Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Отчет по лабораторной работе №1
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Кириллова А.А.
Руководитель
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

1.1 Линейная и полиномиальная регрессия

Дана задача вида $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta$, в общей регрессионной постановке необходимо найти вектор β и восстановить зависимости между рассматриваемыми величинами. В данной работе рассматривается вопрос установления особенности матрицы $\mathbf{X}$, так как в этом случае рассматриваемая ИСЛАУ становится неразрешимой.

Дано

$$\text{mid}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Необходимо рассмотреть матрицу вида

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & 1 \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

и определить, при каком значении ε она содержит особенные точечные матрицы.

1.2 Решение задач томографии

При решении задач томографии появляются системы типа $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$. В данной работе необходимо рассмотреть матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix} \tag{3}$$

и определить, при каком радиусе она содержит особенную матрицу.

1.3 Глобальная оптимизация

Для функции МакКормика

$$f(x, y) = \sin(x+y) + (x-y)^2 - 1.5x + 2.5y + 1, \tag{4}$$

имеющей один глобальный экстреммум, и функции Химмельблау

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2, \tag{5}$$

имеющей 4 равнозначных глобальных экстремума, необходимо провести вычисления по поиску глобального минимума с помощью простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации.

2 Теория

2.1 Выяснение радиуса элементов матрицы, при котором она становится особенной

Интервальная матрица $\mathbf{A}$ - особенная, если $\exists A \in \mathbf{A}:\ \det(A) = 0$, иначе - неособенная.

$\text{rad}\,\mathbf{A} = \{A \mid\ a_{ij} = \text{rad}\,\mathbf{a}_{ij}\}$ - радиус интервальной матрицы $\mathbf{A}$, $\text{mid}\,\mathbf{A} = \{A \mid\ a_{ij} = \text{mid}\,\mathbf{a}_{ij}\}$ - середина интервальной матрицы $\mathbf{A}$.

$\text{vert}\,\mathbf{A} = \{A \in \mathbf{A} \mid A = \{a_{ij}\},\ a_{ij} \in \{\underline{\mathbf{a}_{ij}}, \overline{\mathbf{a}_{ij}}\}\}$ - множество вершин интервальной матрицы $\mathbf{A}$.

$\sigma(A)$ - множество сингулярных чисел матрицы, вычисляемых как арифметический квадратный корень из собственных значений матрицы AA^T.

2.1.1 Критерий Баумана

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ неособенна $\Leftrightarrow\ \forall A', A'' \in \text{vert}\,\mathbf{A}\ \det(A') \cdot \det(A'') > 0$

2.1.2 Признак Румпа

$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\sigma_{\max}(\operatorname{rad}\mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\operatorname{mid}\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A}$ неособенна.

2.2 Глобальная оптимизация

Суть простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации похожа на алгоритм дихотомии, только для многомерного случая. Имеется рабочий список рассматриваемых брусьев, для каждого из которых вычислено целевое значение функции (в интервальном смысле). На каждой итерации метод выбирает из этого списка брус, на котором нижняя оценка значения функции наименьшая. Этот брус удаляется из списка, после чего туда добавляются два новых, которые получились из исходного путем дробления его самой длинной компоненты пополам (от нижней границы до середины и от середины до верхней границы). На этих брусьях вычисляется интервальная оценка целевой функции, выполняется переход на новую итерацию.

3 Реализация

Для осуществления вычислений и визуализации результатов использовалась среда Matlab с библиотекой интервальной арифметики IntLab.

4 Результаты

4.1 Линейная и полиномиальная регрессия

Для того, чтобы точечная матрица была особенной, достаточно линейной зависимости ее строк. В случае рассматриваемой матрицы (2) это означает, что нам достаточно добиться непустого пересечения интервалов $\mathbf{x}_{11}$ и $\mathbf{x}_{21}$. Очевидно, что это достижимо при $\varepsilon \geq 0.05$. Проверим, что при $\varepsilon = 0.05$ найдется особенная точечная матрица:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05] & 1 \\ [1.05, 1.15] & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 1.05 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{X},\ \det(X) = 0$$

Воспользуемся признаком Румпа.

$$\operatorname{rad}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\operatorname{rad}\mathbf{X}) = \{0, \varepsilon\sqrt{2}\},\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma_{\max}(\operatorname{rad}\mathbf{A}) = \varepsilon\sqrt{2}$$

$$\sigma(\operatorname{mid}\mathbf{X}) = \left\{\sqrt{\frac{421 + 21\sqrt{401}}{200}}, \sqrt{\frac{421 - 21\sqrt{401}}{200}}\right\} \approx \{2.0512, 0.0488\} \Rightarrow \sigma_{\min}(\operatorname{mid}\mathbf{X}) = 0.0488$$

Можно сделать вывод, что при $\varepsilon\sqrt{2} < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0345$ матрица $\mathbf{X}$ не будет особенной.

Также воспользуемся критерием Баумана. Множество $\operatorname{vert}\mathbf{X}$ содержит 4 точечные матрицы. Обозначим их определители за Δ_i, $i = \overline{1,4}$ и сосчитаем.

$$\Delta_1 = -0.1 \quad \Delta_2 = 2\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_3 = -2\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_4 = -0.1$$

Из этих значений уникальными являются Δ_i, $i = \{1, 2, 3\}$. С помощью критерия Баумана можно найти значения ε, для которых рассматриваемая матрица будет неособенной, а так как критерий является необходимым и достаточным условием, то дополнение найденного множества будет описывать все особенные матрицы $\mathbf{A}$.

$\Delta_1 < 0\,\forall\varepsilon$. Следовательно, для выполнения критерия необходимо потребовать, чтобы все остальные определители тоже были меньше 0. Учитывая $\varepsilon > 0$, получаем множество $\varepsilon < 0.05$. Таким образом, матрица $\mathbf{X}$ особенна $\forall\varepsilon \geq 0.05$, что согласуется с предыдущими расчетами.

4.2 Задача томографии

Воспользуемся признаком Румпа.

$$\mathrm{rad}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \mathrm{mid}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) = \{0, 2\varepsilon\},\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) = 2\varepsilon$$

$$\sigma(\mathrm{mid}\mathbf{A}) = \left\{ \sqrt{\frac{421 + 21\sqrt{401}}{200}}, \sqrt{\frac{421 - 21\sqrt{401}}{200}} \right\} \approx \{2.0512, 0.0488\} \Rightarrow \sigma_{\min}(\mathrm{mid}\mathbf{A}) = 0.0488$$

Можно сделать вывод, что при $2\varepsilon < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0244$ матрица $\mathbf{A}$ не будет особенной.

Для решения задачи воспользуемся критерием Баумана. Множество vert $\mathbf{A}$ содержит 16 точечных матриц. Обозначим их определители за $\Delta_i,\ i = \overline{1, 16}$ и сосчитаем.

$$\Delta_1 = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_2 = -2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_3 = 2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_4 = 2\varepsilon^2 - 1.9\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_5 = -2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_6 = -0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_7 = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_8 = 4.1\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_9 = -4.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{10} = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{11} = -0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{12} = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_{13} = 2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{14} = 2\varepsilon^2 + 1.9\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{15} = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{16} = -0.1\varepsilon - 0.1$$

Из этих значений уникальными являются $\Delta_i,\ i = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 14\}$. С помощью критерия Баумана можно найти значения ε, для которых рассматриваемая матрица будет неособенной, а так как критерий является необходимым и достаточным условием, то дополнение найденного множества будет описывать все особенные матрицы $\mathbf{A}$.

Учитывая, что $\varepsilon > 0$, получаем $\Delta_6 < 0\ \forall\varepsilon$. Следовательно, для выполнения критерия необходимо потребовать, чтобы все остальные определители тоже были меньше 0. Получаем следующее множество решений:

$$(0,1)\cap(0,0.0456)\cap(0,1.095)\cap(0,1)\cap(0,\infty)\cap(0,0.0244)\cap(0,\infty)\cap(0,\infty)\cap(0,0.0456)\cap(0,0.05)$$

То есть матрица $\mathbf{A}$ неособенна тогда и только тогда, когда $\varepsilon < \frac{1}{41}$. То есть $\forall\varepsilon \geq \frac{1}{41}$ матрица $\mathbf{A}$ будет содержать особенные точечные матрицы. Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{41}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] & \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] \\ \left[1\frac{31}{410}, 1\frac{51}{410}\right] & \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{41} & \frac{40}{41} \\ 1\frac{31}{410} & 1\frac{1}{41} \end{pmatrix} \in \mathbf{A}, \quad \det(A) = 0$$

4.3 Глобальная оптимизация

4.3.1 Функция с одним экстремумом

Для функции (4) в качестве начального приближения был выбран брус $\begin{pmatrix} [-1.5,\ 4] \\ [-3,\ 4] \end{pmatrix}$. Для наглядности иллюстраций в этом и следующем численном эксперименте число итераций ограничено 200.

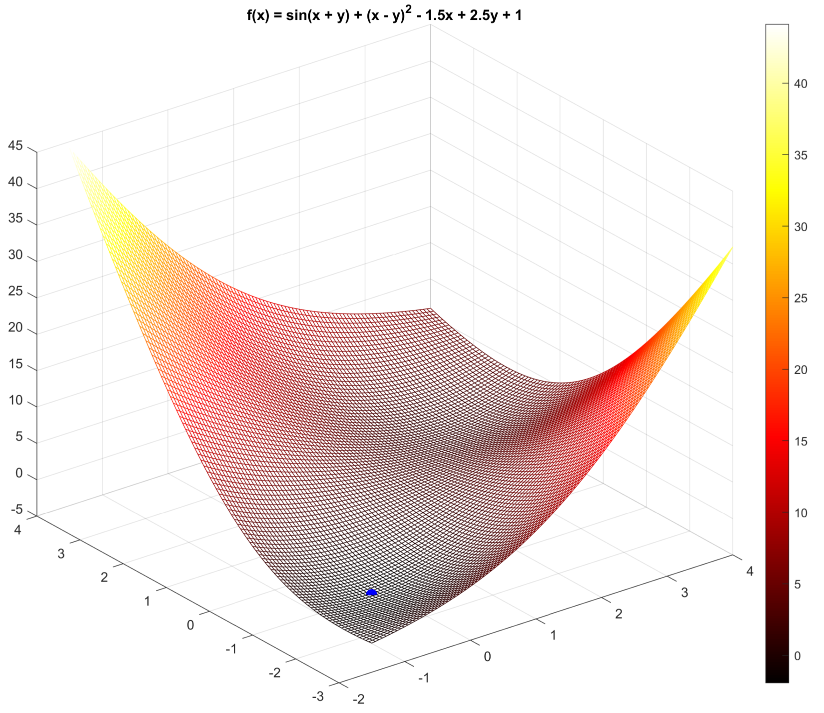

Рис. 1: График функции МакКормика (4)

Минимум изображен на графике синей точкой. Получены следующие результаты:

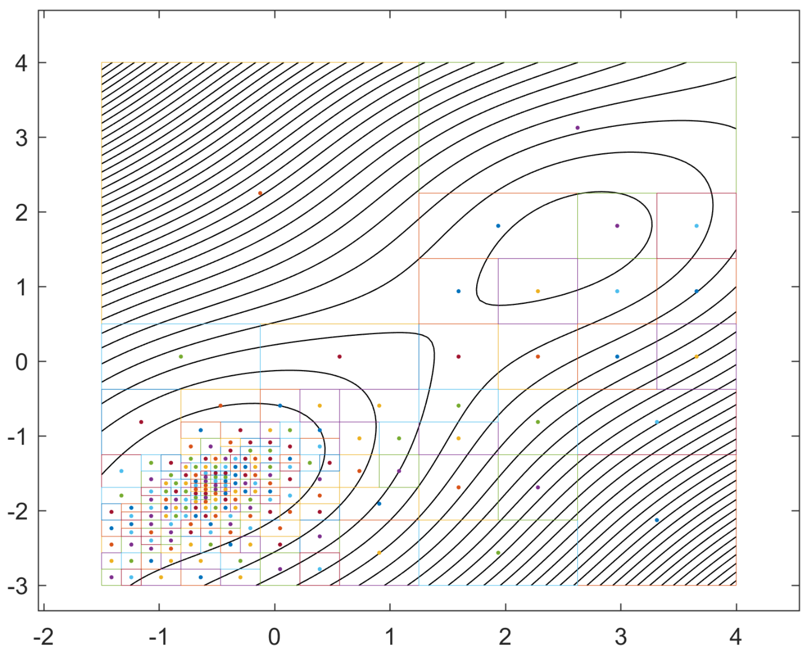

Рис. 2: Иллюстрация работы алгоритма для функции МакКормика (4)

Как видим, число брусьев сгущается по мере приближения к экстремуму. Также это явление наблюдается и около локального экстремума в окрестности точки $(2.5, 1.5)$.

В качестве ответа программа предлагает наименьшую нижнюю оценку значения функции за 200 итераций, поэтому в качестве итоговой оценки положения экстремума будет выбран брус, отвечающий этому значению $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [-0.3829, & -0.2968] \\ [-1.5782, & -1.4687] \end{pmatrix}$. Для него получаем значение функции $f(\mathbf{x}) = [-2.3019, -1.3809]$. Точное значение минимума - $f(-0.5471, -1.5471) = -1.9133$.

Проиллюстрируем работу алгоритма еще двумя графиками. Для их построения были взяты брусы из рабочего списка алгоритма. Для построения графика радиусов брусов бралась наибольшая компонента радиуса, так как в предложенном методе последующее дробление бруса производится по измерению, отвечающему наибольшей компоненте радиуса.

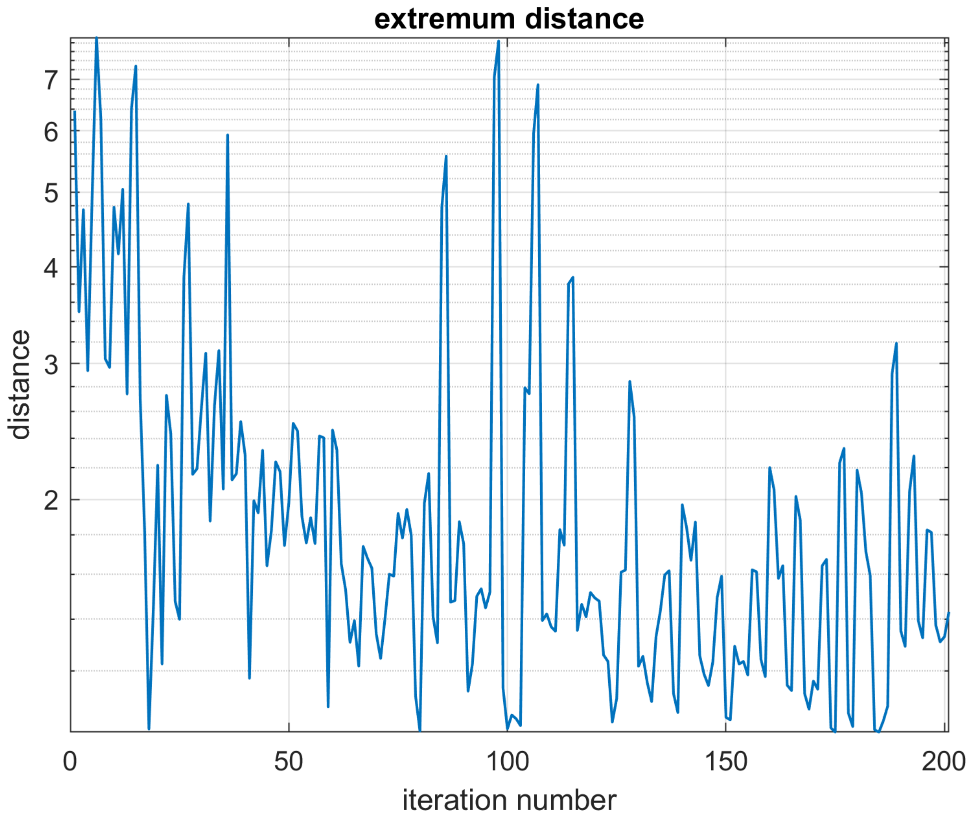

Рис. 3: Расстояние до точки экстремума для функции МакКормика (4)

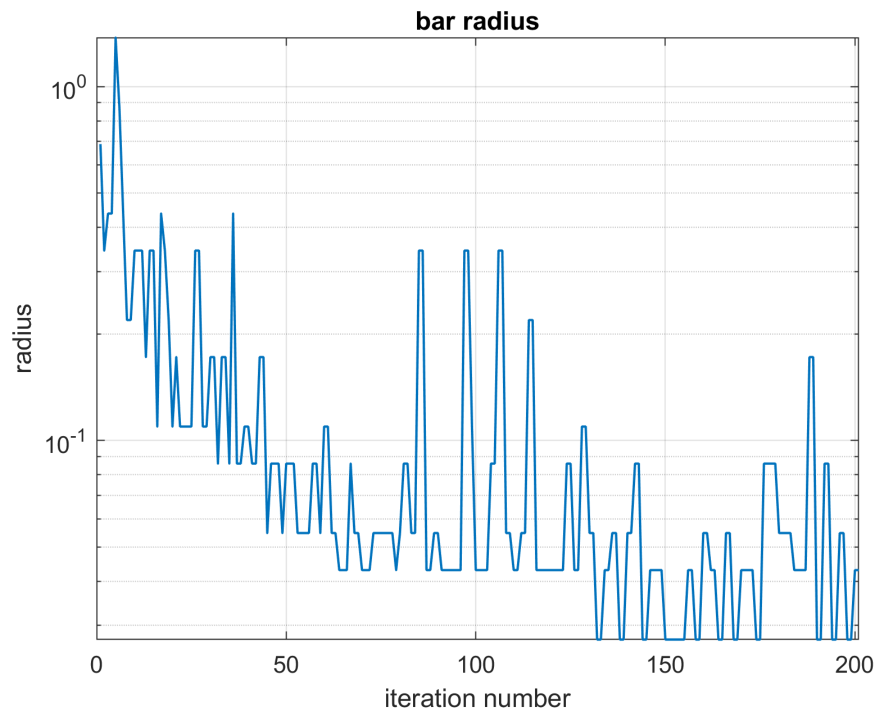

Рис. 4: Радиусы рабочих брусов для функции МакКормика (4)

4.3.2 Функция с несколькими экстремумами

Для функции (5) в качестве начального приближения был выбран брус $\begin{pmatrix} [-5,\ 5] \\ [-5,\ 5] \end{pmatrix}$.

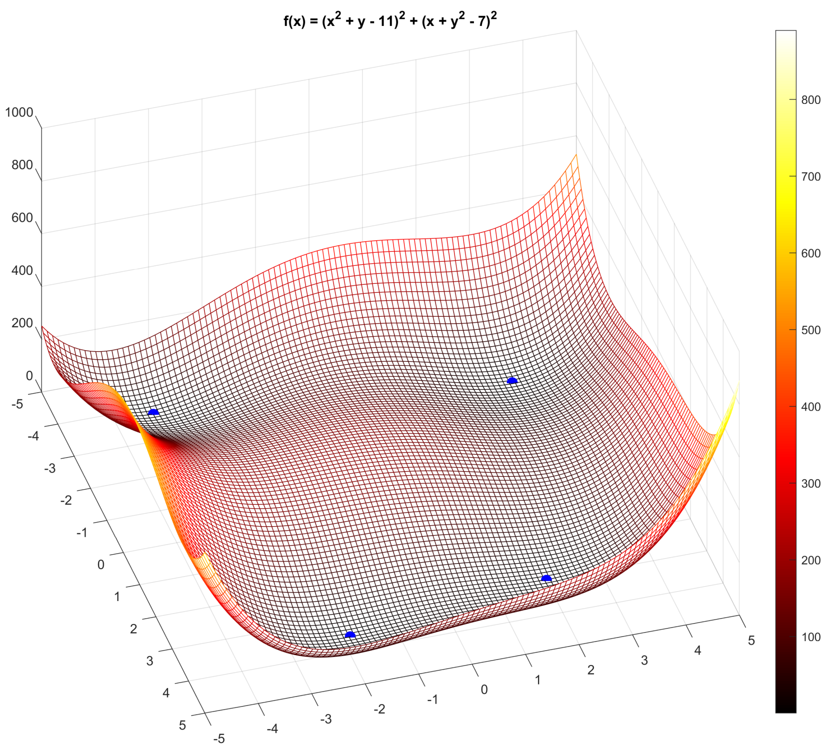

Рис. 5: График функции Химмельблау (5)

Функция содержит 4 глобальных экстремума в точках $(3, 2)$, $(-2.8051, 3.1313)$, $(-3.7793, -3.2831)$, $(3.5844, -1.8481)$, отмечены на графике синими точками. Получены следующие результаты:

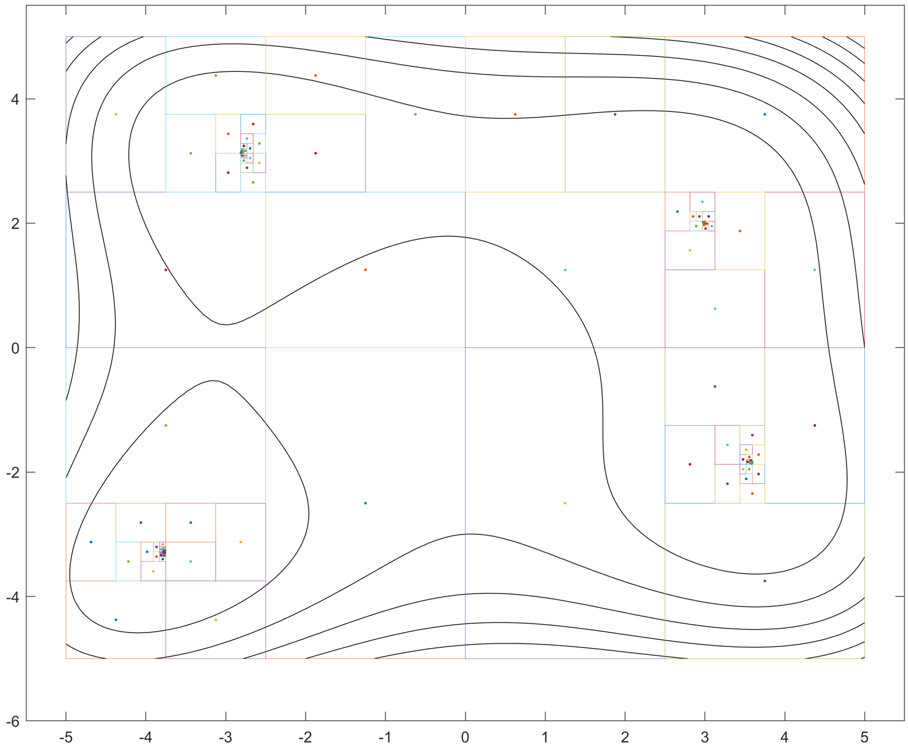

Рис. 6: Иллюстрация работы алгоритма для функции Химмельблау (5)

Возле всех 4 минимумов наблюдается сгущение брусьев. В качестве решения получен вырожденный брус $\mathbf{x} \approx \begin{pmatrix} [3,\ 3] \\ [2,\ 2] \end{pmatrix}$, являющийся точным (считая до 10^{-5}) расположением одного из экстремумов, $f(\mathbf{x}) \approx 0$. График расстояния до экстремума построен для ближайшего на каждой итерации экстремума.

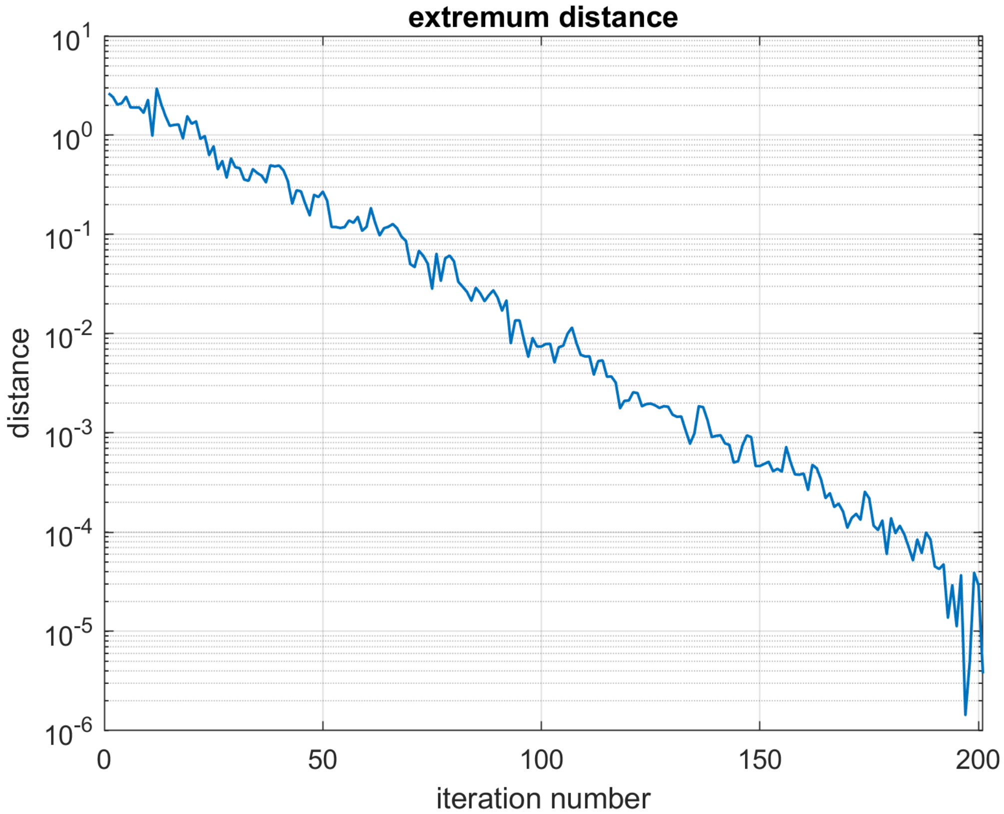

Рис. 7: Расстояние до точки экстремума для функции Химмельблау (5)

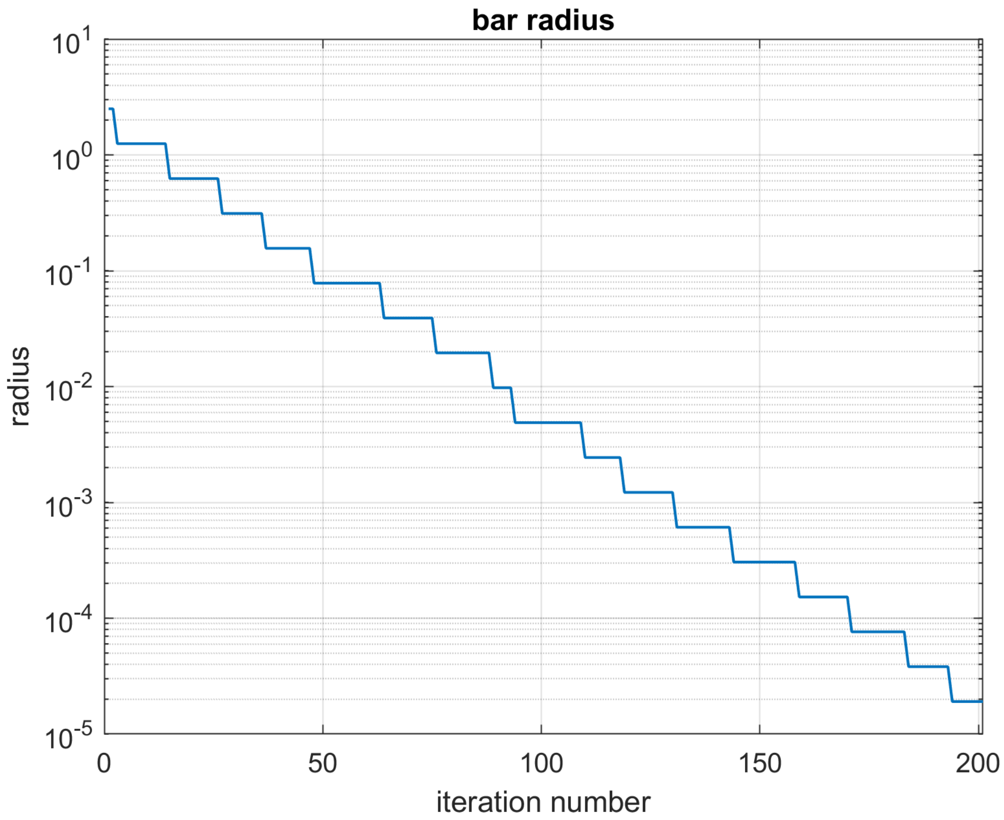

Рис. 8: Радиусы рабочих брусов для функции Химмельблау (5)

5 Обсуждение

5.1 особенность ИСЛАУ

В первой задаче при переходе от линейной регрессии к полиномиальной так же верно, что матрица особенна, если одна из точечных матриц особенна, что происходит в случае пересечения интервалов. При этом величина e, при которой матрица будет являться неособенной, может значительно уменьшиться, так как на эту величину будет налагаться большее количество условий. И чем меньше будут величины, входящие в mid Xn, тем меньше будет норма этой матрицы, следовательно, норма Фробениуса также будет уменьшаться. Это приведет к тому, что $\sigma_{min}(midXn)$ будет приближаться к 0. При увеличении количества интервальных коэффициентов с ненулевым радиусом в исходную ИСЛАУ быстро возрастает сложность оценивания особенности и неособенности матрицы, причем становится сложнее добиться неособенности матрицы, так как у строк матрицы больше шансов быть зависимыми

5.2 Интервальная глобальная оптимизация

Для обеих функций алгоритм нахождения минимума функции дал правильную оценку значения минимума функции, при этом чуть хуже оценил аргументы, сообщающие минимум. По изображению брусов так же можно увидеть, что ко многим минимумам сходимость хорошая. Скачкообразное поведение графиков объясняется самим алгоритмом: ведущий брус, который будет далее дробиться, выбирается на каждой итерации путем полного итерирования по рабочему списку, то есть не обязательно последний брус дает наилучшее приближение к минимуму. По этой причине монотонного убывания не наблюдается ни на одном из данных графиков.