Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

# Динамическое программирование и процессы управления

*Студент 415 группы*
Егоров К. Ю.
*Руководитель практикума*
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2019

# Содержание

# 1 Об эллипсоидах и сумме Минковского

**Определение 1.** Назовём *эллипсоидом* множество

$$\mathcal{E}(q,\, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle x - q,\, Q^{-1}(x - q)\rangle \leqslant 1\}, \qquad \text{где } Q = Q^{\mathrm{T}} > 0.$$

**Утверждение 1.** *Опорная функция и опорный вектор эллипсоида имеют вид:*

$$\rho(l \,|\, \mathcal{E}(q,\, Q)) = \langle l,\, q\rangle + \langle l,\, Ql\rangle^{1/2},$$

$$x(l) = q + \frac{Ql}{\langle l,\, Ql\rangle^{1/2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Будем доказывать для случая $q = 0$. Иначе — аналогично.

Так как по определению $\rho(l \,|\, A) = \sup_{x \in A}\langle l,\, x\rangle$, то мы должны решать задачу максимизации скалярного произведения $\langle l,\, x\rangle$ при условии, что $\langle x,\, Q^{-1}x\rangle = 1$. Запишем функцию Лагранжа для этой задачи:

$$\mathcal{L}(l,\, x,\, \lambda) = \langle l,\, x\rangle + \lambda(\langle x,\, Q^{-1}x\rangle - 1).$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = l + 2\lambda Q^{-1}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(l) = -\frac{1}{2\lambda}Ql.$$

Подставим получившееся выражение для опорного вектора в условие:

$$\left\langle -\frac{1}{2\lambda}Ql,\, -\frac{1}{2\lambda}Q^{-1}Ql \right\rangle = 1 \implies \lambda = -\frac{1}{2}\langle l,\, Ql\rangle^{1/2} \implies x(l) = \frac{Ql}{\langle l,\, Ql\rangle^{1/2}}.$$

В таком случае опорная функция в направлении $l \neq 0$ равна

$$\rho(l \,|\, \mathcal{E}(0,\, Q)) = \left\langle l,\, \frac{Ql}{\langle l,\, Ql\rangle^{1/2}} \right\rangle = \langle l,\, Ql\rangle^{1/2}.$$

■

**Определение 2.** *Суммой Минковского* множеств $A$ и $B$ называется множество

$$A + B = \{\, x = a + b \,:\, a \in A,\, b \in B \,\}.$$

*Замечание* 1. Сумма эллипсоидов, вообще говоря, не является эллипсоидом. В этом можно убедиться на следующем примере:

$$\mathcal{E}\left(0,\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + \mathcal{E}\left(0,\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = [0,\, 1] \times [0,\, 1].$$

**Утверждение 2.** *Опорная функция суммы Минковского равна сумме опорных функций каждого из множеств, то есть*

$$\rho\left(l \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho\,(l \,|\, A_i).$$

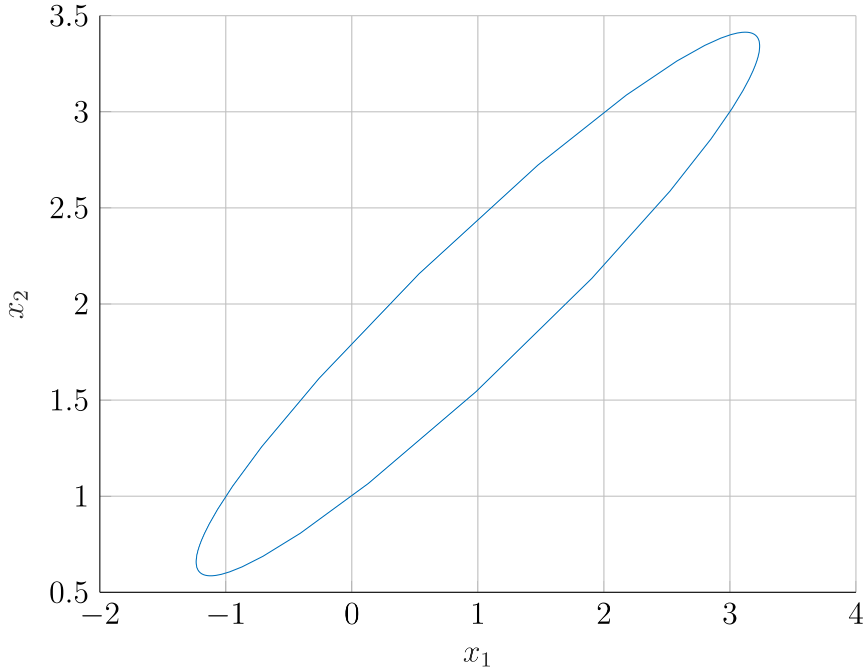


Рис. 1: Эллипсоид с центром $q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ и матрицей $Q = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

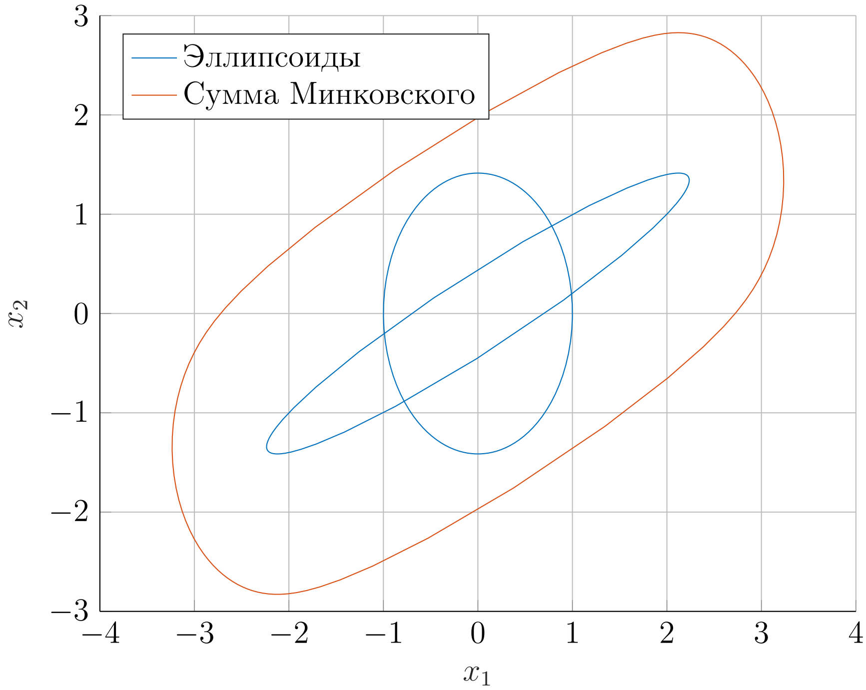


Рис. 2: Сумма двух эллипсоидов.

## 2 Внешняя оценка суммы эллипсоидов

**Теорема 1.** *Для суммы Минковского эллипсоидов справедлива следующая внешняя оценка*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(q_i,\, Q_i) = \bigcap_{\|l\|=1} \mathcal{E}(q_+(l),\, Q_+(l)),$$

*где*

$$q_+(l) = \sum_{i=1}^{n} q_i,$$
$$Q_+(l) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{p_i}, \quad \textit{где } p_i = \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Будем доказывать для случая $q_i = 0$, $i = \overline{1,\, n}$. Случай с произвольными центрами — аналогично.

Распишем квадрат опорной функции эллипсоида $\mathcal{E}(0,\, Q_+(l))$:

$$\rho^2(l\,|\,\mathcal{E}(0,\, Q_+(l))) = \sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Q_i l\rangle + \sum_{i<j} \left\langle l,\, \left(\frac{p_i}{p_j} Q_j + \frac{p_j}{p_i} Q_i\right) l \right\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \left\{ \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \right\} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Ql\rangle + 2\sum_{i<j} \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2} \langle l,\, Q_j l\rangle^{1/2} =$$
$$= \left( \sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2} \right)^2 = \rho^2 \left( l \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(0, Q_i) \right).$$

Таким образом, получили, что для любого $l \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(0,\, Q_i) \subseteq \mathcal{E}(0,\, Q_+(l)),$$

причем, так как равенство опорных функций достигается при $p_i = \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2}$, то в направлении $l \neq 0$ эллипсоид $\mathcal{E}(0,\, Q_+)$ касается суммы $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{E}(0,\, Q_i)$.

■

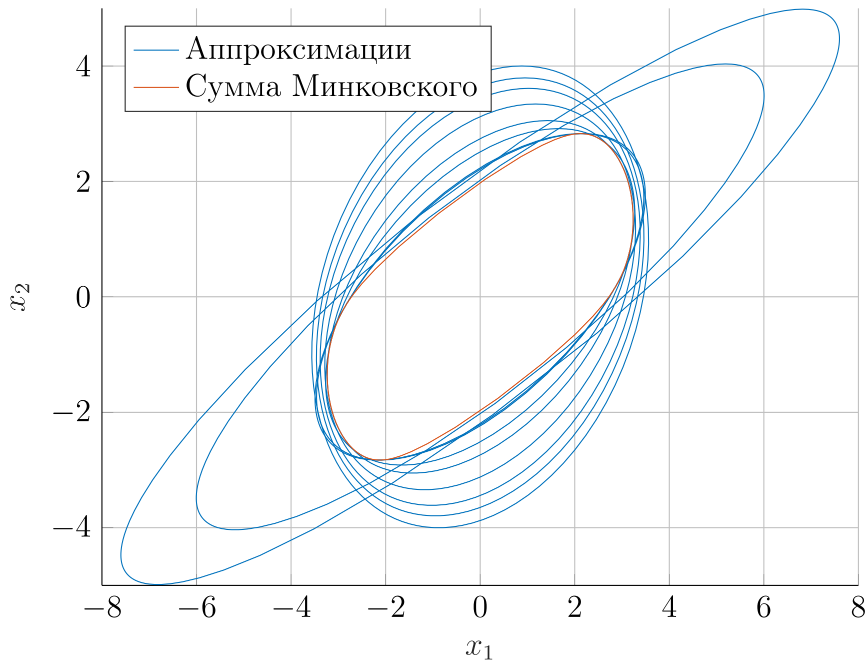


Рис. 3: Эллипсоидальные аппроксимации для 10 направлений.

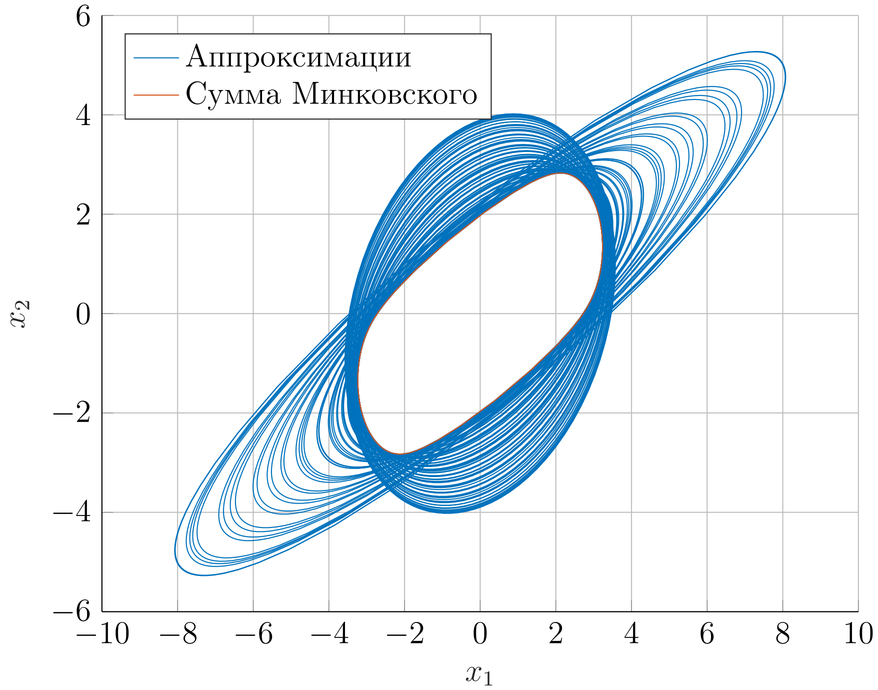


Рис. 4: Эллипсоидальные аппроксимации для 100 направлений.

## 3 Внутренняя оценка суммы эллипсоидов

**Определение 3.** *Сингулярным разложением* матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ называется представление матрицы в виде

$$A = V\Sigma U^*,$$

где

$$\begin{aligned}
&V \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, V^* = V^{-1},\\
&U \in \mathbb{R}^{m\times m} \,:\, U^* = U^{-1},\\
&\Sigma = \operatorname{diag}\left(\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_{\min\{n,\,m\}}\right) \in \mathbb{R}^{n\times m} \,:\, \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{\min\{n,\,m\}}.
\end{aligned}$$

**Теорема 2.** *Сингулярное разложение $A = V\Sigma U^*$ существует для любой комплексной матрицы $A$. Если матрица $A$ вещественная, то матрицы $V$, $\Sigma$ и $U$ также можно выбрать вещественными.*

**Теорема 3.** *Старшее сингулярное число $\sigma_1$ матрицы $A = V\Sigma U^*$ является её нормой.*

**Определение 4.** Назовём линейное преобразование $\mathcal{A}$ *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\langle \mathcal{A}(x),\, \mathcal{A}(y)\rangle = \langle x,\, y\rangle.$$

**Теорема 4.** *Необходимым и достаточным условием ортогональности линейного преобразования $\mathcal{A}$ в конечномерном пространстве является унитарность матрицы преобразования $A$, то есть*

$$A^* = A^{-1}.$$

**Утверждение 3.** *Для произвольных векторов $a$, $b \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|a\| = \|b\|$, существует матрица ортогонального преобразования, переводящего $a$ в $b$.*

Доказательство.

Построим сингулярное разложение для векторов $a$ и $b$:

$$a = V_a\Sigma_a u_a, \qquad b = V_b\Sigma_b u_b,$$

причем $V_a$, $V_b \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — унитарные матрицы, $u_a$, $u_b \in \{-1,\, 1\} \in \mathbb{R}^1$,

$$\Sigma_a = [\sigma_a,\, 0,\, \ldots,\, 0]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad \Sigma_b = [\sigma_b,\, 0,\, \ldots,\, 0]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad \sigma_a,\, \sigma_b > 0.$$

Согласно Теореме 4 $\sigma_a = \sigma_b$. Тогда преобразуем выражение для вектора $b$:

$$b = V_b\Sigma_b u_b = V_b(V_a^{\mathrm{T}}V_a)\Sigma_b u_b = V_bV_a^{\mathrm{T}}V_a\left(\Sigma_a\frac{\sigma_b}{\sigma_a}\right)\left(u_a\frac{u_b}{u_a}\right) =$$

$$= V_bV_a^{\mathrm{T}}\frac{\sigma_b\cdot u_b}{\sigma_a\cdot u_a}V_a\Sigma_a u_a = \left(V_bV_a^{\mathrm{T}}\frac{\sigma_b\cdot u_b}{\sigma_a\cdot u_a}\right)a.$$

Так как произведение унитарных матриц есть унитарная матрица, теорема доказана. ■

**Следствие 1.** Далее под ортогональным преобразованием из вектора $a$ в вектор $b$ таких, что $\|a\| = \|b\|$, будем понимать

$$\mathrm{Orth}(a,\, b) = u_a u_b V_b V_a^{\mathrm{T}}.$$

**Утверждение 4.** *Для суммы Минковского эллипсоидов справедлива следующая оценка*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(q_i,\, Q_i) = \bigcup_{\|l\|=1} \mathcal{E}(q_-(l),\, Q_-(l)),$$

*где*

$$q_-(l) = \sum_{i=1}^{n} q_i,$$

$$Q_-(l) = Q_*^{\mathrm{T}}(l) Q_*(l), \quad Q_*(l) = \sum_{i=1}^{n} S_i(l) Q_i^{1/2},$$

$$S_i(l) = \mathrm{Orth}(Q_i^{1/2} l,\, \lambda_i Q_1^{1/2} l), \quad \lambda_i = \frac{\langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2}}{\langle l,\, Q_1 l\rangle^{1/2}}.$$

Доказательство.

Будем доказывать для случая $q_i = 0$, $i = \overline{1,\, n}$. Случай с произвольными центрами — аналогично.

Итак рассмотрим эллипсоид $\mathcal{E}_- = \mathcal{E}(0,\, Q_-)$, $Q_- = Q_*^{\mathrm{T}} Q_*$,

$$Q_* = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^{1/2},$$

где $S_i$ — некоторые унитарные матрицы. Распишем квадрат опорной функции этого эллипсоида:

$$\rho^2(l \,|\, \mathcal{E}_-) = \langle l,\, Q_- l\rangle = \langle Q_* l,\, Q_* l\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Q_i l\rangle + \sum_{i \neq j} \left\langle S_i Q_i^{1/2} l,\, S_j Q_j^{1/2} l \right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \{\text{Неравенство Коши–Буняковского}\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Q_i l\rangle + \sum_{i \neq j} \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2} \langle l,\, Q_j l\rangle^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^{n} \langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2} \right)^2 = \rho^2 \left( l \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(q_i,\, Q_i) \right).$$

Таким образом, получили, что $\mathcal{E}_- \subseteq \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(q_i,\, Q_i)$.

Заметим, что равенство в последней формуле при фиксированном направлении $l \neq 0$ достигается при

$$S_i Q_i^{1/2} l = \lambda_i S_1 Q_1^{1/2} l,$$

где $\lambda_i$ — произвольные неотрицательные константы. Если положить $S_1 = I$, а $\lambda_i$ выбирать, исходя из условий нормировки ($\|Q_i^{1/2} l\| = \|\lambda_i Q_1^{1/2} l\|$):

$$\lambda_i = \frac{\langle l,\, Q_i l\rangle^{1/2}}{\langle l,\, Q_1 l\rangle^{1/2}},$$

то получим утверждение теоремы.

$\blacksquare$

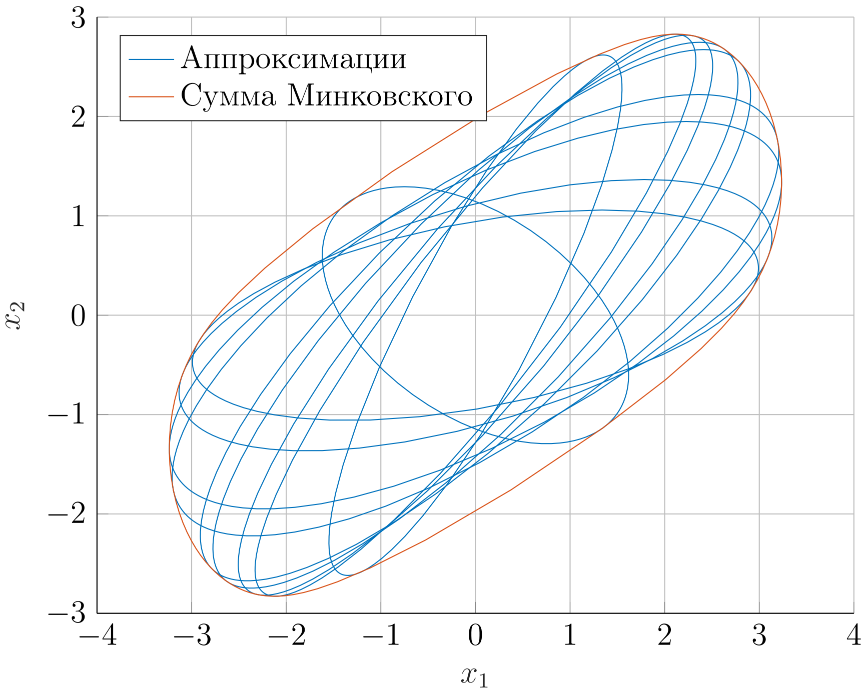


Рис. 5: Эллипсоидальные аппроксимации для 10 направлений.

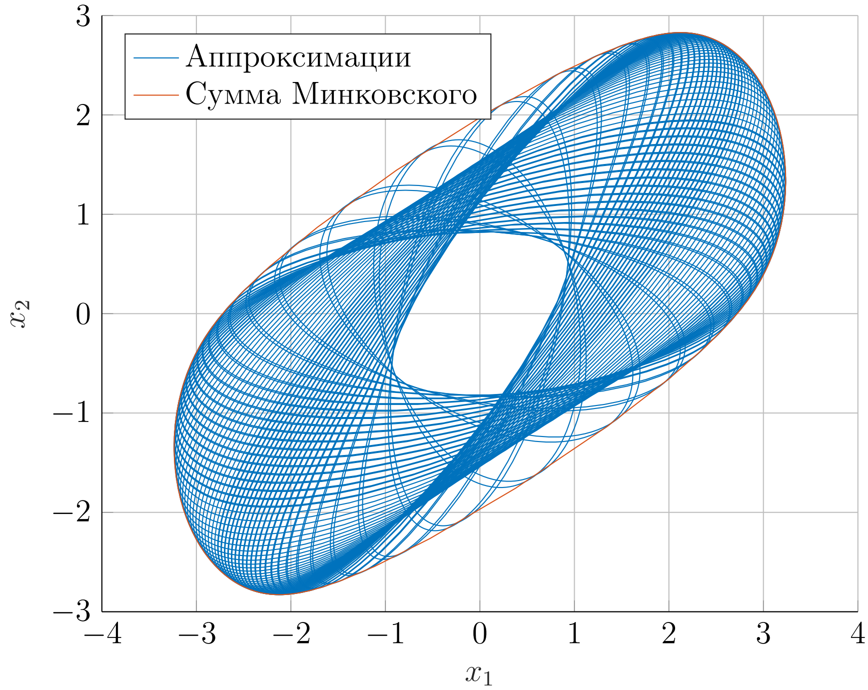


Рис. 6: Эллипсоидальные аппроксимации для 100 направлений.

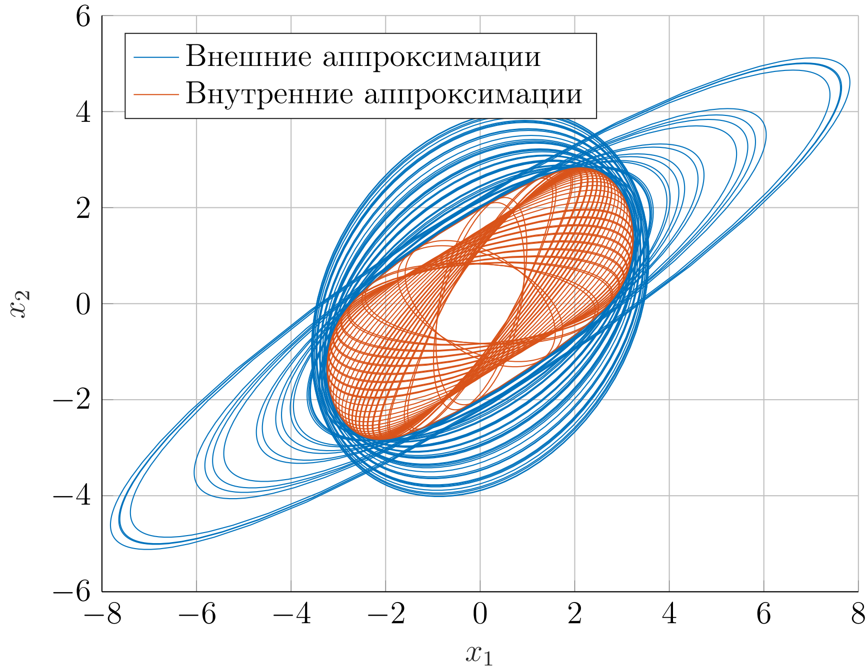


Рис. 7: Эллипсоидальные аппроксимации для 50 направлений.

## Список литературы

[1] Kurzhanski A. B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes.* Birkhauser, 2014.