



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2019

Содержание

| | | |
|----------|---------------------|-----------|
| 1 | Задание №1 | 3 |
| 1.1 | Задача №1 | 3 |
| 1.2 | Задача №2 | 4 |
| 1.3 | Задача №3 | 4 |
| 2 | Задание №2 | 8 |
| 2.1 | Задача №1 | 8 |
| 2.2 | Задача №2 | 10 |
| 2.3 | Задача №3 | 10 |
| 3 | Задание №3 | 12 |
| 3.1 | Задача №1 | 12 |

1 Задание №1

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Рассмотреть игру в орлянку — бесконечную последовательность испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниям значений 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломаной) поведение нормированной суммы $Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}$ как функции от номера испытания $i = 1, \dots, n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

1.1 Задача №1

Определение 1.1. *Схемой Бернулли* называется последовательность испытаний, в каждом из которых возможны два исхода — «успех» и «неудача», при этом «успех» в каждом испытании происходит с одной и той же вероятностью $p \in (0, 1)$, а «неудача» — с вероятностью $q \equiv 1 - p$. На испытания в схеме Бернулли налагаются следующие требования: отсутствие взаимного влияния, воспроизводимость, а также сходные — но не идентичные — условия проведения.

Определение 1.2. Будем говорить, что случайная величина X имеет *распределение Бернулли*, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями p и $q \equiv 1 - p$ соответственно. Таким образом,

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(X = 0) = q,$$

то есть событие $\{X = 1\}$ соответствует «успеху», а $\{X = 0\}$ — «неудаче». Будем обозначать такую случайную величину

$$X \sim \text{Bern}(p).$$

Реализуем генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p следующим образом: пусть нам дана случайная величина ξ , равномерно распределённая на отрезке $[0, 1]$. Тогда случайная величина $X \sim \text{Bern}(p)$ задаётся следующим образом:

$$X = \mathbb{I}(\xi < p) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \xi < p, \\ 0, & \text{при } p \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Определение 1.3. Будем говорить, что случайная величина X имеет *биномиальное распределение* с параметрами n и p , если

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}_0.$$

В таком случае X интерпретируют как число «успехов» в серии из n испытаний схемы Бернулли с вероятностью успеха p . Будем обозначать такую случайную величину

$$X \sim \text{Bi}(n, p).$$

Пусть теперь $X \sim \text{Bi}(n, p)$, а $Y_i \sim \text{Bern}(p)$, $i = \overline{1, n}$. Тогда, как видно из интерпретации биномиального распределения, датчик биномиальной случайной величины будет иметь вид:

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

1.2 Задача №2

Определение 1.4. Будем говорить, что случайная величина X имеет *геометрическое распределение*, если

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p = q^k p, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}_0.$$

Геометрически распределенная случайная величина интерпретируется как количество «неудач» до первого «успеха» в схеме испытаний Бернулли с вероятностью p . Будем обозначать такие случайные величины

$$X \sim \text{Geom}(p).$$

Зная интерпретацию, мы легко строим датчик и для геометрического распределения.

Утверждение 1.1 (Свойство отсутствия памяти). Пусть $X \sim \text{Geom}(p)$, тогда для любых $n, m \in \mathbb{N}_0$ справедливо

$$\mathbb{P}(X \geq m + n \mid X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq n),$$

то есть количество прошлых «неудач» не влияет на количество будущих «неудач».

Доказательство. Рассмотрим левую часть равенства из условия утверждения:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq m + n \mid X \geq m) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq m + n, X \geq m)}{\mathbb{P}(X \geq m)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq m + n)}{\mathbb{P}(X \geq m)} = \frac{\sum_{i=m+n}^{\infty} q^i p}{\sum_{i=m}^{\infty} q^i p} = \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим правую часть равенства:

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} q^i p = p \frac{q^n}{1 - q} = q^n.$$

Таким образом, утверждение доказано. ■

1.3 Задача №3

Рассмотрим игру Орлянка, правила которой описаны в формулировке задания и построим траекторию заданного процесса $Y(i)$.

В данной нормированной сумме Y фигурируют независимые одинаково распределенные случайные величины X_i . Посчитаем их математическое ожидание и дисперсию.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_i &= 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0, \\ \mathbb{V}\text{ar } X_i &= \frac{1}{2} \cdot (1 - 0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 0)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Теперь можем воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1.1 (Центральная предельная теорема). Пусть X_1, \dots, X_n, \dots есть бесконечная последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 . Пусть также $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

по распределению при $n \rightarrow \infty$.

Получается, что

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} Y(n) \xrightarrow{dist.} N(0, 1).$$

Для оценки этого значения воспользуемся «правилом трёх сигм».

Теорема 1.2. Практически все значения нормально распределённой случайной величины $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ лежат в интервале $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$. Более строго — приблизительно с вероятностью 0,9973 значение нормально распределённой случайной величины лежит в указанном интервале.

Таким образом, приблизительно с вероятностью 0,9973

$$-\frac{3}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Y(n) \leq \frac{3}{2}.$$

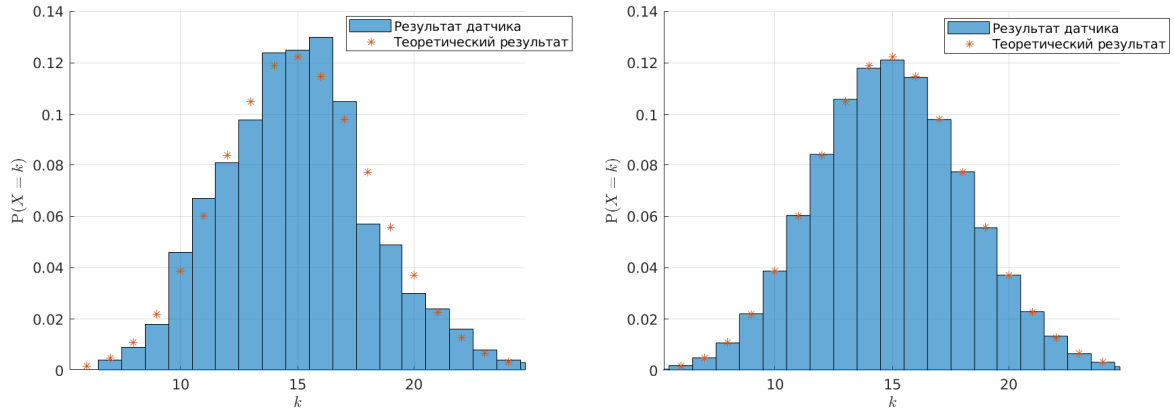


Рис. 1.1: Гистограмма биномиального распределения случайной величины с параметрами $n = 50$, $p = \frac{3}{10}$ при 10^3 (слева) и 10^5 (справа) испытаний.

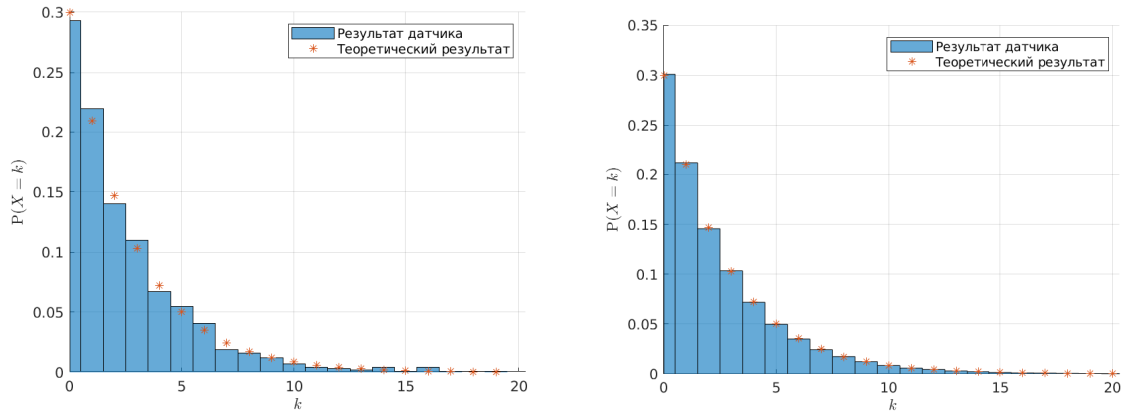


Рис. 1.2: Гистограмма геометрического распределения случайной величины с параметром $p = \frac{3}{10}$ при 10^3 (слева) и 10^5 (справа) испытаний.

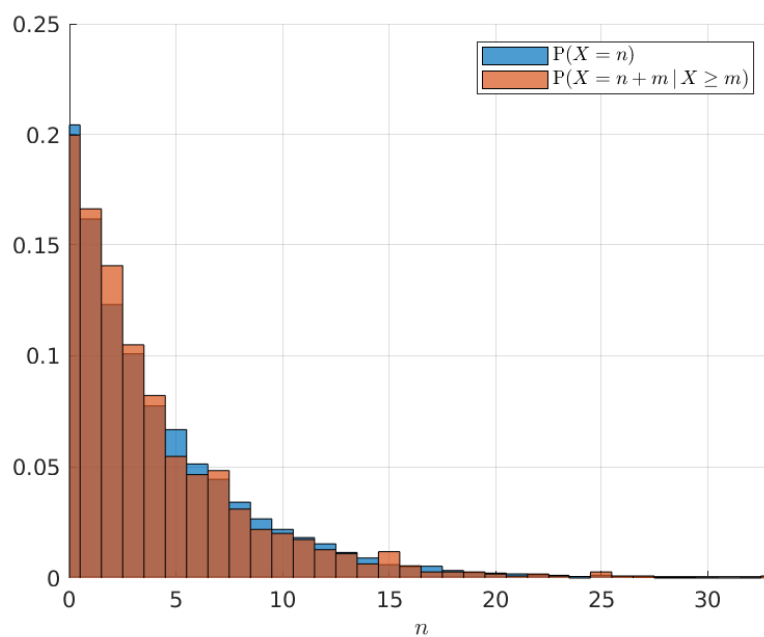


Рис. 1.3: Гистограмма геометрического распределения, демонстрирующая его свойство отсутствия памяти. Здесь задан параметр геометрического распределения $p = \frac{2}{10}$, а также «сдвиг» $m = 10$.

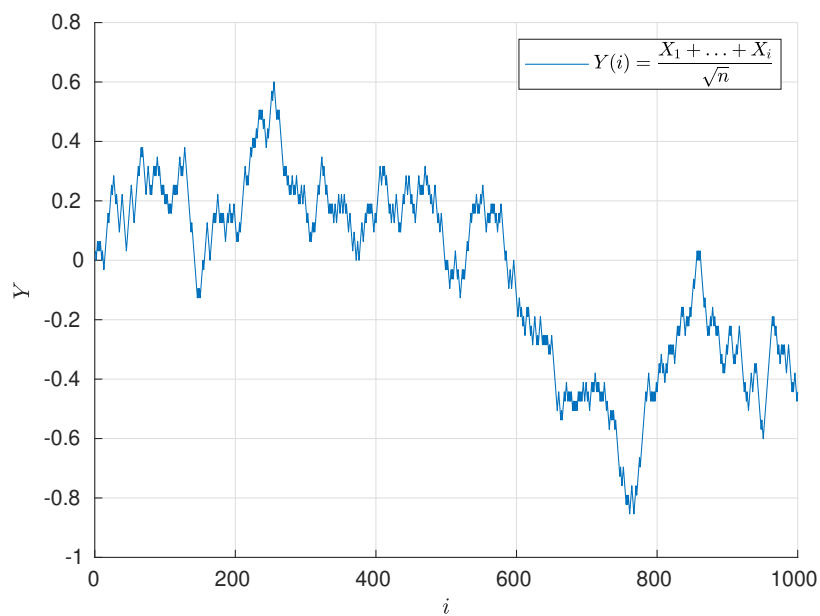


Рис. 1.4: Иллюстрация варианта поведения нормированной суммы $Y(i)$ игры в орлянку на отрезке $1 \leq i \leq 10^3$.

2 Задание №2

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $(1 - X)$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in [0, \frac{1}{3}]$ совпадает с распределением $\frac{Y}{3}$) с помощью критерия Смирнова.
3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

2.1 Задача №1

Определение 2.1. Пусть дано вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и на нем определена случайная величина ξ с распределением \mathbb{P}_ξ . Тогда *функцией распределения* случайной величины X называется функция $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, задаваемая формулой:

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x) \equiv \mathbb{P}_\xi((-\infty, x]).$$

Определение 2.2. Функция распределения некоторой случайной величины называется *сингулярной*, если она непрерывна и ее множество точек роста имеет нулевую меру Лебега.

Определение 2.3. Из единичного отрезка $C_0 = [0, 1]$ удалим интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся множество обозначим за C_1 . Множество $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю часть, и оставшееся множество обозначим за C_2 . Повторив данную процедуру, то есть удаляя средние трети у всех четырех отрезков, получим C_3 . Дальше таким же образом получаем последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_i \supset \dots$. Пересечение

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$$

называется *канторовым множеством*.

Замечание 2.1. Канторово множество так же можно определить как множество всех чисел от нуля до единицы, которые можно представить в троичной записи при помощи только нулей и двоек. То есть

$$C = \{0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots_3 \mid \alpha_i = 0, 2\}.$$

Утверждение 2.1. Канторово множество имеет нулевую меру Лебега. [1]

Определение 2.4. Рассмотрим функцию $K(x)$ такую, что в точках 0 и 1 значение функции принимается равным соответственно 0 и 1. Далее интервал $(0, 1)$ разбивается на три равные части $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и $(\frac{2}{3}, 1)$. На среднем сегменте полагаем $K(x) = \frac{1}{2}$. Оставшиеся два сегмента снова разбиваются на три равные части каждый, и на средних сегментах $K(x)$ полагается равной $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Каждый из оставшихся сегментов снова делится

на три части, и на внутренних сегментах $K(x)$ определяется как постоянная, равная среднему арифметическому между соседними, уже определенными значениями $K(x)$. На остальных точках единичного отрезка определяется по непрерывности. Полученная функция называется *канторовой лестницей*.

Замечание 2.2. Из определения канторовой лестницы $K(x)$ следует, что она действует на точки из канторова множества C по следующему правилу:

$$K(0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots 3) = 0, \frac{\alpha_1}{2} \frac{\alpha_2}{2} \dots \frac{\alpha_i}{2} \dots 2.$$

Теперь рассмотрим случайную величину

$$Y = 0, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}, \quad \text{где } \xi_k \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Такая случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, так как мы равновероятным образом выбираем знаки разложения числа ξ_k в двоичном представлении. Теперь рассмотрим искомую случайную величину X , имеющую в качестве функции распределения $F_X(x)$ канторову лестницу $K(x)$. Образ каждой случайной величины Y для такой функции будет равен

$$K^{-1}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k}.$$

Эта точка лежит в канторовом множестве.

Теорема 2.1. Пусть некоторая функция распределения F имеет обратную F^{-1} . Тогда функцией распределения случайной величины

$$\eta = F^{-1}(\xi),$$

где ξ — равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ случайная величина, является F .

Доказательство. Найдем функцию распределения случайной величины η :

$$F_{\eta}(x) = \mathbb{P}(\eta \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(\xi) \leq x) = \mathbb{P}(\xi \leq F(x)) = F(x).$$

Таким образом, теорема доказана. ■

Из теоремы вытекает, что при помощи построенного ранее (см. раздел 1) генератора схемы Бернулли мы можем смоделировать случайную величину X , принимающую с вероятностью 1 значения из канторова множества C и имеющую канторову лестницу $K(x)$ в качестве функции распределения $F_X(x)$, следующим образом:

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k}, \quad \text{где } \xi_k \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right).$$

В программной реализации будем рассматривать частичные суммы. Для этого этого введем погрешность ε и найдем такое число n , при котором частичная сумма будет отличаться от бесконечной не более, чем на заданную погрешность.

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k} \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n-1}} \leq \varepsilon,$$

\Downarrow

$$n \geq 1 - \lceil \log_3 \varepsilon \rceil \quad \forall \varepsilon < 1.$$

Замечание 2.3. Из выведенной формулы также видно, что для столь малой погрешности как $\varepsilon = 10^{-9}$ достаточно использовать всего $n = 20$ первых членов ряда.

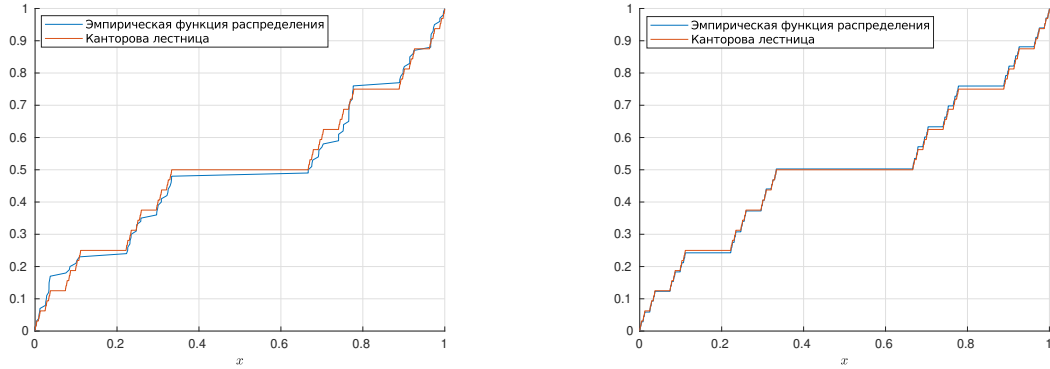


Рис. 2.1: Эмпирическая и теоретическая функции распределения «канторовой» случайной величины X при выборке из 100 испытаний (слева) и 10^4 испытаний (справа).

Допisać проверку того, является ли функция распределения X канторовой лестницей при помощи критерия Колмогорова.

2.2 Задача №2

2.3 Задача №3

Вычислим значение математического ожидания для построенной случайной величины X :

$$\mathbb{E} X = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \mathbb{E} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Теперь, помня о независимости случайных величин ξ_k $k \in \mathbb{N}$, вычислим значение дисперсии

$$\mathbb{V}ar X = \mathbb{V}ar \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^k} \right)^2 \mathbb{V}ar \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{9^k} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8}.$$

Замечание 2.4. При подсчете мы использовали известные значения для математического ожидания и дисперсии бернуллиевой случайной величины $\xi \sim \text{Bern}(p)$:

$$\mathbb{E} \xi = p \quad \text{и} \quad \mathbb{V}ar \xi = p(1 - p).$$

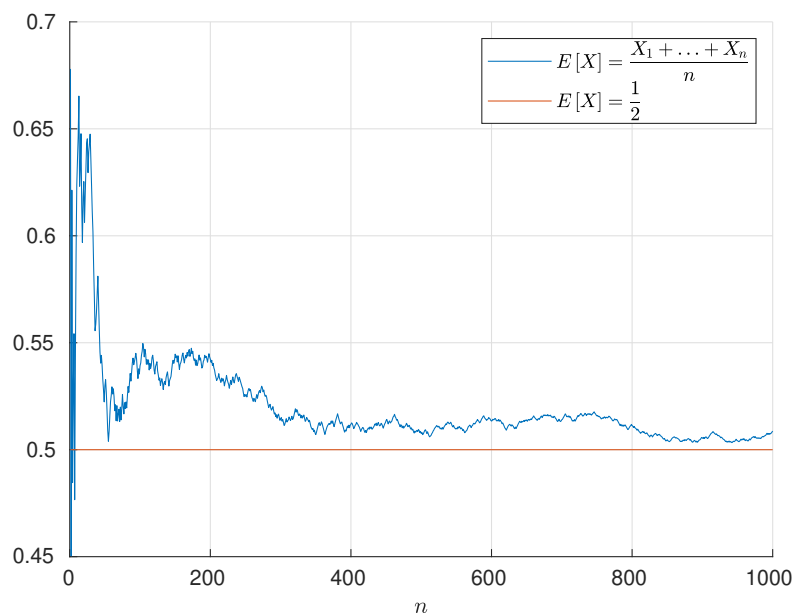


Рис. 2.2: Эмпирическое значение математического ожидания «канторовой» случайной величины X .

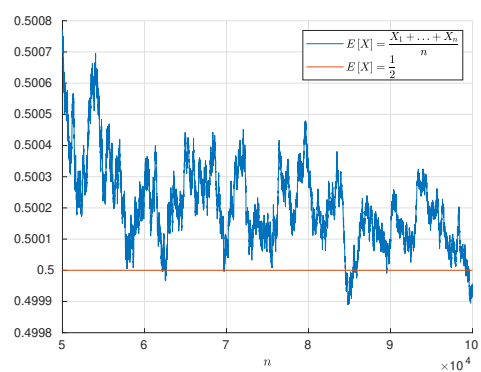
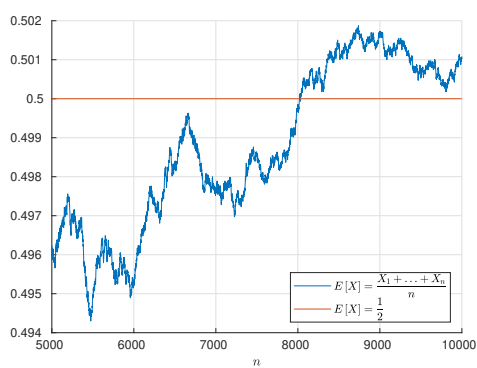


Рис. 2.3: Изменение эмпирическое значения математического ожидания «канторовой» случайной величины X в зависимости от количества экспериментов: $5 \cdot 10^3$ – 10^4 — слева, $5 \cdot 10^4$ – 10^5 — справа.

3 Задание №3

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n независимо распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. Найти распределение случайной величины $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.
4. Построить датчик стандартного распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи t -критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера — равенство дисперсий.

3.1 Задача №1

Определение 3.1. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ , если ее функция распределения имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Будем обозначать такие случайные величины

$$X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Для того чтобы построить датчик экспоненциально распределенной с параметром λ случайной величины X , воспользуемся доказанной ранее теоремой 2.1. Получается, что такую случайную величину можно представить в виде:

$$X = F_x^{-1}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi),$$

где ξ — равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ случайная величина.

Утверждение 3.1 (Свойство отсутствия памяти). Пусть $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, тогда для любых $t \neq 0$ и s справедливо:

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq s).$$

Доказательство. Рассмотрим левую часть равенства:

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq t) = \frac{\mathbb{P}(X \geq s + t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq s + t)}{\mathbb{P}(X \geq t)}.$$

Таким образом получаем, утверждение эквивалентно тому, что

$$\mathbb{P}(X \geq s + t) = \mathbb{P}(X \geq t)\mathbb{P}(X \geq s).$$

Из определения функции распределения $F_X(t) = \mathbb{P}(X < t) = 1 - \mathbb{P}(X \geq t)$ получаем, что

$$e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s}e^{-\lambda t}.$$

Последнее равенство точно верно. Таким образом, утверждение доказано. ■

Список литературы

- [1] Ширяев А. Н. Вероятность, в 2-х кн. — 4-е изд., переработанное и дополненное — М.: МЦНМО, 2007.