

Алгоритм определения правильности отрезка.

Входные данные: отрезок s , грань РСДС f , упорядоченное по полярному углу множество точек P_u , индексы i, j краевых точек s в P_u .

Выходные данные: «да», если s правильный. «нет», если s неправильный.

Алгоритм: если точки рядом, то ответ «нет». Иначе выбираем произвольную внутреннюю точку f , находим ориентированную площадь треугольника $qp_i p_j$ (Не умаляя общности, считаем что точка p_i раньше p_j в упорядоченном списке), если она положительна, то ответ «да», иначе ответ «нет».

Теорема. Статус не зависит от выбора точки внутри f

Доказательство. Статус - упорядоченные по полярному углу концы отрезков, правильность каждого отрезка.

1. Упорядочение не поменяется. Предположим противное, пусть в f существует две точки A_1, A_2 , для которых порядок в упорядоченном массиве отличается. Не умаляя общности, будем считать, что порядок отличается только для двух точек p_1, p_2 . Тогда в силу непрерывности значения полярного угла каждой точки $\exists t \in (0, 1) : A(t) = (1-t)A_1 + tA_2$ такая, что точки p_1, p_2 имеют одинаковый полярный угол относительно $A(t)$. Получили противоречие.
2. Правильность отрезков. Заметим, что правильность отрезка может поменяться, только в двух случаях:
 - Точки поменялись местами в упорядоченном списке. Что невозможно по первому пункту.
 - Поменялся поворот угла, что возможно только при перешагивании ребра, построенного на точках одного отрезка.

Теорема. В процессе перешагивания ребра статус меняется для не более чем двух отрезков

Доказательство. Статус - упорядоченные по полярному углу концы отрезков, правильность каждого отрезка. Обозначим ребро за e , грани, которые оно разделяет за f_1 и f_2 .

1. Упорядочение поменяется только для не более чем двух точек.

Предположим противное, это означает, что $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_1 \in f_1, A_2 \in f_2 : \exists A_0 \in e : |A_0 - A_1| < \varepsilon, |A_0 - A_2| < \varepsilon$, кроме того, порядок точек в статусе в A_1, A_2 различен для $n > 2$ точек. В силу бесконечной малости отрезка $A_1 A_2$, все n точек должны иметь одинаковые полярные углы в точке, лежащей на e , а значит на прямой, порожденной e лежит > 2 точек, что противоречит условию МТОП.

2. Правильность отрезков.

Заметим, что правильность отрезка может поменяться, только в двух случаях:

- Изменилось положение в упорядоченном списке минимум одной из его точек. Тогда по первому пункту очевидно, что более чем для двух отрезков не может поменяться правильность.
- Поменялся поворот угла, что возможно только при перешагивании ребра, построенного на точках одного отрезка. В этом случае правильность меняется не более чем для одного отрезка.