Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Построение множества достижимости»

Студент 315 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + x + 3\sin(3x^3) + x\dot{x} = u, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha],\ \alpha > 0$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = 0,\ \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geqslant t_0$.

1. Необходимо написать в среде MatLab функцию `reachset(alpha,t)`, которая по заданным параметрам $\alpha > 0,\ t \geqslant t_0$ рассчитывает приближенно множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции — два массива X, Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, `plot`). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).

2. Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(alpha,t1,t2,N,filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha,t)`, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)i}{N},\ i = \overline{0, N}$. Здесь $t_2 \geqslant t_1 \geqslant t_0$, N — натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранен в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).

3. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множеств достижимости от величины параметра α. Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны.

2 Исследование системы

2.1 Вспомогательные утверждения и теоремы

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ систему уравнений, описывающую управляемый процесс

$$\dot{x} = f(x,\, u), \tag{2}$$

где $f(x,\, u)$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x,\, u),\ i = \overline{1,\, n}$ — непрерывные функции, определенные в $\mathbb{R}^{n+m}$. Пусть U — множество всех измеримых управлений $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющих ограничению $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, исходящее из точки x^0.

Определение 1. Множеством достижимости задачи (2) $X(t, t_0, x(t_0))$ называется множество концов траекторий системы (2) при всевозможных допустимых управлениях $u(t)$.

С целью формулировки принципа максимума введем функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(\psi,\, x,\, u) = \langle \psi,\ f(x,\, u) \rangle.$$

Теорема 1 (Принцип максимума Л. С. Понтрягина)**.** *Пусть некоторому допустимому управлению системы (2) $u^* \in U$ соответствует решение x^* с концом $x^*(T)$, лежащем на границе множества достижимоти $X(T, t_0, x(t_0))$. Тогда существует нетривиальное сопряженное решение $\psi^*(t)$ системы*

$$\dot{\psi}(t) = -\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^*(t),\, u^*(t)),$$

такое, что почти всюду выполняется принцип максимума:

$$H(\psi^*,\, x^*,\, u^*) = M(\psi^*,\, x^*) = \sup_{u(t) \in \Omega} H(\psi^*,\, x^*,\, u).$$

Если же управление $u^*(t)$ ограничено, то $M(\psi^*,\, x^*)$ почти всюду постоянна.

Доказательство теоремы (1) можно найти в [2][Гл. 4, §1].

2.2 Исследование системы

Модифицируем систему (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_1 - 3\sin(3x_1^3) - x_1 x_2 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Выпишем сопряженную систему, функцию Гамильтона–Понтрягина и управление, на котором достигается максимум функции Гамильтона–Понтрягина для данной задачи:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 + 27\psi_2 \cos(3x_1^3) x_1^2 + \psi_2 x_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 x_1 \end{cases} \tag{4}$$

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2(u - x_1 - 3\sin(3x_1^3) - x_1 x_2) \tag{5}$$

$$u = \begin{cases} \alpha, & \psi_2 > 0 \\ -\alpha, & \psi_2 < 0 \\ [-\alpha,\ \alpha], & \psi_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Утверждение 1. *Множество достижимости* $X[t_1] \subseteq X[t_2]$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$.

Доказательство. Пусть $u_1(t)$ — управление для некоторой точки $x^* \in X[t_1]$. Тогда достаточно взять управление

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant t_2 - t_1 \\ u_1(t - t_2 + t_1), & t_2 - t_1 < t \leqslant t_2. \end{cases}$$

В таком случае $x^* \in X[t_2]$. ■

Утверждение 2. *Компонента* ψ_2 *сопряженной системы (4) имеет конечное число нулей. Причем каждый из них является простым.*

Доказательство. Предположим противное: ψ_2 имеет счетное число нулей на ограниченом отрезке $[0, T]$. В таком случае у множества нулей ψ_2 есть точка накопления τ, в которой $\psi_2(\tau) = \dot{\psi}_2(\tau) = 0$. Но тогда из системы (4) вытекает, что $\psi_1(\tau) = 0$, что протеворечит условию невырожденности ψ теоремы (1). ■

Замечание 1. Получается, что особый режим для данной задачи невозможен, поэтому будем рассматривать максимальное управление $u(t)$, модифицированное на множестве меры нуль таким образом, чтобы оно совпадало всюду с соответствующим управлением

$$u = \alpha \operatorname{sgn} \psi_2.$$

Утверждение 3. *Пусть* $(x_1(t), x_2(t))$ *— траектория с концом* $(x_1(T), x_2(T))$*, лежащим на границе множества достижимости* $X[T]$*,* $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ *— соответствующее сопряженное решение. Пусть в некоторой точке* $\tau \in [0,\ T]$ $\psi_2(\tau) = 0$*. Тогда*

1. *если* $x_2(\tau) > 0$*, то* $\psi_1(\tau) > 0$*;*
2. *если* $x_2(\tau) < 0$*, то* $\psi(\tau) < 0$*.*

Доказательство. Из принципа максимума теоремы (1) получаем, что

$$M(\psi(\tau), x(\tau)) = \psi_1(\tau) x_2(\tau) > 0,$$

так как $M(\psi(0), x(0)) = \alpha|\psi_2| \geqslant 0$ и $\psi(\tau)$ невырожден. ■

Замечание 2. При пересечении прямой $\psi_2 = 0$ происходит переключение управления следующим образом: из верхней полуплоскости происходит смена управления с $u = \alpha$ на $u = -\alpha$, из нижней — с $u = -\alpha$ на $u = \alpha$.

Утверждение 4. *Пусть управление* $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *соответствует решению* $(x_1(t), x_2(t))$ *системы (3) с концом* $(x_1(T), x_2(T))$ *на границе множества достижимости* $X[T]$*. Пусть далее* t_1, t_2 *— моменты времени из интервала* $[0, T]$ *такие, что* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\psi_2(t_1) = \psi_2(t_2) = 0$ *и* $x_2(t_1) = 0$*, то* $x_2(t_2) = 0$*;*

2. *если* $\psi_2(t_1) = \psi_2(t_2) = 0$ *и* $x_2(t_1) \neq 0$*, то* $x_2(t_2) \neq 0$ *и существует точка* $\tau \in (t_1, t_2)$ *такая, что* $x_2(\tau) = 0$*;*

3. *если* $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$*,* $x_2(t) \neq 0$ *для всех* $t \in (t_1, t_2)$ *и* $\psi_2(t_1) = 0$*, то* $\psi_2(t_2) = 0$*;*

4. *если* $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$*,* $x_2(t) \neq 0$ *для всех* $t \in (t_1, t_2)$ *и* $\psi_2(t_1) \neq 0$*, то* $\psi_2(t_2) \neq 0$ *и существует точка* $\tau \in (t_1, t_2)$ *такая, что* $\psi_2(\tau) = 0$.

Доказательство. Во всех пунктах доказательства применяется теорема (1).

1. Предположим, что $\psi_2(t_1) = \psi_2(t_2) = 0$. Так как
$$M(\psi, x) = \psi_1 x_2 + \psi_2(\alpha\psi_2 - x_1 - 3\sin(3x_1^3) - x_1 x_2) = M(\psi(0), x(0)) \geqslant 0$$
для всех t из интервала $0 \leqslant t \leqslant T$, то $\psi_1(t_1)\psi_2(t_2) < 0$ и
$$\psi_1(t_1)x_2(t_1) = \psi_1(t_2)x_2(t_2) \geqslant 0.$$
Таким образом, $x_2(t_1) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_2(t_2) = 0$. Если $x_2(t_1) \neq 0$, то $x_2(t_1)x_2(t_2) < 0$ и, таким образом, у функции $x_2(t)$ имеется только один нуль на интервале $t_1 < t < t_2$. Поэтому утверждения 1) и 2) доказаны.

2. Теперь предположим, что $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$ и $x_2(t) \neq 0$ на интервале $t_1 < t < t_2$. Предположим также, что $\psi_2(t_1) = 0$. Мы уже показали, что функция $\psi_2(t)$ не обращается в нуль на интервале $t_1 < t < t_2$. Таким образом, на замкнутом интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ функция $x_2(t) \in C^2$, причем под производными в концевых точках понимаются односторонние производные. На замкнутом интервале имеет место равенство
$$\frac{d}{dt}[x_2\psi_1 + \dot{x}_2\psi_2] = 0.$$
Поэтому
$$\dot{x}_2(t_1)\psi_2(t_1) = \dot{x}_2(t_2)\psi_2(t_2).$$
Далее, $x_2^2(t) + x_2^2(t) \neq 0$ на интервале $t_1 < t < t_2$, так как в противном случае из свойства единственности решений системы дифференциальных уравнений (3) вытекало бы, что $x_2(t) \equiv 0$ на этом интервале. Так как $\psi_2(t_1) = 0$, то мы находим, что $\psi_2(t_2) = 0$. Таким образом утверждение 3) доказано.

3. Допустим, наконец, что $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$, $x_2 \neq 0$, $(t_1 < t < t_2)$ и $\psi_2(t_1) \neq 0$. Тогда ясно, что $\psi_2(t_2) \neq 0$. Но если функция $\psi_2(t)$ не обращается в нуль нигде на интервале $t_1 \geqslant t \geqslant t_2$, то $\dot{x}_2(t_1)\dot{x}_2(t_2) > 0$, что невозможно, так как t_1 и t_2 — последовательные нули функции $x_2(t)$. Теорема доказана.

■

Замечание 3. Таким образом нули функции $x_2(t)$ являются изолированными, они либо совпадают с нулями функции $\psi_2(t)$ или никакой из нулей функции $x_2(t)$ не является нулем функции $\psi_2(t)$, но эти два множества нулей «чередуются».

Утверждение 5. *Функция* $\psi(t)$ *положительно однородна.*

Доказательство. Действительно, если в сопряженную систему (4) подставить вместо $\psi(t)$ переменную $\beta\psi(t)$, $\beta > 0$, то β будет являться общим множителем и на неё можно сократить уравнения. ■

2.3 Исследование неподвижных точек

Определение 2. Неподвижной точкой системы $x = f(x)$ называется точка x^* такая, что $f(x^*) = 0$.

Для рассматриваемой в рамках задачи системы (3) это определение эквивалентно тому, что

$$\begin{cases} x_2^* = 0 \\ u - x_1^* - 3\sin(3(x_1^*)^3) - x_1^* x_2^* = 0. \end{cases}$$

Покажем, что данная система имеет единственное решение. Рассмотрим производную второго уравнения системы $g(x_1) = u - x_1 - 3\sin(3x_1^3)$ при условии, что $x_2^* = 0$ и $u = \mathrm{const}$

$$g'(x_1) = -1 - 27\cos(3x_1^3)x_1^2 < 0,$$

то есть функция $g(x_1)$ монотонно убывает. Заметим также, что $\lim_{x_1 \to -\infty} g(x_1) = +\infty$ и $\lim_{x_1 \to +\infty} g(x_1) = -\infty$, то есть функция $g(x_1)$ имеет ровно один корень.

Рассмотрим системы, дающие оптимальные траектории

$$\begin{cases} x_2^* = 0 \\ \pm\,\alpha - x_1^* - 3\sin(3(x_1^*)^3) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Стоит отметить, что если точка $(x_1^*, 0)$ является решением одной системы, то точка $(-x_1^*, 0)$ будет решением для второй системы. В точке $(x_1^*, 0)$ происходит переключение, так как она лежит на прямой $x_2 = 0$.

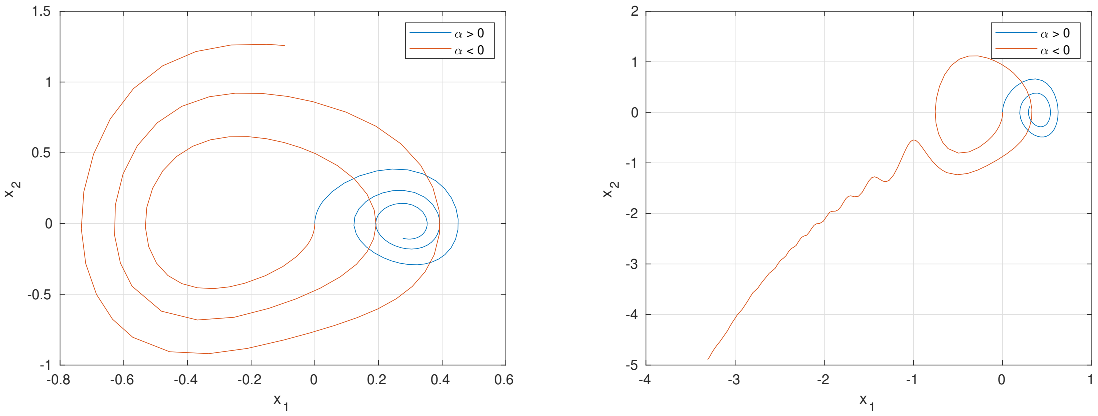

Рис. 1: Примеры поведения системы (7) для различных параметров (слева $\alpha = \frac{1}{2}$, справа $\alpha = 1$).

Из Рис. 1 видно, что при определенном подборе параметров точки, построенные с применением теоремы 1 могут образовывать *петли*, лежащие внутри множества достижимости. Также часть траекторий могут быстро уйти в бесконечность. Эти особенности необходимо учесть при потроении алгоритма.

Осталось ответить на вопрос: требуется ли при реализации алгоритма в окрестности неподвижных точек проводить более точные рассчеты, чтобы избежать попадания нежелательных точек в построенное множество достижимости. Забегая вперед, можно привести следующие результаты: из Рис. 2 видно, что неподвижная точка системы с положительным параметром находится в *зоне покрытия* системы с отрицательным параметром, и наоборот. Так что дополнительные проверки и увеличение точности алгоритма в данном случае не потребуется.

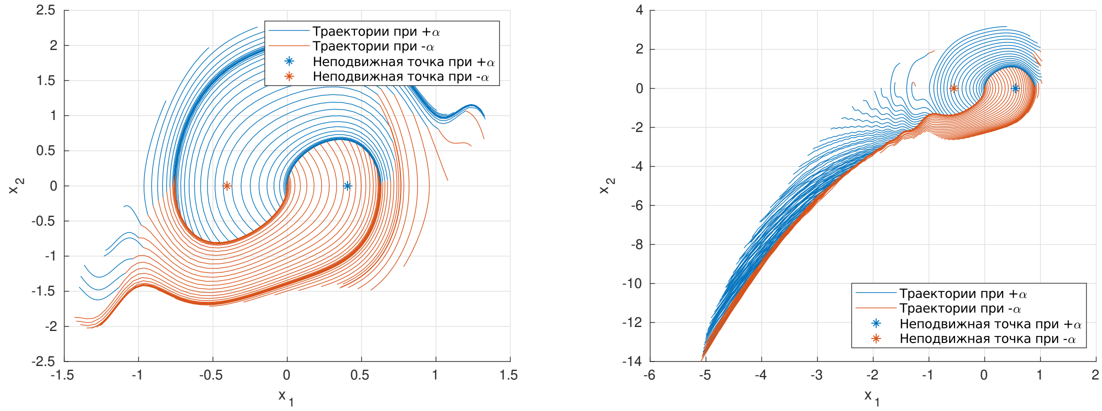

Рис. 2: Примеры поведения системы (3) для различных параметров (слева $\alpha = 1$, справа $\alpha = 2$).

3 Алгоритм решения задачи

Рассмотрим две вспомогательные системы:

$$S^+ : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha - x_1 - 3\sin(3x_1^3) - x_1 x_2, \end{cases} \qquad S^- : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha - x_1 - 3\sin(3x_1^3) - x_1 x_2. \end{cases}$$

а так же сопряженную систему (4)

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 + 27\psi_2\cos(3x_1^3)x_1^2 + \psi_2 x_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 x_1. \end{cases}$$

В каждый момент времени управление $u = \alpha$ или $u = -\alpha$. Переключения управления возможны при $\psi_2 = 0$. Для построения множества достижимости найдем концы всех траекторий, удовлетворяющих теореме 1, а затем удалим из них все точки, которые не принадлежат границе.

Сформумируем алгоритм построения множества достижимости:

1. Решим систему S^+ с нулевыми начальными условиями до времени $\tau\ :\ x_2^+(\tau) = 0$;

2. Организуем перебор по времени первого переключения $\tau^* \in [0, \tau]$. Для каждого τ^* необходимо:

   (a) Решить систему S^- и сопряжённую систему с начальными условиями $x^0 = x^+(\tau^*)$ и $\psi^0 = (1,\ 0)^\top$ до момента переключения τ^{**} (то есть до того момента, когда $\psi_2(\tau^{**}) = 0$);

   (b) Решить систему S^+ и сопряжённую систему с начальными условиями $x^0 = x(\tau^{**})$ и $\psi^0 = \psi(\tau^{**})$ до момента переключения τ^{***} (то есть до того момента, когда $\psi_2(\tau^{***}) = 0$);

   (c) Повторять пункты (a) - (b) до того момента, пока время не превысит с заданным;

3. Проделаем аналогичные действия для системы S^-;

4. Объединим полученные конечные точки траекторий в одну кривую;

5. Удалим из кривой все самопересечения. Для этого начнем перебирать отрезки, начиная с точки с минимальными координатами (так как она обязательно принадлежит границе множества достижимости). Будем последовательно обходить точки построенной в предыдущем пункте ломанной и проверять пересечение последнего отрезка со всеми предыдущими отрезками. В случае, если для некоторой точки a_n отзезок $(a_{n-1},\ a_n)$ пересекает отрезок $(a_{k-1},\ a_k)$ (при $k < n-2$), то удалим из кривой точки a_i, $i = \overline{k+1, n-1}$.

4 Примеры построенных множеств достижимости

Приведем примеры для разного параметра α. На рисунках приведена эволюция множества достижимости, а также траектории, удовлетворяющие теореме 1 для наибольшего времени. Наибольшее время выбиралось таким, чтобы траектории системы могли быть посчитаны функцией `ode45`, то есть траектории не очень далеко от нуля.

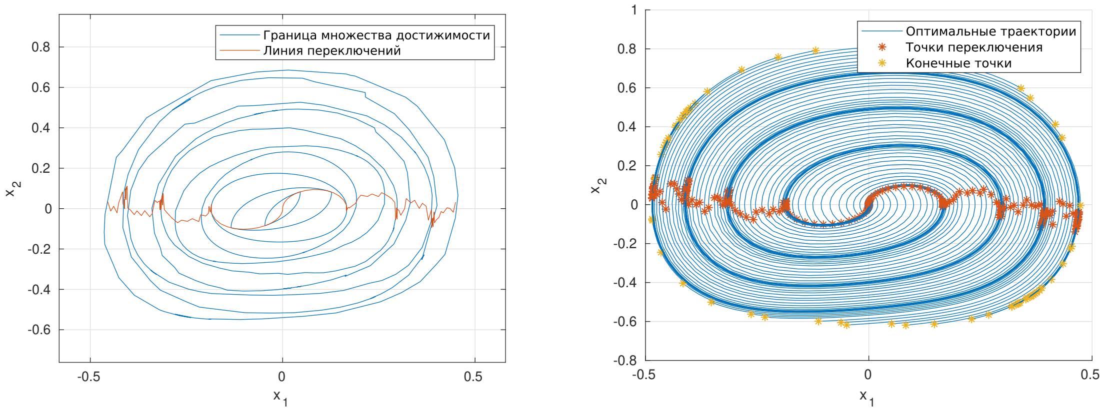

Рис. 3: $\alpha = \frac{1}{10}$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$.

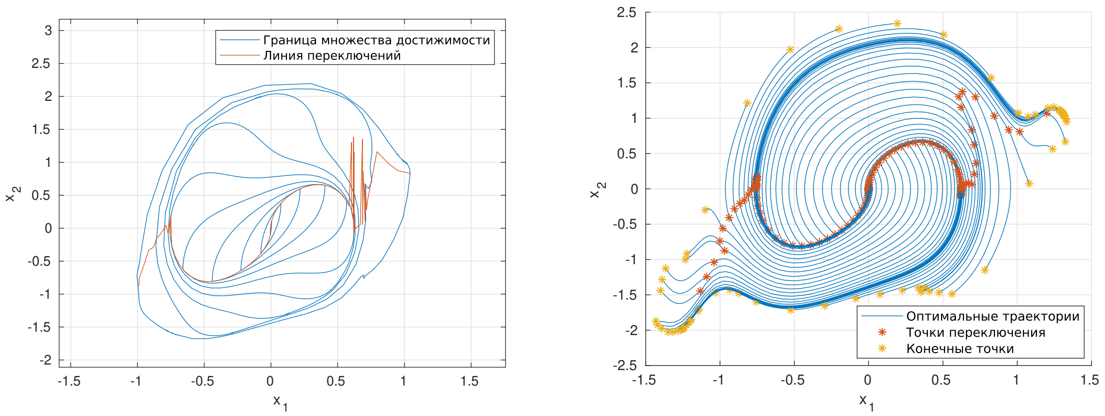

Рис. 4: $\alpha = 1$, $t_1 = \frac{1}{10}$, $t_2 = 3$.

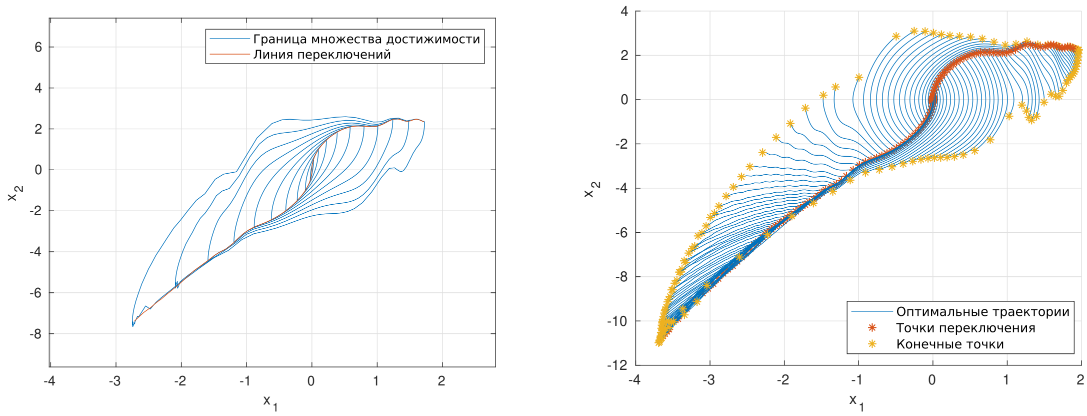

Рис. 5: $\alpha = 5$, $t_1 = \frac{1}{10}$, $t_2 = 1$.

Список литературы

[1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

[2] Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М: Наука, 1972.