



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Построение множества достижимости»

Студент 315 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Исследование системы	4
2.1	Вспомогательные утверждения и теоремы	4
2.2	Исследование системы	4
2.3	Исследование неподвижных точек	7
3	Алгоритм решения задачи	8
4	Примеры построенных множеств достижимости	9

1 Постановка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + x + 3 \sin(3x^3) + x\dot{x} = u, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geq t_0$.

1. Необходимо написать в среде MatLab функцию `reachset(alpha,t)`, которая по заданным параметрам $\alpha > 0$, $t \geq t_0$ рассчитывает приближенно множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции — два массива X , Y с упорядоченными координатами точек многоугольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упорядочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функциям визуализации (например, `plot`). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возвращает также координаты линий переключения оптимального управления (с возможностью их визуализации).
2. Необходимо реализовать функцию `reachsetdyn(alpha,t1,t2,N,filename)`, которая, используя функцию `reachset(alpha,t)`, строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2-t_1)i}{N}$, $i = \overline{0, N}$. Здесь $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, N — натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции должен быть сохранен в виде видео-файла `filename.avi`. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра `filename`) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).
3. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями), исследовать зависимость множеств достижимости от величины параметра α . Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны.

2 Исследование системы

2.1 Вспомогательные утверждения и теоремы

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n систему уравнений, описывающую управляемый процесс

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2)$$

где $f(x, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ — непрерывные функции, определенные в \mathbb{R}^{n+m} . Пусть U — множество всех измеримых управлений $u(t)$ на интервале $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих ограничению $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, исходящее из точки x^0 .

Определение 1. Множеством достижимости задачи (2) $X(t, t_0, x(t_0))$ называется множество концов траекторий системы (2) при всевозможных допустимых управлениях $u(t)$.

С целью формулировки принципа максимума введем функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H(\psi, x, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle.$$

Теорема 1 (Принцип максимума Л. С. Понтрягина). Пусть некоторому допустимому управлению системы (2) $u^* \in U$ соответствует решение x^* с концом $x^*(T)$, лежащем на границе множества достижимости $X(T, t_0, x(t_0))$. Тогда существует нетривиальное сопряженное решение $\psi^*(t)$ системы

$$\dot{\psi}(t) = - \left\langle \psi(t), \frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t)) \right\rangle,$$

такое, что почти всюду выполняется принцип максимума:

$$H(\psi^*, x^*, u^*) = M(\psi^*, x^*) = \sup_{u(t) \in \Omega} H(\psi^*, x^*, u).$$

Если же управление $u^*(t)$ ограничено, то $M(\psi^*, x^*)$ почти всюду постоянна.

Доказательство теоремы (1) можно найти в [2][Гл. 4, §1].

2.2 Исследование системы

Модифицируем систему (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - x_1 - 3 \sin(3x_1^3) - x_1 x_2 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Выпишем сопряженную систему, функцию Гамильтона–Понтрягина и управление, на котором достигается максимум функции Гамильтона–Понтрягина для данной задачи:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 + 27\psi_2 \cos(3x_1^3)x_1^2 + \psi_2 x_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 x_1 \end{cases} \quad (4)$$

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 (u - x_1 - 3 \sin(3x_1^3) - x_1 x_2) \quad (5)$$

$$u = \begin{cases} \alpha, & \psi_2 > 0 \\ -\alpha, & \psi_2 < 0 \\ [-\alpha, \alpha], & \psi_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Утверждение 1. Множество достижимости $X[t_1] \subseteq X[t_2]$, $0 \leq t_1 \leq t_2$.

Доказательство. Пусть $u_1(t)$ — управление для некоторой точки $x^* \in X[t_1]$. Тогда достаточно взять управление

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_2 - t_1 \\ u_1(t - t_2 + t_1), & t_2 - t_1 < t \leq t_2. \end{cases}$$

В таком случае $x^* \in X[t_2]$. ■

Утверждение 2. Компонента ψ_2 сопряженной системы (4) имеет конечное число нулей. Причем каждый из них является простым.

Доказательство. Предположим противное: ψ_2 имеет счетное число нулей на ограниченном отрезке $[0, T]$. В таком случае у множества нулей ψ_2 есть точка накопления τ , в которой $\psi_2(\tau) = \dot{\psi}_2(\tau) = 0$. Но тогда из системы (4) вытекает, что $\psi_1(\tau) = 0$, что противоречит условию невырожденности ψ теоремы (1). ■

Замечание 1. Получается, что особый режим для данной задачи невозможен, поэтому будем рассматривать максимальное управление $u(t)$, модифицированное на множестве меры нуль таким образом, чтобы оно совпадало всюду с соответствующим управлением

$$u = \alpha \operatorname{sgn} \psi_2.$$

Утверждение 3. Пусть $(x_1(t), x_2(t))$ — траектория с концом $(x_1(T), x_2(T))$, лежащим на границе множества достижимости $X[T]$, $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ — соответствующее сопряженное решение. Пусть в некоторой точке $\tau \in [0, T]$ $\psi_2(\tau) = 0$. Тогда

1. если $x_2(\tau) > 0$, то $\psi_1(\tau) > 0$;
2. если $x_2(\tau) < 0$, то $\psi_1(\tau) < 0$.

Доказательство. Из принципа максимума теоремы (1) получаем, что

$$M(\psi(\tau), x(\tau)) = \psi_1(\tau)x_2(\tau) > 0,$$

так как $M(\psi(0), x(0)) = \alpha|\psi_2| \geq 0$ и $\psi(\tau)$ невырожден. ■

Замечание 2. При пересечении прямой $\psi_2 = 0$ происходит переключение управления следующим образом: из верхней полуплоскости происходит смена управления с $u = \alpha$ на $u = -\alpha$, из нижней — с $u = -\alpha$ на $u = \alpha$.

Утверждение 4. Пусть управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ соответствует решению $(x_1(t), x_2(t))$ системы (3) с концом $(x_1(T), x_2(T))$ на границе множества достижимости $X[T]$. Пусть далее t_1, t_2 — моменты времени из интервала $[0, T]$ такие, что $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. если $\psi_2(t_1) = \psi_2(t_2) = 0$ и $x_2(t_1) = 0$, то $x_2(t_2) = 0$;

2. если $\psi_2(t_1) = \psi_2(t_2) = 0$ и $x_2(t_1) \neq 0$, то $x_2(t_2) \neq 0$ и существует точка $\tau \in (t_1, t_2)$ такая, что $x_2(\tau) = 0$;
3. если $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$, $x_2(t) \neq 0$ для всех $t \in (t_1, t_2)$ и $\psi_2(t_1) = 0$, то $\psi_2(t_2) = 0$;
4. если $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$, $x_2(t) \neq 0$ для всех $t \in (t_1, t_2)$ и $\psi_2(t_1) \neq 0$, то $\psi_2(t_2) \neq 0$ и существует точка $\tau \in (t_1, t_2)$ такая, что $\psi_2(\tau) = 0$.

Доказательство. Во всех пунктах доказательства применяется теорема (1).

1. Предположим, что $\psi_2(t_1) = \psi_2(t_2) = 0$. Так как

$$M(\psi, x) = \psi_1 x_2 + \psi_2(\alpha \psi_2 - x_1 - 3 \sin(3x_1^3) - x_1 x_2) = M(\psi(0), x(0)) \geq 0$$

для всех t из интервала $0 \leq t \leq T$, то $\psi_1(t_1)\psi_2(t_2) < 0$ и

$$\psi_1(t_1)x_2(t_1) = \psi_1(t_2)x_2(t_2) \geq 0.$$

Таким образом, $x_2(t_1) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_2(t_2) = 0$. Если $x_2(t_1) \neq 0$, то $x_2(t_1)x_2(t_2) < 0$ и, таким образом, у функции $x_2(t)$ имеется только один нуль на интервале $t_1 < t < t_2$. Поэтому утверждения 1) и 2) доказаны.

2. Теперь предположим, что $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$ и $x_2(t) \neq 0$ на интервале $t_1 < t < t_2$. Предположим также, что $\psi_2(t_1) = 0$. Мы уже показали, что функция $\psi_2(t)$ не обращается в нуль на интервале $t_1 < t < t_2$. Таким образом, на замкнутом интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ функция $x_2(t) \in C^2$, причем под производными в концевых точках понимаются односторонние производные. На замкнутом интервале имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}[x_2\psi_1 + \dot{x}_2\psi_2] = 0.$$

Поэтому

$$\dot{x}_2(t_1)\psi_2(t_1) = \dot{x}_2(t_2)\psi_2(t_2).$$

Далее, $x_2^2(t) + \dot{x}_2^2(t) \neq 0$ на интервале $t_1 < t < t_2$, так как в противном случае из свойства единственности решений системы дифференциальных уравнений (3) вытекало бы, что $x_2(t) \equiv 0$ на этом интервале. Так как $\psi_2(t_1) = 0$, то мы находим, что $\psi_2(t_2) = 0$. Таким образом утверждение 3) доказано.

3. Допустим, наконец, что $x_2(t_1) = x_2(t_2) = 0$, $x_2 \neq 0$, ($t_1 < t < t_2$) и $\psi_2(t_1) \neq 0$. Тогда ясно, что $\psi_2(t_2) \neq 0$. Но если функция $\psi_2(t)$ не обращается в нуль нигде на интервале $t_1 \leq t \leq t_2$, то $\dot{x}_2(t_1)\dot{x}_2(t_2) > 0$, что невозможно, так как t_1 и t_2 — последовательные нули функции $x_2(t)$. Теорема доказана. ■

Замечание 3. Таким образом нули функции $x_2(t)$ являются изолированными, они либо совпадают с нулями функции $\psi_2(t)$ или никакой из нулей функции $x_2(t)$ не является нулем функции $\psi_2(t)$, но эти два множества нулей «чередуются».

Утверждение 5. Функция $\psi(t)$ положительно однородна.

Доказательство. Действительно, если в сопряженную систему (4) подставить вместо $\psi(t)$ переменную $\beta\psi(t)$, $\beta > 0$, то β будет являться общим множителем и на неё можно сократить уравнения. ■

2.3 Исследование неподвижных точек

Определение 2. Неподвижной точкой системы $x = f(x)$ называется точка x^* такая, что $f(x^*) = 0$.

Для рассматриваемой в рамках задачи системы (3) это определение эквивалентно тому, что

$$\begin{cases} x_2^* = 0 \\ u - x_1^* - 3 \sin(3(x_1^*)^3) - x_1^* x_2^* = 0. \end{cases}$$

Покажем, что данная система имеет единственное решение. Рассмотрим производную второго уравнения системы $g(x_1) = u - x_1 - 3 \sin(3x_1^3)$ при условии, что $x_2^* = 0$ и $u = \text{const}$

$$g'(x_1) = -1 - 27 \cos(3x_1^3)x_1^2 < 0,$$

то есть функция $g(x_1)$ монотонно убывает. Заметим также, что $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} g(x_1) = +\infty$ и $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} g(x_1) = -\infty$, то есть функция $g(x_1)$ имеет ровно один корень.

Рассмотрим системы, дающие оптимальные траектории

$$\begin{cases} x_2^* = 0 \\ \pm \alpha - x_1^* - 3 \sin(3(x_1^*)^3) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Стоит отметить, что если точка $(x_1^*, 0)$ является решением одной системы, то точка $(-x_1^*, 0)$ будет решением для второй системы. В точке $(x_1^*, 0)$ происходит переключение, так как она лежит на прямой $x_2 = 0$.

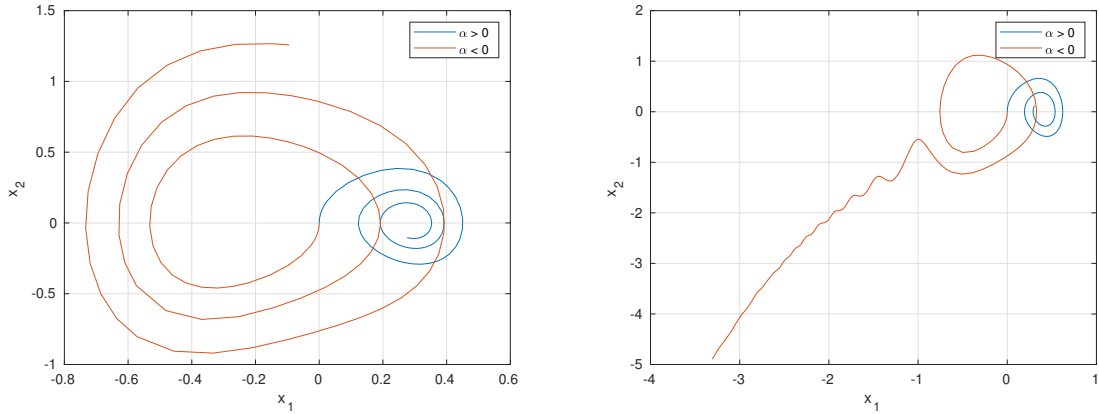


Рис. 1: Примеры поведения системы (7) для различных параметров (слева $\alpha = \frac{1}{2}$, справа $\alpha = 1$).

Из Рис. 1 видно, что при определенном подборе параметров точки, построенные с применением теоремы 1 могут образовывать *петли*, лежащие внутри множества достижимости. Также часть траекторий могут быстро уйти в бесконечность.

3 Алгоритм решения задачи

Рассмотрим две вспомогательные системы:

$$S^+ : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha - x_1 - 3 \sin(3x_1^3) - x_1 x_2, \end{cases} \quad S^- : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha - x_1 - 3 \sin(3x_1^3) - x_1 x_2. \end{cases}$$

а так же сопряженную систему (4)

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 + 27\psi_2 \cos(3x_1^3)x_1^2 + \psi_2 x_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2 x_1. \end{cases}$$

В каждый момент времени управление $u = \alpha$ или $u = -\alpha$. Переключения управления возможны при $\psi_2 = 0$. Для построения множества достижимости найдем концы всех траекторий, удовлетворяющих теореме 1, а затем удалим из них все точки, которые не принадлежат границе.

Сформулируем алгоритм построения множества достижимости:

1. Решим систему S^+ с нулевыми начальными условиями до времени $\tau : x_2^+(\tau) = 0$;
2. Организуем перебор по времени первого переключения $\tau^* \in [0, \tau]$. Для каждого τ^* необходимо:
 - (a) Решить систему S^- и сопряженную систему с начальными условиями $x^0 = x^+(\tau^*)$ и $\psi^0 = (1, 0)^\top$ до момента переключения τ^{**} (то есть до того момента, когда $\psi_2(\tau^{**}) = 0$);
 - (b) Решить систему S^+ и сопряженную систему с начальными условиями $x^0 = x(\tau^{**})$ и $\psi^0 = \psi(\tau^{**})$ до момента переключения τ^{***} (то есть до того момента, когда $\psi_2(\tau^{***}) = 0$);
 - (c) Повторять пункты (a) - (b) до того момента, пока время не превысит с заданным;
3. Прделаем аналогичные действия для системы S^- ;
4. Объединим полученные конечные точки траекторий в одну кривую;
5. Удалим из кривой все самопересечения. Для этого начнем перебирать отрезки, начиная с точки с минимальными координатами (так как она обязательно принадлежит границе множества достижимости). Будем последовательно обходить точки построенной в предыдущем пункте ломанной и проверять пересечение последнего отрезка со всеми предыдущими отрезками. В случае, если для некоторой точки a_n отрезок (a_{n-1}, a_n) пересекает отрезок (a_{k-1}, a_k) (при $k < n - 2$), то удалим из кривой точки $a_i, i = k + 1, n - 1$.

4 Примеры построенных множеств достижимости

Приведем примеры для разного параметра α . На рисунках приведена эволюция множества достижимости, а также траектории, удовлетворяющие теореме 1 для наибольшего времени. Наибольшее время выбиралось таким, чтобы траектории системы могли быть посчитаны функцией `ode45`, то есть траектории не очень далеко от нуля.

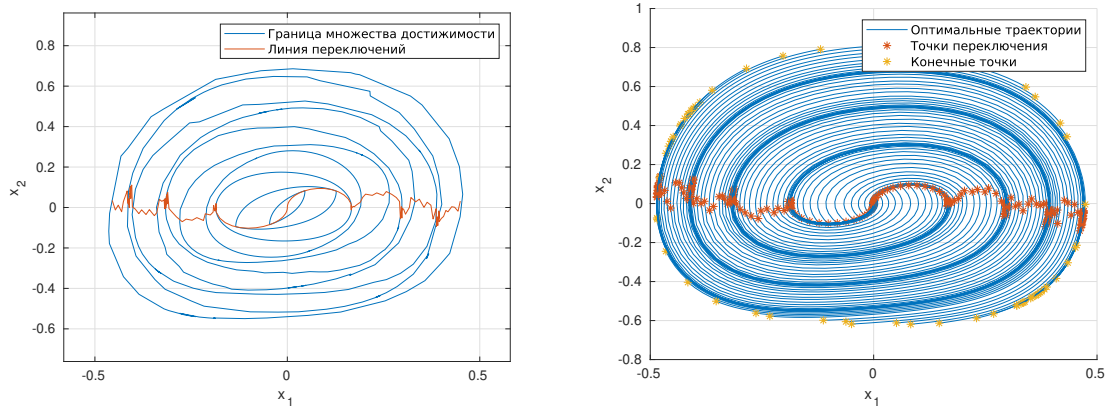


Рис. 2: $\alpha = \frac{1}{10}$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$.

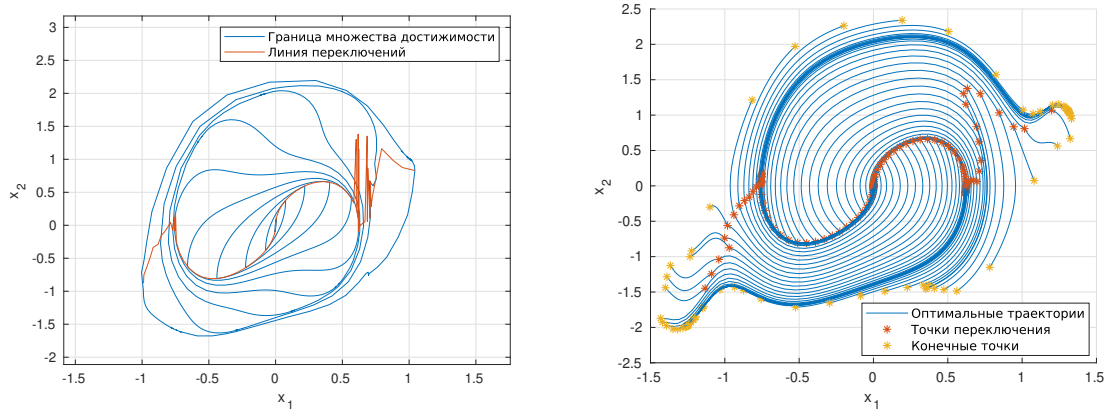


Рис. 3: $\alpha = 1$, $t_1 = \frac{1}{10}$, $t_2 = 3$.

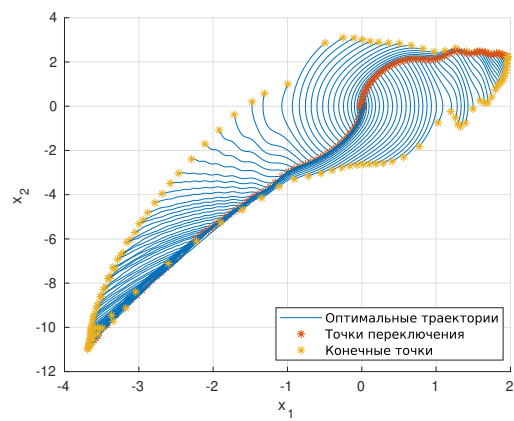
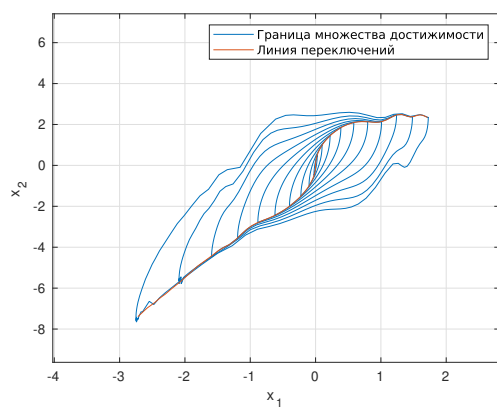


Рис. 4: $\alpha = 5$, $t_1 = \frac{1}{10}$, $t_2 = 1$.

Список литературы

- [1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
- [2] Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М: Наука, 1972.