В таблице 19 приведен численный расчет по схеме (22) того же примера, который рассмотрен в таблице 18 (п.5). Из таблицы видно, что схема второго порядка точности дает существенно лучшие результаты, чем схема ломаных; уже расчет на грубой сетке с $h=0{,}5$ можно считать удовлетворительным.

Методом Рунге—Кутта можно строить схемы различного порядка точности. Например, схема ломаных (15) есть схема Рунге—Кутта первого порядка точности. Наиболее употребительны схемы четвертого порядка точности, образующие семейство четырехчленных схем. Приведем без вывода ту из них, которая записана в большинстве стандартных программ ЭВМ:

$$\begin{gathered} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \\ k_1=f(x_n,\ y_n), \quad k_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3=f\left(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4=f(x_n+h,\ y_n+hk_3) \end{gathered} \tag{24}$$

(при величинах k_m и шаге h следует также ставить индекс сетки n, но для простоты записи мы его опускаем).

Формулы более высокого порядка точности практически не употребляются. Пятичленные формулы имеют всего лишь четвертый порядок точности; шестичленные имеют шестой порядок, но слишком громоздки. Кроме того, высокий порядок реализуется лишь при наличии у правой части непрерывных производных соответствующего порядка.

Схемы Рунге—Кутта имеют ряд важных достоинств. 1) Все они (кроме схемы ломаных) имеют хорошую точность. 2) Они являются явными, т. е. значение y_{n+1} вычисляется по ранее найденным значениям за определенное число действий по определенным формулам. 3) Все схемы допускают расчет переменным шагом; значит, нетрудно уменьшить шаг там, где функция быстро меняется, и увеличить его в обратном случае. 4) Для начала расчета достаточно выбрать сетку x_n и задать значение $y_0=\eta$; далее вычисления идут по одним и тем же формулам. Все эти свойства схем очень ценны при расчетах на ЭВМ.

На случай систем уравнений схемы Рунге—Кутта легко переносятся, как во всех других методах, при помощи формальной замены y, $f(x,\ y)$ на $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{f}(x,\ \boldsymbol{y})$. Нетрудно произвести покомпонентную запись этих схем. Например, для системы двух уравнений

$$\begin{gathered} u'(x)=f(x,\ u(x),\ v(x)), \\ v'(x)=g(x,\ u(x),\ v(x)), \end{gathered} \tag{25}$$

обозначая через y, z приближенные значения функций $u(x)$,

$v(x)$, запишем аналогичную (24) четырехчленную схему следующим образом:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}h(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$
$$z_{n+1}=z_n+\frac{1}{6}h(q_1+2q_2+2q_3+q_4), \tag{26а}$$

где

$$k_1=f(x_n,\ y_n,\ z_n), \quad q_1=g(x_n,\ y_n,\ z_n),$$
$$k_2=f\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hk_1,\ z_n+\frac{1}{2}hq_1\right),$$
$$q_2=g\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hk_1,\ z_n+\frac{1}{2}hq_1\right),$$
$$k_3=f\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hk_2,\ z_n+\frac{1}{2}hq_2\right), \tag{26б}$$
$$q_3=g\left(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hk_2,\ z_n+\frac{1}{2}hq_2\right),$$
$$k_4=f(x_n+h,\ y_n+hk_3,\ z_n+hq_3),$$
$$q_4=g(x_n+h,\ y_n+hk_3,\ z_n+hq_3).$$

Напомним, что именно эта схема четвертого порядка точности (разумеется, записанная для системы произвольного числа уравнений) лежит в основе большинства стандартных программ численного решения задачи Коши на ЭВМ.

Замечание. Погрешности различных схем Рунге—Кутта связаны с максимумами модулей соответствующих производных $f(x, u)$ громоздкими выражениями типа (18)—(19). Наглядное представление о величине этих погрешностей можно получить в одном частном случае, когда $f=f(x)$. При этом дифференциальное уравнение сводится к квадратуре, а все схемы численного интегрирования переходят в квадратурные формулы. Легко убедиться, что схема (22) переходит в формулу средних (4.16), схема (23)—в формулу трапеций (4.7) с шагом h, а схема (24) — в формулу Симпсона (4.11) с шагом $h/2$. Напомним, что мажоранты остаточных членов этих формул на равномерной сетке с указанными шагами соответственно равны

$$R_{\text{сред}}=\frac{b-a}{24}h^2\max|f''|, \quad R_{\text{трап}}=\frac{b-a}{12}h^2\max|f''|,$$
$$R_{\text{симп}}=\frac{b-a}{2880}h^4\max|f^{\text{IV}}|. \tag{27}$$

Численные коэффициенты в остаточных членах (27) малы; это является одной из причин хорошей точности схем Рунге—Кутта.

Какими из формул Рунге—Кутта целесообразно пользоваться в каждом конкретном случае и как выбирать шаг сетки?

Если правая часть дифференциального уравнения непрерывна и ограничена вместе со своими четвертыми производными (и эти производные не слишком велики), то хорошие результаты дает схема четвертого порядка (24) благодаря очень малому коэффициенту в остаточном члене и быстрому возрастанию точности при уменьшении шага. Если же правая часть не имеет указанных производных, то предельный порядок точности этой схемы не может реализоваться. Тогда не худшие (хотя, по-видимому, и не лучшие) результаты дают схемы меньшего порядка точности, равного порядку имеющихся производных; например, для двукратно непрерывно дифференцируемых правых частей — несложные схемы (21)—(23).

Шаг сетки следует выбирать настолько малым, чтобы обеспечить требуемую точность расчета; других ограничивающих шаг условий в методе Рунге—Кутта нет. Но выражения остаточных членов типа (18)—(19) слишком громоздки; поэтому априорными оценками точности для выбора шага в практических расчетах не пользуются. Удобнее делать расчеты со сгущением сетки, давая апостериорную оценку точности (подробнее это будет рассмотрено в п. 11).

Встречаются важные задачи, в которых функции являются достаточно гладкими, но настолько быстро меняющимися, что схемы Рунге—Кутта как низкого, так и высокого порядка точности требуют неприемлемо малого шага для получения удовлетворительного результата. Такие задачи требуют использования (а нередко — разработки) специальных методов, ориентированных на данный узкий класс задач.

7. Метод Адамса. Будем рассматривать правую часть уравнения $f(x, u)$ не на всей плоскости ее аргументов x, u, а только на определенной интегральной кривой $u(x)$, соответствующей искомому решению. Тогда она будет функцией только одного аргумента x; обозначим ее через

$$F(x) \equiv f(x, u(x)).$$

Пусть нам уже известно приближенное решение в нескольких точках сетки: $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-m}$. Тогда в этих точках известны также $F(x_k) = f(x_k, y_k)$. В окрестности этих узлов можно приближенно заменить $F(x)$ интерполяционным многочленом; запишем его для неравномерной сетки в форме Ньютона (2.8):

$$F(x) = F(x_n) + (x - x_n) F(x_n, x_{n-1}) + \\ + (x - x_n)(x - x_{n-1}) F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}) + \ldots \quad (28)$$