



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2019

Содержание

1	Задание №1	3
1.1	Задача №1	3
1.2	Задача №2	4
1.3	Задача №3	4
2	Задание №2	8
2.1	Построение датчика «канторовой» случайной величины	8
2.2	Проверка корректности работы датчика	10
2.3	Симметричность «канторовой» случайной величины относительно $1/2$	10
2.4	Самоподобие «канторовой случайной величины относительно деления на 3	11
2.5	Математическое ожидание и дисперсия «канторовой» случайной величины	12
3	Задание №3	17
3.1	Построение датчика экспоненциальной случайной величины	17
3.2	Отсутствие памяти у экспоненциального распределения	17
3.3	Распределение минимума экспоненциальных случайных величин	18
3.4	Построение датчика распределения Пуассона	18
3.5	Построение датчика распределения Пуассона как предел биномиального распределения	19
3.6	Проверка корректности работы датчика	20
3.7	Построение датчика нормального распределения методом моделирования парами с переходом в полярные координаты	20
3.8	Проверка равенства математического ожидания и дисперсии	21
4	Задание №4	26
4.1	Построение датчика распределения Коши	26
4.2	Построение датчика стандартного нормального распределения методом фон Неймана	26
4.3	Дополнительно о методе фон Неймана	27
5	Задание №5	31
5.1	Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.	31
5.2	Построение доверительных интервалов для среднего и дисперсии нормаль- ной случайной величины.	31
5.3	Поведение частичных сумм распределения Коши	33
6	Задание №6	37
6.1	Метод Монте–Карло	37
6.2	Метод квадратур	38

1 Задание №1

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик для биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Рассмотреть игру в орлянку — бесконечную последовательность испытаний с бросанием правильной монеты. Выигрыш S_n определяется как сумма по всем n испытаниям значений 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны. Проиллюстрировать (в виде ломаной) поведение нормированной суммы $Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}$ как функции от номера испытания $i = 1, \dots, n$ для одной отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

1.1 Задача №1

Определение 1.1. *Схемой Бернулли* называется последовательность испытаний, в каждом из которых возможны два исхода — «успех» и «неудача», при этом «успех» в каждом испытании происходит с одной и той же вероятностью $p \in (0, 1)$, а «неудача» — с вероятностью $q \equiv 1 - p$. На испытания в схеме Бернулли налагаются следующие требования: отсутствие взаимного влияния, воспроизводимость, а также сходные — но не идентичные — условия проведения.

Определение 1.2. Будем говорить, что случайная величина X имеет *распределение Бернулли*, если она принимает всего два значения: 1 и 0 с вероятностями p и $q \equiv 1 - p$ соответственно. Таким образом,

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(X = 0) = q,$$

то есть событие $\{X = 1\}$ соответствует «успеху», а $\{X = 0\}$ — «неудаче». Будем обозначать такую случайную величину

$$X \sim \text{Bern}(p).$$

Реализуем генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p следующим образом: пусть нам дана случайная величина ξ , равномерно распределённая на отрезке $[0, 1]$. Тогда случайная величина $X \sim \text{Bern}(p)$ задаётся следующим образом:

$$X = \mathbb{I}(\xi < p) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \xi < p, \\ 0, & \text{при } p \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Определение 1.3. Будем говорить, что случайная величина X имеет *биномиальное распределение* с параметрами n и p , если

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}_0.$$

В таком случае X интерпретируют как число «успехов» в серии из n испытаний схемы Бернулли с вероятностью успеха p . Будем обозначать такую случайную величину

$$X \sim \text{Bi}(n, p).$$

Пусть теперь $X \sim \text{Bi}(n, p)$, а $Y_i \sim \text{Bern}(p)$, $i = \overline{1, n}$. Тогда, как видно из интерпретации биномиального распределения, датчик биномиальной случайной величины будет иметь вид:

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

1.2 Задача №2

Определение 1.4. Будем говорить, что случайная величина X имеет *геометрическое распределение*, если

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^k p = q^k p, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}_0.$$

Геометрически распределенная случайная величина интерпретируется как количество «неудач» до первого «успеха» в схеме испытаний Бернулли с вероятностью p . Будем обозначать такие случайные величины

$$X \sim \text{Geom}(p).$$

Зная интерпретацию, мы легко строим датчик и для геометрического распределения.

Утверждение 1.1 (Свойство отсутствия памяти). Пусть $X \sim \text{Geom}(p)$, тогда для любых $n, m \in \mathbb{N}_0$ справедливо

$$\mathbb{P}(X \geq m + n \mid X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq n),$$

то есть количество прошлых «неудач» не влияет на количество будущих «неудач».

Доказательство. Рассмотрим левую часть равенства из условия утверждения:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq m + n \mid X \geq m) &= \frac{\mathbb{P}(X \geq m + n, X \geq m)}{\mathbb{P}(X \geq m)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq m + n)}{\mathbb{P}(X \geq m)} = \frac{\sum_{i=m+n}^{\infty} q^i p}{\sum_{i=m}^{\infty} q^i p} = \frac{q^{m+n}}{q^m} = q^n. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим правую часть равенства:

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{i=n}^{\infty} q^i p = p \frac{q^n}{1 - q} = q^n.$$

Таким образом, утверждение доказано. ■

1.3 Задача №3

Рассмотрим игру Орлянка, правила которой описаны в формулировке задания и построим траекторию заданного процесса $Y(i)$.

В данной нормированной сумме Y фигурируют независимые одинаково распределенные случайные величины X_i . Посчитаем их математическое ожидание и дисперсию.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_i &= 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0, \\ \mathbb{V}\text{ar } X_i &= \frac{1}{2} \cdot (1 - 0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 0)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Теперь можем воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 1.1 (Центральная предельная теорема). Пусть X_1, \dots, X_n, \dots есть бесконечная последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 . Пусть также $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

по распределению при $n \rightarrow \infty$.

Получается, что

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} Y(n) \xrightarrow{dist.} N(0, 1).$$

Для оценки этого значения воспользуемся «правилом трёх сигм».

Теорема 1.2. Практически все значения нормально распределённой случайной величины $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ лежат в интервале $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$. Более строго — приблизительно с вероятностью 0,9973 значение нормально распределённой случайной величины лежит в указанном интервале.

Таким образом, приблизительно с вероятностью 0,9973

$$-\frac{3}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Y(n) \leq \frac{3}{2}.$$

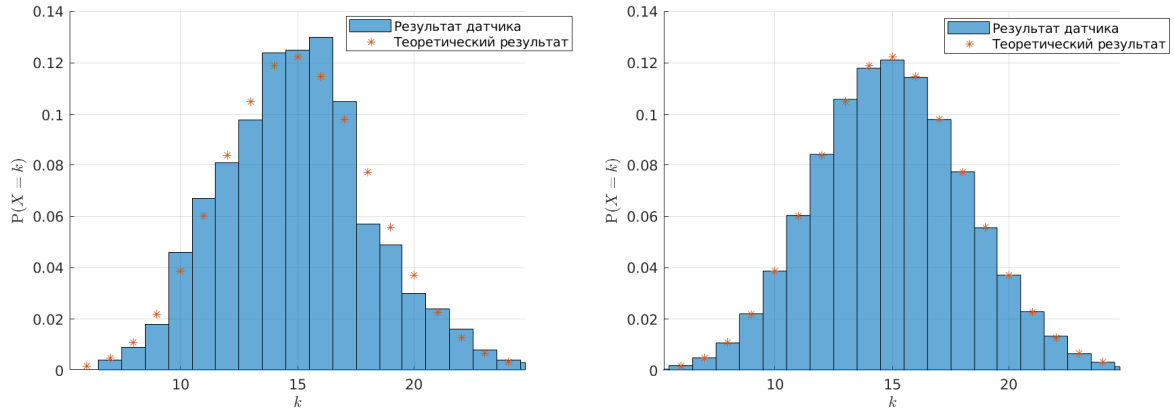


Рис. 1.1: Гистограмма биномиального распределения случайной величины с параметрами $n = 50$, $p = \frac{3}{10}$ при 10^3 (слева) и 10^5 (справа) испытаний.

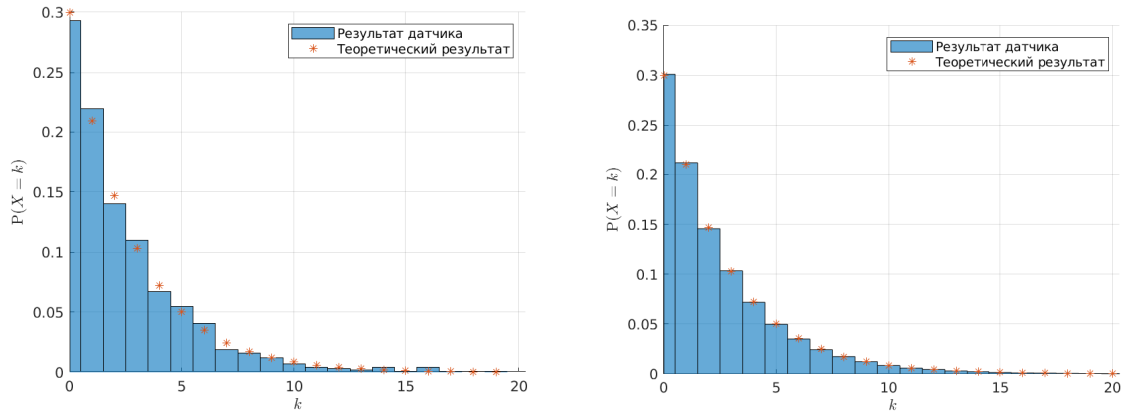


Рис. 1.2: Гистограмма геометрического распределения случайной величины с параметром $p = \frac{3}{10}$ при 10^3 (слева) и 10^5 (справа) испытаний.

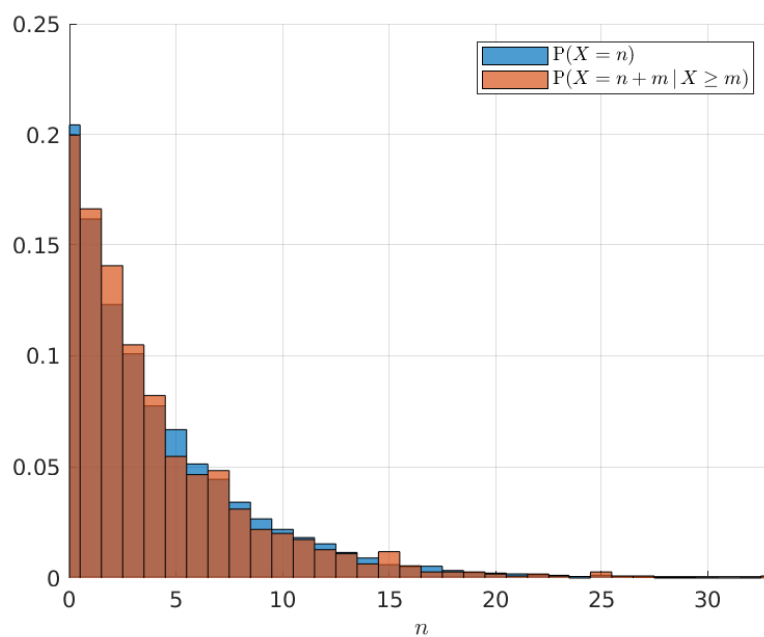


Рис. 1.3: Гистограмма геометрического распределения, демонстрирующая его свойство отсутствия памяти. Здесь задан параметр геометрического распределения $p = \frac{2}{10}$, а также «сдвиг» $m = 10$.

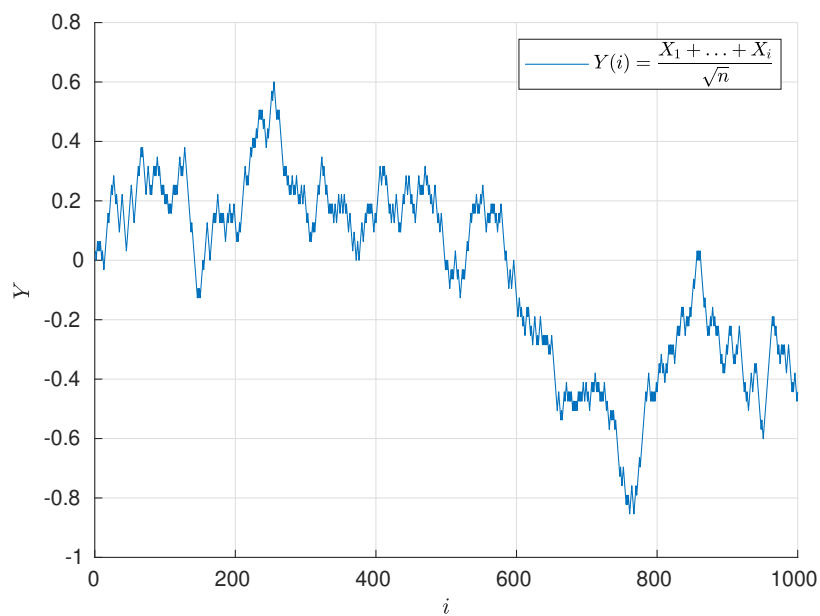


Рис. 1.4: Иллюстрация варианта поведения нормированной суммы $Y(i)$ игры в орлянку на отрезке $1 \leq i \leq 10^3$.

2 Задание №2

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин проверить свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$ (X и $(1 - X)$ распределены одинаково) и самоподобия относительно деления на 3 (условное распределение Y при условии $Y \in [0, \frac{1}{3}]$ совпадает с распределением $\frac{Y}{3}$) с помощью критерия Смирнова.
3. Вычислить значение математического ожидания и дисперсии с эмпирическими для разного объема выборок. Проиллюстрировать сходимость.

2.1 Построение датчика «канторовой» случайной величины

Определение 2.1. Пусть дано вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и на нем определена случайная величина ξ с распределением \mathbb{P}_ξ . Тогда *функцией распределения* случайной величины X называется функция $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, задаваемая формулой:

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x) \equiv \mathbb{P}_\xi((-\infty, x]).$$

Определение 2.2. Функция распределения некоторой случайной величины называется *сингулярной*, если она непрерывна и ее множество точек роста имеет нулевую меру Лебега.

Определение 2.3. Из единичного отрезка $C_0 = [0, 1]$ удалим интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся множество обозначим за C_1 . Множество $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю часть, и оставшееся множество обозначим за C_2 . Повторив данную процедуру, то есть удаляя средние трети у всех четырех отрезков, получим C_3 . Дальше таким же образом получаем последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_i \supset \dots$. Пересечение

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$$

называется *канторовым множеством*.

Замечание 2.1. Канторово множество так же можно определить как множество всех чисел от нуля до единицы, которые можно представить в троичной записи при помощи только нулей и двоек. То есть

$$C = \{0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots_3 \mid \alpha_i = 0, 2\}.$$

Утверждение 2.1. Канторово множество имеет нулевую меру Лебега. [1]

Определение 2.4. Рассмотрим функцию $K(x)$ такую, что в точках 0 и 1 значение функции принимается равным соответственно 0 и 1. Далее интервал $(0, 1)$ разбивается на три равные части $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и $(\frac{2}{3}, 1)$. На среднем сегменте полагаем $K(x) = \frac{1}{2}$. Оставшиеся два сегмента снова разбиваются на три равные части каждый, и на средних сегментах $K(x)$ полагается равной $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Каждый из оставшихся сегментов снова делится

на три части, и на внутренних сегментах $K(x)$ определяется как постоянная, равная среднему арифметическому между соседними, уже определенными значениями $K(x)$. На остальных точках единичного отрезка определяется по непрерывности. Полученная функция называется *канторовой лестницей*.

Замечание 2.2. Из определения канторовой лестницы $K(x)$ следует, что она действует на точки из канторова множества C по следующему правилу:

$$K(0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots 3) = 0, \frac{\alpha_1}{2} \frac{\alpha_2}{2} \dots \frac{\alpha_i}{2} \dots 2.$$

Теперь рассмотрим случайную величину

$$Y = 0, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}, \quad \text{где } \xi_k \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Такая случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, так как мы равновероятным образом выбираем знаки разложения числа ξ_k в двоичном представлении. Теперь рассмотрим искомую случайную величину X , имеющую в качестве функции распределения $F_X(x)$ канторову лестницу $K(x)$. Образ каждой случайной величины Y для такой функции будет равен

$$K^{-1}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k}.$$

Эта точка лежит в канторовом множестве.

Теорема 2.1 (Метод обратной функции распределения). *Пусть некоторая функция распределения F имеет обратную F^{-1} . Тогда функцией распределения случайной величины*

$$\eta = F^{-1}(\xi),$$

где ξ — равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ случайная величина, является F .

Доказательство. Найдем функцию распределения случайной величины η :

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(\xi) \leq x) = \mathbb{P}(\xi \leq F(x)) = F(x).$$

Таким образом, теорема доказана. ■

Из теоремы вытекает, что при помощи построенного ранее (см. раздел 1) генератора схемы Бернулли мы можем смоделировать случайную величину X , принимающую с вероятностью 1 значения из канторова множества C и имеющую канторову лестницу $K(x)$ в качестве функции распределения $F_X(x)$, следующим образом:

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k}, \quad \text{где } \xi_k \sim \text{Bern}\left(\frac{1}{2}\right).$$

В программной реализации будем рассматривать частичные суммы. Для этого этого введем погрешность ε и найдем такое число n , при котором частичная сумма будет отличаться от бесконечной не более, чем на заданную погрешность.

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k} \leq 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n-1}} \leq \varepsilon,$$

↓

$$n \geq 1 - \lceil \log_3 \varepsilon \rceil \quad \forall \varepsilon < 1.$$

Замечание 2.3. Из выведенной формулы также видно, что для столь малой погрешности как $\varepsilon = 10^{-9}$ достаточно использовать всего $n = 20$ первых членов ряда.

2.2 Проверка корректности работы датчика

Определение 2.5. Пусть задана выборка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, где $\xi_i \in \Xi, i = \overline{1, n}$. Эмпирической (выборочной) функцией распределения, построенной на этой выборке, называется функция $F_n(x)$, равная доле таких значений ξ_i , что $\xi_i < x$. Или другими словами

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(-\infty, x)}(\xi_i), \quad \text{где } \mathbb{I}_{(-\infty, x)}(\xi_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } \xi_i < x, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определение 2.6. Пусть в некотором эксперименте доступна наблюдению случайная величина ξ , распределение которой \mathbb{P} полностью или частично неизвестно. Тогда любое утверждение относительно \mathbb{P} называется *статистической гипотезой* H .

Теорема 2.2 (Критерий согласия Колмогорова). Обозначим нулевую гипотезу H_0 как гипотезу о том, что выборка подчиняется распределению $F(\xi) \in C^1(\Xi)$. Введем статистику критерия

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|.$$

Тогда если гипотеза H_0 верна, то $\sqrt{n}D_n$ с ростом n сходится по распределению к случайной величине K с функцией распределения Колмогорова

$$F_K(x) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i e^{-2i^2 x^2}.$$

Замечание 2.4. Гипотеза H_0 отвергается, если при большом объеме выборки n статистика $\sqrt{n}D_n$ превышает квантиль распределения K_α , заданного уровня значимости α , и принимается в противном случае. Здесь $K_\alpha = F_K^{-1}(1 - \alpha)$.

В рамках реализации подсчет K_α в явном виде весьма трудоемкая задача. Поэтому мы будем рассчитывать p -значение для нашей статистики $p_{value} = 1 - F_K(\sqrt{n}D_n)$. Если p -значение оказалось ниже или равно установленному уровню значимости α , то наша гипотеза отвергается и применяется альтернативная.

2.3 Симметричность «канторовой» случайной величины относительно $1/2$

Утверждение 2.2 (Свойство симметричности относительно $1/2$). Пусть X — случайная величина, с канторовой лестницей в качестве функции распределения. Тогда верно

$$F_X(x) = F_{1-X}(x).$$

Число испытаний	Размер выборки	Уровень значимости	Частота принятия гипотезы
10^3	10^3	0,05	0,958
10^4	10^3	0,05	0,9536
10^3	10^4	0,05	0,959
10^3	10^3	0,1	0,907

Таблица 1: Частота принятия гипотезы H_0 о том, что построенный датчик случайной величины имеет канторову лестницу в качестве функции распределения. Из таблицы видно, что вероятность отклонить гипотезу не превышает допустимый уровень значимости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как мы помним из построения датчика «канторовой» случайной величины, она представима в виде:

$$X = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k}, \quad \text{где } \xi_k \sim \text{Bern}(1/2), k = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$1 - X = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \xi_k}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{3^k},$$

при этом случайные величины $\eta_k = 1 - \xi_k$ также имеют распределение Бернулли с параметром $p = 1/2$. Значит, случайные величины X и $1 - X$ имеют одинаковое распределение. ■

Теперь эмперическим путем убедимся в выполнении этого свойства. Для этого нам потребуется *критерий Смирнова*. Он используется для проверки гипотезы о принадлежности двух независимых выборок одному и тому же распределению.

Теорема 2.3 (Критерий однородности Смирнова). *Обозначим за нулевую гипотезу H_0 гипотезу о том, что две исследуемые выборки объемами n и m с эмперическими функциями распределения $F_n(x)$ и $F_m(x)$ соответственно распределены по одному закону. Введем статистику критерия*

$$D_{n,m} = \sup_x |F_n(x) - F_m(x)|.$$

Тогда если гипотеза H_0 верна, то при увеличении объемов выборок n и m случайная величина $\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m}$ будет сходиться по распределению к случайной величине K с функцией распределения Колмогорова

$$F_K(x) = 1 + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i e^{-2i^2 x^2}.$$

2.4 Самоподобие «канторовой случайной величины относительно деления на 3

Утверждение 2.3 (Свойство самоподобия относительно деления на 3). *Пусть X — случайная величина с канторовой лестницей в качестве функции распределения. Тогда верно*

$$F_{X/3}(x) = F_{X|X \in [0, 1/3]}(x).$$

Доказательство. Заметим, что из построения датчика «канторовой» случайной величины вытекает, что случайная величина $Y = X \mid X \in [0, 1/3]$ задается в виде

$$X = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k}, \quad \text{где } \xi_1 = 0, \xi_k \sim \text{Bern}(1/2), k = \overline{2, n}.$$

Тогда получается, что

$$Y = 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_{k+1}}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{3^k} = \frac{X}{3}.$$

■

Так же проверим получившийся результат при помощи критерия однородности Смирнова.

Число испытаний	10^3	10^3	10^3
Размер первой выборки	10^2	10^3	10^3
Размер второй выборки	10^3	10^3	10^3
Уровень значимости	0,05	0,05	0,01
Частота принятия гипотезы	0,956	0,955	0,912

Таблица 2: Частота принятия гипотезы H_0 о том, что случайные величины X и $(1 - X)$ имеют одинаковое распределение.

Число испытаний	10^3	10^3	10^3
Размер первой выборки	10^2	10^3	10^3
Размер второй выборки	10^3	10^3	10^3
Уровень значимости	0,05	0,05	0,01
Частота принятия гипотезы	0,956	0,955	0,915

Таблица 3: Частота принятия гипотезы H_0 о том, что случайные величины $X \mid X \in [0, 1/3]$ и $X/3$ имеют одинаковое распределение.

2.5 Математическое ожидание и дисперсия «канторовой» случайной величины

Вычислим значение математического ожидания для построенной случайной величины X :

$$\mathbb{E} X = \mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \mathbb{E} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Теперь, помня о независимости случайных величин ξ_k $k \in \mathbb{N}$, вычислим значение дисперсии

$$\mathbb{V}\text{ar} X = \mathbb{V}\text{ar} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^k} \right)^2 \mathbb{V}\text{ar} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{9^k} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8}.$$

Замечание 2.5. При подсчете мы использовали известные значения для математического ожидания и дисперсии бернуллиевой случайной величины $\xi \sim \text{Bern}(p)$:

$$\mathbb{E} \xi = p \quad \text{и} \quad \text{Var} \xi = p(1 - p).$$

Для сравнения практического и теоретического результатов построим также графики *выборочного среднего* \bar{X} и *несмещенной выборочной дисперсии* S^2 , задаваемых формулами:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{и} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

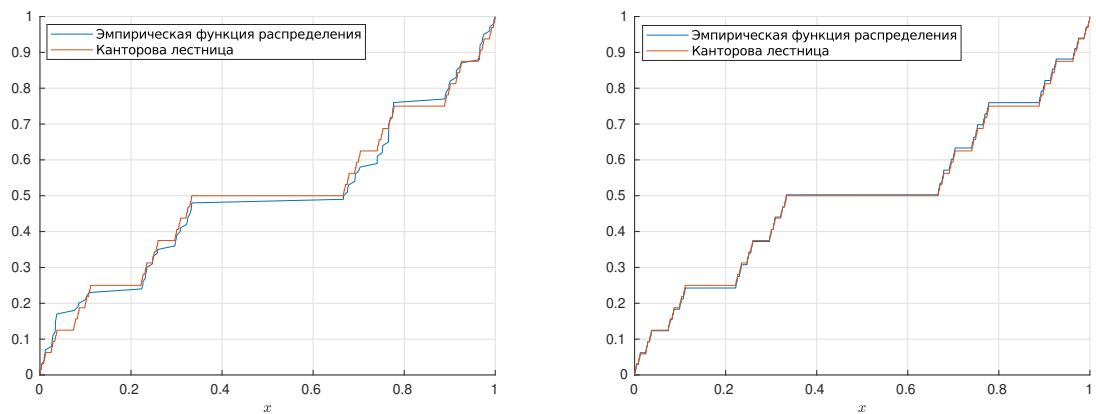


Рис. 2.1: Эмпирическая и теоретическая функции распределения «канторовой» случайной величины X при выборке из 100 испытаний (слева) и 10^4 испытаний (справа).

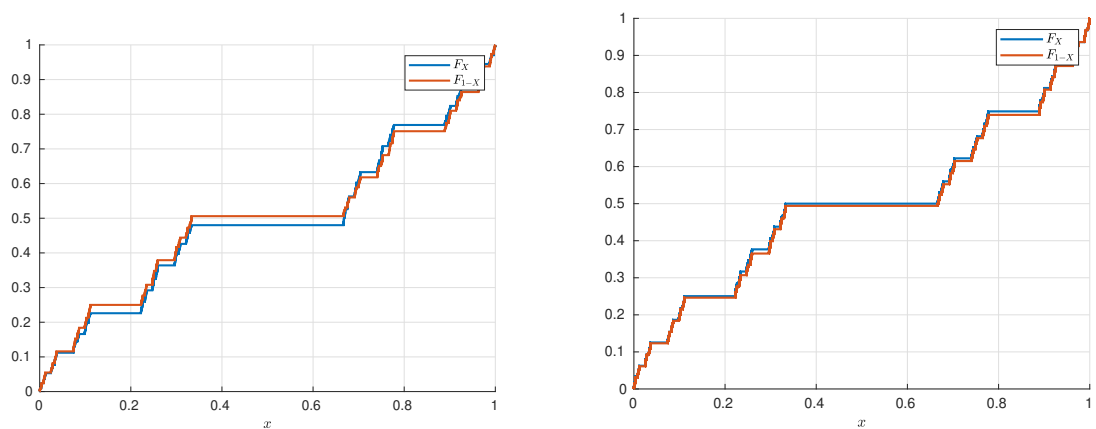


Рис. 2.2: График, иллюстрирующий свойство симметричности относительно $1/2$ «канторовой» случайной величины. Представлены эмперические функции распределения при объемах выборок 10^3 (слева) и 10^4 (справа).

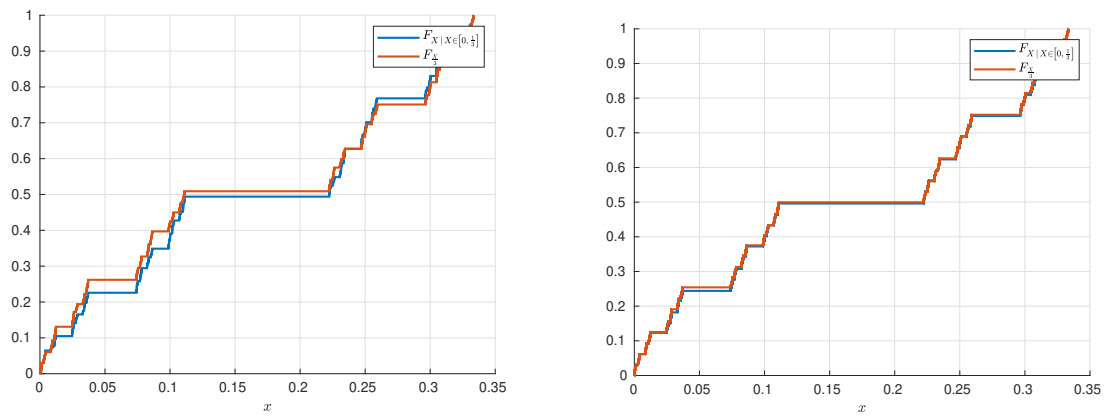


Рис. 2.3: График, иллюстрирующий свойство самоподобия относительно деления на 3 «канторовой» случайной величины. Представлены эмперические функции распределения при объемах выборок 10^3 (слева) и 10^4 (справа).

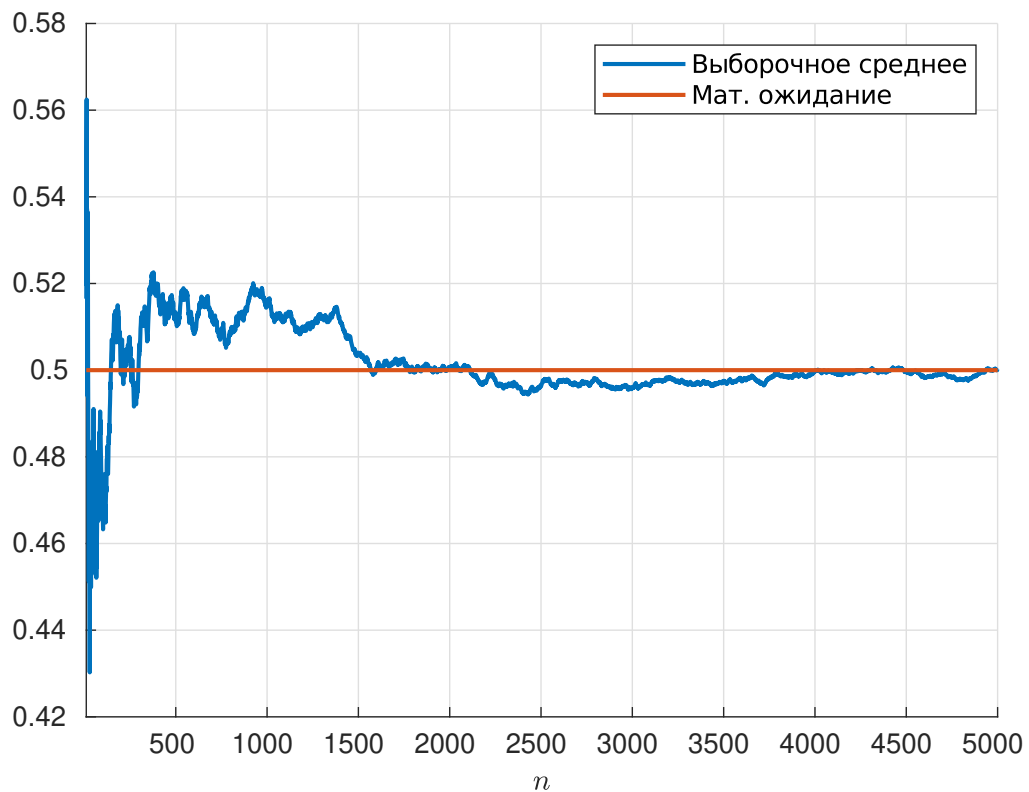


Рис. 2.4: Эмпирическое значение математического ожидания «канторовой» случайной величины X в зависимости от объема выборки $10 \leq n \leq 5000$.

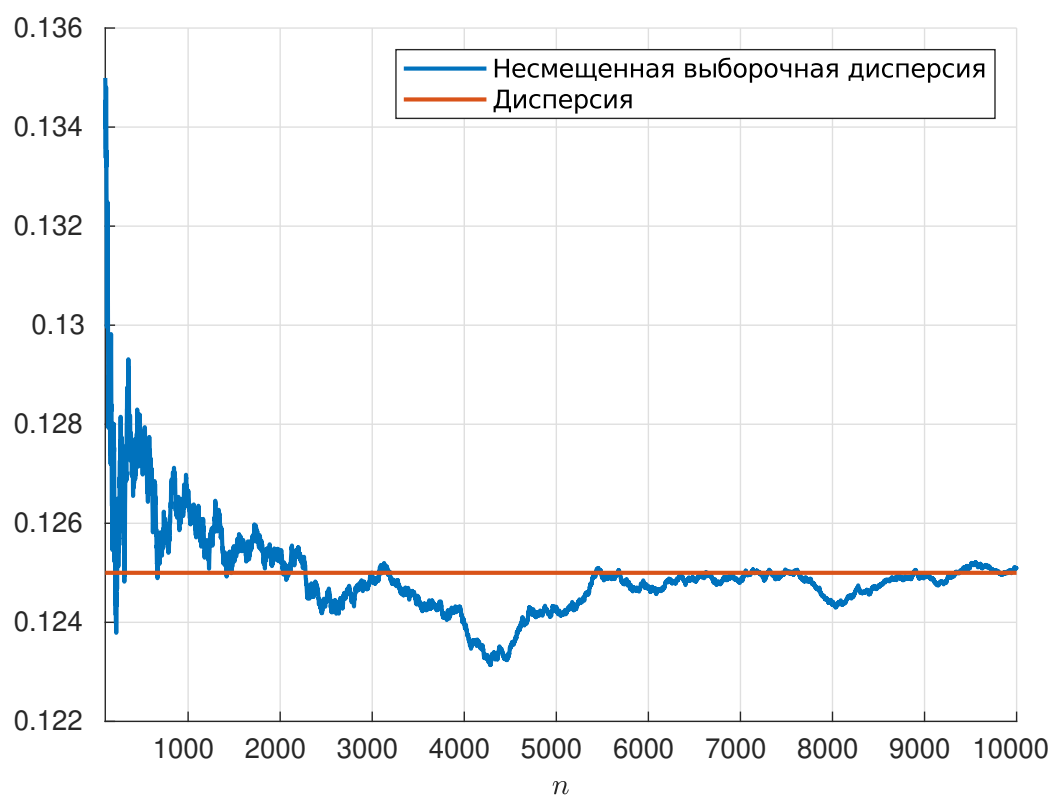


Рис. 2.5: Несмещенная выборочная дисперсия и теоретическая дисперсия «канторовой» случайной величины X в зависимости от объема выборки $100 \leq n \leq 10000$.

3 Задание №3

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n независимо распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно. Найти распределение случайной величины $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.
2. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
3. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. С помощью критерия хи-квадрат Пирсона убедиться, что получен датчик распределения Пуассона.
4. Построить датчик стандартного распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты. Проверить при помощи t -критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера — равенство дисперсий.

3.1 Построение датчика экспоненциальной случайной величины

Определение 3.1. Будем говорить, что случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее функция распределения имеет вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Будем обозначать такие случайные величины

$$X \sim \text{Exp}(\lambda).$$

Для того чтобы построить датчик экспоненциально распределенной с параметром λ случайной величины X , воспользуемся методом обратной функции распределения (смотри теорему 2.1). Получается, что такую случайную величину можно представить в виде:

$$X = F_x^{-1}(\xi) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi),$$

где ξ — равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$ случайная величина.

3.2 Отсутствие памяти у экспоненциального распределения

Утверждение 3.1 (Свойство отсутствия памяти). Пусть $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, тогда для любых $t \neq 0$ и s справедливо:

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq s).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим левую часть равенства:

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq t) = \frac{\mathbb{P}(X \geq s + t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq s + t)}{\mathbb{P}(X \geq t)}.$$

Таким образом получаем, утверждение эквивалентно тому, что

$$\mathbb{P}(X \geq s + t) = \mathbb{P}(X \geq t)\mathbb{P}(X \geq s).$$

Из определения функции распределения $F_X(t) = \mathbb{P}(X < t) = 1 - \mathbb{P}(X \geq t)$ получаем, что

$$e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}.$$

Последнее равенство точно верно. Таким образом, утверждение доказано. ■

3.3 Распределение минимума экспоненциальных случайных величин

Рассмотрим теперь случайную величину $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, где $X_i, i = \overline{1, n}$ есть независимо распределенные экспоненциальные случайные величины с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответственно, и найдем её функцию распределения:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(\min_{i=1, n} X_i < x) = 1 - \mathbb{P}(\min_{i=1, n} X_i \geq x) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x)). \end{aligned}$$

Таким образом функция распределения случайной величины Y представима в виде

$$F_Y(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - 1 + e^{\lambda_i x}) = 1 - \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i x} = 1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x}.$$

Получается, что заданная случайная величина Y имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

3.4 Построение датчика распределения Пуассона

Определение 3.2. Будем говорить, что случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}_0.$$

Будем обозначать такие случайные величины

$$X \sim \text{Pois}(\lambda).$$

Для построения датчика Пуассоновской случайной величины докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 3.2 (О распределении суммы экспоненциальных случайных величин). Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $\xi_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$. Тогда

$$F_{S_n}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что случайная величина S_n имеет плотность распределения, равную

$$\rho_{S_n}(x) = e^{-\lambda x} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x \geq 0.$$

Докажем это методом математической индукции. База индукции очевидна. Теперь пусть для шага n выполнена предыдущая формула. Воспользуемся формулой свертки плотностей распределений для нахождения $\rho_{S_{n+1}}$

$$\rho_{S_{n+1}}(x) = \int_0^x \rho_{S_1}(x-t) \cdot \rho_{S_n}(t) dt = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x (x-t)^{n-1} dt = \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \frac{x^n}{n}.$$

Теорема доказана. ■

Пусть $t > 0$. Рассмотрим независимые случайные величины $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$, имеющие показательное распределение с параметром λ . Как и в предыдущем утверждении, положим $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Наконец, обозначим $X = \max\{n \geq 0 \mid S_n < t\}$, полагая $S_0 = 0$. Докажем теперь, что $X \sim \text{Pois}(\lambda t)$.

Для этого найдем вероятность того, что $X = n$. При $n = 0$

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\xi_1 \geq t) = e^{-\lambda t}.$$

При $n > 0$, поскольку $\xi_k \geq 0$, то согласно утверждению 3.2

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(S_n < t, S_{n+1} \geq t) = \mathbb{P}(S_n < t) - \mathbb{P}(S_n < t, S_{n+1} < t) = \\ &= \mathbb{P}(S_n < t) - \mathbb{P}(S_{n+1} < t) = F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t) = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Таким образом мы получали способ построения пуассоновской случайной величины. Нужно просто брать показательные случайные величины с параметром $\lambda = 1$ и смотреть сумма сколько первых из них меньше параметра пуассоновского распределения.

3.5 Построение датчика распределения Пуассона как предел биномиального распределения

Биномиальное распределение сходится к распределению Пуассона, так как число испытаний уходит в бесконечность, в то время как произведение np остается фиксированным или, по крайней мере, p стремится к нулю. Поэтому распределение Пуассона с параметром $\lambda = np$ можно использовать как приближение к $\text{Bin}(n, p)$ биномиального распределения, если n достаточно велико, а p достаточно мало. Подробное доказательство этого факта, а также эмперические правила выбора параметров биномиального распределения и оценки точности приближения можно посмотреть в [2] и [3][Глава 4]. Мы же попытаемся лишь обосновать сам факт этого.

Пусть случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n и p . И введем обозначение:

$$\mathbb{P}_n(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Зафиксируем значение $\lambda = np$, которое является математическим ожиданием биномиального распределения и будем устремлять параметр n к бесконечности:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[C_n^k \cdot \left(\frac{\lambda}{n} \right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-k} \right] = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n!}{n^k(n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \right] = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \right] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

3.6 Проверка корректности работы датчика

Для проверки правильности работы датчика пуассоновской случайной величины воспользуемся *критерием согласия Пирсона* (или критерием согласия χ -квадрат). Это один из наиболее популярных критериев для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки некому теоретическому закону распределения.

Теорема 3.1 (Критерий согласия Пирсона). *Обозначим нулевую гипотезу H_0 как гипотезу о том, что выборка $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ подчиняется закону распределения \mathbb{P} . Обозначим за n_k количество элементов в выборке, равных k . За r обозначим количество различных элементов выборки. А за p_k — вероятность выпадения значения в теоретическом распределении $p_k = \mathbb{P}(\xi = k)$. Введем статистику критерия*

$$X_n^2 = n \sum_{k=1}^r \frac{\left(\frac{n_k}{n} - p_k \right)^2}{p_k}.$$

Тогда если гипотеза H_0 верна, то статистика X_n^2 имеет χ -квадрат распределение с $r - 1$ степенью свободы.

Замечание 3.1. Функция распределения χ^2 с l степеней свободы выглядит следующим образом:

$$F_{\chi_l^2} = \frac{\gamma(l/2, x/2)}{\Gamma(l/2)}, \quad \text{где } \Gamma \text{ и } \gamma \text{ обозначают полную и неполную гамма-функции.}$$

Такое определение делает почти невозможным аналитический поиск квантилей этой функции распределения. По этой причине для данных расчетов мы будем пользоваться встроенной в систему **Matlab** функцией `chi2inv(alpha, 1)`, которая возвращает квантиль χ^2 -распределения с 1 степенью свободы порядка `alpha`.

3.7 Построение датчика нормального распределения методом моделирования парами с переходом в полярные координаты

Определение 3.3. Будем говорить, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2 , если ее плотность распределения задается формулой

$$\rho_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Число испытаний	Размер выборки	Уровень значимости	Частота принятия гипотезы
10^2	10^3	0,05	0,953
10^3	10^3	0,05	0,958

Таблица 4: Частота принятия гипотезы H_0 о том, что построенный датчик случайной величины имеет распределение Пуассона, используя критерий согласия Пирсона.

Будем обозначать такие случайные величины

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Замечание 3.2. Будем говорить, что случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение, если $X \sim N(0, 1)$.

Рассмотрим случайную величину $Z = \sqrt{2\xi} \sin \eta$, где $\xi \sim \text{Exp}(1)$, $\eta \sim U[0, 2\pi] \sim 2\pi U[0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z < x) &= \mathbb{P}(\sqrt{2\xi} \sin \eta < x) = \iint_{\{(\xi, \eta) \mid \sqrt{2\xi} \sin \eta < x\}} \frac{e^{-\xi}}{2\pi} d\xi d\eta = \left\{ \xi = \frac{\psi^2}{2} \right\} = \\ &= \iint_{\{(\psi, \eta) \mid \psi \sin \eta < x\}} \frac{e^{-\frac{\psi^2}{2}}}{2\pi} \psi d\psi d\eta = \{X = \psi \cos \eta, Y = \psi \sin \eta\} = \\ &= \iint_{\{(X, Y) \mid Y < x\}} \frac{e^{-\frac{X^2}{2}} e^{-\frac{Y^2}{2}}}{2\pi} dX dY = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{X^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dX \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{Y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dY = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{Y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dY. \end{aligned}$$

Таким образом случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение.

3.8 Проверка равенства математического ожидания и дисперсии

В этом разделе мы проверим построенный датчик на то, действительно ли математическое ожидание смоделированной случайной величины равно нулю, а дисперсия — единице. Для первой задачи используют *одновыборочный критерий Стьюдента* (или *t-критерий*).

Теорема 3.2 (Критерий Стьюдента). *Обозначим нулевую гипотезу H_0 как гипотезу о том, что математическое ожидание выборки $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ равно некоторому известному значению μ . Введем статистику критерия:*

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_X / \sqrt{n}}.$$

Тогда если гипотеза H_0 верна, то статистика t имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенью свободы.

Замечание 3.3. Как и в случае с распределением хи-квадрат (смотри замечание 3.1), по причине сложности вычисления обратной функции распределения Стьюдента, воспользуемся встроенной в систему **Matlab** функцией `tinva(alpha, r)`, считающей квантиль распределения Стьюдента с r степенями свободы порядка `alpha`.

Число испытаний	Размер выборки	Уровень значимости	Частота принятия гипотезы
10^3	10^3	0,05	0,951
10^4	10^4	0,05	0,9527

Таблица 5: Частота принятия гипотезы H_0 о том, что построенный датчик случайной величины имеет равное нулю матожидание, используя одновыборочный критерий Стьюдента.

Теперь проверим равенство дисперсии единице. Для этого воспользуемся *двувыборочным критерием Фишера* (или f-критерием).

Теорема 3.3 (Критерий Фишера). *Обозначим нулевую гипотезу H_0 как гипотезу о том, что дисперсии двух выборок $X = \{X_k\}_{k=1}^n$ и $Y = \{Y_k\}_{k=1}^m$ равны друг другу. Введем статистику критерия*

$$F = \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, \quad \text{где } \hat{\sigma}^2 - \text{выборочная дисперсия.}$$

Тогда если гипотеза H_0 верна, то статистика F имеет распределение Фишера $F(n-1, m-1)$.

Замечание 3.4. Так же, как и в предыдущем случае, мы будем пользоваться встроенной в систему Matlab функцию `finv(alpha, n, m)`, считающую квантиль распределения Фишера с параметрами `n` и `m` порядка `alpha`.

Замечание 3.5. Для того, чтобы использовать критерий Фишера, нам нужна еще одна выборка, которая бы точно имела дисперсию, равную единице. Можно использовать, например, построенный датчик случайной величины игры в орлянку (смотри раздел 1).

Число испытаний	Размер выборки	Уровень значимости	Частота принятия гипотезы
10^3	10^3	0,05	0,993
10^4	10^4	0,05	0,9833

Таблица 6: Частота принятия гипотезы H_0 о том, что построенный датчик случайной величины имеет дисперсию, равную единице, используя критерий Фишера.

Важно отметить, что в отличие от рассмотренных ранее критериев, критерии Стьюдента и Фишера имеют двухстороннюю критическую область. Это значит, что если мы знаем квантиль K_r распределения статистики критерия порядка r , то при полученном значении статистики S и заданном уровне значимости α нулевая гипотеза H_0 должна быть принята при условии, что

$$K_{\alpha/2} < S < K_{1-\alpha/2}.$$

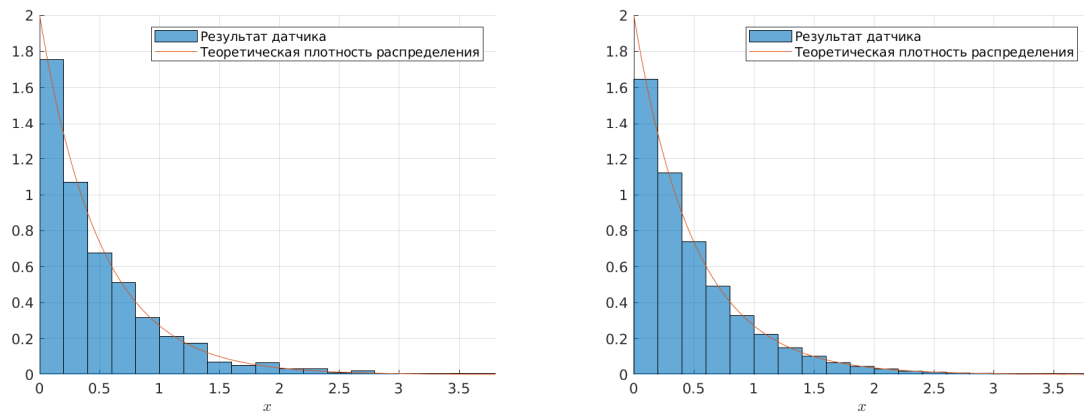


Рис. 3.1: Гистограмма экспоненциального распределения случайной величины с параметром $\lambda = 2$ при 10^3 (слева) и 10^5 (справа) испытаний.

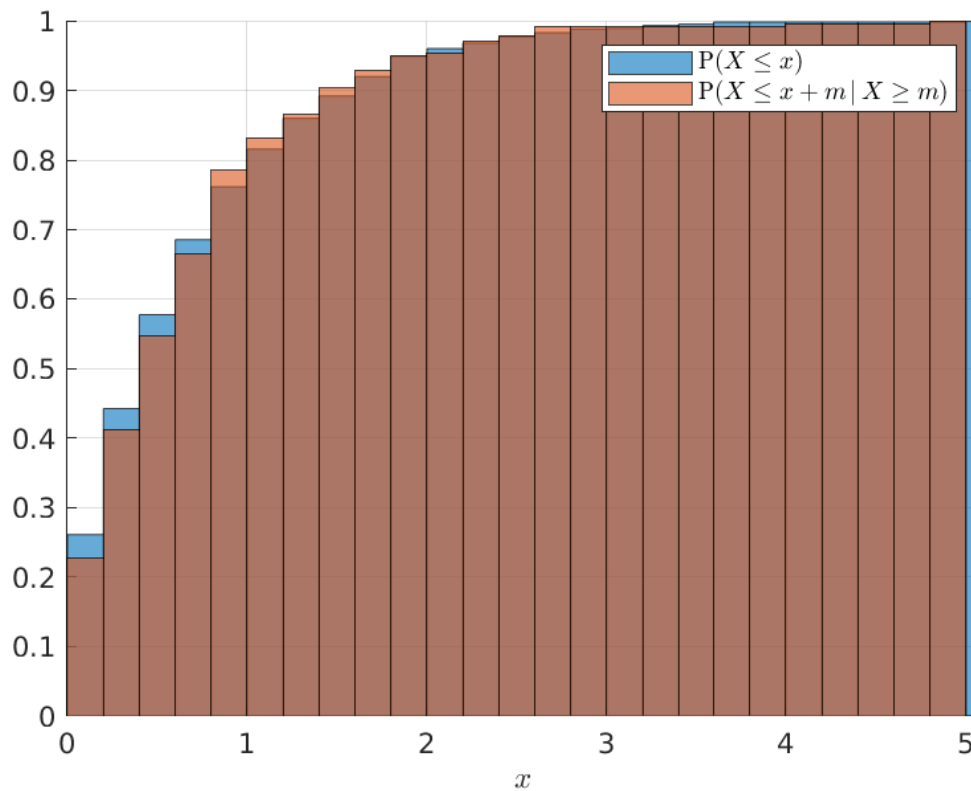


Рис. 3.2: Гистограмма экспоненциального распределения, демонстрирующая его свойство отсутствия памяти. Здесь задан параметр распределения $\lambda = \frac{3}{2}$, а также «сдвиг» $m = 1$. Проведено 10^3 испытаний.

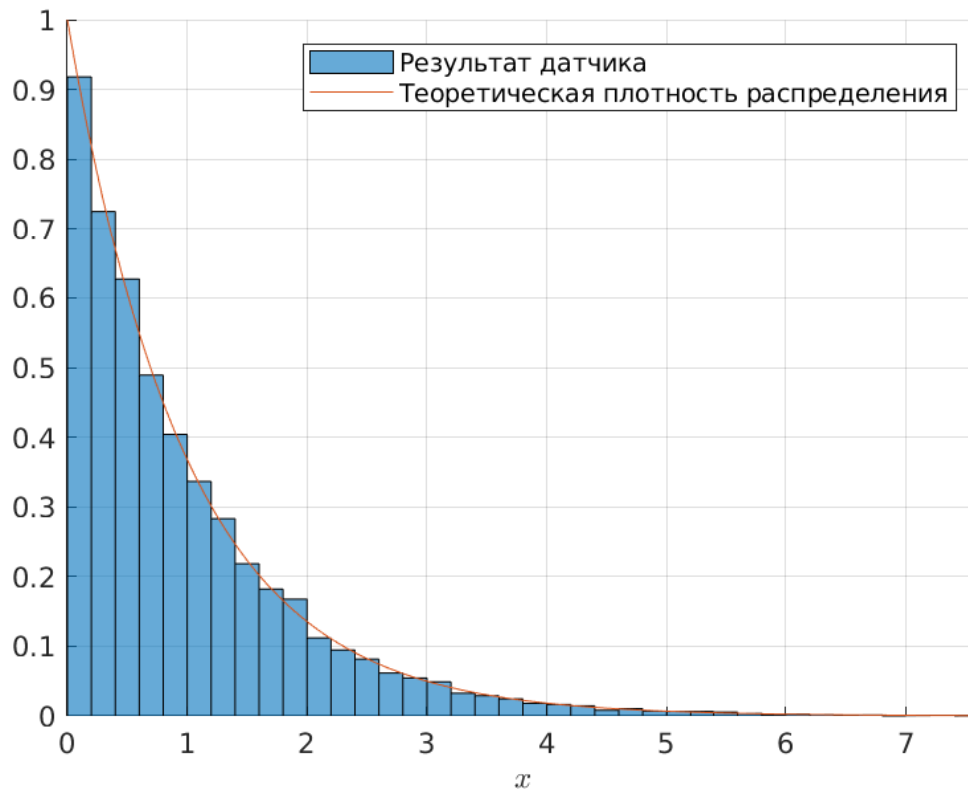


Рис. 3.3: Гистограмма распределения случайной величины $Y = \min_{i=1,n} X_i$. Здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{10}$, $n = 10$. Число испытаний 10^4 .

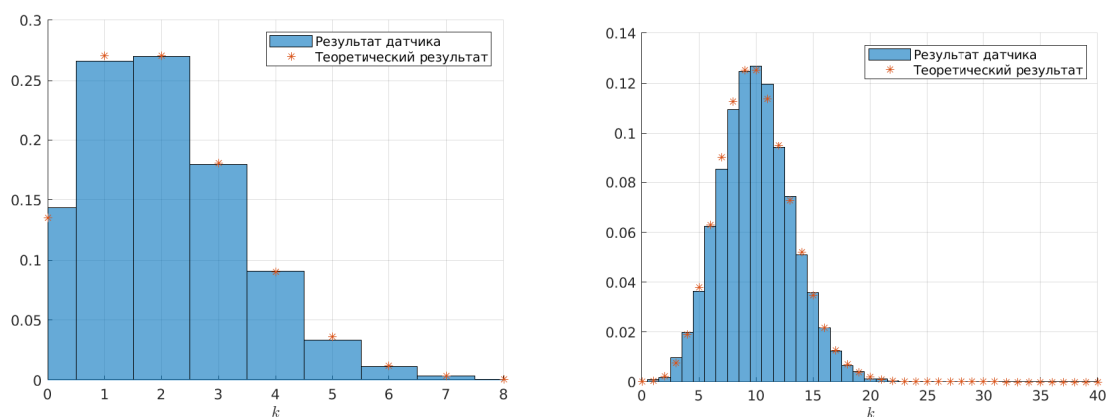


Рис. 3.4: Гистограмма распределения Пуассона случайной величины с параметром $\lambda = 2$ (слева) и $\lambda = 10$ (справа) при 10^4 испытаний.

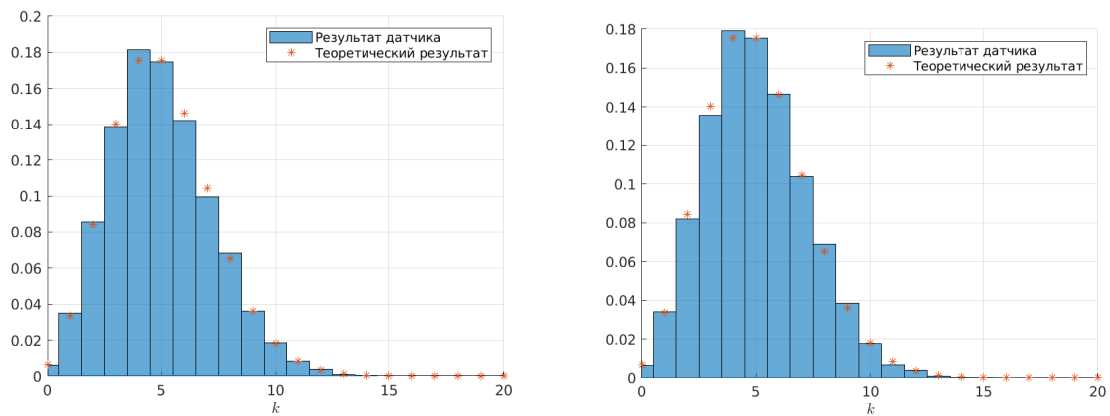


Рис. 3.5: Гистограмма распределения Пуассона случайной величины с параметром $\lambda = 5$ как приближение биномиальным распределением с параметром $n = 5 \cdot 10^2$ (слева) и $n = 5 \cdot 10^4$ (справа) при 10^4 испытаний.

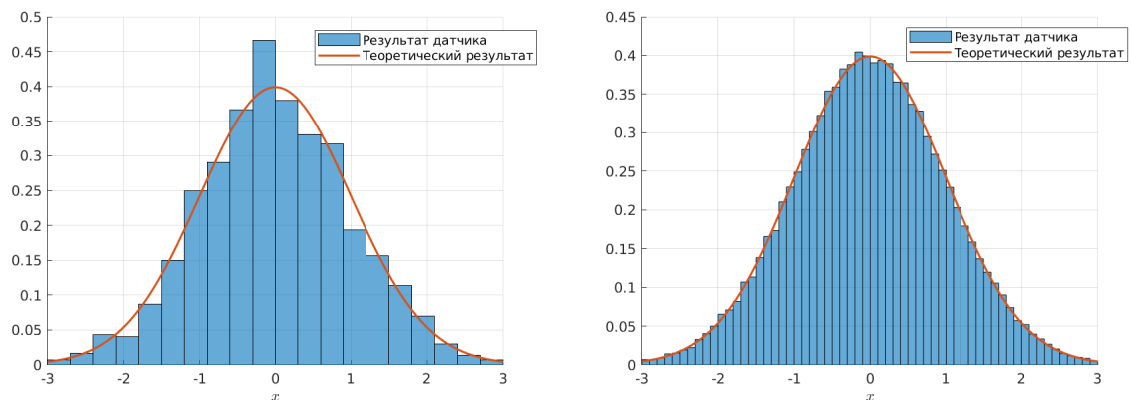


Рис. 3.6: Гистограмма стандартного нормального распределения случайной величины при 10^3 (слева) и 10^5 (справа) испытаний.

4 Задание №4

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи функции `normal probability plot` убедиться в корректности работы построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.
3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4.

4.1 Построение датчика распределения Коши

Определение 4.1. Будем говорить, что случайная величина X имеет *распределение Коши* с параметрами a и b , если ее функция распределения имеет вид:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - a}{b} \right) + \frac{1}{2}.$$

Будем обозначать такие случайные величины

$$X \sim C(a, b).$$

Функция распределения Коши имеет обратную, поэтому воспользовавшись методом обратной функции распределения (смотри теорему 2.1), получим

$$X = F_X^{-1}(\xi) = a + b \operatorname{tg} [\pi(\xi - 1/2)], \quad \text{где } \xi \sim U[0, 1].$$

4.2 Построение датчика стандартного нормального распределения методом фон Неймана

Метод фон Неймана заключается в моделировании нормального распределения путем мажорирования плотностью распределения Коши с параметрами a и b . Для достижения наилучшей оценки, будем подбирать значения параметров a и b . Выпишем плотности стандартного нормального распределения и распределения Коши:

$$\rho_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$\rho_C(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{b}{(x - a)^2 + b^2}.$$

При моделировании будем использовать следующий алгоритм:

1. возьмем некоторое число $k > 0$ такое, что $\rho_N(x) \leq k \rho_C(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
2. рассмотрим значение случайной величины $\hat{\xi} = \xi$, где $\xi \sim C(a, b)$;
3. сгенерируем случайную величину $\hat{\eta} = \eta$, где $\eta \sim \operatorname{Bern} \left(\frac{\rho_N(\hat{\xi})}{k \rho_C(\hat{\xi})} \right)$;
4. если $\hat{\eta} = 1$, то $\hat{\xi}$ является значением случайной величины из распределения с плотностью $\rho_N(x)$, иначе, продолжаем моделирование, начиная с пункта 2.

Данный алгоритм работает тем быстрее, чем ближе отношение $\frac{\rho_N(x)}{k\rho_C(x)}$ к единице, поэтому в качестве k возьмем $k^* = \min_{a,b} \max_x \frac{\rho_N(x)}{\rho_C(x)}$. Рассмотрим это отношение:

$$\frac{\rho_N(x)}{\rho_C(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{b\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot [(x-a)^2 + b^2].$$

Допустим, что оптимальное значение параметра $a = 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 + b^2)$$

и найдем ее точки максимума:

$$g'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} (2 - b^2 - x^2) \implies \begin{cases} x = 0, & |b| > \sqrt{2}, \\ x = \pm\sqrt{2-b^2}, & 0 < |b| \leq \sqrt{2}, \end{cases}$$

Следовательно,

$$k^* = \min \left\{ \min_{|b| > \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} b, \min_{0 < |b| \leq \sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{b} e^{\frac{b^2}{2}-1} \right\}.$$

Поскольку $k > 0$ и $b > 0$, то найдем минимум еще одной вспомогательной функции:

$$h(b) = \frac{e^{\frac{b^2}{2}-1}}{b}, \quad h'(b) = \frac{1-b^2}{b^2} e^{\frac{b^2}{2}-1} \implies b = 1.$$

Таким образом, при $a^* = 0$, $b^* = 1$:

$$k^* = \min \left\{ \sqrt{\pi}, \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \right\} = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}.$$

Напоследок покажем, что $a^* = 0$ действительно является оптимальным значением параметра:

$$\begin{aligned} k^* &= \min_{a,b} \max_x \frac{\rho_N(x)}{\rho_C(x)} = \min_{a,b} \max_x \frac{\sqrt{\pi}}{b\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot [(x-a)^2 + b^2] = \\ &= \min_a \left\{ \min_{b > \sqrt{2}} \frac{\rho_N(x)}{\rho_C(x)} \Big|_{x=0}, \min_{0 < b \leq \sqrt{2}} \frac{\rho_N(x)}{\rho_C(x)} \Big|_{x=\pm\sqrt{2-b^2}} \right\} > \\ &> \min_a \left\{ \min_{b > \sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{b\sqrt{2}} (a^2 + b^2), \min_{0 < b \leq \sqrt{2}} (\sqrt{2-b^2} + |a|) \right\}. \end{aligned}$$

Минимум же последнего выражения достигается при $a = 0$.

4.3 Дополнительно о методе фон Неймана

Проиллюстрируем результат работы датчика при помощи функции `normal probability plot`. Данная функция строит график распределения в следующих осях: на оси абсцисс откладываются точки выборки, а на оси ординат — квантили стандартного нормального распределения.

Рассмотрим случайную величину $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Тогда ее функция распределения

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Произведем замену переменной $s = \frac{t-\mu}{\sigma}$, тогда

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = F_N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

где $F_N(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Получается, что квантили различных нормальных распределений связаны между собой линейно. То есть любая случайная величина $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ представима в виде $X = \sigma Y + \mu$, где $Y \sim N(0, 1)$.

Функция **normal probability plot** для каждой нормально распределенной выборки должна показать прямую со сдвигом μ и угловым коэффициентом σ .

В конце хотелось бы сравнить скорости работы моделирования стандартной нормальной случайной величины при методах моделирования парами (смотри предыдущее задание) и фон Неймана. Для этого мы приведем график скорости работы каждого метода в зависимости от объема генерируемой выборки. Стоит отметить, что программное решение задачи написано в системе **Matlab**, где на системном уровне реализованы матричные вычисления, которые работают гораздо быстрее циклов. Метод моделирования парами работает использует только матричные операции, в то время как в методе фон Неймана используется цикл. К тому же матричных операций в методе фон Неймана также используется больше.

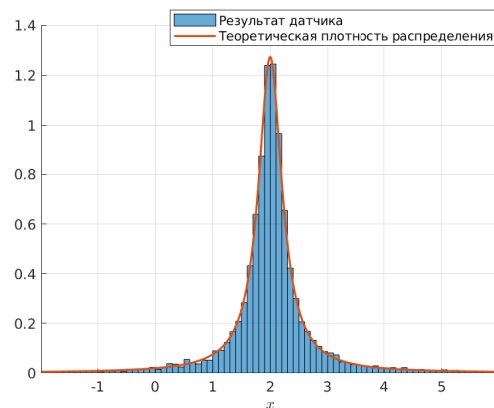
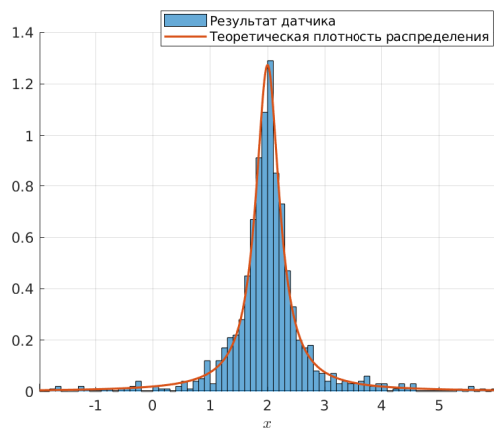


Рис. 4.1: Гистограмма распределения Коши случайной величины с параметрами $a = 2$ и $b = 1/4$ при 10^3 (слева) и 10^4 (справа) испытаний.

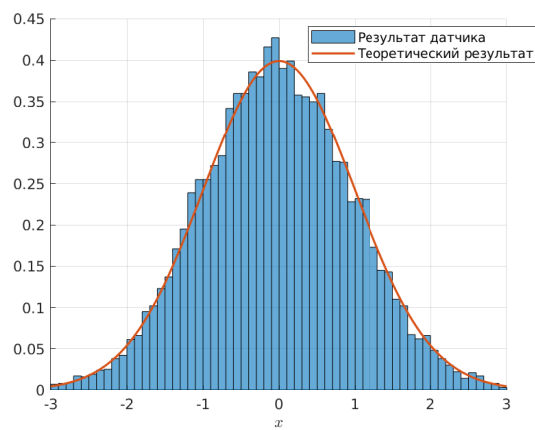
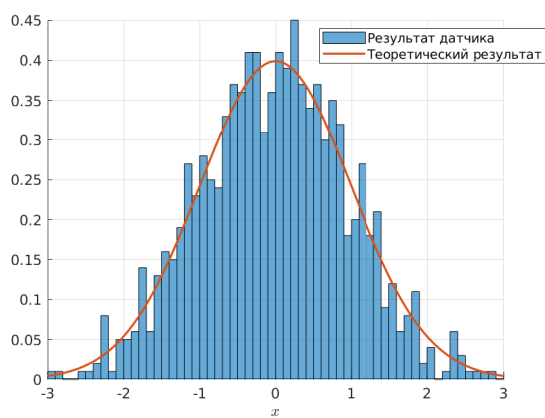


Рис. 4.2: Гистограмма стандартного нормального распределения случайной величины, смоделированной методом фон Неймана при 10^3 (слева) и 10^4 (справа) испытаний.

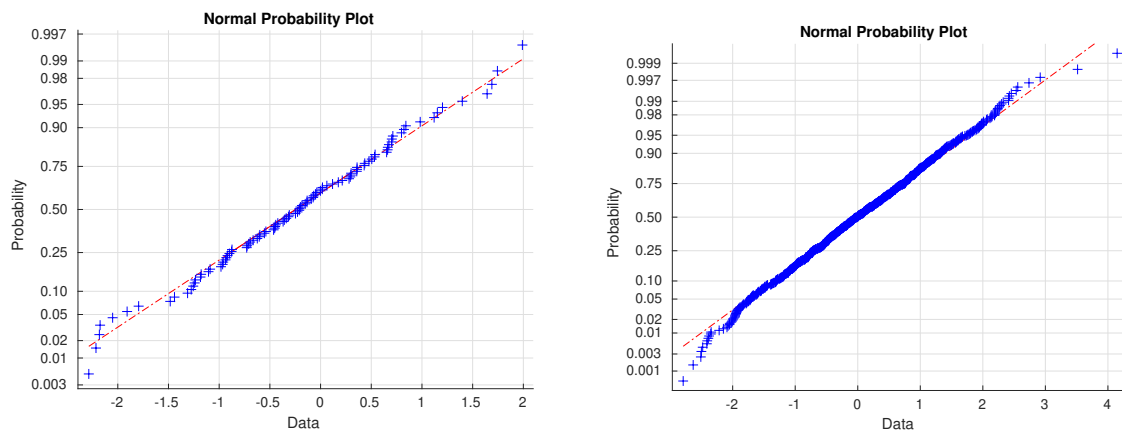


Рис. 4.3: Результат работы функции `normal probability plot` для датчика стандартного нормального распределения методом фон Неймана при 10^2 (слева) и 10^3 (справа) испытаний.

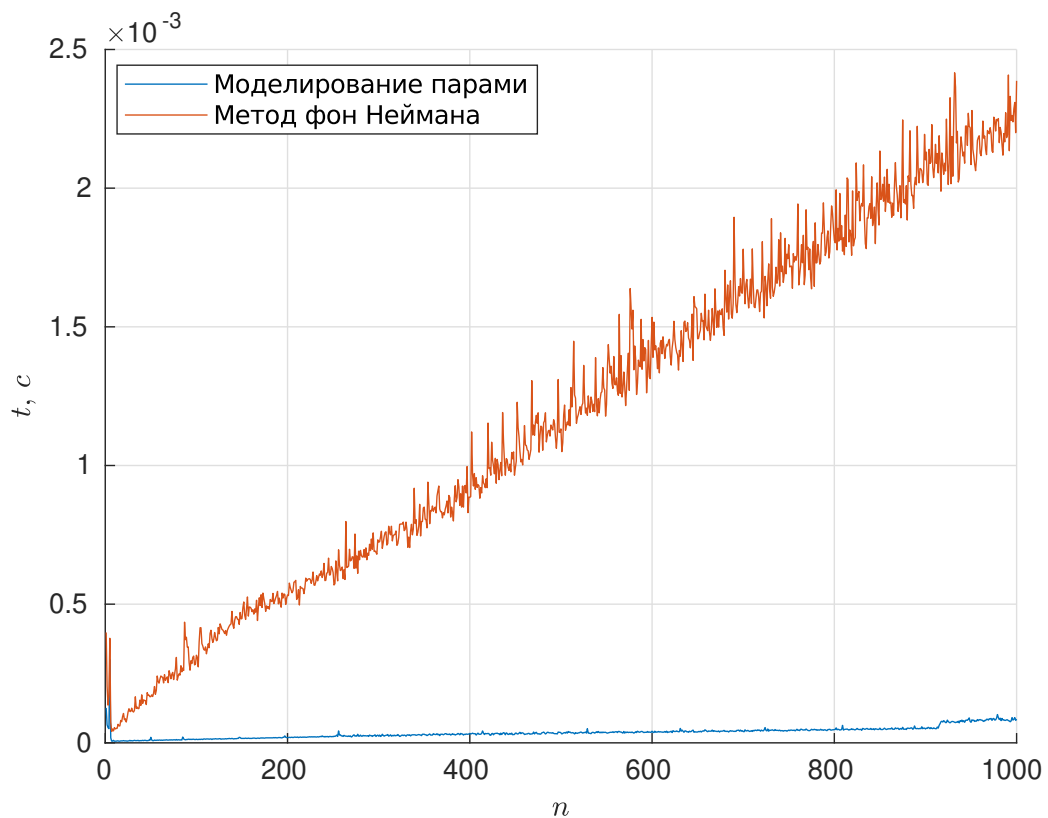


Рис. 4.4: Сравнение времени работы методов моделирования стандартного нормального распределения в зависимости от объема выборки.

5 Задание №5

1. Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Убедиться в справедливости ЗБЧ и ЦПТ, то есть исследовать поведение суммы S_n и эмпирического распределения случайной величины

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right).$$

2. Считая μ и σ неизвестными, для пункта 1 построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии.
3. Пусть $X \sim C(a, b)$ имеет распределение Коши со сдвигом a и масштабом b . Проверить эмпирически, как ведут себя суммы $\frac{S_n}{n}$. Результат объяснить, а также найти закон распределения данных сумм.

5.1 Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Теорема 5.1 (Закон больших чисел). Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, с конечным первым моментом, равным $\mathbb{E} X_i = \mu$. Обозначим за $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu,$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Теорема 5.2 (Центральная предельная теорема). Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, с конечным первым моментом, равным $\mathbb{E} X_i = \mu$ и конечной дисперсией $\text{Var} X_i = \sigma^2 \neq 0$. Обозначим за $Y_n = \frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}}$, тогда

$$Y_n \xrightarrow{\text{dist.}} N(0, 1),$$

то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F_N(x).$$

5.2 Построение доверительных интервалов для среднего и дисперсии нормальной случайной величины.

Пусть теперь X_1, X_2, \dots, X_n — независимая выборка из некоторого нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$ с неизвестными параметрами. Построим доверительный интервал для неизвестного среднего.

Теорема 5.3. Случайная величина

$$T = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{s},$$

где \bar{X} — выборочное среднее, а s — несмещенное выборочное стандартное отклонение, имеет распределение Стьюдента с $(n - 1)$ степенью свободы.

Обозначим за t_α квантиль распределения Стьюдента с $(n - 1)$ степенью свободы порядка α . В силу симметрии данного распределения имеем, что

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-t_{1-\alpha/2} \leq T \leq t_{1-\alpha/2}) &= 1 - \alpha, \\ \Downarrow \\ \mathbb{P}\left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}\right) &= 1 - \alpha.\end{aligned}$$

Таким образом мы получили доверительный интервал для математического ожидания μ :

$$\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2},$$

длина которого равна

$$L(n) = 2 \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2} = O(n^{-1/2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теперь будем строить доверительный интервал для дисперсии. В этом нам поможет теорема Фишера для нормальных выборок.

Теорема 5.4 (Фишер). *Случайная величина*

$$H = \frac{s^2}{\sigma^2}(n - 1)$$

имеет распределение хи-квадрат с $(n - 1)$ степенью свободы.

Обозначим за χ_α^2 квантиль распределения хи-квадрат с $(n - 1)$ степенью свободы порядка α . Аналогично предыдущим рассуждениям имеем:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\chi_{\frac{1+\alpha}{2}}^2 \leq H \leq \chi_{\frac{1-\alpha}{2}}^2\right) &= \alpha, \\ \Downarrow \\ \mathbb{P}\left(\frac{s^2}{\chi_{\frac{1+\alpha}{2}}^2}(n - 1) \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2}{\chi_{\frac{1-\alpha}{2}}^2}(n - 1)\right) &= \alpha.\end{aligned}$$

Таким образом мы получили доверительный интервал для дисперсии

$$\frac{s^2}{\chi_{\frac{1+\alpha}{2}}^2}(n - 1) \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2}{\chi_{\frac{1-\alpha}{2}}^2}(n - 1),$$

длина которого равна

$$L(n) = s^2(n - 1) \left(\frac{s^2}{\chi_{\frac{1-\alpha}{2}}^2} - \frac{s^2}{\chi_{\frac{1+\alpha}{2}}^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

5.3 Поведение частичных сумм распределения Коши

Рассмотрим случайную величину $X \sim C(a, b)$. Эмпирически можно увидеть, что выборка таких случайных величин не удовлетворяет закону больших чисел. Разберемся почему это так.

Определение 5.1. Пусть ξ — произвольная случайная величина, определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда ее *математическим ожиданием* называется

$$\mathbb{E} \xi = \int_{\Omega} \xi(w) \mathbb{P}(dw).$$

Получается, что, так как значение

$$\mathbb{E} X = \frac{b}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} dx$$

не определено, то не выполняется одно из условий закона больших чисел. Как же ведут себя частичные суммы распределения Коши? На этот вопрос можно ответить при помощи следующего утверждения.

Утверждение 5.1 (Свойство устойчивости). Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Коши с параметрами a и b . Тогда случайная величина

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

также имеет распределение Коши с параметрами a и b , причем для любого n .

Доказательство. Воспользуемся аппаратом характеристических функций. Известно, что характеристическая функция случайной величины $X \sim C(a, b)$ имеет вид

$$\varphi_X(x) = e^{aix - b|x|}.$$

Вспомним следующие свойства характеристических функций:

$$\varphi_{aX}(x) = \varphi_X(ax),$$

$$\varphi_{\sum_{k=1}^n X_k}(x) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(x).$$

Теперь мы можем легко найти характеристическую функцию случайной величины S_n :

$$\varphi_{S_n}(x) = \varphi_{\sum_{k=1}^n X_k}(x/n) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(x/n) = (\varphi_{X_1}(x/n))^n = \left(e^{\frac{aix}{n} - \left| \frac{x}{n} \right| b} \right)^n = e^{aix - b|x|} = \varphi_{X_1}(x).$$

Так как характеристические функции S_n и X_k совпадают, то их распределения тоже совпадают. Утверждение доказано. ■

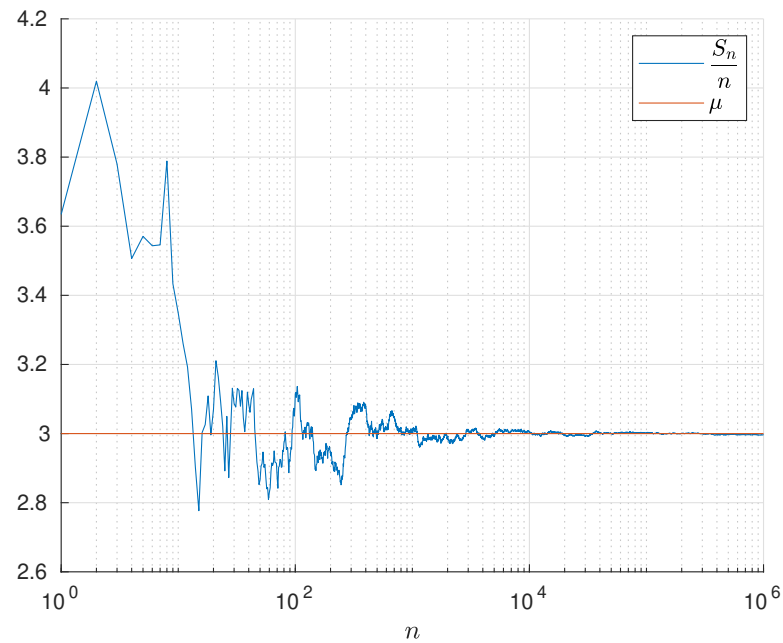


Рис. 5.1: Иллюстрация выполнения закона больших чисел для нормально распределенной случайной величины с параметрами $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$.

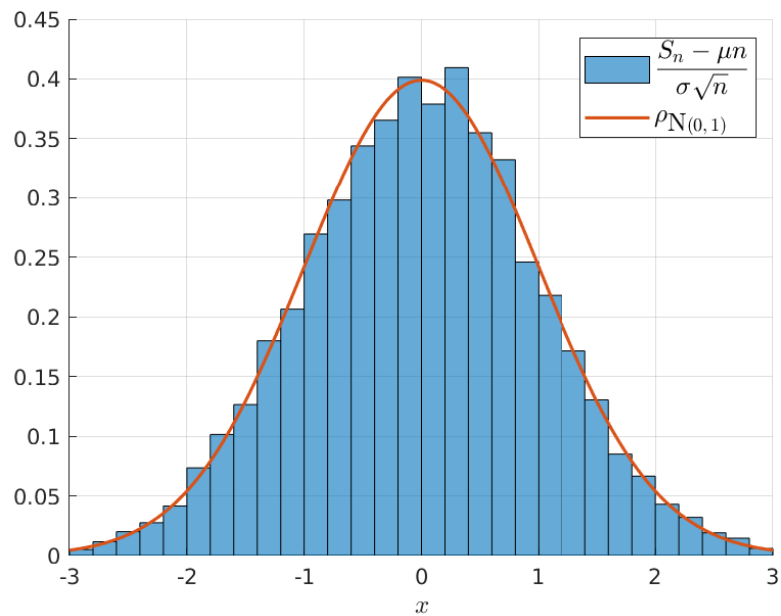


Рис. 5.2: Иллюстрация выполнения центральной предельной теоремы для нормально распределенной случайной величины с параметрами $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$. Было проведено 10^4 испытаний по генерации S_n , где $n = 10^4$.

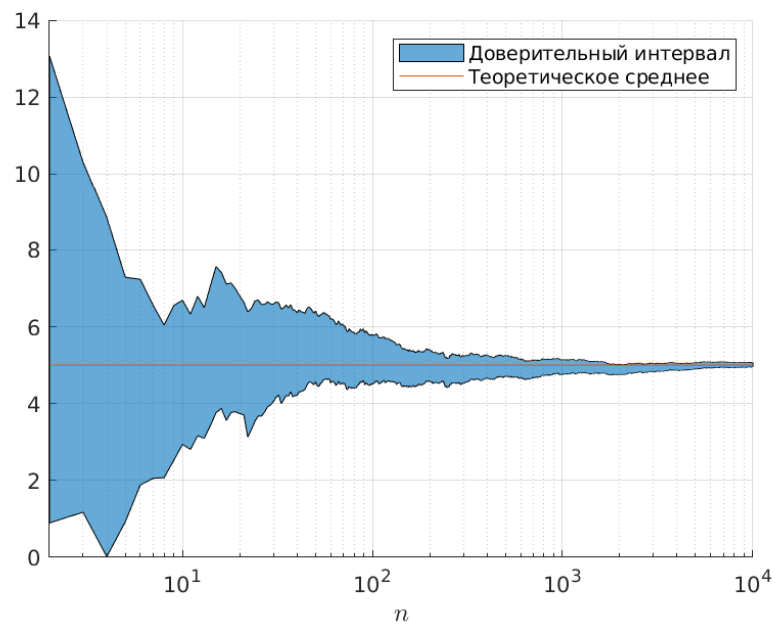


Рис. 5.3: Доверительный интервал для математического ожидания случайной величины нормального распределения с параметрами $\mu = 5$, $\sigma^2 = 9$.

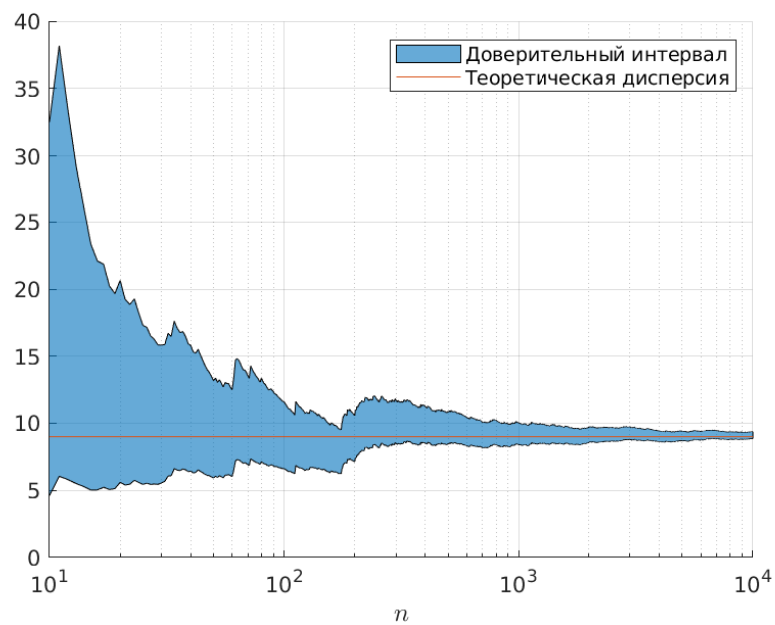


Рис. 5.4: Доверительный интервал для дисперсии случайной величины нормального распределения с параметрами $\mu = 5$, $\sigma^2 = 9$.

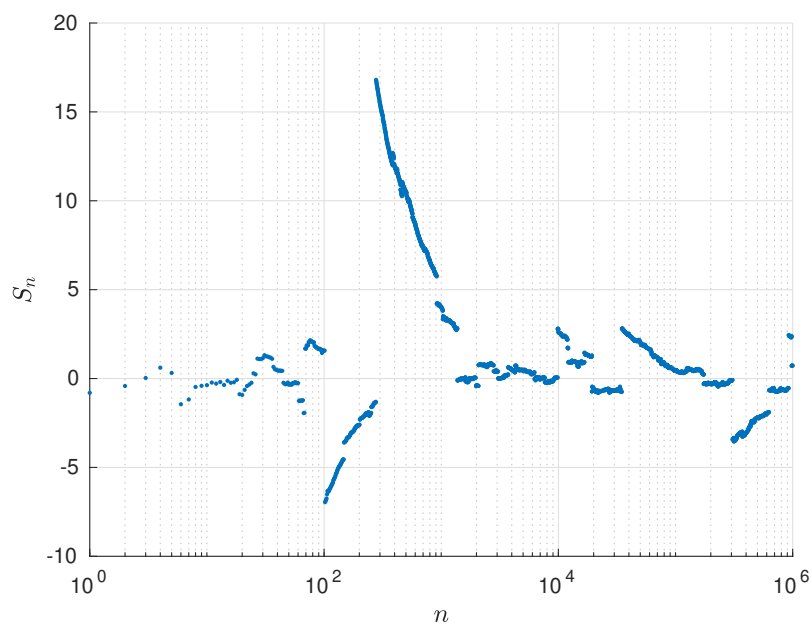


Рис. 5.5: Иллюстрация неприменимости закона больших чисел к распределению Коши. Поведение частичных сумм случайной величины Коши с параметрами $a = 0$, $b = 1, 5$.

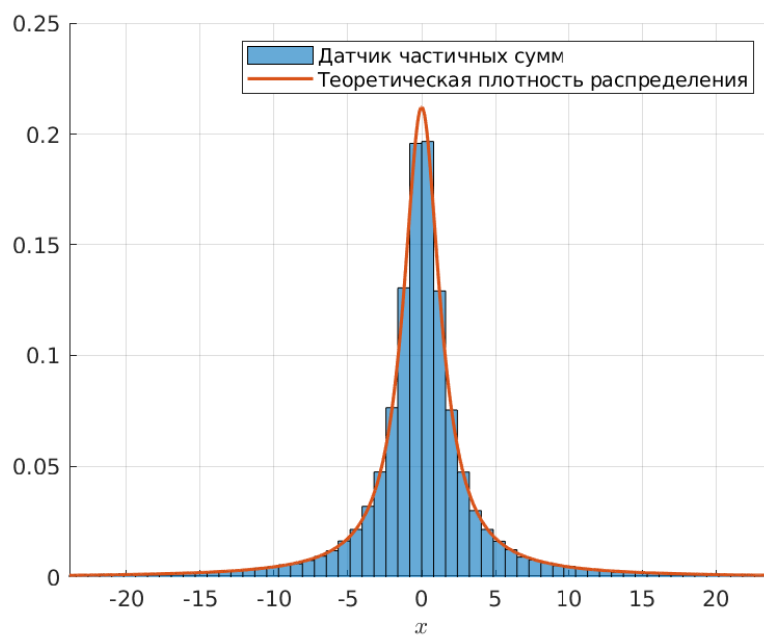


Рис. 5.6: Иллюстрация свойства устойчивости распределения Коши. Представлена гистограмма распределения частичных сумм S_{100} случайной величины Коши с параметрами $a = 0$, $b = 1, 5$. Объем выборки — 10^5 .

6 Задание №6

1. Посчитать интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\left(x_1^2 + \dots + x_{10}^2 + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}$$

- методом Монте–Карло;
- методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана.

2. Для каждого случая оценить точность вычислений.

6.1 Метод Монте–Карло

В данном разделе найдем методом Монте–Карло искомый интеграл и оценим точность вычислений. Для начала обозначим данный интеграл и подынтегральную функцию

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-\left(x_1^2 + \dots + x_{10}^2 + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}}_{f(x)} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}.$$

Пусть $\rho(x)$ — плотность некоторой случайной величины X , имеющей абсолютно непрерывное распределение. Обозначим за $\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{\rho(x)}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\rho(x)} \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \rho(x) dx = \mathbb{E} \hat{f}(X).$$

Получается, что задача вычисления интеграла сводится к вычислению математического ожидания случайной величины $Y = \hat{f}(X)$. Согласно закону больших чисел (см. теорему ??)

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{f}(x^i)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \hat{f}(X), \quad \text{где } \{x^i\}_{i=1}^n \text{ — выборка случайной величины } X.$$

Поэтому в дальнейшем будем считать математическое ожидание, полагая

$$\mathbb{E} \hat{f}(X) \approx Y_n.$$

Для подсчета интеграла I возьмем случайную величину X , имеющую десятимерное стандартное нормальное распределение, то есть $X \sim N(O, I)$, где $O, I \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$, O — нулевая матрица, I — единичная матрица. Плотность такой случайной величины выражается формулой

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi)^5} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_{10}^2}{2}}.$$

Тогда

$$\hat{f}(x) = \frac{f(x)}{\rho(x)} = (2\pi)^5 \frac{e^{-\left(\frac{x_1^2 + \dots + x_{10}^2}{2} + \frac{1}{2^7 \cdot x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}\right)}}{x_1^2 \cdot \dots \cdot x_{10}^2}.$$

Таким образом, мы можем посчитать значение интеграла I по формуле

$$I \approx \frac{\sum_{i=1}^n \hat{f}(x^i)}{n}, \quad \text{где } x^i = (x_1^i, \dots, x_{10}^i), \quad x_k^i \sim N(0, 1), \quad k = \overline{0, 10}.$$

Теперь оценим точность вычисления интеграла методом Монте–Карло. Для этого воспользуемся центральной предельной теоремой (см. теорему ??):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_n - I| < \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - nI}{n}\right| < \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - nI}{\sqrt{n}\sigma_n}\right| < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_n}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nI}{\sqrt{n}\sigma_n} < \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_n}\right) - \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nI}{\sqrt{n}\sigma_n} < -\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_n}\right) \approx F_N\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_n}\right) - F_N\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_n}\right) = \\ &= 2F_N\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_n}\right) - 1 = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\varepsilon = K_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}},$$

где σ_n — несмещенная выборочная дисперсия, F_N — функция стандартного нормального распределения, а K_α — его квантиль порядка α . Таким образом для уровня значимости $\alpha = 0,05$ погрешность будет равна $\varepsilon = 1,96 \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$.

Число испытаний	Результат	Погрешность	Время работы, с
10^5	127,814	23,0369	0,016521
10^6	124,315	2,27042	0,997902
10^7	124,791	0,720674	9,60839
10^8	124,735	0,227662	104,135

Таблица 7: Результат подсчета интеграла I методом Монте–Карло.

6.2 Метод квадратур

В методе квадратур мы должны свести задачу к вычислению собственного интеграла Римана. Для этого сделаем замену переменных

$$x_i = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}t_i\right), \quad 0 \leq t_i \leq 1, \quad i = \overline{1, 10}.$$

Таким образом, исходный интеграл равен интегралу с ограниченной областью интегрирования:

$$I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\exp\left\{-\left[\sum_{k=1}^{10} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}t_k\right)^2 + \frac{1}{2^7 \cdot \prod_{k=1}^{10} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}t_k\right)^2}\right]\right\}}{\prod_{k=1}^{10} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}t_k\right)^2 \cdot \prod_{k=1}^{10} \cos\left(\frac{\pi}{2}t_k\right)^2} dt_1 \dots dt_{10}.$$

Теперь обозначим подынтегральную функцию последнего выражения за $F(t) = F(t_1, \dots, t_{10})$ и рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[0, 1]$ на N частей:

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^{10} = 1, \quad t^k = \frac{k}{N}, \quad k = \overline{0, N}$$

если взять за $\xi_k = \frac{t^{k-1} + t^k}{2}$ середины отрезков $[t^{k-1}, t^k]$, $k = \overline{1, N}$, то приближенно значение интеграла можно посчитать по формуле

$$I \approx \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_{10}=1}^N F(\xi_{k_1}, \dots, \xi_{k_{10}}) \Delta, \quad \text{где } \Delta = \frac{1}{N^{10}}.$$

Погрешность метода прямоугольников имеет следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{h^2}{24}(b-a) \sum_{i,j=1}^n \max |f''_{x_i x_j}| = \frac{1}{6N^2} \sum_{i,j=1}^n \max |f''_{x_i x_j}|.$$

Число разбиений	Результат	Время работы, с
3	0,086797	0,007513
4	272,6029	0,073578
5	183,4886	0,889859
6	116,3903	8,377370

Таблица 8: Результат подсчета интеграла I методом квадратур. Видно, что метод Монте–Карло гораздо более оптимальный по времени.

Список литературы

- [1] Ширяев А. Н. Вероятность, в 2-х кн. — 4-е изд., переработанное и дополненное — М.: МЦНМО, 2007.
- [2] NIST/SEMATECH, “6.3.3.1. Counts Control Charts”, e-Handbook of Statistical Methods.
- [3] Novak S.Y. Extreme value methods with applications to finance. London: CRC/ Chapman and Hall/Taylor and Francis, 2011.