Underactuated systems
Ball and Beam

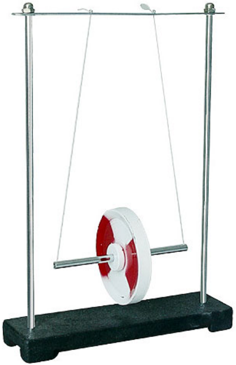
Kirill Artemov

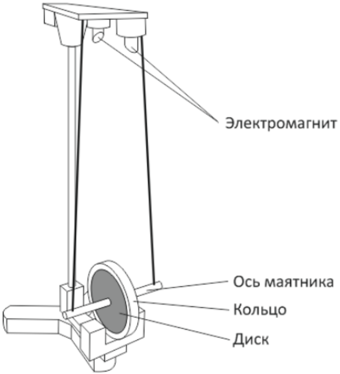
О чем это я?

1. Лирическое отступление
2. Описание системы
3. Постановка задачи
4. Математическая модель
5. Регулятор
6. Моделирование
7. Заключение

Лирическое отступление

Знакомьтесь, это маятник Максвелла!





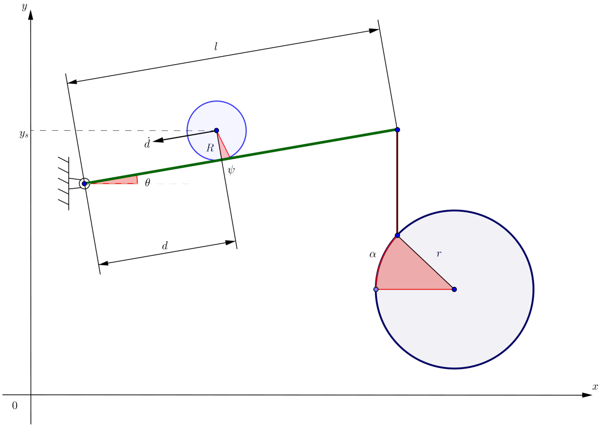
Описание системы

Одна из возможных конструкций
Ball and Beam system

Описание системы

Схема работы установки

(32.09, 28.12)



(63.01, 10.67)

Постановка задачи

1. система Ball and Beam имеет две степени свободы:
   1. поступательную - перемещение шарика вдоль балки;
   2. вращательную - вращение балки вокруг шарнира.
2. система неустойчивая

Математическая модель ч.1

Кинетическая энергия системы:

$$K = K_{beam} + K_{sphere}$$
$$K_{beam} = K_{beam}^{rot} + K_{beam}^{trans}$$
$$K_{sphere} = K_{sphere}^{rot} + K_{sphere}^{trans}$$

Кинетическая энергия балки:

$$K_{beam}^{rot} = \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2$$
$$K_{beam}^{trans} = 0$$
$$K_{beam} = \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2$$

Кинетическая энергия шарика:

$$K_{sphere}^{rot} = \frac{1}{2} J_s \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(m_s d^2)\dot{\theta}^2$$
$$K_{sphere}^{trans} = \frac{1}{2} m_s \dot{d}^2$$

Математическая модель ч.2

Момент инерции полого шарика: $J_s = \frac{2}{3} m_s R^2$

Зависимость между перемещением шарика и углом его поворота:

$$d = R\psi$$

Зависимость угловой скорости шарика от линейной:

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{d}}{R}$$

Выражение для полной кинетической энергии шарика:

$$K_{sphere} = \frac{1}{2}\frac{2}{3} m_s \dot{d}^2 + \frac{1}{2}(m_s d^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{d}^2$$

Математическая модель ч.3

Полная кинетическая энергия системы:

$$K = \frac{1}{2}J_b\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}m_s\dot{d}^2 + \frac{1}{2}(m_s d^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{d}^2$$

Потенциальная энергия: $P = m_s g d \sin\theta$

Лагранжиан:

$$L = K - P$$

$$L = \frac{1}{2}J_b\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{3}m_s\dot{d}^2 + \frac{1}{2}(m_s d^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{d}^2 - m_s g d \sin\theta$$

Математическая модель ч.4

Уравнения Эйлера-Лайгранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_b\dot{\theta} + m_s d^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (J_b + m_s d^2)\ddot{\theta} + 2m_s d\dot{d}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_s g d\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = m_s\dot{d} + \frac{2}{3}m_s\dot{d}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = \frac{5}{3}m_s\ddot{d}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d} = m_s d\dot{\theta}^2 - m_s g\sin\theta$$

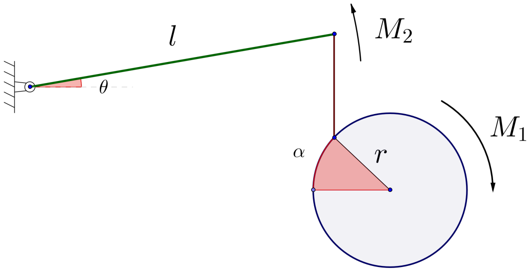
Математическая модель ч.5

Уравнения движения системы

$$(J_b + m_s d^2)\ddot{\theta} + 2m_s d\dot{d}\dot{\theta} + m_s g d\cos\theta = M$$
$$\frac{5}{3}m_s\ddot{d} - m_s d\dot{\theta}^2 + m_s g\sin\theta = 0$$

Регулятор ч.1

Моменты в системе



Регулятор ч.2

Момент развиваемый двигателем:

$$M = Fr = J\ddot{\alpha}$$

Зависимость угла поворота кривошипа от угла наклона балки:

$$l\theta = r\alpha$$

Отсюда линейная зависимость угловых скоростей и ускорений:

$$\dot{\alpha} = \frac{l}{r}\dot{\theta}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{l}{r}\ddot{\theta}$$

Регулятор ч.3

Полный момент двигателя:

$$M = K_m I - J\ddot{\alpha}$$

Закон Ома для двигателя:

$$IR = U - K_e\dot{\alpha} - L\dot{I}$$

$$I = \frac{U - K_e\dot{\alpha}}{R}$$

Окончательное выражение для момента, действующего на балку:

$$M = \frac{K_m}{R}U - \frac{K_m K_e l}{Rr}\dot{\theta} - \frac{Jl}{r}\ddot{\theta}$$

Регулятор ч.4

Линейная модель системы:

$$(J_b + J)\ddot{\theta} + \frac{K_m K_e l}{Rr}\dot{\theta} + m_s g d = \frac{K_m}{R}U$$
$$\ddot{d} + \frac{3}{5}g\theta = 0$$

Регулятор ч.5

Векторно-матричная модель системы

$$E\ddot{q} + F\dot{q} + Gq = Hu \tag{1}$$

$$\ddot{q} = -E^{-1}F\dot{q} - E^{-1}Gq + Hu \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \dot{\theta} \\
\ddot{\theta} &= -\frac{K_e K_m I}{Rr(J+J_b)}\dot{\theta} - \frac{g m_s}{J+J_b} d - \frac{K_m}{(J+J_b)R} u \\
\dot{d} &= \dot{d} \\
\ddot{d} &= -\frac{3}{5} g\theta
\end{aligned} \tag{3}$$

Регулятор ч.6

Модель в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4}$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{d} \\ \ddot{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_e K_m l}{Rr(J+J_b)} & -\frac{g m_s}{J+J_b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{5}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ d \\ \dot{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{K_m}{(J+J_b)R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Регулятор ч.7

Расчет коэффициентов модального регулятора

Матрица управляемости:

$$Y = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \tag{6}$$

Регулятор ч.8

Формула П-регулятора состояния:

$$u = Ke \tag{7}$$

где K и e матрицы следующего вида:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$e = x_0 - x \tag{9}$$

где x - вектор переменных состояния полученной модели, а x_0 - вектор желаемых значений:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Регулятор ч.9

Соберем все вместе:

$$\dot{x} = Ax + BK(x_0 - x) \tag{11}$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKx_0 \tag{12}$$

Запишем модель ВСВ замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c x_0 \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{13}$$

Регулятор ч.10

Поведение исследуемой системы зависит от вида характеристического полинома матрицы A_c:

$$D(\lambda) = det(\lambda E - A_c) = \lambda^4 + z_3\lambda^3 + z_2\lambda^2 + z_1\lambda + z_0 \quad (14)$$

Чтобы система была устойчива, зададим полином, раскрыв следующее выражение по биному Ньтона:

$$D^*(\lambda) = (\lambda + \omega_0)^4 = \lambda^4 + 4\omega_0\lambda^3 + 6\omega_0^2\lambda^2 + 4\omega_0^3\lambda + \omega_0^4 \quad (15)$$

Регулятор ч.11

Значение ω_0 расчитывается по формуле:

$$\omega_0 = \frac{t_n^*}{t_n} \tag{16}$$

Для обеспечения заданных полиномом $D^*(\lambda)$ параметров в нашей системе, нужно решить следующее уравнение:

$$D(\lambda) = D^*(\lambda) \tag{17}$$

Регулятор ч.12

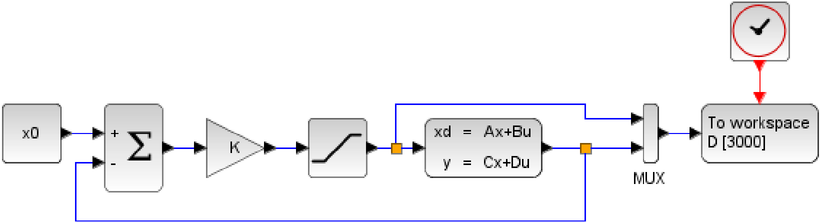
Формула Аккермана

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y^{-1} f(A) \tag{18}$$

Функция $f(A)$ определяется выражением:

$$f(A) = A^4 + z_3^* A^3 + z_2^* A^2 + z_1^* A + z_0^* E \tag{19}$$

Моделирование ч.1



Модель полученной системы в среде Scilab

Моделирование ч.2

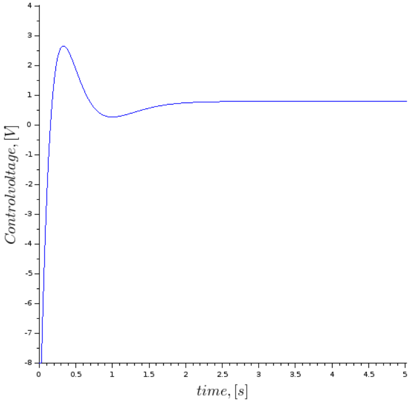
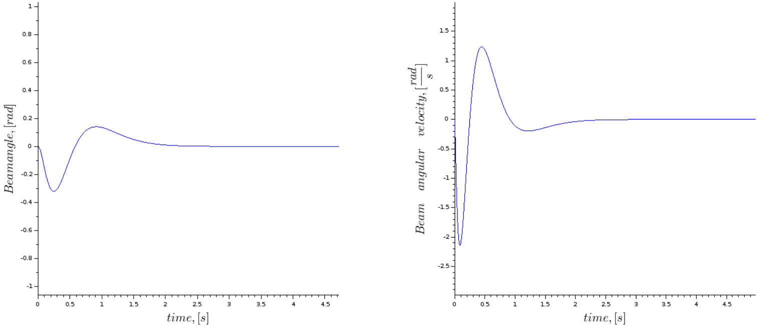


График изменения управляющего напряжения

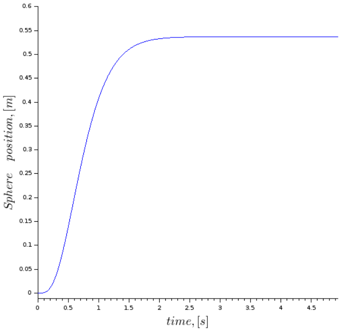
Моделирование ч.3

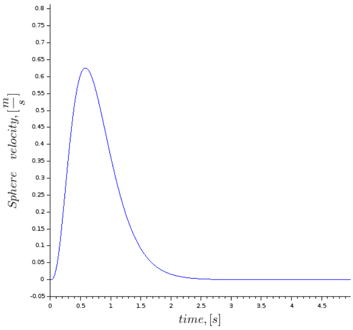


а) б)

Графики изменения угла наклона балки (а) и ее угловой скорости (б)

Моделирование ч.4





а)　　　　　　б)

Графики изменения позиции шарика (а) и его скорости (б)

Заключение

Результаты проделанной работы:

1. получена математическая модель системы;
2. рассчитан регулятор;
3. произведено моделирование, по результатам которого можно заключить:
    1. мячик действителнььо стабилизируется на балке за заданное время;
    2. система имеет статическую ошибку, тем больше, чем больше масса шарика;
    3. управляющее напряжение не сходится к нулю, так как при заданной конструкции системы для поддержания балки и шарика в горизонтальном положении с необходимо определенное усилие со стороны двигателя.