

3. Решим систему  $Ux = y$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2}, \\ x_3 - 6x_4 = -19, \\ x_4 = 3. \end{array}$$

Отсюда получаем:  $x_4 = 3$ ,  $x_3 = -1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_1 = 1$  или  $x_* = (1; 2; -1; 3)^T$ . ■

#### Замечания

1. При большом числе уравнений (больше 100) прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений становятся труднореализуемыми на ЭВМ прежде всего из-за сложности хранения промежуточных результатов и операций с матрицами большой размерности.

2. Существуют различные способы представления матрицы  $A$  в виде

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m,$$

где каждая матрица  $A_i$  имеет форму, удобную для решения системы линейных уравнений [11]. Как правило,  $m \leq 5$ , причем главным образом  $m = 2$  и  $m = 3$ . Тогда в результате решения последовательности систем

$$A_1 b_1 = b, \quad A_2 b_2 = b_1, \dots, \quad A_m b_m = b_{m-1}$$

можно найти искомое решение  $x_* = b_m$ .

## 1.3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

### 1.3.1. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Альтернативой прямым методам являются итерационные методы, основанные на многократном уточнении  $x^{(0)}$  — приближенно заданного решения задачи  $Ax = b$ . Верхним индексом в скобках здесь и далее по тексту обозначается номер итерации (совокупности повторяющихся действий).

Суть простейшего итерационного метода — метода простых итераций, состоит в выполнении следующих процедур.

1. Исходная задача  $Ax = b$  преобразуется к равносильному виду:

$$x = \alpha x + \beta, \tag{1.12}$$

где  $\alpha = \{\alpha_{ij}\}$  — квадратная матрица,  $\beta = \{\beta_i\}$  — вектор,  $i, j = 1, \dots, n$ . Это преобразование может быть выполнено различными путями, но для обеспечения сходимости итераций (см. процедуру 2) нужно добиться, чтобы  $\|\alpha\| < 1$  (чтобы норма  $\alpha$  была меньше единицы. Понятие нормы вводится ниже).

2. Вектор  $\beta$  принимается в качестве начального приближения  $x^{(0)} = \beta$  и далее многократно выполняются действия по уточнению решения согласно рекуррентному соотношению

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta, \quad k = 0, 1, \dots \tag{1.13}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\x_2^{(k+1)} &= \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2, \\&\vdots \\x_n^{(k+1)} &= \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n.\end{aligned}$$

3. Итерации прерываются при выполнении условия

$$\frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon, \quad (1.14)$$

где  $\varepsilon > 0$  — заданная точность, которую необходимо достигнуть при решении задачи, или более простого условия:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon. \quad (1.15)$$

Оба условия носят апостериорный характер (*a posteriori* — после).

*Замечания*

1. Процесс (1.13) называется *параллельным итерированием*, так как для вычисления  $(k+1)$ -го приближения всех неизвестных учитываются вычисленные ранее их  $k$ -е приближения.

2. Начальное приближение  $x^{(0)}$  может выбираться произвольно или из некоторых соображений. При этом может использоваться априорная информация о решении или просто «грубая» прикидка.

При выполнении итераций (любых) возникают следующие вопросы:

- а) сходится ли процесс (1.13), т. е. имеет ли место  $x^{(k)} \rightarrow x_*$  при  $k \rightarrow \infty$ , где  $x_*$  — точное решение?
- б) если сходимость есть, то какова ее скорость?
- в) какова погрешность найденного решения  $x^{(k+1)}$ , т. е. чему равна норма разности  $\|x^{(k)} - x_*\|$ ?

Для их разрешения необходимо сравнивать векторы  $x^{(k)}$  и  $x^{(k+1)}$ . Это сравнение (а также математическое обоснование и других задач вычислительной математики) осуществляется на основе норм матриц и векторов. Приведем основные сведения о них.

*Нормой матрицы*  $A = \{a_{ij}\}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) называется действительное число (обозначаемое  $\|A\|$ ), удовлетворяющее условиям:

- 1)  $\|A\| > 0$  при  $A \neq 0$  и  $\|A\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $A$  нулевая матрица ( $A = 0$ );
- 2)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$  для любого действительного  $\alpha$ ; ( $|\alpha|$  — модуль  $\alpha$ );
- 3)  $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — некоторые матрицы (неравенство треугольника);
- 4)  $\|A_1 \cdot A_2\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|$ .

Здесь  $A_1$  и  $A_2$  — матрицы, для которых соответствующие операции имеют смысл.

Условия 1–4 — это условия нормы, а их непосредственное вычисление может производиться различными путями. Наиболее употребительными яв-

ляются следующие формулы для вычисления значений норм матриц и векторов, образованных действительными компонентами.

#### Нормы матрицы $A$

$$1) \|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$2) \|A\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$3) \|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

#### Нормы вектора $x$

$$\|x\|_1 = \max_i |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Здесь приведены согласованные нормы матриц и векторов. Их согласование осуществляется связью:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Заметим, что в случае  $\|x\|_3$  согласованная норма равна  $\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ , где  $\lambda_{\max}(A^T A)$  — максимальное собственное значение матрицы  $A^T A$ . Однако ее вычисление связано с весьма трудоемкими операциями. Можно доказать, что справедливо неравенство

$$\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \leq \|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Так как величина  $\|A\|_3$  вычисляется относительно просто, то она часто используется в оценках. Третья норма  $\|\cdot\|_3$  называется *евклидовой*, для вектора она соответствует длине вектора, исходящего из начала координат. В множестве действительных чисел  $\|x\| = |x|$ .

Ответ на вопросы о сходимости дают следующие две теоремы, приводящиеся без доказательства.

**Теорема 1.1** (о достаточном условии сходимости метода простых итераций).

*Метод простых итераций, реализующийся в процессе последовательных приближений (1.13), сходится к единственному решению исходной системы  $Ax = b$  при любом начальном приближении  $x^{(0)}$  со скоростью не медленнее геометрической прогрессии, если какая-либо норма матрицы  $\alpha$  меньше единицы, т. е.  $\|\alpha\|_s < 1$  ( $s \in \{1, 2, 3\}$ ).*

*Замечания*

1. Условие теоремы 1.1, как достаточное, предъявляет завышенные требования к матрице  $\alpha$ , и потому иногда сходимость будет, если даже  $\|\alpha\| \geq 1$ .

2. Сходящийся процесс обладает свойством *самоисправляемости*, т. е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новое начальное.

3. Условия сходимости выполняются, если в матрице  $A$  диагональные элементы преобладают, т. е.

$$|a_{ii}| \geq |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.16)$$

и хотя бы для одного  $i$  неравенство строгое. Иначе модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов (свободные члены не рассматриваются).

4. Чем меньше величина нормы  $\|\alpha\|$ , тем быстрее сходимость метода.

**Теорема 1.2** (о необходимом и достаточном условии сходимости метода простых итераций).

Для сходимости последовательности (1.13) при любых  $x^{(0)}$  и  $\beta$  необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы  $\alpha$  были по модулю меньше единицы, т. е.  $|\lambda_i(\alpha)| < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

*Замечание.* Хотя теорема 1.2 дает более общие условия сходимости метода простых итераций, чем теорема 1.1, однако ею воспользоваться сложнее, так как нужно предварительно вычислить границы собственных значений матрицы  $\alpha$  или сами собственные значения.

Рассмотрим последовательность  $\{x^{(k)}\}$ , сходящуюся к  $x_*$ . Предположим, что все ее элементы различны и ни один из них не совпадает с  $x_*$ . Наиболее эффективный способ оценивания скорости сходимости состоит в сопоставлении расстояния между  $x^{(k+1)}$  и  $x_*$  с расстоянием между  $x^{(k)}$  и  $x_*$ .

Последовательность  $\{x^{(k)}\}$  называется *сходящейся с порядком  $p$* , если  $p$  — максимальное число, для которого

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x_*\|}{\|x^{(k)} - x_*\|^p} < \infty.$$

Поскольку величина  $p$  определяется предельными свойствами  $\{x^{(k)}\}$ , она называется *асимптотической скоростью сходимости*.

Если последовательность  $\{x^{(k)}\}$  — сходящаяся с порядком  $p$ , то число

$$c = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x_*\|}{\|x^{(k)} - x_*\|^p}$$

называется *асимптотическим параметром ошибки*.

Если  $p = 1$ ,  $c < 1$ , то сходимость линейная, если  $p = 2$  — квадратичная, если  $p = 3$  — кубическая и т. д. Если  $p > 1$  или  $p = 1$ ,  $c = 0$ , то сходимость сверхлинейная. Линейная сходимость является синонимом сходимости со скоростью геометрической прогрессии. Сверхлинейная сходимость является более быстрой, чем определяемая любой геометрической прогрессией.

**Теорема 1.3** (о погрешности приближений, вычисляемых методом простых итераций).

Если в итерационном процессе норма матрицы  $\alpha$ , согласованная с нормой вектора  $x$ , меньше единицы ( $\|\alpha\| < 1$ ), то справедлива следующая оценка погрешности:

$$\|x^{(k)} - x_*\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \quad (1.17)$$

Это соотношение может быть переписано через начальное приближение  $x^{(0)} = \beta$ :

$$\|x^{(k)} - x_*\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\|. \quad (1.18)$$

Неравенство (1.17) позволяет провести апостериорную оценку погрешности  $k$ -го приближения посредством вычисления нормы разности двух последовательных приближений  $x^{(k)}$ ,  $x^{(k-1)}$  и нормы матрицы  $\alpha$ . На основе этой оценки осуществляется выход из итерационного процесса по результатам расчета (см. (1.14)):

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \frac{(1 - \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} \varepsilon.$$

На основе неравенства (1.18) можно записать *aприорную оценку* погрешности (*a priori* — до)

$$\frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \|\beta\| \leq \varepsilon,$$

из которой еще до расчета можно получить число итераций  $k$ , требуемых для достижения заданной точности:

$$k + 1 \geq \frac{\lg \varepsilon + \lg(1 - \|\alpha\|) - \lg \|\beta\|}{\lg \|\alpha\|}. \quad (1.19)$$

Преобразование системы  $Ax = b$  к виду  $x = \alpha x + \beta$  с матрицей  $\alpha$ , удовлетворяющей условиям сходимости, может быть выполнено несколькими способами. Приведем способы, используемые наиболее часто.

1. Уравнения, входящие в систему  $Ax = b$ , переставляются так, чтобы выполнялось условие (1.16) преобладания диагональных элементов (для той же цели можно использовать другие элементарные преобразования). Затем первое уравнение разрешается относительно  $x_1$ , второе — относительно  $x_2$  и т. д. При этом получается матрица  $\alpha$  с нулевыми диагональными элементами.

Например, система

$$\begin{aligned} -2,8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 60, \\ 10x_1 - x_2 + 8x_3 &= 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0,6x_3 &= 20 \end{aligned}$$

с помощью перестановки уравнений приводится к виду

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 8x_3 &= 10, \\ -x_1 + 2x_2 - 0,6x_3 &= 20, \\ -2,8x_1 + x_2 + 4x_3 &= 60, \end{aligned}$$

где  $|10| > |-1| + |8|$ ,  $|2| > |-1| + |-0,6|$ ,  $|4| > |-2,8| + |1|$ , т. е. диагональные элементы преобладают.

Выражая  $x_1$  из первого уравнения,  $x_2$  — из второго, а  $x_3$  — из третьего, получаем систему:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \cdot x_1 + 0,1x_2 - 0,8x_3 + 1, \\x_2 &= 0,5x_1 + 0 \cdot x_2 + 0,3x_3 + 10, \\x_3 &= 0,7x_1 - 0,25x_2 + 0 \cdot x_3 + 15,\end{aligned}$$

где  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & -0,8 \\ 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & -0,25 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ .

Заметим, что  $\|\alpha\|_1 = \max\{0,9; 0,8; 0,95\} = 0,95 < 1$ , т. е. условие теоремы 1.1 выполнено.

Проиллюстрируем применение других элементарных преобразований. Так, система

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 + 9x_3 &= -7, \\3x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= -6, \\x_1 + x_2 - 8x_3 &= 7\end{aligned}$$

путем сложения первого и третьего уравнений и вычитания из второго уравнения третьего уравнения преобразуется к виду

$$\begin{aligned}5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\2x_1 + 7x_2 + x_3 &= -13, \\x_1 + x_2 - 8x_3 &= 7\end{aligned}$$

с преобладанием диагональных элементов.

2. Уравнения преобразуются так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов, но при этом коэффициенты  $\alpha_{ii}$  не обязательно равнялись нулю.

Например, систему

$$\begin{aligned}1,02x_1 - 0,15x_2 &= 2,7, \\0,8x_1 + 1,05x_2 &= 4\end{aligned}$$

можно записать в форме

$$\begin{aligned}x_1 &= -0,02x_1 + 0,15x_2 + 2,7, \\x_2 &= -0,8x_1 - 0,05x_2 + 4,\end{aligned}$$

для которой  $\|\alpha\|_1 = \max\{0,17; 0,85\} = 0,85 < 1$ .

3. Если  $\det A \neq 0$ , систему  $Ax = b$  следует умножить на матрицу  $D = A^{-1} - \varepsilon$ , где  $\{\varepsilon_{ij}\}$  — матрица с малыми по модулю элементами. Тогда получается система  $(A^{-1} - \varepsilon)Ax = Db$  или  $A^{-1}Ax - \varepsilon Ax = Db$ , которую можно записать в форме  $x = \alpha x + \beta$ , где  $\alpha = \varepsilon A$ ,  $\beta = Db$ . Если  $|\varepsilon_{ij}|$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , достаточно малы, условие сходимости выполняется.

### Методика решения задачи

1. Преобразовать систему  $Ax = b$  к виду  $x = \alpha x + \beta$  одним из описанных способов.

2. Задать начальное приближение решения  $x^{(0)}$  произвольно или положить  $x^{(0)} = \beta$ , а также малое положительное число  $\varepsilon$  (точность). Положить  $k = 0$ .

3. Вычислить следующее приближение  $x^{(k+1)}$  по формуле  $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$ .

4. Если выполнено условие  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$  или (1.14), процесс завершить и положить  $x_* \cong x^{(k+1)}$ . Иначе положить  $k = k + 1$  и перейти к п. 3.

**Пример 1.11.** Методом простых итераций с точностью  $\varepsilon = 0,01$  решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13. \end{aligned}$$

Предварительно определить число итераций.

□1. Так как  $|2| < |2| + |10|$ ,  $|1| < |10| + |1|$ ,  $|1| < |2| + |10|$ , условие (1.16) не выполняется. Переставим уравнения местами так, чтобы выполнялось условие преобладания диагональных элементов:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Получаем  $|10| > |1| + |1|$ ,  $|10| > |2| + |1|$ ,  $|10| > |2| + |2|$ . Выразим из первого уравнения  $x_1$ , из второго —  $x_2$ , из третьего —  $x_3$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,1 \cdot x_2 - 0,1 \cdot x_3 + 1,2, \\ x_2 &= -0,2 \cdot x_1 - 0,1 \cdot x_3 + 1,3, \\ x_3 &= -0,2 \cdot x_1 - 0,2 \cdot x_2 + 1,4; \end{aligned} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\|\alpha\|_1 = \max\{0,2; 0,3; 0,4\} = 0,4 < 1$ , следовательно, условие сходимости (теорема 1.1) выполнено.

По формуле (1.19) вычисляем число итераций, обеспечивающих заданную точность:

$$k+1 \geq \frac{-2 + \lg 0,6 - \lg 1,4}{\lg 0,4} = 5,95; \quad k \geq 4,95.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо выполнить не менее пяти итераций.

2. Зададим  $x^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}$ . В поставленной задаче  $\varepsilon = 0,01$ .

3. Выполним расчеты по формуле (1.13):

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}, \quad k=0,1,\dots,$$

или

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0,1x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,2; \\ x_2^{(k+1)} &= -0,2x_1^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,3; \quad k=0,1,\dots, \\ x_3^{(k+1)} &= -0,2x_1^{(k)} - 0,2x_2^{(k)} + 1,4; \end{aligned}$$

до выполнения условия окончания и результаты занесем в таблицу 1.4.

4. Расчет закончен, поскольку условие окончания  $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| = 0,0027 < \varepsilon$  выполнено.

Приближенное решение задачи:  $\mathbf{x}_* \approx (0,9996; 0,9995; 0,9993)^T$ . Очевидно, точное решение:  $\mathbf{x}_* = (1; 1; 1)^T$ .

На рисунке 1.4 показан характер сходимости  $x_3^{(k)}$  ( $k=0,1,2,3,4,5$ ) к  $x_{*3} = 1$ . Видно, что значения  $x_3^{(k)}$  получаются то больше, то меньше единицы, но с увеличением  $k$  все меньше отличаются от нее.

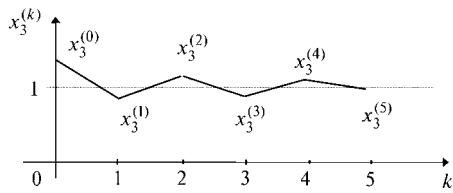


Рис. 1.4

Таблица 1.4

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ _1$
0	1,2000	1,3000	1,4000	—
1	0,9300	0,9200	0,900	0,5
2	1,0180	1,0240	1,0300	0,13
3	0,9946	0,9934	0,9916	0,0384
4	1,0015	1,0020	1,0024	0,0108
5	0,9996	0,9995	0,9993	0,0027 $< \varepsilon$

Таблица 1.5

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\ _1$
0	1,2000	0	0	—
1	1,2000	1,0600	1,1600	1,1600
2	0,9780	0,9440	0,9480	0,2220
3	1,0108	1,0096	1,0156	0,0676
4	0,9975	0,9963	0,9959	0,0133
5	1,0008	0,0009	1,0012	0,0053
6	0,9998	0,9997	0,9997	0,0015
7	1,0001	1,0001	1,0001	0,0004 $< \varepsilon$

Это соответствует *двусторонней сходимости* метода простых итераций для заданной задачи. В других задачах может проявляться *односторонняя сходимость*, когда стремление к  $x_{*i}$  осуществляется с одной стороны от  $x_{*i}$ .

Приведем результаты расчетов для другого начального приближения  $x^{(0)} = (1, 2; 0; 0)^T$  и  $\varepsilon = 0,001$  (табл. 1.5).

Приближенное решение задачи:  $x_* \approx (1,0001; 1,0001; 1,0001)^T$ . ■

### 1.3.2. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Этот метод является модификацией метода простых итераций и в некоторых случаях приводит к более быстрой сходимости.

Итерации по методу Зейделя отличаются от простых итераций (1.13) тем, что при нахождении  $i$ -й компоненты  $(k+1)$ -го приближения сразу используются уже найденные компоненты  $(k+1)$ -го приближения с меньшими номерами  $1, 2, \dots, i-1$ . При рассмотрении развернутой формы системы итерационный процесс записывается в виде

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} &= \alpha_{21} \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2, \\ x_3^{(k+1)} &= \alpha_{31} \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{32} \boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{33}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(k)} + \beta_3, \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \alpha_{n1} \boxed{x_1^{(k+1)}} + \alpha_{n2} \boxed{x_2^{(k+1)}} + \alpha_{n3} \boxed{x_3^{(k+1)}} + \dots + \alpha_{nn-1} \boxed{x_{n-1}^{(k+1)}} + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений, что показано в записи (1.20) стрелками.

**Теорема 1.4** (о достаточном условии сходимости метода Зейделя).

Если для системы  $x = \alpha x + \beta$  какая-либо норма матрицы  $\alpha$  меньше единицы, т. е.  $\|\alpha\|_s < 1$  ( $s \in \{1, 2, 3\}$ ), то процесс последовательных приближений (1.20) сходится к единственному решению исходной системы  $Ax = b$  при любом начальном приближении  $x^{(0)}$ .

Записывая (1.20) в матричной форме, получаем

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + \beta, \quad (1.21)$$

где  $L, U$  являются разложениями матрицы  $\alpha$ :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Преобразуя (1.21) к виду  $x = \alpha x + \beta$ , получаем матричную форму итерационного процесса метода Зейделя:

$$x^{(k+1)} = (E - L)^{-1}Ux^{(k)} + (E - L)^{-1}\beta. \quad (1.22)$$

Тогда достаточное, а также необходимое и достаточное условия сходимости будут соответственно такими (см. теоремы 1.1 и 1.2):

$$\|\alpha\| = \|(E - L)^{-1}U\| < 1, \quad |\lambda_i(\alpha)| = |\lambda_i((E - L)^{-1}U)| < 1.$$

#### Замечания

1. Для обеспечения сходимости метода Зейделя требуется преобразовать систему  $Ax = b$  к виду  $x = \alpha x + \beta$  с преобладанием диагональных элементов в матрице  $\alpha$  (см. метод простых итераций).

Например, в системе

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

диагональные элементы преобладают, так как  $|2| > 1, |-2| > 1$ .

Соотношения метода Зейделя (1.20) принимают вид

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{x_2^{(k)}}{2} + 1, \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{x_1^{(k+1)}}{2} + 1. \end{aligned}$$

Выберем в качестве начального приближения  $x^{(0)} = (0; 0)^T$  (рис. 1.5a). Тогда  $x_1^{(1)} = -\frac{x_2^{(0)}}{2} + 1 = 1$ . Так как при этом  $x_2^{(0)} = 0$ , то вычислению  $x_1^{(1)}$  соответствует движение по горизонтали до пересечения с прямой, описываемой первым уравнением. Далее  $x_2^{(1)} = \frac{x_1^{(1)}}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ . Вычислению  $x_2^{(1)}$  соответствует движение по вертикали до пересечения с прямой, описываемой вторым уравнением. Продолжая вычисления, получаем  $x_1^{(2)} = -\frac{x_2^{(1)}}{2} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$ ,  $x_2^{(2)} = \frac{x_1^{(2)}}{2} + 1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$  и т. д. В результате имеем процесс, *сходящийся* к точке  $x_* = \left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)^T$ .

Переставим уравнения в системе:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned}$$

В полученной системе диагональные элементы не преобладают. Уравнения метода Зейделя имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 2x_2^{(k)} - 2, \\ x_2^{(k+1)} &= -2x_1^{(k+1)} + 2. \end{aligned}$$

При  $x^{(0)} = (0; 0)^T$  получаем  $x_1^{(1)} = -2$ ,  $x_2^{(1)} = 6$  и т. д. В результате имеем расходящийся процесс (рис. 1.5б).

2. Условие преобладания диагональных элементов является достаточным для сходимости, но не является необходимым.

Например, в системе

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 3, \\x_1 - 4x_2 &= -3\end{aligned}$$

в первом уравнении диагональный элемент не является преобладающим, а процесс итераций по методу Зейделя сходится (рис. 1.6).

3. Процесс (1.20) называется *последовательным итерированием*, так как на каждой итерации полученные из предыдущих уравнений значения подставляются в последующие. Как правило, метод Зейделя обеспечивает лучшую

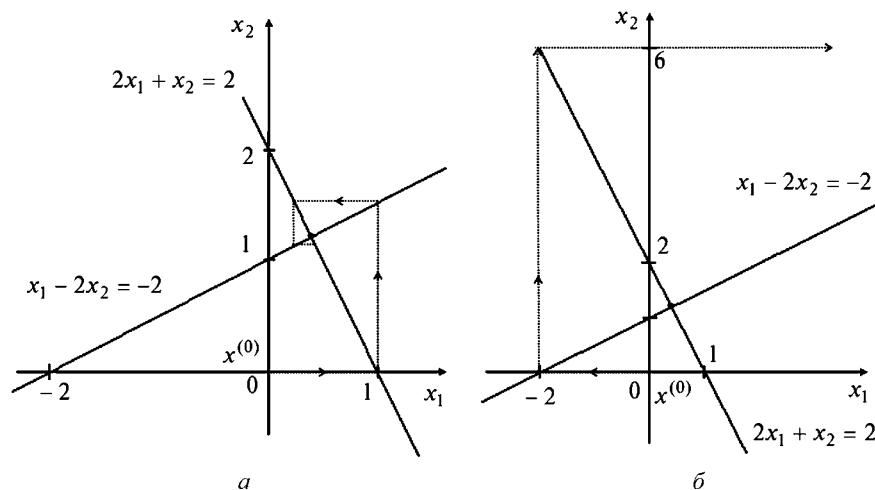


Рис. 1.5

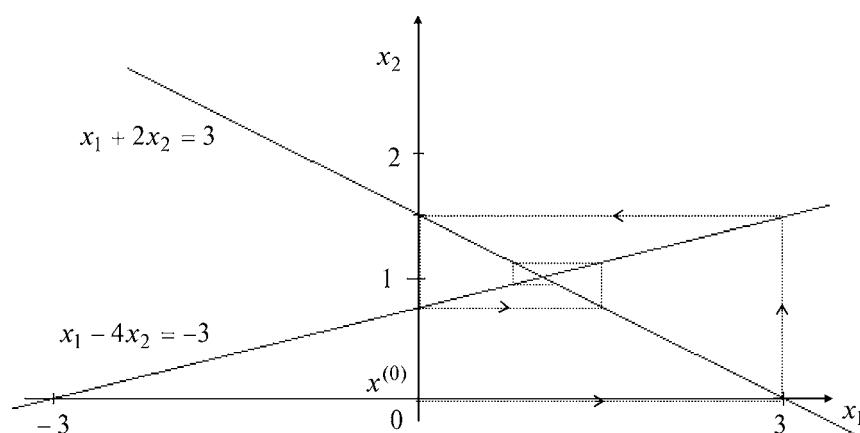


Рис. 1.6

сходимость, чем метод простых итераций (за счет накопления информации, полученной при решении предыдущих уравнений). Метод Зейделя может сходиться, если расходится метод простых итераций, и наоборот.

4. При расчетах на ЭВМ удобнее пользоваться формулой (1.22).

5. Преимуществом метода Зейделя, как и метода простых итераций, является его *самоисправляемость*.

6. Метод Зейделя имеет преимущества перед методом простых итераций, так как он всегда сходится для *нормальных* систем линейных алгебраических уравнений, т. е. таких систем, в которых матрица  $A$  является симметрической и положительно определенной. Систему линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей  $A$  всегда можно преобразовать к нормальной, если ее умножить слева на матрицу  $A^T$ . Таким образом, система  $A^T A x = A^T b$  является нормальной, а матрица  $A^T A$  — симметрической.

#### Методика решения задачи

1. Преобразовать систему  $Ax = b$  к виду  $x = \alpha x + \beta$  одним из описанных способов.

2. Задать начальное приближение решения  $x^{(0)}$  произвольно или положить  $x^{(0)} = \beta$ , а также малое положительное число  $\varepsilon$  (точность). Положить  $k = 0$ .

3. Произвести расчеты по формуле (1.20) или (1.21) и найти  $x^{(k+1)}$ .

4. Если выполнено условие окончания  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$ , процесс завершить и положить  $x_* \cong x^{(k+1)}$ . Иначе положить  $k = k + 1$  и перейти к п. 3.

**Пример 1.12.** Методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0,001$  решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 14, \\ 10x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13. \end{aligned}$$

□1. Приведем систему  $Ax = b$  к виду  $x = \alpha x + \beta$  так же, как в примере 1.11:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,1 \cdot x_2 - 0,1 \cdot x_3 + 1,2, \\ x_2 &= -0,2 \cdot x_1 - 0,1 \cdot x_3 + 1,3, \\ x_3 &= -0,2 \cdot x_1 - 0,2 \cdot x_2 + 1,4; \end{aligned} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 & -0,1 \\ -0,2 & 0 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,3 \\ 1,4 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\|\alpha\|_1 = \max\{0,2; 0,3; 0,4\} = 0,4 < 1$ , условие сходимости выполняется.

2. Зададим  $x^{(0)} = (1,2; 0; 0)^T$ . В поставленной задаче  $\varepsilon = 0,001$ .

Таблица 1.6

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _1$
0	1,2000	0	0	—
1	1,2000	1,0600	0,9480	1,0600
2	0,9992	1,0054	0,9991	0,1008
3	0,9996	1,0002	1,0000	0,0052
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,0004 < $\varepsilon$

3. Выполним расчеты по формуле (1.20):

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= -0,1x_2^{(k)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,2; \\x_2^{(k+1)} &= -0,2x_1^{(k+1)} - 0,1x_3^{(k)} + 1,3; \quad k = 0,1,\dots, \\x_3^{(k+1)} &= -0,2x_1^{(k+1)} - 0,2x_2^{(k+1)} + 1,4;\end{aligned}$$

и результаты занесем в таблицу 1.6.

Очевидно, найденное решение  $x_* = (1; 1; 1)^T$  является точным.

4. Расчет завершен, поскольку условие окончания  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = 0,0004 < \varepsilon$  выполнено. ■

**Пример 1.13.** Методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0,005$  решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}4x_1 - x_2 + x_3 &= 4, \\x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 9, \\-x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 2.\end{aligned}$$

□1. Так как  $|4| > |-1| + |1|$ ,  $|6| > |1| + |2|$ ,  $|5| > |-1| + |-2|$ , в данной системе диагональные элементы преобладают. Выразим из первого уравнения  $x_1$ , из второго —  $x_2$ , из третьего —  $x_3$ :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + 1, \\x_2 &= -\frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{3}{2}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}. \\x_3 &= \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5};\end{aligned}$$

2. Зададим  $x^{(0)} = (0; 0; 0)^T$ . В поставленной задаче  $\varepsilon = 0,005$ .

3. Выполним расчеты по формулам (1.20):

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{4}x_2^{(k)} - \frac{1}{4}x_3^{(k)} + 1; \\x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{6}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{3}{2}; \quad k = 0,1,\dots, \\x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{2}{5}x_2^{(k+1)} + \frac{2}{5};\end{aligned}$$

и результаты занесем в таблицу 1.7.

Таблица 1.7

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _1$
0	0	0	0	—
1	1,0000	1,3333	1,1333	1,3333
2	1,0500	0,9473	0,9889	0,3860
3	0,9896	1,0050	0,9999	0,0604
4	1,0010	0,9999	1,0000	0,0114
5	1,0000	1,0000	1,0000	0,0010 < $\varepsilon$

Очевидно, найденное решение  $x_* = (1; 1; 1)^T$  является точным.

4. Расчет завершен, поскольку условие окончания  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = 0,001 < \varepsilon$  выполнено. ■

**Пример 1.14.** Для системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 3x_1 + 4x_2 &= 7 \end{aligned}$$

построить сходящийся итерационный процесс.

□1. Матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  этой системы не имеет диагонального преобразования. Достаточное условие сходимости метода простых итераций  $\|\alpha\| < 1$  не выполняется. Поэтому сначала проведем нормализацию исходной СЛАУ с помощью умножения слева на матрицу  $A^T$ . Проделав умножение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

получим:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 14x_2 &= 24, \\ 14x_1 + 20x_2 &= 34. \end{aligned}$$

Полученная матрица  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$  является симметрической и положительно определенной, так как все ее угловые миноры строго положительны:  $\Delta_1 = 10 > 0$ ,  $\Delta_2 = |A| = 200 - 14^2 = 4 > 0$ . Поэтому система является нормальной, а для нее метод Зейделя сходится.

2. Положим  $x^{(0)} = (2,4; 1,02)^T$ .

3. Расчеты произведем по формулам (1.20):

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -1,4x_2^{(k)} + 2,4, \\ x_2^{(k+1)} &= -0,7x_1^{(k+1)} + 1,7. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,7 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1,4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 1,7 \end{pmatrix}.$$

Последовательные приближения, получаемые методом Зейделя, приведены в таблице 1.8.

Таблица 1.8

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ _1$
0	2,40000	1,02000	—
1	0,97200	1,01960	1,42800
2	0,97256	1,019208	0,00056
3	0,97311	1,018823	0,00055
4	0,97365	1,018445	0,00054
5	0,97418	1,018076	0,00053

Из таблицы 1.8 видно, что норма разности между двумя последовательными приближениями с увеличением номера итерации уменьшается, что характеризует сходящийся процесс (этот вывод относится ко всем приведенным примерам). Видно также, что, начиная со 2-й итерации,  $x_1^{(k)}$  и  $x_2^{(k)}$  с увеличением  $k$  увеличиваются и уменьшаются соответственно и стремятся к верному (точному) решению:  $x_{1*} = 1$ ;  $x_{2*} = 1$ . ■

**Пример 1.15.** Решить систему

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2, \\2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2, \\8x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 11, \\x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7\end{aligned}$$

методами простых итераций и Зейделя.

□1. Переставляя уравнения местами, преобразуем систему к виду с преобладанием диагональных элементов:

$$\begin{aligned}8x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 11, \\x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7, \\2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2, \\x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2.\end{aligned}$$

Так как  $|8| > |-1| + |-1| + |2|$ ,  $|6| > |1| + |-2| + |-2|$ ,  $|-5| > |2| + |1| + |1|$ ,  $|-4| > |1| + |-1| + |1|$ , то условие преобладания диагональных элементов выполняется.

2. Выразим из первого уравнения  $x_1$ , из второго —  $x_2$ , из третьего —  $x_3$ , а из четвертого —  $x_4$ :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{11}{8}, \\x_2 &= -\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{7}{6}, \\x_3 &= \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}, \\x_4 &= \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. Зададим начальное приближение  $x^{(0)} = (0; 0; 1; 2)^T$  и  $\varepsilon = 0,001$ .

Расчеты методом простых итераций выполним по следующим формулам (результаты приведены в таблице 1.9, где  $\Delta = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_1$ ):

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} - \frac{1}{4}x_4^{(k)} + \frac{11}{8}, \\x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{6}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{1}{3}x_4^{(k)} - \frac{7}{6}, \\x_3^{(k+1)} &= \frac{2}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{1}{5}x_4^{(k)} - \frac{2}{5}, \\x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Таблица 1.9

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1$	0	1	1,1667	1,0562	0,9708	0,9989	1,0045	1,0018	0,9992	0,99994	1,0001
$x_2$	0	-0,1667	-1,0833	-1,0583	-0,9760	-0,9752	-1,0021	-1,0019	-0,9995	-0,9993	-1,0000
$x_3$	1	0	0,1166	0,0083	0,02916	-0,0007	0,003	0,00006	0,0008	-0,00004	0,00009
$x_4$	2	0,75	0,7916	1,0916	1,0307	0,9940	0,9933	1,0025	1,0009	0,99986	0,99979
$\Delta$	—	1,25	0,9166	0,3	0,0854	0,0367	0,0269	0,009	0,0024	0,00104	0,0007

Расчеты методом Зейделя выполним по формулам (результаты приведены в табл. 1.10):

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} - \frac{1}{4}x_4^{(k)} + \frac{11}{8}, \\x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{6}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{3}x_3^{(k)} + \frac{1}{3}x_4^{(k)} - \frac{7}{6}, \\x_3^{(k+1)} &= \frac{2}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{5}x_2^{(k+1)} + \frac{1}{5}x_4^{(k)} - \frac{2}{5}, \\x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{4}x_2^{(k+1)} + \frac{1}{4}x_3^{(k+1)} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Таблица 1.10

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1$	0	1	1,1458	1,0052	1,0059	1,0004	1,00025	1,0002
$x_2$	0	-0,3333	-0,9409	-0,9713	-0,9967	-0,9988	-0,9998	-0,9999
$x_3$	1	0,3333	0,0534	0,0148	0,0026	0,00067	0,000125	0,00003
$x_4$	2	0,9166	1,0351	0,9978	1,0013	0,99995	1,00005	0,999999
$\Delta$	—	1,083	0,6075	0,1406	0,0254	0,0055	0,0011	0,00023

Методом простых итераций получено приближенное решение  $x_* \approx (1,0001; -1,0000; 0,00009; 0,99979)^T$ , а методом Зейделя решение:  $x_* \approx (1,0002; -0,9999; 0,00003; 0,99999)^T$ . Точное решение:  $x_* = (1; -1; 0; 1)^T$ . Очевидно, метод Зейделя сошелся за меньшее число итераций. ■

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти численное решение систем, характеризующихся расширенными матрицами  $A_1$ , методом Гаусса единственного деления:

$$\begin{array}{lll}1) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 10 & 6 \end{pmatrix}; & 2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; & 3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \\4) \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}; & 5) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}; & 6) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix};\end{array}$$