



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Линейная задача быстродействия»

Студент 315 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Вычисление опорных функций	4
2.1	Вычисление опорной функции множества \mathcal{X}_0	4
2.2	Вычисление опорной функции множества \mathcal{X}_1	4
2.3	Вычисление опорной функции множества Ω	6
3	Принцип максимума Л. С. Понтрягина	9
4	Алгоритм работы программы	10
4.1	Методы улучшения точности алгоритма	11
5	Примеры работы программы	13
5.1	Описание программного решения	13
5.2	A с вещественными собственными значениями	14

1 Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (1)$$

Здесь $x(t), u(t) \in \mathbb{R}^2$, $A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. На значения управляющих параметров u наложено ограничение: $u(t) \in \Omega$. Пусть X_0 — начальное множество значений фазового вектора, X_2 — целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстрогодействия, то есть найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы (1), выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества X_0 , может попасть в некоторую точку множества X_1 .

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 \leq x_2 \leq b - cx_1^2\}, \quad a, b, c > 0;$$

X_0 — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 ,

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : Gx + g \leq 0\}, \quad G \in \mathbb{R}^{m \times 2}, g \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}.$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам $A(\cdot), B(\cdot), t_0, a, b, c, x_0, x_1, r, m, G, g$ определяет, разрешима ли задача быстрогодействия. Если задача разрешима, то программа должна (приблизённо) найти значение T , построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряжённых переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной „оптимальной“ траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счёт изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближённых результатов.
2. В соответствующем заданию отчёте необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы A). Необходимо также исследовать на непрерывность величину T по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

2 Вычисление опорных функций

В наших рассуждениях важную роль играет выпуклая функция, которая называется опорной функцией множества. Рассмотрим \mathbb{R}^n — евклидово пространство и X — его непустое подмножество.

Определение 1. *Опорная функция* множества $X \subset \mathbb{R}^n$ определена на \mathbb{R}^n соотношением

$$\rho(l | X) = \sup_{x \in X} \langle l, x \rangle, \quad l \in \mathbb{R}^n.$$

2.1 Вычисление опорной функции множества \mathcal{X}_0

Напомним, что множество $\mathcal{X}_0 = B_r(x_0)$, то есть шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 . Видно, что данное множество можно разложить в сумму двух множеств по Минковскому:

$$\mathcal{X}_0 = B_r(x_0) = B_r(0) + \{x_0\}.$$

Утверждение 2.1.1. *Опорная функция аддитивна по второму аргументу:*

$$\rho(l | A + B) = \rho(l | A) + \rho(l | B),$$

где под $A + B$ понимается сумма Минковского $A + B := \{a + b \in \mathbb{R}^n : a \in A, b \in B\}$.

Доказательство. Приведём простейшую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \rho(l | A + B) &= \sup_{x \in A+B} \langle l, x \rangle = \sup_{a \in A, b \in B} \langle l, a + b \rangle = \\ &= \sup_{a \in A} \langle l, a \rangle + \sup_{b \in B} \langle l, b \rangle = \rho(l | A) + \rho(l | B). \end{aligned}$$

■

Тогда, очевидно, опорная функция множества \mathcal{X}_0 имеет вид:

$$\boxed{\rho(l | \mathcal{X}_0) = \langle l, x_0 \rangle + r |l|}. \quad (2)$$

2.2 Вычисление опорной функции множества \mathcal{X}_1

Напомним, что множество \mathcal{X}_1 имеет вид

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : Gx + g \leq 0\}, \quad G \in \mathbb{R}^{m \times 2}, g \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N},$$

то есть задаётся пересечением множеств, задаваемых неравенствами:

$$G_{i1}x_1 + G_{i2}x_2 \leq -g_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Каждое из неравенств представляет собой полуплоскость, ограниченную линейной функцией $x_2 = -\frac{G_{i1}}{G_{i2}}x_1 - \frac{g_i}{G_{i2}}$. Рассмотрим возможные пересечения таких множеств:

Пустое множество. Действительно, можно подобрать параметры, при которых множество \mathcal{X}_1 будет пустым. Например, при

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Этот случай нас не интересует, так как при таких условиях поставленная задача не имеет смысла.

Полуплоскость. Приведём пример полуплоскости:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = (1).$$

Пусть полуплоскость задана неравенством $\alpha x_1 + \beta x_2 \leq \gamma$, тогда

$$\rho(l | \mathcal{X}_1) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} l_2, & l = (\alpha, \beta)^T \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Полоса. Назовём полосой множество, лежащее между двумя параллельными прямыми на плоскости. Такая ситуация возможна, например, при

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть множество задано прямыми $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma_1$ и $-\alpha x_1 - \beta x_2 = \gamma_2$. Тогда

$$\rho(l | \mathcal{X}_1) = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{\beta} l_2, & l = (\alpha, \beta)^T \\ \frac{\gamma_2}{\beta} l_2, & l = (-\alpha, -\beta)^T \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Прямая. Действительно, можно подобрать параметры так, чтобы множество \mathcal{X}_1 вырождилось в прямую. Например, при

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть прямая задана уравнением $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$, тогда

$$\rho(l | \mathcal{X}_1) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} l_2, & l = \pm(\alpha, \beta)^T \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Множество с кусочно-линейной границей. Действительно, при последовательном отсечении от множества конечного числа полуплоскостей, очевидно, получается множество, граница которого представляет собой объединение конечного отрезков или прямых. Рассмотрим этот случай более подробно.

Докажем, что множество \mathcal{X}_1 является выпуклым. В этом нам поможет следующее утверждение.

Утверждение 2.2.1. Пересечение любого числа выпуклых множеств $X_\sigma \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \Sigma$ является выпуклым множеством.

Доказательство. Возьмём произвольные точки $x, y \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$. Каждое из множеств X_σ является выпуклым. Поэтому $[x, y] \subset X_\sigma$ для любого $\sigma \in \Sigma$. Отсюда $[x, y] \subset \bigcap_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$. Что по определению означает выпуклость пересечения множеств $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$. ■

Введём важное для нашей работы понятие крайней точки выпуклого множества. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество.

Определение 2. Точка $x_0 \in X$ называется *крайней точкой множества X* , если не существует таких точек $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, что $x_0 \in (x_1, x_2)$ (то есть $x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ для некоторого $\alpha : 0 < \alpha < 1$). Множество крайних точек множества X обозначается через $\text{ext}(X)$.

Утверждение 2.2.2. Множество \mathcal{X}_1 — выпуклое и замкнутое.

Доказательство этого факта опирается на то, что множество \mathcal{X}_1 является пересечением полуплоскостей, каждая из которых, очевидно, выпуклое и замкнутое множество. Пересечение же замкнутых и выпуклых множеств, как известно, также замкнутое и выпуклое множество соответственно.

$$\rho(l | \mathcal{X}_1) = \begin{cases} \max_{x \in \text{ext} \mathcal{X}_1} \langle l, x \rangle, & \text{если } \nexists \varepsilon > 0 : \arg\max_{x \in \text{ext} \mathcal{X}_1} \langle l, x \rangle + \varepsilon l \in \mathcal{X}_1 \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

2.3 Вычисление опорной функции множества Ω

Заметим, что множество

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 \leq x_2 \leq b - cx_1^2\}, \quad a, b, c > 0$$

является пересечением двух множеств:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 \leq x_2\}, & a > 0, \\ \Omega_2 &= \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq b - cx_1^2\}, & b, c > 0. \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \sqrt{\frac{b}{a+c}}, \\ x_{12} &= -x_{11}, \\ x_{20} &= \frac{ab}{a+c}. \end{aligned}$$

Также отметим, что (x_{11}, x_{20}) и (x_{12}, x_{20}) являются точками пересечения парабол $ax_1^2 = x_2$ и $b - cx_1^2 = x_2$. При $l_2 \leq 0$ имеет смысл рассматривать множество Ω_1 с ограничением $x_2 \leq x_{20}$, а при $l_2 \geq 0$ — Ω_2 с ограничением $x_2 \geq x_{20}$.

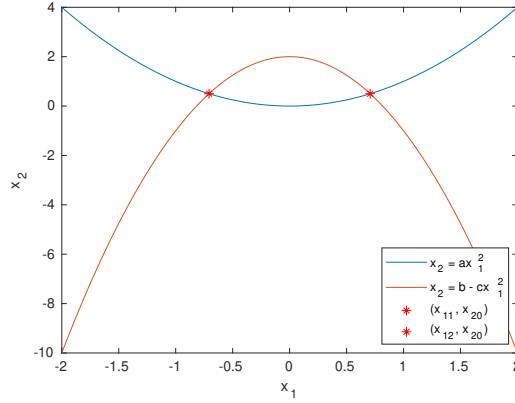


Рис. 1: Уравнения, ограничивающие множество Ω .

Посчитаем опорную функцию множества Ω_1 при $l_2 \leq 0$:

$$\rho(l | \Omega_1) = \sup_{x \in \Omega_1} \langle x, l \rangle = \sup_{x \in \Omega_1} (x_1 l_1 + x_2 l_2) = \sup_{x \in \Omega_1} (x_1 l_1 + a x_1^2 l_2).$$

Найдём экстремум по x_1 :

$$(x_1 l_1 + a x_1^2 l_2)' = 0$$

$$l_1 - 2a x_1 l_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{l_1}{2a l_2},$$

откуда $x_2 = a x_1^2 = \frac{l_1^2}{4a l_2^2}$.

Посчитаем опорную функцию множества Ω_2 при $l_2 \geq 0$:

$$\rho(l | \Omega_2) = \sup_{x \in \Omega_2} \langle x, l \rangle = \sup_{x \in \Omega_2} (x_1 l_1 + x_2 l_2) = \sup_{x \in \Omega_2} (x_1 l_1 + b - c x_1^2 l_2).$$

Найдём экстремум по x_1 :

$$(x_1 l_1 + b - c x_1^2 l_2)' = 0$$

$$l_1 - 2c x_1 l_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{l_1}{2c l_2},$$

откуда $x_2 = b - c x_1^2 = b - \frac{l_1^2}{4c l_2^2}$.

Подведём итог:

$$\rho(l | \Omega) = \begin{cases} \frac{l_1^2}{2al_2} + \frac{l_1^2}{4al_2}, & \text{при } l_2 \leq 0, \frac{l_1^2}{4al_2^2} \leq x_{20} \\ x_{12}l_1 + x_{20}l_2, & \text{при } l_2 \leq 0, \frac{l_1^2}{4al_2^2} > x_{20}, l_1 < 0 \\ x_{11}l_1 + x_{20}l_2, & \text{при } l_2 \leq 0, \frac{l_1^2}{4al_2^2} > x_{20}, l_1 > 0 \\ \frac{l_1^2}{2cl_2} + \left(b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2}\right) l_2, & \text{при } l_2 \geq 0, b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2} \geq x_{20} \\ x_{12}l_1 + x_{20}l_2, & \text{при } l_2 \geq 0, b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2} < x_{20}, l_1 < 0 \\ x_{11}l_1 + x_{20}l_2, & \text{при } l_2 \geq 0, b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2} < x_{20}, l_1 > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Максимизатором является элемент

$$x = \begin{cases} \left[\frac{l_1^2}{2al_2}, \frac{l_1^2}{4al_2^2} \right]^T, & \text{при } l_2 \leq 0, \frac{l_1^2}{4al_2^2} \leq x_{20} \\ [x_{12}, x_{20}]^T, & \text{при } l_2 \leq 0, \frac{l_1^2}{4al_2^2} > x_{20}, l_1 < 0 \\ [x_{11}, x_{20}]^T, & \text{при } l_2 \leq 0, \frac{l_1^2}{4al_2^2} > x_{20}, l_1 > 0 \\ \left[\frac{l_1}{2cl_2}, b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2} \right]^T, & \text{при } l_2 \geq 0, b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2} \geq x_{20} \\ [x_{12}, x_{20}]^T, & \text{при } l_2 \geq 0, b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2} < x_{20}, l_1 < 0 \\ [x_{11}, x_{20}]^T, & \text{при } l_2 \geq 0, b - \frac{l_1^2}{4cl_2^2} < x_{20}, l_1 > 0. \end{cases}$$

3 Принцип максимума Л. С. Понтрягина

В этом разделе мы сформулируем принцип максимума и условия трансверсальности как необходимые условия существования оптимального управления для линейных систем. Вернёмся к заданной линейной задаче быстрогодействия (1):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, T],$$

$$x(t_0) \in \mathcal{X}_0, \quad x(T) \in \mathcal{X}_1,$$

$$u(t) \in \Omega,$$

$$T - t_0 \rightarrow \inf.$$

Определение 3. Пара (x^*, u^*) называется *оптимальной* для задачи (1), если она удовлетворяет её условиям.

Теорема 1 (Принцип максимума Л. С. Понтрягина). Пусть (x^*, u^*) — оптимальная пара на $[t_0, T]$, являющаяся решением задачи быстрогодействия. Тогда существует функция $\psi(t)$, определенная при $t \geq t_0$, являющаяся решением сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^T(t)\psi(t) \\ \psi(t_0) = \psi_0 \neq 0 \end{cases}$$

такая, что выполнены следующие условия:

- Принцип максимума

$$\langle Bu^*(t), \psi(t) \rangle = \rho(\psi(t) | B\Omega),$$

для всех $t \geq t_0$, кроме точек разрыва функции $u^*(t)$.

- Условие трансверсальности на левом конце:

$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) | \mathcal{X}_0),$$

то есть $x^*(t_0)$ есть опорный вектор множества \mathcal{X}_0 в направлении $\psi(t_0)$.

- Условие трансверсальности на правом конце:

$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) | \mathcal{X}_1),$$

то есть $x^*(t_1)$ есть опорный вектор множества \mathcal{X}_0 в направлении $\psi(t_1)$.

4 Алгоритм работы программы

Пусть $\psi(t)$ — решение сопряженной системы, тогда $\lambda\psi(t)$ также является решением этой системы. В таком случае, не ограничивая общности, можем положить $\|\psi(t_0)\| = 1$. Поэтому для решения поставленной задачи можно организовать перебор $\psi(t_0)$ по единичной окружности и решить сопряженную систему для начального условия $\psi(t_0)$. Затем, применяя условие трансверсальности для левого конца, можем найти значение $x(t_0)$ для перебираемого $\psi(t_0)$:

$$\rho(\psi(t_0) | \mathcal{X}_0) = \langle \psi(t_0), x_0 \rangle + r\|\psi(t_0)\| = \langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle$$

$$x^*(t_0) = x_0 + r\psi(t_0).$$

Из принципа максимума найдем допустимые управления $u(t)$:

$$\langle B^T(t)\psi(t), u(t) \rangle = \rho(B^T(t)\psi(t) | \Omega).$$

Положив $l(t) = B^T(t)\psi(t)$, получаем, что $u(t)$ есть опорный вектор множества Ω в направлении $l(t)$.

Условие трансверсальности на правом конце утверждает, что вектор $\psi(t_1)$ и вектор внешней нормали целевого множества в точке $x(t_1)$ сонаправлены. Таким образом, мы можем ввести погрешность выполнения условия трансверсальности на правом конце по соотношению

$$\delta = \frac{\langle -\psi(t_1), n \rangle}{\|\psi(t_1)\|}.$$

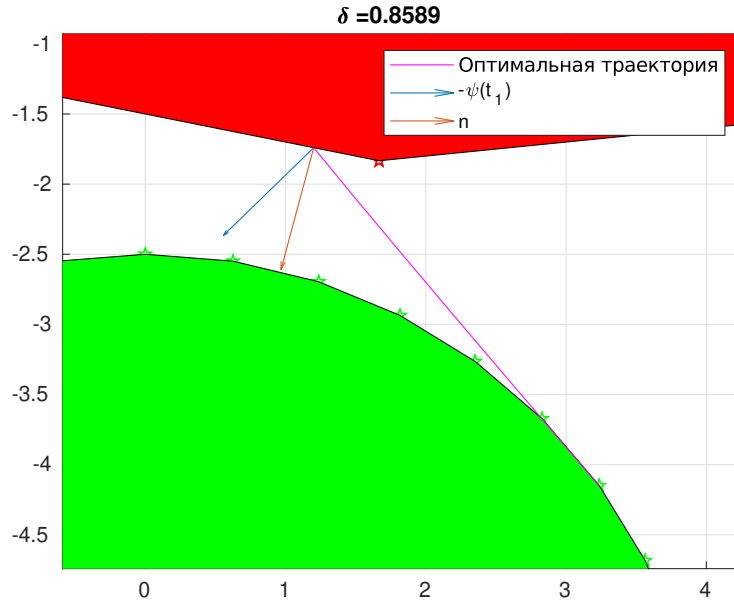


Рис. 2: Пример посчитанной погрешности условия трансверсальности на правом конце.

Исходя из вышеприведенных рассуждений выделим основные этапы численного решения задачи быстрогодействия (1):

1. Перебор начальных значений $\psi(t_0)$ по единичной окружности.
2. Численное решение сопряженной задачи Коши для каждого начального условия $\psi(t_0)$ из перебираемых.
3. Нахождение множества потенциально оптимальных по быстродействию управлений из условия максимума для каждого из перебираемых $\psi(t_0)$.
4. Нахождение траектории, соответствующей каждому из потенциальных управлений.
5. Проверка полученных траекторий на попадание в целевое множество \mathcal{X}_1 .
6. Отсекаем из множества потенциальных управлений те, соответствующие траектории которых не достигли целевого множества за некоторое задаваемое пользователем время T_{\max} .
7. Выделяем из всех получившихся управлений такое, соответствующая траектория которого достигает целевого множества за кратчайшее время. В случае, если такая траектория единственна, считаем её оптимальной по быстродействию траекторией для задачи (1).

4.1 Методы улучшения точности алгоритма

В рамках задания реализованы следующие методы улучшения точности результата:

Глобальный. Происходит равномерное увеличение количества узлов сетки при переборе начального значения сопряженной переменной $\psi(t_0)$ на всей единичной окружности. Таким образом увеличивается количество построенных траекторий по всем направлениям.

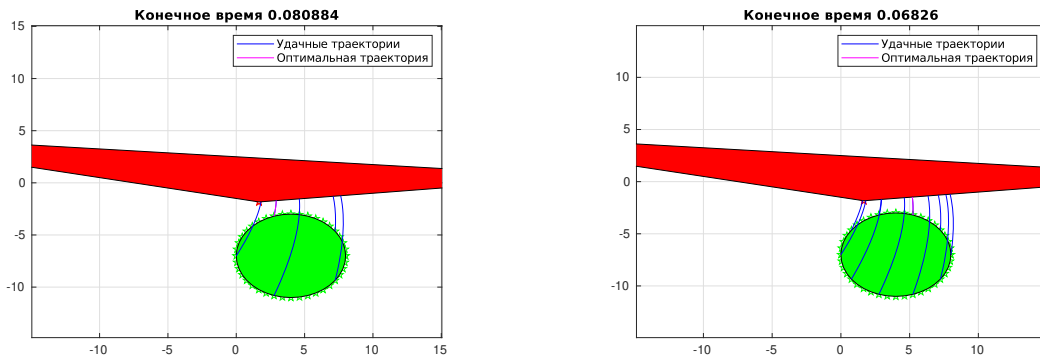


Рис. 3: Пример глобального увеличения точности алгоритма.

Локальный. Увеличение количества узлов сетки в окрестности некоторой точки. Таким образом, мы получим увеличение числа траекторий в конкретном направлении. Это может быть полезно, когда мы знаем „оптимальное“ значение сопряженной переменной $\psi^*(t)$ для предыдущей итерации работы программы. В таком случае полезно рассматривать траектории, выпущенные из некоторой окрестности точки $\psi^*(t_0)$.

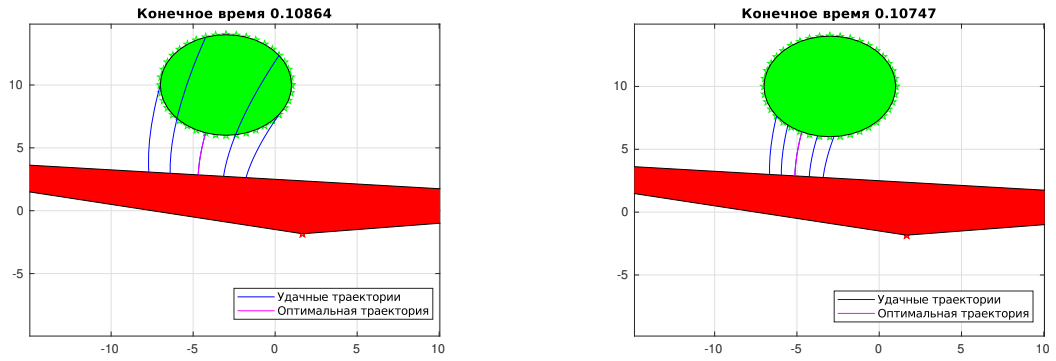


Рис. 4: Пример локального увеличения точности алгоритма.

Замечание 1. Очевидно, что в процессе улучшения точности результата работы алгоритма необходимо максимально эффективно использовать полученные на предыдущих итерациях данные. Это значит, что повторное вычисление траекторий системы (1) для уже рассмотренных значений $\psi(t_0)$ производиться не должно.

5 Примеры работы программы

5.1 Описание программного решения

Для решения задачи в среде *MatLab* были написаны функции для каждого требуемого Разделом 1 пункта постановки задачи. Взаимодействие с данными функциями реализуется при помощи интерфейса глобальных переменных, которые принимают условие задачи, а также содержат другие общие для *программного решения* данные. Для удобства использования программного решения реализован графический интерфейс для наиболее часто употребляемых функций.

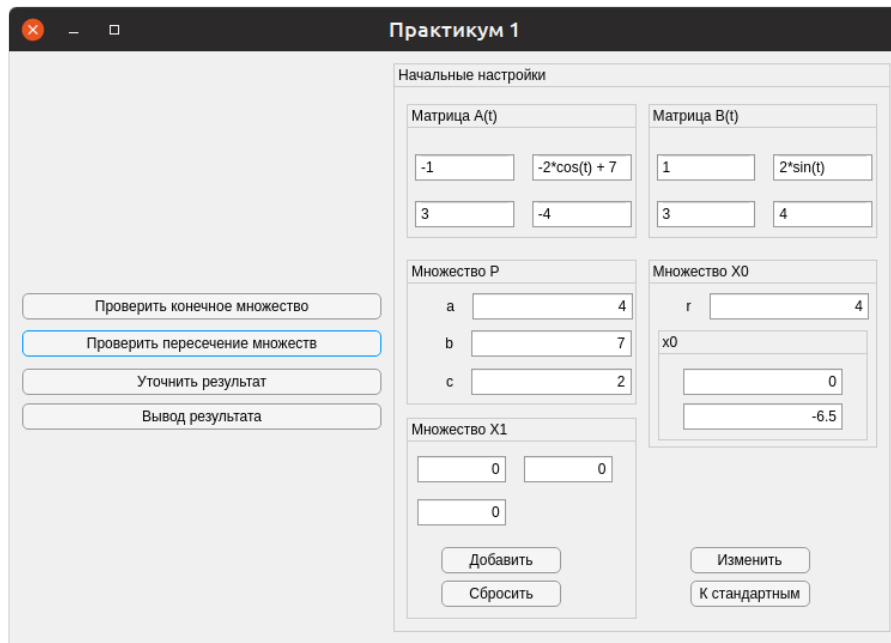


Рис. 5: Графический интерфейс программы.

Далее рассмотрим результаты численного решения задачи для разных начальных данных. Для того, чтобы отличие было более наглядным, зафиксируем начальное, целевое и ограничивающее множества в положении

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \sin t \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$
$$a = 4, \quad b = 7, \quad c = 2,$$
$$x_0 = (-3, -7)^T, \quad r = 4,$$
$$G = \begin{pmatrix} 0,3 & 4 \\ -0,4 & -2 \\ 0,2 & -2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

и обратим внимание на различия численного решения при разных матрицах $A(t)$. Для простоты будем брать константные матрицы $A(t) \equiv A$ с различным типом собственных значений.

5.2 A с вещественными собственными значениями

Список литературы

- [1] Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М: Наука, 1972.