Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Задача управления тележкой»

Студент 315 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1 Постановка задачи

Движение материальной точки на прямой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = u_1 - \dot{x}(1 + u_2),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $u = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. На возможные значения управляющих параметров наложены следующие ограничения:

1. либо $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \in [k_1, k_2]$, $k_2 > k_1 > 0$;
2. либо $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_2 \in [k_1, k_2]$, $k_2 > k_1 > 0$.

Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Необходимо за счет выбора программного управления u перевести материальную точку из заданной начальной позиции в такую позицию в момент времени T, в которой $x(T) = L > 0$, $|\dot{x}(T) - S| \leqslant \varepsilon$. На множестве вех реализаций программных управлений, переводящих материальную точку в указанное множество, необходимо решить задачу оптимизации:

$$J = \int\limits_0^T \left(u_1^2(t) + \alpha |u_1(t)|\right) dt \to \min_{u(\cdot)},\ \alpha \geqslant 0.$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам T, k_1, k_2, L, ε, S, α определяет, разрешима ли задача оптимального управления (при одном из указанным двух ограничений на управления). Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Кроме того, программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления, а также моменты переключений.
2. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны. В отчете должны быть приведены примеры оптимальных траекторий для всех возможных качественно различных *режимов*.

Замечание 1. Алгоритм построения оптимальной траектории не должен содержать перебор по параметрам, значения которых не ограничены, а также по более чем двум скалярным параметрам.

2 Теоремы

2.1 Принцип максимума и условия трансверсальности как необходимые условия оптимальности

В этом разделе мы сформулируем принцип максимума для общего случая нелинейных автономных управляемых систем в задаче с подвижными концами на конечном или бесконечном интервале времени. Принцип максимума, вместе с условиями трансверсальности, является необходимым условием, которому должно удовлетворять оптимальное управление. Доказательство этих результатов можно посмотреть в [1][Гл. 5].

Итак, рассмотрим автономный управляемый процесс

$$\dot{x} = f(x, u),$$

с непрерывными $f(x, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$. Пусть X_0 и $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ есть заданные начальное и целевое множества и пусть Ω есть непустое ограничивающее множество в $\mathbb{R}^m$. Допустимое управление $u(t) \in \Omega$ на некотором конечном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ есть ограниченная измеримая функция, которой соответствует траектория $x(t, x^0)$, переводящая точку $x(0, x^0) = x^0 \in X_0$ в точку $x(t_1, x^0) = x^1 \in X_1$. Конечный момент времени t_1, начальная точка $x^0 \in X_0$ и конечная точка $x^1 \in X_1$ меняются вместе с управлением. Класс всех допустимых управлений обозначим через Δ.

Каждому управлению $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$ в Δ с траекторией $x(t)$ поставим в соответствие критерий качества

$$J(u) = \int\limits_0^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt,$$

где $f_0(x, u)$ и $\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, u)$ — непрерывные в $\mathbb{R}^{n+m}$ функции. Допустимое управление $u^*(t)$ из Δ является (минимальным) оптимальным, если

$$J(u^*) \leqslant J(u) \text{ для всех } u \in \Delta.$$

Согласно [1][Гл. 5] оптимальное управление $u^*(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ удовлетворяет принципу максимума

$$\hat{H}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t)) \text{ почти всюду}$$

и

$$\hat{M}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t)) \equiv 0, \ \hat{\psi}_0^*(t) \leqslant 0 \text{ всюду.}$$

Здесь расширенное состояние

$$\hat{x}^*(t) = \begin{bmatrix} x_0^*(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}$$

есть решение расширенной системы уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = f_0(x, u), \\ &\dot{x}_i = f_i(x, u), \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

а $\hat{\psi}^*(t)$ — нетривиальное решение расширенной сопряженной системы уравнений

$$\dot{\psi}_0 = 0,$$
$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*(t),\, u^*(t)), \quad i = 1,\, \ldots,\, n,$$

где последние n уравнений (с $f_0 \equiv 0$) образуют сопряженную систему. Расширенная функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$\hat{H}(\hat{\psi},\, \hat{x},\, u) = \psi_0 \cdot f_0(x,\, u) + \psi_1 \cdot f_1(x,\, u) + \ldots + \psi_n \cdot f_n(x,\, u)$$

и

$$\hat{M}(\hat{\psi},\, \hat{x}) = \max_{u \in \Omega} \hat{H}(\hat{\psi},\, \hat{x},\, u) \text{ (если } \hat{M} \text{ существует).}$$

`Сюда надо бы ещё написать про условия трансверсальности и условия дополняющей нежесткости.`

2.2 Формализация задачи

Перепишем рассматриваемое дифференциальное уравнение (1) в виде системы, построим для нее расширенную функцию Гамильтона–Понтрягина, а также сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 - x_2(1 + u_2). \end{cases} \tag{2}$$

$$\hat{H}(\hat{\psi},\, \hat{x},\, u) = \psi_0 \cdot (u_1^2 + \alpha|u_1|) + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (u_1 - x_2(1 + u_2)), \text{ где } \psi_0 \leqslant 0. \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = \psi_1 + \psi_2(1 + u_2). \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 2. Из принципа максимума следует, что для любой оптимальной траектории системы (2) $\psi_1(t) \equiv \psi_1^0 \equiv \mathrm{const}$.

Замечание 3. Покажем, что задача разрешима только при условии, что $\psi_0 < 0$. Пусть $\psi_0 = 0$, тогда задача максимизации функции Гамильтона–Понтрягина (3) эквивалентна следующей:

$$\psi_2(u_1 - x_2(1 + u_2)) \to \max_{u \in \Delta}$$

В случае заданных первых ограничений на управление (когда $u_1 \geqslant 0$) требуется положить $\psi_2 \leqslant 0$, так как в противном случае максимум не достигается. При таком допущении максимум будет достигнут на управлении $u_1 = 0$, при котором исходная система (2) имеет только тождественно нулевое решение, не удовлетворяющее целевому множеству ни при одном выборе параметров. Для случая со вторым типом ограничений ($u_1 \in \mathbb{R}$) можно рассуждать аналогично.

Также видно, что вторые уравнения исходной и сопряженной систем (2, 4) зависят только от одной переменной, поэтому мы можем найти их вид, применив формулу Коши. Можно проверить, что фундаментальная матрица имеет вид[1]

$$X(t,\tau) = e^{-\int\limits_{\tau}^{t}(1+u_2(s))ds}.$$

Тогда, учитывая начальные условия, получаем искомые выражения:

$$x_2(t) = \int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_{\tau}^{t}(1+u(s))\,ds\right\} u_1(\tau)\,d\tau, \tag{5}$$

$$\psi_2(t) = e^{\int\limits_0^t (1+u(s))\,ds}\psi_2^0 - \int\limits_0^T \exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t}(1+u(s))\,ds\right\}\psi_1^0\,d\tau, \tag{6}$$

где $\psi_2^0 = \psi_2(0)$.

2.3 Вспомогательные утверждения

В данном разделе мы докажем ряд утверждений, которые дадут нам представление о качественном поведении траекторий системы. Для начала ответим на вопрос, когда и в каком направлении *тележка* начинает свое движение.

Утверждение 1. *Если некоторое допустимое управление $u \in \Delta$ такое, что $u(t) = 0$ для всех точек $t \in [0, t_0]$, где $t_0 > 0$, то оно не является оптимальным.*

Доказательство. Покажем, что существует управление $\hat{u} = [\hat{u}_1,\, u_2]^{\mathrm{T}}$ такое, что $J(\hat{u}) < J(u)$. По формуле Коши (5) имеем:

$$x_1(T) = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{t_0}^{\tau} \exp\left\{-\int\limits_{\xi}^{\tau}(1+u_2(s))\,ds\right\} u_1(\xi)\,d\xi\,d\tau = L,$$

$$x_2(T) = \int\limits_{t_0}^{T} \exp\left\{-\int\limits_{\tau}^{T}(1+u_2(s))\,ds\right\} u_1(\tau)\,d\tau = \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon.$$

Положим M некоторой константой из интервала $0 < M < 1$, конкретной вид которой мы установим ниже. Тогда возьмем

$$\hat{u}_1(t) = \begin{cases} M\,u_1(t+t_0), & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T - t_0 \\ 0, & \text{при } T - t_0 < t \leqslant T. \end{cases}$$

[1] в данном случае фундаментальная матрица имеет размер 1×1

и потребуем, чтобы построенное нами управление было допустимым, то есть чтобы $x_1(T;\,\hat{u}) = L$ и $x_2(T;\,\hat{u}) \leqslant \varepsilon$.

В силу линейности по u_1 формулы Коши $x_1(T - t_0;\,\hat{u}) = LM$, $x_2(T - t_0;\,\hat{u}) = \varepsilon_0 M$. Выпишем формулу Коши на отрезке $T - t_0 \leqslant t \leqslant T$:

$$x_1(t) = LM + \varepsilon_0 M \int_{T-t_0}^{t} \exp\left\{ -\int_{T-t_0}^{\tau} (u_2(s) + 1)\, ds \right\} d\tau,$$

$$x_2(t) = \varepsilon_0 M \exp\left\{ -\int_{T-t_0}^{\tau} (u_2(s) + 1)\, ds \right\}.$$

Из условия $x_1(T) = L$ получаем, что нужно взять

$$M = \frac{L}{L + \varepsilon_0 \int_{T-t_0}^{T} \exp\left\{ -\int_{T-t_0}^{\tau} (u_2(s) + 1)\, ds \right\} d\tau}.$$

Видно, что при таком выборе, действительно $0 < M < 1$ и управление $\hat{u}$ является допустимым. При этом

$$J(\hat{u}_1) = \int\limits_0^T (M^2 u_1^2(t) + \alpha M |u_1(t)|)\, dt < \int\limits_0^T (u_1^2(t) + \alpha |u_1(t)|)\, dt = J(u_1),$$

что и доказывает неоптимальность выбора такого u. ■

В дальнейшем будем рассматривать решения нашей задачи в зависимости от различных наборов заданных параметров L, T, α, ε, k_1, k_2. Предположим, что при наборе параметров задача имеет решение u^*. Тогда обозначим $J_*(L,\,T,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) = J(u^*)$.

Лемма 1. *Пусть $T_2 > T_1$, тогда $J_*(L,\,T_1,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) \geqslant J_*(L,\,T_2,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2)$.*

Доказательство. Очевидно, что если $J_*(L,\,T_1,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2)$ достигается на управлении u^*, то управление

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant t < T_2 - T_1 \\ u^*(t - T_2 + T_1), & \text{при } T_2 - T_1 \leqslant t \leqslant T_2 \end{cases}$$

является допустимым управлением, отвечающим случаю $T = T_2$. Утверждение леммы вытекает из соотношения

$$J_*(L,\,T_1,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) = J(\hat{u}) \geqslant J_*(L,\,T_2,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2).$$

■

Лемма 2. *Пусть $L_2 > L_1$. Тогда $J_*(L_2,\,T,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2) > J_*(L_1,\,T,\,\alpha,\,\varepsilon,\,k_1,\,k_2)$.*

Доказательство. По формуле Коши имеем:

$$x_1(T) = \int\limits_0^T \int\limits_0^\tau \exp\left\{ -\int\limits_\xi^\tau (1 + u_2(s))\, ds \right\} u_1(\xi)\, d\xi\, d\tau = L_2,$$

$$x_2(T) = \int\limits_0^T \exp\left\{ -\int\limits_\tau^T (1 + u_2(s))\, ds \right\} u_1(\tau)\, d\tau = \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon.$$

Обозначим $c = \frac{L_1}{L_2} < 1$. Положим $\hat{u}_1(t) = cu_1(t)$. При этом $x_1(T;\, \hat{u}) = L_1,\ x_2(T;\, \hat{u}) < \varepsilon$. Но тогда

$$J_*(L_1,\, T,\, \alpha,\, \varepsilon,\, k_1,\, k_2) \leqslant J(\hat{u}) = \int\limits_0^T (c^2 u_1^2 + \alpha c|u_1(t)|)\, dt < \int\limits_0^T (u_1^2(t) + \alpha|u_1(t)|)\, dt = J_*(L_2,\, T,\, \alpha,\, \varepsilon,\, k_1,\, k_2),$$

что и требовалось показать. ■

Применим эти рассуждения для выяснения поведения траектории в окрестностях концов отрезка $[0,\, L]$ при ограничениях второго типа, когда $u_1(t) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что на некотором непустом отрезке времени $[t_1,\, t_2]$ имеет место *реверс*, если $x_2(t) < 0$ для каждой точки $t \in [t_1,\, t_2]$. С физической точки зрения, на этом отрезке времени тележка едет в обратном направлении.

Утверждение 2. *Если траектория начинается с реверса или заканчивается реверсом, то она не является оптимальной.*

Доказательство. Пусть допустимое управление u такого, что отвечающая ему траектория имеет реверс на отрезке $[0,\, t_0]$. Поскольку управление допустимо, то $t_0 < T$, иначе в $L > 0$ точка не попадает — значит, в силу непрерывности $x_2(t)$, найдется такой момент времени $\hat{t}$, что $x_2(\hat{t}) = 0$. Обозначим через t_1 первый из таких моментов, когда $x_1(t_1) = -l,\ l > 0$. ■

Список литературы

[1] Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М: Наука, 1972.