



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

# «Динамические системы и модели биологии»

*Студент 315 группы*  
К. Ю. Егоров

*Научный руководитель*  
д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2019

## Содержание

<b>1</b>	<b>Исследование одномерной дискретной системы</b>	<b>3</b>
1.1	Формулировка задачи . . . . .	3
1.2	Поиск неподвижных точек . . . . .	4
1.3	Исследование неподвижных точек на устойчивость . . . . .	6
1.4	Построение бифуркационной диаграммы . . . . .	10
1.5	Исследование существования циклов длины 2 и 3 . . . . .	12
1.6	Показатель Ляпунова . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Исследование двумерной дискретной системы</b>	<b>17</b>
2.1	Формулировка задачи . . . . .	17
2.2	Поиск неподвижных точек . . . . .	17
2.3	Исследование неподвижных точек на устойчивость . . . . .	17
2.4	Бифуркация Неймарка-Сакера . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Исследование непрерывной системы</b>	<b>21</b>
3.1	Формулировка задачи . . . . .	21
3.2	Биологическая интерпретация системы . . . . .	21
3.3	Переход к безразмерным параметрам . . . . .	22
3.4	Поиск неподвижных точек . . . . .	22
3.5	Исследование неподвижных точек на устойчивость . . . . .	23
3.6	Бифуркация Андронова-Хопфа . . . . .	24
3.7	Интерпретация результатов . . . . .	26

# 1 Исследование одномерной дискретной системы

## 1.1 Формулировка задачи

Рассматривается одномерная динамическая система с дискретным временем

$$u_{t+1} = ru_t^2 e^{-u_t}, \quad u_t > 0, \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

при положительных значениях параметра  $r$ .

В рамках задачи для системы 1 требуется:

1. найти неподвижные точки;
2. исследовать на устойчивость найденные неподвижные точки в зависимости от параметра  $r$ ;
3. исследовать вопрос существования циклов длины 2 и 3;
4. построить бифуркационную диаграмму в соответствующем случае;
5. построить график зависимости показателя Ляпунова от значения параметра  $r$ .

## 1.2 Поиск неподвижных точек

**Определение 1.1** Пусть задано отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Неподвижной точкой системы  $u_{t+1} = f(u_t)$  называется точка  $u^*$  такая, что  $u^* = f(u^*)$ . [1, стр. 82]

Для системы 1 отображение  $f$  имеет вид  $f(u) = ru^2e^{-u}$ . Поэтому неподвижными точками системы 1 будут решения уравнения

$$u^* = r(u^*)^2e^{-u^*}. \quad (2)$$

Найдем его корни:

$$r(u^*)^2e^{-u^*} - u^* = 0 \iff u^*(ru^*e^{-u^*} - 1) = 0 \iff \begin{cases} u^* = 0 \\ u^*e^{-u^*} = \frac{1}{r} \end{cases}$$

Найдем решения второго уравнения получившейся совокупности.

$$u^*e^{-u^*} = \frac{1}{r} \quad (3)$$

Для этого рассмотрим левую часть равенства

$$g(u) = ue^{-u}.$$

Функция  $g(u)$  — непрерывно дифференцируема в  $\mathbb{R}_+$  и имеет производную

$$g'(u) = e^{-u} - ue^{-u} = e^{-u}(1 - u).$$

Производная  $g'(u)$  принимает положительные значения при  $u \in (-\infty, 1)$ , отрицательные значения — при  $u \in (1, +\infty)$  и равна нулю при  $u = 1$ . Из этого следует, что  $u = 1$  — точка глобального максимума функции  $g(u)$ .  $g(1) = \frac{1}{e}$ . (Рис. 1)

Получается, что уравнение 3 при  $0 < r < e$  не имеет решений; при  $r = e$  имеет единственное решение  $u^* = 1$  и при  $r > 0$  имеет два корня  $u_1^*$  и  $u_2^*$ , причем  $u_1^* \in (0, 1)$ , а  $u_2^* \in (1, +\infty)$ . В последнем случае посчитать решения аналитически не представляется возможным. (Рис. 2)

Подведем итог. Система 1 в зависимости от параметра  $r$  имеет следующие неподвижные точки:

1.  $0 < r < e$ :

$$u^* = 0.$$

2.  $r = e$ :

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 1.$$

3.  $r > e$ :

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* \in (0, 1), \quad u_3^* \in (1, +\infty).$$

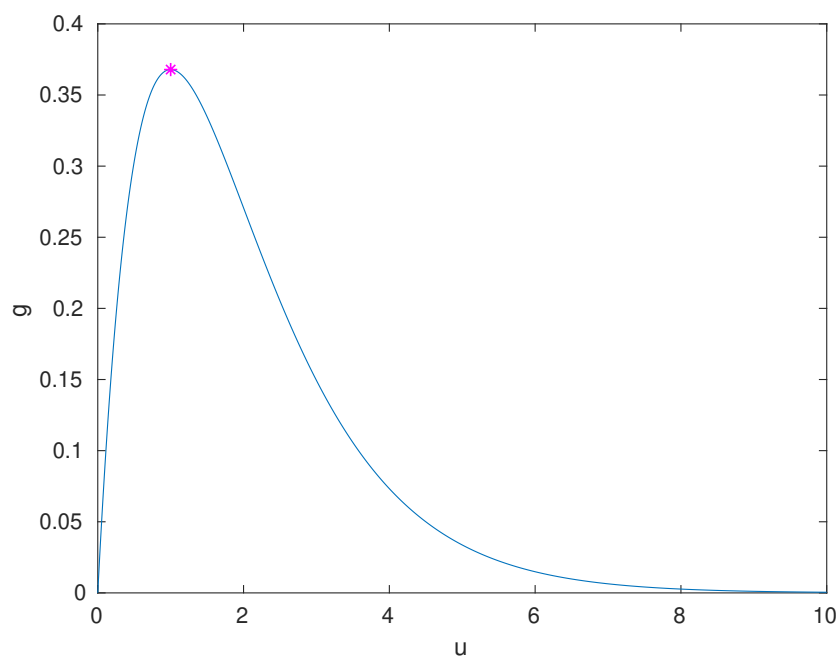


Рис. 1: Поведение функции  $g(u)$  на рассматриваемом промежутке

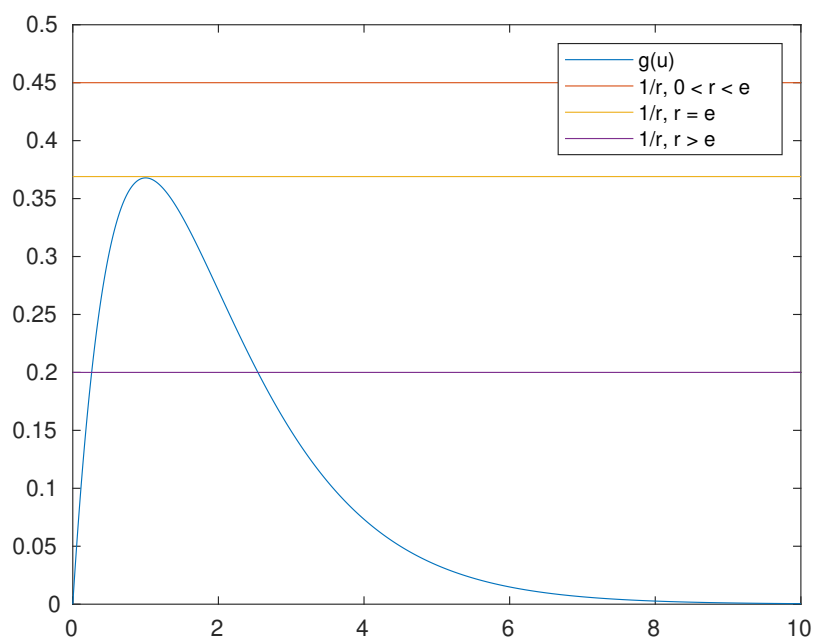


Рис. 2: Количество корней уравнения  $u^* e^{-u^*} = \frac{1}{r}$

### 1.3 Исследование неподвижных точек на устойчивость

Для начала определим все нужные нам понятия. Пусть задана система

$$u_{t+1} = f(u_t), \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

**Определение 1.2** Множество точек  $u_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  называется траекторией (или орбитой) системы, порожденной отображением  $f$ . [1, стр. 82]

**Определение 1.3** Неподвижная точка  $u^*$  системы 4 называется устойчивой по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$ , существует такое  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для любых начальных данных  $u_0$  из  $\delta$ -окрестности точки  $u^*$  вся траектория системы  $u_t$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  содержится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $u^*$ . Если, кроме того,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(u_t) = u^*$ , то точка  $u^*$  называется асимптотически устойчивой. [1, стр. 82]

*Замечание.* Асимптотически устойчивые неподвижные точки иногда называют аттракторами, а неустойчивые неподвижные точки — репеллерами. [1, стр. 83]

**Теорема 1** Задана система 4. Пусть  $f$  — непрерывно дифференцируемая функция,  $u^*$  — неподвижная точка системы 4. Тогда

1. если  $|f'_u(u^*)| < 1$ , то  $u^*$  асимптотически устойчива;
2. если  $|f'_u(u^*)| > 1$ , то  $u^*$  неустойчива;
3. если же  $|f'_u(u^*)| = 1$ , то про устойчивость точки  $u^*$  ничего сказать нельзя.

[1, стр. 83]

Итак, перейдем к исследованию на устойчивость неподвижных точек системы 1. Напомним, что она имеет следующий вид

$$u_{t+1} = ru_t^2 e^{-u_t}, \quad u_t > 0, \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots$$

Для данной системы функция  $f(u) = ru^2 e^{-u}$  непрерывно дифференцируемая на всей области определения ( $u \geq 0$ ) системы 1, следовательно, можно применить теорему 1. Найдем производную функции  $f$ .

$$f'_u(u) = r(2ue^{-u} - u^2 e^{-u}) = rue^{-u}(2 - u) \quad (5)$$

Видно, что для  $u^* = 0$ , неподвижной точки, существующей при всех значения параметра,  $|f'_u(u^*)| = 0$  для любого  $r > 0$ . Значит,  $u^*$  является аттрактором.

Исследуем на устойчивость остальные неподвижные точки. Напомним, что они являются решением уравнения 3

$$u^* e^{-u^*} = \frac{1}{r}.$$

Поэтому мы можем преобразовать производную 5

$$f'_u(u^*) = r \frac{1}{r} (2 - u^*) = 2 - u^*. \quad (6)$$

Получается, что

1.  $|f'_u(u^*)| > 1$  при  $u^* \in (1, 3)$ ;
2.  $|f'_u(u^*)| < 1$  при  $u^* \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$ ;
3.  $|f'_u(u^*)| = 1$  при  $u^* \in \{1, 3\}$ .

При  $r = e$  есть только одна неподвижная точка  $u^* = 1$ , и сделать вывод о ее устойчивости методами линейного анализа не представляется возможным. При  $r > e$ , появляются две неподвижные точки  $0 < u_1^* < 1$  и  $u_2^* > 1$ .  $u_1^*$  всегда неустойчива, при этом  $u_2^*$  неустойчива при  $e < r < \frac{e^3}{3}$ , асимптотически устойчива при  $r > \frac{e^3}{3}$ . При  $r = \frac{e^3}{3}$  об устойчивости точки  $u_2^*$  ничего сказать нельзя. Посмотреть на это можно на нижеприведенных графиках.

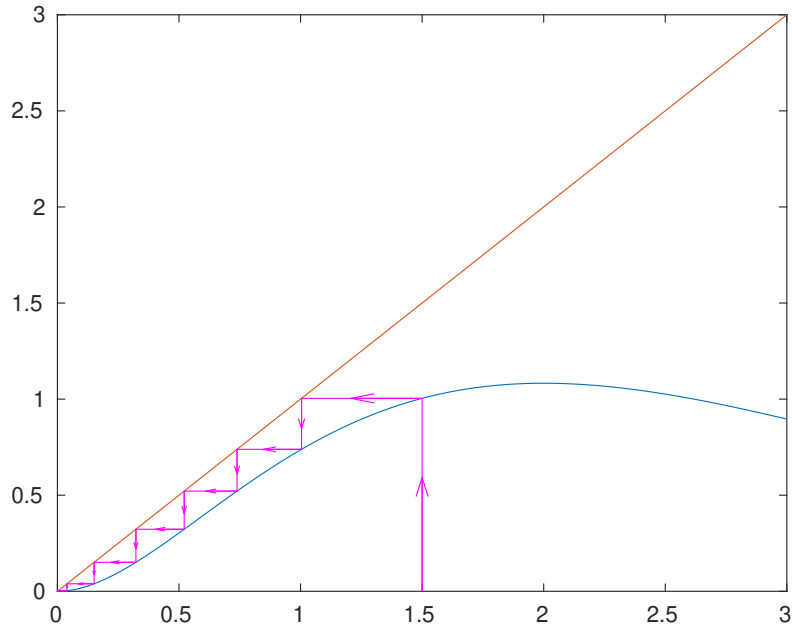


Рис. 3: Орбита системы 1 при  $r = 2$ ,  $u_0 = 1, 5$ .

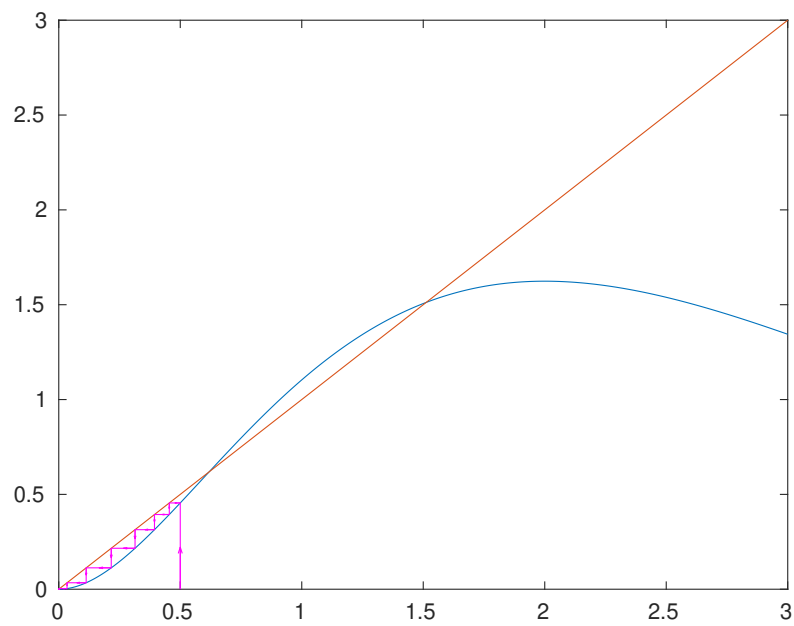


Рис. 4: Орбита системы 1 при  $r = 3$ ,  $u_0 = 0,5$ .

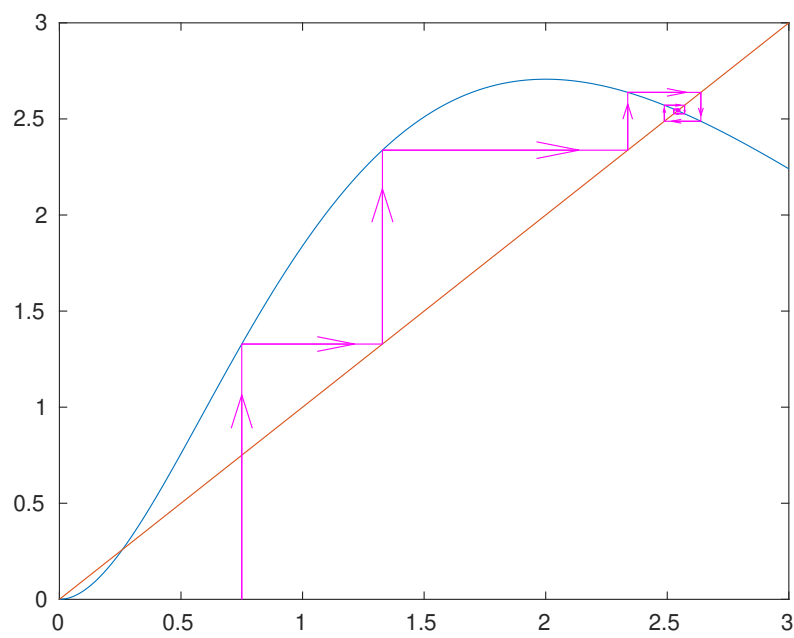


Рис. 5: Орбита системы 1 при  $r = 5$ ,  $u_0 = 0,75$ .



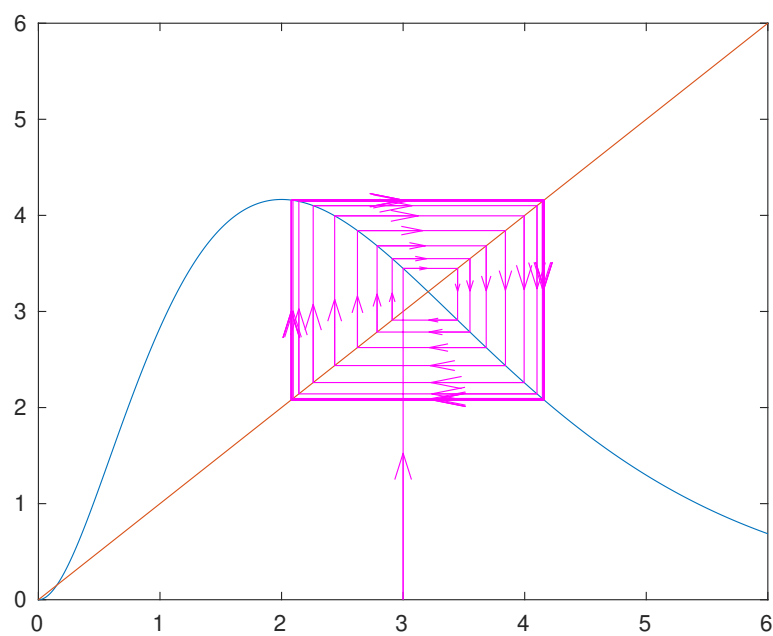


Рис. 6: Орбита системы 1 при  $r = \frac{e^3}{3} + 1$ ,  $u_0 = 3$ .

## 1.4 Построение бифуркационной диаграммы

**Определение 1.4** Динамическая система  $u \mapsto f(u)$  называется топологически эквивалентной в области  $U \subseteq X$  динамической системе  $v \mapsto g(v)$  в области  $V \subseteq X$ , если существует гомеоморфизм  $h : X \rightarrow X$ ,  $h(U) = V$ , отображающий орбиты первой системы в  $U$  на орбиты второй системы в  $V$ , сохраняя ориентацию во времени. [1, стр. 396]

*Замечание.* Фазовые портреты эквивалентных систем также называются топологически эквивалентными.

**Определение 1.5** Появление топологически неэквивалентных фазовых портретов при изменении параметров динамической системы называется бифуркацией. [1, стр. 25]

*Замечание.* Таким образом, бифуркация — это изменение топологического типа системы, когда параметры проходят через некоторые бифуркационные (критические) значения. [1, стр. 25]

**Определение 1.6** Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения. [1, стр. 27]

Бифуркационная диаграмма одномерной динамической системы с одним параметром  $r$  может быть представлена на плоскости  $(u, r)$ . Фазовые портреты в данном случае — это сечения бифуркационной диаграммы при  $r = \text{const}$ .

Рассмотрим алгоритм построения бифуркационной диаграммы:

1. Возьмем достаточно мелкое разбиение (выбран шаг  $\Delta_r = 0.01$ ) выбранного отрезка параметра  $r$ .
2. Для каждого значения параметра из разбиения:
  - (a) Прогоним первые  $n$  (взято  $n = 1000$ ) значений  $u_t$  системы при некотором  $u_0$  (взято  $u_0 = 4$ ), чтобы траектория сошлась к некоторому *постоянному* состоянию, например, предельной точке или циклу (определение цикла будет дано позднее).
  - (b) Посчитаем следующие  $m$  (взято  $m = 100$ ) значений  $u_t$ , которые и будут зафиксированны (изображены на координатной плоскости как точки  $(r, u_t)$ ) как фазовые портреты при фиксированных значениях параметра  $r$ .
3. Изобразив полученные  $m$  точек на плоскости для каждого значения параметра из разбиения, получим бифуркационную диаграмму системы.

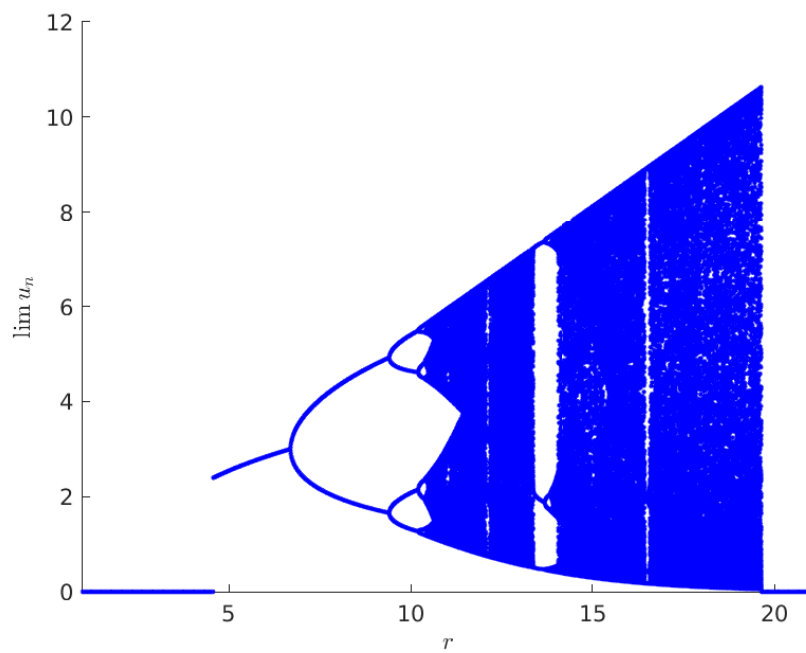


Рис. 7: Бифуркационная диаграмма для системы 1. Начальное приближение  $u_0 = 4$ .  $1 \leq r \leq 21$ .

## 1.5 Исследование существования циклов длины 2 и 3

**Определение 1.7** Пусть дана система  $u_{t+1} = f(u_t)$ . Множество точек  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , являющиеся траекторией системы, образуют цикл, если

$$u_2 = f(u_1), u_3 = f(u_2), \dots, u_k = f(u_{k-1}), u_1 = f(u_k).$$

[1, стр. 87]

*Замечание.* Любая неподвижная точка цикла является неподвижной точкой отображения  $f^{(k)}(u) = \underbrace{f(f(\dots f(f(u)) \dots))}_k$ .

**Определение 1.8** Будем говорить, что все натуральные числа упорядочены по Шарковскому, если

$$\begin{aligned} 3 &\succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ && \text{все нечетные числа, кроме 1} \\ &\succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ && \text{все нечетные числа, умноженные на 2, кроме 1} \\ &\succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ && \text{все нечетные числа, умноженные на } 2^2, \text{ кроме 1} \\ &\succ 2^3 \cdot 3 \succ 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ \dots \succ && \text{все нечетные числа, умноженные на } 2^3, \text{ кроме 1} \\ &\succ \dots \succ \\ &\succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1. \end{aligned}$$

[1, стр. 88]

**Теорема 2 (Шарковского)** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывное отображение, и пусть  $f$  имеет цикл длины  $k$ . Тогда  $f$  имеет цикл длины  $m$  для всех таких  $m$ , что  $k \succ m$  в указанном выше порядке. [1, стр. 89]

*Замечание.* Из теоремы непосредственно следует, что:

1. если отображение имеет цикл длины 3, то существует цикл любой длины (хаос);
2. если отображение не имеет цикла длины 2, то оно не имеет никаких циклов.

*Замечание.* Из определения 1.7 следует, что для нахождения цикла длины  $k$  нужно найти решение системы

$$\begin{cases} f^{(k)}(u) = u \\ \frac{df^{(k)}(u)}{du} = 1. \end{cases}$$

По бифуркационной диаграмме наглядно видно, что при  $r$  равном, например, 7 в системе возникает цикл длины 2. Вообще говоря, по диаграмме нельзя формулировать строгих утверждений, так как она построена с учётом погрешностей вычислений, но она позволяет нам существенно сократить подозрительную область изменения параметра, в которой возникает цикл нужной нам длины. Поэтому для нахождения цикла длины 2 функции  $f(u) = ru^2e^{-u}$  системы 1 при  $7 \leq r \leq 8$  решим систему

$$\begin{cases} f^{(2)}(u) = u \\ \frac{df^{(2)}(u)}{du} = 1. \end{cases}$$

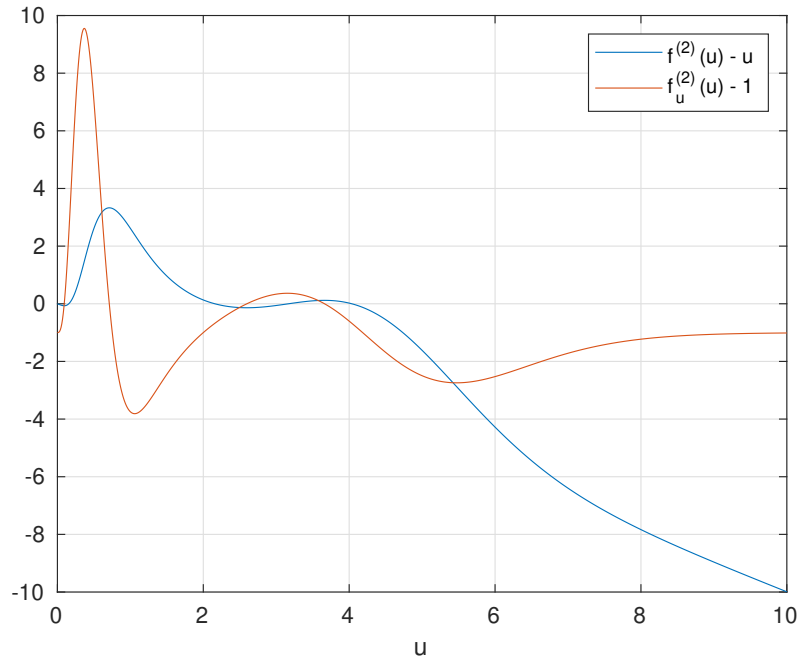


Рис. 8: Поиск цикла длины 2 при  $r = 7,5$ .

Рассмотрим значения параметра  $r = 7,5$ . Из рисунка 8 видно, что имеются три потенциальные точки (точки пересечения графиков, близкие к нулю), которые могут образовать цикл. Возьмем за начальное приближение одну из этих точек (Рис. 9). Видно, что траектория стремится к циклу. Действительно, выбрав  $u_0 \approx 2,164$ , отчетливо прослеживается цикл длины 2 (Рис. 10).

Теперь можно задаться вопросом существования цикла длины 3. Из бифуркационной диаграммы видно, что если цикл длины 3 существует, то искать его лучше при  $13,5 \leq r \leq 13,6$ . Аналогично рассуждениям для цикла длины два, цикл длины 3 можно получить при  $r = 13,6$  при начальном приближении  $u_0 = 1,9$  (Рис. 11).

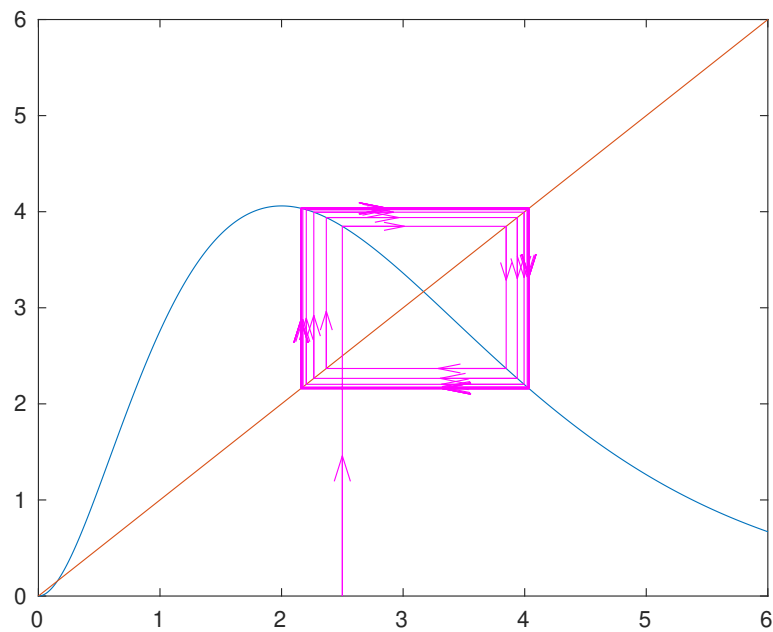


Рис. 9: Траектория при начальном приближении  $u_0 = 2,5$ .  $r = 7,5$ .

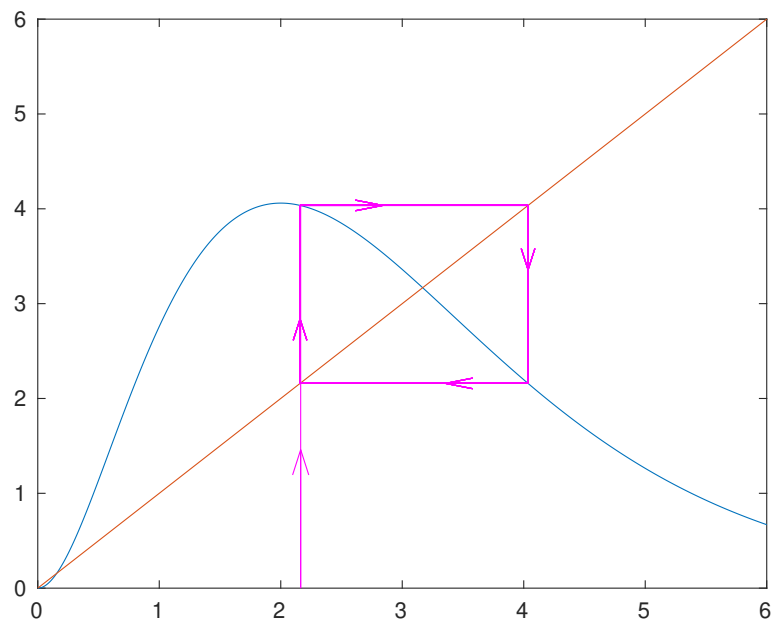


Рис. 10: Траектория при начальном приближении  $u_0 = 2,164$ .  $r = 7,5$ .

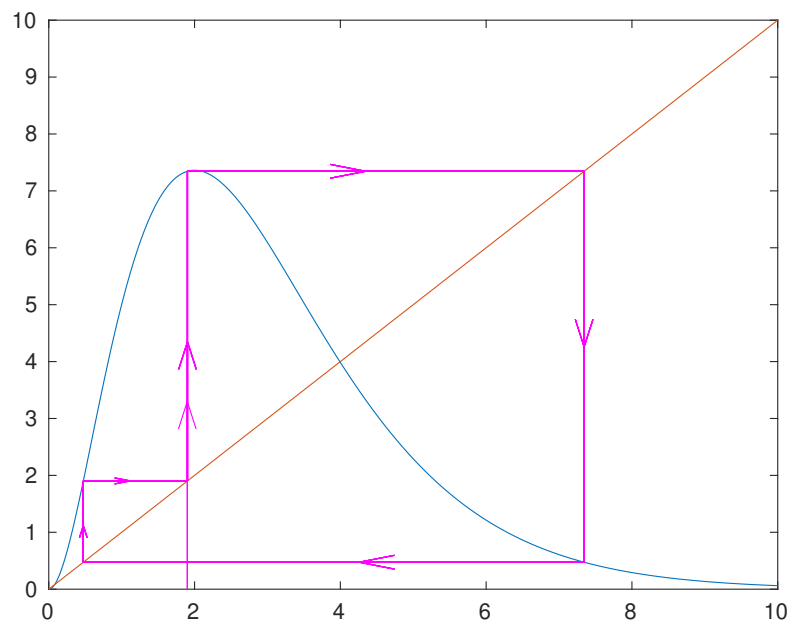


Рис. 11: Траектория при начальном приближении  $u_0 = 1,9$ .  $r = 13,6$ .

## 1.6 Показатель Ляпунова

Рассмотрим гладкое отображение  $u_{t+1} = f(u_t)$ . Пусть имеются две траектории этой системы  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  и  $\{u'_i\}_{i=1}^{\infty}$ , порожденные достаточно близкими начальными точками  $u_0$ ,  $u'_0$ . Чтобы определить расстояние между этими двумя орбитами, для начала определим расстояние между точками  $u_1$  и  $u'_1$ :

$$u_1 - u'_1 = f(u_0) - f(u'_0) = f'(u_0)(u_0 - u'_0) + o(|u_0 - u'_0|).$$

Если  $|f'(u_0)| < 1$ , то в линейном приближении расстояние между двумя точками  $u_1$  и  $u'_1$  будет меньше, чем расстояние между начальными точками орбит  $u_0$  и  $u'_0$ . Тогда если  $|f'(u_{k-1})| < 1$  ( $> 1$ ), то расстояние между точками будет уменьшаться (увеличиваться). Так как производная в точке  $u_t$  функции  $f(u)$  как больше, так и меньше единицы в зависимости от значения  $t$ , то естественно считать за меру близости некоторую среднюю величину, высчитываемую по всем возможным значениям  $t$ . Такая величина называется числом или показателем Ляпунова. [1, стр. 93]

**Определение 1.9** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкое отображение. Числом Ляпунова траектории  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  называется величина

$$l(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|f'(u_0)| \cdot |f'(u_1)| \cdot \dots \cdot |f'(u_n)|)^{\frac{1}{n}}.$$

[1, стр. 94]

**Определение 1.10** Показателем Ляпунова траектории  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  называется величина

$$h(u_0) = \ln(l(u_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |f'(u_0)| + \ln |f'(u_1)| + \dots + \ln |f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует. [1, стр. 94]

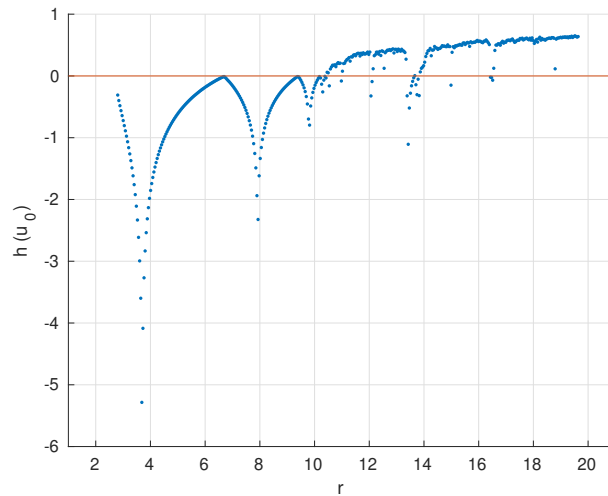


Рис. 12: Показатель Ляпунова при начальном приближении  $u_0 = 4$ .



## 2 Исследование двумерной дискретной системы

### 2.1 Формулировка задачи

Рассматривается двумерная динамическая система с дискретным временем

$$u_{t+1} = ru_t^2 e^{-u_t-1}, \quad u_t > 0, \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

при положительных значениях параметра  $r$ .

В рамках задачи для системы 7 требуется:

1. найти неподвижные точки;
2. исследовать на устойчивость найденные неподвижные точки в зависимости от параметра  $r$ ;
3. исследовать вопрос возникновения бифуркации Неймарка-Сакера, построить инвариантную кривую в соответствующем случае.

### 2.2 Поиск неподвижных точек

**Определение 2.1** Точка  $u^* \in \mathbb{R}$  называется неподвижной точкой системы  $u_{t+1} = f(u_t, u_{t-1})$ ,  $u_t \in \mathbb{R}$ ,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $u^* = f(u^*, u^*)$ .

Для поиска неподвижных точек необходимо решить уравнение

$$u^* = r(u^*)^2 e^{-u^*},$$

которое полностью совпадает с уравнением 2, рассмотренным ранее. Поэтому запишем вывод из предыдущего пункта:

1.  $0 < r < e$ :

$$u^* = 0.$$

2.  $r = e$ :

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 1.$$

3.  $r > e$ :

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* \in (0, 1), \quad u_3^* \in (1, +\infty).$$

### 2.3 Исследование неподвижных точек на устойчивость

Рассмотрим динамическую систему 7. Пусть  $v_t = u_{t-1}$ , тогда

$$\begin{cases} u_{t+1} = ru_t^2 e^{-v_t}, & r > 0, \quad u_t > 0, \quad v_t > 0 \\ v_{t+1} = u_t. \end{cases} \quad (8)$$

**Теорема 3** Пусть дана динамическая система с дискретным временем  $u_{t+1} = f(u_t)$ ,  $u_t \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $f$  — гладкое отображение,  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Тогда неподвижная точка  $u^*$  асимптотически устойчива, если все собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы Якоби функции  $f(u)$  в точке  $u^*$  удовлетворяют условию  $|\lambda_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Если модуль хотя бы одного собственного значения больше единицы, то  $u^*$  неустойчива.

Чтобы воспользоваться теоремой 3, выпишем матрицу Якоби системы 8:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2rue^{-v} & -ru^2e^{-v} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим точку  $u^* = 0$ .

$$J(u^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица Якоби имеет одно собственное значение  $\lambda_{1,2} = 0$ . Очевидно, что эта точка асимптотически устойчива, причем для любого значения  $r$ .

Рассмотрим  $r = e$  и неподвижную точку  $u^* = 1$ .

$$J(u^*) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица Якоби имеет одно собственное значение  $\lambda_{1,2} = 1$ . Поэтому об устойчивости этой точки ничего сказать нельзя.

Рассмотрим  $r > e$  и неподвижные точки  $u_1^* \in (0, 1)$  и  $u_2^* \in (1, +\infty)$ . Так как эти точки удовлетворяют соотношению  $u^*e^{-u^*} = \frac{1}{r}$ , характеристический многочлен матрицы Якоби принимает вид

$$|J(u^*) - \lambda I| = -\lambda(2 - \lambda) + u = \lambda^2 - 2\lambda + u.$$

В таком случае,

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4u}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - u}.$$

Получается, что  $u_1^*$  и  $u_2^*$  неустойчивы.

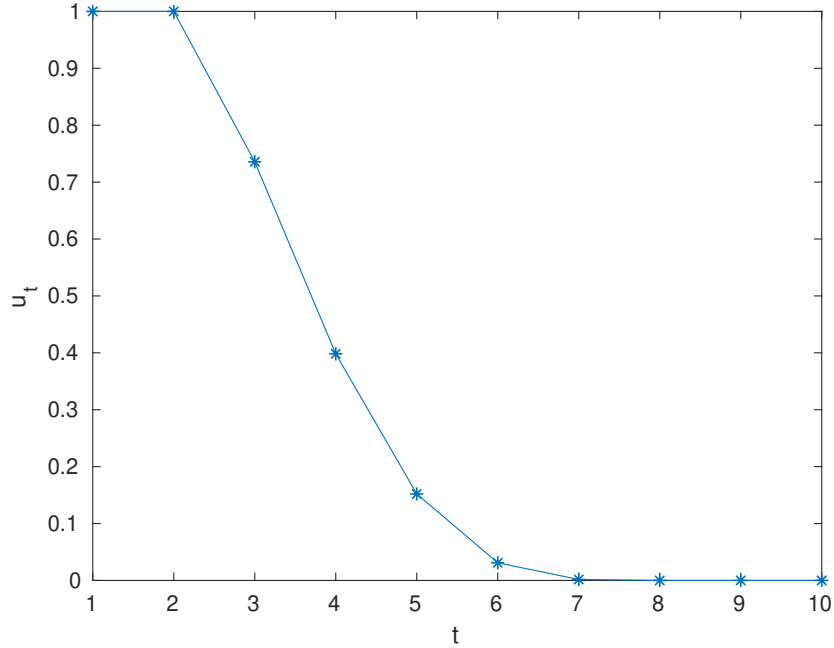


Рис. 13: Орбита системы 7 при  $r = 2$ ,  $u_0 = u_1 = 1$ .

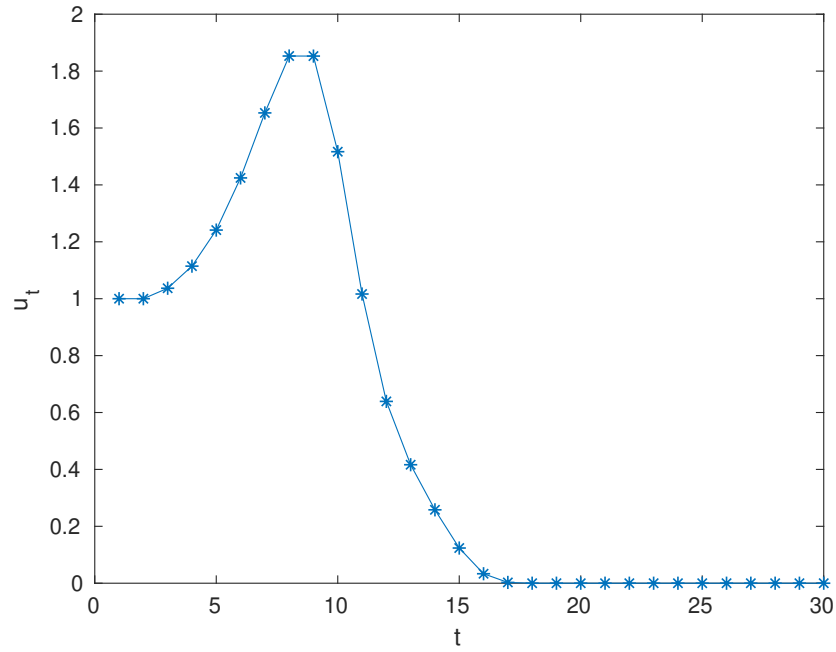


Рис. 14: Орбита системы 7 при  $r = e + \frac{1}{10}$ ,  $u_0 = u_1 = 1$ .

## 2.4 Бифуркация Неймарка-Сакера

**Определение 2.2** Бифуркация положения равновесия в системе 7, соответствующая появлению мультипликаторов  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ ,  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ , называется бифуркацией Неймарка-Сакера или дискретной бифуркацией Хопфа. [1, стр. 252]

Из предыдущего пункта мы получили, что при  $r = e$ ,  $u^* = 1$  возникает бифуркация Неймарка-Сакера. При  $r > e$  в окрестности  $u^* = 1$  появляются две неустойчивые неподвижные точки. При  $r < e$  неподвижной точки не существует в принципе.

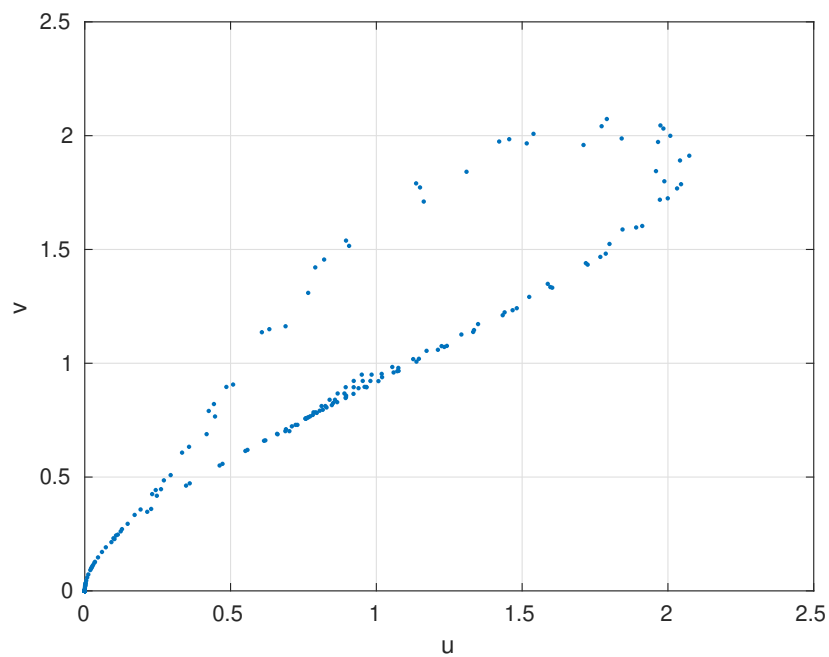


Рис. 15: Поведение системы 7 в окрестности точки  $(1, 1)$  при  $r = e + \frac{1}{10}$ .

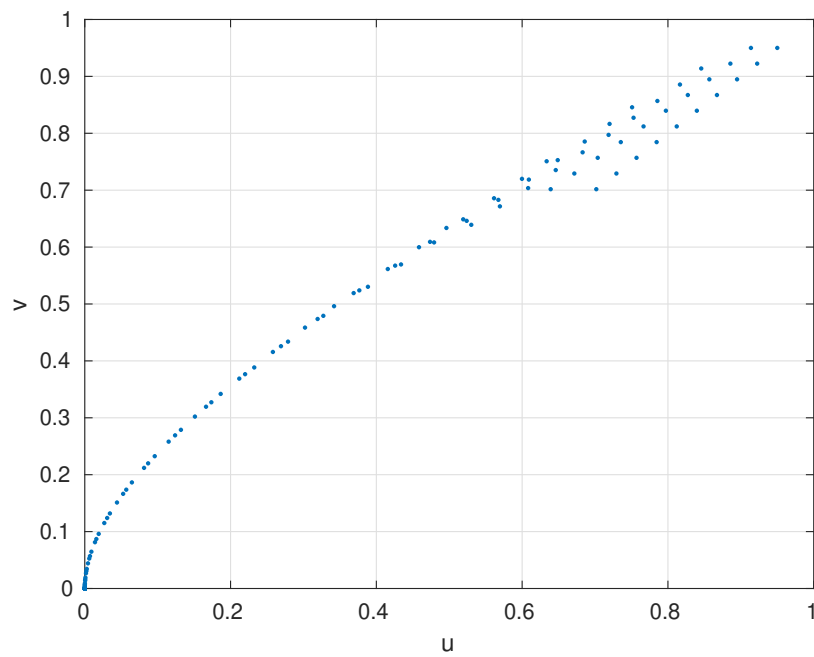


Рис. 16: Поведение системы 7 в окрестности точки  $(1, 1)$  при  $r = e - \frac{1}{10}$ .

### 3 Исследование непрерывной системы

#### 3.1 Формулировка задачи

Исследовать нелинейную динамику следующей системы на плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(b - \ln x) - bxy \\ \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{N+y} \end{cases}, \quad (9)$$

где  $b, c, d, N$  — положительные параметры и  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ . Необходимо:

1. дать биологическую интерпретацию характеристик системы;
2. ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров, выбрать два свободных параметра;
3. найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров, представить результаты исследования в виде параметрического портрета системы;
4. для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет, дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев;
5. исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число, исследовать характер предельного цикла (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый);
6. дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

#### 3.2 Биологическая интерпретация системы

Система 9 подходит под описание модели «хищник-жертва», которую в общем случае можно описать как

$$\begin{cases} \dot{u} = A(u) - B(u, v) \\ \dot{v} = -C(v) + D(u, v), \end{cases}$$

где

$u, v$  — численность жертв и хищников соответственно,

$A(u)$  — функция, описывающая размножение жертв в отсутствии хищников,

$C(v)$  — функция, описывающая вымирание хищников при отсутствии жертв,

$B(u, v)$  — выедание жертв хищниками,

$D(u, v)$  — эффективность поедания жертв хищниками. [1, стр. 137]

В случае системы 9 в функцию  $A(x) = rx(b - \ln x)$  введен член, ограничивающий рост популяции жертв, максимально возможное число которых задаётся параметром  $b$  и составляет  $e^b$ . Такая модель учитывает внутривидовую конкуренцию среди жертв.

Функция  $C(y) = cy$  — линейная. Это говорит о том, что хищники в рамках модели не конкурируют за ресурсы, отличные от жертв (например, за территорию). Такая модель может описывать взаимодействие популяций при небольшом количестве хищников. Параметр отвечает за продолжительность жизни хищников: чем он больше, тем быстрее хищники умирают.

Рассмотрим функцию  $B(x, y) = bxy$ . Для интерпретации системы можно ввести *трофическую функцию*  $B(x, \cdot)$ , которая показывает зависимость выедания жертвы при фиксированном числе хищников. В нашем случае трофическая функция линейна, что говорит об отсутствии насыщения хищников, а также отсутствии конкуренции за добычу.

### 3.3 Переход к безразмерным параметрам

Для системы 9 сделаем стандартную замену переменных

$$x(t) = Ru(t), \quad y(t) = Qv(t). \quad t = T\tau,$$

где  $R, Q, T$  — положительные параметры, которые мы выразим позже. Подставим в систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = T [ru(\tau) (b - \ln(Ru(\tau))) - bQu(\tau)v(\tau)] \\ \frac{dv}{d\tau} = T \left[ -cv(\tau) + \frac{dRu(\tau)v(\tau)}{N + Qv(\tau)} \right] \end{cases}$$

Теперь положим  $R = \frac{de^b}{c}$ ,  $Q = e^b$ ,  $T = \frac{1}{c}$  и после тривиальных преобразований получим

$$\begin{cases} e^b \frac{du}{d\tau} = u(\tau) \left( -\frac{r}{c} \ln u(\tau) - \frac{bde^b}{c^2} v(\tau) \right) \\ \frac{dv}{d\tau} = v(\tau) \left( -1 + \frac{\frac{Nc}{de^b} + v(\tau)}{\frac{Nc}{de^b} + v(\tau)} \right). \end{cases}$$

Обозначим  $\alpha = \frac{r}{c}$ ,  $\beta = \frac{bde^b}{c^2}$ ,  $\gamma = \frac{Nc}{de^b}$ . Тогда система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u(\tau) (-\alpha \ln u(\tau) - \beta v(\tau)) \\ \frac{dv}{d\tau} = v(\tau) \left( -1 + \frac{u(\tau)}{\gamma + v(\tau)} \right), \end{cases} \quad (10)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ .

*Замечание.* В силу ограниченности максимально возможной популяции жертв, как было сказано ранее  $x(t) \leq e^b$ . Переходя к новой переменной  $u(\tau)$ , получаем соотношение:

$$x(t) = e^b u(t) \leq e^b \implies u(\tau) \leq 1.$$

### 3.4 Поиск неподвижных точек

**Определение 3.1** Точка  $u_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  называется *неподвижной точкой динамической системы*  $\dot{u} = f(u)$ ,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , если  $f(u_0) = 0$ . [1, стр. 20]

Найдем неподвижные точки итоговой системы 10. Для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} u(\tau) (-\alpha \ln u(\tau) - \beta v(\tau)) = 0 \\ v(\tau) \left( -1 + \frac{u(\tau)}{\gamma + v(\tau)} \right) = 0. \end{cases}$$

Исходя из вида полученной системы уравнений легко обнаружить неподвижные точки  $A(0, 0)$  и  $B(1, 0)$ . Найдем в общем случае остальные неподвижные точки, исходя из предположения, что  $u(\tau) \neq 0$  и  $v(\tau) \neq 0$ :

$$\begin{cases} -\alpha \ln u(\tau) - \beta v(\tau) = 0 \\ -1 + \frac{u(\tau)}{\gamma + v(\tau)} = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} u(\tau) = e^{-\frac{\beta}{\alpha} v(\tau)} \\ u(\tau) = v(\tau) + \gamma. \end{cases}$$

Полученная система не решается аналитически для произвольных положительных значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . В рамках задачи разрешено фиксировать значения параметров, если их больше двух. Зафиксируем значение параметра  $\gamma = 1$ . В таком случае у последней системы не будет существовать решений, и дальнейшие рассуждения будут приведены для неподвижных точек  $A$  и  $B$ .

### 3.5 Исследование неподвижных точек на устойчивость

Пусть задана динамическая система с непрерывным временем

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f : U \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Пусть  $u^*$  — неподвижная точка системы 11,  $J(u^*)$  — матрица Якоби функции  $f(u)$  в точке  $u^*$ .  $n_+$ ,  $n_0$ ,  $n_-$  — количество собственных значений матрицы  $J(u^*)$ , учитывая кратность, с положительной, нулевой и отрицательной вещественной частью соответственно.

**Определение 3.2** *Положение равновесия  $u^*$  динамической системы 11 называется гиперболическим, если  $n_0 = 0$  (не существует собственных значений, расположенных на мнимой оси). Гиперболическое положение равновесия называется гиперболическим седлом, если  $n_+ \cdot n_- \neq 0$ .*

**Теорема 4 (А. М. Ляпунов, А. Пуанкаре)** *Пусть  $u^*$  — гиперболическое положение равновесия системы 11. Пусть  $n_+$ ,  $n_-$  — число собственных значений  $J(u^*)$  с положительной и отрицательной вещественной частью соответственно. Тогда, если  $n_+ = 0$ , то положение равновесия  $u^*$  асимптотически устойчиво, если  $n_+ > 0$ , то неустойчиво. [1, стр. 107]*

Воспользуемся теоремой Ляпунова–Пуанкаре. Для этого выпишем матрицу Якоби изучаемой системы 10, предварительно зафиксировав параметр  $\gamma = 1$ .

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha \ln u - \alpha - \beta v & -\beta u \\ \frac{v}{1+v} & -1 + \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим значения якобиана в найденных ранее неподвижных точках  $A(0, 0)$  и  $B(1, 0)$ .

Ввиду наличия логарифмического слагаемого значение якобиана в точке  $A$  не определено. Рассмотрим значение якобиана в некоторой точке  $A_\varepsilon(\varepsilon, 0)$ :

$$J(A_\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\alpha \ln \varepsilon & -\beta \varepsilon \\ 0 & -1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

Получаем собственные значения  $\lambda_1 = -\alpha - \ln \varepsilon$  и  $\lambda_2 = -1 + \varepsilon$ . Устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получаем, что  $\lambda_1 > 0$ , а  $\lambda_2 < 0$ . Значит точка  $A$  является седлом.

Рассмотрим теперь значение якобиана в точке  $B$ :

$$J(B) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Собственными значениями матрицы  $J(B)$  являются  $\lambda_1 = -\alpha < 0$  и  $\lambda_2 = 0$ . Данное положение равновесия является устойчивым. Но при этом для данной точки характерна бифуркация «седло-узел», возникающая при прохождении параметром  $\gamma$  значения 1.

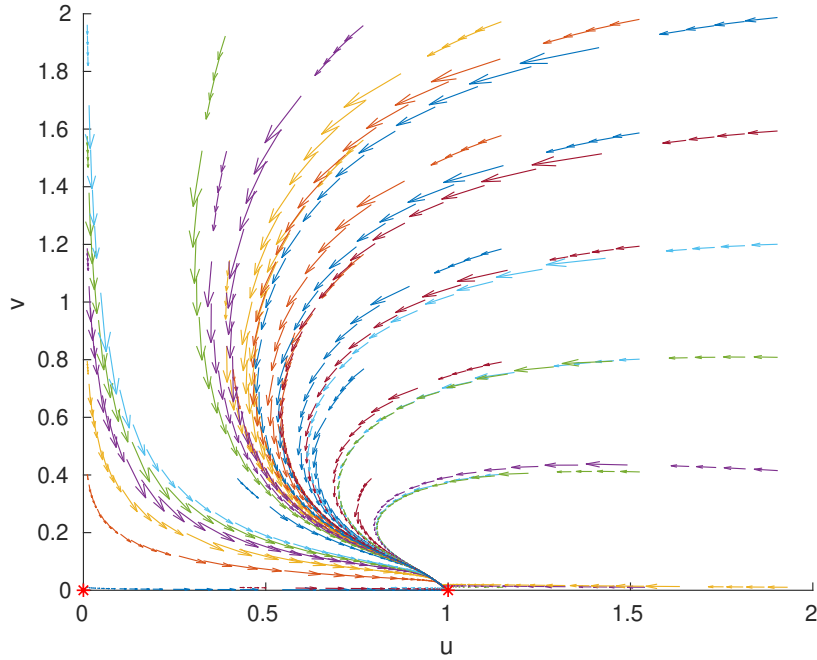


Рис. 17: Фазовый портрет системы 10.  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ .

На Рис. 19 так же видно появление узловой точки при  $\gamma < 1$ , которую мы не будем рассматривать в силу фиксации параметра  $\gamma$ . Приводить параметрический портрет системы не имеет смысла, так как в нашем случае есть только одно состояние.

### 3.6 Бифуркация Андронова–Хопфа

**Определение 3.3** Замкнутую траекторию  $\varphi(t)$  системы 11 будем называть предельным циклом, если в окрестности этой траектории нет других замкнутых орбит. [1, стр. 182]

**Определение 3.4** Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению сопряженных чисто мнимых собственных чисел, называется бифуркацией Пуанкаре–Андронова–Хопфа или бифуркацией рождения цикла. [1, стр. 192]

Как было замечено ранее, в изучаемой системе 10 все собственные значения матрицы Якоби действительны и в ней не могут появиться чисто мнимые собственные значения ни при каких значениях параметров. Это говорит о невозможности возникновения бифуркации Андронова–Хопфа.



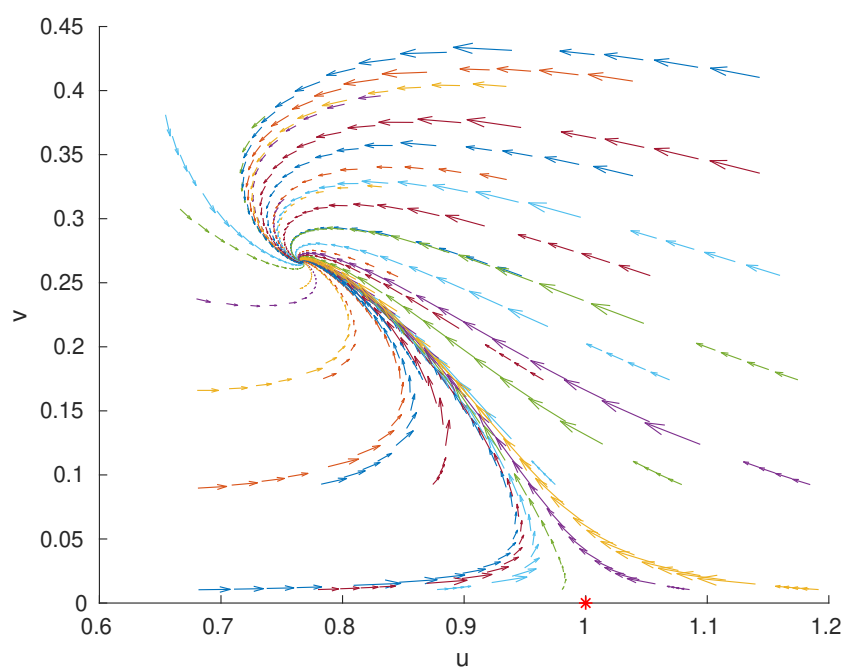


Рис. 18: Изменение состояния системы при  $\gamma < 1$ .

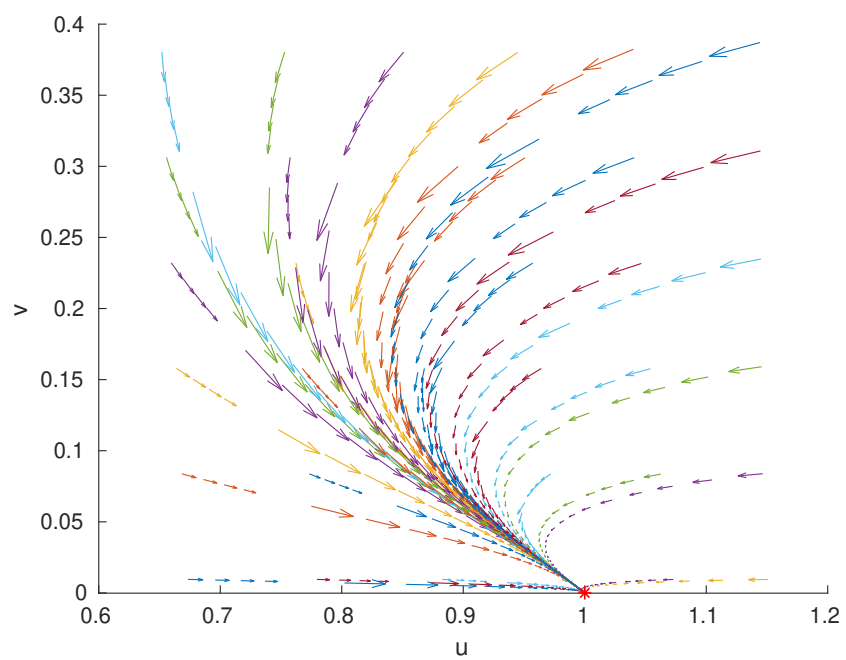


Рис. 19: Изменение состояния системы при  $\gamma > 1$ .

### 3.7 Интерпретация результатов

Если посмотреть на полученные фазовые портреты системы 10 можно провести следующую интерпретацию результатов. В частности мы видим, что при  $\gamma \geq 1$  популяция хищников полностью погибает. В противном случае может возникнуть устойчивая ситуация, при которой количество хищников и количество жертв на протяжении времени будут оставаться почти неизменными.

## Список литературы

- [1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.