

Построение «нет-зоны» отрезка

Дан отрезок s , а также множество непересекающихся между собой и с s отрезков S . Концы всех отрезков – МТОП (никакие 3 точки не лежат на одной прямой). Обозначим множество концов отрезков из $S - P$.

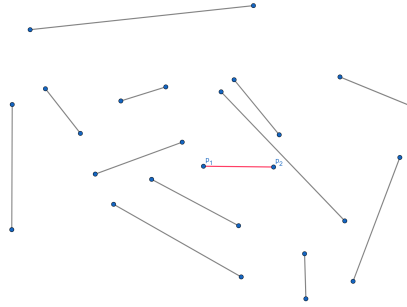
Определение: нет-зоной отрезка s относительно отрезка t называется такое подмножество N декартовой плоскости, что $\forall p \in N, \exists q \in t : pq \cap s \neq \emptyset$.

Определение: нет-зоной отрезка s относительно множества отрезков T называется такое подмножество N декартовой плоскости, что $\forall p \in N, \exists t \in T : \exists q \in t : pq \cap s \neq \emptyset$.

Утверждение: нет-зона отрезка s относительно множества T равна пересечению нет-зон отрезка s относительно каждого отрезка $t \in T$.

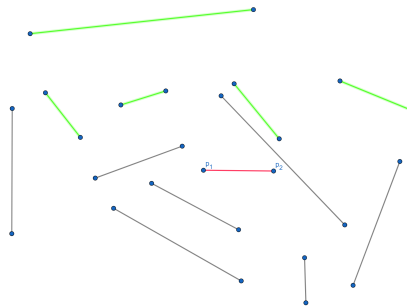
Рассмотрим только множества непересекающихся отрезков, точки концов которых – МТОП (никакие 3 точки не лежат на одной прямой).

Рассмотрим построение нет-зоны отрезка s . Не умаляя общности, считаем s горизонтальным. Обозначим его левый конец за p_1 , правый за p_2 .

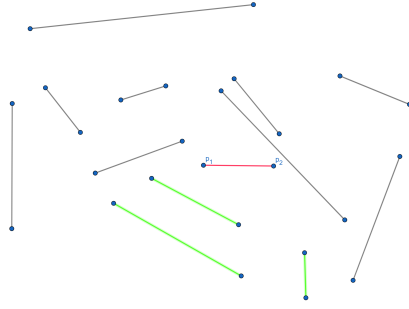


Множество S разобьем на подмножества:

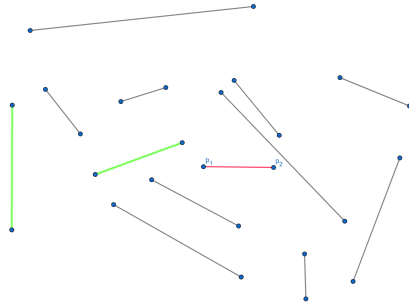
1. Обе точки отрезка лежат слева от прямой, проведенной через p_1p_2 . Обозначим S_1 , концы – P_1 .



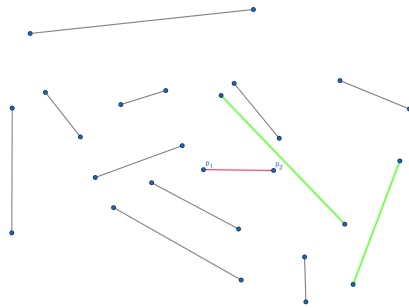
2. Обе точки отрезка лежат справа от прямой, проведенной через p_1p_2 . Обозначим S_2 , концы – P_2 .



3. Точки отрезка лежат по разные стороны от прямой, проведенной через p_1p_2 . Отрезок пересекает данную прямую со стороны точки p_1 . Обозначим S_3 , концы – P_3 .



4. Точки отрезка лежат по разные стороны от прямой, проведенной через p_1p_2 . Отрезок пересекает данную прямую со стороны точки p_2 . Обозначим S_4 , концы – P_4 .



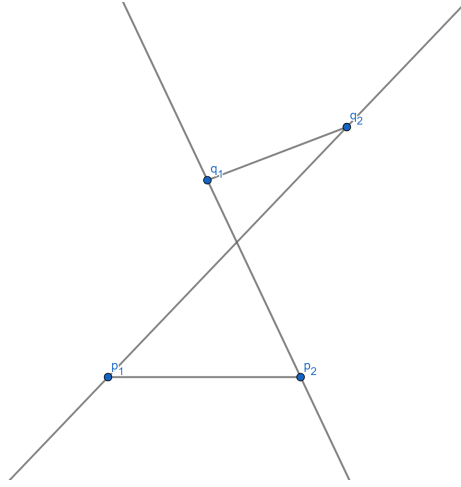
Любые другие прямые пересекали бы p_1p_2 .

Рассмотрим отрезок $s_1 \in S_1$:

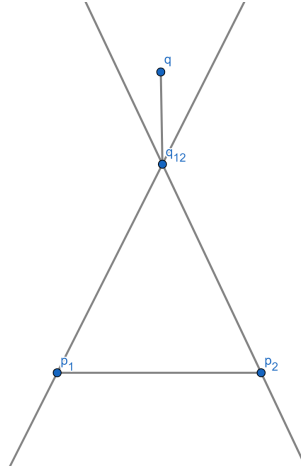
Определение: назовем точку $q_1 \in s_1$ левой относительно s , если угол $q_1p_1p_2$ максимален по всем $q \in s_1$.

Определение: назовем точку $q_2 \in s_1$ правой относительно s , если угол $q_1p_2p_1$ максимален по всем $q \in s_1$.

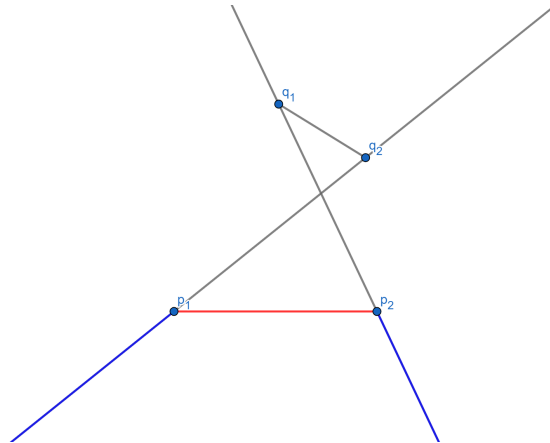
Замечание: точка отрезка может быть одновременно левой и правой.



Утверждение: левая и правая точки всегда являются концами отрезка.



Утверждение: нет-зона отрезка s относительно $s_1 \in S_1$ лежит ниже прямой, проходящей через отрезок s , содержит часть пространства, отсекаемого лучами, начинающимися из точек p_1 и p_2 , лежащими на прямых, заданных q_1p_2 , q_2p_1 .

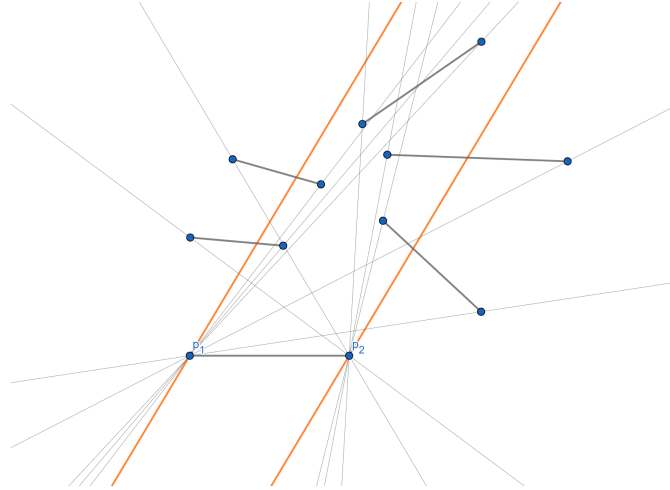


Утверждение: нет-зона отрезка s относительно S_1 имеет сложность $O(n)$, где n – количество отрезков в S_1 .

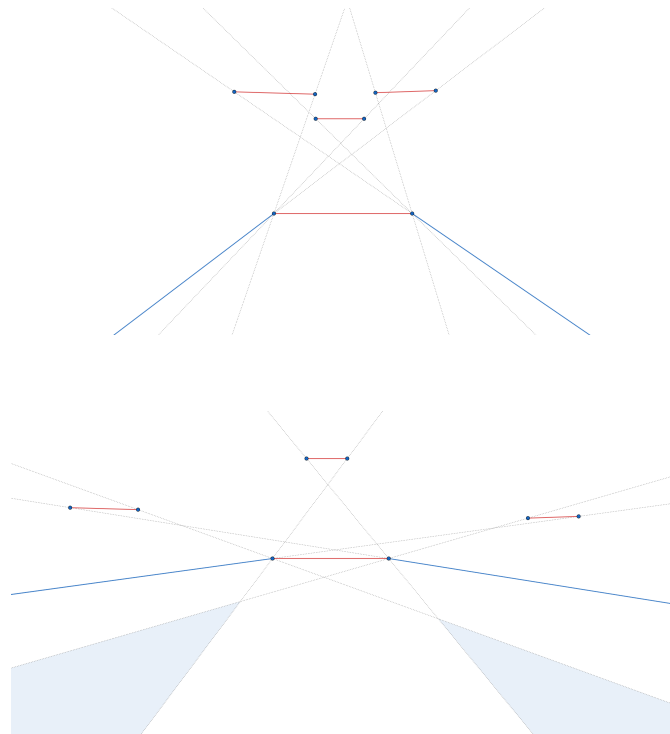
Построим множество S_1' такое, что все содержащиеся в нем отрезки имеют следующие свойства:

1. $s_1 \in S_1$
2. существует подмножество декартовой плоскости, отсеченное параллельными прямыми l_1, l_2 , проходящими через точки p_1 и p_2 соответственно, содержащее минимум одну из правой и левой точек каждого отрезка.

Утверждение: нет-зона отрезка s относительно S_1' имеет сложность $O(1)$.



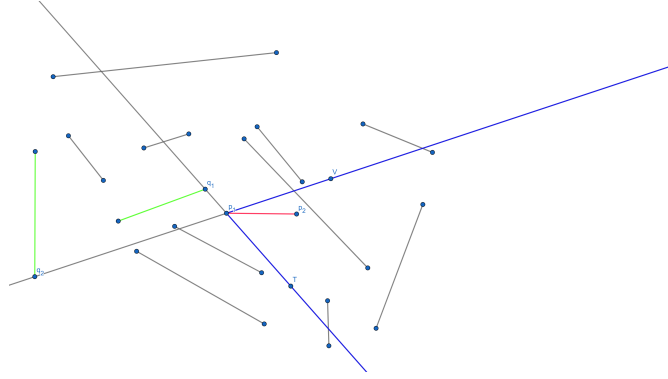
Существование хотя бы одного отрезка в S_1 порождает одну область «нет-зоны». В зависимости от взаимного расположения отрезков ее сложность - $O(n)$.



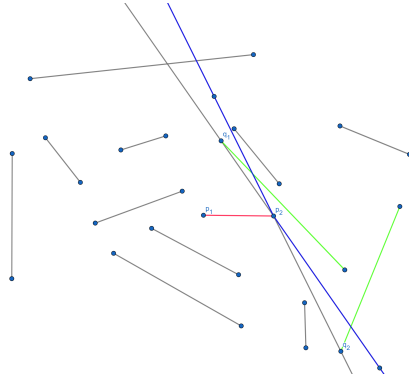
Для нахождения данной области можно построить arrangement на n участвующих в ее построение прямых и перебрать грани. Сложность такого алгоритма $O(n^2)$. Однако сложность вырезаемых клиньев константна, а значит и сложность зоны лишь линейна, что дает надежду на существование более быстрого алгоритма.

Аналогично для S_2 .

Существование хотя бы одного отрезка в S_3 порождает одну область «нет-зоны», ограниченную двумя лучами. Для ее построения достаточно найти такие $q_1, q_2 \in P_3$, которые бы минимизировали углы $q_1 p_1 p_2$, $q_2 p_1 p_2$ при условии того, что q_1 лежит левее $p_1 p_2$, а q_2 правее. Далее строятся прямые на $q_1 p_1$ и $q_2 p_1$. Искомые лучи лежат на полученных прямых, начинаются с p_1 , не включают q_1 и q_2 .



Для S_4 минимизируются углы $q_1 p_2 p_1$, $q_2 p_2 p_1$, лучи начинаются с p_2 .



Перед следующим шагом необходимо пересечь все получившиеся нет-зоны одного отрезка. Очевидно, что у нет-зон S_1, S_2 пересечение пусто. Так что данная операция сводится к пересечению нет-зон S_3, S_4 с S_1, S_2 и друг-другом, делается за $O(n)$.

Для построения пересечения (поиска области являющейся пересечением да-зон) на этапе построения нет-зон можно запомнить для каждой прямой, какие лучи/отрезки каких нет-зон он порождает. (обозначим кол-во объектов для каждой прямой за k . $k \leq 2$.) После построения всех нет-зон, на всех прямых с $k \geq 1$ строится arrangement. В РСДС ищем грань, в которой все отрезки никого не закрывают (пересечение да-зон). С учетом имеющихся данных обход делается за $O(n^4)$.