Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

Динамическое программирование и процессы управления

Студент 415 группы
Егоров К. Ю.
Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2019

Содержание

1 Об эллипсоидах и сумме Минковского **3**

2 Внешняя оценка суммы эллипсоидов **5**

1 Об эллипсоидах и сумме Минковского

Определение 1. Назовём *эллипсоидом* множество

$$\mathcal{E}(q,\,Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle x - q,\, Q^{-1}(x-q)\rangle \leqslant 1\}, \qquad \text{где } Q = Q^{\mathrm{T}} > 0.$$

Утверждение 1. *Опорная функция и опорный вектор эллипсоида имеют вид:*

$$\rho(l\,|\,\mathcal{E}(q,\,Q)) = \langle l,\, q\rangle + \langle l,\, Ql\rangle^{1/2},$$

$$x(l) = q + \frac{Ql}{\langle l,\, Ql\rangle^{1/2}}.$$

Доказательство.

Будем доказывать для случая $q = 0$. Иначе — аналогично.

Так как по определению $\rho(l\,|\,A) = \sup_{x\in A}\langle l,\, x\rangle$, то мы должны решать задачу максимизации скалярного произведения $\langle l,\, x\rangle$ при условии, что $\langle x,\, Q^{-1}x\rangle = 1$. Запишем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\mathcal{L}(l,\, x,\, \lambda) = \langle l,\, x\rangle + \lambda(\langle x,\, Q^{-1}x\rangle - 1).$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = l + 2\lambda Q^{-1}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x(l) = -\frac{1}{2\lambda}Ql.$$

Подставим получившееся выражение для опорного вектора в условие:

$$\left\langle -\frac{1}{2\lambda}Ql,\, -\frac{1}{2\lambda}Q^{-1}Ql \right\rangle = 1 \implies \lambda = -\frac{1}{2}\langle l,\, Ql\rangle^{1/2} \implies x(l) = \frac{Ql}{\langle l,\, Ql\rangle^{1/2}}.$$

В таком случае опорная функция в направлении $l \neq 0$ равна

$$\rho(l\,|\,\mathcal{E}(0,\,Q)) = \left\langle l,\, \frac{Ql}{\langle l,\, Ql\rangle^{1/2}} \right\rangle = \langle l,\, Ql\rangle^{1/2}.$$

■

Определение 2. *Суммой Минковского* множеств A и B называется множество

$$A + B = \{\, x = a + b \,:\, a \in A,\, b \in B \,\}.$$

Утверждение 2. *Опорная функция суммы Минковского равна сумме опорных функций каждого из множеств, то есть*

$$\rho\left(l \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho\,(l\,|\,A_i).$$

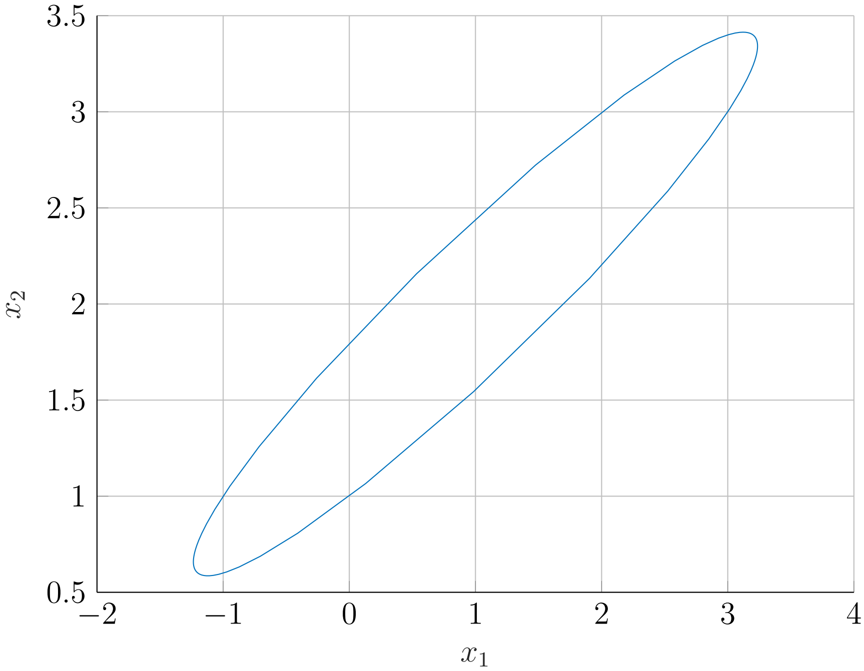

Рис. 1: Эллипсоид с центром $q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ и матрицей $Q = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

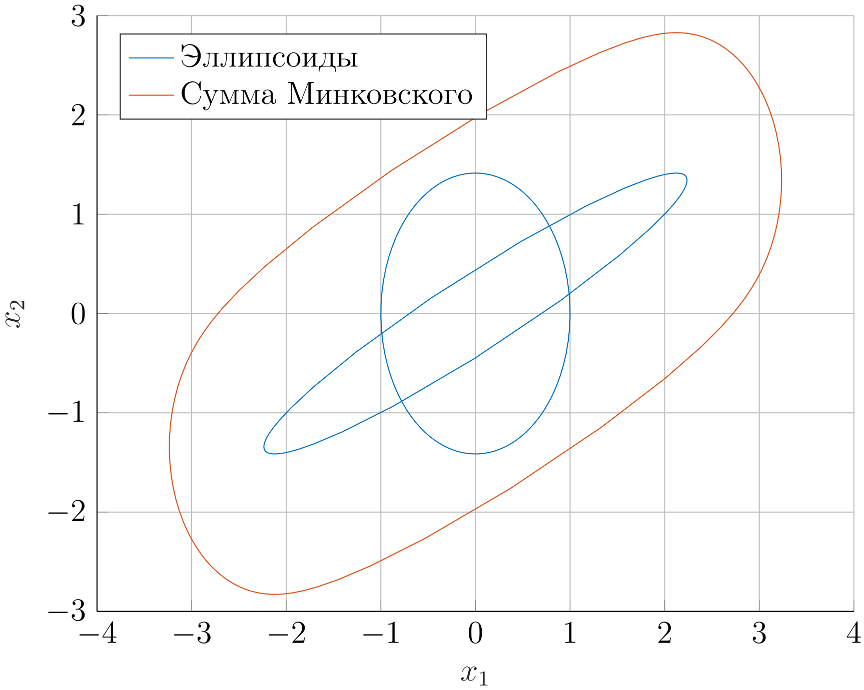

Рис. 2: Сумма двух эллипсоидов.

2 Внешняя оценка суммы эллипсоидов

Теорема 1. *Для суммы Минковского эллипсоидов справедлива следующая внешняя оценка*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(q_i,\, Q_i) = \bigcap_{\|l\|=1} \mathcal{E}(q_+(l),\, Q_+(l)),$$

где

$$q_+(l) = \sum_{i=1}^{n} q_i,$$

$$Q_+(l) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{p_i}, \quad \text{где } p_i = \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2}.$$

Доказательство.

Будем доказывать для случая $q_i = 0$, $i = \overline{1,\, n}$. Случай с произвольными центрами — аналогично.

Распишем квадрат опорной функции эллипсоида $\mathcal{E}(0,\, Q_+(l))$:

$$\rho^2(l \,|\, \mathcal{E}(0,\, Q_+(l))) = \sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Q_i l\rangle + \sum_{i<j} \left\langle l,\, \left(\frac{p_i}{p_j} Q_j + \frac{p_j}{p_i} Q_i\right) l \right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \left\{ \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \right\} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Ql\rangle + 2 \sum_{i<j} \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2} \langle l,\, Q_j l\rangle^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2} \right)^2 = \rho^2 \left(l \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(0, Q_i) \right).$$

Таким образом, получили, что для любого $l \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(0,\, Q_i) \subseteq \mathcal{E}(0,\, Q_+(l)),$$

причем, так как равенство опорных функций достигается при $p_i = \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2}$, то в направлении $l \neq 0$ эллипсоид $\mathcal{E}(0,\, Q_+)$ касается суммы $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{E}(0,\, Q_i)$.

■

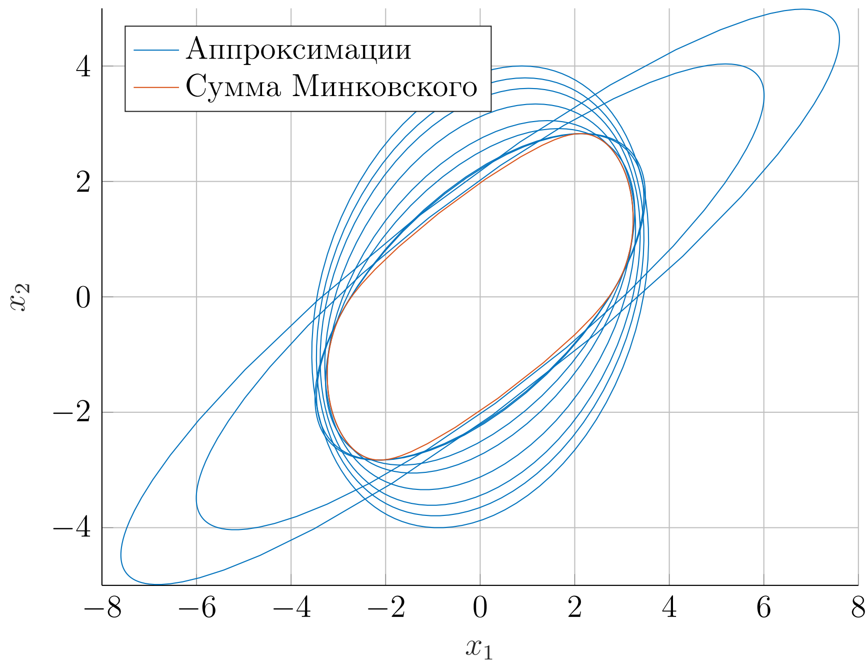

Рис. 3: Эллипсоидальные аппроксимации для 10 направлений.

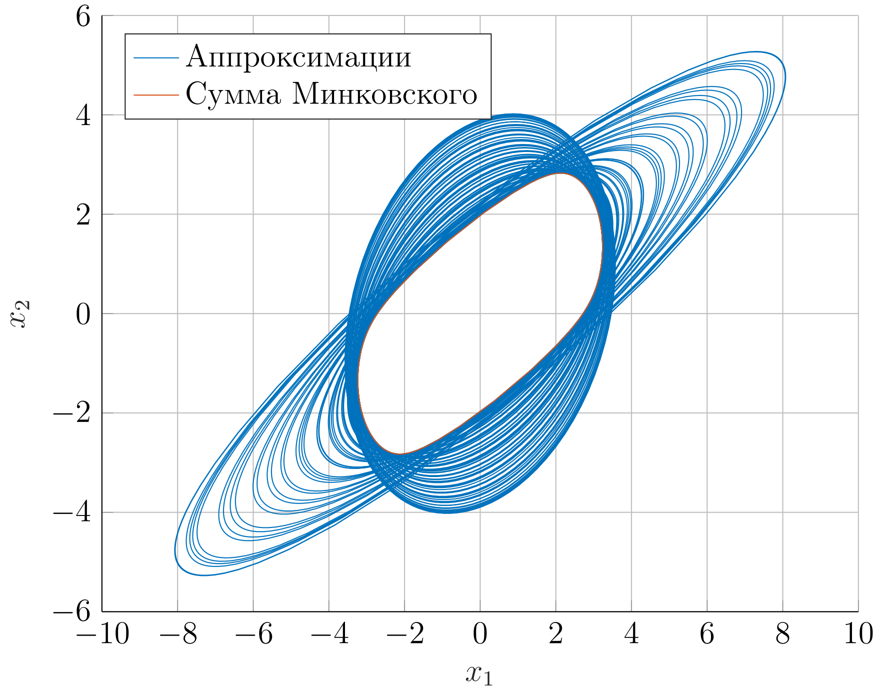

Рис. 4: Эллипсоидальные аппроксимации для 100 направлений.

Список литературы

[1] Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes.* Birkhauser, 2014.