Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический иститут

Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №2
по дисциплине
«Интревальный анализ»

Выполнил студент:
Куксенко Кирилл Сергеевич
группа: 5030102/80201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Перербург
2021 г.

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Линейный случай

Выбрать ИСЛАУ 2×2 вида:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ 1 \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где a, b - положительные числа, c, k - положительные интервалы.
Оценить внешнее множество решений этой системы методом Кравчика.

- Определить спектральный радиус матрицы
- Провести оценку начального бруса решений

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Положения брусов при итерациях
- Графики радиусов рабочих брусов
- Сходимость алгоритма

1.2 Нелинейный случай

Выбрать систему вида:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ \frac{x_1}{x_2} = k \end{cases} \tag{2}$$

где a, b - положительные числа, c, k - положительные интервалы.
Оценить внешнее множество решений этой системы методом Кравчика.
Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Положения брусов при итерациях
- Графики радиусов рабочих брусов
- Сходимость алгоритма

2 Теория

2.1 Линейный метод Кравчика

Рассматриваем ИСЛУА $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
Выбираем начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ так, чтобы $\mathit{\Xi}_{uni} \subseteq \mathbf{x}^{(0)}$ и затем итерируем:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\Lambda\mathbf{b} + (I - \Lambda\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}) \cap \mathbf{x}^{(k)}, k = 0, 1, ... \tag{3}$$

где Λ - некоторая фиксированная точечная матрица, которая явдяется предобуславливающей матрицей для исходной ИСЛАУ.
Обычно Λ берут следующим образом.

$$\Lambda = (\mathrm{mid}\mathbf{A})^{-1} \tag{4}$$

Если $\eta = ||I - \Lambda\mathbf{A}||_\infty \leq 1$, тогда в качестве начального приближения можно выбрать брус:

$$\mathbf{x}^{(0)} = ([-\theta, \theta], ..., [-\theta, \theta])^T \tag{5}$$

где $\theta = \frac{||\Lambda\mathbf{b}||_\infty}{1-\eta}$.
Предложение. Итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = C(x^{(k)}) + d, k = 0, 1, ... \tag{6}$$

сходитится, когда $\rho(|C|) \leq 1$, где $|C|$ - матрица составленная из модулей элементов C.

2.2 Общий метод Кравчика

Пусть на брусе $\mathbf{X} \in IR$ задана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$F(x) = 0 \tag{7}$$

где $F(x) = \{F_1(x), ..., F_n(x_n)\}, x = (x_1, ..., x_n)$. Оператором Кравчика относительно точки $\overline{x}$ называется отображение $K : ID \times R \rightarrow IR^n$:

$$K(\mathbf{X}, \overline{x}) = \overline{x} - \Lambda \cdot F(\overline{x}) - (I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{X} - \overline{x}) \tag{8}$$

где $\mathbf{L}$ - интервальная матрица Липшица отображения F на брусе $\mathbf{X}$, Λ - некоторая точечная матрица, выполняющая роль предобуславливателя.
Тогда итерационный процесс:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} \cap K(\mathbf{X}^{(k)}, \overline{x}^{(k)}) \tag{9}$$

где $k = 0, 1, 2, ...$, и $\overline{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}$, сходитсья для некоторого начального бруса $\mathbf{X}^{(0)}$.
В качестве интервальной матрицы $\mathbf{L}$ можно взять Якобиан $J(\mathbf{X})$, а в матрицу $\Lambda = (\mathrm{mid}J(\mathbf{X}))^{-1}$

3 Реализация

Язык программирования: Python. Среда разработки Visual Studio Code.
Ссылка на GitHub

4 Результаты

4.1 Линейный случай

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = [4, 5] \\ 1 \cdot x_1 - [1, 2] \cdot x_2 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Матрица $I - \Lambda A$ имеем вид:

$$\begin{pmatrix} [0, 0] & [-0.25, 0.25] \\ [0, 0] & [-0.167, 0.167] \end{pmatrix} \tag{11}$$

Тогда $\rho(|I - \Lambda A|) \approx 0.1667$, значит итерационный процесс 3 сходиться.
Дадим оценку начального бруса:
$\eta = ||I - \Lambda A||_\infty = 0.25 < 1$, тогда справедлива оценка 5. Вычисляя коэффициент θ, получим $\theta \approx 1.667$.
Критерий останова: малость изменения бруса, $\varepsilon < 10^{-16}$.
Процесс остановился после 22 итераций в точке : $\mathbf{x} = ([0.750, 1.50], [0.50, 1.00])^T$.
Приведём соответствующие иллюстрации:

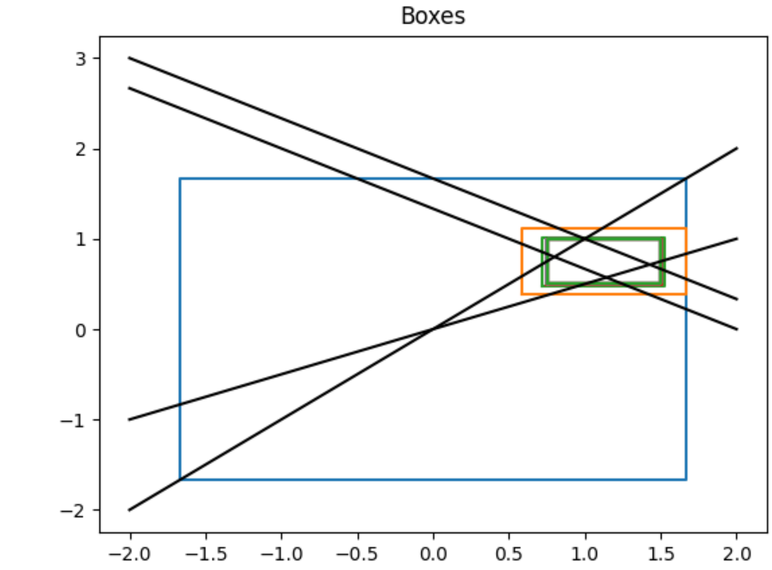

Рис. 1: Положения брусов при итерациях

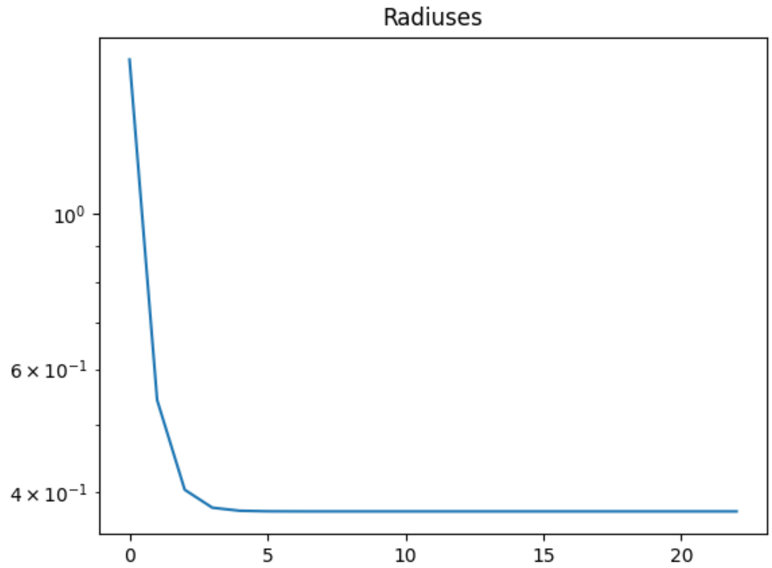

Рис. 2: График радиусов рабочих брусов

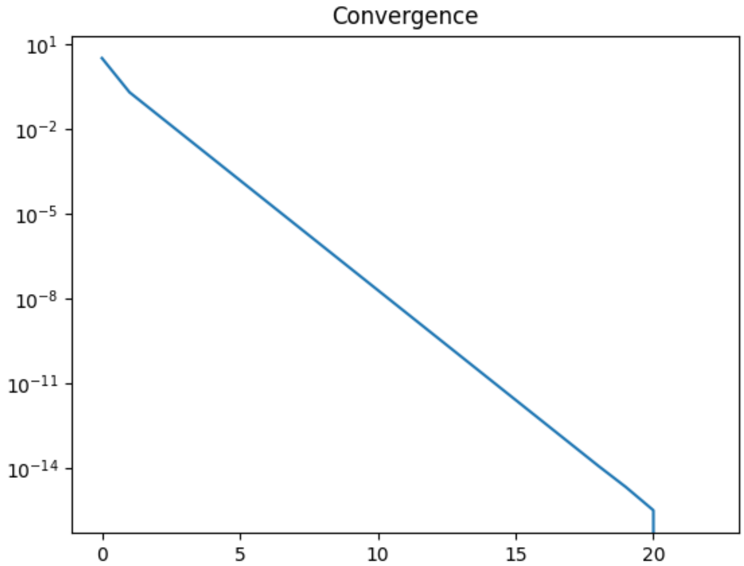

Рис. 3: Сходимость алгоритма

4.2 Нелинейный случай

Рассмотрим систему с теми же коэффициентами a, b и интервалами c, k, что и в 10:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = [4, 5] \\ \frac{x_1}{x_2} = [1, 2] \end{cases} \tag{12}$$

В качестве начального возьмём брус $X^{(0)} = ([0.25, 4], [0.25, 4])^T$.
Критерий останова: малость изменения бруса, $\varepsilon < 10^{-16}$.
Процесс остановился на 174 итерации в точке: $\mathbf{x} = ([0.250, 2.111], [0.250, 1.412])^T$.
Приведём соответствующие иллюстрации:

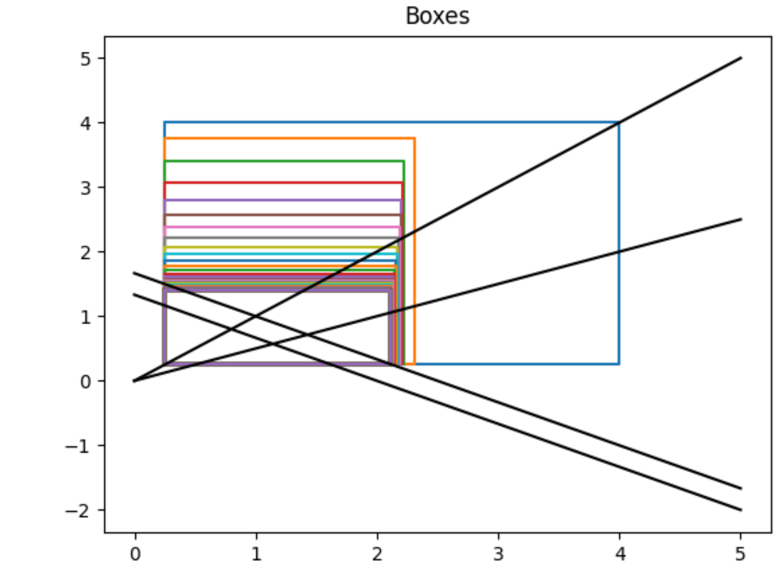

Рис. 4: Положения брусов при итерациях

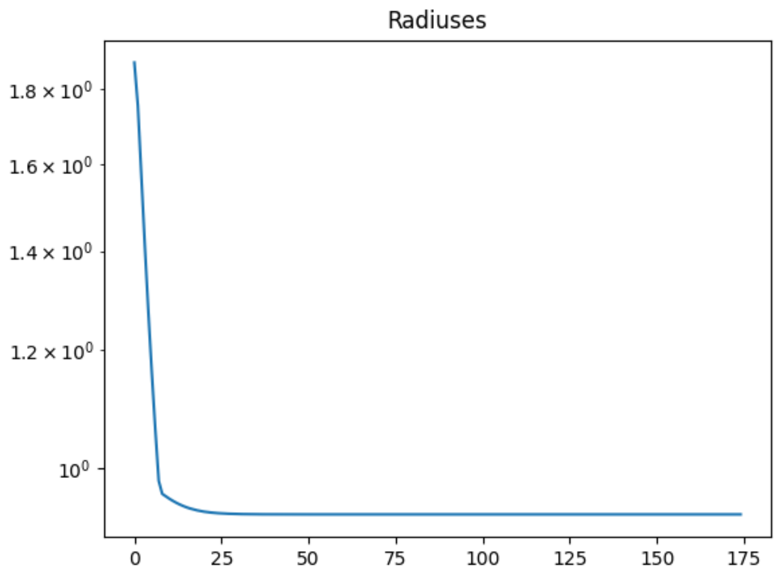

Рис. 5: График радиусов рабочих брусов

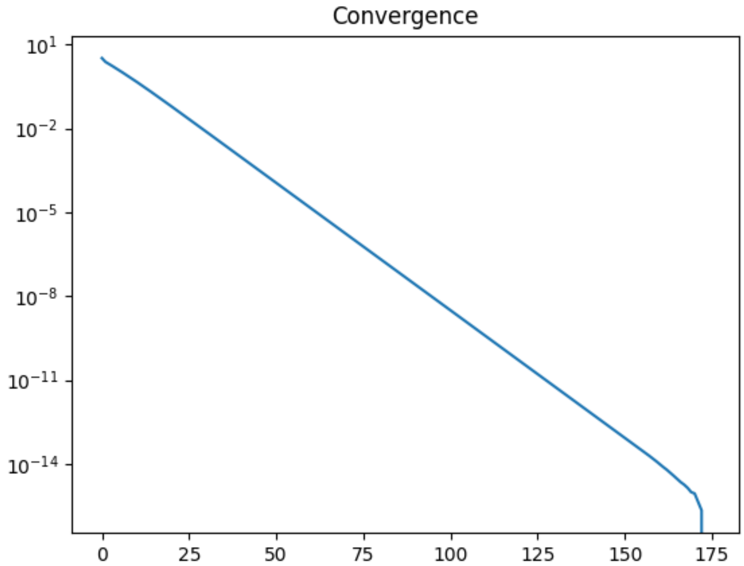

Рис. 6: Сходимость алгоритма

5 Обсуждение

Сначала отметим, что системы 10 и 12 имеют одинаковое объединённое множество решений, что также видно на рисунках 1, 4. На рисунках 1 и 4 видно, как с каждой итерацией уменьшается брус, только для линейного случая наблюдается куда более быстрая сходимость. Через три итерации радиус бруса почти перестаёт изменяться, а центр бруса почти не перемещается, что также подтверждают рисунки 2, 3. В свою очередь для нелинейного случая наблюдается куда более медленная сходимость: для достижения той же точности требуется на порядок больше итераций, также на каждой итерации заметно уменьшее радиуса бруса и смещение его центра, рисунки 5, 6. При этом в линейном случае брус значительно лучше приближает множество решений системы и со всех сторон почти "касается"множества решений. Также стоит отметить, что на рисунке 4 видно, как брус приближается только с двух сторон, и никак не улучшает нижнюю оценку по каждой их координат.