

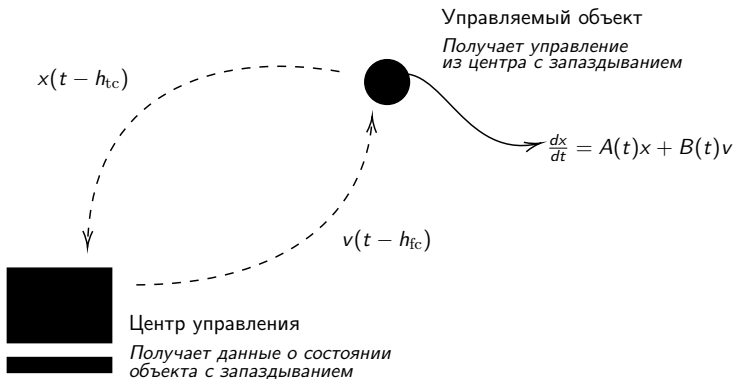
О задаче целевого управления по результатам наблюдений, поступающих с запаздыванием

студент 4 курса К. Ю. Егоров
научный руководитель — к.ф-м.н., доцент И. В. Востриков

Кафедра системного анализа

10 июня 2020 г.

Общая постановка задачи



$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad \text{где } u(t) = u(t, x(t - h)) = v(t + h_{fc}),$$
$$h = h_{tc} + h_{fc}.$$

Непрерывная линейно-квадратичная задача

Рассмотрим задачу $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$,
 $J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [\langle x, M(s)x \rangle + \langle u, N(s)u \rangle] ds + \langle x(t_1), Tx(t_1) \rangle \rightarrow \min_u$,
где $M(s) = M^T(s) \geq 0$, $N(s) = N^T(s) > 0$, $T = T^T > 0$.

Введём функцию цены $V(t_0, x_0) = \inf_u J(u)$ и будем искать её в виде $V(t, x) = \langle x, P(t)x \rangle$, где $P(t) = P^T(t) > 0$.

Функция цены удовлетворяет уравнению
Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \{ \langle \frac{\partial V}{\partial x}, Ax + Bu \rangle + \langle x, Mx \rangle + \langle u, Nu \rangle \} = 0, \\ V(t_1, x) = \langle x, Tx \rangle. \end{cases}$$

Непрерывная линейно-квадратичная задача

Решив уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, получим

$$u^*(t) = -N^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t),$$

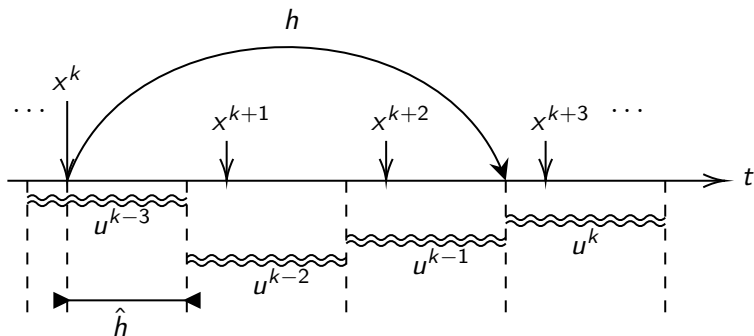
где $P(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати:

$$\begin{cases} \dot{P} + PA + A^T P - PBN^{-1}B^T P + M = 0, \\ P(t_1) = T, \end{cases}$$

а $x(t)$ — текущее состояние объекта, которое можно вычислить таким образом:

$$x(t) = \begin{cases} X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)B(s)u^*(s) ds, & t \in [t_0, t_0 + h], \\ X(t, t-h)x(t-h) + \int_{t-h}^t X(t, s)B(s)u^*(s) ds, & t \in (t_0 + h, t_1] \end{cases}$$

Переход к дискретной системе

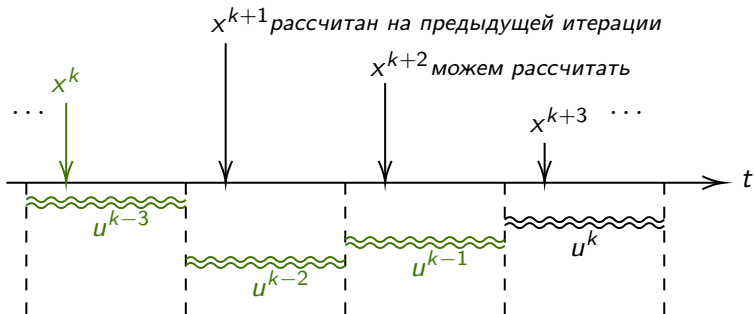


$$x^{k+1} = \Phi^k x^k + \Gamma_1^k u^{k-m} + \Gamma_2^k u^{k-m-1}$$

$$\Phi^k = X(t^{k+1}, t^k), \quad \Gamma_1^k = \int_{t^k + \hat{h}}^{t^{k+1}} X(t^{k+1}, s) B(s) ds,$$

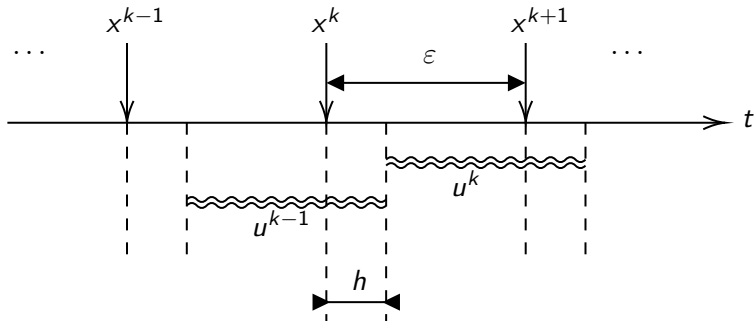
$$\Gamma_2^k = \int_{t^k}^{t^k + \hat{h}} X(t^k + \hat{h}, s) B(s) ds.$$

Упрощение системы



■ известные величины

$$x^{k+m} = \Phi^{k+m-1} x^{k+m-1} + \Gamma_1^{k+m-1} u^{k-1} + \Gamma_2^{k+m-1} u^{k-2}.$$



$$x^{k+1} = \Phi^k x^k + \Gamma_1^k u^k + \Gamma_2^k u^{k-1}, \quad 0 \leq h < \varepsilon.$$

$$J(u) = \sum_{k=1}^N \langle x^k, M^k x^k \rangle + \sum_{k=1}^N \langle u^k, N^k u^k \rangle + \langle x^{N+1}, T x^{N+1} \rangle \longrightarrow \min_u.$$

Приводим к системе без запаздывания по управлению:

$$z^k = \begin{pmatrix} x^k \\ u^{k-1} \end{pmatrix} \Rightarrow z^{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi^k & \Gamma_2^k \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{\Phi}^k} z^k + \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_1^k \\ I \end{pmatrix}}_{\tilde{\Gamma}^k} u^k.$$

Тогда функция цены $V^k(z)$ удовлетворяет дискретному уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$V^{k-1}(z) = \langle z, \tilde{M}^k z \rangle + \min_u \left\{ \langle u, N^k u \rangle + V^k(\tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u) \right\}.$$

Будем искать функцию цены в виде $V^k(z) = \langle z, P^k z \rangle$, где $P^k = (P^k)^T > 0$ и получим управление.

Оптимальная стратегия:

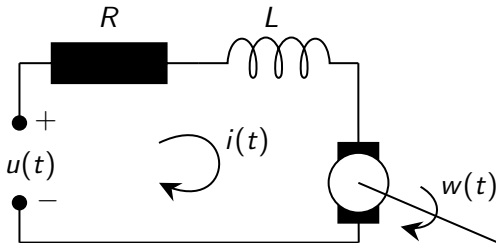
$$u^{k*} = -(N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k)^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k z^k,$$

где P^k удовлетворяет рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} P^{k-1} = & \tilde{M}^k + (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k - \\ & - (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k [N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k]^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k, \end{aligned}$$

$$P^{N+1} = \tilde{T}.$$

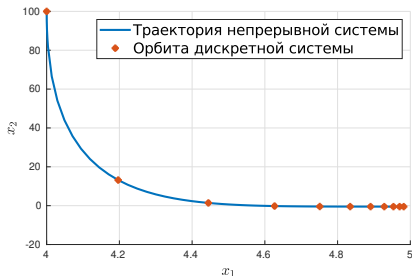
Модель
электродвигателя
постоянного тока [4]:



$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{K_b}{L}\omega + \frac{1}{L}u(t), \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{K_T}{J}i - \frac{B}{J}\omega. \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -0,02 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

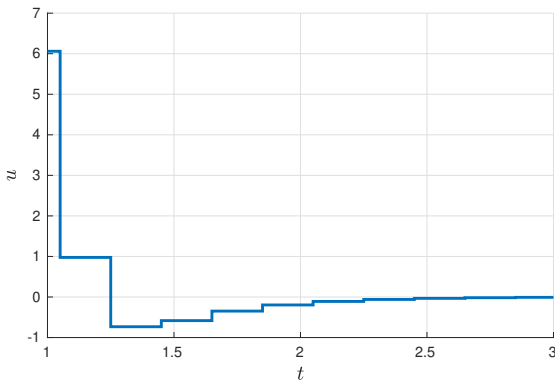
Приведем модель к дискретному виду:

$$\Phi = e^{A\varepsilon}, \quad \Gamma_1 = \int_h^\varepsilon e^{As} ds \cdot B, \quad \Gamma_2 = \int_0^h e^{As} ds \cdot B.$$



Траектория системы при передаче ей постоянного управления $u(t) \equiv 1$.

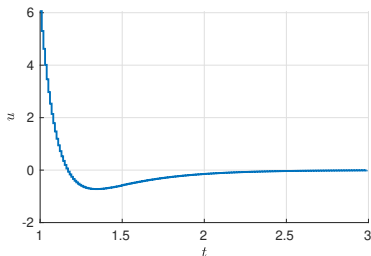
Параметры дискретизации $\varepsilon = 0,2$, $h = 0,05$.



Построенное управление на интервале $[1, 3]$ при параметрах

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad N = (1), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

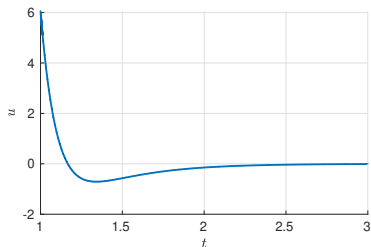
Сравним с непрерывным решением



Управление, построенное нами.

Параметры $\varepsilon = 0,01$, $h = 0,2$.

Значение функционала $J = 4971,0$.



Управление непрерывной системой
без запаздывания.

Значение функционала $J = 4970,8$.

- Исследовать задачу минимизации других функционалов.
- Исследовать систему с неопределенностью.

- ❶ Беллман Р. *Динамическое программирование*. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 400с.
- ❷ Егоров А. И. *Уравнения Риккати*. М.: Физматлит, 2001, 320с.
- ❸ Johan Nilsson. *Real-Time Control Systems with Delays*. Lund Institute of Technology, 1998.
- ❹ Ruba M. K. Al-Mulla Hummadi *Simulation Of Optimal Speed Control For a Dc Motor Using Linear Quadratic Regulator (LQR)*. Juornal of Engineering, Number 3, Volume 18 march 2012, Baghdad.