Алгоритм определения правильности отрезка.

Входные данные: отрезок s, грань РСДС f, упорядоченное по полярному углу множество точек P_u, индексы i, j краевых точек s в P_u.

Выходные данные: «да», если s правильный. «нет», если s неправильный.

Определение. Положением точки в упорядоченном (цикличном) массиве будем называть пару соседних точек (левую и правую). Будем говорить, что точка p поменяла положение в упорядоченном массиве, если p поменялся хотя бы один сосед.

Алгоритм: если точки рядом, то ответ «нет». Иначе выбираем произвольную внутреннюю точку f, находим ориентированную площадь треугольника qp_ip_j (Не умаляя общности, считаем что точка p_i раньше p_j в упорядоченном списке), если она положительна, то ответ «да», иначе ответ «нет».

Теорема. Статус не зависит от выбора точки внутри f

Доказательство. Статус - упорядоченные по полярному углу концы отрезков, правильность каждого отрезка.

1. Упорядочение не поменяется. Предположим противное, пусть в f существует две точки A_1, A_2, для которых порядок в упорядоченном массиве отличается. Не умаляя общности, будем считать, что порядок отличается только для двух точек p_1, p_2. Тогда в силу непрерывности значения полярного угла каждой точки $\exists t \in (0,1) : A(t) = (1-t)A_1 + tA_2$ такая, что точки p_1, p_2 имеют одинаковый полярный угол относительно $A(t)$. Получили противоречие.

2. Правильность отрезков. Заметим, что правильность отрезка может поменяться, только в двух случаях:

   - Точки поменялись местами в упорядоченном списке. Что невозможно по первому пункту.
   - Поменялся поворот угла, что возможно только при перешагивании ребра, построенного на точках одного отрезка.

Теорема. В процессе перешагивания ребра статус меняется не сильно.

Доказательство. Статус - упорядоченные по полярному углу концы отрезков, правильность каждого отрезка. Обозначим ребро за e, грани, которые оно разделяет за f_1 и f_2.

1. Упорядочение поменяется только для не более чем двух точек.

   Предположим противное, это означает, что $\forall \varepsilon > 0 : \exists A_1 \in f_1, A_2 \in f_2 : \exists A_0 \in e : |A_0 - A_1| < \varepsilon, |A_0 - A_2| < \varepsilon$, кроме того, порядок точек в статусе в A_1, A_2 различен для $n > 2$ точек. В силу бесконечной малости отрезка A_1A_2, все n точек должны иметь одинаковые полярные углы в точке, лежащей на e, а значит на прямой, порожденной e лежит > 2 точек, что противоречит условию МТОП.

2. Правильность отрезков.

   При перешагивании ребра e в упорядоченном массиве для каких-то точек поменялись соседи. По первому пункту таких точек не более чем 4. Также для максимум двух отрезков (на концах которых построено ребро e) может поменяться поворот. Покажем, что для $n-4$ отрезков, концы которых не поменяли соседей, их правильность (и неправильность) не изменились.

   - Отрезок был правильным.

     Так как концы этого отрезка не поменяли соседей, то они также останутся соседними в упорядоченном массиве, тогда отрезок может стать неправильным, только если поменяется поворот. Поворот отрезка может поменяться только, если e построено но концах одного отрезка, чего не может быть по выбору $n-4$ отрезков. Значит, рассматриваемый отрезок останется правильным.

   - Отрезок был неправильным, потому что точки не были соседями.

     Так как концы этого отрезка не поменяли соседей, то они также останутся не соседними в упорядоченном массиве. Тогда и сам отрезок останется неправильным.

   - Отрезок был неправильным, потому что имел правый поворот.

     Поворот отрезка может поменяться только, если e построено но концах одного отрезка, чего не может быть по выбору $n-4$ отрезков. Значит, рассматриваемый отрезок останется неправильным.