Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Быстрое преобразование Фурье»

Студент 315 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2018

Содержание

1 Постановка задачи **3**

1.1 Общая формулировка задачи . . . 3

1.2 Формальная формулировка задачи . . . 3

2 Аналитическое вычисление преобразований Фурье **5**

2.1 Краткая теоритическая справка . . . 5

2.2 Вычисление преобразования Фурье первой функции . . . 5

2.3 Вычисление преобразования Фурье второй функции . . . 7

3 Описание работы программы **8**

4 Иллюстрация работы программы **10**

4.1 Первая функция . . . 10

4.2 Вторая функция . . . 12

4.3 Третья функция . . . 14

4.4 Четвёртая функция . . . 15

5 Заключение **17**

1 Постановка задачи

1.1 Общая формулировка задачи

Дана система функций

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1-\cos^2 t}{t}, \\ \\ f_2 = t \cdot e^{-2t^2}, \\ \\ f_3 = \frac{2}{1+3t^6}, \\ \\ f_4 = e^{-5|t|} \cdot \ln(3+t^4). \end{cases} \tag{1}$$

Для каждой функции из системы (1) требуется:

1. Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ при помощи быстрого преобразования Фурье, выбирая различный шаг дискретизации и различные окна, ограничивающие область определения функции $f(t)$.
2. Построить графики получившихся аппроксимаций $F(\lambda)$.
3. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из системы (1) вычислить аналитически преобразование Фурье $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ и сравнить графики, полученные в результате аналитического решения и аппроксимации с помощью быстрого преобразования Фурье.
4. Проиллюстрировать на графиках эффекты ряби и наложения хвостов. Продемонстрировать причины возникновения этих эффектов и возможные способы их устранения.

1.2 Формальная формулировка задачи

Для решения поставленной задачи необходимо реализовать на языке *MATLAB* функцию `plotFT`, принимающую следующие аргументы:

- `hFigure` — указатель на фигуру, в которой требуется отобразить графики.
- `fHandle` — указатель на функцию (*function handle*), аппроксимацию которой необходимо получить.
- `fFTHandle` — указатель на функцию (*function handle*), являющейся преобразованием Фурье функции, переданной как `fHandle`, либо пустой вектор.
- `step` — положительное число, задающее шаг дискретизации Δt.
- `inpLimVec` — вектор-строка, задающая окно $[a, b]$ для функции, переданной как `fHandle`. Первый элемент вектора содержит a, второй — b, причем $a < b$, но не обязательно $a = -b$.
- `outLimVec` — вектор-строка, задающая окно $[c, d]$ для построения графика преобразования Фурье и его аппроксимации. Необязательный параметр. В случае, если параметр не задан, следует использовать установленные в фигуре `hFigure` пределы или определить свои разумным способом.

Данная функция должна строить графики вещественной и мнимой частей численной аппроксимации преобразования Фурье функции, переданной как `fHandle` и, если задан `fFTHandle`, — графики соответствующих частей полученного аналитически преобразования Фурье, передаваемого как `fFTHandle`. Кроме того, функция должна возвращать структуру, содержащую следующие параметры:

- `nPoints` — число вычисляемых узлов сеточной функции, рассчитываемое по формуле
$$nPoints = \left\lfloor \frac{b-a}{step} \right\rfloor.$$
- `step` — исправленное значение шага дискретизации Δt, рассчитываемое по формуле
$$step = \frac{b-a}{nPoints}.$$

item `inpLimVec` — окно $[a, b]$ для функции, передаваемой как `fHandle`.

- `outLimVec` — окно для вывода графика аппроксимации преобразования Фурье функции, передаваемой как `fHandle`.

При помощи функции `plotFT` выполнить общую задачу.

2 Аналитическое вычисление преобразований Фурье

2.1 Краткая теоритическая справка

Преобразование Фурье $F(\lambda)$ для функции $f(t)$ задается формулой

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\lambda t}\, dt. \tag{2}$$

Для аналитического вычисления преобразования Фурье нам потребуются знания некоторых значений часто встречающихся интегралов.

Интеграл Дирихле

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\, x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

Интеграл Пуассона

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4}$$

2.2 Вычисление преобразования Фурье первой функции

Преобразуем заданную функцию к более удобному виду

$$f_1(t) = \frac{1 - \cos^2 t}{t} = \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos 2t}{2t}.$$

Преобразование Фурье $F_1(\lambda)$ функции $f_1(t)$ по определению (2) задаётся формулой

$$F_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Вычислим данный интеграл. Распишем $e^{-i\lambda t} = \cos(\lambda t) - i \sin(\lambda t)$ и воспользуемся линейностью интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot e^{-i\lambda t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot \cos(\lambda t)\, dt - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} \cdot \sin(\lambda t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t}\, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t) \cdot \cos(\lambda t)}{t}\, dt - \frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t}\, dt + \frac{i}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t) \cdot \sin(\lambda t)}{t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2} I_2 - \frac{i}{2} I_3 + \frac{i}{2} I_4.$$

1. Интеграл I_1 равен нулю в силу нечётности подынтегральной функции.

2. Вычислим интеграл I_2. Воспользуемся формулой тригонометрии

$$\cos(2t)\cdot\cos(\lambda t) = \frac{\cos((2+\lambda)t) + \cos((2-\lambda)t)}{2}.$$

Тогда, пользуясь линейностью интеграла,

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)\cdot\cos(\lambda t)}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((2+\lambda)t)}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos((2-\lambda)t)}{t}\,dt.$$

Каждый из получившихся интегралов после замены переменной сводится к I_1. Значит, I_2 также равен нулю.

3. Вычислим интеграл I_3. Рассмотрим случаи:

   (a) $\lambda = 0$. Интеграл, очевидно, равен нулю.

   (b) $\lambda \neq 0$. Интеграл заменой переменной сводится к интегралу Дирихле (3).

$$I_2 = \pi \cdot \operatorname{sgn}\lambda$$

.

4. Вычислим интеграл I_4. Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\cos(2t)\cdot\sin(\lambda t) = \frac{\sin((\lambda+2)t) + \sin((\lambda-2)t)}{2}.$$

Пользуясь линейностью интеграла и четностью подынтегральных функций получаем

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2t)\cdot\sin(\lambda t)}{t}\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin((\lambda+2)t)}{t}\,dt + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin((\lambda-2)t)}{t}\,dt.$$

Рассмотрим случаи:

   (a) $\lambda > 2$. Делая замену переменной, получим интегралы Дирихле (3).

$$I_4 = \pi$$

   (b) $\lambda = 2$. Второй интеграл обнулится, а первый сводится к интегралу Дирихле (3).

$$I_4 = \frac{\pi}{2}$$

(c) $-2 < \lambda < 2$. Очевидно, что

$$I_4 = 0$$

.

(d) $\lambda = -2$. Первый интеграл обнулится, а второй сводится к интегралу Дирихле (3).

$$I_4 = -\frac{\pi}{2}$$

(e) $\lambda < -2$. Делая замену переменной, получим интегралы Дирихле (3).

$$I_4 = -\pi$$

В итоге получаем преобразование Фурье для первой функции

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \in (-\infty; 2) \cup \{0\} \cup (2; +\infty) \\ -\frac{\pi i}{2}, & \lambda \in (0; 2) \\ \frac{\pi i}{2}, & \lambda \in (-2; 2) \\ \frac{\pi i}{4}, & \lambda = -2 \\ -\frac{\pi i}{4}, & \lambda = 2 \end{cases} \tag{5}$$

2.3 Вычисление преобразования Фурье второй функции

Преобразование Фурье $F_2(\lambda)$ функции $f_2(t) = t \cdot e^{-2t^2}$ задаётся формулой

$$F_2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-2t^2} \cdot e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Проиллюстрируем цепочку преобразований:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-2t^2} \cdot e^{-i\lambda t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-2t^2 - i\lambda t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\left(2t^2 + i\lambda t + \frac{i^2\lambda^2}{8}\right) + \frac{i^2\lambda^2}{8}}\, dt =$$

$$= e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-\left(\sqrt{2}t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{2}}\right)^2}\, dt = \left[\sqrt{2}t + \frac{i\lambda}{2\sqrt{2}} = s\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{i\lambda}{4}\right) e^{-s^2}\, ds = \frac{1}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s e^{-s^2}\, ds - \frac{i\lambda}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds =$$

$$\frac{1}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds^2 - \frac{i\lambda}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{8}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, ds.$$

Таким образом, первый интеграл обнуляется, а второй является интегралом Пуассона (4). В итоге получаем

$$F_2(\lambda) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \cdot \lambda \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{8}}.$$

3 Описание работы программы

1. Число `nPoints` отвечает за количество узлов сетки и вычисляется следующим образом
$$nPoints = \left\lfloor \frac{b-a}{step} \right\rfloor.$$
Оно необходимо нам для задания дискретизации функции.

2. Вычисляем новое значение шага по формуле
$$\Delta t = \frac{b-a}{nPoints}.$$

3. Тогда периодом будет
$$T = \frac{2\pi}{\Delta t}.$$
Следовательно преобразование Фурье будем вычислять на отрезке $\left[-\frac{\pi}{\Delta t}; \frac{\pi}{\Delta t}\right]$.

4. Для того, чтобы получить преобразование Фурье, необходимо воспользоваться следующими функциями из `MATLAB`:

   (a) Функция `fft` принимает вектор значений исходной функции $f(t)$ и возвращает вектор дискретного преобразования Фурье $\widetilde{\widetilde{F}}(\lambda)$, симметрично отражённый относительно нашей функции $f(t)$.

   (b) Функция `fftshift` принимает вектор $\widetilde{\widetilde{F}}(\lambda)$, делит его на две равные части и переставляет эти части между собой. Если выполнить функции последовательно, то получим $F_{discr.}(n)$ — дискретное преобразование Фурье. Для получения аппроксимации непрерывного преобразования Фурье необходимо вектор дискретного преобразования Фурье домножить на шаг дискретизации. Ниже преведено краткое обоснование этого факта.

Преобразование Фурье дискретизированной и периодически продолженной функции $f(t)$ имеет вид
$$(f(\cdot)\cdot d_{\Delta t}(\cdot)\cdot h_{\Delta_0}(\cdot) * d_{\Delta_0})(t) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{\Delta_0 \Delta t}(\widetilde{F}(\cdot) * d_{\frac{2\pi}{\Delta_0}}(\cdot))(\lambda).$$

Это преобразование с точностью до ряби и наложения спектра совпадает с преобразованием Фурье функции $f(t)$, то есть
$$F(\lambda_n) \approx \frac{2\pi}{\Delta_0 \Delta t}\widetilde{F}(\lambda_n),$$
где $\lambda_n = \frac{2\pi n}{\Delta_0}$, $n = \overline{0, N-1}$.

Тогда
$$\widetilde{F}(\lambda_n) = \widetilde{F_n} = \Delta t \cdot F_{discr.}(n).$$

5. Наконец, чтобы сместить отрезок в начало координат, домножим наше преобразование Фурье на $e^{-i\lambda\alpha}$, где α — это точка, которую мы сдвигаем в начало координат. Это можно сделать в силу преобразования

$$f(t-\alpha) \longleftrightarrow e^{-i\lambda\alpha} \cdot F(\lambda).$$

   Сдвиг необходим из-за ограничения на левую границу дискретного преобразования Фурье:

$$f(t) = 0,\ t < 0.$$

4 Иллюстрация работы программы

4.1 Первая функция

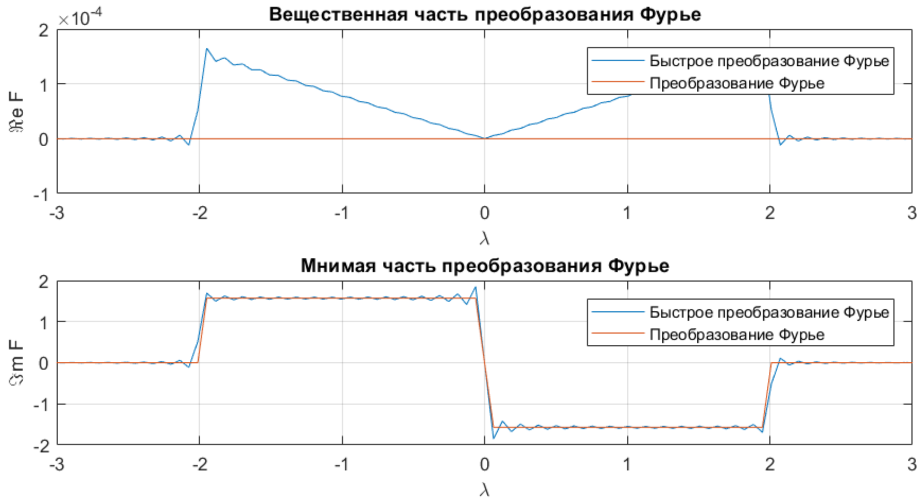
Рассмотрим функцию

$$f_1(t) = \frac{1-\cos^2 t}{t}.$$

Данная функция имеет разрыв первого рода в точке $t = 0$. Исходя из аналитического представления преобразования Фурье $F_1(\lambda)$, мы знаем, что у него есть три точки разрыва ($\lambda = \pm 2;\ 0$).

Рассмотрим графики аппроксимации преобразования Фурье для этой функции, выбирая различные шаги дискретизации Δt, окна, ограничивающего область определения функции $[a;\ b]$, окна вывода преобразования $[c;\ d]$, и сделаем выводы.

1. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a;\ b] = [-50;\ 50]$, $[c;\ d] = [-3;\ 3]$.



   (a) Мнимые части преобразования Фурье, полученные аналитически и численно, совпадают с точностью до ряби, называемой рябью Гиббса. Эта рябь неизбежно возникает в точках разрыва. От этой ряби не возможно избавиться при изменении параметров, но размер ряби пропорционален величине разрыва

$$F(\lambda_0^+) - F(\lambda_0^-) = a,$$

где λ_0 — точка разрыва преобразования Фурье $F(\lambda)$.

Рассмотрим функцию на отдалении от точки разрыва

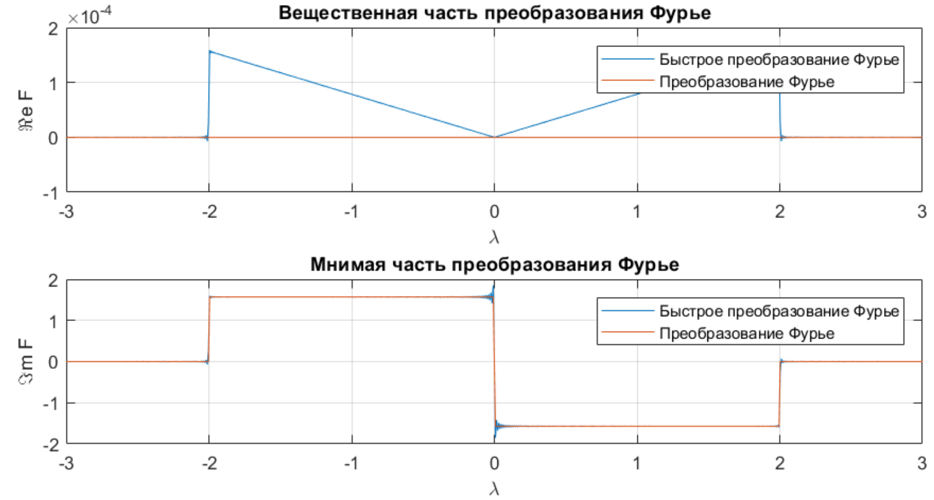
$$F(\lambda) = F_c(\lambda) + \chi(\lambda - \lambda_0)\left[F(\lambda_0^+) - F(\lambda_0^-)\right] = F_c(\lambda) + a\chi(\lambda - \lambda_0),$$

где $F_c(\lambda)$ — непрерывная часть преобразования Фурье.

Тогда у отклонения есть конечный предсказуемый предел, меньший, чем $\frac{a\rho_1}{\pi} \approx 0,0894\,a$. Эта особенность позволяет сглаживать рябь даже на небольшом отклонении от точек разрыва с помощью специальных фильтров.

(b) Из аналитического представления $F_1(\lambda)$ следует, что вещественная часть аналитического преобразования Фурье равна нулю, в то время, как вещественная часть, полученная численно, по модулю отлична от нуля. Но это отличие сопоставимо с шагом дискретизации. Отметим, что точки разрыва в вещественной и мнимой частях численного преобразования Фурье совпадают.

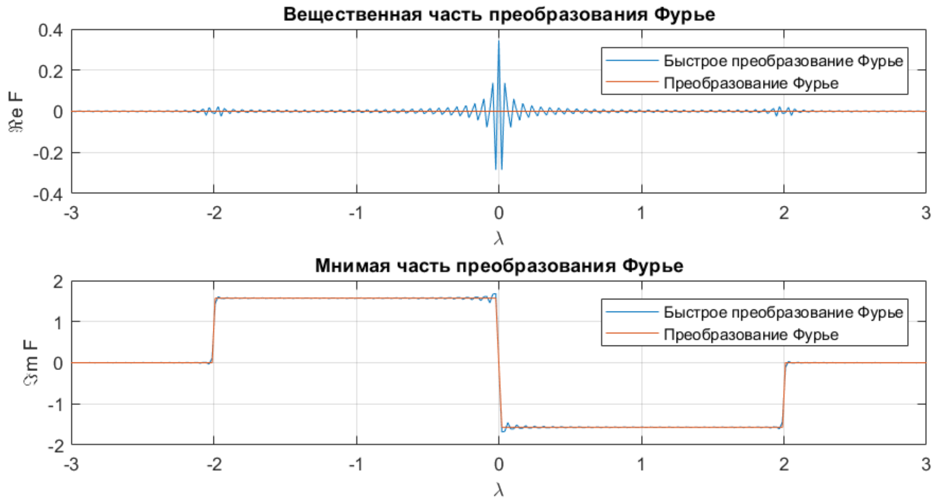
2. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a;\ b] = [-400;\ 400]$, $[c;\ d] = [-3;\ 3]$.



(a) Мнимые части преобразования Фурье, полученные численно и аналитически, совпадают с точностью до ряби в точках разрыва. Это связано с тем, что мы увеличили размер окна в 8 раз. Следовательно увеличивая диапозон окна, можно добиться исчезновения ряби Гиббса в точках непрерывности функции $F_1(\lambda)$.

(b) Ситуация с действительной частью обстоит также, как и в предыдущем пункте.

3. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a;\ b] = [-100;\ 200]$, $[c;\ d] = [-3;\ 3]$.



(a) В отличии от предыдущего пункта, здесь мы сместили оконную функцию на 50 единиц вправо, относительно начала координат. На графике вещественной части численного преобразования Фурье видно, что в точках разрыва образовались "пики". Это явление вызвано свдигом оконной функции. Чем более несимметрично — тем больше рябь. В то время как рябь в точках непрерывности преобразования Фурье $F(\lambda)$ стремится к нулю при увеличении частоты дискретизации, то уменьшить рябь в точках разрыва можно только сдвигом заданного окна. На несимметричном окне рябь распространяется и на действительную часть графика, где разрыва не наблюдалось. Эту особенность можно проследить из интеграла ошибки I, который показывает погрешность по действительной и мнимой части преобразования.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F(\lambda-\mu)e^{-i\mu t_0} - F(\lambda)e^{-i\mu t_0}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta_0 \mu}{2}}{\lambda\mu}\, d\mu,$$

где t_0 — сдвиг окна относительно нуля, Δ_0 — размер окна.

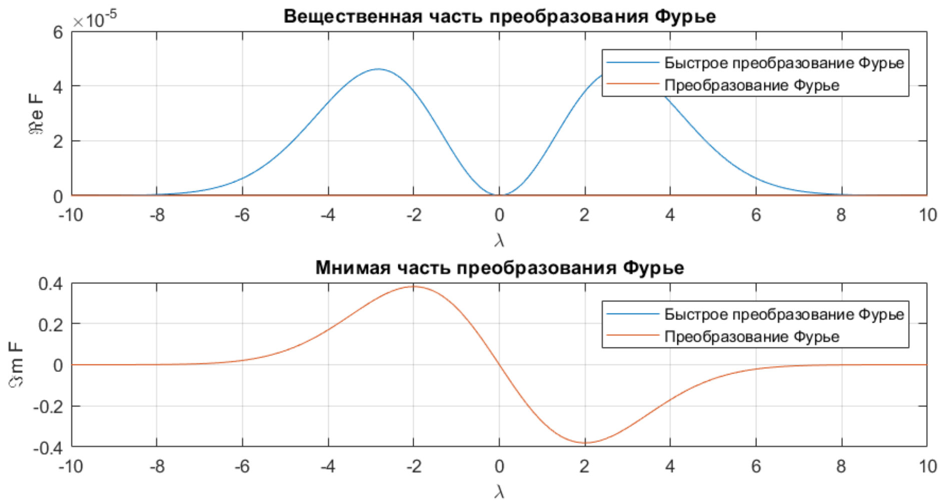
4.2 Вторая функция

Рассмотрим функцию

$$f_2(t) = t \cdot e^{-2t^2}.$$

Как можно видеть, эта функция и её аналитическое преобразование Фурье непрерывны.

1. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a;\ b] = [-50;\ 50]$, $[c;\ d] = [-10;\ 10]$.

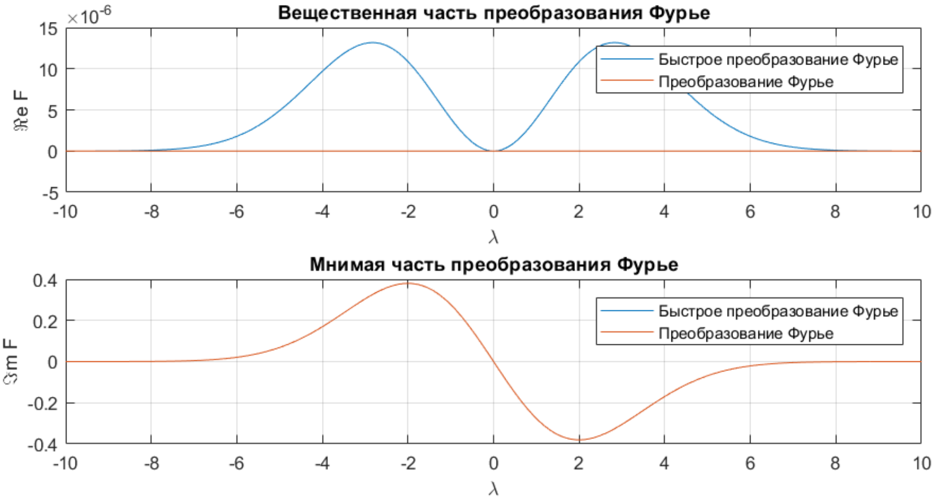


(a) Мнимые части преобразования Фурье, полученные численно и аналитически, совпадают.

(b) Вещественная часть преобразования Фурье, полученная аналитически, равна нулю.А вещественная часть преобразования Фурье, полученная численно, по модулю сопоставима с шагом дискретизации Δt.

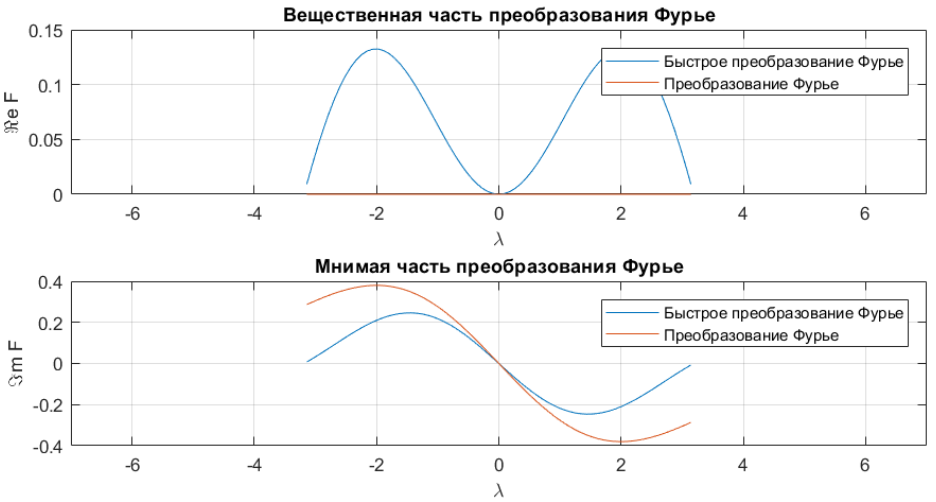
(c) Отсутствует рябь, ввиду того, что нет точек разрыва.

2. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a;\ b] = [-50;\ 300]$, $[c;\ d] = [-10;\ 10]$.



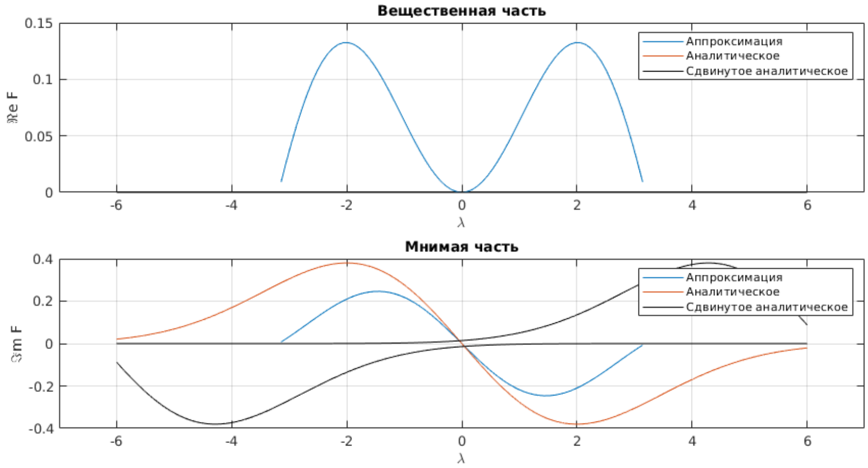
(a) Сравнивая данный график с предыдущим, мы понимаем, что существенных изменений нет. Отличие состоит лишь в том, что мы взяли другое окно. Отметим, что оно не является симметричным относительно начала координат. И здесь справедливы выводы, сделанные в предыдущем пункте.

3. $\Delta t = 1$, $[a;\ b] = [-20;\ 50]$, $[c;\ d] = [-7;\ 7]$.



(a) Вещественная часть преобразования Фурье по-прежнему равна нулю, поэтому сдвиг ничего не изменит.

(b) Что касается мнимой части,то здесь наблюдается эффект наложения спектра (т.е. сумма исходного аналитического преобразования Фурье и сдвинутых аналитических преобразований Фурье равна численному преобразованию Фурье в каждой точке λ из отрезка $\left[-\frac{\pi}{\Delta t}; \frac{\pi}{\Delta t}\right]$). При этом численное преобразование Фурье не совпадает с аналитическим.



Данное явление обусловлено нарушением соотношения

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\Lambda},$$

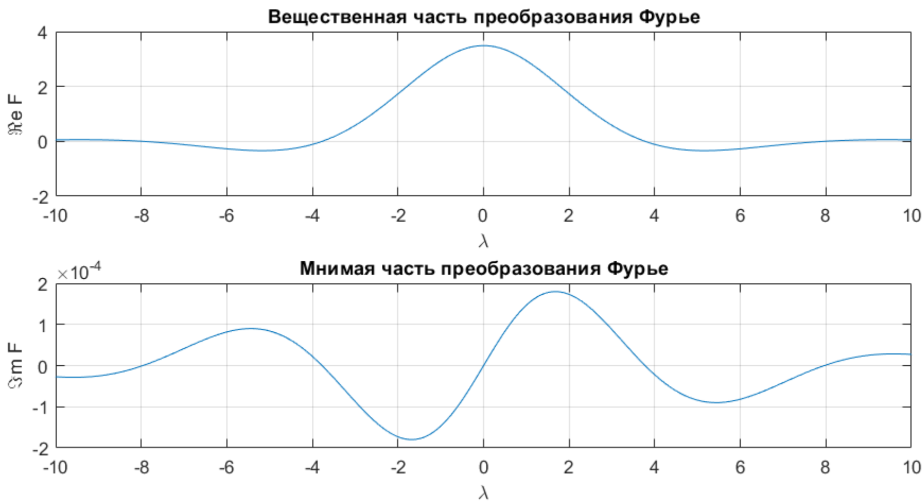
где Δt — шаг дискретизации, а $\Lambda > 0$ ($|\lambda| < \Lambda$) — промежуток, где нужно устранить наложение спектра. В данном случае эффект наложения спектра можно устранить, т.к. функция $F_1(\lambda) \longrightarrow 0$, при $|\lambda| \longrightarrow +\infty$. И чтобы его устранить, нужно увеличить окно и уменьшить шаг дискретизации Δt.

4.3 Третья функция

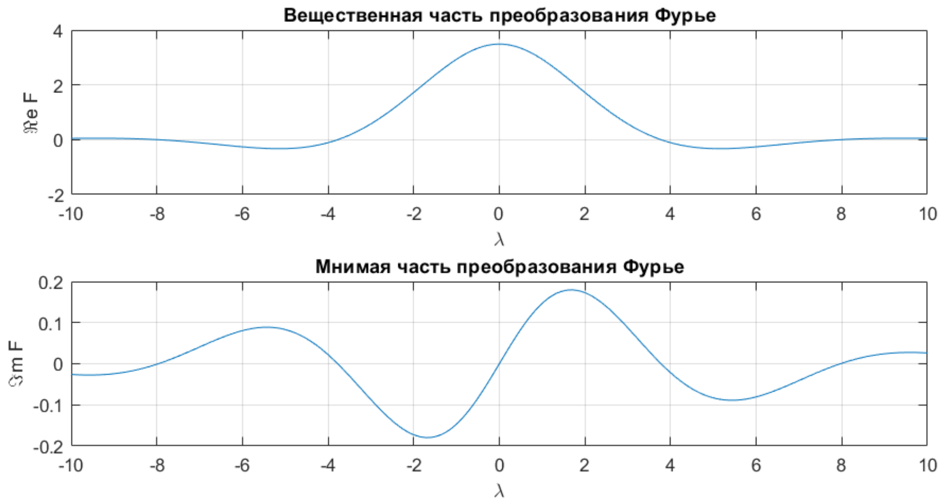
Рассмотрим функцию

$$f_3(t) = \frac{2}{1 + 3t^6}.$$

1. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a;\ b] = [-100;\ 100]$, $[c;\ d] = [-10;\ 10]$



2. $\Delta t = 10^{-1}$, $[a;\ b] = [-100;\ 100]$, $[c;\ d] = [-10;\ 10]$



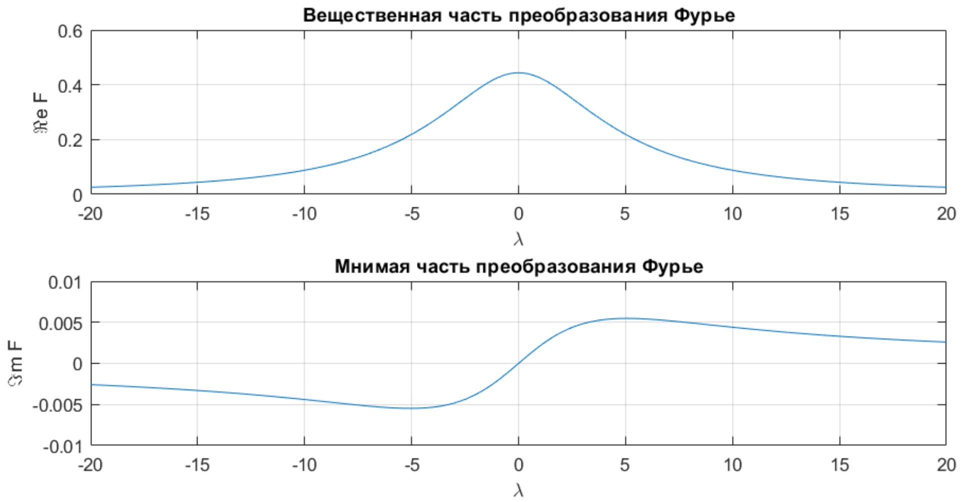
Из приведённых графиков следует:

- Мнимая часть преобразования Фурье равна нулю. Это следует из того, что если мы будем стремить шаг дискретизации к нулю, то максимальное значение преобразования Фурье тоже будет стремиться к нулю.
- Преобразование Фурье данной функции является непрерывным.

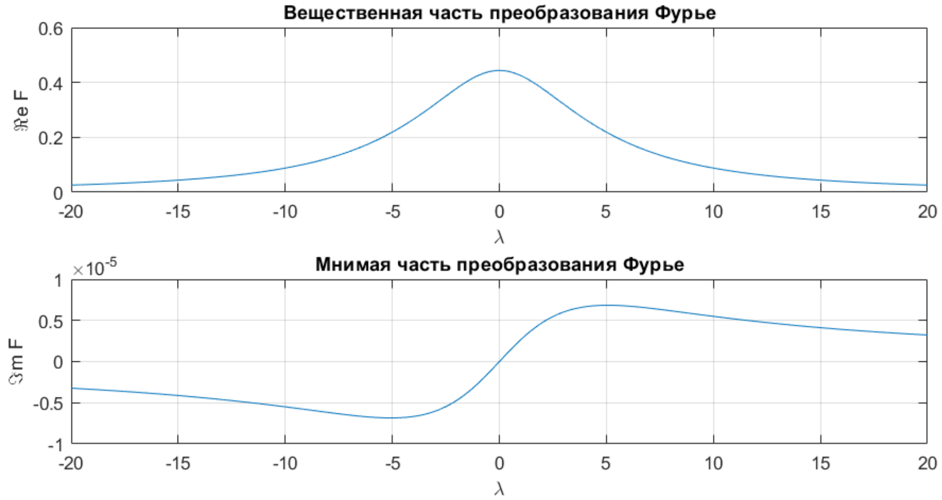
4.4 Четвёртая функция

Рассмотрим функцию:
$$f_4(t) = e^{-5|t|} \cdot ln(3 + t^4).$$

1. $\Delta t = 10^{-2}$, $[a;\ b] = [-100;\ 100]$, $[c;\ d] = [-15;\ 15]$



2. $\Delta t = 10^{-4}$, $[a;\ b] = [-20;\ 300]$, $[c;\ d] = [-20;\ 20]$



Сравнив два графика, видим:

- Существенных изменений не произошло, несмотря на то, что были изменены все параметры. Мнимая часть равна нулю.
- Пробразование Фурье данной функции — непрерывно.

5 Заключение

В ходе выполнения работы:

1. Были вычисленны преобразования Фурье двух функций. Произведено сравнение аналитических преобразований Фурье с их аппроксимациями.

2. Были изучены различные явления, возникающие в ходе аппроксимации преобразования Фурье: рябь, вызванная разрывностью преобразования, рябь, вызванная асимметричностью окна, и эффект наложения хвостов.

3. При использованиибыстрого преобразования Фурье, в силу его дискретной природы, могут быть получены неточные результаты. При правильном же подборе параметров результат будет приближаться к аналитическому решению, а в случае разрывного преобразования — предсказуемо отклоняться от него.

Список литературы

[1] И. В. Рублёв. Лекции по преобразованиям Лапласа-Фурье. 2018

[2] Ильин, В. А. Основы математического анализа. В 2 ч. Ч.2. 5-е изд. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М.: Физматлит, 2009.

[3] А. В. Столяров. Сверстай диплом красиво: LaTeXза три дня. М.: МАКС Пресс, 2010. (http://www.stolyarov.info/books/pdf/latex3days.pdf)