



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Быстрое преобразование Фурье»

Студент 315 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2018

Содержание

1	Постановка задачи	3
1.1	Общая формулировка задачи	3
1.2	Формальная формулировка задачи	3
2	Аналитическое вычисление преобразований Фурье	5
2.1	Краткая теоритическая справка	5
2.2	Вычисление преобразования Фурье первой функции	5
2.3	Вычисление преобразования Фурье второй функции	7
3	Описание работы программы	8
4	Иллюстрация работы программы	9
4.1	Первая функция	9
4.2	Вторая функция	11
4.3	Третья функция	12
4.4	Четвёртая функция	13
5	Заключение	15

1 Постановка задачи

1.1 Общая формулировка задачи

Дана система функций

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1 - \cos^2 t}{t}, \\ f_2 = t \cdot e^{-2t^2}, \\ f_3 = \frac{2}{1 + 3t^6}, \\ f_4 = e^{-5|t|} \cdot \ln(3 + t^4). \end{cases} \quad (1)$$

Для каждой функции из системы (1) требуется:

1. Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ при помощи быстрого преобразования Фурье (**БПФ** / **FFT**), выбирая различный шаг дискретизации и различные окна, ограничивающие область определения функции $f(t)$.
2. Построить графики получившихся аппроксимаций $F(\lambda)$.
3. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из системы (1) вычислить аналитически преобразование Фурье $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ и сравнить графики, полученные в результате аналитического решения и аппроксимации с помощью **БПФ**.
4. Проиллюстрировать на графиках эффекты ряби и наложения хвостов. Продемонстрировать причины возникновения этих эффектов и возможные способы их устранения.

1.2 Формальная формулировка задачи

Для решения поставленной задачи необходимо реализовать на языке *MATLAB* функцию `plotFT`, принимающую следующие аргументы:

- `hFigure` — указатель на фигуру, в которой требуется отобразить графики.
- `fHandle` — указатель на функцию (*function handle*), аппроксимацию которой необходимо получить.
- `fFTHandle` — указатель на функцию (*function handle*), являющейся преобразованием Фурье функции, переданной как `fHandle`, либо пустой вектор.
- `step` — положительное число, задающее шаг дискретизации Δt .
- `inLimVec` — вектор-строка, задающая окно $[a, b]$ для функции, переданной как `fHandle`. Первый элемент вектора содержит a , второй — b , причем $a < b$, но не обязательно $a = -b$.
- `outLimVec` — вектор-строка, задающая окно $[c, d]$ для построения графика преобразования Фурье и его аппроксимации. Необязательный параметр. В случае, если параметр не задан, следует использовать установленные в фигуре `hFigure` пределы или определить свои разумным способом.

Данная функция должна строить графики вещественной и мнимой частей численной аппроксимации преобразования Фурье функции, переданной как **fHandle** и, если задан **fFTHandle**, — графики соответствующих частей полученного аналитически преобразования Фурье, передаваемого как **fFTHandle**. Кроме того, функция должна возвращать структуру, содержащую следующие параметры:

- **nPoints** — число вычисляемых узлов сеточной функции, рассчитываемое по формуле

$$nPoints = \left\lfloor \frac{b - a}{step} \right\rfloor$$

- **step** — исправленное значение шага дискретизации Δt , рассчитываемое по формуле

$$step = \frac{b - a}{nPoints}$$

- **inpLimVec** — окно $[a, b]$ для функции, передаваемой как **fHandle**.
- **outLimVec** — окно для вывода графика аппроксимации преобразования Фурье функции, передаваемой как **fHandle**.

При помощи функции **plotFT** выполнить общую задачу.

2 Аналитическое вычисление преобразований Фурье

2.1 Краткая теоритическая справка

Преобразование Фурье $F(\lambda)$ для функции $f(t)$ задается формулой

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\lambda t} dt. \quad (2)$$

Для аналитического вычисления преобразования Фурье нам потребуются знания некоторых значений часто встречающихся интегралов.

Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Интеграл Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4)$$

2.2 Вычисление преобразования Фурье первой функции

Преобразуем заданную функцию к более удобному виду

$$f_1(t) = \frac{1 - \cos^2 t}{t} = \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos 2t}{2t}.$$

Преобразование Фурье $F_1(\lambda)$ функции $f_1(t)$ по определению (2) задаётся формулой

$$F_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot e^{-i\lambda t} dt.$$

Вычислим этот интеграл. Распишем $e^{-i\lambda t} = \cos(\lambda t) - i \sin(\lambda t)$ и воспользуемся линейностью интеграла

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot e^{-i\lambda t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot \cos(\lambda t) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot \sin(\lambda t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t} dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t) \cdot \cos(\lambda t)}{t} dt - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t) \cdot \sin(\lambda t)}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2} I_2 - \frac{i}{2} I_3 + \frac{i}{2} I_4 \end{aligned}$$

1. Интеграл I_1 равен нулю, так как подынтегральная функция нечётная.

2. Вычислим интеграл I_2 . Воспользуемся формулой тригонометрии

$$\cos(2t) \cdot \cos(\lambda t) = \frac{\cos((2 + \lambda)t) + \cos((2 - \lambda)t)}{2}$$

Тогда, пользуясь линейностью интеграла,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t) \cdot \cos(\lambda t)}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((2 + \lambda)t)}{t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((2 - \lambda)t)}{t} dt \end{aligned}$$

Каждый из получившихся интегралов после замены переменной сводится к I_1 . Значит, I_2 также равен нулю.

3. Вычислим интеграл I_3 . Рассмотрим случаи:

- (a) $\lambda = 0$. Интеграл, очевидно, равен нулю.
- (b) $\lambda \neq 0$. Интеграл заменой переменной сводится к интегралу Дирихле (3).

$$I_2 = \pi \cdot \operatorname{sgn} \lambda$$

4. Вычислим интеграл I_4 . Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\cos(2t) \cdot \sin(\lambda t) = \frac{\sin((\lambda + 2)t) + \sin((\lambda - 2)t)}{2}$$

Пользуясь линейностью интеграла и четностью подынтегральных функций получаем

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t) \cdot \sin(\lambda t)}{t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin((\lambda + 2)t)}{t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{\sin((\lambda - 2)t)}{t} dt \end{aligned}$$

Рассмотрим случаи:

- (a) $\lambda > 2$. Делая замену переменной, получим интегралы Дирихле (3).

$$I_4 = \pi$$

- (b) $\lambda = 2$. Второй интеграл обнулится, а первый сводится к интегралу Дирихле (3).

$$I_4 = \frac{\pi}{2}$$

(с) $-2 < \lambda < 2$. Очевидно, что

$$I_4 = 0$$

(d) $\lambda = -2$. Первый интеграл обнулится, а второй сводится к интегралу Дирихле (3).

$$I_4 = -\frac{\pi}{2}$$

(е) $\lambda < -2$. Делая замену переменной, получим интегралы Дирихле (3).

$$I_4 = -\pi$$

В итоге получаем преобразование Фурье для первой функции

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in (-\infty; 2) \cup \{0\} \cup (2; +\infty) \\ -\frac{\pi i}{2}, & \lambda \in (0; 2) \\ \frac{\pi i}{2}, & \lambda \in (-2; 2) \\ \frac{\pi i}{4}, & \lambda = -2 \\ -\frac{\pi i}{4}, & \lambda = 2 \end{cases} \quad (5)$$

2.3 Вычисление преобразования Фурье второй функции

Преобразование Фурье $F_2(\lambda)$ функции $f_2(t) = t \cdot e^{-2t^2}$ задаётся формулой

$$F_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-2t^2} \cdot e^{-i\lambda t} dt.$$

Проиллюстрируем цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-2t^2} \cdot e^{-i\lambda t} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-2t^2 - i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\left(2t^2 + i\lambda t + \frac{i^2 \lambda^2}{8}\right) + \frac{i^2 \lambda^2}{8}} dt = \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\left(\sqrt{2}t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{2}}\right)^2} dt = \left[\sqrt{2}t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{2}} = s \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{i\lambda}{4} \right) e^{-s^2} ds = \frac{1}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2} ds - \frac{i\lambda}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \\ &= \frac{1}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds^2 - \frac{i\lambda}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds. \end{aligned}$$

Таким образом, первый интеграл обнуляется, а второй является интегралом Пуассона (4). В итоге получаем

$$F_2(\lambda) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \cdot \lambda \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{8}}$$

3 Описание работы программы

1. Число `nPoints` отвечает за количество узлов сетки и вычисляется следующим образом

$$nPoints = \left\lfloor \frac{b-a}{step} \right\rfloor.$$

Оно необходимо нам для задания дискретизации функции.

2. Вычисляем новое значение шага по формуле

$$\Delta t = \frac{b-a}{nPoints}.$$

3. Тогда периодом будет

$$T = \frac{2\pi}{\Delta t}.$$

Следовательно преобразование Фурье будем вычислять на отрезке $[-\frac{\pi}{\Delta t}; \frac{\pi}{\Delta t}]$.

4. Для того, чтобы получить преобразование Фурье, необходимо воспользоваться следующими функциями из `MATLAB`:

- (a) Функция `fft` принимает вектор значений исходной функции $f(t)$ и возвращает вектор дискретного преобразования Фурье $\tilde{F}(\lambda)$, симметрично отражённый относительно нашей функции $f(t)$.
- (b) Функция `fftshift` принимает вектор $\tilde{F}(\lambda)$, делит его пополам и переставляет полученные части между собой. Эта функция нужна для того, чтобы симметрично продолжать график для периодического продолжения.

Если выполнить функции последовательно, то получим $F_{discr.}(\lambda)$ — дискретное преобразование Фурье. Для получения непрерывного преобразования Фурье необходимо вектор дискретного преобразования Фурье домножить на шаг дискретизации Δt .

$$F(\lambda) = \Delta t \cdot F_{discr.}$$

5. Наконец, чтобы сместить отрезок в начало координат, домножим наше преобразование Фурье на $e^{-i\lambda\alpha}$, где α — это точка, которую мы сдвигаем в начало координат. Это можно сделать в силу преобразования

$$f(t - \alpha) \longleftrightarrow e^{-i\lambda\alpha} \cdot F(\lambda).$$

Сдвиг необходим из-за ограничения на левую границу дискретного преобразования Фурье:

$$f(t) = 0, \quad t < 0.$$

4 Иллюстрация работы программы

4.1 Первая функция

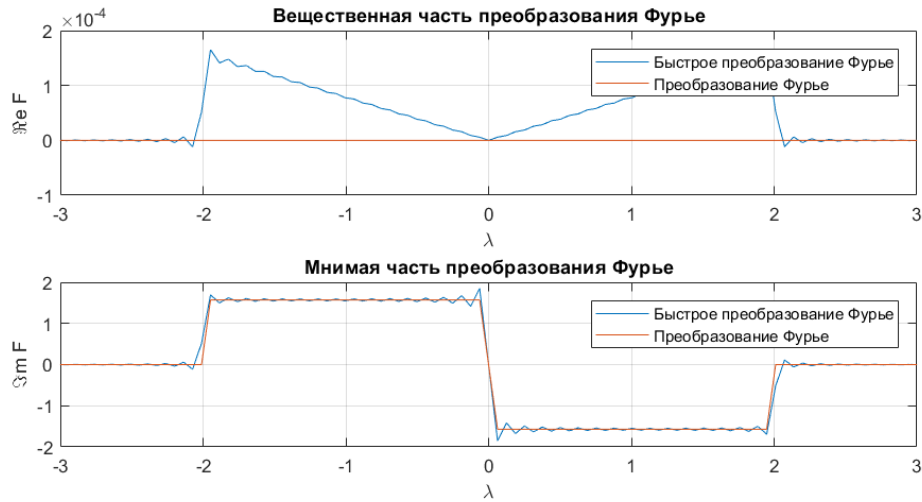
Рассмотрим функцию

$$f_1(t) = \frac{1 - \cos^2 t}{t}.$$

Данная функция имеет разрыв первого рода в точке $t = 0$. Исходя из аналитического представления преобразования Фурье $F_1(\lambda)$, мы знаем, что у него есть пять точек разрыва ($\lambda = \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{\pi}{4}; 0$).

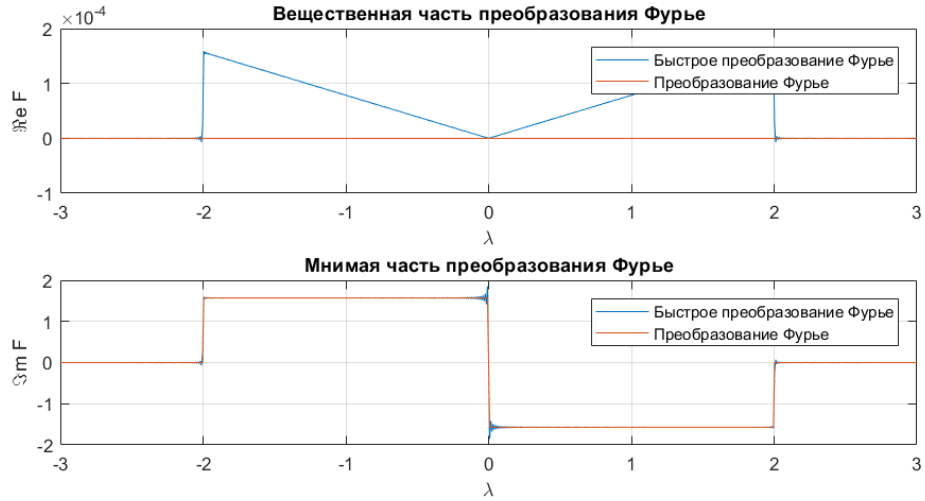
Рассмотрим графики аппроксимации преобразования Фурье для этой функции, выбирая различные шаги дискретизации Δt , окна, ограничивающего область определения функции $[a; b]$, окна вывода преобразования $[c; d]$, и сделаем выводы.

1. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a; b] = [-50; 50]$, $[c; d] = [-3; 3]$.



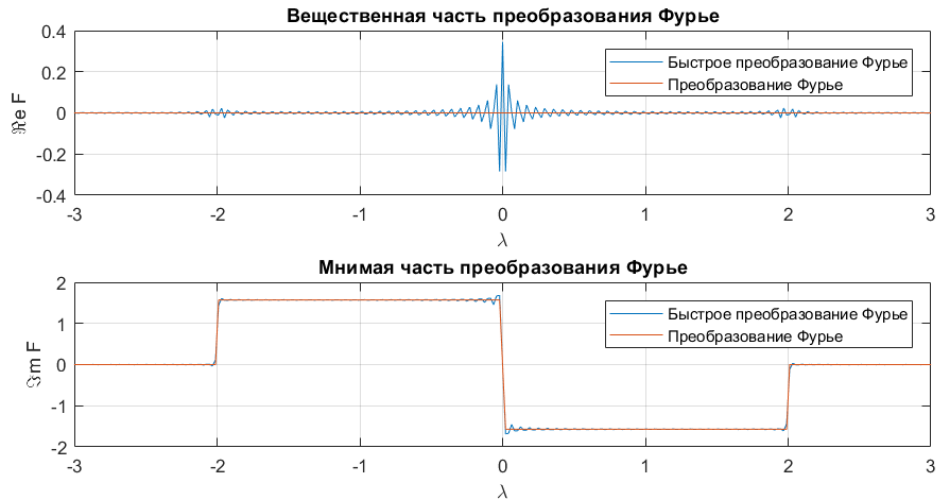
- (a) Мнимые части преобразования Фурье, полученные аналитически и численно, совпадают с точностью до ряби. Эта рябь неизбежно возникает в точках разрыва, но также она появляется и в точках непрерывности функции $F_1(\lambda)$. Первое связано со свойствами преобразования Фурье, а второе — с диапазоном окна.
- (b) Из аналитического представления $F_1(\lambda)$ следует, что вещественная часть аналитического преобразования Фурье равна нулю, в то время, как вещественная часть, полученная численно, по модулю отлична от нуля. Но это отличие сопоставимо с шагом дискретизации. Отметим, что точки разрыва в вещественной и мнимой частях численного преобразования Фурье совпадают.

2. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a; b] = [-400; 400]$, $[c; d] = [-3; 3]$.



- (a) Мнимые части преобразования Фурье, полученные численно и аналитически, совпадают с точностью до ряби в точках разрыва. Это связано с тем, что мы увеличили размер окна в 8 раз. Следовательно увеличивая диапазон окна, можно добиться исчезновения ряби в точках непрерывности функции $F_1(\lambda)$.
- (b) Ситуация с действительной частью обстоит также, как и в предыдущем пункте.

3. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a; b] = [-100; 200]$, $[c; d] = [-3; 3]$.



- (a) В отличие от предыдущего пункта, здесь мы сместили оконную функцию на 50 единиц вправо, относительно начала координат. На графике вещественной части численного преобразования Фурье видно, что в точках разрыва образовались “пики”. Это явление вызвано сдвигом оконной функции. В результате чего, преобразование Фурье домножается на комплексную экспоненту. Ввиду того, что комплексная экспонента представима в виде вещественной и комплексной части, то произойдет умножение двух комплексных чисел, в результате чего пики отразятся в вещественной части.

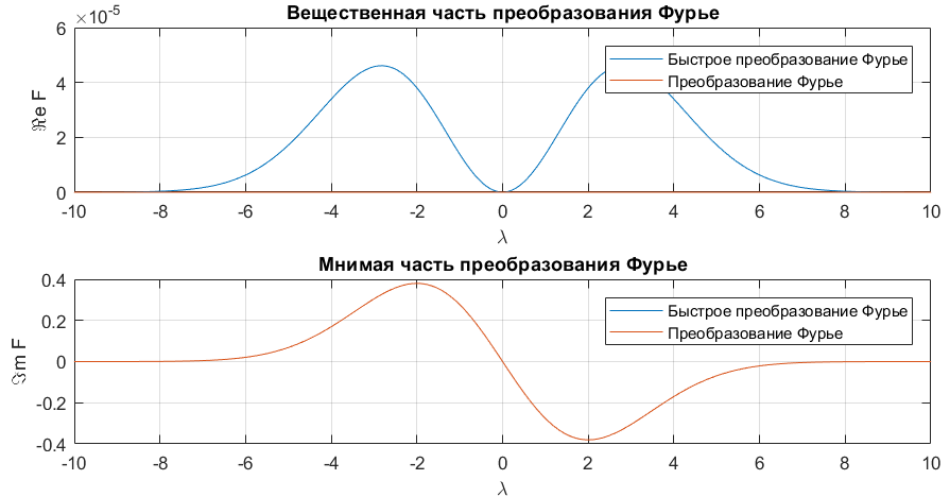
4.2 Вторая функция

Рассмотрим функцию

$$f_2(t) = t \cdot e^{-2t^2}.$$

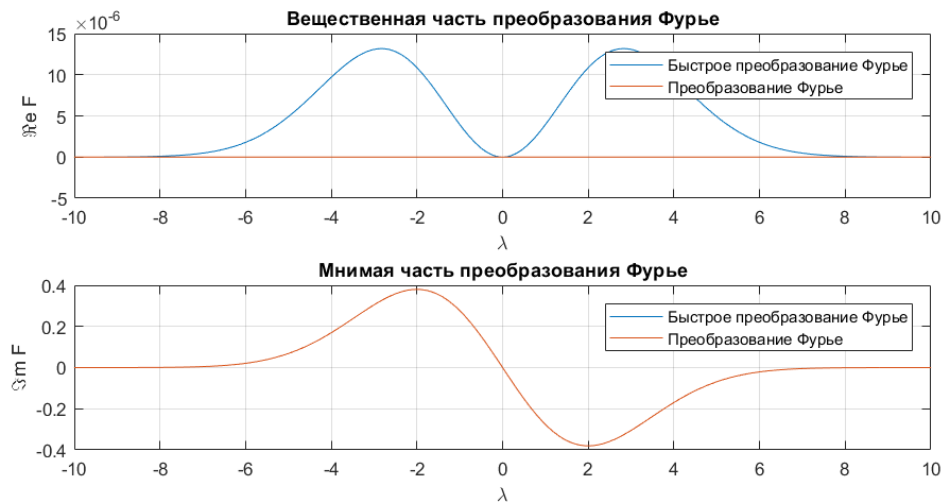
Как можно видеть, эта функция и её аналитическое преобразование Фурье непрерывны.

1. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a; b] = [-50; 50]$, $[c; d] = [-10; 10]$.



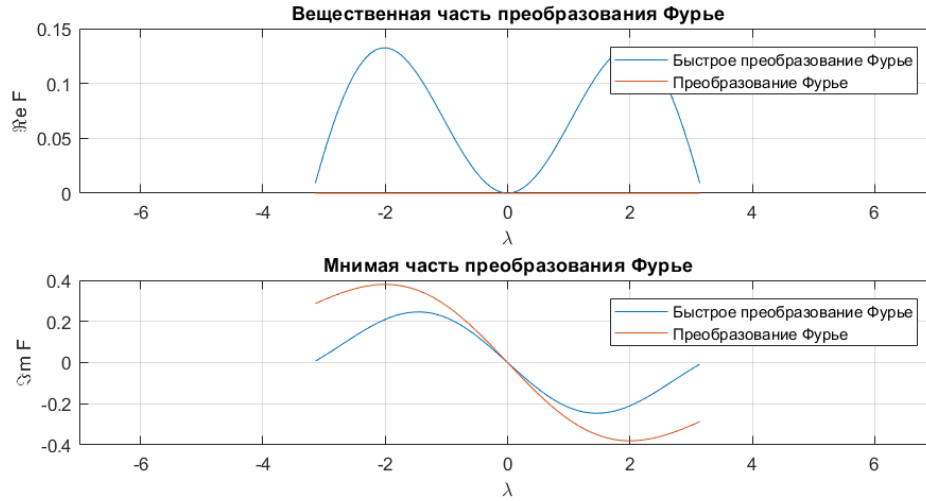
- (a) Мнимые части преобразования Фурье, полученные численно и аналитически, совпадают.
- (b) Вещественная часть преобразования Фурье, полученная аналитически, равна нулю. А вещественная часть преобразования Фурье, полученная численно, по модулю сопоставима с шагом дискретизации Δt .
- (c) Отсутствует рябь, ввиду того, что нет точек разрыва.

2. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a; b] = [-50; 300]$, $[c; d] = [-10; 10]$.



- (а) Сравнивая данный график с предыдущим, мы понимаем, что существенных изменений нет. Отличие состоит лишь в том, что мы взяли другое окно. Отметим, что оно не является симметричным относительно начала координат. И здесь справедливы выводы, сделанные в предыдущем пункте.

3. $\Delta t = 1$, $[a; b] = [-20; 50]$, $[c; d] = [-7; 7]$.



- (а) Вещественная часть преобразования Фурье по-прежнему равна нулю, поэтому сдвиг ничего не изменит.
- (б) Что касается мнимой части, то здесь наблюдается эффект наложения спектра (т.е. сумма исходного аналитического преобразования Фурье и сдвинутых аналитических преобразований Фурье равна численному преобразованию Фурье в каждой точке λ из отрезка $[-\frac{\pi}{\Delta t}; \frac{\pi}{\Delta t}]$). При этом численное преобразование Фурье не совпадает с аналитическим. Данное явление обусловлено нарушением соотношения

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\Lambda},$$

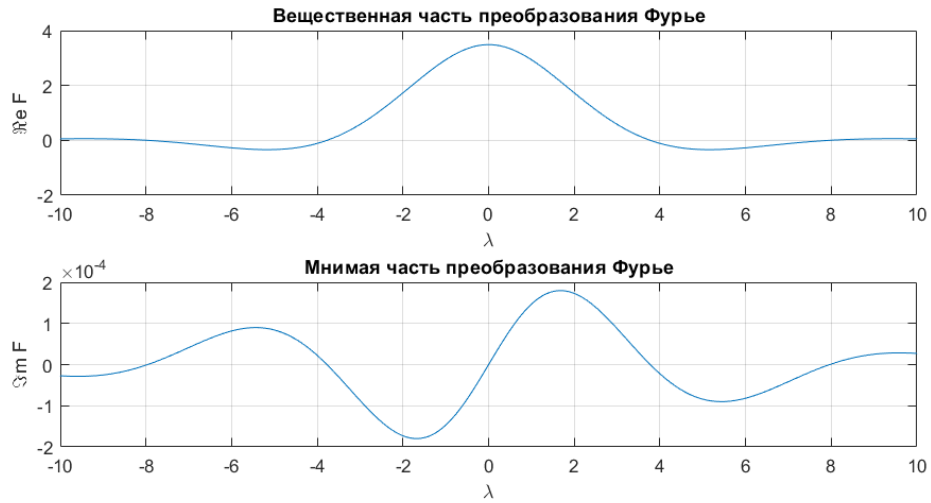
где Δt — шаг дискретизации, а $\Lambda > 0$ ($|\lambda| < \Lambda$) — промежуток, где нужно устранить наложение спектра. В данном случае эффект наложения спектра можно устранить, т.к. функция $F_1(\lambda) \rightarrow 0$, при $|\lambda| \rightarrow +\infty$. И чтобы его устранить, нужно увеличить окно и уменьшить шаг дискретизации Δt .

4.3 Третья функция

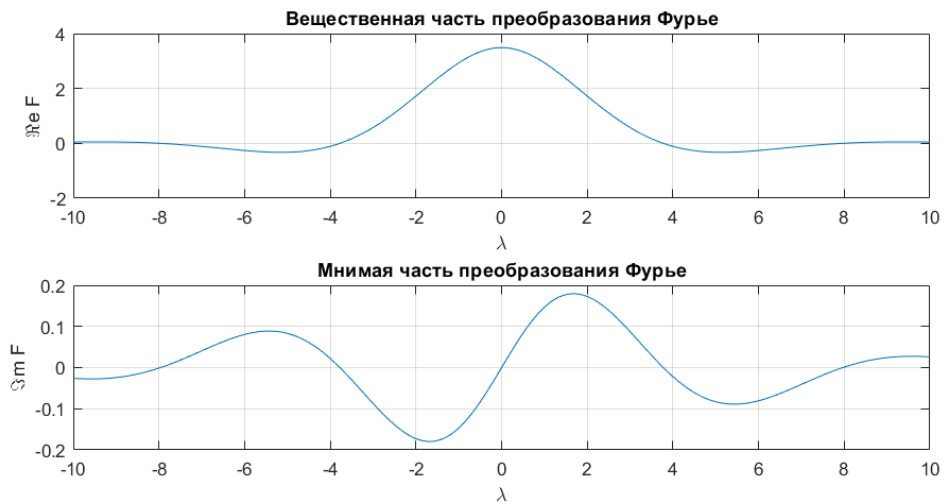
Рассмотрим функцию

$$f_3(t) = \frac{2}{1 + 3t^6}.$$

1. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a; b] = [-100; 100]$, $[c; d] = [-10; 10]$



2. $\Delta t = 10^{-1}$, $[a; b] = [-100; 100]$, $[c; d] = [-10; 10]$



Из приведённых графиков следует:

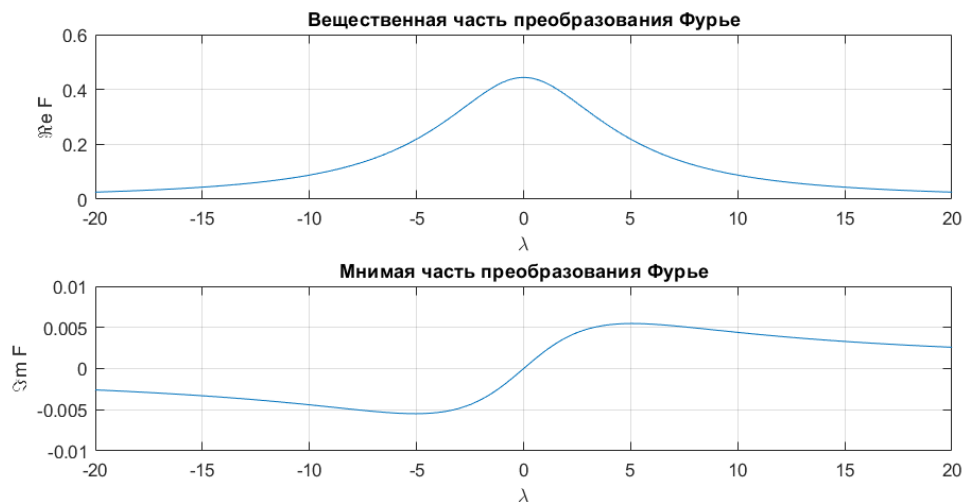
- Мнимая часть преобразования Фурье равна нулю. Это следует из того, что если мы будем стремить шаг дискретизации к нулю, то максимальное значение преобразования Фурье тоже будет стремиться к нулю.
- Преобразование Фурье данной функции является непрерывным.

4.4 Четвёртая функция

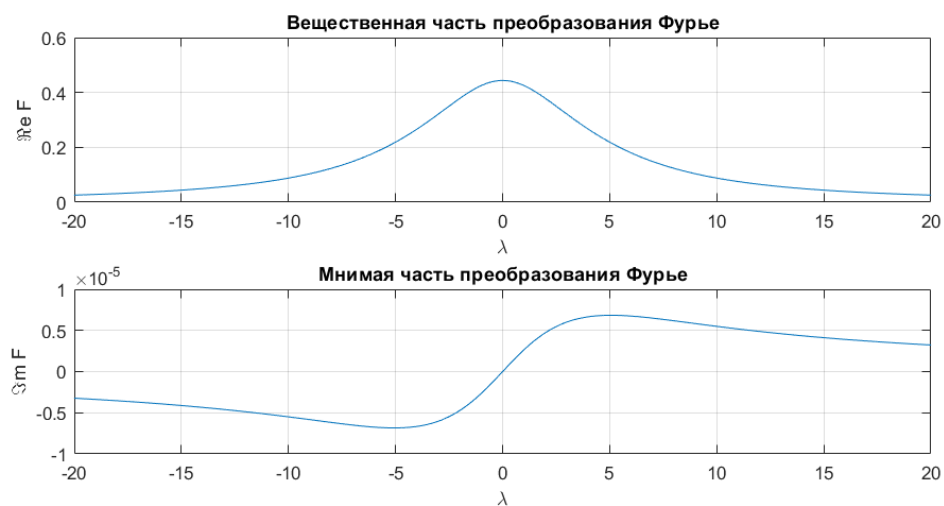
Рассмотрим функцию:

$$f_4(t) = e^{-5|t|} \cdot \ln(3 + t^4).$$

1. $\Delta t = 10^{-2}$, $[a; b] = [-100; 100]$, $[c; d] = [-15; 15]$



2. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a; b] = [-20; 300]$, $[c; d] = [-20; 20]$



Сравнив два графика, видим:

- Существенных изменений не произошло, несмотря на то, что были изменены все параметры. Мнимая часть равна нулю.
- Преобразование Фурье данной функции — непрерывно.

5 Заключение

В ходе выполнения работы:

1. Были вычислены преобразования Фурье двух функций. Произведено сравнение аналитических преобразований Фурье с их аппроксимациями.
2. Были изучены различные явления, возникающие в ходе аппроксимации преобразования Фурье: рябь, вызванная разрывностью преобразования, рябь, вызванная асимметричностью окна, и эффект наложения хвостов.
3. При использовании быстрого преобразования Фурье, в силу его дискретной природы, могут быть получены неточные результаты. При правильном же подборе параметров результат будет приближаться к аналитическому решению, а в случае разрывного преобразования — предсказуемо отклоняться от него.

Список литературы

- [1] И. В. Рублёв. Лекции по преобразованиям Лапласа-Фурье. 2018
- [2] А. В. Столяров. Сверстай диплом красиво: ЛАТЭХ за три дня. М.: МАКС Пресс, 2010. (<http://www.stolyarov.info/books/pdf/latex3days.pdf>)
- [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. В двух частях.