Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Задача управления тележкой»

Студент 315 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1 Постановка задачи **3**

2 Теоремы **4**

2.1 Принцип максимума и условия трансверсальности как необходимые условия оптимальности . . . 4

2.2 Формализация задачи . . . 5

2.3 Вспомогательные утверждения . . . 6

3 Решение задачи при первом типе ограничений на управление **10**

3.1 Режимы акселерации и отсутствия торможения . . . 11

3.2 Режим слабого торможения . . . 12

3.3 Режим сильного торможения . . . 13

4 Решение задачи при втором типе ограничения на управление **15**

4.1 Режим интенсивного торможения . . . 16

1 Постановка задачи

Движение материальной точки на прямой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = u_1 - \dot{x}(1 + u_2),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. На возможные значения управляющих параметров наложены следующие ограничения:

1. либо $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \in [k_1, k_2]$, $k_2 > k_1 > 0$;

2. либо $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_2 \in [k_1, k_2]$, $k_2 > k_1 > 0$.

Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Необходимо за счет выбора программного управления u перевести материальную точку из заданной начальной позиции в такую позицию в момент времени T, в которой $x(T) = L > 0$, $|\dot{x}(T) - S| \leqslant \varepsilon$. На множестве вех реализаций программных управлений, переводящих материальную точку в указанное множество, необходимо решить задачу оптимизации:

$$J = \int\limits_0^T \left(u_1^2(t) + \alpha |u_1(t)|\right) dt \to \min_{u(\cdot)},\ \alpha \geqslant 0.$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам T, k_1, k_2, L, ε, S, α определяет, разрешима ли задача оптимального управления (при одном из указанным двух ограничений на управления). Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Кроме того, программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления, а также моменты переключений.

2. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны. В отчете должны быть приведены примеры оптимальных траекторий для всех возможных качественно различных *режимов*.

Замечание 1. Алгоритм построения оптимальной траектории не должен содержать перебор по параметрам, значения которых не ограничены, а также по более чем двум скалярным параметрам.

2 Теоремы

2.1 Принцип максимума и условия трансверсальности как необходимые условия оптимальности

В этом разделе мы сформулируем принцип максимума для общего случая нелинейных автономных управляемых систем в задаче с подвижными концами на конечном или бесконечном интервале времени. Принцип максимума, вместе с условиями трансверсальности, является необходимым условием, которому должно удовлетворять оптимальное управление. Доказательство этих результатов можно посмотреть в [1][Гл. 5].

Итак, рассмотрим автономный управляемый процесс

$$\dot{x} = f(x, u),$$

с непрерывными $f(x, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$. Пусть X_0 и $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ есть заданные начальное и целевое множества и пусть Ω есть непустое ограничивающее множество в $\mathbb{R}^m$. Допустимое управление $u(t) \in \Omega$ на некотором конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ есть ограниченная измеримая функция, которой соответствует траектория $x(t, x^0)$, переводящая точку $x(0, x^0) = x^0 \in X_0$ в точку $x(t_1, x^0) = x^1 \in X_1$. Конечный момент времени t_1, начальная точка $x^0 \in X_0$ и конечная точка $x^1 \in X_1$ меняются вместе с управлением. Класс всех допустимых управлений обозначим через Δ.

Каждому управлению $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ в Δ с траекторией $x(t)$ поставим в соответствие критерий качества

$$J(u) = \int\limits_0^{t_1} f_0(x(t), u(t))dt,$$

где $f_0(x, u)$ и $\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, u)$ — непрерывные в $\mathbb{R}^{n+m}$ функции. Допустимое управление $u^*(t)$ из Δ является (минимальным) оптимальным, если

$$J(u^*) \leqslant J(u) \text{ для всех } u \in \Delta.$$

Согласно [1][Гл. 5] оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ удовлетворяет принципу максимума

$$\hat{H}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t)) \text{ почти всюду}$$

и

$$\hat{M}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t)) \equiv 0, \ \hat{\psi}_0^*(t) \leqslant 0 \text{ всюду}.$$

Здесь расширенное состояние

$$\hat{x}^*(t) = \begin{bmatrix} x_0^*(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}$$

есть решение расширенной системы уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = f_0(x, u), \\ &\dot{x}_i = f_i(x, u), \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

а $\hat{\psi}^*(t)$ — нетривиальное решение расширенной сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi}_0 = 0,$$
$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*(t),\, u^*(t)), \quad i = 1,\, \ldots,\, n,$$

где последние n уравнений (с $f_0 \equiv 0$) образуют сопряженную систему. Расширенная функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$\hat{H}(\hat{\psi},\, \hat{x},\, u) = \psi_0 \cdot f_0(x,\, u) + \psi_1 \cdot f_1(x,\, u) + \ldots + \psi_n \cdot f_n(x,\, u)$$

и

$$\hat{M}(\hat{\psi},\, \hat{x}) = \max_{u \in \Omega} \hat{H}(\hat{\psi},\, \hat{x},\, u) \text{ (если } \hat{M} \text{ существует).}$$

`Сюда надо бы ещё написать про условия трансверсальности и условия дополняющей нежесткости.`

2.2 Формализация задачи

Перепишем рассматриваемое дифференциальное уравнение (1) в виде системы, построим для нее расширенную функцию Гамильтона–Понтрягина, а также сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 - x_2(1 + u_2). \end{cases} \tag{2}$$

$$\hat{H}(\hat{\psi},\, \hat{x},\, u) = \psi_0 \cdot (u_1^2 + \alpha|u_1|) + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (u_1 - x_2(1 + u_2)), \text{ где } \psi_0 \leqslant 0. \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 + \psi_2(1 + u_2). \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 2. Из принципа максимума следует, что для любой оптимальной траектории системы (2) $\psi_1(t) \equiv \psi_1^0 \equiv \mathrm{const}$.

Замечание 3. Покажем, что задача разрешима только при условии, что $\psi_0 < 0$. Пусть $\psi_0 = 0$, тогда задача максимизации функции Гамильтона–Понтрягина (3) эквивалентна следующей:

$$\psi_2(u_1 - x_2(1 + u_2)) \to \max_{u \in \Delta}$$

В случае заданных первых ограничений на управление (когда $u_1 \geqslant 0$) требуется положить $\psi_2 \leqslant 0$, так как в противном случае максимум не достигается. При таком допущении максимум будет достигнут на управлении $u_1 = 0$, при котором исходная система (2) имеет только тождественно нулевое решение, не удовлетворяющее целевому множеству ни при одном выборе параметров. Для случая со вторым типом ограничений ($u_1 \in \mathbb{R}$) можно рассуждать аналогично.

Также видно, что вторые уравнения исходной и сопряженной систем (2, 4) зависят только от одной переменной, поэтому мы можем найти их вид, применив формулу Коши. Можно проверить, что фундаментальная матрица имеет вид[1]

$$X(t,\tau) = e^{-\int\limits_{\tau}^{t}(1+u_2(s))ds}.$$

Тогда, учитывая начальные условия, получаем искомые выражения:

$$x_2(t) = \int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_\tau^t (1+u(s))\,ds\right\} u_1(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

$$\psi_2(t) = e^{\int\limits_0^t (1+u(s))\,ds}\psi_2^0 - \int\limits_0^T \exp\left\{\int\limits_\tau^t (1+u(s))\,ds\right\}\psi_1^0\,d\tau, \tag{6}$$

где $\psi_2^0 = \psi_2(0)$.

2.3 Вспомогательные утверждения

В данном разделе мы докажем ряд утверждений, которые дадут нам представление о качественном поведении траекторий системы. Для начала ответим на вопрос, когда и в каком направлении *тележка* начинает свое движение.

Утверждение 1. *Если некоторое допустимое управление $u \in \Delta$ такое, что $u(t) = 0$ для всех точек $t \in [0, t_0]$, где $t_0 > 0$, то оно не является оптимальным.*

Доказательство. Покажем, что существует управление $\hat{u} = [\hat{u}_1,\, u_2]^{\mathrm{T}}$ такое, что $J(\hat{u}) < J(u)$. По формуле Коши (5) имеем:

$$x_1(T) = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{\tau} \exp\left\{-\int\limits_\xi^\tau (1+u_2(s))\,ds\right\} u_1(\xi)\,d\xi\,d\tau = L,$$

$$x_2(T) = \int\limits_{t_0}^{T} \exp\left\{-\int\limits_\tau^T (1+u_2(s))\,ds\right\} u_1(\tau)\,d\tau = \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon.$$

Положим M некоторой константой из интервала $0 < M < 1$, конкретной вид которой мы установим ниже. Тогда возьмем

$$\hat{u}_1(t) = \begin{cases} M\,u_1(t+t_0), & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T - t_0 \\ 0, & \text{при } T - t_0 < t \leqslant T. \end{cases}$$

[1] в данном случае фундаментальная матрица имеет размер 1×1

и потребуем, чтобы построенное нами управление было допустимым, то есть чтобы $x_1(T;\,\hat{u}) = L$ и $x_2(T;\,\hat{u}) \leqslant \varepsilon$.

В силу линейности по u_1 формулы Коши $x_1(T - t_0;\,\hat{u}) = LM$, $x_2(T - t_0;\,\hat{u}) = \varepsilon_0 M$. Выпишем формулу Коши на отрезке $T - t_0 \leqslant t \leqslant T$:

$$x_1(t) = LM + \varepsilon_0 M \int_{T-t_0}^{t} \exp\left\{-\int_{T-t_0}^{\tau} (u_2(s) + 1)\,ds\right\} d\tau,$$

$$x_2(t) = \varepsilon_0 M \exp\left\{-\int_{T-t_0}^{\tau} (u_2(s) + 1)\,ds\right\}.$$

Из условия $x_1(T) = L$ получаем, что нужно взять

$$M = \frac{L}{L + \varepsilon_0 \int_{T-t_0}^{T} \exp\left\{-\int_{T-t_0}^{\tau} (u_2(s) + 1)\,ds\right\} d\tau}.$$

Видно, что при таком выборе, действительно $0 < M < 1$ и управление $\hat{u}$ является допустимым. При этом

$$J(\hat{u}_1) = \int\limits_0^T (M^2 u_1^2(t) + \alpha M |u_1(t)|)\,dt < \int\limits_0^T (u_1^2(t) + \alpha |u_1(t)|)\,dt = J(u_1),$$

что и доказывает неоптимальность выбора такого u. ■

В дальнейшем будем рассматривать решения нашей задачи в зависимости от различных наборов заданных параметров L, T, α, ε, k_1, k_2. Предположим, что при наборе параметров задача имеет решение u^*. Тогда обозначим $J_*(L,\,T,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) = J(u^*)$.

Лемма 1. *Пусть* $T_2 > T_1$, *тогда* $J_*(L,\,T_1,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) \geqslant J_*(L,\,T_2,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2)$.

Доказательство. Очевидно, что если $J_*(L,\,T_1,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2)$ достигается на управлении u^*, то управление

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant t < T_2 - T_1 \\ u^*(t - T_2 + T_1), & \text{при } T_2 - T_1 \leqslant t \leqslant T_2 \end{cases}$$

является допустимым управлением, отвечающим случаю $T = T_2$. Утверждение леммы вытекает из соотношения

$$J_*(L,\,T_1,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) = J(\hat{u}) \geqslant J_*(L,\,T_2,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2).$$

■

Лемма 2. *Пусть* $L_2 > L_1$. *Тогда* $J_*(L_2,\,T,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) > J_*(L_1,\,T,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2)$.

Доказательство. По формуле Коши имеем:

$$x_1(T) = \int\limits_0^T \int\limits_0^\tau \exp\left\{-\int\limits_\xi^\tau (1+u_2(s))\,ds\right\} u_1(\xi)\,d\xi\,d\tau = L_2,$$

$$x_2(T) = \int\limits_0^T \exp\left\{-\int\limits_\tau^T (1+u_2(s))\,ds\right\} u_1(\tau)\,d\tau = \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим $c = \frac{L_1}{L_2} < 1$. Положим $\hat{u}_1(t) = cu_1(t)$. При этом $x_1(T;\,\hat{u}) = L_1$, $x_2(T;\,\hat{u}) < \varepsilon$. Но тогда

$$J_*(L_1,\,T,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) \leqslant J(\hat{u}) = \int\limits_0^T (c^2u_1^2 + \alpha c|u_1(t)|)\,dt < \int\limits_0^T (u_1^2(t) + \alpha|u_1(t)|)\,dt = J_*(L_2,\,T,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2),$$

что и требовалось показать. ■

Применим эти рассуждения для выяснения поведения траектории в окрестностях концов отрезка $[0,\,L]$ при ограничениях второго типа, когда $u_1(t) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что на некотором непустом отрезке времени $[t_1,\,t_2]$ имеет место *реверс*, если $x_2(t) < 0$ для каждой точки $t \in [t_1,\,t_2]$. С физической точки зрения, на этом отрезке времени тележка едет в обратном направлении.

Утверждение 2. *Если траектория начинается с реверса или заканчивается реверсом, то она не является оптимальной.*

Доказательство. Пусть допустимое управление u такого, что отвечающая ему траектория имеет реверс на отрезке $[0,\,t_0]$. Поскольку управление допустимо, то $t_0 < T$, иначе в $L > 0$ точка не попадает — значит, в силу непрерывности $x_2(t)$, найдется такой момент времени $\hat{t}$, что $x_2(\hat{t}) = 0$. Обозначим через t_1 первый из таких моментов, когда $x_1(t_1) = -l$, $l > 0$. Пусть $J_1(u) = \int_0^{t_1}(u_1^2(t) + \alpha|u_1(t)|)\,dt > 0$. В силу автономности системы (2) $u(t+t_1)$ — одно из допустимых управлений в задаче с параметрами $(T-t_1,\,L+l,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2)$. Но тогда

$$J(u) = \int\limits_0^T (u_1^2(t) + \alpha|u_1(t)|)\,dt = \int\limits_0^{t_1} (u_1^2(t) + \alpha|u_1(t)|)\,dt + \int\limits_{t_1}^T (u_1^2(t) + \alpha|u_1(t)|)\,dt >$$

$$> J_1 + J_*(T-t_1,\,L+l,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) > J_*(T,\,L,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2),$$

что и доказывает неоптимальность u.

Пусть теперь траектория, отвечающая допустимому управлению u, заканчивается реверсом. Следовательно, мы *проскочили* точку $x_1 = L$ и в конечный момент приближаемся к ней справа. Значит, в силу допустимости управления, найдется такой момент времени $t_1 \in (0,\,T)$, что $x_1(t_1) = L + l > L$, $x_2(t_1) = 0$. Заметим, что управление u при $t \in [0,\,t_1]$

есть одно из допустимых в задаче, отвечающей набору параметров t_1, $L+l$, α, ε, k_1, k_2. Тогда

$$J(u) = \int\limits_0^{t_1} (u_1^2(t)+\alpha|u_1(t)|)\,dt + \int\limits_{t_1}^{T} (u_1^2(t)+\alpha|u_1(t)|)\,dt > J_*(t_1,\, L+l,\, \alpha,\, \varepsilon,\, k_1,\, k_2) > J_*(T,\, L,\, \alpha,\, \varepsilon,\, k_1,\, k_2),$$

что и означает неоптимальность u. ■

3 Решение задачи при первом типе ограничений на управление

В этом пункте рассмотрим ограничения на значения управляющих параметров вида

$$u(t) \in \Omega = \{[u_1,\, u_2]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2 \;:\; u_1 \geqslant 0,\, u_2 \in [k_1,\, k_2]\}.$$

В этом случае задача минимизации равносильна задаче

$$J(u) = \int\limits_0^T \left(u_1(t) + \frac{\alpha}{2}\right)^2 dt \to \min_u, \text{ где } u(t) \in \Omega,\, t \in [0,\, T],$$

при этом задача максимизации функции Гамильтона–Понтрягина эквивалентна задаче максимизации по u

$$\psi_0 \left(u_1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \psi_2(u_1 - x_2(1 + u_2)) \to \max_u, \text{ где } \psi_0 < 0.$$

Поскольку принцип максимума Л. С. Понтрягина определяет значение ψ_0 с точностью до положтельного множителя, положим $\psi_0 = -\frac{1}{2}$. Тогда задача максимизации функции Гамильтона–Понтрягина, очевидно, распадается на максимизации по отдельным компонентам u_1 и u_2:

$$-\frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \psi_2 u_1 \to \max_{u_1 \in [0,\, +\infty)},$$
$$-\psi_2 x_2 u_2 \to \max_{u_2 \in [k_1,\, k_2]}.$$

Эти две задачи имеют следующие решени:

$$u_1 = \begin{cases} \psi_2 - \frac{\alpha}{2}, & \text{при } \psi_2 \geqslant \frac{\alpha}{2} \\ 0, & \text{при } \psi_2 < \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \tag{7}$$

$$u_2 = \begin{cases} k_2, & \text{при } \psi_2 x_2 < 0 \\ [k_1,\, k_2], & \text{при } \psi_2 x_2 = 0 \\ k_1, & \text{при } \psi_2 x_2 > 0. \end{cases} \tag{8}$$

В силу утверждения 1 $u_1(t) > 0$ по меньшей мере в некоторой окрестности нуля, что в сочетании с формулами (6) и (7), накладывает ограничение $\psi_2^0 > \frac{\alpha}{2}$. Аналогично, это разрешает неопределенность формулы (8): в некоторой окрестности нуля $u_2(t) = k_1$, и по непрерывности можно положить[2] $u_2(0) = k_1$. В этой же окрестности поведение системы однозначно определяется фомулой (6), которую, взимая интегралы можно переписать в следующем виде:

$$\psi_2(t) = \underbrace{\psi_2^0 - \frac{\psi_1^0}{k_1 + 1}}_{A} e^{(k_1+1)t} + \underbrace{\frac{\psi_1^0}{k_1 + 1}}_{B}. \tag{9}$$

При этом видно, что задание A и B однозначно определяет вид возможной траектории, *подозреваемой* на оптимальность.

[2]Хотя конкретное значение u_2 в одной точке никакой роли не играет: везде в дальнейшем его вклад в решение будет производиться из-под интеграла.

Выпишем также выражения для $x_2(t)$ и $x_1(t)$:

$$x_2(t) = \frac{1}{k_1+1}\left(A\operatorname{sh}((k_1+1)t) + \left(B-\frac{1}{2}\right)\left(1-e^{-(k_1+1)t}\right)\right), \tag{10}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{k_1+1}\left(A\operatorname{ch}((k_1+1)t) + \left(B-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{k_1+1}\left(1-e^{-(k_1+1)t}\right)\right)\right). \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) верны, пока $u_1(t) \neq 0$ (то есть пока не наступило *выключение* u_1 в момент $\psi_2(t) = \frac{\alpha}{2}$); формула же (9) верна, пока не наступила неопределенность по u_2, то есть пока $\psi_2(t) > 0$.

При этом, если $A > 0$, то $\psi_2(t)$ строго возрастает, и формулы верны при любом t. Если же $A < 0$, то формулы (7) и (8) показывают, что нас будут интересовать моменты времени t_1 и t_2, в которые $\psi_2(t_1) = \frac{\alpha}{2}$ и $\psi_2(t_2) = 0$. В силу строгой монотонности $\psi_2(t)$ эти моменты единственны и $t_1 \leqslant t_2$ (t_1 и t_2 равны только в ситуации, когда параметр α равен нулю). В дальнейшем будем обозначать $x_j^i = x_j(t_i),\ j = 1,\,2,\ i = 1,\,2$.

Всвязи с написанным введем следующую классификацию рассматриваемых управлений (и отвечающих им траекторий):

1. Пусть $A \geqslant 0$. Тогда будем говорить, что управление реализует *режим акселерации.*
2. Пусть $A < 0$.
   (a) Если $t_1 > T$, то будем говорить, что управление реализует *режим отсутствия торможения.*
   (b) Если $t_1 < T,\ t_2 > T$, то будем говорить, что управление реализует *режим слабого торможения.*
   (c) Если $t_2 < T$, то будем говорить, что управление реализует *режим сильного торможения.*

Разберем по порядку каждый из этих режимов. Будем полагать, что оптимальное управление лежит в соответствующем режиме и что для оптимальной траектории $x_2(T) = \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$.

3.1 Режимы акселерации и отсутствия торможения

Как уже было отмечено, в этом случае поведение системы описывается уравнениями (9), (10) и (11).

Из (9) и (10) следует, что соотношения $x_1(T) = L$ и $x_2(T) = \varepsilon_0$ являются линейной системой по A и B. После этого, если $A < 0$, то необходимо проверить условия:

$$B > \frac{\alpha}{2} \qquad \text{и} \qquad t_1 > T \Leftrightarrow \frac{1}{k_1+1}\ln\frac{\frac{\alpha}{2}-B}{A} > T,$$

чтобы проверить, действительно ли реализуется режим отсутствия торможения. Зная A и B, мы получим ψ_1^0 и ψ_2^0, что позволяет полностью восстановить управление и траекторию.

3.2 Режим слабого торможения

От момента времени t_1 до момента T система будет описываться уравнениями:

$$x_2(t) = x_2^1 e^{(k_1+1)(t_1-t)}, \tag{12}$$

$$x_1(t) = x_1^1 + \frac{x_2^1}{k_1+1} + \left(1 - e^{(k_1+1)(t_1-t)}\right). \tag{13}$$

Соотношение $x_2(T) = \varepsilon_0$ дает

$$x_2^1 e^{(k_1+1)t_1} = \varepsilon_0 e^{(k_1+1)T}.$$

Из соотношения $x_1(T) = L$ получается

$$x_1^1 = L - \frac{x_2^1 - \varepsilon_0}{k_1+1}$$

Теперь обозначим за $\eta = e^{(k_1+1)t_1}$:

$$x_1^1 \eta = \eta \left(L + \frac{\varepsilon_0}{k_1+1}\right) - \frac{\varepsilon_0 e^{(k_1+1)T}}{k_1+1}.$$

Учитывая соотношение $A\eta + B = \frac{1}{2}$, выпишем условие $x_2(t_1) = x_2^1$:

$$A\,\mathrm{sh}((k_1+1)t_1) + \left(B - \frac{1}{2}\right)\left(1 - e^{-(k_1+1)t_1}\right) = x_2^1(k_1+1)$$

$$A\left(\frac{\eta^2-1}{2\eta} - \eta + 1\right) = x_2^1(k_1+1)$$

$$-A(\eta-1)^2 = 2(k_1+1)\varepsilon_0 e^{(k_1+1)T}$$

С учетом полученного соотношения распишем условие $x_1(t)\eta = x_1^1\eta$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{A}{k_1+1}\cdot\frac{\eta+\frac{1}{\eta}}{2} + \left(B-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(t_1 - \frac{1}{k_1+1}\cdot\frac{\eta-1}{\eta}\right)\right) &= \\ = \frac{A\eta}{k_1+1}\left(\frac{\eta+\frac{1}{\eta}}{2(k_1+1)} - \eta t_1 + \frac{1-\frac{1}{\eta}}{k_1+1}\right) &= \\ = \frac{\varepsilon_0 e^{(k_1+1)T}}{k_1+1}\cdot\frac{2\eta^2\ln\eta - (\eta^2+2\eta-1)}{(\eta-1)^2}&.\end{aligned} \tag{14}$$

Учитывая, что $t_1 = \frac{1}{k_1+1}\ln\eta$, сопоставим:

$$\eta\left(L + \frac{\varepsilon_0}{k_1+1}\right) - \frac{\varepsilon_0 e^{(k_1+1)T}}{k_1+1} = \varepsilon_0 e^{(k_1+1)T} f(\eta), \tag{15}$$

где $f(\eta) = \frac{2\eta^2\ln\eta - (\eta^2+2\eta-1)}{(\eta-1)^2}$. Отметим, что функция $f(\eta)$ является безразмерной характеристикой режима, не зависящей от параметров k_1, k_2, α, T, L, ε.

Определим монотонность функции $f(\eta)$, посчитав её производную

$$f'(\eta) = \frac{1}{(\eta-1)^2}\left\{\left(4\eta\ln\eta + 2\eta\frac{1}{\eta} - 2\eta - 2\right)(\eta-1)^2 - 2(\eta-1)(2\eta^2\ln\eta - (\eta^2+2\eta-1))\right\} =$$
$$= \frac{1}{(\eta-1)^3}(4\eta^2\ln\eta - 4\eta\ln\eta - 2\eta + 2 - 4\eta^2\ln\eta + 2\eta^2 + 4\eta - 2) =$$
$$= \frac{1}{(\eta-1)^3}(2\eta^2 + 2\eta - 4\eta\ln\eta) =$$
$$= \frac{\eta}{(\eta-1)^3}(2\eta + 2 - 4\ln\eta) > 0, \quad (16)$$

что доказывает строгое возрастание функции $f(\eta)$ на полуинтервале $[1;\, +\infty)$. Аналогично доказывается, что $f''(\eta) < 0$.

Таким образом, геометрически (15) интерпретируется как пересечение прямой, образующей острый угол с осью абцисс, и функцией $C \cdot f(\eta)$, где C — константа. Ясно, что таких точек может быть не более двух.

Зная η, мы однозначно находим ψ_1^0, ψ_2^0 и прочие параметры, необходимые для проверки условий $A < 0$, $t_1 < T$, $t_2 > T$.

3.3 Режим сильного торможения

В этом режиме соотношения (12) и (13) определяют поведение системы на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, а на отрезке $t_2 \leqslant t \leqslant T$ ее буду описывать следующие соотношения

$$x_2(t) = x_2^2 e^{(k_2+1)(t_2-t)}, \quad (17)$$

$$x_1(t) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{k_2+1}\left(1 - e^{(k_2+1)(t_2-t)}\right). \quad (18)$$

Из соотношений $x_1(T) = L$, $x_2(T) = \varepsilon_0$ получаем, что

$$x_2^1 = \varepsilon_0 e^{(k_1+1)(T-t_2)}.$$

Утверждение 3. *Пусть оптимальное управление $u^* = [u_1^*,\, u_2^*]^{\mathrm{T}}$ реализует режим сильного торможения. Тогда $x_2(T;\, u^*) = \varepsilon$.*

Доказательство. Предположим противное, что для некоторого оптимального управления u^*справедливо $x_2(T;\, u^*) = \varepsilon_0 < \varepsilon$. Пусть для этого конкретного управления моменты переключения наступили в t_1 и $\hat{t}_2$. Обозначим $x_i^1 = x_i(t_1;\, u^*)$, $i = 1,\, 2$.

Рассмотрим управление $\hat{u}(t) = Mu^*(t)$. Считаем, что M и момент t_2 (то есть момент переключения) есть некоторые свободные параметры, и рассмотрим следующие функции от них:

$$x_2^2(M,\, t_2) = Mx_2^1 e^{(k_1+1)(t_1-t_2)},$$
$$x_1^2(M,\, t_2) = M\left(x_1^1 + \frac{x_2^1}{k_1+1}\left(1 - e^{(k_1+1)(t_1-t_2)}\right)\right),$$

причем $x_i^2(1,\, \hat{t}_2) = x_i(\hat{t}_2;\, u^*),\ i = 1,\, 2$. Далее рассмотрим функцию

$$F(M,\, t_2) = x_1^2(M,\, t_2) + \frac{x_2^2(M,\, t_2)}{1+k_2}\left(1 - e^{(1+k_1)(t_2-T)}\right) - L.$$

Отметим, что по условию $F(1,\, \hat{t}_2) = 0$. Кроме того

$$\frac{\partial F(M,\, t_2)}{\partial M} = \frac{\partial x_1^2(M,\, t_2)}{\partial M} + \frac{\partial x_2^2(M,\, t_2)}{\partial M} \cdot \frac{1}{k_2+1}\left(1 - e^{(1+k_1)(t_2-T)}\right) =$$

$$= x_1^1 + \frac{x_2^1}{k_1+1}\left(1 - e^{(k_1+1)(t_1-t_2)}\right) + x_2^1 e^{(k_1+1)(t_1-t_2)} > 0, \text{ при } t_2 = \hat{t}_2.$$

Таким образом, мы можем применить теорему о неявной функции (подробно в [2][Гл. 7]). Итак, существуют такие $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$ и такая функция $t_2 = f(M)$, опреледенная при $|t_2 - \hat{t}_2| < \xi_1$, $|M-1| < \xi_2$, что $F(M,\, f(M)) = 0$. Поскольку

$$x_2^2(1,\, \hat{t}_2) e^{(k_2+1)(\hat{t}_2-T)} = \varepsilon_0 < \varepsilon,$$

то найдутся такие $\tilde{M} < 1$ и $\tilde{t}_2 = f(\tilde{M})$, что

$$x_2^2(\tilde{M},\, \tilde{t}_2) e^{(k_2+1)(\tilde{t}_2-T)} \leqslant \varepsilon,$$

что показывает допустимость управления $\hat{u} = [\tilde{M} u_1^*(t),\, \hat{u}_2(t)]^{\mathrm{T}}$, где

$$\hat{u}_2(t) = \begin{cases} k_1, & \text{при } t < \tilde{t}_2 \\ k_2, & \text{при } t > \tilde{t}_2. \end{cases}$$

Но $J(\hat{u}) < J(u^*)$, что противоречит оптимальности u^*. ■

Итак, при реализации случая сильного торможения необходимо, чтобы $x_2(T) = \varepsilon$. Отметим, что при фиксированном t_2 траектория от момента 0 до момента $T - t_2$ есть оптимальная траектория, реализующая режим слабого торможения для набора параметров $L' = x_2^1$, $T' = t_2$, $\varepsilon_0 = x_2^2$, где

$$x_2^2 = \varepsilon e^{(k_2+1)(T-t_2)} \qquad \text{и} \qquad x_1^2 = L - \frac{x_2^2}{k_2+1}\left(1 - e^{(k_2+1)(T-t_2)}\right).$$

Тогда из соотношения (15) при фиксированном t_2 восстанавливаются (в количестве максимум двух наборов) отвечающие ему ψ_1^0 и ψ_2^0.

4 Решение задачи при втором типе ограничения на управление

В этом разделе рассматриваются ограничения на значения управляющих параметров вида

$$u(t) \in \Omega = \{\, [u_1,\, u_2]^{\mathrm{T}} \;:\; u_1 \in \mathbb{R},\; u_2 \in [k_1,\, k_2] \,\}.$$

Функция Гамильтона—Понтрягина принимает вид:

$$\psi_0(u_1^2 + \alpha|u_1|) + \psi_1 x_2 + \psi_2(u_1 - x_2(1 + u_2)), \text{ где } \psi_0 < 0.$$

Задача ее максимизации равносильна

$$-\psi_0(u_1^2 + \alpha|u_1|) + \psi_2(u_1 - x_2(1 + u_2)) \to \max_u .$$

Аналогично первому случаю можно считать, что $\psi_0 = \frac{1}{2}$. Тогда задача максимизации распадается на две:

$$u_1^2 + \alpha|u_1| + \psi_2 u_1 \to \max_{u_1 \in \mathbb{R}},$$

$$-\psi_2 x_2 u_2 \to \max_{u_2 \in [k_1,\, k_2]} .$$

Эти задачи имеют следующие решения:

$$u_1^* = \begin{cases} \psi_2 + \frac{\alpha}{2}, & \text{при } \psi_2 < -\frac{\alpha}{2} \\ 0, & \text{при } -\frac{\alpha}{2} \leqslant \psi_2 \leqslant \frac{\alpha}{2} \\ \psi_2 - \frac{\alpha}{2}, & \text{при } \psi_2 > \frac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

$$u_2^* = \begin{cases} k_2, & \text{при } \psi_2 x_2 < 0 \\ [k_1,\, k_2], & \text{при } \psi_2 x_2 = 0 \\ k_1, & \text{при } \psi_2 x_2 > 0. \end{cases}$$

Теорема 1 требует, чтобы $\psi_2^0 > \frac{\alpha}{2}$. Аналогично в некоторой окрестности нуля систему описывают соотношения (9),(10),(11). Все так же нас будут интересовать моменты t_1 и t_2, в которые $\psi_2(t_1) = \frac{\alpha}{2}$ и $\psi_2(t_2) = 0$, а также момент времени t_3 такой, что $\psi_2(t_3) = -\frac{\alpha}{2}$. Введем классификацию рассматриваемых управлений.

1. Пусть $A \geqslant 0$. Тогда будем говорить, что управление реализует *режим акселерации*.
2. Пусть $A < 0$.
   (a) Если $t_1 > T$, то будем говорить, что управление реализует *режим отсутствия торможения*.
   (b) Если $t_1 < T,\ t_2 > T$, то будем говорить, что управление реализует *режим слабого торможения*.
   (c) Если $t_2 < T,\ t_3 > T$, то будем говорить, что управление реализует *режим сильного торможения*.
   (d) Если $t_3 < T$, то будем говорить, что управление реализует *режим интенсивного торможения*.

При этом видно, что режимы акселерации, отсутствия и слабого торможения дословно переносятся на случай второго типа ограничений на управления. В случае же сильного торможения необходимо добавить единственную проверку.

4.1 Режим интенсивного торможения

При $t \in [t_2,\, T]$

$$\psi_2(t) = -\int\limits_{t_2}^{t} e^{(k_2+1)(t-\tau)}\, d\tau = \frac{B(k_1+1)}{k_2+1}\left(1 - e^{(k_2+1)(t-t_2)}\right),$$

откуда

$$t_3 = t_2 + \frac{1}{k_2+1}\ln\left(\frac{k_2+1}{2B(k_1+1)} + 1\right).$$

Обозначим для краткости $C = B\frac{k_1+1}{k_2+1}$. Теперь мы можем выписать уравнения, описывающие поведение системы на отрезке $[t_2,\, T]$:

$$x_2(t) = x_1^3 e^{(k_2+1)(t_3-t)} + \int\limits_{t_3}^{t} e^{(k_2+1)(\tau-t)}\left(C + \frac{1}{2} + Ce^{(k_2+1)(\tau-t_2)}\right) d\tau =$$
$$= x_2^3 e^{(k_2+1)(t_3-t)} + \frac{1}{k_2+1}\left\{\left(C+\frac{1}{2}\right)\left(1 - e^{(k_2+1)(t_3-t)}\right) - \frac{C}{2}\left(e^{(k_2+1)(t-t_2)} - e^{(k_2+1)(2t_3-t-t_2)}\right)\right\}. \tag{19}$$

$$x_1(t) = x_1^3 + \int\limits_{t_3}^{t} x_2(\tau)\, d\tau =$$
$$= x_1^3 + \frac{x_2^3}{k_2+1}\left(1 - e^{(k_2+1)(t_3-t)}\right) + \frac{1}{k_2+1}\left\{\left(C+\frac{1}{2}\right)\left(t - t_3 - \frac{1}{k_2+1}\left(1 - e^{(k_2+1)(t_3-t)}\right)\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{C}{2(k_2+1)}\left(e^{(k_2+1)(t-t_2)} - 2e^{(k_2+1)(t_3-t_2)} + e^{(k_2+1)(2t_3-t-t_2)}\right)\right\}. \tag{20}$$

Список литературы

[1] Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М: Наука, 1972.

[2] В. А. Зорич. Математический анализ. М: Издательство МЦНМО, 2007.