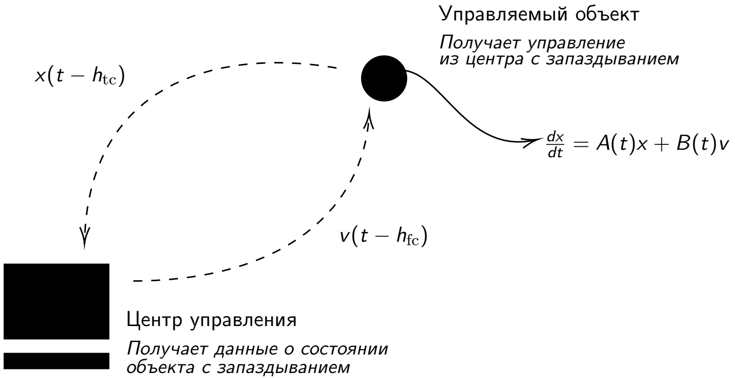
О задаче целевого управления по результатам наблюдений, поступающих с запаздыванием

студент 4 курса К. Ю. Егоров
научный руководитель — к.ф-м.н., доцент И. В. Востриков

Кафедра системного анализа

10 июня 2020 г.

Общая постановка задачи



$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad \text{где } u(t) = u(t, x(t-h)) = v(t + h_{\mathrm{fc}}),$$
$$h = h_{\mathrm{tc}} + h_{\mathrm{fc}}.$$

Непрерывная линейно-квадратичная задача

Рассмотрим задачу $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$,
$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [\langle x,\ M(s)x\rangle + \langle u,\ N(s)u\rangle]\,ds + \langle x(t_1),\ Tx(t_1)\rangle \to \min\limits_u$,
где $M(s) = M^{\mathrm{T}}(s) \geqslant 0,\ N(s) = N^{\mathrm{T}}(s) > 0,\ T = T^{\mathrm{T}} > 0.$

Введём функцию цены $V(t_0, x_0) = \inf_u J(u)$ и будем искать её в виде $V(t,x) = \langle x, P(t)x\rangle$, где $P(t) = P^{\mathrm{T}}(t) > 0$.

Функция цены удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \min\limits_u \left\{ \left\langle \frac{\partial V}{\partial x},\ Ax + Bu \right\rangle + \langle x,\ Mx\rangle + \langle u,\ Nu\rangle \right\} = 0, \\ V(t_1,\ x) = \langle x,\ Tx\rangle. \end{cases}$$

Непрерывная линейно-квадратичная задача

Решив уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, получим

$$u^*(t) = -N^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x(t),$$

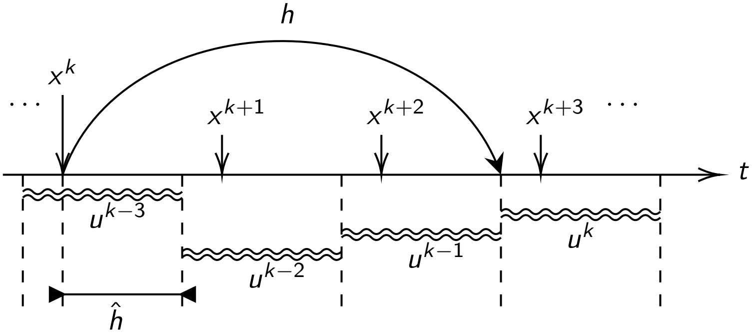
где $P(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати:

$$\begin{cases} \dot{P} + PA + A^{\mathrm{T}}P - PBN^{-1}B^{\mathrm{T}}P + M = 0, \\ P(t_1) = T, \end{cases}$$

а $x(t)$ — текущее состояние объекта, которое можно вычислить таким образом:

$$x(t) = \begin{cases} X(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,s)B(s)u^*(s)\,ds, & t \in [t_0, t_0 + h], \\ X(t, t-h)x(t-h) + \int\limits_{t-h}^{t} X(t,s)B(s)u^*(s)\,ds, & t \in (t_0 + h, t_1]. \end{cases}$$

Переход к дискретной системе

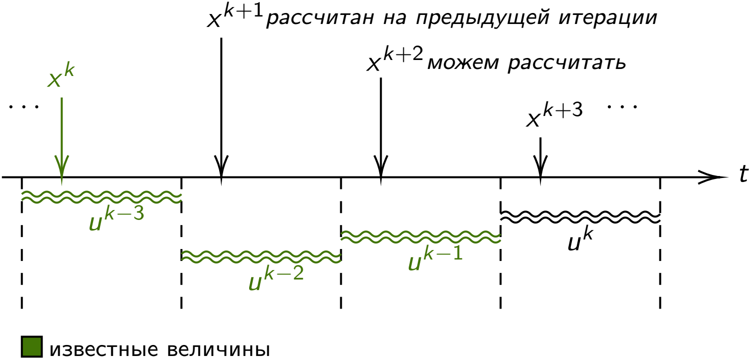


$$\boxed{x^{k+1} = \Phi^k x^k + \Gamma_1^k u^{k-m} + \Gamma_2^k u^{k-m-1}}$$

$$\Phi^k = X(t^{k+1}, t^k), \quad \Gamma_1^k = \int_{t^k+\hat{h}}^{t^{k+1}} X(t^{k+1}, s) B(s)\, ds,$$

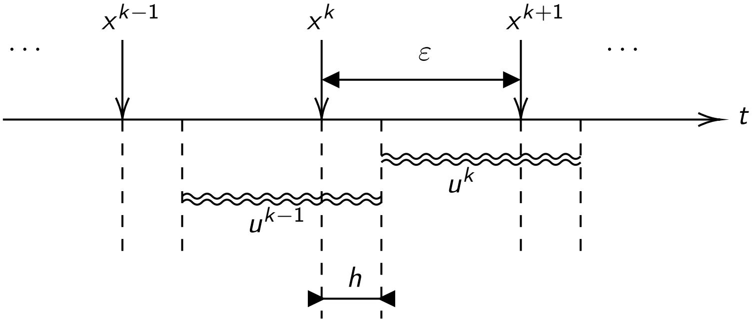
$$\Gamma_2^k = \int_{t^k}^{t^k+\hat{h}} X(t^k + \hat{h}, s) B(s)\, ds.$$

Упрощение системы



$$x^{k+m} = \Phi^{k+m-1}x^{k+m-1} + \Gamma_1^{k+m-1}u^{k-1} + \Gamma_2^{k+m-1}u^{k-2}.$$

Итоговая дискретная система



$$x^{k+1} = \Phi^k x^k + \Gamma_1^k u^k + \Gamma_2^k u^{k-1}, \quad 0 \leqslant h < \varepsilon.$$

$$J(u) = \sum_{k=1}^{N} \langle x^k,\, M^k x^k \rangle + \sum_{k=1}^{N} \langle u^k,\, N^k u^k \rangle + \langle x^{N+1},\, T x^{N+1} \rangle \longrightarrow \min_u .$$

Решение дискретной задачи

Приводим к системе без запаздывания по управлению:

$$z^k = \begin{pmatrix} x^k \\ u^{k-1} \end{pmatrix} \implies z^{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi^k & \Gamma_2^k \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{\Phi}^k} z^k + \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_1^k \\ I \end{pmatrix}}_{\tilde{\Gamma}^k} u^k.$$

Тогда функция цены $V^k(z)$ удовлетворяет дискретному уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$V^k(z) = \langle z,\, \tilde{M} z \rangle + \min_u \left\{ \langle u,\, Nu \rangle + V^{k+1}(\tilde{\Phi} z + \tilde{\Gamma} u) \right\}.$$

Будем искать функцию цены в виде $V^k(z) = \langle z,\, P^k z \rangle$, где $P^k = (P^k)^{\mathrm{T}} > 0$ и получим управление.

Решение дискретной задачи

Оптимальная стратегия:

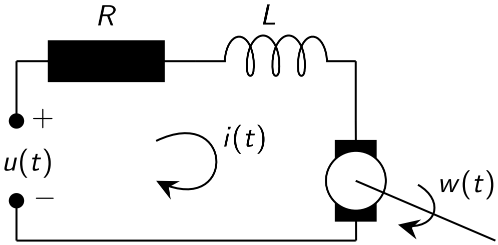
$$u^{k*} = -(N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^{\mathrm{T}} P^k \tilde{\Gamma}^k)^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^{\mathrm{T}} P^k \tilde{\Phi}^k z^k,$$

где P^k удовлетворяет реккурентным соотношениям:

$$\begin{aligned} P^{k-1} = \tilde{M}^k + (\tilde{\Phi}^k)^{\mathrm{T}} P^k \tilde{\Phi}^k - \\ - (\tilde{\Phi}^k)^{\mathrm{T}} P^k \tilde{\Gamma}^k [N + (\tilde{\Gamma}^k)^{\mathrm{T}} P^k \tilde{\Gamma}^k]^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^{\mathrm{T}} P^k \tilde{\Phi}^k, \end{aligned}$$

$$P^{N+1} = \tilde{T}.$$

Модель электродвигателя постоянного тока [4]:

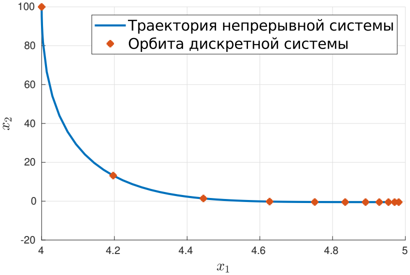


$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{R}{L}i - \dfrac{K_b}{L}\omega + \dfrac{1}{L}u(t), \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{K_T}{J}i - \dfrac{B}{J}\omega. \end{cases} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -0{,}02 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Пример

Приведем модель к дискретному виду:

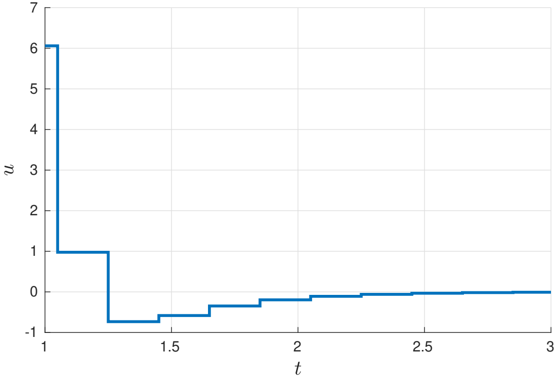
$$\Phi = e^{A\varepsilon}, \quad \Gamma_1 = \int_h^{\varepsilon} e^{As}\, ds \cdot B, \quad \Gamma_2 = \int_0^{h} e^{As}\, ds \cdot B.$$



Траектория системы при передаче ей постоянного управления $u(t) \equiv 1$.

Параметры дискретизации $\varepsilon = 0{,}2,\ h = 0{,}05$.

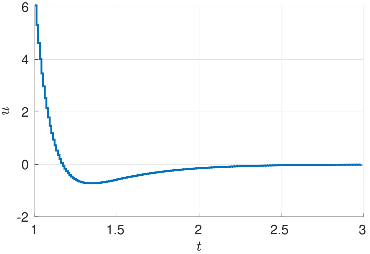
Пример



Построенное управление на интервале [1, 3] при параметрах

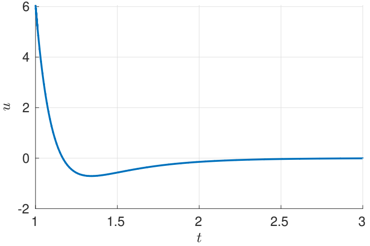
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad N = (1), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Сравним с непрерывным решением



Управление, построенное нами.

Параметры $\varepsilon = 0{,}01$, $h = 0{,}2$.
Значение функционала $J = 4971{,}0$.



Управление непрерывной системой без запаздывания.

Значение функционала $J = 4970{,}8$.

Планы дальнейшей работы

- Исследовать задачу минимизации других функционалов.
- Исследовать систему с неопределенностью.

Литература

1. Беллман Р. *Динамическое программирование.* М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 400с.
2. Егоров А. И. *Уравнения Риккати.* М.: Физматлит, 2001, 320с.
3. Johan Nilsson. *Real-Time Control Systems with Delays.* Lund Institute of Technology, 1998.
4. Ruba M. K. Al-Mulla Hummadi *Simulation Of Optimal Speed Control For a Dc Motor Using Linear Quadratic Regulator (LQR).* Juornal of Engineering, Number 3, Volume 18 march 2012, Baghdad.