Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра ___Систем управления и информатики____ Группа__P4235__

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

по курсу: «Методы оптимального и адаптивного управления»

Синтез оптимального следящего регулятора

Вариант №2

Авторы работы: Антонов Е.С., Артемов К.А.

Преподаватель: Герасимов Д.Н.

«__» декабря 2017 г.

Работа выполнена с оценкой ______________

Дата защиты «___» ________ 2017 г.

Санкт-Петербург

2017 г.

1 Цель работы

Синтезировать регулятор, оптимально решающий задачу слежения за заданным задающим воздействием при заданном критерии качества.

2 Теоретические сведения

Рассматриваемый объект управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

где x — переменная состояния объекта, u — сигнал управления, A, b — постоянные и известные матрицы.

Структура синтезируемого регулятора:

$$u = Ke + L_g \xi, \tag{2}$$

где K — матрица коэффициентов, рассчитанная в Лабораторной работе №2 на основе уравнения Риккати, ξ — вектор состояния модели задающего воздействия:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \Gamma \xi \\ g = h\xi \end{cases} \tag{3}$$

L_g — матрица прямых связей, рассчитываемая на основе уравнения Сильвестра:

$$\begin{cases} AM_g + bL_g = M_g \Gamma \\ h = CM_g \end{cases} \tag{4}$$

$e = M_g \xi - x$ — ошибка управления.

Заданный критерий качества:

$$J = \int_0^t e^T(\tau) Q e(\tau) + r(Ke(\tau))^2 d\tau. \tag{5}$$

3 Исходные данные

Варианту №2 соответствует следующий набор исходных данных:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = 2. \tag{6}$$

Задающее воздействие:

$$g(t) = 2\sin 8t + 5 \tag{7}$$

4 Результаты практических действий

4.1 Генератор задающего воздействия

Представим задающее воздействие (7) в виде суммы консервативного и пропорционального звеньев.

Модель консервативного звена в пространстве состояний:

$$\xi_1 = g,\ \dot{\xi}_1 = \xi_2,\ \dot{\xi}_2 = -64\,\xi_1 \tag{8}$$

где начальные условия:

$$\xi_1(0) = 2,\ \xi_2(0) = 0 \tag{9}$$

Модель пропорционального звена в пространстве состояния:

$$\xi_3 = 5,\ \dot{\xi}_3 = 0 \tag{10}$$

где начальные условия

$$\xi_3(0) = 5 \tag{11}$$

Таким образом, матрица состояния генератора сигналов, векторы выхода и начальных условий, принимают вид:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \xi(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{12}$$

4.2 Расчет матрицы прямых связей L_g

Из системы уравнений с девятью неизвестными (Вектор L_g размерности $[1 \times 3]$ и матрица M_g размерности $[2 \times 3]$):

$$\begin{cases} M_g\Gamma - AM_g = bL_g \\ h^T = CM_g \end{cases} \tag{13}$$

Запишем девять уравнений

$$\begin{cases} 2 * l_1 + 64 * m_{12} - m_{21} = 0 \\ 2 * l_2 - m_{11} + m_{22} = 0 \\ 2 * l_3 + m_{23} = 0 \\ l_1 + m_{11} - m_{21} + 64 * m_{22} = 0 \\ l_2 + m_{12} - m_{21} - m_{22} = 0 \\ l_3 + m_{13} - m_{23} = 0 \\ m_{11} - 1 = 0 \\ m_{12} = 0 \\ m_{13} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Решая которые, получим элементы соответствующих матриц:

$$M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0.5056604 & -0.0037736 & 0.6666667 \end{bmatrix}; \tag{15}$$

$$L_g = \begin{bmatrix} -0.2528302 & 0.5018868 & -0.3333333 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

4.3 Рассчитать установившееся значение J

Выполним следующие операции для преобразования ошибки e:

$$e = M_g\xi - x,$$
$$\xi = e^{\Gamma t}\xi(0) = M_\Gamma e^{\Lambda_\Gamma t} M_\Gamma^{-1}$$
$$x = e^{At}x(0) = M_F e^{\Lambda_F t} M_F^{-1}$$
$$e = M_g M_\Gamma e^{\Lambda_\Gamma t} M_\Gamma^{-1}\xi(0) - M_F e^{\Lambda_F t} M_F^{-1} x(0)$$

Расчет критерия качества:

$$J(t) = \int\limits_0^t e^T(\tau) Q e(\tau) + r e^T(\tau) K^T K e(\tau)\, d\tau =$$

$$\int\limits_0^t \left[M_g M_\Gamma e^{\Lambda_\Gamma t} M_\Gamma^{-1}\xi(0) - M_F e^{\Lambda_F t} M_F^{-1} x(0)\right]^T Q \left[M_g M_\Gamma e^{\Lambda_\Gamma t} M_\Gamma^{-1}\xi(0) - M_F e^{\Lambda_F t} M_F^{-1} x(0)\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t r\left[M_g M_\Gamma e^{\Lambda_\Gamma t} M_\Gamma^{-1}\xi(0)\right]^T K^T K \left[M_g M_\Gamma e^{\Lambda_\Gamma t} M_\Gamma^{-1}\xi(0)\right] d\tau =$$

$$= \left[M_\Gamma^{-1}\xi(0)\right]^T \left(\int\limits_0^t e^{\Lambda_\Gamma t} R_1 e^{\Lambda_\Gamma t}\, d\tau\right) M_\Gamma^{-1}\xi(0) + + \left[M_F^{-1}x(0)\right]^T \left(\int\limits_0^t e^{\Lambda_F t} R_2 e^{\Lambda_F t}\, d\tau\right) M_F^{-1}x(0) +$$

$$+ \left[M_\Gamma^{-1}\xi(0)\right]^T \left(\int\limits_0^t e^{\Lambda_\Gamma t} R_3 e^{\Lambda_F t}\, d\tau\right) M_F^{-1}x(0) + + \left[M_F^{-1}x(0)\right]^T \left(\int\limits_0^t e^{\Lambda_F t} R_4 e^{\Lambda_\Gamma t}\, d\tau\right) M_\Gamma^{-1}\xi(0) =$$

$$= \left[M_\Gamma^{-1}\xi(0)\right]^T \left(\left(e^{\Lambda_\Gamma \tau} \Lambda_\Gamma^{-1} e^{\Lambda_\Gamma \tau} - \Lambda_\Gamma^{-1} \frac{(e^{\Lambda_\Gamma \tau})^2}{2} \right) \Bigg|_0^t \right) R_1\, M_\Gamma^{-1}\xi(0) +$$

$$= \left[M_F^{-1}x(0)\right]^T \left(\left(e^{\Lambda_F \tau} \Lambda_F^{-1} e^{\Lambda_F \tau} - \Lambda_F^{-1} \frac{(e^{\Lambda_F \tau})^2}{2} \right) \Bigg|_0^t \right) R_2\, M_F^{-1}x(0) +$$

$$+ \left[M_\Gamma^{-1}\xi(0)\right]^T \left(\cdots\right) M_F^{-1}x(0) +$$

$$+ \left[M_F^{-1}x(0)\right]^T \left(\cdots\right) M_\Gamma^{-1}\xi(0)$$

где $F = A - bK$ размерности $[2 \times 2]$;

Γ размерности $[3 \times 3]$;

M_F — матрица собственных векторов матрицы F;

Λ_F — диагональная каноническая форма матрицы F;

M_Γ — матрица собственных векторов матрицы Γ;

Λ_F — диагональная каноническая форма матрицы Γ;

$R_1 = \left[M_g M_\Gamma\right]^T (Q + rK^T K) M_g M_\Gamma$ размерности $[3 \times 3]$;

$R_2 = M_F^T (Q + rK^T K) M_F$ размерности $[2 \times 2]$;

$R_3 = \left[M_g M_\Gamma\right]^T (Q + rK^T K) M_F$ размерности $[3 \times 2]$;

$R_4 = M_F^T (Q + rK^T K) M_g M_\Gamma$ размерности $[2 \times 3]$.

Исходная матрица коэффициентов обратных связей:

$$K = \begin{bmatrix} 0.8877665 & 0.5376567 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Критерий качества:

$$J(4.5) = 51.215047 \tag{18}$$

При увеличении компонентов матрицы K на 20%:

$$K = \begin{bmatrix} 1.0653198 & 0.6451880 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

Критерий качества:

$$J(4.5) = 52.304977 \tag{20}$$

Графики переходных процессов в рассматриваемой системе при двух выше приведенных версиях матрицы K показаны на рисунке 2, а использованная для их получения схема моделирования — на рисунке 1.

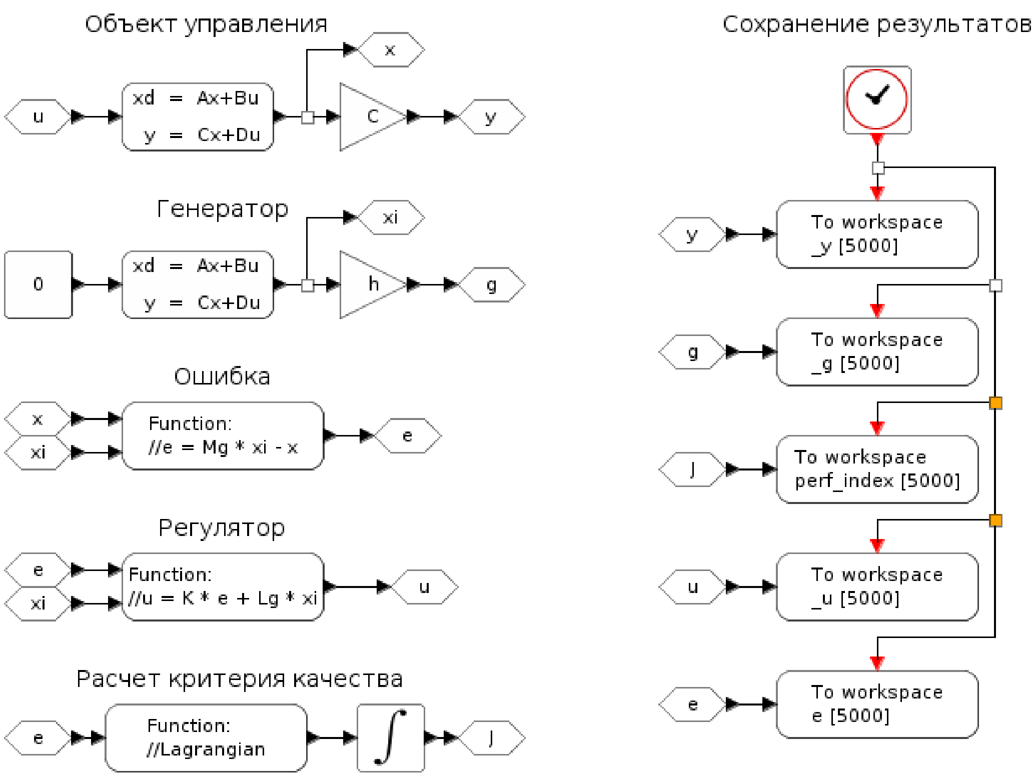

Рисунок 1 – Схема моделирования рассматриваемой системы управления.

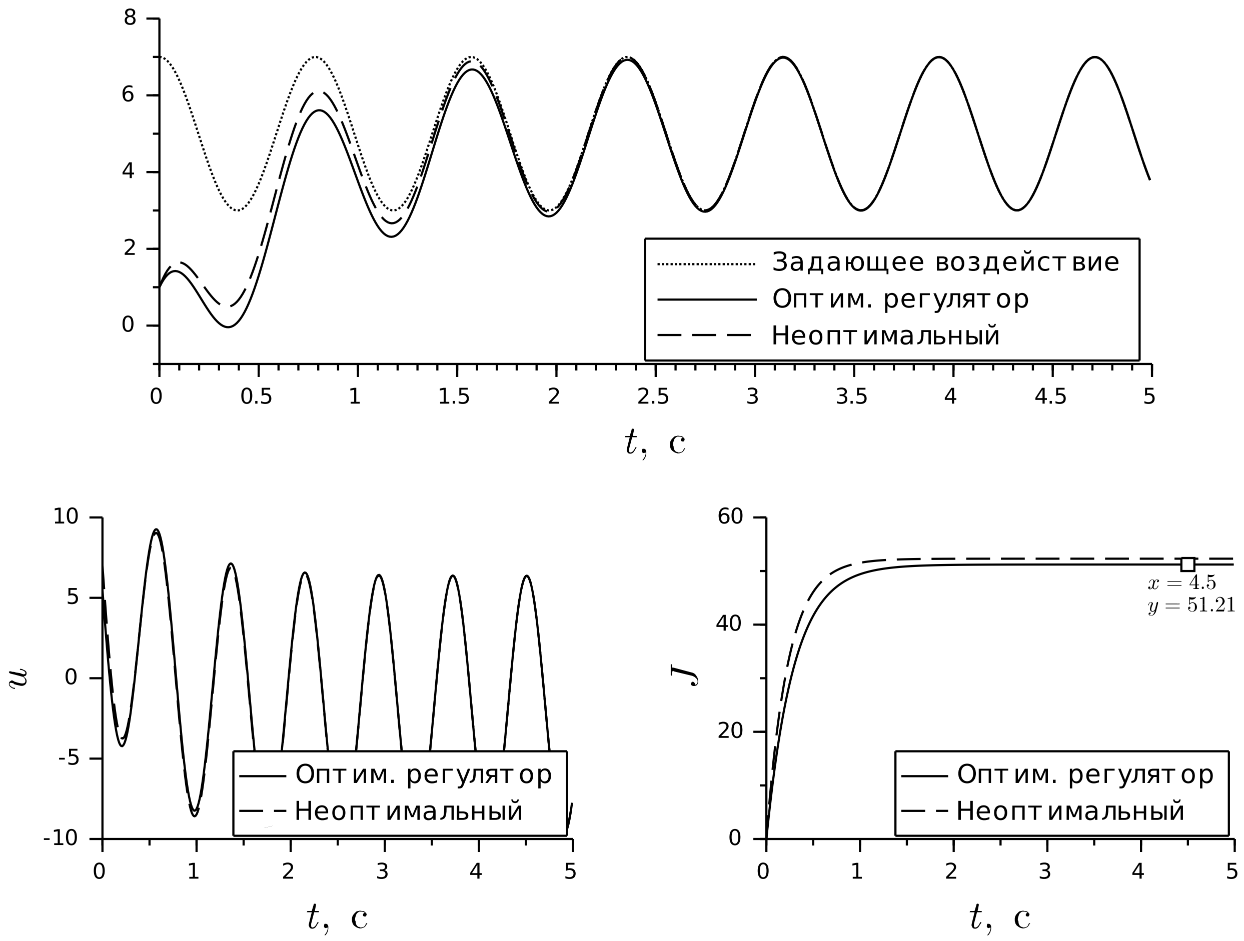

Рисунок 2 – Графики переходных процессов при оптимальном и неоптимальном регуляторах.

5 Выводы по работе

В результате проделанной работы для заданного объекта управления был рассчитан регулятор, оптимальным образом решающий задачу слежения за задающим воздействием g (7) с точки зрения минимизации значения критерия качества J (5). Последнее было проверено отклонением коэффициентов регулятора от их рассчитанных значений — как и следовало ожидать, установившееся значение критерия качества в таком случае оказалось больше, чем при оптимальном K.