из таких подходов основа на использовании логарифмических частотных характеристик. Вместо $A()$ было предложено использовать логарифмическую амплитудную частотных характеристику (ЛАЧХ): график, на котором по оси абсцисс откладывается десятичный лога рифм частоты ($\log\omega$), а по оси ординат — величина, измеряемая в децибелах (дБ). При построении логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) по оси абсцисс также откладывается логарифм частоты. Единицей отсчета на логарифмической оси частот является декада — диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу). Вместе ЛАЧХ и ЛФЧХ называются логарифмической амплитудно-фазовой частотной характеристикой (ЛАФЧХ) или диаграммой Боде.

Логарифмическая амплитудно-частотная ЛАЧХ характеристика системы автоматического управления — это кривая, соответствующая двадцати десятичным логарифмам модуля $W(j)$, построенной в десятичном логарифмическом масштабе частот — размерность децибел. ЛАЧФ:

$$L(\omega) = 20\log|W(j\omega)| = 20\log A(\omega) \tag{34}$$

Логарифмическая фазо-частотная характеристика ЛФЧХ системы автоматического управления — это её фазочастотная характеристика $\phi(\omega)$, построенная в логарифмическом масштабе частот.

Ценность частотных характеристик состоит в том, что они позволяют косвенно судить о процессах, происходящих в системах автоматического управления (не решая дифференциальных уравнений, описывающих данную систему).

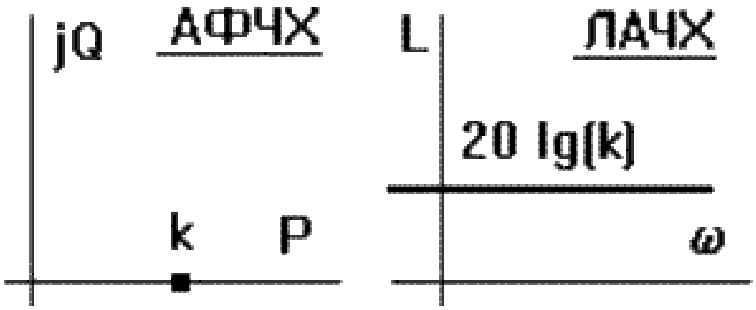
Для построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики принято брать более мелкую единицу измерения, которая в 20 раз меньше одной десятичной логарифмической единицы

В ЛЧХ единица измерения ординат — децибел, по оси абсцисс — декада. Частота, для которой $A(_c) = 1$ — называется частотой среза. Для устойчивых система значение фазына частоте среза должно быть больше -180^o, а годограф не должен охватывать точку $(-1, 0)$.

5 Типовые звенья непрерывных систем, частотные характеристики типовых звеньев

Обычно система управления состоит из отдельных блоков, каждый из которых описывается уравнениями низкого порядка (первого и второго). Для понимания работы системы в целом желательно хорошо представлять, как ведут себя ее отдельные элементы. Для построения ЛАФЧХ передаточную функцию системы зазбивают на простейшие сомножители и строят характеристику для всей системы как сумму ЛАЧХ и ЛФЧХ отдельных звеньев.

1. Пропорциональное (безъинерционное) звено

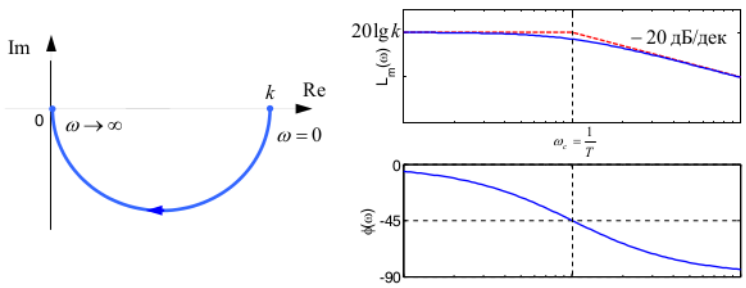


$$W(s) = k, \quad W(j\omega) = k, \quad k \neq 0, \tag{35}$$

$$\text{АЧХ и ФЧХ: } A(\omega) = k, \quad \phi(\omega) = 0, \tag{36}$$

$$\text{ЛАФЧХ: } \begin{cases} L(\omega) = 20\log k \\ \phi(\omega) = 0. \end{cases} \tag{37}$$

2. Апериодическое звено



$$W(s) = \frac{k}{Ts+1} = \frac{k - jkT\omega}{T^2\omega^2+1}, \quad k \neq 0, T > 0 \tag{38}$$

$$\text{АЧХ и ФЧХ: } A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}, \tag{39}$$

$$\phi(\omega) = \arctan\frac{ImW}{ReW} = -\arctan T\omega, \tag{40}$$

$$\text{ЛАФЧХ: } \begin{cases} L(\omega) = 20\log A(\omega) = -20\log\sqrt{1+T^2\omega^2} \\ \phi(\omega) = -\arctan T\omega. \end{cases} \tag{41}$$

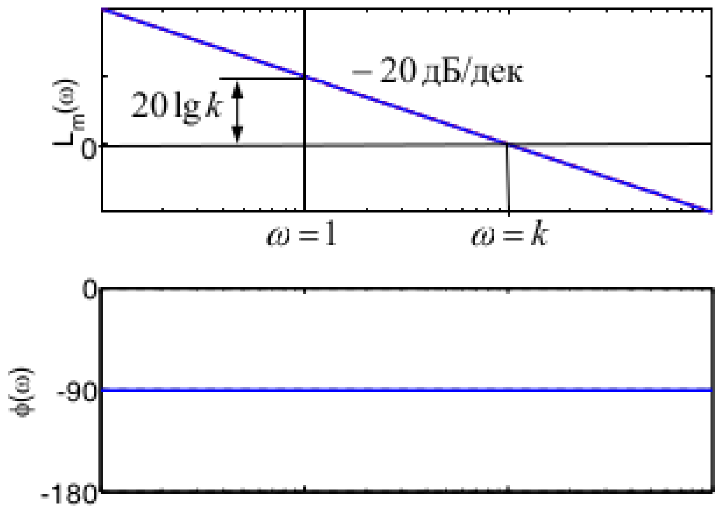
3. Интегрирующее звено

4. Колебательное звено

5. Идеальное дифференцирующее звено

6 Переходная и весовая функции непрерывной системы. Свободная, вынужденная, переходная и установившаяся составляющие движения непрерывной системы

Переходным процессом называют процесс изменения во вреени различных переенных системы (фазовых, выходных, отклонений и т.д.) в ходе которых система изменяет свое состояние. Перехдные процессы могут быть представлены аналитически или графически. К графическим можно отнести: временные диаграммы переменных системы $(y(t), \dot{y}(t), \dots)$ и фазовые траектории. Для аналитического представления нужно режать ДУ системы.

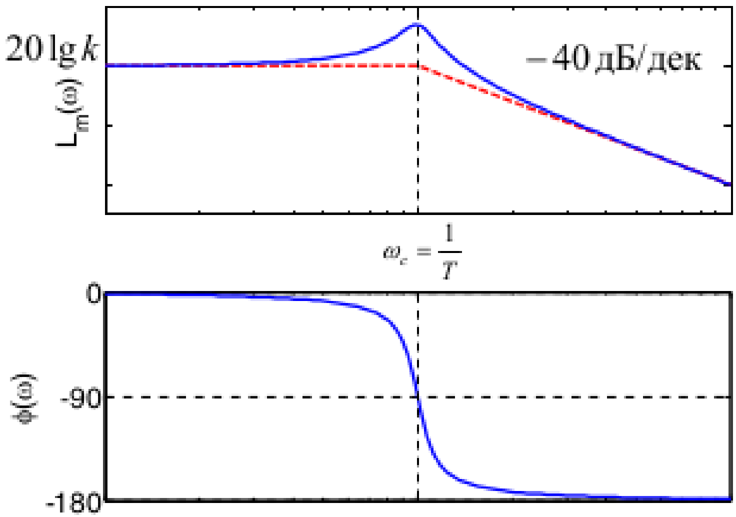


$$W(s) = \frac{k}{Ts} = \frac{k}{Tj\omega}, \quad k \neq 0, T > 0 \tag{42}$$

$$\text{АЧХ и ФЧХ:}\ A(\omega) = \frac{k}{T\omega}, \tag{43}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, \tag{44}$$

$$\text{ЛАФЧХ:}\ \begin{cases} L(\omega) = -20\log T\omega \\ \phi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{45}$$

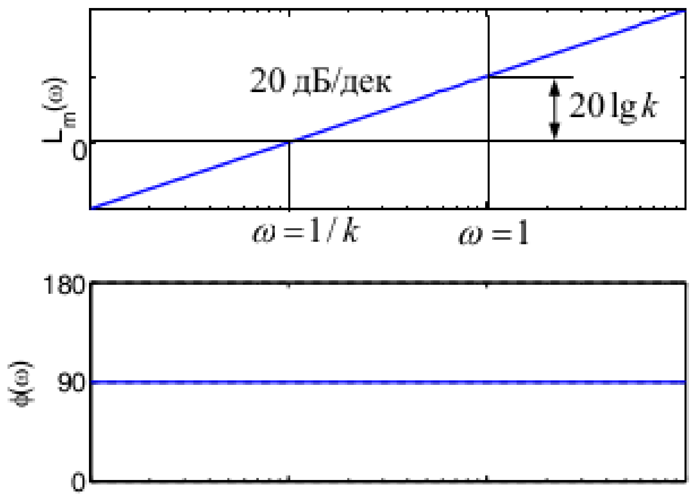


$$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{1 - T^2\omega^2 - j2\xi T\omega}{4\xi^2T^2\omega^2 + (1 - T^2\omega^2)^2}, \tag{46}$$

$$\text{АЧХ и ФЧХ:}\ A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{4\xi^2T^2\omega^2 + (1 - T^2\omega^2)^2}}, \tag{47}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan\frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}, \tag{48}$$

$$\text{ЛАФЧХ:}\ \begin{cases} L(\omega) = -20\log\sqrt{4\xi^2T^2\omega^2 + (1 - T^2\omega^2)^2} \\ \phi(\omega) = -\arctan\dfrac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}. \end{cases} \tag{49}$$



$$W(s) = ks = kj\omega, \tag{50}$$

$$\text{АЧХ и ФЧХ:}\ A(\omega) = k\omega, \tag{51}$$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2}, \tag{52}$$

$$\text{ЛАФЧХ:}\ \begin{cases} L(\omega) = 20\log(jk) \\ \phi(\omega) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{53}$$

Решение $y(t)$ (или $y_{\text{п}}(t)$ — переходная составляющая) может быть представлено в виде суммы свободной и вынужденной составляющих:

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{в}}(t) \tag{54}$$

где $y_{\text{в}}(t)$ — вынужденная составляющая, соответствующая переходному процессу системы при нулевых начальных условиях $y_0^{(i)} = 0$ и является реакцией системы на входное воздействие $u(t)$, $y_{\text{св}}(t)$ — свободная составляющая или переходный процесс автономной системы, соответствует решениям ОДУ системы и зависит от начальных условий.

Свободная составляющая зависит от полюсов системы и определяется выражениями:

1. Для попарно различных (некратных) корней:

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i e^{p_i t}, \tag{55}$$

где $C_i e^{p_i t}$ — свободные колебания системы или моды.

(a) Вещественные корни $p_i = \alpha_i$ представляют апериадичускую составляющую:

$$y_i = C_i e^{\alpha_i t}. \tag{56}$$

(b) Пары комплексно-сопряженных коней $p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$ колебательную составляющую:

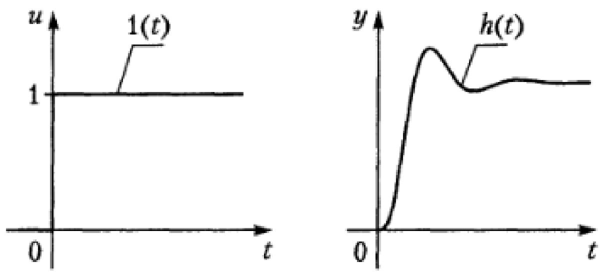
$$y_{i,i+1} = A_i e^{\alpha_i t} \sin\left(\beta_i t + \phi_i\right). \tag{57}$$

2. Для кратных корней:

$$y_{i,i+1} = (C_i + C_{i+1} t) \cdot e^{\alpha_i t} \tag{58}$$

Вынужденная составляющая переходного процесса зависит от входного воздействия и может быть аналитически определена только для ряда частных случаев, соответствующих некоторым типовым входным сигналам. Наиболее распространенными сигналами являеются единичный скачек, дельта-функция и гармоническое воздействие.

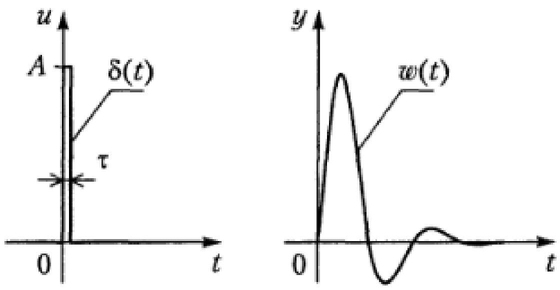
1. Единичный скачек.



$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, for\; t \le 0, \\ 1, for\; t > 0. \end{cases} \tag{59}$$

Переходный процесс $y(t) = h(t)$ системы при ННУ и воздействии на ее вход ступенчатой единичной функции называется переходной функцией (характеристикой).

2. Дельта функция (единичная импульсная функция).



$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{1}(t). \tag{60}$$

Переходный процесс $y(t) = w(t)$ системы при ННУ и воздействии на ее вход дельта-функции называется весовой функцией.

Установившейся режим — это работа системы при $t \to \infty$:

$$y_{\text{у}}(t) = \lim_{t\to\infty} y_{\text{св}}(t) \quad \Rightarrow y(t) = y_{\text{п}}(t) + y_{\text{у}}(t) \tag{61}$$

Если существуте предел (т.е. при достаточно больших t отсутствуют движения в системе)

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_{\text{у}}(t), \tag{62}$$

то такой режим называется статический режим работы системы.

7 Понятие дискретных по времени объектов и систем, их математические модели

Математические модели дискретных систем управления описывают поведение этих систем только в квантованные моменты времени: $t_k, k = 0, 1, 2, \ldots$ Дискретным представлением непрерывных сигналов $u(t), y(t), (t)$ являются последовательности: $u(t_k), y(t_k), (t_k)$. Математические модели дискретных систем устанавливают взаимосвязь между этими последовательностями. Практически все объекты и процессы управления имеют непрерывный характер своего состояния и динамики развития во времени. Поэтому дискретные автоматические системы управления содержат в своей структуре как цифровую (дискретную), так и аналоговую (непрерывную) части. Для согласования этих частей в системе используются аналогово-цифровые и цифроаналоговые преобразователи (АЦП и ЦАП). АЦП ставит в соответствие непрерывной функции $f(t), t \ge t_0$ последовательность $f(t_k) = f(k\Delta t), = const, k = 0, 1, 2, \ldots$. В свою очередь, ЦАП осуществляет преобразование последовательности $f_k, k = 0, 1, 2, \ldots$ в некоторую непрерывную функцию, которая является аппроксимацией исходной функции $f(t), t \ge t_0$. Часто используют кусочно-постоянную аппроксимацию, поэтому такой преобразователь называют экстраполятором, или фиксатором нулевого порядка.

Построение дискретного представления непрерывной системы носит название процесса дискретизации, или квантования, непрерывной системы. Пусть непрерывная система представлена своей внешней моделью:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = u \tag{63}$$

При достаточно малом шаге квантования дискретизацию этой модели можно выполнить с необходимой точностью путем замены дифференциалов конечными разностями:

$$y' = \frac{dy(t_k)}{dt} = \frac{\Delta y(t_k)}{\Delta t} = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\Delta t} y'' = \dots \tag{64}$$

После подстановки в дискретная внешняя модель системы принимает конечно-разностный вид, который после алгебраических преобразований переводится в рекуррентную форму с постоянными коэффициентами модели a_i и обозначением $zy(k) = y(k+1)$, z — оператор сдвига.

$$a_0 z^n + \dots + a_n z = u \tag{65}$$

Дискретно представляемые сигналы описываются функциями дискретной переменной. Для описания дискретных систем используются решетчатые функции и разностные уравнения. Решетчатые функции являются аналогами непрерывных функций, описывающих непрерывные системы, а разностные уравнения являются аналогами дифференциальных уравнений.

Дискретная система — это система в которой присутствует хотя бы один элемент, производящий квантование сигналов по уровню, по времени либо одновременно по тому и другому. Такой элемент в системе называется импульсным элементом или модулятором.

Решетчатой функцией называется функция, получающаяся в результате замены непрерывной переменной на дискретную независимую переменную, определенную в дискретные моменты времени $k, k = 0, 1, 2, \dots$ Непрерывной функции $x(t)$ соответствует решетчатая функция (k), где — период квантования, при этом непрерывная функция является огибающей решетчатой функции. При заданном значении периода квантования непрерывной функции $x(t)$ соответствует однозначная решетчатая функция (k). Однако обратного однозначного соответствия между решетчатой и непрерывной функцией не существует, так как через ординаты решетчатой функции можно провести множество огибающих. Отсчеты по шкале времени удобно вести в целочисленных единицах периода квантования . С этой целью вместо переменной t непрерывной функции введем новую переменную $\tau = t/T$, при этом непрерывной функции $x(\tau)$ будет соответствовать решетчатая функция $(k) = x_k$.

Теорема Котельникова-Шеннона. Процедура преобразования сигнала непрерывного времени $x(t)$ к дискретному виду, квантованному по времени, называется квантованием. Такая процедура отражает как реальные процессы, проходящие в цифровых системах управления, так и математические операции, использующиеся в различных сферах теории информации. В результате квантования получается импульсная последовательность $x(kT)$ (решетчатая функция), которая при $t = kT$ совпадает с исходным сигналом:

$$x(kT) = x(t)|_{t=kT}, \tag{66}$$

и не определена между отсчетами k. Потери информации при квантовании зависят от величины интервала квантования (частоты квантования $2\pi/T$). Выбор интервала обычно осуществляется из соображений теоретической возможности точного восстановления исходного сигнала по данной дискретной выборке. Согласно теореме Котельникова-Шеннона, если спектр сигнала $x(t)$ ограничен максимальной частотой ω_{max}, то точное восстановление функции $x(t)$ теоретически возможно при условии, что на одном периоде максимальной частоты в сигнале имеется минимум два дискретных отсчета, т.е. частота квантования ω должна быть более чем в 2 раза больше наибольшей частоты $\omega_m ax$ в сигнале:

$$\omega \geq 2\omega_{max}, T < \frac{\pi}{\omega_{max}} \tag{67}$$

Разностные уравнения. Связь между значениями решетчатой функции при разных значениях аргумента определяется с помощью конечных разностей, которые являются аналогами производных в дифференциальных уравнениях.

Разностью первого порядка (первой разностью) называется разность между последующим дискретным значением решетчатой функции и ее текущим значением:

$$\Delta x(k) = x(k+1)\check{\ } x(k). \tag{68}$$

Разность первого порядка характеризует скорость изменения решетчатой функции и, следовательно, является аналогом первой производной непрерывной функции. Разность второго порядка определяется как разность двух соседних разностей первого порядка: Разности любого m-го порядка вычисляются аналогично.

8 Свободная, вынужденная, переходная и установившаяся составляющие движения дискретной системы

Аналитическое решение уравнения:

$$y(k) = y_{\text{св}}(k) + y_{\text{в}}(k) \tag{69}$$

Выражение содержит вынужденную составляющую $y_{\text{в}}(k)$, соответствующую реакции системы на входное воздействие $u(k)$, и свободную составляющую $y_{\text{св}}(k)$, соответствующую решениям однородного разностного уравнения (автономной дискретной системы): $a0y(k+n) + a1y(k+n-1) + \dots + any(k) = 0$ при начальных условиях $y(0), (-1), \dots, (-n+1)$.

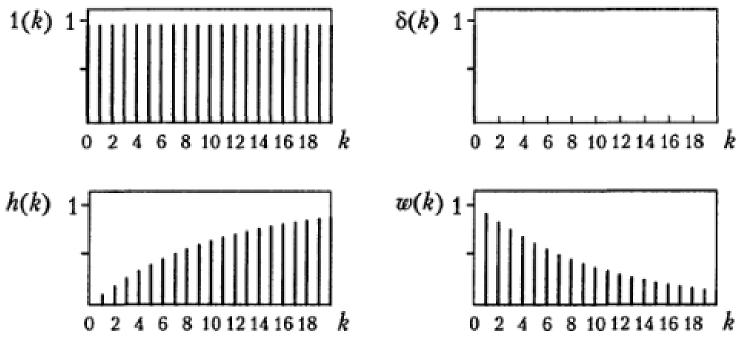


Рис. 3: Caption

Поведение системы и свободная составляющая переходного процесса зависят от полюсов системы z_i, которые в общем случае представлены комплексно-сопряженными парами:

$$z_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i = M_i e^{\pm\psi}, \tag{70}$$

$$M_i = |z_{i,i+1}| = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}, \tag{71}$$

$$\psi_i = \arg z_{i,i+1} = \arctan\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) \tag{72}$$

$$y_{\text{св}}(k) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \cdots + C_n z_n^k \tag{73}$$

где C_i — неопределенные коэффициенты, зависящие от начальных условий.

1. Для вещественных корней $\alpha > 0, \beta = 0, \psi = 0$ соответствует апериодическаая составляющая переходного процесса (мода)
$$y_i(k) = C_i M_i^k \tag{74}$$
2. Для вещественных корней $\alpha < 0, \beta = 0, \psi = \pi$ соответствует колебательная мода
$$y_i(k) = C_i M_i^k \cos(k\pi) \tag{75}$$
3. Паре комплексно-сопряженных соответстует колебательная составляющая
$$y_i(k) = A_i M_i^k \cos(k\psi_i - \phi_i) \tag{76}$$
где A_i, ϕ_i — параметры зависящие от начальных условий.

Если при некторых начальных условиях имеет место тождество:

$$_{\text{св}}(k) = y^* = const, k > 0, \tag{77}$$

то значение y^* называют положением равновесия автономной системы.

Вынужденная составляющая переходного процесса определяется входным воздействием $u(k)$. Наиболее распространенными входными сигналами дискретных систем являются единичная импульсная последовательность и дельта-функция Кронекера.

Переходные процессы.

При нулевых начальных условиях системы:

$$h(0) = \cdots = h(-n+1) = 0, w(0) = \cdots = w(-n+1) = 0 \tag{78}$$

Единичная импульсная последовательность:

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 0, k < 0, \\ 1, k \geq 0. \end{cases}, \quad h(k) = y(k)|_{y_o(k)=0, u(k)=\mathbf{1}(k)} = y_{\text{в}} \tag{79}$$

Дельта функция:

$$\delta(k) = \begin{cases} 0, k \neq 0, \\ 1, k = 0. \end{cases}, \quad w(k) = y(k)|_{y_o(k)=0, u(k)=\delta(k)} = y_{\text{в}} \tag{80}$$

Установившаяся составляющая.

$$y_{\text{у}} = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{1 + a_1 + \cdots + a_n} u = Ku = W(1)u \tag{81}$$

где K — *статический коэффициент.*

Условие существования статической характеристики:

$$1 + a_1 + \cdots + a_n \neq 0 \tag{82}$$

и система удовлетворяющая этому условию называетя статической.

9 Дискретное преобразование Лапласа (Z-преобразование) дискретных процессов

В теории импульсных систем для решения разностных уравнений используется дискретное преобразование Лапласа и его модификация — дискретное z-преобразование.

Преобразование лапласа для непрерывной и дискретной функций:

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt, \quad X(s) = T\sum_{k=0}^\infty x(kT)e^{-skT} \tag{83}$$

Дискретное преобразование Лапласа, получается путем введением замены:

$$z^-k = e^{sT} \quad \Rightarrow \quad X(z) = T\sum_{k=0}^\infty x(kT)z^{-k} \tag{84}$$

$x(kT$ — оригинал решетчатой функции, $X(z)$ — его изображение, z — комплексная переменная.

Из теоремы Коши-Адамара следует, что ряд сходится абсолютно вне круга $|z| > R$, где $R = \lim_{k\to\infty}(|x(kT)|)^{\frac{1}{k}}$.

Для полубесконечной последовательности $\{x(k)\}$ $(x(k) = 0, k < 0)$:

$$x(0), x(1), x(2), \ldots \tag{85}$$

Ее можно рассматривать как функцию, аргумент которой применает дискретные значения $0, 1, 2, \ldots$. Такие функции называю решетчатыми функциями.

Z- преобразованием последовательности называют сумму ряда

$$X(z) = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^\infty x(kT)z^{-k}. \tag{86}$$

Оно лежит в основе метода решения разностных уравнений. Дискретное преобразование Лапласа $X(z)$ отличается от z-преобразования наличием нормирующего множителя . При анализе дискретных систем z-преобразование позволяет перейти от разностных уравнений к алгебраическим и существенно упростить анализ динамики дискретных систем.

Для обратного перехода от изображения к оригиналу (для нахождения исходной решетчатой функции по ее изображению) используется обратное z-преобразование:

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{k-1}dz \tag{87}$$

Корни s_i характеристического полинома непрерывной системы связаны с корнями z_i характеристического полинома эквивалентной дискретной системы соотношением

$$z_i = e^{p_i T} \tag{88}$$

Взаимно-однозначное соответствие корней непрерывной и эквивалентной дискретной систем выполняется только при интервале дискретизации, удовлетворяющем теореме Котельникова-Шеннона.

Важно, что все существующие изображения имеют общую область сходимости — круг некоторого радиуса R_{min} в комплексной плоскости ξ и область вне круга радиуса $1/R_{min}$ в плоскости z.

Свойства z-преобразования.

1. Линейность. Для любых a, b
$$Z\{ax(k) + by(k)\} = aX(z) + bY(z) \tag{89}$$

2. Начальное значение последовательности может быть вычислено как
$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{90}$$

3. Конечное значение. Если функция $(1 - z^{-1})X(z)$ не имеет полюсов в области $|z| \geq 1$ и конечное значение последовательности $\{x(k)\}$ существует, оно может быть вычислено как
$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to\infty}(1 - z^{-1})X(z) \tag{91}$$

4. Обратные сдвиг.

   Последовательность $\{x(k-m)\}$, запаздывающую на $m > 0$ тактов по отношению к исходной последовательности
$$Z\{x(k-m)\} = z^{-m}X(z) \tag{92}$$

5. Сдвиг вперед
$$Z\{x(k+m)\} = z^m\left[X(z) - \sum_{i=0}^{m-1} x(i)z^{-i}\right] \tag{93}$$
6. Свертка решетчатых функций $\{x(k)\}, \{y(k)\}$
$$g(k) = \sum_{m=0}^{k} x(m)y(k-m) = \sum_{m=0}^{k} x(k-m)y(m) \tag{94}$$
имеет изображение, равное произведению этих функций
$$Z\{g(k)\} = X(z)Y(z) \tag{95}$$

10 Передаточные функции и матрицы дискретных систем и объектов и их вычисление на основе структурного представления

ПФ — отношение дискретного преобразования Лапласа входной переменной к выходной при нулевых начальных условиях:
$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{96}$$

Передаточная матрица:
$$\text{for} z\{x(k)\} = X(z), \quad z\{u(k)\} = U(z), \quad z\{y(k)\} = Y(z), \tag{97}$$
$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z), \\ Y(z) = CX(z), \end{cases} \tag{98}$$

Отсюда, получим предаточную матрицу:
$$Y(z) = C(zI - A)^{-1}B \cdot U(z) \quad \Rightarrow \quad W(z) = C(zI - A)^{-1}B \tag{99}$$

где
$$W(z) = \Big[W_{ij}(z)\Big], i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n} \tag{100}$$

где W_{ij} — связывает i-ый вход с j-ым выходом.

Пример:
$$Y(z) = \frac{W_1W_2}{1+W_1W_2}G(z) + \frac{W_2}{1+W_1W_2}F(z), \tag{101}$$
где $G(z)$ — изображение входа, $F(z)$ — изображение помехи.

11 Структурные свойства линейных непрерывных и дискретных ОУ: управляемость и наблюдаемость

12 Критерии управляемости и наблюдаемости непрерывных и дискретных ОУ

Управляемость — это структурное свойство объекта (модели), означающее что что перезод из любого состояния системы в любое другое систояние может быть достигнуто приложением некоторого ограниченного управляющего воздействия.

С. полностью управляема, если для любых $t >= 0$ и $x_f \in \mathcal{R}$ существует такое $t_f >= t_0$) и ограниченное управляющее воздействие $u(t), t \in [t_0, t_f]$ такое, что для $x(t_0) = x_0$ выполняется $x(t_f) = x_f$.

Матрица управляемости:
$$U = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \tag{102}$$

Критерий управляемости:

1. Линейная система полностью управляемая тогда и только тогда, когда (если $rank(U) = n$, n порядок системы).
$$\det(U) \neq 0. \tag{103}$$

2. С. полностью управляема тогда и только тогда, когда она может быть преобразована к канонической управляемой форме.

Свойство управляемости не зависит от выходной переменной.

Наблюдаемость — свойство системы, при котором ее переменные состояния могут быть однозначно определены по выходной переменной y.

Система нызвается полностью наблюдаемой, если для любых $t_0 \geq 0$ существует $t_1 > t_0$ такое, что выходной переменной

$$y = y(t), t \in [t_0, t_1] \tag{104}$$

полученной для входного сигнала $u(t)$, соответствуйте единственное значение $x(t_0) = x_0$.

Матрица наблюдаемости:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{105}$$

Линейная система полностью наблюдаема, если $rank(Q) = n$, т.е

$$\det Q \neq 0. \tag{106}$$

13 Понятие разностных уравнений и способы их решений

Для объекта:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \tag{107}$$

Аналитическое решение разностного уравнения в форме ВСВ:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0), \tag{108}$$

$$x(2) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1), \tag{109}$$

$$x(3) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2), \tag{110}$$

$$x(k) = \underbrace{A^k x(0)}_{\text{св. сост-ая}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k} A^{k-1-i} Bu(i)}_{\text{в. сост-ая}} \tag{111}$$

Аналитическое решение разностного уравнения в рекуррентном виде:

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \cdots + a_n y(k) = b_1 u(k+n-1) + \cdots + b_n u(k) \tag{112}$$

Форма представления моделей дает простой путь для получения рекуррентного решения, т. е. процедуры нахождения текущих значений $y(k)$ по известным значениям функций y и u в предшествующие моменты дискретного времени k. Подставляя в разностное уравнение $k + n = k$ (или $n = 0$) запишем:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_n y(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(0) \tag{113}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+n-i) = \sum_{j=0}^{k} b_j u(k+j) \tag{114}$$

Сдвиг входной переменно k должен быть не больше сдвига n: $k \leq n$ — уловие физической реализуемости.

Пример:

Характеристическое уравнение системы:

$$z^2 + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_q z + a_o = 0 \tag{115}$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i^k + y_{\text{в}}(k) \tag{116}$$

Найдем вынужденную составляющую из

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{\text{в}}(k+i) = \sum_{j=0}^{k} b_j u(k+j) \tag{117}$$

Затем, найдем неопределенные коэффициенты C_i из условия, что общее решения для n-1 интервала должно быть равно начальным условиям $y(0), y(1), \ldots, y(n)$.

$$\sum_{i=0}^{n} C_i + y_\text{в}(0) = y(0), \tag{118}$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i z_i + y_\text{в}(1) = y(1), \tag{119}$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i z_y^2 + y_\text{в}(2) = y(2), \tag{120}$$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i z_y^n + y_\text{в}(n) = y(n). \tag{121}$$

РАЗДЕЛ II. Анализ устойчивости линейных непрерывных и дискретных систем

14 Понятие устойчивости. Виды устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость, качественная экспоненциальная устойчивость непрерывных и дискретных систем

Устойчивость это — способность динамической системы возвращаться в исходное положение равновесия после окончания действия внешних возмущений.

В классической теории устойчивости исследуется не устойчивость системы как таковой, а устойчивость ее так называемого невозмущенного движения. Для линейных систем с точки зрения устойчивости не имеет значения, какое их движение принимается в качестве невозмущенного.

Некоторые справедливые (Бессекерский, с. 119) замечания:

1. Устойчивость невозмущенного движения не зависит от того, какое движение системы принято в качестве невозмущенного.
2. Певозмущенное движение системы устойчиво, если устойчиво ее свободное движение.
3. Устойчивость невозмущенного движения не зависит от вида и характера из- менения внешних (задающего и возмущающих) воздействий. Этот вывод ба- зируется на двух предыдущих.

Теорема Ляпунова: Если для уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V, производная $\dot{V}$ которой в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение $x = 0$ устойчиво.

Виды устойчивости (для дискретных все тоже самое только для дискретного времени):

1. *устойчивость по Ляпунову*.

   Система устойчива по Ляпунову, если для любого $\epsilon > 0$, найдется $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что для всех начальных условий удовлетворяющих $|x_0| < \delta$ и любого $t > 0$, выполняется $|x(t, x_0)| < \epsilon$.

   Если это условие не вполняется, то система называется неустойчивой.

   Определение предусматривает, что траектории $x(t, x_0)$ начинающиеся в некторой малой δ-окрестности положения равновесия, не покидают заданную ϵ-окрестность.

2. *асимптотическая устойчивость*.

   Система называется асимптотически устойчивой, если

   (a) она устойчива по Ляпунову;

   (b) выполняется условие аттрактивности (притяжения) положения равновесия:

   $$\lim_{t \to \infty} x(t, x_0) = 0 \tag{122}$$

   Из асимптотической устойчивости следует устойчивость по Ляпунову.

   Определение предусматривает, что положение равновесия обладает притягивающими свойствами, т.е. с течением времени приближвается к положению равновесия $x^* = 0$. Но определить время схождения нельзя.

   Дискретная система

   $$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{123}$$

   асимптотическая устойчива, если $\lim\limits_{k \to \infty} |x(k)| = 0$.

3. *экспоненциальная устойчивость*.

   Система экспоненциально устойчива, если найдутся таке числа $c > 0, \alpha > 0$, что для любых $t \geq 0$, вполняется:

$$x(t, x_0) \leq ce^{-\alpha t}|x_0|. \tag{124}$$

   Отсюда видно, что все траектории, начинающиеся в произвольной Δ_0-окрестности, т.е. $|x_0| \leq \Delta_0$, экспоненциально затухают — находятся в каждый момент времени t в пределах сужающейся области:

$$|x| < x_m(t) = c\Delta_o e^{-\alpha t}. \tag{125}$$

   Фунция $x_m(t)$ ограничивающая сверху текущие значения нормы вектора состояния, называется *мажорантой*.

   При определенных условиях экспоненциальная и асимптотическая устойчивости эквивалентны.

4. *качественная экспоненциальная устойчивость*.

   Система КЭ устойчива для любых траекторий движения системы и начальных условий, найдется такие $r > 0, \beta : \beta + r < 0$, что для любых $t \geq 0$ выполняется неравенство:

$$||x(t) - e^{\beta t}x(0)|| \leq \rho(e^{(\beta - r)t} - e^{\beta t})||x(0)||, \tag{126}$$

   где $\rho > 0$.

15 Корневые условия устойчивости непрерывных и дискретных систем

Корневые критерии устойчивости связывают понятие устойчивости с размещением корней на комплексной плоскости:

1. Для непрерывных систем:
   (a) устойчива — все корни в левой полуплоскости;
   (b) устойчива по Ляпунову — один корень на границе устойчивости;
   (c) неустойчива — хотябы один корень в правой полуплоскости.
2. Для дискретных систем (могут быть элементарно выведены из теории непрерывных систем, учитывая связь корней Н. и Д. систем $z_i = e^{Tp_i}$):
   (a) устойчива — все корни строго внутри единичной окружности;
   (b) устойчива по Ляпунову — один корень на окружности;
   (c) неустойчива — хотябы один корень вне единичной окружности.

Критерии:

1. Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда выполняется условие:

   Звенья: апериодической (I и II), колебательное.

$$Rep_i < 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{127}$$

2. Система устойчива по Ляпунову, если выполняется одно из условий:

   (a) Апериодическая граница устойчивости (наличие одного вещественного корная на границе устойчивости (мнимой оси)):
   Звенья: Интегратор.

$$\begin{cases} \Re p_i < 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ p_n = 0 \end{cases} \tag{128}$$

   Дискретная полностью наблюдаемая система асимпототический устойчива тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$|z_i| = |\lambda_i\{A\}| < 1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{129}$$

   (b) Колебательна граница устойчивости (наличие двух комплексно-сопряженных корней на мнимой оси):
   Звенья: консервативное (генератор).

$$\begin{cases} \Re p_i < 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \\ \Re p_{n-1,n} = 0, \quad \Im p_{n-1,n} \neq 0. \end{cases} \tag{130}$$

3. Система неустойчива, если хотябы один полюс такой, что

$$\Re p_i > 0. \tag{131}$$

16 Алгебраические критерии устойчивости непрерывных систем

17 Методы Ляпунова в исследовании устойчивости непрерывных и дискретных систем

Критерии устойчивости позволяют осуществить анализ системы, не прибегая к определениям устойчивость (где нужно было бы анализировать все возможные переходные прцессы), т.е. на основании косвенных признаков устойчивости, связанных со свойствами математических моделей.

Для автономной системы, решения для которой представляются в виде:

$$x(t)e^{At}x_0, \quad y(t) = C^T e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}, \tag{132}$$

где C_i — коэффициенты, зависящие от НУ, p_i — полюсы системы, или корни характеристическогоого полинома:

$$a(p) = \det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n. \tag{133}$$

Выражения (132) плказывают, что свойства преходных процессов в целом определяются свойствами компоненты e^{At}, которые зависят от полюсов системы (корней характеристического полинома), или, что тоже самое, от собственных чисел матрицы A.

1. Метод Гурвица

   Теорема Стодолы: если система устойчива, то коэффициенты характеристического полинома (ХП) строго положительны (обратное верно только для систем 1 и 2 порядка (чем и обусловлены более сложные условия в критерии Гурвица и подобных)).

   Критерий Гурвица:

   (a) Система с характеричтическим уравнением устойчива тогда и только тогда, когда все определители Δ_i матрицы Гурвица строго положительны: $\Delta_i > 0, i = \overline{1, n}$.

   (b) Система нейтрально устойчива, елси выполняется одно из условий:

      i. Апериодическая граница устойчивости (итегратор)

$$\begin{cases} \Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \Delta_n = \Delta_{n-1} a_n = 0, \end{cases} \tag{134}$$

      ii. Колебательная граница устойчивости (консервативное звено)

$$\begin{cases} \Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \\ \Delta_{n-1} = 0, \\ a_n > 0. \end{cases} \tag{135}$$

   Матрица гурвица:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix} \tag{136}$$

   Определители Гурвица — главные диагональные миноры матрица М:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \cdots, \quad \Delta_n = |M| = a_n \Delta_{n-1}. \tag{137}$$

2. Корневые критерии (см. предыдущий вопрос про корневые критерии)

$$\cdots \tag{138}$$

3. Метод Ляпунова

   Матрица А назвается устойчивой или гурвицевой, если выполняется условие $\Re(\lambda_i\{A\}) < 0, i = \overline{1, n}$.

   Лемма Ляпунова. Матрица А устойчива тогда и только тогда, когда для любых матриц $Q = Q^T > 0$ уравнение имеет положительно определенное решение $P > 0$:

$$A^T P + PA = -Q \tag{139}$$

где $Q = Q^T > 0$.

Т.о. существование решения уравнения Ляпунова обеспеивает устойчивость матрицаы А (асимптотическая устойчивость).

Для оценци качества сходимости ПП устойчивой системы рассматривается следующее выражение:

$$A^T P + PA = -Q - 2\alpha P \tag{140}$$

Свойство. Матрица А удовлетворяет условию

$$\Re(\lambda_i\{A\}) < -\alpha, i = \overline{1,n} \tag{141}$$

тогда и только тогда, когда уравнение (140) для любых $Q = Q^T > 0$ имеет положительно определеное решение $P > 0$.

Это условие при $\alpha > 0$ означает, что полюсы системы, смещены влево от границы устойчивости на велечину, превышающую значение α, что предполагает асимптотическую устойчивость с *запасом устойчивости.*

18 Частотные критерии устойчивости непрерывных систем

Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость замкнутой системы, построив частотную характеристику разомкнутой системы.

Чтобы система в замкнутом состоянии была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы при изменении от $-\infty$ до ∞ годограф разомкнутой системы $W(j\omega)$ (АФХ), поворачиваясь вокруг начала координат по часовой стрелке, охватил точку $(1, j0)$ столько раз, сколько корней в правой полуплоскости содержит знаменатель $W(j\omega)$.

Примечания:

1. Если корней в правой полуплоскости нет, то годограф $W(j\omega)$ не должен охватить точку $(1, j0)$.
2. Неустойчивая система в разомкнутом состоянии может быть устойчивой в замкнутом состоянии. И наоборот.
3. Годограф $W(j\omega)$ всегда начинается на оси "+1". Но при порядке астатизма равном r, по причине устремления $W(j)$ к ∞ (при $\omega \rightarrow$), видимая часть годографа появляется только в квадранте r, отсчитанном по часовой стрелке.

Свойства годографа Найквиста

1. Годограф Найквиста спиралевиден. При $\rightarrow \infty$ годограф $W(j\omega) \rightarrow 0$, т.к. нет безынерционных систем.
2. Годограф статических САР начинается из точки на вещественной оси.
3. Для положительных и отрицательных частот годографы зеркально симметричны относительно оси "+1". Наличие корней на границе устойчивости приводит к устремлению годографа в ∞ и приращению его фазы на -180^o.

Для определения устойчивости по критерию Найквиста можно строить не АФХ, а ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы. Чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы сдвиг фазы на частоте единичного усиления разомкнутой системы $W(j\omega)$ не достигал значения -180^o. Если система условно устойчивая, то при модулях больших единицы, фазовый сдвиг может достигать значения -180^o четное число раз.

Критерий устойчивости Михайлова.

Чтобы все корни ХУ имели отрицательные вещественные части, необходимо чтобы после подстановки частоты в соответствующий характеристический полином $D(s)$ полное приращение его фазы при изменении от 0 до ∞ составляло $n\pi/2$, где n — степень полинома $D(s)$. При этом характеристический полином опишет в комплексной плоскости кривую — "годограф Михайлова".

1. Пусть $s_i = \alpha$ — вещественный положительный корень. Тогда годограф соответствующего линейного множителя $(j\omega - \alpha)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернется на угол $-\pi/2$.
2. Пусть $s_i = -\alpha$ — вещественный отрицательный корень. Тогда годограф соответствующего линейного множителя $(j\omega + \alpha)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернется на угол $\pi/2$.
3. Пусть $s_{i;i+1} = \alpha \pm j\beta$ — сопряженные корни с положительной вещественной частью. Тогда годографы соответствующих линейных множителей $(j\omega\alpha j\beta)(j\omega\alpha + j\beta)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернутся на углы $-\pi/2 + \gamma$, и $\pi/2 - \gamma$. Вектор, соответствующий произведению двух сомножителей, повернется на угол равный $-\pi$.
4. Пусть $s_{i;i+1} = -\alpha\beta$ — сопряженные корни с отрицательной вещественной частью. Тогда годографы соответствующих линейных множителей $(j\omega + \alpha - j\beta)(j\omega + \alpha + j\beta)$ при изменении ω от 0 до ∞ повернутся на углы $\pi/2\gamma$, и $\pi/2 + \gamma$. Вектор, соответствующий произведению двух сомножителей, повернется на угол равный π.

Резюме: Если ХУ имеет l корней с положительной вещественной частью, то угол поворота годографа $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ составит:

$$\psi = -l\pi 2 + (n - l)\pi 2 = n\pi 2 - l\pi, \tag{142}$$

где: n — порядок ХУ.

Свойства годографа Михайлова

1. Годограф всегда спиралевиден.

2. При $\omega = 0$, будет $\psi = 0$. Следовательно, годограф начинается с точки на оси "+1".

3. Поскольку при $\omega \to \infty, K(j\omega) \to 0$ (нет безынерционных систем), годограф уходит в бесконечность.

4. При четном n, годограф стремится к ∞ параллельно оси "+1"; при нечетном n, годограф стремится к ∞ параллельно оси "+j".

Определение типа границы устойчивости по виду годографа Михайлова

1. Астатизм первого порядка — "апериодическая"граница устойчивости.

2. Астатизм второго порядка — "апериодическая"граница устойчивости.

3. "Колебательная"граница устойчивости.

4. Граница устойчивости типа "бесконечный корень".

19 Степень устойчивости, запас устойчивости по фазе и амплитуде, их определение с помощью амплитудно-фазовых частотных характеристик или ЛАЧХ и ФЧХ непрерывной системы

В условиях эксплуатации параметры системы по тем или иным причинам могут меняться в определенных пределах (старение, температурные колебания и т.п.). Эти колебания параметров могут привести к потере устойчивости системы, если она работает вблизи границы устойчивости. Поэтому стремятся спроектировать САУ так, чтобы она работала вдали от границы устойчивости. Степень этого удаления называют запасом устойчивости.

Согласно критерия Найквиста, чем дальше АФЧХ от критической точки (-1, j0), тем больше запас устойчивости. Различают запасы устойчивости по модулю и по фазе.

Запас устойчивости по модулю характеризует удаление годографа АФЧХ разомкнутой САУ от критической точки в направлении вещественной оси и определяется расстоянием h от критической точки до точки пересечения годографом оси абсцисс (левый рисунок).

Запас устойчивости по фазе характеризует удаление годографа от критической точки по дуге окружности единичного радиуса и определяется углом между отрицательным направлением вещественной полуоси и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения годографа с единичной окружностью.

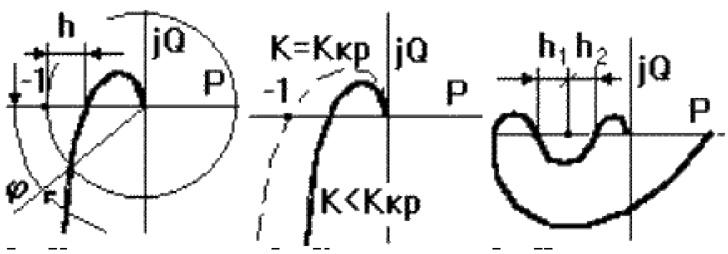


Рис. 4: Поясняющие рисунки

Как уже отмечалось, с ростом коэффициента передачи разомкнутой САУ растет модуль каждой точки АФЧХ и при некотором значении К = Ккр АФЧХ пройдет через критическую точку (средний рисунок) и попадет на границу устойчивости, а при К > Ккр замкнутая САУ станет неустойчива. Однако в случае “клювообразных” АФЧХ (получаются из-за наличия внутренних обратных связей) не только увеличение, но и уменьшение К может привести к потере устойчивости замкнутых САУ (правый рисунок). В этом случае запас устойчивости определяется двумя отрезками h1 и h2, заключенными между критической точкой и АФЧХ.

Обычно при создании САУ задаются требуемыми запасами устойчивости h и, за пределы которых она выходить не должна. Эти пределы выставляются в виде сектора, вычерчиваемого вокруг критической точки, в который АФЧХ разомкнутой САУ входить не должна.

РАЗДЕЛ III. Показатели качества непрерывных и дискретных систем

20 Показатели качества переходных процессов непрерывных и дискретных систем, вводимые по переходной функции

Переходный процесс — в теории систем представляет реакцию динамической системы на приложенное к ней внешнее воздействие с момента приложения этого воздействия до некоторого установившегося состояния. Изучение переходных процессов — важный шаг в процессе анализа динамических свойств и качества рассматриваемой системы. Примерами внешнего воздействия могут быть дельта-импульс, скачок или синусоида.

Прямые показатели качества: время переходного процесса и перерегулирование.

ВПП — время, необходимое выходному сигналу системы для того, чтобы приблизиться к своему установившемуся значению. Обычно предел такого приближения составляет $\Delta = 1 - 10$ процентов.

$$t_{\text{п}} = min\{T_{\text{п}} : (h(t) - h_{\text{уст.}}) \leq \Delta, t \geq T_{\text{п}}\}, \quad \Delta = 0.05 h_{\text{уст}} \tag{143}$$

Перерегулирование (определяется величиной первого выброса) — отношение разности максимального значения переходной характеристики и её установившегося значения к величине установившегося значения. Измеряется обычно в процентах.

$$\sigma = \frac{h_{max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\% \tag{144}$$

Все вышеописанное справедливо и для дискретный систем.

21 Коэффициенты ошибок по задающему и возмущающему воздействиям и их вычисление. Статизм и астатизм непрерывных систем

1. **По задающему воздействию**.

   Коэффициенты ошибок позволяют вычислять установившиееся значение ошибки относительно задающего воздействия на основе разложения задающего воздействия в бесконечнй ряд по производным задающего воздействия.

   ПФ по ошибке

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W(s)} \quad E(s) = \Phi_e(s) G(s) \tag{145}$$

   Разложив ошибку в ряд Тейлора в окресности $s = 0$

$$E(s) = (c_0 + c_1 s + \frac{c_2 s^2}{2!} + \cdots + \frac{c_k s^k}{k!}) G(s) \tag{146}$$

   где c_i — коэффициенты разложения в ряд Тейлора (коэффициенты ошибок).

$$e_{\text{уст}}(t) = \sum_{i=0}^{p} \frac{c_i}{i!} \cdot \frac{d^i g(i)}{dt^i} \quad c_0 = [\Phi_e(s)]_{s=0}, \quad \frac{c_i}{i!} = [\frac{d^i \Phi_e(s)}{ds^i}]_{s=0} \tag{147}$$

2. Статическая система

   Если коэффициент ошибок $c_0 \neq 0$, то система статическая отностельно задающего воздействия.

   (a) Для

$$g(t) = g_0 = const \quad e_{\text{уст}} = c_0 g_0 \tag{148}$$

   Статическая система отрабатывает постоянное воздействие с постоянной ошибкой.

   (b) Для

$$g(t) = g_1 t \quad e_{\text{уст}} = c_0 g_1 t + c_1 g_1 \tag{149}$$

   Статическая система воздействия с постоянной скоростью в установившемся режиме отрабатывает с бесконечной ошибкой (причем ошибка растет в бесконечность линейно).

3. Система с астатизмом относительно задающего воздействия

   I порядок астатизма:

$$c_0 = 0, \quad c_1 \neq 0 \tag{150}$$

   (a) Постоянное входное воздействие

$$g(t) = g_0 = const \quad e_{\text{уст}} = \underbrace{c_0}_{=0} g_0 (= 0) \tag{151}$$

   (b) Нарастающее входное воздействие

$$g(t) = g_1 t \quad e_{\text{уст}} = \underbrace{c_0}_{=0} g_1 t + c_1 g_1 = c_1 g_1 \tag{152}$$

   Добротность по скорости системы с астатизмом I порядка $[c^{-1}]$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{g_1}{e_{\text{уст}}} \tag{153}$$

   II порядок астатизма:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 \neq 0 \tag{154}$$

(a)
$$g(t) = g_0 = const \quad e_{\text{уст}} = c_0 g_0 + c_1 \frac{dg_0}{dt} + \frac{c_2}{2}\frac{d^2 g_0}{dt^2} + \dots = c_0 g_0 = 0 \tag{155}$$
(b)
$$g(t) = g_1 t, \quad e = 0, \quad \frac{dg(t)}{dt} = g_1, \quad \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = 0 \tag{156}$$
(c)
$$g(t) = \frac{g_2}{2} t^2, \quad e_{\text{уст}} = \frac{c_2}{2} g_2 \quad \Rightarrow \tag{157}$$
Добротность по ускорению
$$\Rightarrow \quad \frac{g_2}{e} = \left(\frac{c_2}{2}\right)^{-1} \tag{158}$$

22 Точность непрерывных систем в типовых режимах

23 Способы повышения точностных характеристик систем

Поведение невозмущенной замкнутой системы $y(t) = \Phi(s) y^*(t)$ для различных типов задающего воздействия
$$y^*(t) = y_0^* + y_1^* t + y_2^* t^2 + \dots, \quad y_i^*(t) = \frac{y^*(0)}{i!} = const \tag{159}$$
В зависимости от y_i^* различают режимы:

1. стационарный (стабилизация) $y^* = y_0^*$
2. режим движения с постоянной скоростю $y^* = V_0 t$
3. режим движения с постоянным ускорением $y^* = \dfrac{a_0 t^2}{2}$

Вводятся коэффициенты ошибок для оценки точность
$$\Phi_0 = \Phi(0) = \frac{W(s)}{1+W(s)}|_{s=0}; \quad \Phi_1 = \Phi'(0) = \frac{W'(s)}{(1+W(s))^2}|_{s=0} \quad \Phi_2 = \Phi''(0) = \frac{W''(s)(1+W(s)) - 2W'(s)}{(1+W(s))^3}|_{s=0} \tag{160}$$
$$y_{\text{уст}}(t) = \Phi_0 y^* + \Phi_1 \dot{y}^* + \frac{\Phi_2}{2!}\ddot{y}^* + \dots \tag{161}$$
$$e_{\text{уст}}(t) = (1 - \Phi_0) y^* - \Phi_1 \dot{y}^* - \frac{\Phi_2}{2!}\ddot{y}^* + \dots \tag{162}$$

1. В стационарном режиме $y_{\text{уст}} = \Phi_0 y^*$. Абсолютняа точность и установившаяся ошибка достигается при $\Phi_0 = 1$, что выполняется для астатических систем. Для статическых систем $e_{\text{уст}} = \dfrac{1}{1+k} y^*$. Ошибку можно уменьшить засчет увеличения коэффициента обратной связи.
2. В режиме движения с постоянной скоростью имеет место
$$y_{\text{уст}} = \Phi_0 y^* + \Phi_1 V_0 = \Phi_0 V_0 t + \Phi_1 V_0 \tag{163}$$
Абсолютная точность при $\Phi_0 = 1, \Phi_1 = 0$ — астатизм 2 порядка и выше.

   Для astатaтизма перого порядка $e_{\text{уст}} = \dfrac{1}{k_1} V_0$. Для уменьшения установившейся ошибки увеличивать коэффициенты обратной связи.

   Для статического режима — с течением времени ошибка неограничено возрастает.
3. В режиме с постоянные ускорением
$$y_{\text{уст}} = \Phi_0 y^* + \Phi_1 a_0 V + \frac{\Phi_2}{2!} a_0 = \Phi_0 \frac{a_0 t^2}{2!} + \Phi_1 a_0 t + \Phi_2 \frac{a_0}{2} \tag{164}$$
Абсолютная точность $\Phi_0 = 1, \Phi_1 = \Phi_2 = 0$, что выполняется для астатических систем порядка 3 и выше

   Для астатизма второго порядка $e_{\text{уст}} = \dfrac{1}{k} a_0$

Повышение точности достигается:

1. подключением обратных вязей (замыкание системы).
2. повышение порядка статизма основного канала с помощбю соответствующих регуляторов (алгоритмов управления)
3. повышение добротности системы за счет увеличения коэффициентов регуляторов.

Типовые ПФ и ЛАХ

Тип лах	Передат ф-я	Отриц. наклон асимпт. Дб/дек
I	$\frac{k(1+\tau_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)}$	20-40-20-40
II	$\frac{k(1+\tau_2 p)^2}{p(1+T_1 p)^2(1+T_3 p)}$	20-60-20-40
III	$\frac{k(1+\tau_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_3 p)^2}$	20-40-20-60
IV	$\frac{k(1+\tau_2 p)^2}{p(1+T_1 p)^2(1+T_3 p)^2}$	20-60-20-60

РАЗДЕЛ IV. Методы синтеза непрерывных и дискретных систем на заданные требования к качеству процессов в переходном и установившемся режимах

24 Общий подход к синтезу непрерывных систем на основе логарифмических частотных характеристик. Типовые желаемые логарифмические амплитудно частотные характеристики

Синтез системы Направленный расчет, имеющий конечной целью отыскание: 1) рациональной структуры системы и 2) установление оптимальных величин параметров отдельных звеньев. При множестве возможных решений, должен быть выбран критерий оптимизации – цена, точность, надежность, быстродействие, затраты энергии ...

При инженерном синтезе ставятся задачи:

Достижение требуемой точности. Обеспечение приемлемого характера переходных процессов (задача демпфирования). Решение первой задачи заключено в выборе средств повышающих точность системы (усилительных, изодромных блоков; каналов КУ; не 1ОС), т.е. фактически вида регулирования. Решение второй задачи заключено в выборе оптимальных корректирующих средств.

Метод логарифмических амплитудных характеристик Процесс синтеза включает в себя следующие операции:

1. Построение располагаемой ЛАЧХ исходной системы W, состоящей из регулируемого объекта без регулятора и без корректирующего устройства.

2. Построение НЧ части желаемой ЛАЧХ на основе предъявленных требований точности.

3. Определение вида и параметров регулятора $K, K_i, \ldots$:

$$W(s) = \frac{W_{\text{НЧ.ж}}(s)}{W_o(s)} \tag{165}$$

$$L(\omega) = L_{\text{НЧ.ж}}(\omega) - L_{(\omega).} \tag{166}$$

4. Уточнение ВЧ части желаемой ЛАЧХ на основе требований к запасу устойчивости — $L_{\text{НЧиВЧ.ж}}(\omega)$.

5. Определение вида и параметров последовательного корректирующего устройства:

$$W_{\text{ПЗкор}} = \frac{W_{\text{НЧиВЧ.ж}}}{W_{per} W} \tag{167}$$

$$L_{\text{ПЗкор}} = L_{\text{НЧиВЧ.ж}} - L - L_{.} \tag{168}$$

6. Техническая реализация корректирующих устройств. В случае необходимости — перерасчет на эквивалентные параллельное звено или ОС.

7. Поверочный расчет и построение переходного процесса.

25 Метод Солодовникова В.В. синтеза непрерывных систем

26 Синтез непрерывных систем с использованием показателя колебательности

27 Модальное управление непрерывными и дискретными объектами

Для объекта

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = Cx, \tag{169}$$

выбирается П-регулятор (он же модальные) вида

$$u = -Kx \tag{170}$$

Такой регулятор вводит обратные свзи по переменным состояния объекта.

Объединение регулятора и объекта дает замкнутую систему:

$$\dot{x} = Fx = (A - bK)x, \quad y = Cx \tag{171}$$

где —матрица строка коэффициентов обратной связи, F — матрица замкнутой системы.

Выбор коэффициетов обратных связей матрица K обеспечивает получение заданных динамических свойст системы: быстродействие и колебательность.

В соответствиии с методом модального управления устойчивость и заданные показатели качетва достигаются назначением корней характеристического полинома замкнутой системы.

Метод основывается на следующем положении. Если система полностью управляема, то существует единственная матрица обратной свзяи K, обеспечивающая получение заданных значений корней характеристического полинома замкнутой системы.

При отсутствии возмущений, регулятор обеспечивает абсолютную точность стабилизации системы.

Расчет маатрица K:

1. По заданным показателям качества находятся корни характеристического полинома p_i и его коэффицинты a_i (например, методом стандартных переходных функций)
2. Рассчитываются коэффициенты обратной связи K соответствующие канонической управляемой форме объекта

$$k_i = a_{ci} - a_i \tag{172}$$

3. для обратного перехода от канонической формы к исходной используется матрица подобия

$$P = U^* \cdot U^T \tag{173}$$

где U, U^* — матрицы управляемости исходной и канончиской форм.

Преобразование для перехода

$$K = K^* \cdot P \tag{174}$$

28 Алгоритм синтеза модального управления непрерывным и дискретными ОУ при полной измеримости его вектора состояния, использующий решение матричного уравнения Сильвестра

Для объекта

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = Cx, \tag{175}$$

выбирается П-регулятор (он же модальные) вида

$$u = -Ke \quad e = -x \tag{176}$$

Решение задачи:

1. Вводится модель ошибок замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{e} = Fe \\ v = Ce \end{cases} \tag{177}$$

2. Задается эталонная модель ошибор

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma\xi, \quad \xi(0) = \xi_0 \\ \nu = H\xi \end{cases} \tag{178}$$

где Г — матрица, определяющая требуемые свойства СУ.

ХП матрица Г должен совпадать с требуемым (метод стандартных переходных функций). H выбирается из условия полной наблюдаемости пары Γ, H.

Связь между исходной моделью ошибок и элатонной выражается как

$$e = M\xi \tag{179}$$

3. решается систему уравнений включающая уравнение Сильвестра

$$\begin{cases} M\Gamma - AM = bH \\ K = -HM^{-1} \end{cases} \tag{180}$$

Все! Замечание. Уравнение Сильвестра имеет единственное решение относительно М, если:

(a) ОУ полностью управляем (нужно перед всем этим этим проверять)

(b) ЭМ полностью наблюдаема

(c) A и Г не имеют одинаковых корней

29 Устройства оценки вектора состояния непрерывных и дискретных объектов управления при неполной измеримости вектора состояния

30 Алгоритмы синтеза динамических регуляторов (с устройствами оценки) для непрерывных и дискретных объектов управления

I Алгоритм синтеза оптимального управления на основе квадратичного функционала качества непрерывными объектами при полной измеримости его вектора состояния, использующий решение матричного уравнения Риккати

Объект и регулятор:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = Cx, \tag{181}$$

$$u = -Kx \tag{182}$$

Кватратичный критерий качества:

$$J = \int_0^t x^T Q x + r u^2 d\tau \tag{183}$$

Сиситема уравнений для нахождения матрицы K

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - Pbr^{-1}b^T P = 0 \\ K = r^{-1} b^T P \end{cases} \tag{184}$$