Содержание

Исходные данные

Техническое задание: для заданного объекта управления (ОУ) спроектировать заданный тип регулятора, обеспечивающего в замкнутой системе требуемое время переходного процесса и значение перерегулирования в соответствии с вариантом.

Таблица 1: Вариант задания

№	T	W1		W2		W3	
		K1	T1	K2	T2	K3	T3
16	0.003	30.00	0.08	60.00	0.15	0.04	Интегратор

Тип регулятора: Пропорциональный.
Время переходного процесса: 0.084 секунды.
Перерегулирование: 10%.

1 Описание системы в уравнениях Вход-Состояние-Выход

Заданная система показана на рисунке 1.

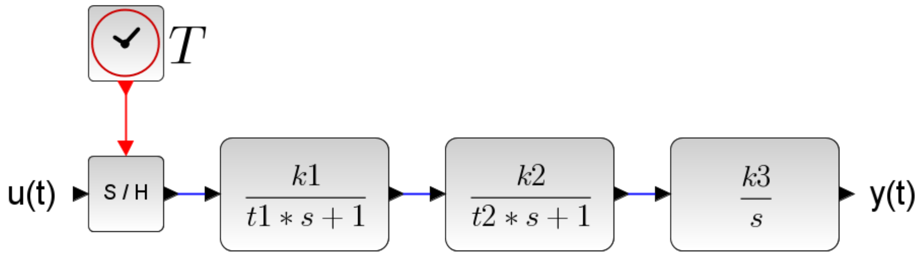

Рисунок 1 – Заданная система

Представим систему в виде дифференциального уравнения:

$$a_0 y'''(t) + a_1 y''(t) + y'(t) = bu(t) \tag{1}$$

где $a_0 = T_1 T_2 = 0.012$, $a_1 = T_1 + T_2 = 0.23$, $b = K_1 K_2 K_3 = 72$.

Введем в рассмотрение переменные состояния:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -\frac{a_2}{a_0} y' - \frac{a_1}{a_0} y'' + \frac{b}{a_0} u$$

Составим векторно-матричную модель ВСВ непрерывной системы:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -83.333333 & -19.166667 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b}{a_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Воспользуемся методом дискретизации с использованием матричной экспоненты, который обеспечивает получение точной дискретной модели блоков.

Дискретная модель ВСВ ОУ в виде разностного уравнения:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \tag{2}$$

$$y(k) = C_d x(k) \tag{3}$$

где k – дискретное время, T – интервал дискретности

$$A_d = e^{AT} = I + TA + \frac{T^2}{2!}A^2 + ... + \frac{T^j}{j!}A^j + ... = \begin{bmatrix} 1 & 0.0029996 & 0.0000044 \\ 0 & 0.9996321 & 0.0029150 \\ 0 & -0.2429179 & 0.9437610 \end{bmatrix},$$

$$B_d = T(I + \frac{T}{2!}A + \frac{T^2}{3!}A^2 + ... + \frac{T^j}{(j+1)!}A^j + ...)B = \begin{bmatrix} 0.0000266 \\ 0.0264882 \\ 17.490091 \end{bmatrix}$$

$$Cd = C$$

2 Расчет дискретной передаточной функции системы

Дискретная модель в виде операторного уравнения:

$$y(k) = W(z)u(k) \tag{4}$$

где $W(z)$ дискретная передаточная функция.

Выразив из (2) $x(k)$ и подставив в (3) получим (4), откуда выразим $W(z)$.

$$W(z) = C(zI - A_d)^{-1}B$$

Для ее решения прибегнем к функции среды моделирования Scilab:

$$[Ds, NUM, chi] = ss2tf(sl)$$

где Ds – матрица внешних возмущений D (в нашем случае равна нулю), NUM – числитель передаточной функции, chi – характеристический полином системы, sl – описание линейной системы, результат работы функции – $[sl] = syslin('d', A_d, B_d, C_d)$.

Получим:

$$W(z) = \frac{0.0034155 + 11.698998 * z + 6000.003 * z^2}{-0.0001000 + 0.0400663 * z - 2.9810158 * z^2 + z^3}$$

3 Схема и результаты моделирования системы

На рисунке 2 показана схема моделирования.

Блок "S/P" – экстраполятор нулевого уровня. Верхняя передаточная функция (ПФ) для непрерывной системы, нижняя для полученной в результате расчетов дискретной системы. Также, на схеме имеются два счетчика: первый (слева) задает интервал дискретности, второй (справа) нужен для вывода данных.

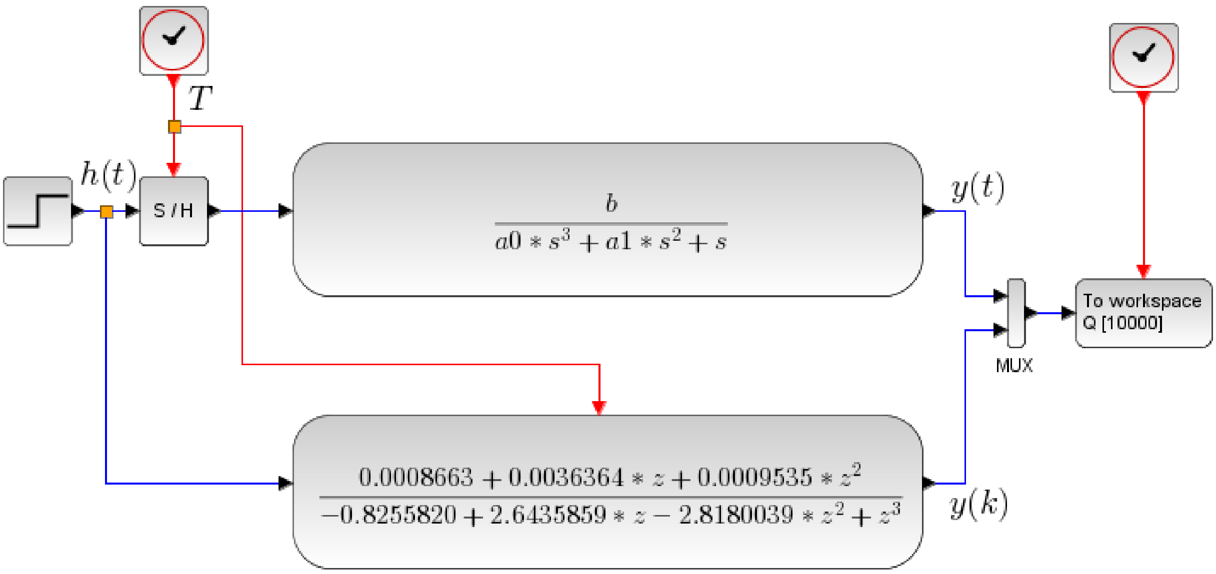

Рисунок 2 – Схема моделирования

На вход схемы в нулевой момент времени подается единичный импульс. На выходе имеем два сигнала $y(t)$ и $y(k)$, которые через мультиплексор выводятся в рабочее окружение среды Scilab.

На рисунке 3 представлены графики для непрерывной (гладкий) и дискретной (ступенчатый) систем.

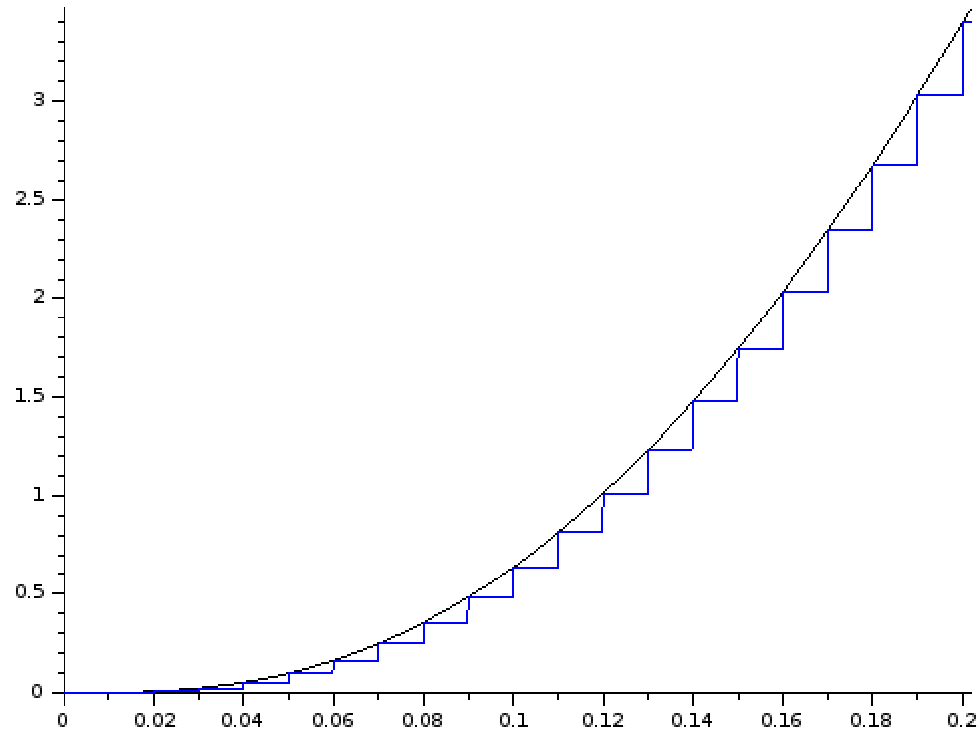

Рисунок 3 – Результаты моделирования

4 Расчет регулятора

Введем вектор ошибок для режима стабилизации:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

В качестве управляющего воздействия будет выступать пропорциональный регулятор:

$$u = Ke \tag{6}$$

где $K = [k_1 k_2 k_3]$ – матрица линейных стационарных обратных связей.

Модель ошибок имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{e} = Ae - Bu \\ y = -Ce \end{cases}$$

Проверим, является ли модель ошибок управляемой, для этого рассчитаем матрицу:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6000 \\ 0 & 6000 & -115000 \\ 6000 & -115000 & 1704166.7 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Найдем $det(Y) = -2.16 * 10^{11}$, так как детерминант не равен нулю, делаем вывод, что система управляема.

Так как по заданию необходимо обеспечить перерегулирование 10% и порядок модели ОУ равен трем, то выберем полином Баттерворта третьей степени:

$$D_H^* = \lambda^3 + 2\omega_0\lambda^2 + 2\omega_0^2\lambda + \omega_0^3 \tag{8}$$

где ω_0 – среднегеометрический корень, определяющий быстродействие системы.

$$\omega_0 = \frac{t_n^*}{t_n} \tag{9}$$

где t_n^* – время переходного процесса нормированной переходной характеристики, t_n – требуемое время переходного процесса.

Так как порядок системы равен трем, то по нормированным переходным характеристикам из [1] выберем $t_n^* = 6$ сек.

Получим:

$$\omega_0 = \frac{t_n^*}{t_n} = \frac{6}{0.084} = 71.4286 \tag{10}$$

Следовательно, требуемый характеристический полином:

$$D_H^* = \lambda^3 + 142.8571\lambda^2 + 10204.082\lambda + 364431.49 \tag{11}$$

Найдем корни полученного характеристического полинома:

$$\begin{cases} \lambda_1^* = -35.714286 + j61.858957 \\ \lambda_2^* = -35.714286 - j61.858957 \\ \lambda_3^* = -71.428571 \end{cases}$$

Сформируем эталонную модель:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma\xi \\ v = H\xi \end{cases}$$

Так как среди корней полинома имеются пара комплексно-сопряженных корней вида $\lambda_{1,2}^* = \alpha^* \pm j\beta^*$ и вещественный корень λ_3^*, то описание эталонной модели формируется в блочном виде:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha^* & -\beta^* & 0 \\ -\beta^* & \alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.714286 & 61.858957 & 0 \\ -61.858957 & -35.714286 & 0 \\ 0 & 0 & -71.428571 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Произведем дискретизацию матрицы Γ.

$$\Gamma = exp(\Gamma * T) = \begin{bmatrix} 0.8983973 & 1.2039127 & 1 \\ 0.8306250 & 0.8983973 & 1 \\ 1 & 1 & 0.8071177 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Приступим к расчету коэффициентов регулятора методом модального управления.

Решение задачи модального управления состоит в решении алгебраического матричного уравнения типа Сильвестра относительно матрицы M с последующим вычислением искомой матрицы линейных стационарных обратных связей K.

$$\begin{cases} B_d H = M\Gamma_d - A_d M \\ K_d = -HM^{-1} \end{cases}$$

Уравнение типа Сильвестра из этой системы решим в среде моделирования Scilab с помощью функции $M = sylv(-A_d, \Gamma_d, B_d H,' d')$:

$$M = \begin{bmatrix} -0.0159255 & -0.0021065 & 0.0199318 \\ 0.7462523 & -0.9713344 & -1.5197819 \\ 35.540082 & 86.641891 & 115.49952 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Далее, найдем матрицу линейных стационарных обратных связей:

$$Kd = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.738581 & 1.6867914 & 0.0206151 \end{bmatrix} \quad (16)$$

5 Моделирование синтезированного регулятора

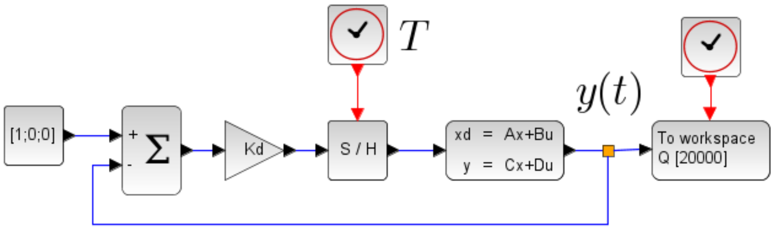

Рисунок 4 – Схема моделирования регулятора

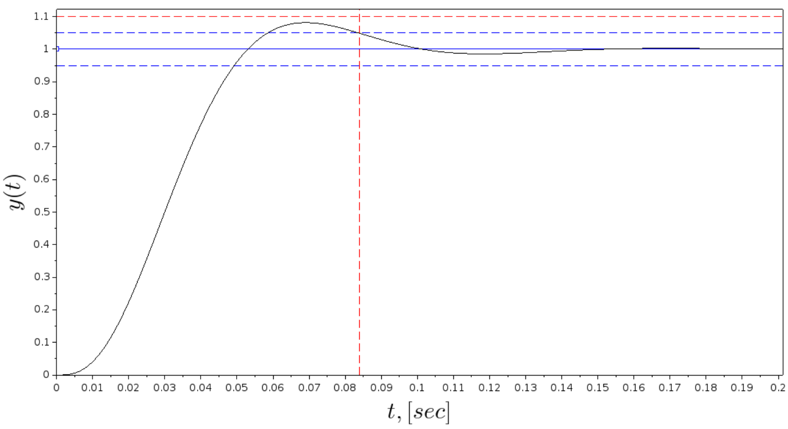

Рисунок 5 – Результаты моделирования синтезированного регулятора

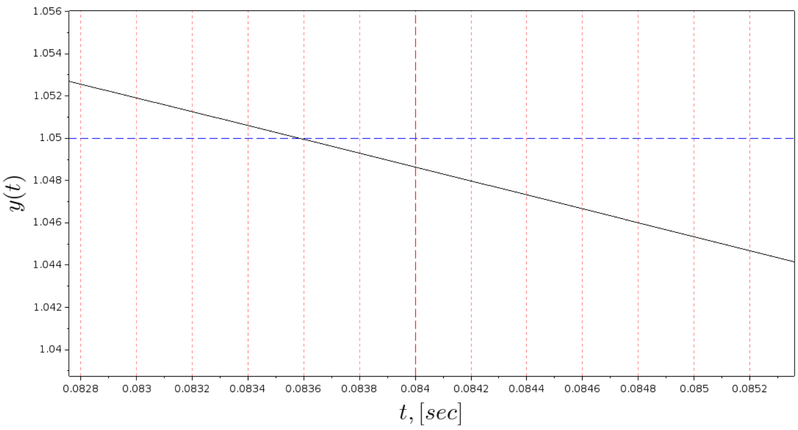

Рисунок 6 – Результаты моделирования (время переходного процесса)

6 Вывод

В этой работе методом модального управления был синтезирован регулятор и построена модель дискретной системы управления, на основе заданной непрерывной модели, которая удовлетворяет требуемым показателям качества.

Из рисунка 6 видно, что время переходного процесса (момент времени, когда график входит в 5%-окрестность установившегося значения, и далее не выходит из него) равно $t_n^* = 0{,}0836$ сек., что удовлетворяет техническому заданию $t_n = 0.084$ сек. Перерегулирование также соответствует заданию и не превышает 10% .

Литература

1 В.В. Григорьев, Н.В. Журавлёва, Г.В. Лукьянова, К.А. Сергеев Синтез систем автоматического управления методом модального управления. — С-Пб: СПбГУ ИТМО, 2007. — 108 с. ил.

2 Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. – СПб.: Питер, 2005. – 336 с. ил.

3 Бесекрерский В.А., Попов Е.П. Теория автоматического управления 3. СПб.: Профессия, 2003.