



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Практикум

# «Задача управления тележкой»

*Студент 315 группы*  
К. Ю. Егоров

*Руководитель практикума*  
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Формализация задачи</b>	<b>4</b>
2.1	Принцип максимума как необходимое условие оптимальности . . . . .	4
2.2	Формализация задачи . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Решение задачи при первом типе ограничений на управление</b>	<b>7</b>
3.1	Размышления об особом режиме . . . . .	7
3.2	Прочие режимы управления . . . . .	8
3.3	Режимы акселерации и отсутствия торможения . . . . .	9
3.4	Режим слабого торможения . . . . .	10
3.4.1	Задача с параметром $\alpha > 0$ . . . . .	10
3.4.2	Задача с параметром $\alpha = 0$ . . . . .	10
3.5	Режим сильного торможения . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Решение задачи при втором типе ограничений на управление</b>	<b>12</b>
4.1	Режим интенсивного торможения . . . . .	13

## 1 Постановка задачи

Движение материальной точки на прямой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = u_1 - \dot{x}(1 + u_2), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$ . На возможные значения управляющих параметров наложены следующие ограничения:

1. либо  $u_1 \geq 0$ ,  $u_2 \in [k_1, k_2]$ ,  $k_2 > k_1 > 0$ ;
2. либо  $u_1 \in \mathbb{R}$ ,  $u_2 \in [k_1, k_2]$ ,  $k_2 > k_1 > 0$ .

Задан начальный момент времени  $t_0 = 0$  и начальная позиция  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Необходимо за счет выбора программного управления  $u$  перевести материальную точку из заданной начальной позиции в такую позицию в момент времени  $T$ , в которой  $x(T) = L > 0$ ,  $|\dot{x}(T) - S| \leq \varepsilon$ . На множестве всех реализаций программных управлений, переводящих материальную точку в указанное множество, необходимо решить задачу оптимизации:

$$J = \int_0^T (u_1^2(t) + \alpha |u_1(t)|) dt \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad \alpha \geq 0.$$

1. Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам  $T$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $L$ ,  $\varepsilon$ ,  $S$ ,  $\alpha$  определяет, разрешима ли задача оптимального управления (при одном из указанных двух ограничений на управление). Если задача разрешима, то программа должна построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Кроме того, программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления, а также моменты переключений.
2. В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны. В отчете должны быть приведены примеры оптимальных траекторий для всех возможных качественно различных режимов.

*Замечание 1.* Алгоритм построения оптимальной траектории не должен содержать перебор по параметрам, значения которых не ограничены, а также по более чем двум скалярным параметрам.

## 2 Формализация задачи

### 2.1 Принцип максимума как необходимое условие оптимальности

В этом разделе мы сформулируем принцип максимума для общего случая нелинейных автономных управляемых систем в задаче с подвижными концами на конечном или бесконечном интервале времени. Принцип максимума, вместе с условиями трансверсальности, является необходимым условием, которому должно удовлетворять оптимальное управление. Доказательство этих результатов можно посмотреть в [1][Гл. 5].

Итак, рассмотрим автономный управляемый процесс

$$\dot{x} = f(x, u),$$

с непрерывными  $f(x, u)$  и  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Пусть  $X_0$  и  $X_1 \subset \mathbb{R}^n$  есть заданные начальное и целевое множества и пусть  $\Omega$  есть непустое ограничивающее множество в  $\mathbb{R}^m$ . Допустимое управление  $u(t) \in \Omega$  на некотором конечном интервале времени  $0 \leq t \leq t_1$  есть ограниченная измеримая функция, которой соответствует траектория  $x(t, x^0)$ , переводящая точку  $x(0, x^0) = x^0 \in X_0$  в точку  $x(t_1, x^0) = x^1 \in X_1$ . Конечный момент времени  $t_1$ , начальная точка  $x^0 \in X_0$  и конечная точка  $x^1 \in X_1$  меняются вместе с управлением. Класс всех допустимых управлений обозначим через  $\Delta$ .

Каждому управлению  $u(t)$  ( $0 \leq t \leq t_1$ ) в  $\Delta$  с траекторией  $x(t)$  поставим в соответствие критерий качества

$$J(u) = \int_0^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt,$$

где  $f_0(x, u)$  и  $\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, u)$  — непрерывные в  $\mathbb{R}^{n+m}$  функции. Допустимое управление  $u^*(t)$  из  $\Delta$  является (минимальным) оптимальным, если

$$J(u^*) \leq J(u) \text{ для всех } u \in \Delta.$$

Согласно [1][Гл. 5] оптимальное управление  $u^*(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq t_1$  удовлетворяет принципу максимума

$$\hat{H}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t), u^*(t)) = \hat{M}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t)) \text{ почти всюду}$$

и

$$\hat{M}(\hat{\psi}^*(t), \hat{x}^*(t)) \equiv 0, \quad \hat{\psi}_0^*(t) \leq 0 \text{ всюду.}$$

Здесь расширенное состояние

$$\hat{x}^*(t) = \begin{bmatrix} x_0^*(t) \\ x^*(t) \end{bmatrix}$$

есть решение расширенной системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= f_0(x, u), \\ \dot{x}_i &= f_i(x, u), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

а  $\hat{\psi}^*(t)$  — нетривиальное решение расширенной сопряженной системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0, \\ \dot{\psi}_i &= - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x^*(t), u^*(t)), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где последние  $n$  уравнений (с  $f_0 \equiv 0$ ) образуют сопряженную систему. Расширенная функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$\hat{H}(\hat{\psi}, \hat{x}, u) = \psi_0 \cdot f_0(x, u) + \psi_1 \cdot f_1(x, u) + \dots + \psi_n \cdot f_n(x, u)$$

и

$$\hat{M}(\hat{\psi}, \hat{x}) = \max_{u \in \Omega} \hat{H}(\hat{\psi}, \hat{x}, u) \text{ (если } \hat{M} \text{ существует).}$$

## 2.2 Формализация задачи

Сначала для того, чтобы сделать все наши дальнейшие формулы и соотношения компактнее, сделаем замену следующих переменных:

$$v(t) = [v_1(t), v_2(t)]^T = [u_1(t), u_2(t) + 1]^T, \quad m_1 = k_1 + 1, \quad m_2 = k_2 + 1.$$

Теперь перепишем рассматриваемое дифференциальное уравнение (1) в виде системы, построим для нее расширенную функцию Гамильтона–Понтрягина, а также сопряженную систему.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v_1 - v_2 x_2. \end{cases} \quad (2)$$

$$\hat{H}(\hat{\psi}, \hat{x}, u) = \psi_0 \cdot (v_1^2 + \alpha|v_1|) + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot (v_1 - v_2 x_2), \text{ где } \psi_0 \leq 0. \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + v_2 \psi_2. \end{cases} \quad (4)$$

*Замечание 2.* Из принципа максимума следует, что для любой оптимальной траектории системы (2)  $\psi_1(t) \equiv \psi_1^0 \equiv \text{const}$ .

*Замечание 3.* Покажем, что задача разрешима только при условии, что  $\psi_0 < 0$ . Пусть  $\psi_0 = 0$ , тогда задача максимизации функции Гамильтона–Понтрягина (3) эквивалентна следующей:

$$\psi_2(v_1 - v_2 x_2) \rightarrow \max_{v \in \Delta}.$$

В случае заданных первых ограничений на управление (когда  $v_1 \geq 0$ ) требуется положить  $\psi_2 \leq 0$ , так как в противном случае максимум не достигается. При таком допущении максимум будет достигнут на управлении  $v_1 = 0$ , при котором исходная система (2) имеет только тождественно нулевое решение, не удовлетворяющее целевому множеству ни при одном выборе параметров. Для случая со вторым типом ограничений ( $v_1 \in \mathbb{R}$ ) можно рассуждать аналогично.

Также видно, что вторые уравнения исходной и сопряженной систем (2, 4) зависят только от одной переменной, поэтому мы можем найти их вид, применив формулу Коши. Можно проверить, что фундаментальная матрица имеет вид<sup>1</sup>  $X(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t v_2(s) ds}$ . Тогда, учитывая начальные условия, получаем искомые выражения:

$$x_2(t) = \int_0^t e^{-\int_{\tau}^t v_2(s) ds} v_1(\tau) d\tau, \quad (5)$$

<sup>1</sup> в данном случае фундаментальная матрица имеет размер  $1 \times 1$

$$\psi_2(t) = e^{\int_0^t v_2(s) ds} \psi_2^0 - \int_0^T e^{\int_\tau^t v_2(s) ds} \psi_1^0 d\tau, \text{ где } \psi_2^0 = \psi_2(0). \quad (6)$$

### 3 Решение задачи при первом типе ограничений на управление

В данном пункте рассмотрим ограничения на значения управляющих параметров вида

$$v(t) \in \Omega = \{ [v_1, v_2]^T \in \mathbb{R}^2 : v_1 \geq 0, v_2 \in [m_1, m_2] \}.$$

В этом случае задача минимизации равносильна задаче

$$J(u) = \int_0^T \left( v_1(t) + \frac{\alpha}{2} \right)^2 dt \rightarrow \min_v, \text{ где } v(t) \in \Omega, t \in [0, T],$$

при этом задача максимизации функции Гамильтона–Понтрягина эквивалентна максимизации по  $v$  следующих выражений:

$$\begin{aligned} \psi_0 \left( v_1 + \frac{\alpha}{2} \right) + \psi_2(v_1 - v_2 x_2) &\rightarrow \max_{v_1 \in [0, +\infty)}, \\ -\psi_2 x_2 v_2 &\rightarrow \max_{v_2 \in [m_1, m_2]}. \end{aligned}$$

Эти задачи имеют следующие решения:

$$v_1 = \begin{cases} \psi_2 - \frac{\alpha}{2}, & \text{при } \psi_2 \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0, & \text{при } \psi_2 < \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \quad (7)$$

$$v_2 = \begin{cases} m_2, & \text{при } \psi_2 x_2 < 0 \\ [m_1, m_2], & \text{при } \psi_2 x_2 = 0 \\ m_1, & \text{при } \psi_2 x_2 > 0. \end{cases} \quad (8)$$

#### 3.1 Размышления об особом режиме

Назовём *особым режимом* ситуацию, при которой управление  $v$  не определено однозначно. Для задачи (1) особый режим наступает, когда  $\psi_2(t)x_2(t) = 0^2$ . Рассмотрим при каких условиях особый режим может длиться сколь угодно длительное время, то есть на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

*Замечание 4.* Нам важно рассмотреть эти случаи хотя бы потому, что в начальный момент времени  $t = 0$  тележка находится в особом режиме.

На отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$  должно выполняться  $\frac{d}{dt}x_2(t)\psi_2(t) = 0^3$ :

$$\frac{d}{dt}x_2(t)\psi_2(t) = \dot{x}_2\psi_2 + x_2\dot{\psi}_2 = (v_1 - v_2 x_2)\psi_2 + (-\psi_1^0 + v_2\psi_2)x_2 = 0$$

$$v_1(t)\psi_2(t) = \psi_1^0 x_2(t).$$

Пользуясь последним соотношением, условием особого режима и формулой (5), получаем, что особый режим будет иметь место и, более того, продолжаться, пока  $x_2 = 0$  и  $\psi_2(t) < \frac{\alpha}{2}$ . Плюс ко всему в особом режиме  $v_1(t) \equiv 0$ .

---

<sup>2</sup>Условие особого режима

<sup>3</sup>Условие удержания в особом режиме

Теперь, когда мы знаем значение первой компоненты управления  $v_1$  в особом режиме, мы можем получить ещё одно соотношение:

$$x_2(t) = -\frac{1}{\psi_2(t)} \implies \dot{x}_2(t) = \frac{\dot{\psi}_2(t)}{(\psi_2(t))^2},$$

$$\frac{v_2}{\psi_2} = \frac{-\psi_1^0 + v_2\psi_2}{(\psi_2)^2} \Rightarrow \psi_2(t) \equiv -\psi_1^0.$$

Как интерпретировать полученные результаты для интересующего нас начального момента времени  $t = 0$ ? Мы получили альтернативу: в случае, если  $\psi_2^0 = \psi_2(0) \geq \frac{\alpha}{2}$ , *тележка* мгновенно выйдет из особого режима; в случае же, когда  $\psi_2^0 = \psi_2(0) < \frac{\alpha}{2}$ , *тележка* никогда не сможет покинуть особый режим.

*Замечание 5.* Из-за того, что в особом режиме  $v_1(t) \equiv 0$ , а  $x_2^0 = x_2(0) = 0$  согласно формуле (5) *тележка* будет стоять на месте при начальном выборе  $\psi_2^0 < \frac{\alpha}{2}$ . Таким управлением нельзя привести *тележку* в конечное состояние  $x_1^{\text{кон.}} = x_1(T) = L > 0$ . Поэтому в дальнейшем можем рассматривать только выбор  $\psi_2^0 \geq \frac{\alpha}{2}$ .

### 3.2 Прочие режимы управления

Расправившись с особым режимом, мы получили также значение управления в сколь угодно малой окрестности нуля:  $v_1(t) = \psi_2(t) - \frac{\alpha}{2}$ ,  $v_2(t) = m_1$ . Отсутствие длительного особого режима позволяет нам продлить эти управления в начальный момент времени  $t = 0$  по непрерывности.<sup>4</sup> В этой же окрестности поведение системы (4) однозначно определяется формулой (6), которую, взяв интегралы можно переписать в следующем виде:

$$\psi_2(t) = \underbrace{\left(\psi_2^0 - \frac{\psi_1^0}{m_1}\right)}_A e^{m_1 t} + \underbrace{\frac{\psi_1^0}{m_1}}_B. \quad (9)$$

При этом видно, что задание  $A$  и  $B$  однозначно определяет вид возможной траектории, *подозреваемой* на оптимальность.

Теперь подставим соотношение (9) в формулу (5), чтобы выписать выражения для  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$ :

$$x_2(t) = \frac{1}{m_1} \left( A \operatorname{sh}(m_1 t) + \left( B - \frac{\alpha}{2} \right) (1 - e^{-m_1 t}) \right), \quad (10)$$

$$x_1(t) = \frac{1}{m_1} \left( \frac{A}{m_1} (\operatorname{ch}(m_1 t) - 1) + \left( B - \frac{\alpha}{2} \right) \left( t - \frac{1}{m_1} (1 - e^{-m_1 t}) \right) \right). \quad (11)$$

Формулы (10) и (11) верны, пока  $u_1(t) \neq 0$  (то есть пока не наступило *выключение*  $u_1$  в момент  $\psi_2(t) = \frac{\alpha}{2}$ ); формула же (9) верна, пока не наступила неопределенность по  $u_2$ , то есть пока  $\psi_2(t) > 0$ .

При этом, если  $A > 0$ , то  $\psi_2(t)$  строго возрастает, и формулы верны при любом  $t$ . Если же  $A < 0$ , то формулы (7) и (8) показывают, что нас будут интересовать моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , в которые  $\psi_2(t_1) = \frac{\alpha}{2}$  и  $\psi_2(t_2) = 0$ . В силу строгой монотонности  $\psi_2(t)$  эти моменты единственны и  $t_1 \leq t_2$  ( $t_1$  и  $t_2$  равны только в ситуации, когда параметр  $\alpha$  равен нулю). В дальнейшем будем обозначать  $x_j^i = x_j(t_i)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = 1, 2$ .

<sup>4</sup> Действительно, значение управления в одной точке роли не играет, так как его вклад в решение производится из интеграла.



Всвязи с написанным введем следующую классификацию рассматриваемых управлений (и отвечающих им траекторий):

1. Пусть  $A \geq 0$ . Тогда будем говорить, что управление реализует *режим акселерации*.
2. Пусть  $A < 0$ .
  - (а) Если  $t_1 > T$ , то будем говорить, что управление реализует *режим отсутствия торможения*.
  - (б) Если  $t_1 < T$ ,  $t_2 > T$ , то будем говорить, что управление реализует *режим слабого торможения*.
  - (с) Если  $t_2 < T$ , то будем говорить, что управление реализует *режим сильного торможения*.

*Замечание 6.* Понятно, что при  $\alpha = 0$  произойдёт только одно переключение. Мы рассмотрим эту ситуацию отдельно в рассказе о режиме слабого торможения.

Разберем по порядку каждый из этих режимов. Будем полагать, что оптимальное управление лежит в соответствующем режиме и что для оптимальной траектории  $x_2(T) = \xi$  такое, что  $S - \varepsilon \leq \xi \leq S + \varepsilon$ .

### 3.3 Режимы акселерации и отсутствия торможения

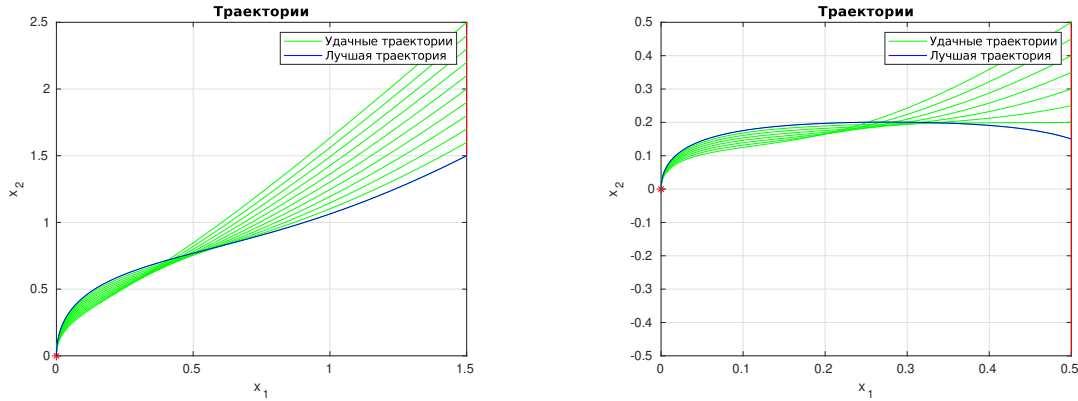


Рис. 1: Перебираемые траектории в режимах акселерации и отсутствия торможения для двух разных постановок задач. Слева присутствуют только траектории в режиме акселерации. Справа же присутствуют и траектории в режиме отсутствия торможения (более того, одна из них оказалась лучшей).

Как уже было отмечено, в этом случае поведение системы описывается уравнениями (9), (10) и (11).

Из (9) и (10) следует, что соотношения  $x_1(T) = L$  и  $x_2(T) = \xi$  являются линейной системой относительно  $A$  и  $B$ . После этого, если  $A < 0$ , то необходимо проверить условия:

$$\psi_2^0 = A + B \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad t_1 > T \Leftrightarrow \frac{1}{m_1} \ln \frac{\frac{\alpha}{2} - B}{A} > T,$$

чтобы проверить, действительно ли реализуется режим отсутствия торможения. Зная  $A$  и  $B$ , мы получим  $\psi_1^0$  и  $\psi_2^0$ , что позволяет полностью восстановить управление и траекторию.

### 3.4 Режим слабого торможения

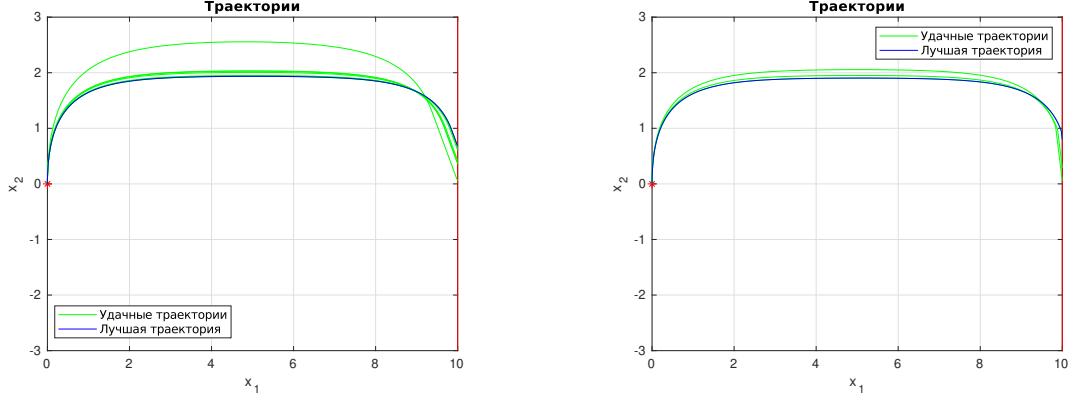


Рис. 2: Перебираемые траектории в режиме слабого торможения. Слева для  $\alpha = 1 > 0$ , справа для той же задачи при  $\alpha = 0$ .

#### 3.4.1 Задача с параметром $\alpha > 0$

От момента времени  $t_1$  до момента  $T$  система будет описываться уравнениями:

$$x_2(t) = x_2^1 e^{m_1(t_1-t)}, \quad (12)$$

$$x_1(t) = x_1^1 + \frac{x_2^1}{m_1} + \left(1 - e^{m_1(t_1-t)}\right). \quad (13)$$

Устроим перебор по времени переключения  $0 < t_1 < T$  и конечной точки траектории  $S - \varepsilon \leq \xi \leq S + \varepsilon$ . Соотношение  $x_2(T) = \xi$  дает

$$x_2^1 = \xi e^{m_1(T-t_1)},$$

из соотношения  $x_1(T) = L$  же получается

$$x_1^1 = L - \frac{x_2^1 - \xi}{m_1}.$$

Далее можно поступить аналогично случаю отсутствия торможения. Кроме того необходимо проверить условия реализации этого режима:

$$A < 0, \quad \psi_2^0 = A + B > \frac{\alpha}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{m_1} \ln \left( -\frac{B}{A} \right) > T \quad \text{и} \quad \psi_2(t_1) = A e^{m_1 t_1} + B = 0.$$

#### 3.4.2 Задача с параметром $\alpha = 0$

Данный случай является полностью аналогичным рассмотренному ранее, с единственным отличием: теперь траектории на отрезке  $t_1 \leq t \leq T$  будут определяться следующими соотношениями:

$$x_1(t) = x_1^1 + \frac{x_2^1}{m_2} + \left(1 - e^{m_2(t_1-t)}\right), \quad x_2(t) = x_2^1 e^{m_2(t_1-t)}.$$

Кроме того, при нулевом значении параметра  $\alpha$  дальнейшие переключения невозможны, а, значит, дальнейшие режимы рассматривать не нужно.

### 3.5 Режим сильного торможения

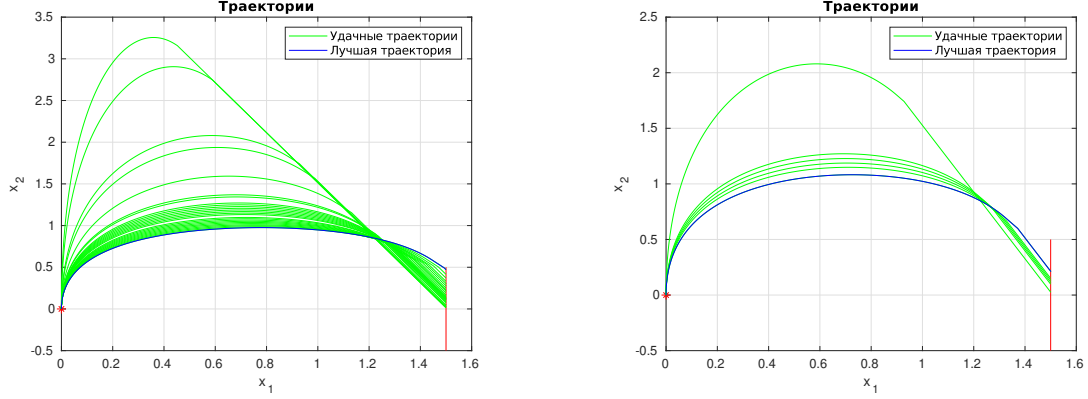


Рис. 3: Перебираемые траектории в режиме сильного торможения. Представлены траектории для одной задачи при разном числе разбиения. Отрезок  $0 \leq t \leq T$  был разбит на 1000 частей слева и на 500 частей справа.

В этом режиме соотношения (12) и (13) определяют поведение системы на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2$ , а на отрезке  $t_2 \leq t \leq T$  ее буду описывать следующие соотношения

$$x_1(t) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{m_2} (1 - e^{m_2(t_2-t)}), \quad x_2(t) = x_2^2 e^{m_2(t_2-t)} \quad (14)$$

Устроим перебор по временам первого и второго переключений  $0 < t_1 < T$ ,  $t_1 < t_2 < T$ . Так как соотношение (9) верно на отрезке  $0 \leq t \leq t_2$ , то выражения

$$\psi_2(t_1) = Ae^{m_1 t_1} + B = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \psi_2(t_2) = Ae^{m_1 t_2} + B = 0$$

образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A$  и  $B$ . Зная, эти параметры мы можем восстановить управление и траекторию на всем отрезке  $0 \leq t \leq T$ . После чего необходимо проверить траекторию на реализуемость

$$A < 0, \quad \psi_2^0 = A + B \geq \frac{\alpha}{2}$$

и на попадание траектории в целевое множество

$$x_1(T) = L, \quad x_2(T) \in [S - \varepsilon, S + \varepsilon].$$

## 4 Решение задачи при втором типе ограничений на управление

В данном пункте рассмотрим задачу (1) с ограничением на управляющий параметр вида

$$v(t) \in \Omega = \{ [v_1, v_2]^T \in \mathbb{R}^2 : v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in [m_1, m_2] \}.$$

В таком случае расширенная функция Гамильтона–Понтрягина принимает вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(v_1^2 + \alpha|v_1|) + \psi_1 x_1 + \psi_2(v_1 - v_2 x_2),$$

максимизация которой равносильна максимизации

$$\frac{1}{2}(v_1^2 + \alpha|v_1|) + \psi_2(v_1 - v_2 x_2) \rightarrow \max_{v \in \Delta}.$$

Тогда задача распадается на две:

$$\begin{aligned} v_1^2 + \alpha|v_1| + \psi_2 v_1 &\rightarrow \max_{v_1 \in \mathbb{R}}, \\ -\psi_2 x_2 v_2 &\rightarrow \max_{v_2 \in [m_1, m_2]}. \end{aligned}$$

Эти задачи имеют соответствующие решения:

$$\begin{aligned} v_1^* &= \begin{cases} \psi_2 + \frac{\alpha}{2}, & \text{при } \psi_2 < -\frac{\alpha}{2} \\ 0, & \text{при } \psi_2 \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}] \\ \psi_2 - \frac{\alpha}{2}, & \text{при } \psi_2 > \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \\ v_2^* &= \begin{cases} m_2, & \text{при } \psi_2 x_2 < 0 \\ [m_1, m_2], & \text{при } \psi_2 x_2 = 0 \\ m_1, & \text{при } \psi_2 x_2 > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Полностью аналогичные рассмотренным в предыдущей параграфе рассуждения об особом режиме и первоначальном виде траектории позволяют нам записать режимы, в которых может двигаться *тележка* при полученном, удовлетворяющем принципу максимума, управлении. Так как в начальный момент времени по-прежнему верна формула (9), введём следующую классификацию режимов траектории:

1. Пусть  $A \geq 0$ . Тогда будем говорить, что управление реализует *режим акселерации*.
2. Пусть  $A < 0$ .
  - (а) Если  $t_1 > T$ , то будем говорить, что управление реализует *режим отсутствия торможения*.
  - (б) Если  $t_1 < T$ ,  $t_2 > T$ , то будем говорить, что управление реализует *режим слабого торможения*.
  - (в) Если  $t_2 < T$ ,  $t_3 > T$ , то будем говорить, что управление реализует *режим сильного торможения*.

- (d) Если  $t_3 < T$ , то будем говорить, что управление реализует *режим интенсивного торможения*.

При такой классификации видно, что рассуждения для большинства режимов можно дословно перенести из предыдущего параграфа (или, как в случае режима сильного торможения, добавить дополнительную проверку). В связи с этим проведём рассуждения только для режимов, отличающихся от рассмотренных ранее.

#### 4.1 Режим интенсивного торможения

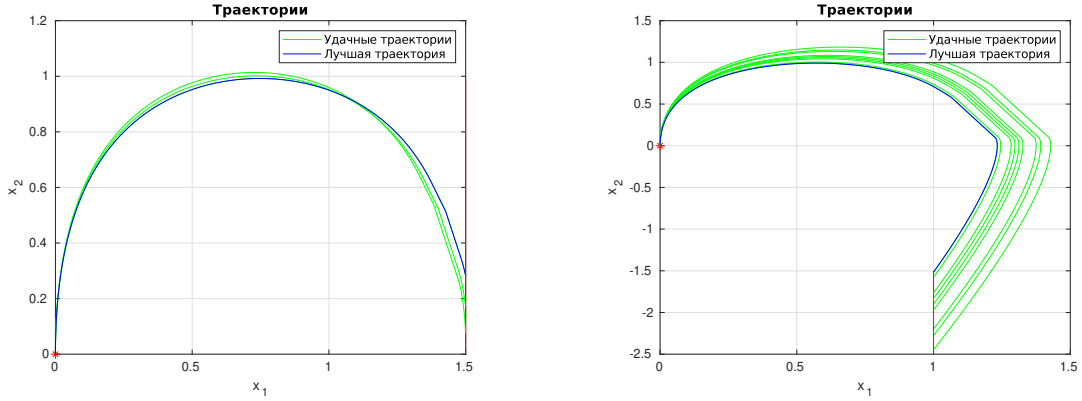


Рис. 4: Перебираемые траектории в режиме интенсивного торможения для двух разных постановок задач. Слева целевое множество находится выше оси абсцисс, справа — ниже.

На промежутке времени  $t_2 \leq t \leq T$  вторая компонента сопряжённой системы имеет вид:

$$\psi_2(t) = -\psi_1^0 \int_{t_2}^t e^{m_2(t-\tau)} d\tau = \frac{m_1}{m_2} B \left( 1 - e^{m_2(t-t_2)} \right).$$

Откуда получаем, что

$$t_3 = t_2 + \frac{1}{m_2} \ln \left( \frac{\alpha m_2}{2m_1 B} + 1 \right).$$

Теперь можем получить уравнения, описывающие поведение *тележки* на отрезке времени  $t_3 \leq t \leq T$ :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_2^3 e^{m_2(t_3-t)} + \int_{t_3}^t e^{m_2(\tau-t)} \left( \frac{m_1}{m_2} B + \frac{\alpha}{2} + \frac{m_1}{m_2} B e^{m_2(\tau-t_2)} \right) d\tau = \\ &= x_2^3 e^{m_2(t_3-t)} + \frac{1}{m_2} \left[ \left( \frac{m_1}{m_2} B + \frac{\alpha}{2} \right) \left( 1 - e^{m_2(t_3-t)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha m_1}{2m_2} B \left( e^{m_2(t-t_2)} - e^{m_2(2t_3-t-t_2)} \right) \right], \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) = x_1^3 + \int_{t_3}^t x_2(\tau) d\tau = x_1^3 + \frac{x_2^3}{m_2} (1 - e^{m_2(t_3-t)}) + \\
+ \frac{1}{m_2} \left[ \left( \frac{m_1}{m_2} B + \frac{\alpha}{2} \right) \left( t - t_3 - \frac{1}{m_2} (1 - e^{m_2(t_3-t)}) \right) - \right. \\
\left. - \frac{\alpha m_1}{2m_2^2} B (e^{m_2(t-t_2)} - 2e^{m_2(t_3-t_2)} + e^{m_2(2t_3-t-t_2)}) \right]. \quad (16)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем устроить перебор по времени первого и второго переключений  $0 < t_1 < T$ ,  $t_1 < t_2 < T$  и решать задачу так же, как мы делали это в режиме сильного торможения. В случае если найденное по формуле время третьего переключения оказалось меньше заданного конечного времени  $T$ , мы можем построить конечную часть траектории по вышеприведённым формулам.

## Список литературы

- [1] Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М: Наука, 1972.
- [2] В. А. Зорич. Математический анализ. М: Издательство МЦНМО, 2007.