Построение «нет-зоны» отрезка

Дан отрезок s, а также множество непересекающихся между собой и с s отрезков S. Концы всех отрезков – МТОП (никакие 3 точки не лежат на одной прямой). Обозначим множество концов отрезков из S – P.

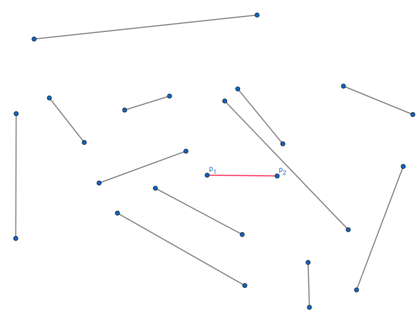
Определение: нет-зоной отрезка s относительно отрезка t называется такое подмножество N декартовой плоскости, что $\forall p \in N, \exists q \in t : pq \cap s \neq \emptyset$.

Определение: нет-зоной отрезка s относительно множества отрезков T называется такое подмножество N декартовой плоскости, что $\forall p \in N, \exists t \in T : \exists q \in t : pq \cap s \neq \emptyset$.

Утверждение: нет-зона отрезка s относительно множества T равна пересечению нет-зон отрезка s относительно каждого отрезка $t \in T$.

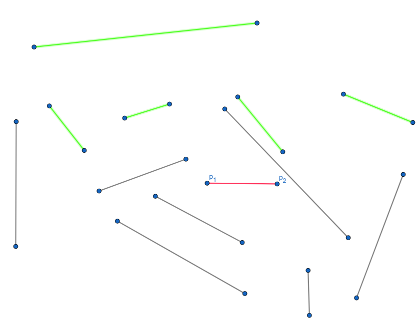
Рассмотрим только множества непересекающихся отрезков, точки концов которых – МТОП (никакие 3 точки не лежат на одной прямой).

Рассмотрим построение нет-зоны отрезка s. Не умаляя общности, считаем s горизонтальным. Обозначим его левый конец за p_1, правый за p_2.

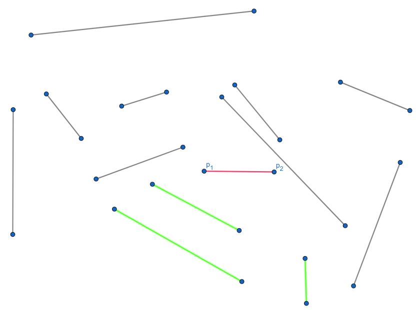


Множество S разобьем на подмножества:

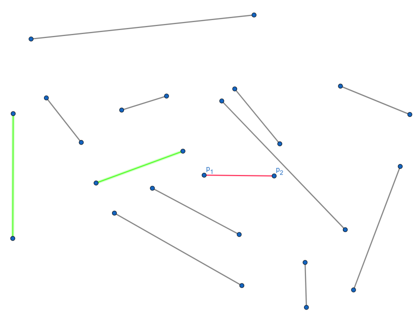
1. Обе точки отрезка лежат слева от прямой, проведенной через p_1p_2. Обозначим S_1, концы – P_1.



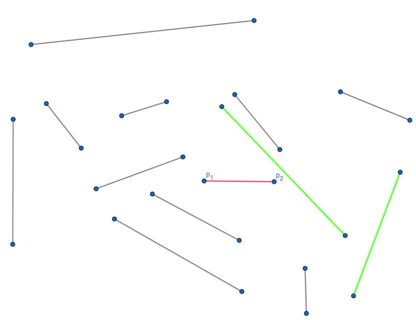
2. Обе точки отрезка лежат справа от прямой, проведенной через p_1p_2. Обозначим S_2, концы – P_2.



3. Точки отрезка лежат по разные стороны от прямой, проведенной через p_1p_2. Отрезок пересекает данную прямую со стороны точки p_1. Обозначим S_3, концы – P_3.



4. Точки отрезка лежат по разные стороны от прямой, проведенной через p_1p_2. Отрезок пересекает данную прямую со стороны точки p_2. Обозначим S_4, концы – P_4.



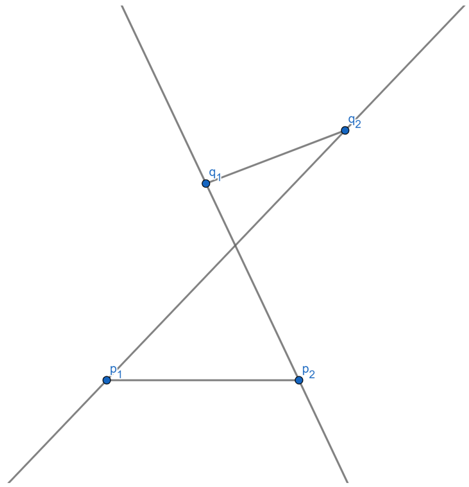
Любые другие прямые пересекали бы p_1p_2.

Рассмотрим отрезок $s_1 \in S_1$:

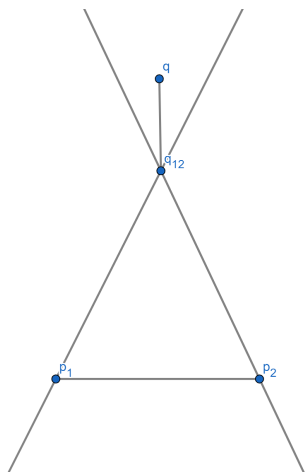
Определение: назовем точку $q_1 \in s_1$ левой относительно s, если угол $q_1p_1p_2$ максимален по всем $q \in s_1$.

Определение: назовем точку $q_2 \in s_1$ правой относительно s, если угол $q_1p_2p_1$ максимален по всем $q \in s_1$.

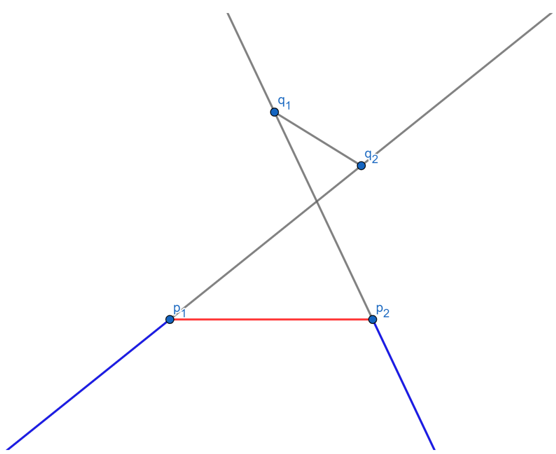
Замечание: точка отрезка может быть одновременно левой и правой.



Утверждение: левая и правая точки всегда являются концами отрезка.



Утверждение: нет-зона отрезка s относительно $s_1 \in S_1$ лежит ниже прямой, проходящей через отрезок s, содержит часть пространства, отсекаемого лучами, начинающимися из точек p_1 и p_2, лежащими на прямых, заданных q_1p_2, q_2p_1.



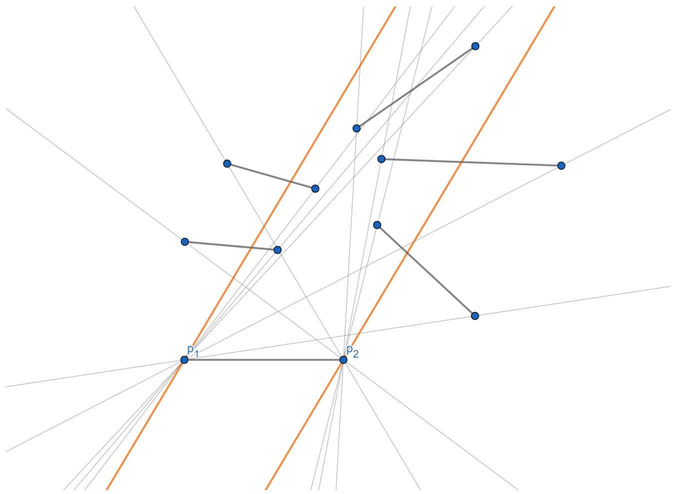
Утверждение: нет-зона отрезка s относительно S_1 имеет сложность $O(n)$, где n – количество отрезков в S_1.

Построим множество $S_1{}'$ такое, что все содержащиеся в нем отрезки имеют следующие свойства:

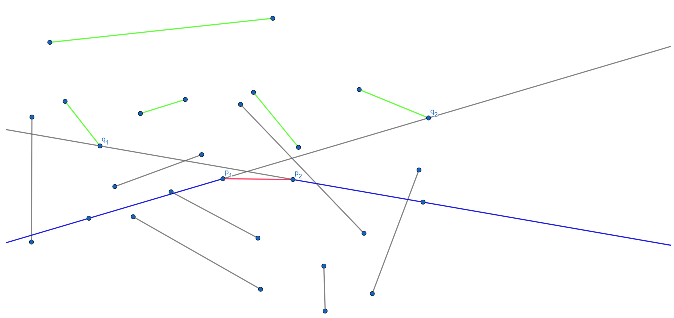
1. $s_1 \in S_1$

2. сущетвует подмножество декартовой плоскости, отсеченное параллельными прямыми l_1, l_2, проходящими через точки p_1 и p_2 соответсвенно, содержащее минимум одну из правой и левой точек каждого отрезка.

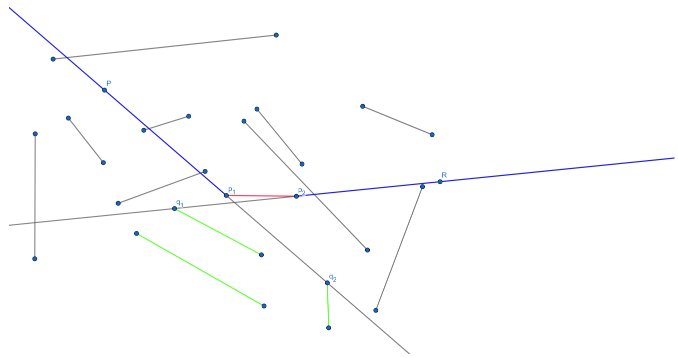
Утверждение: нет-зона отрезка s относительно $S_1{}'$ имеет сложность $O(1)$.



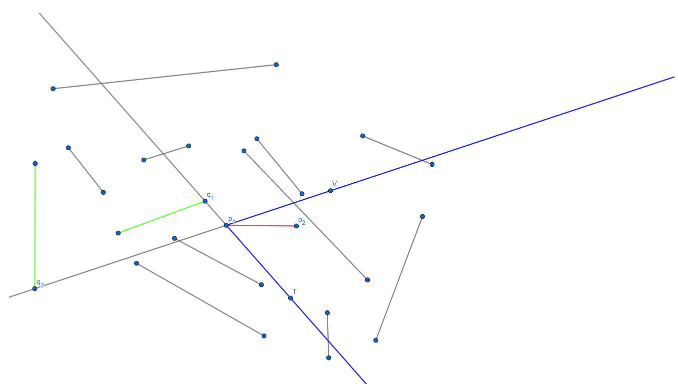
Существование хотя бы одного отрезка в S_1 порождает одну область «нет-зоны», ограниченную двумя лучами и отрезком. Для ее построения достаточно найти такие $q_1, q_2 \in P_1$, которые бы минимизировали углы $q_1p_2p_1$, $q_2p_1p_2$. Далее строятся прямые на q_1p_2 и q_2p_1. Искомые лучи лежат на полученных прямых, начинаются с p_1 и p_2, не включают q_1 и q_2.



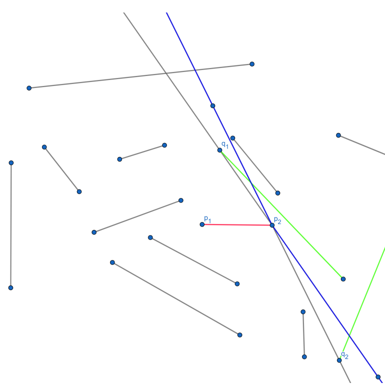
Аналогично для S_2.



Существование хотя бы одного отрезка в S_3 также порождает одну область «нет-зоны», ограниченную двумя лучами. Для ее построения достаточно найти такие $q_1, q_2 \in P_3$, которые бы минимизировали углы $q_1p_1p_2$, $q_2p_1p_2$ при условии того, что q_1 лежит левее p_1p_2, а q_1 правее. Далее строятся прямые на q_1p_1 и q_2p_1. Искомые лучи лежат на полученных прямых, начинаются с p_1, не включают q_1 и q_2.



Для S_4 минимизируются углы $q_1p_2p_1$, $q_2p_2p_1$, лучи начинаются с p_2.



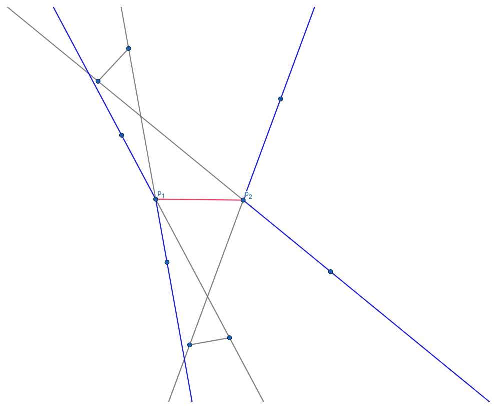
Таким образом, S_1 порождает «нет-зону»: луч-p_1p_2-луч. Причем лучи непересекающиеся, а зона – подмножество полуплоскости. Аналогично для S_2.

S_3 порождает «нет-зону»: луч-p_1-луч. Вырожденной зона быть не может, если непусто S_3. Данная зона может быть сколь угодно близкой как к прямой, так и ко всей плоскости. Аналогично для S_4.

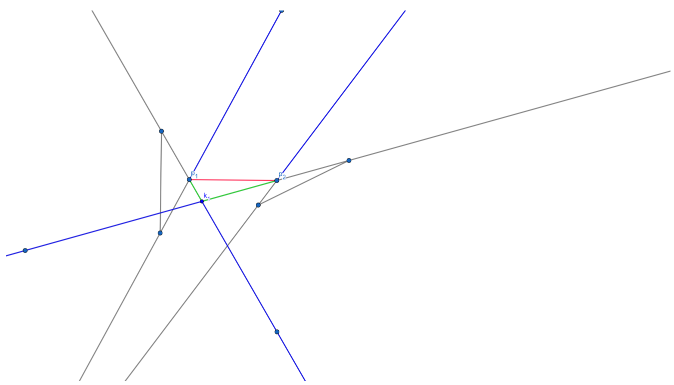
Итоговая «нет-зона» получается пересечением полученных выше. Для данного примера она получается равной всей плоскости, а значит мы получаем досрочный ответ «нет» для задачи видимости.

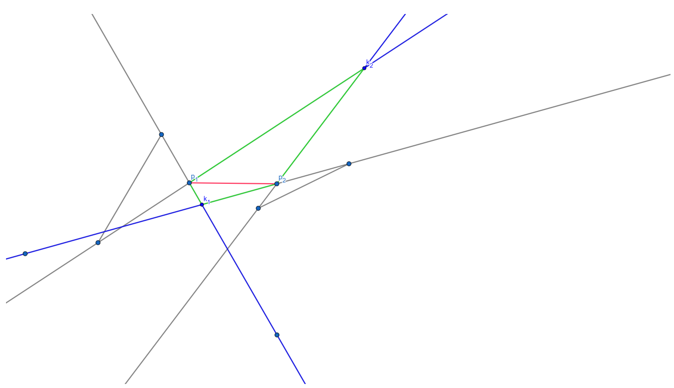
Все виды итоговых «нет-зон» можно получить перебором:

1. Зоны, порождаемые S_1 и S_2, непересекаются, так что результат всегда один: множество, ограниченное конструкциями луч-p_1-луч, луч-p_2-луч.



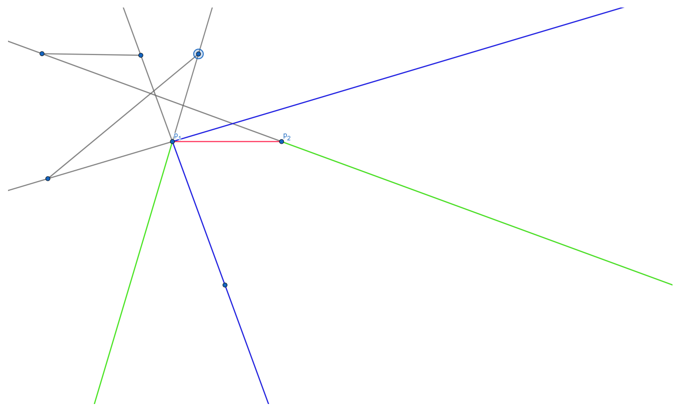
2. Взаимодействие зон, порождаемых S_3 и S_4, можно поделить на взаимодействие левых и правых лучей. Одни из них всегда пересекаются (обозначим точку пекресечения k_1). В этой полуплоскости итоговая зона ограничена конструкцией луч-k_1-луч. Во второй полуплоскости возможны два варианта: пересечение лучей в точке k_2 или отсутсвие пересечения. Итого результат: множество, ограниченное либо конструкциями луч-k_1-луч, луч-k_2-луч, либо только луч-k_1-луч.

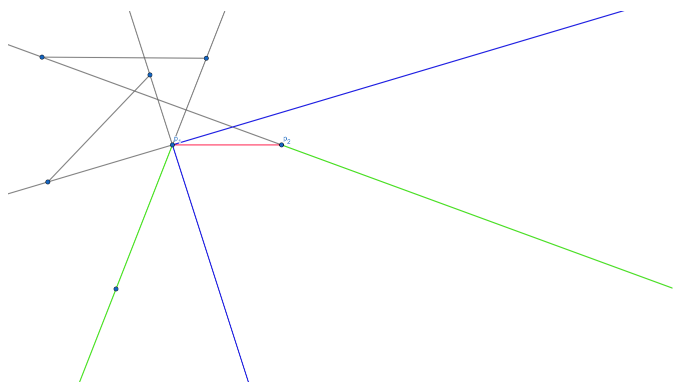


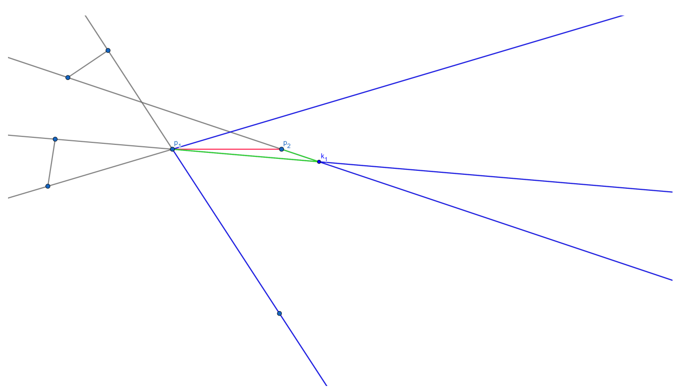


3. Оставшиеся пары ведут себя одинакого, рассмотрим S_1 и S_3. Обе порождаемые зоны имеют луч с началом в p_1 в правой полуплоскости, один всегда будет «сильнее» второго

и более «слабый» можно отбросить. Если отброшенным оказался луч, порожденный S_1, то оставшиеся лучи в правой полуплоскости могут пересечься в точке k_1 и вырезать конструкцией луч-k_1-луч кусок из итогового множества. Итого результат: множество, ограниченное либо конструкциями луч-p_1-луч, луч-k_1-луч, либо только луч-p_1-луч.

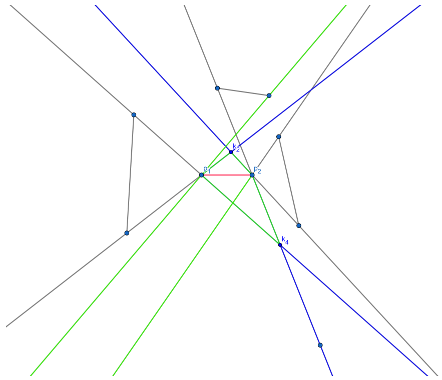


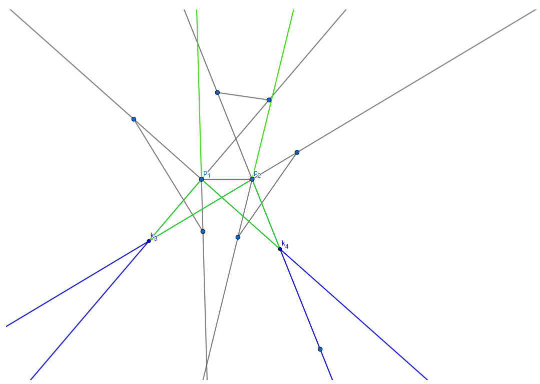




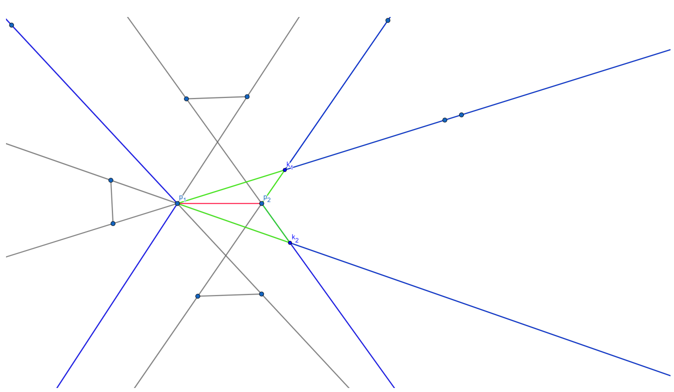
4. Среди троек имеет смысл рассмотреть случай пустого S_2 (для S_1 аналогично) и пустого S_4 (для S_3 аналогично). В случае пустого S_2 весь интерес сводится к наличию пересечения лучей, порождаемых S_3 и S_4, в правой полуплоскости. Если пересечения нет, то оно будет в левой полуплоскости, а порождаемая им луч-k_2-луч будет единственным ограничением. Если пересечение есть, то конструкция луч-k_1-луч может пересечься с лучами, порожденными S_1 в 1-2 точках. (обозначим их k_3, k_4). Если пересечения нет, то и ограничений в нижней половине нет. Иначе ограничения - контрукции луч-k_3-луч, луч-k_4-луч.

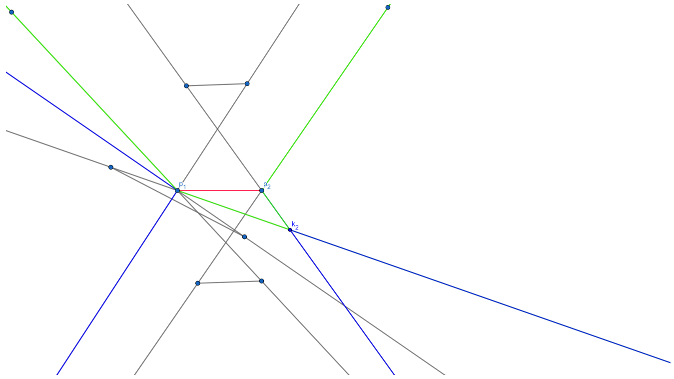
Итого результат: множество, ограниченное в левой полуплоскости либо луч-k_2-луч, либо нечем. В правой: либо луч-k_3-луч, либо луч-k_4-луч, либо луч-k_3-луч, луч-k_4-луч, либо нечем. (8 вариантов, приведем самые интересные)



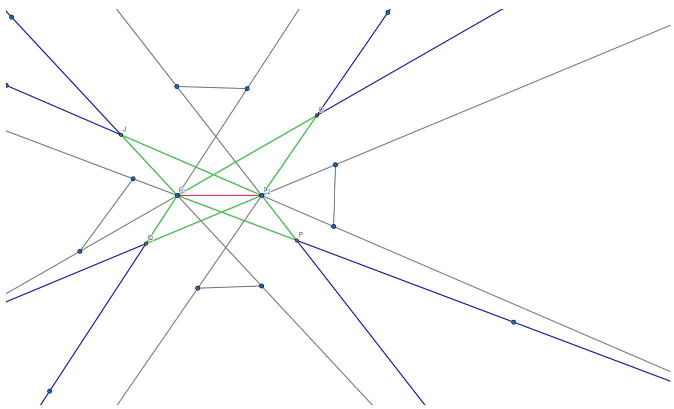


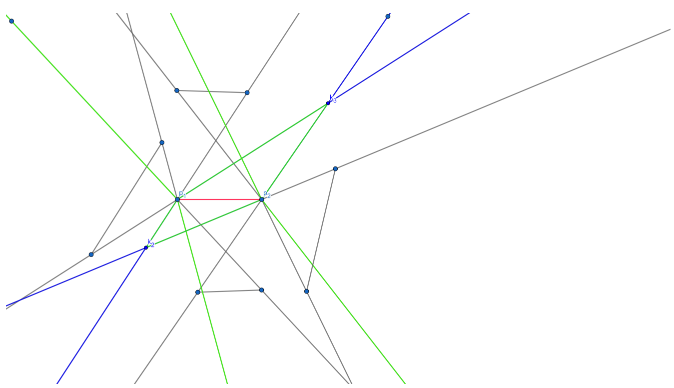
5. В случае пустого S_4 весь интерес сводится к наличию пересечения лучей S_3 и лучами S_1, S_2 из p_2. Если пересечение есть (в точках k_1, k_2), появляются дополнительные ограничения (может быть только одно). Если пересечения нет, то зона порождаемая S_3 имеет более сильное воздействие, чем 2-4 луча, задающие зоны S_1, S_2. Итого результат: множество, ограниченное контрукцией луч-p_1-луч и либо луч-k_1-луч, либо луч-k_2-луч, либо луч-k_1-луч, луч-k_2-луч, либо нечем. (4 варианта, приведем самые интересные)





6. Если все множества непустые, ограничения сводятся к порождаемым аналогично предыдущему пункту точкам пересечения k_1, k_2, k_3, k_4. Итого результат: множество, ограниченное контрукциями луч-k_1-луч, луч-k_2-луч, луч-k_3-луч, луч-k_4-луч в любых комбинациях. От всей плоскости, до всех четырех. (16 вариантов, приведем несколько)





Выводы:

1. Построением всех «нет-зоны» заодно получены и обратные им «да-зоны» (вернее не «нет-зоны»).

2. Алгоритм построения таких зон можно реализовать за $O(n^2)$ в не зависимости от того, как именно искать пересечение плоскостей, так как их количество (0-10) ограничено. Основное время уйдет на поиск этих плоскостей.

3. Выход такого алгоритма - «да-зона» отрезка, описанная как 0-4 конструкции луч-точка/отрезок-луч. Причем в случае отрезка лучи не пересекаются.

4. Выход может быть пустым, если непусты множества S_3, S_4 и одно из S_1, S_2.