Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Отчет по лабораторной работе №2
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Кириллова А.А.
Руководитель
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Список иллюстраций

Страница

1 Постановка задачи

1.1 Внешнее оценивание множества решений ИСЛАУ в $\mathbb{IR}$

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = [2,\ 4] \\ x_1 - [1,\ 2] \cdot x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Необходимо произвести оценку внешнего множества решений с помощью метода Кравчика и:

- Определить спектральный радиус матрицы
- Провести оценку начального бруса решения
- Проиллюстрировать положение брусов при итерациях
- Проиллюстрировать радиусы брусов при итерациях
- Проиллюстрировать расстояние центров брусов при итерациях до центра последнего бруса

1.2 Внешнее оценивание множества решений нелинейных задач в $\mathbb{IR}$

Дана нелинейная система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = [2,\ 4] \\ \frac{x_1}{x_2} = [1,\ 2] \end{cases} \tag{2}$$

Необходимо произвести оценку внешнего множества решений с помощью метода Кравчика и:

- Проиллюстрировать положение брусов при итерациях
- Проиллюстрировать радиусы брусов при итерациях
- Проиллюстрировать расстояние центров брусов при итерациях до центра последнего бруса

2 Теория

2.1 Внешнее множество решений

Под внешним множеством решений понимается объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}} = \{x \in R^n | \exists a \in \mathbf{a},\ \exists b \in \mathbf{b} :\ F(a, x) = b\}$$

2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика - это итерационная процедура уточнения двусторонней границы решений системы n уравнений с n неизвестными $F(x) = 0,\ x \in X \subset IR^n$, определенной на некотором брусе X. Данный метод позволяет не только произвести оценку, но и убедиться, что решений не существует.

Отображение $\mathcal{K}(X, \overline{x}) = \overline{x} - \Lambda \cdot F(\overline{x}) - (I - \Lambda \cdot L) \cdot (X - \overline{x})$ называется оператором Кравчика на X относительно точки $\overline{x}$. Если $\rho(I - \Lambda \cdot L) < 1$, то по теореме Шрёдера у отображения существует единственная неподвижная точка, являющаяся решением рассматриваемой системы уравнений.

Метод Кравчика заключается в построении последовательности $\{X^k\}_{k=0}^{\infty}$ по формуле

$$X^{k+1} = X^k \cap \mathscr{K}(X^k, \overline{x}^k)$$

Начальный брус, точки $\overline{x}$, предобуславливатель Λ и матрица L выбираются исходя из эмпирических соображений для каждой конкретной системы уравнений. Для решения задачи (2) будут использованы следующие формулы:

$$X^0 = \begin{pmatrix} [0.1,\ 5] \\ [0.1,\ 5] \end{pmatrix},\ \overline{x}^k = \mathrm{mid}\, X^k,\ \Lambda = \Lambda(x) = (\mathrm{mid}\, J(x))^{-1},\ L = L(x) = J(x)$$

где $J(x)$ - якобиан.

Частный случай метода Кравчика для ИСЛАУ выглядит следующим образом:

$$x^{k+1} = \big(\Lambda \cdot b + (I - \Lambda \cdot A) \cdot x^k\big) \cap x^k,$$

где A - матрица ИСЛАУ, b - вектор правой части. Для решения задачи (1) предобуславливатель будет выбран как $\Lambda = (\mathrm{mid}\, A)^{-1}$.

2.3 Выбор начального приближения

Для систем общего вида выбор начального бруса - отдельная задача, которая не поддается обобщению. Тем не менее, в случае ИСЛАУ справедливо следующее утверждение:

$$\eta = ||I - \Lambda \cdot A||_{\infty} < 1 \Rightarrow \Xi_{\mathrm{uni}} \subset \begin{pmatrix} [-\theta,\ \theta] \\ \cdots \\ [-\theta,\ \theta] \end{pmatrix},\ \theta = \frac{||\Lambda \cdot b||_{\infty}}{1 - \eta}$$

В качестве начального приближения при решении задачи (1) будет использована эта оценка внешнего множества решений.

3 Реализация

Для осуществления вычислений и визуализации результатов использовалась среда Matlab с библиотекой интервальной арифметики IntLab.

4 Результаты

4.1 Спектральный радиус $|I - \Lambda A|$

Для того, чтобы итерационный процесс сходился, необходимо, чтобы спектральный радиус матрицы $|I - \Lambda A|$ был меньше 1.

$$|I - \Lambda A| \approx \begin{pmatrix} 0 & 0.2857 \\ 0 & 0.1429 \end{pmatrix}$$

$$\rho(|I - \Lambda A|) \approx 0.1429 < 1$$

Итерационный процесс сходящийся, можно пользоваться методом Кравчика.

4.2 Оценка бруса начального положения

$||I - \Lambda \cdot A||_{\infty} \approx 0.2857 < 1$. Следовательно, можно воспользоваться описанным выше способом выбора X^0.

$$\theta = \frac{||\Lambda \cdot b||_{\infty}}{1 - \eta} \approx 2.4 \Rightarrow X^0 = \begin{pmatrix} [-2.4,\ 2.4] \\ [-2.4,\ 2.4] \end{pmatrix}$$

4.3 Результаты применения метода Кравчика для задачи (1)

Если построить 4 прямые и найти область, образованную их пересечением, то получим Ξ_{uni} для рассматриваемой задачи.

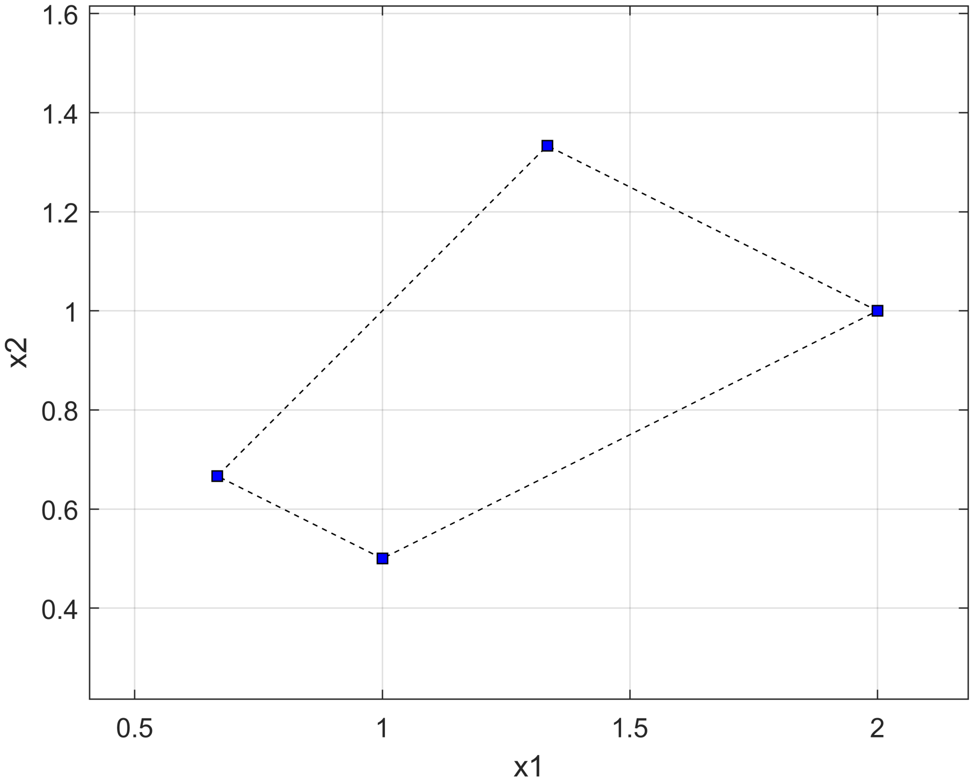

Рис. 1: Множество Ξ_{uni}

Результатом выполнения метода Кравчика являются следующие брусы:

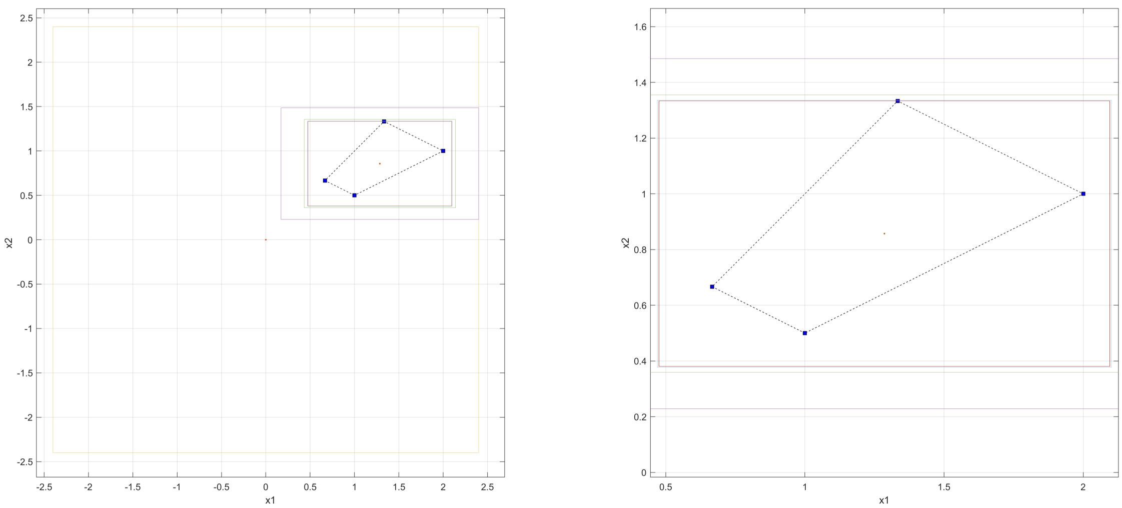

Рис. 2: Иллюстрация работы метода Кравчика для ИСЛАУ

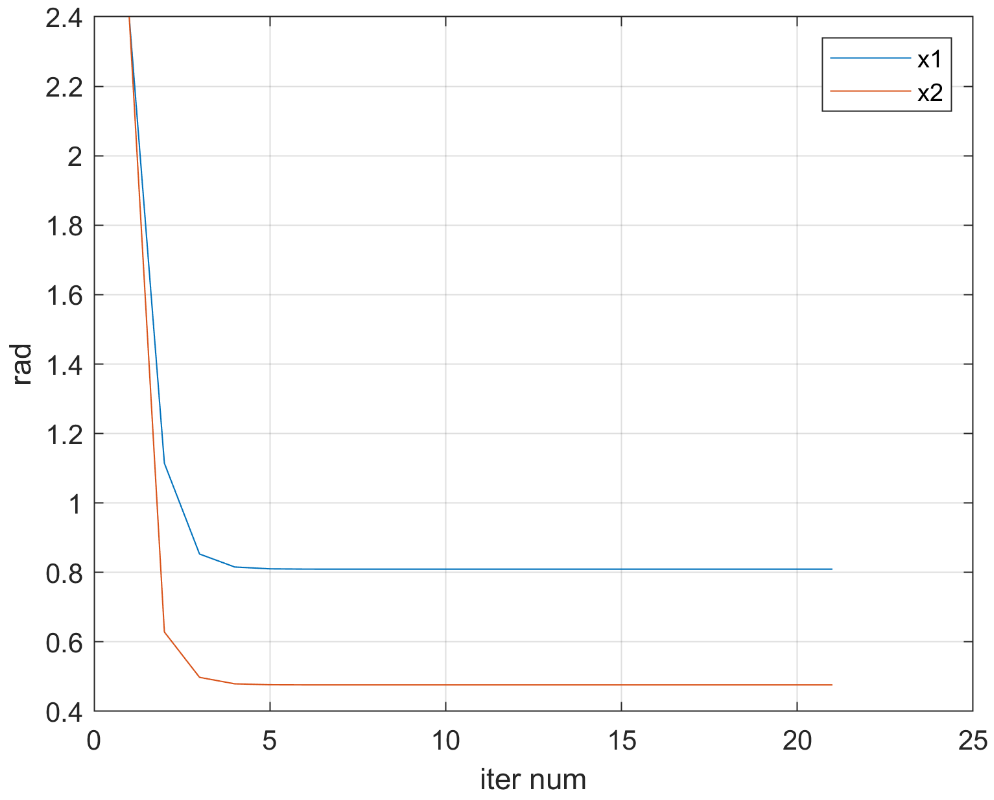

Рис. 3: График радиусов брусов для ИСЛАУ

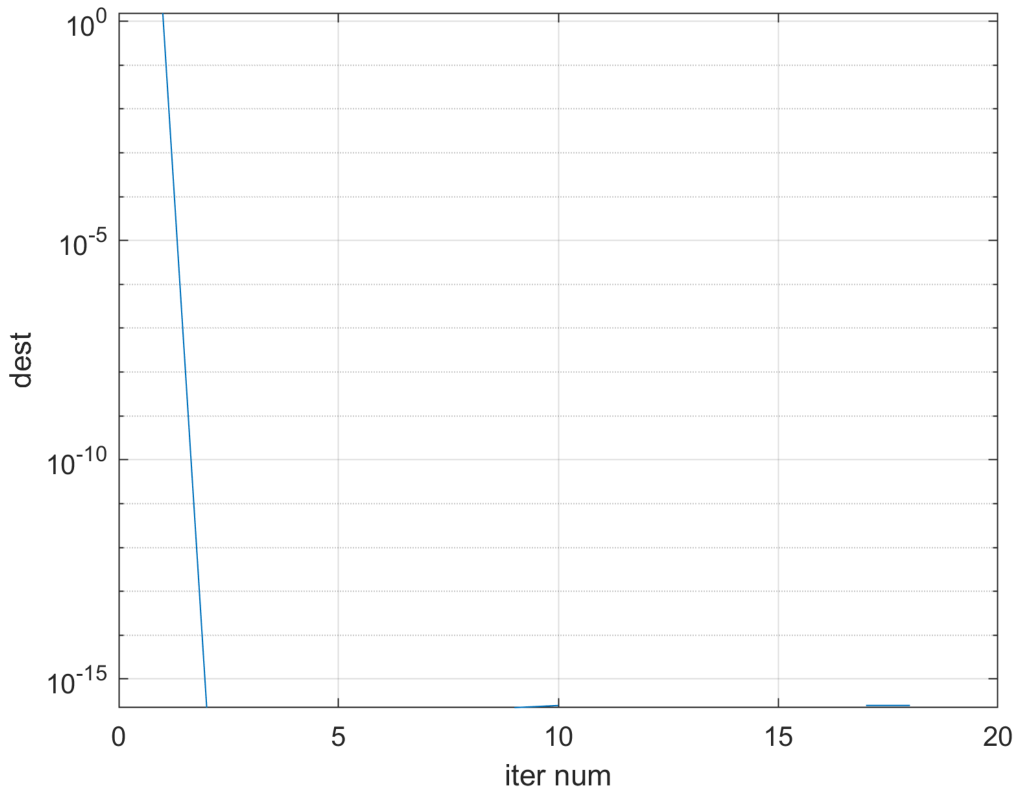

Рис. 4: График сходимости брусов для ИСЛАУ

4.4 Результаты применения метода Кравчика для задачи (2)

Так как задачи являются эквивалентными в смысле геометрической интерпретации, то Ξ_{uni} остается таким же, как на графике 1.

Результатом выполнения метода Кравчика являются следующие брусы:

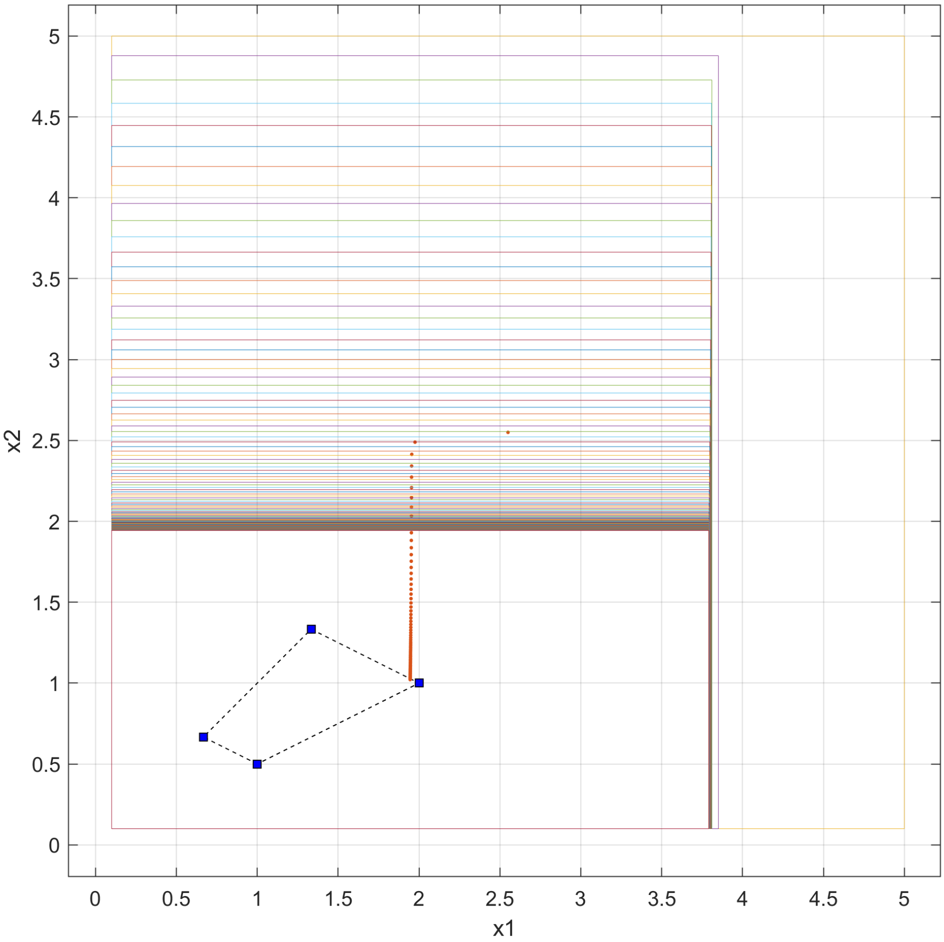

Рис. 5: Иллюстрация работы метода Кравчика для нелинейной системы

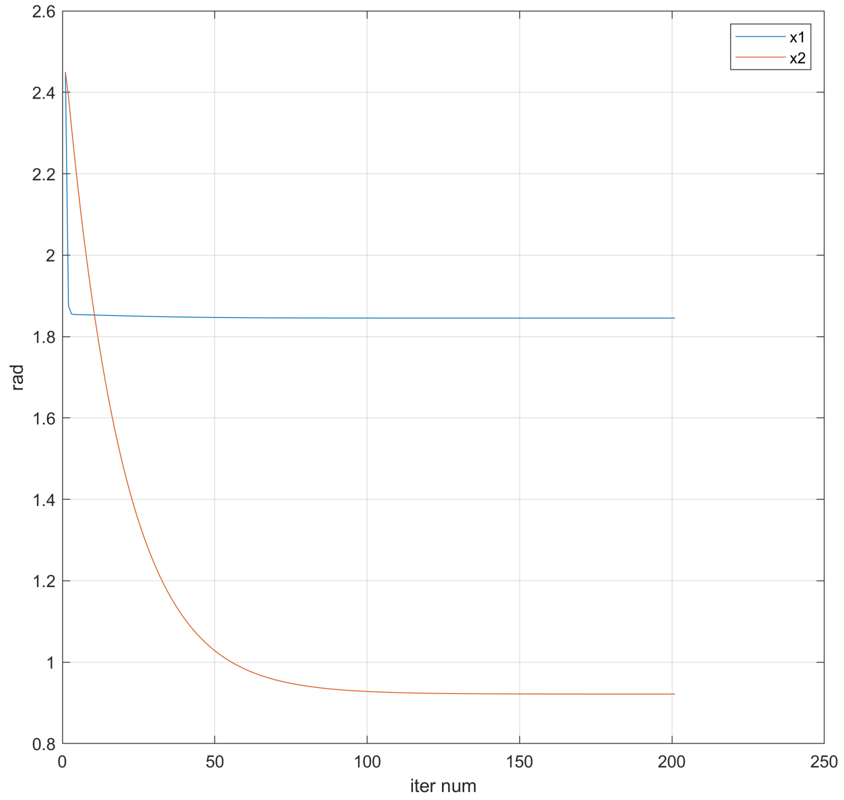

Рис. 6: График радиусов брусов для нелинейной системы

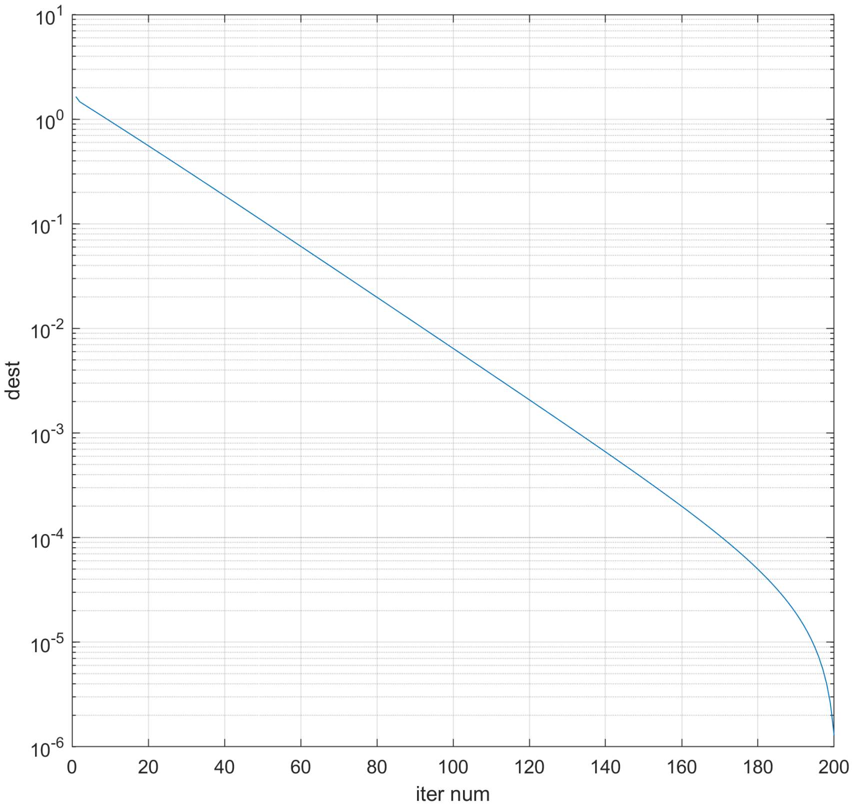

Рис. 7: График сходимости брусов для нелинейной системы

5 Обсуждение

1. Метод Кравчика для ИСЛАУ показал очень быструю сходимость: из грубой начальной оценки метод пришел к брусу, мало отличающемуся от последнего в построенной последовательности, за 4 итерации, если делать вывод на основании графика 3 радиусов, и за 2 итерации, если делать вывод на основании графика 4 расстояния между центрами брусов.

2. Из графика 2 видно, что на последних итерациях уточняется лишь та грань бруса, по которой и так получено очень точное приближение. Можно сделать вывод, что процесс не сойдется к интервальной оболочке множества Ξ_{uni}.

3. При решении задачи (2) была использована начальная оценка так, чтобы брус X^0 лежал в первом ортанте, иначе в якобиане появляется операция деления на интервал, содержащий 0. Сходимость более медленная, чем в предыдущем случае.

4. По графикам 5 и 6 видно, что вновь в основном происходит уточнение лишь одной грани бруса.

5. Исходя из графика 7 можно сделать вывод, что в отличие от задачи 1, в задаче 2 движение центра брусов не прекращается даже спустя число итераций, на порядок превосходящее число итераций, на котором остановился предыдущий метод. Тем не менее, сходимость замедляется по мере построений.

6. Сравнивая графики 2 и 5, приходим к выводу, что интерпретация задачи как ИСЛАУ дала намного более точное решение. В первом случае получили брус, отличающийся от интервальной оболочки Ξ_{uni} на величину порядка 0.1 по каждой грани (на одной из граней получено точное значение). В случае рассмотрения задачи как системы

нелинейных уравнений получили уточнение лишь по двум граням, погрешность порядка единицы.