



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Егоров Кирилл Юлианович

О задаче целевого управления по результатам наблюдений, поступающих с запаздыванием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2020

Содержание

1	Введение	3
2	Общая постановка задачи	4
3	Задача с непрерывной передачей наблюдений	6
3.1	Формализация задачи	6
3.2	Решение задачи	7
3.3	Численный синтез управления	9
3.4	Пример работы программы	10
4	Задача с интервалом между наблюдениями	15
4.1	Формализация задачи	15
4.2	Решение задачи	16
4.3	Численный синтез управления	18
4.4	Пример работы программы	19
5	Заключение	23

1 Введение

Работа посвящена задаче построения линейно-квадратичного регулятора динамической системы в форме стратегии с запаздывающей обратной связью.

Данная задача прежде всего возникает при передаче сигнала на большие расстояния, либо при помощи компьютерных и прочих сетей. В таких случаях информация о состоянии фазовых переменных поступает с некоторой задержкой. В работе допускается, что эта задержка детерминированна и фазовые координаты передаются без помех.

Способом решения поставленной задачи предлагается метод динамического программирования, разработанный Р. Беллманом [1]. Данный метод предполагает синтезировать стратегию как минимизатор в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана.

В работе представлен алгоритм построения оптимального управления в форме стратегии в случае непрерывной передачи данных, а также редукция к дискретной системе и соответствующий алгоритм в случае фиксированного интервала времени между отправками данных. Представлены примеры работы программы для модели электродвигателя постоянного тока, и проведено сравнение с классическим решением для задачи без запаздывающей обратной связи.

2 Общая постановка задачи

Рассмотрим управляемый объект, положение которого задаётся динамической системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, v) \quad (1)$$

на промежутке времени $t_0 \leq t \leq t_1$ с заданным начальным состоянием

$$x(t_0) = x^0.$$

Информация о состоянии объекта передаётся центру управления с некоторой известной задержкой h_{tc} , а само управление передается объекту с другой известной задержкой h_{fc} . То есть необходимо синтезировать оптимальную стратегию в форме

$$v(t) = v(t, x(t - h_{tc})),$$

на промежутке $t_0 - h_{fc} \leq t \leq t_1 - h_{fc}$. На момент времени t центру известно управление, переданное объекту за все предыдущее время $\tau : t_0 - h_{fc} \leq \tau < t$. При этом система (1) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), v(t - h_{fc}, x(t - h_{tc} - h_{fc}))).$$

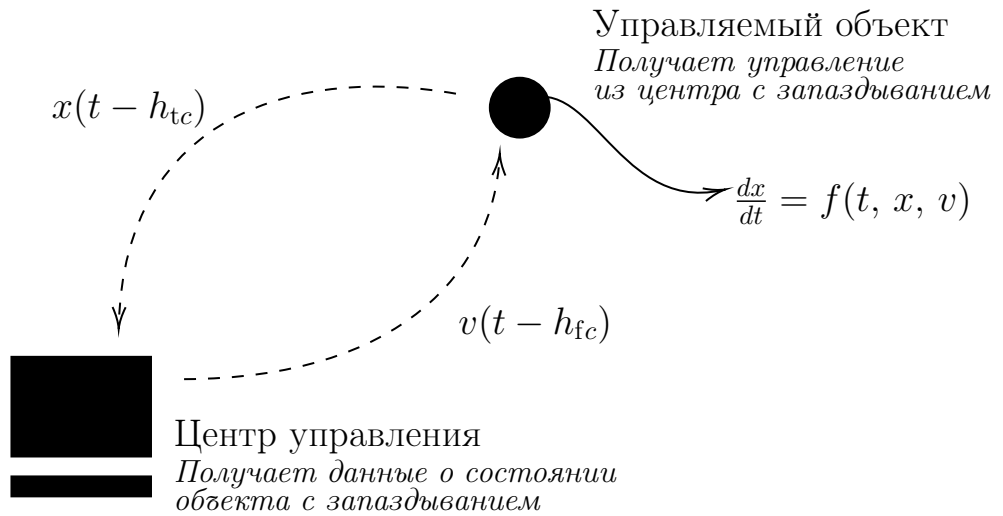


Рис. 1: Иллюстрация поставленной задачи.

Обозначим за h общую величину задержки $h = h_{tc} + h_{fc}$, а за u такое управление, что $u(t) = v(t - h_{fc})$ для всех $t \in [t_0, t_1]$. Тогда мы можем сформулировать общую постановку задачи следующим образом: необходимо найти оптимальное управление u в форме стратегии $u = u(t, x(t - h))$ для следующей динамической системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x^0.$$

Для системы (2) мы поставим задачу минимизации интегрально-квадратичного функционала. Такая постановка предполагает различные формализации в случаях, если данные передаются непрерывно или дискретно через некоторые интервалы времени. В следующих разделах мы отдельно рассмотрим каждую из постановок. В обоих случаях будем предполагать, что система линейна, то есть $f(t, x, u) = A(t)x + B(t)u$.

3 Задача с непрерывной передачей наблюдений

3.1 Формализация задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему с непрерывными ограниченными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3)$$

с заданным начальным условием

$$x(t_0) = x^0. \quad (4)$$

Для задачи Коши (3)–(4) поставим задачу поиска измеримого управления, минимизирующего следующий интегрально-квадратичный функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [\langle x, M(s)x \rangle + \langle u, N(s)u \rangle] ds + \langle x(t_1), Tx(t_1) \rangle \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (5)$$

где $M(s) = M^T(s) \geq 0$, $N(s) = N^T(s) > 0$, $T > 0$, а $U = U[t_0, t_1]$ — множество измеримых функций на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$.

Допустимый класс управления выбран таким образом, чтобы выполнялись достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (3)–(4) на промежутке $t_0 \leq t \leq t_1$ [4].

Замечание 1. Решением задачи Коши (3)–(4) мы называем *решение Каратеодори*, то есть измеримую функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнениям (3), (4), а также интегральному уравнению

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)] d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

3.2 Решение задачи

Обозначим за $\hat{x}(t, x^0, t_0)$ решение системы (3) с заданным начальным условием $x(t_0) = x^0$ и введём в рассмотрение функцию цены

$$V(t, x) = \inf_{u \in U[t, t_1]} \left\{ \int_t^{t_1} [\langle \hat{x}(s, t, x), M(s)\hat{x}(s, t, x) \rangle + \langle u(s), N(s)u(s) \rangle] ds + \right. \\ \left. + \langle \hat{x}(t_1, t, x), T\hat{x}(t_1, t, x) \rangle \right\}.$$

При этом $V(t_0, x^0) = \inf_{u \in U} J(u)$. Тогда согласно [3] такая функция цены удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ \underbrace{\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, Ax + Bu \right\rangle}_{\Psi} + \langle x, Mx \rangle + \langle u, Nu \rangle \right\} = 0 \quad (6)$$

с краевым начальным условием

$$V(t_1, x) = \langle x, Tx \rangle. \quad (7)$$

К тому же выполняется следующая теорема.

Теорема 1 (О верификации). *Пусть существует гладкая функция $W(t, x)$, удовлетворяющая уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \min_u \Psi \left(\frac{\partial W}{\partial x}, x, u \right) = 0$$

с краевым начальным условием $W(t_1, x) = \langle x, Tx \rangle$, причём минимум достигается на элементе u^ . Тогда*

$$V(t_0, x) = W(t_0, x).$$

Как следствие получаем, что измеримое управление $u^* = \arg \min_u \Psi$, если такое существует, будет оптимальным для рассматриваемой задачи.

Так как получившаяся функция Ψ строго выпукла по переменной u , то минимум будет достигнут в единственной точке. Запишем необходимое условие экстремума:

$$\text{grad}_u \Psi \left(\frac{\partial V}{\partial x}, x, u^* \right) = 0, \\ B^T \frac{\partial V}{\partial x} + 2Nu^* = 0.$$

Получается, что оптимальное управление может быть задано как

$$u^* = -\frac{1}{2}N^{-1}B^T\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (8)$$

Вернёмся к уравнению (6), подставив в него получившийся результат:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, Ax \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, BN^{-1}B^T\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle + \langle x, Mx \rangle = 0.$$

Будем искать функцию цены как квадратичную форму $V(t, x) = \langle x, P(t)x \rangle$, где $P(t) = P^T(t) > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\langle x, \frac{dP}{dt}x \right\rangle + 2\langle Px, Ax \rangle - \langle Px, BN^{-1}B^TPx \rangle + \langle x, Mx \rangle &= 0, \\ \left\langle x, \frac{dP}{dt}x \right\rangle + \langle x, PAx \rangle + \langle A^TPx, x \rangle - \langle Px, BN^{-1}B^TPx \rangle + \langle x, Mx \rangle &= 0, \\ \left\langle x, \frac{dP}{dt}x \right\rangle + \langle x, PAx \rangle + \langle x, A^TPx \rangle - \langle x, PBN^{-1}B^TPx \rangle + \langle x, Mx \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Так как в правой части скалярных произведений стоят симметричные матрицы, мы можем записать следующее матричное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять матрица P :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + PA + A^TP - PBN^{-1}B^TP + M = 0, \\ P(t_1) = T. \end{cases} \quad (9)$$

Уравнение (9) называют *уравнением Риккати*. Подробно о свойствах решений уравнения Риккати можно прочитать в работе [2]. Нам достаточно того, что для симметричных матриц решение данного уравнения существует и единственно в некоторой окрестности каждой точки t рассматриваемого промежутка $t_0 \leq t \leq t_1$.

Теперь вспомним, что информация о состоянии системы в текущий момент времени недоступна наблюдению. Воспользуемся формулой Коши:

$$x(t) = X(t, t-h)\xi + \int_{t-h}^t X(t, s)B(s)u(s)ds,$$

где ξ — состояние системы в момент времени $t-h$, а $X(t, s)$ — матрица Коши, определяющаяся следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}X(t, s) = A(t)X(t, s), \\ X(s, s) = I. \end{cases}$$

Таким образом, мы можем записать оптимальную стратегию

$$u^*[t] = -N^{-1}(t)B^T(t)P(t)x[t], \quad (10)$$

где матрица $P(t)$ является решением системы (9), а

$$x[t] = \begin{cases} x_0, & \text{при } t = t_0 \\ X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)B(s)u^*[s] ds, & \text{при } t_0 < t < t_0 + h, \\ X(t, t-h)x[t-h] + \int_{t-h}^t X(t, s)B(s)u^*[s] ds, & \text{при } t_0 + h < t \leq t_1. \end{cases}$$

Отметим также, что с точки зрения поставленной задачи интегрирование управления до момента t нам доступно, так как центр может хранить информацию о посланном ранее управлении.

Таким образом получили, что если отказаться от знания состояния в текущий момент времени, то для построения регулятора нам необходимо использовать как состояние в предыдущий момент времени $x(t-h)$, так и всё посланное управление $u(\tau)$ на интервале $t-h \leq \tau < t$.

3.3 Численный синтез управления

Приведем алгоритм для построения управления. Мы будем строить кусочно-постоянное управление на сетке с мелким шагом, как минимум меньшим, чем величина запаздывания. Такой способ не идеален: основная ошибка будет накапливаться не только за счет интегрирования, а в первую очередь из-за выбора класса управления, никак не учтенного в теории. С другой стороны при стремлении шага разбиения к нулю численное решение, построенное по предложенному алгоритму, будет приближено к теоретическому результату.

1. Введём на отрезке времени $[t_0, t_1]$ равномерное разбиение с шагом ε :

$$\{t^k\}_{k=1}^N, \text{ где } t_0 = t^1 < t^2 < \dots < t^N \leq t_1, \quad t^{k+1} - t^k = \varepsilon, \quad t_1 - t^N < \varepsilon.$$

2. Численно решим уравнение (9) и запомним получившиеся значения

$$P^k = P(t^k), \quad \text{где } k = \overline{1, N}.$$

3. На каждом участке $[t^k, t^{k+1}]$ будем численно строить постоянное управление u^k по формуле (10) и запоминать его. Здесь мы будем использовать посчитанную ранее P^k , а величину запаздывания наблюдения увеличим до $\tilde{h} = \lceil \frac{h}{\varepsilon} \rceil \varepsilon$.
4. Решим систему (3) для построенного управления u^k на отрезке $[t^k, t^{k+1}]$ и запомним финальное состояние $x(t^{k+1})$.

3.4 Пример работы программы

Рассмотрим в качестве примера работы программы модель управления скоростью электродвигателя постоянного тока. Данная модель была предложена и исследована на управляемость в [6]. Сравним построенный выше алгоритм с классическим алгоритмом построения линейно-квадратичного регулятора для динамической системы без запаздывания.

Итак, модель представляет собой систему:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}i(t) = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{K_b}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t), \\ \frac{d}{dt}\omega(t) = -\frac{K_T}{J}i(t) - \frac{B}{J}\omega(t). \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $i, [\text{A}]$ — сила тока на соответствующем участке цепи; $\omega, \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$ — угловая скорость вращения; $u, [\text{В}]$ — управляемое нами напряжение на концах цепи.

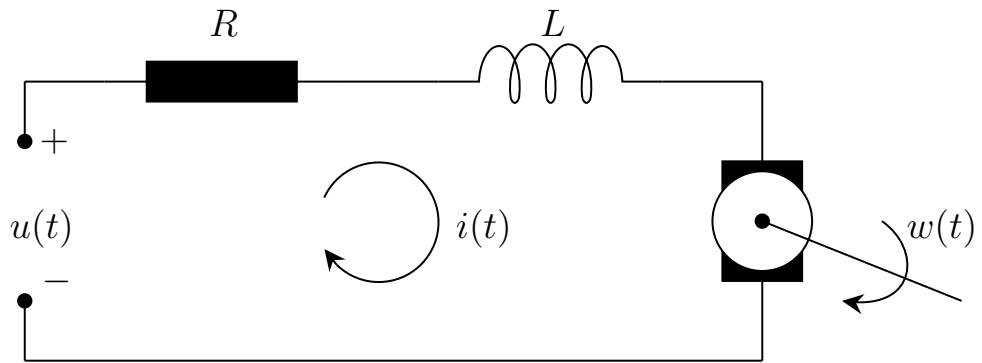


Рис. 2: Схема электрической цепи в модели (11).

Ниже приведем таблицу с описанием констант в системе (11) и их характерными значениями для электродвигателя постоянного тока:

Обозначение	Физ. величина	Хар. значение
J	Момент инерции	$0,01 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{рад}}$
B	Коэффициент вязкого трения	$0,1 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$
K_T	Постоянная кручения	$0,01 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}$
K_b	Постоянная ЭДС	$0,01 \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$
R	Сопротивление резистора	1 Ом
L	Индуктивность катушки	0,5 Гн

Таким образом, мы приходим к удобному нам виду уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -0,02 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (12)$$

Для него мы поставим задачу минимизации на отрезке $1 \leq t \leq 3$ функционала (5) с матрицами:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad N = (1), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Начальными условиями будут:

$$x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

На рисунках Рис. 3 и Рис. 4 можно посмотреть оптимальное управление и поведение системы (12) для задачи без запаздывания по наблюдению. С этими графиками мы будем сравнивать управления, построенные по нашему алгоритму. Значение функционала при такой постановке задачи равно $J = 4970,8$.

Теперь построим управление по нашему алгоритму. Будем считать, что запаздывание по наблюдению $h = 0,5$. Возьмем разбиение с мелким шагом

$\varepsilon = 10^{-2}$. Как видно из рисунков Рис. 5 и Рис. 6 построенное управление практически не отличается от случая без запаздывания, что соответствует приведённой теории. Значение функционала $J = 4971,0$.

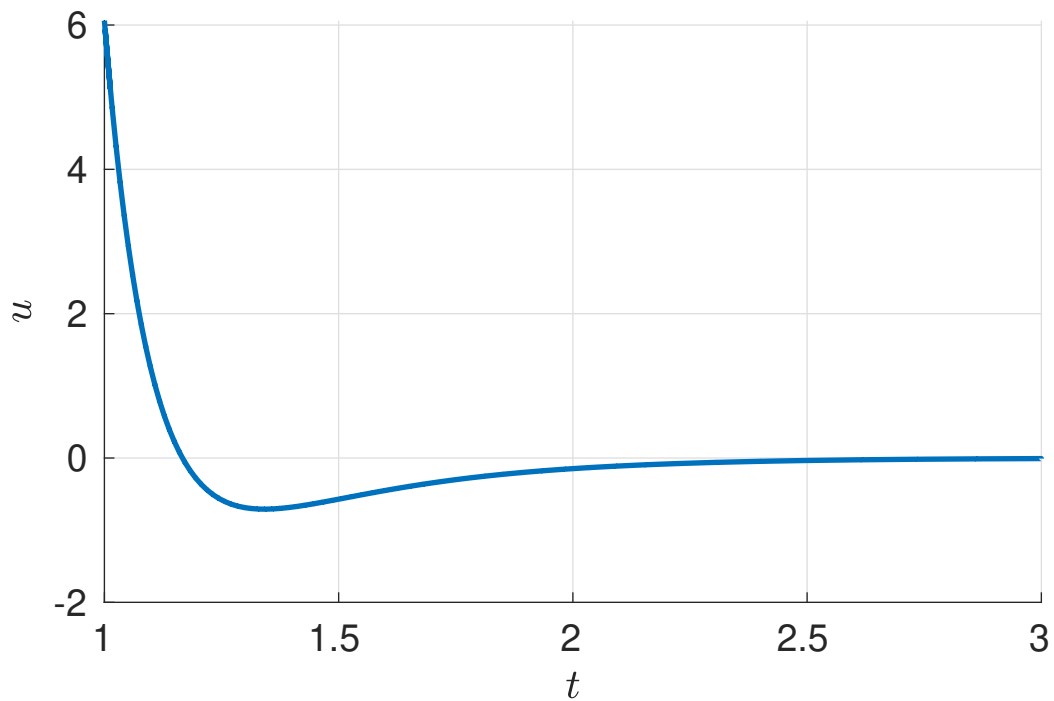


Рис. 3: Оптимальное управление без запаздывания наблюдения для системы (12). Значение функционала $J = 4970,8$.

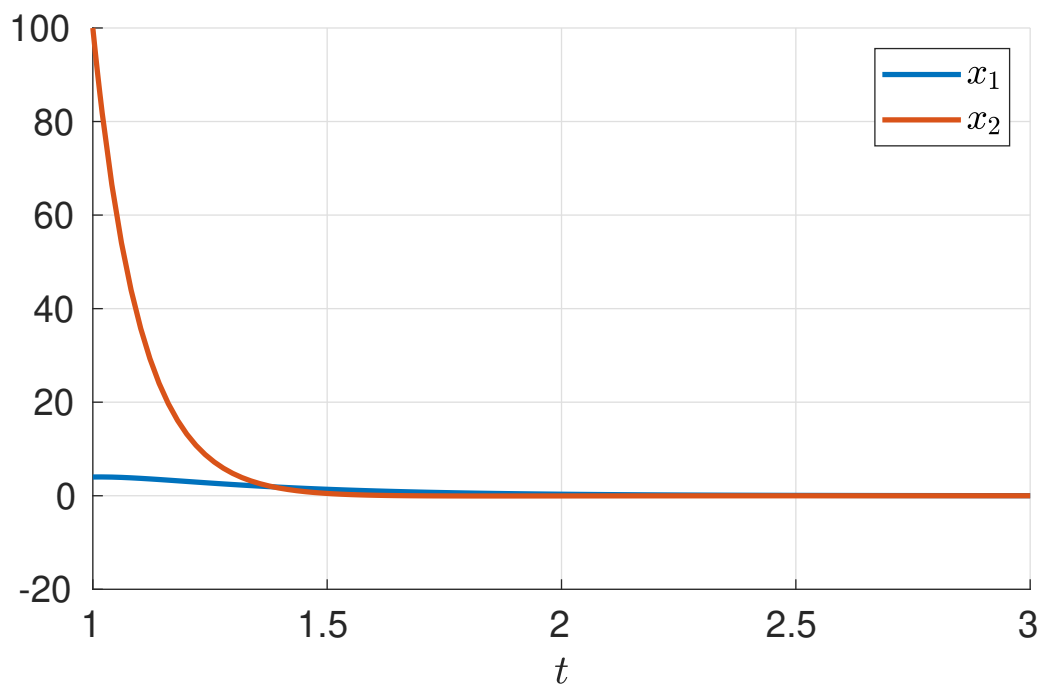


Рис. 4: Поведение системы (12) при использовании оптимальной стратегии без запаздывания наблюдения.

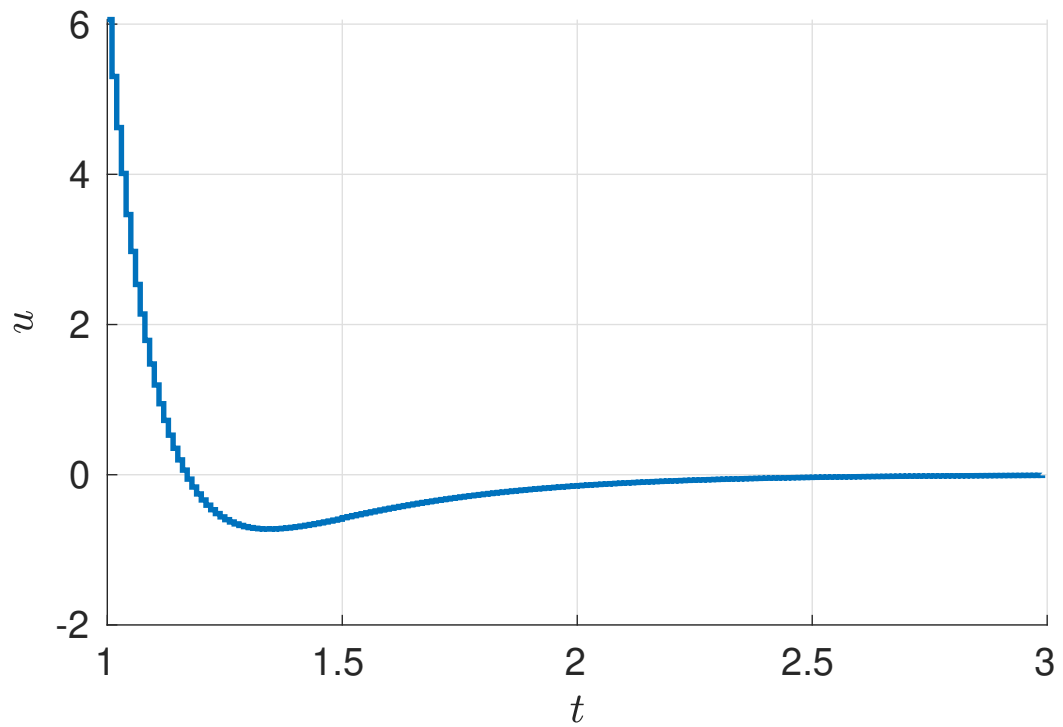


Рис. 5: Оптимальное управление с запаздыванием наблюдения $h = 0,5$ для системы (12) с разбиением $\varepsilon = 0,01$. Значение функционала $J = 4971,0$.

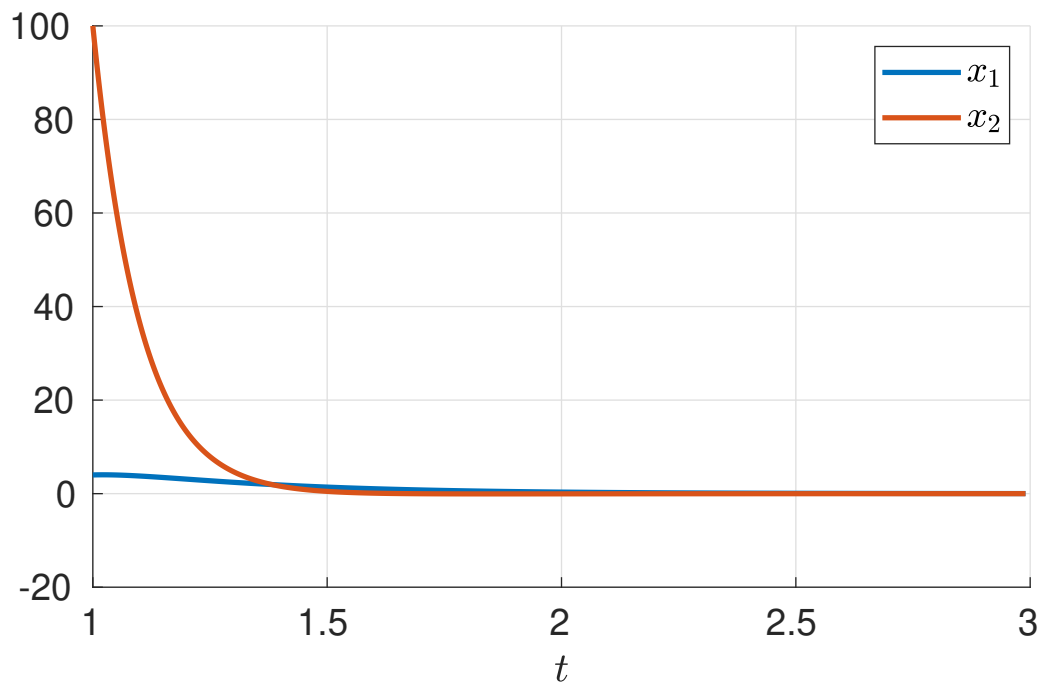


Рис. 6: Поведение системы (12) при использовании оптимальной стратегии с запаздыванием наблюдения (Рис. 5).

4 Задача с интервалом между наблюдениями

4.1 Формализация задачи

Реальные системы не могут передавать данные о своём положении непрерывно. В данном разделе мы будем считать, что данные о состоянии передаются с некоторым известным детерминированным интервалом времени ε .

В таком случае кажется естественным провести редукцию системы (3) к дискретному виду. Обозначим за $\{t^k : t^{k+1} > t^k, t^1 = t_0\}_{k=1}^N$ моменты времени, в которые поступают наблюдения, а за $x^k = x(t^k)$ — соответствующие состояния системы (3). Будем строить кусочно-постоянное управление вида

$$u(t) \equiv u^k, \quad t^k + h \leq t \leq t^{k+1} + h.$$

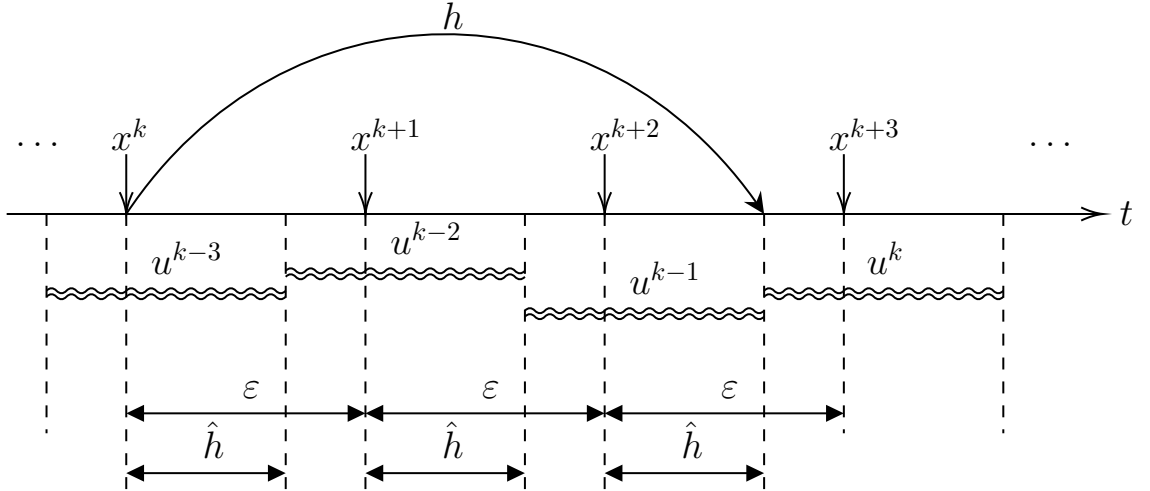


Рис. 7: Иллюстрация перехода к дискретной системе. Здесь показано в какие моменты времени наблюдается состояние системы и на каких промежутках действуют постоянные управления.

Применим на промежутке $t^k \leq t \leq t^{k+1}$ формулу Коши:

$$x^{k+1} = X(t^{k+1}, t^k)x^k + \int_{t^k}^{t^k + \hat{h}} X(t^k + \hat{h}, s)B(s)ds \cdot u^{k-m-1} + \\ + \int_{t^k + \hat{h}}^{t^{k+1}} X(t^{k+1}, s)B(s)ds \cdot u^{k-m},$$

где $m = \lfloor \frac{h}{\varepsilon} \rfloor$, $\hat{h} = h - m\varepsilon$. Таким образом, мы получили дискретную систему с запаздыванием по управлению

$$x^{k+1} = \Phi^k x_k + \Gamma_1^k u^{k-m} + \Gamma_2^k u^{k-m-1}. \quad (15)$$

Упростим систему (15). На момент времени t^k помимо состояния системы x^k нам известны все переданные на тот момент управления u^0, \dots, u^{k-1} . Это значит, что мы можем рассчитать x^{k+m} , последовательно m раз применив формулу (15) к состоянию x^k . Таким образом, не ограничивая общности, можем считать, что величина запаздывания h строго меньше интервала между наблюдениями ε , и система преобразуется к виду

$$x^{k+1} = \Phi^k x^k + \Gamma_1^k u^k + \Gamma_2^k u^{k-1}. \quad (16)$$

Для системы (16) поставим задачу минимизации квадратичного функционала

$$J(u) = \sum_{k=1}^N [\langle x^k, M^k x^k \rangle + \langle u^k, N^k u^k \rangle] + \langle x^{N+1}, T x^{N+1} \rangle \rightarrow \min_u, \quad (17)$$

где $M^k = (M^k)^T \geq 0$, $N^k = (N^k)^T > 0$, $k = \overline{1, N}$ и $T = T^T > 0$.

4.2 Решение задачи

Прежде всего сделаем замену фазовой переменной, чтобы избавиться от запаздывания по управлению в системе (16):

$$z^k = \begin{pmatrix} x^k \\ u^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда условие задачи (16)–(17) можно переписать в следующем виде:

$$z^{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi^k & \Gamma_2^k \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{\Phi}^k} z^k + \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_1^k \\ I \end{pmatrix}}_{\tilde{\Gamma}^k} u^k, \quad (18)$$

$$J(u) = \sum_{k=1}^N \left\langle z^k, \underbrace{\begin{pmatrix} M^k & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{M}^k} z^k \right\rangle + \sum_{k=1}^N \langle u^k, N^k u^k \rangle + \left\langle z^{N+1}, \underbrace{\begin{pmatrix} T & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{T}} z^{N+1} \right\rangle. \quad (19)$$

Утверждение 1. В формуле (19) матрицы $\tilde{M}^k \geq 0$, $\tilde{T} > 0$.

Доказательство. Докажем для матрицы \tilde{T} , для остальных матриц аналогично. По определению

$$\langle z, \tilde{T}z \rangle = \langle x, Tx \rangle + \langle u, Ou \rangle = \langle x, Tx \rangle > 0.$$

■

Будем действовать так же, как и в случае с непрерывной системой. Введём функцию цены

$$V^l(z) = \min_u \left\{ \sum_{k=l}^N \langle z^k, \tilde{M}^k z^k \rangle + \sum_{k=l}^N \langle u^k, N^k u^k \rangle + \langle z^{N+1}, \tilde{T} z^{N+1} \rangle \right\}, \quad z^l = z.$$

Причём $V^1(z^1) = \min_u J(u)$. Такая функция цены удовлетворяет дискретному уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое позволяет определить $V^k(z)$ рекурсивно

$$V^{k-1}(z) = \langle z, \tilde{M}^k z \rangle + \min_{u^k} \left\{ \langle u^k, N^k u^k \rangle + V^k(\tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^k) \right\}, \quad (20)$$

с краевым начальным условием

$$V^{N+1}(z) = \langle z, \tilde{T} z \rangle. \quad (21)$$

Предположим, что функция цены задаётся квадратичной формой $V^k(z) = \langle z, P^k z \rangle$, где $P^k = (P^k)^T > 0$ и покажем, что $V^{k-1}(z)$ будет иметь ту же форму. Из (20) получаем:

$$V^{k-1}(z) = \langle z, \tilde{M}^k z \rangle + \min_{u^k} \left\{ \underbrace{\langle u^k, N^k u^k \rangle + \langle \tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^k, P^k(\tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^k) \rangle}_{\Psi(z, u^k)} \right\}.$$

Воспользуемся необходимым условием минимума, приравняв производную $\Psi'_{u^k}(u^*, z)$ к нулю:

$$\begin{aligned} 2N^k u^{k*} + 2(\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k z + 2(\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k u^{k*} &= 0, \\ u^{k*} &= -[N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k]^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k z. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда функция цены

$$\begin{aligned}
V^{k-1}(z) &= \langle z, \tilde{M}^k z \rangle + \langle u^*, N^k u^* \rangle + \langle \tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^*, P^k(\tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^*) \rangle = \\
&= \langle z, [\tilde{M}^k + (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k - \\
&\quad - (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k (N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k)^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k] z \rangle = \\
&= \langle z, P^{k-1} z \rangle,
\end{aligned}$$

причем, очевидно, что $P^k = (P^k)^T > 0$.

Подведём итог: оптимальную стратегию можно найти используя формулу (22), где матрица P^k должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{cases} P^{k-1} = \tilde{M}^k + (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k - (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k (N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k)^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k, \\ P^{N+1} = \tilde{T}. \end{cases} \quad (23)$$

4.3 Численный синтез управления

Приведем алгоритм для построения управления:

1. Переведем систему к дискретному виду, посчитав соответствующие матрицы $\{\Phi^k\}_{k=1}^N$, $\{\Gamma_1^k\}_{k=1}^N$, $\{\Gamma_2^k\}_{k=1}^N$.
2. Запомним матрицы $\{P^k\}_{k=1}^N$, полученные из соотношений (23).
3. На каждом шаге работы алгоритма будем переводить $x^k \longrightarrow x^{k+m}$ так, чтобы величина запаздывания h стала меньше интервала между наблюдениями ε . Причём, это можно сделать “прогнав через систему” положение x^{k+m-1} , посчитанное на предыдущей итерации алгоритма, то есть применив формулу

$$x^{k+m} = \Phi^{k+m-1} x^{k+m-1} + \Gamma_1^{k+m-1} u^{k-1} + \Gamma_2^{k+m-1} u^{k-2},$$

тем самым исключив зависимость времени работы программы от величины задержки h .

4. Найдём управление u^k из выражения (22).

В отличие от алгоритма без запаздывания построенный нами алгоритм предполагает дополнительное хранение предыдущего состояния и предыдущего управления.

4.4 Пример работы программы

Для примера снова обратимся к модели электродвигателя постоянного тока, рассмотренной в разделе 3.4. Будем предполагать, что управление запаздывает на $h = 0,05$, а интервал между наблюдениями $\varepsilon = 0,2$.

Переведем систему (12) к дискретному виду. Матрицы посчитаны численными методами. Получим систему

$$x^{k+1} = \Phi x^k + \Gamma_1 u^k + \Gamma_2 u^{k-1}, \quad (24)$$

где

$$\Phi = e^{A\varepsilon} \approx \begin{pmatrix} 0,6705 & -0,0013 \\ -0,0669 & 0,1354 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \int_h^\varepsilon e^{As} ds \cdot B \approx \begin{pmatrix} 0,2345 \\ -0,0175 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \int_0^h e^{As} ds \cdot B \approx \begin{pmatrix} 0,0952 \\ -0,0021 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в том, что построенный перевод верен можно на Рис. 8.

Приведем пример работы программы для параметров задачи (13), (14), которые мы использовали в разделе 3.4. На Рис. 9 представлено соответствующее решение дискретной задачи. На Рис. 10, Рис. 11 представлено управление, действующее на управляемый объект и соответствующая траектория.

При уменьшении интервала между известными состояниями ε можно использовать построенный алгоритм для решения непрерывной задачи. Для сравнения с построенным ранее управлением Рис. 5 приведем на Рис. 12 пример работы программы для $h = 0,5$, $\varepsilon = 10^{-2}$. В отличие от непрерывного алгоритма, время подсчета текущего состояния объекта не зависит от величины запаздывания. Эта часть в обоих алгоритмах выполняется на каждой итерации работы программы. Значит, второй способ должен работать быстрее при большой величине запаздывания. Сравнение времени работы каждой из программ представлено на Рис. 13.

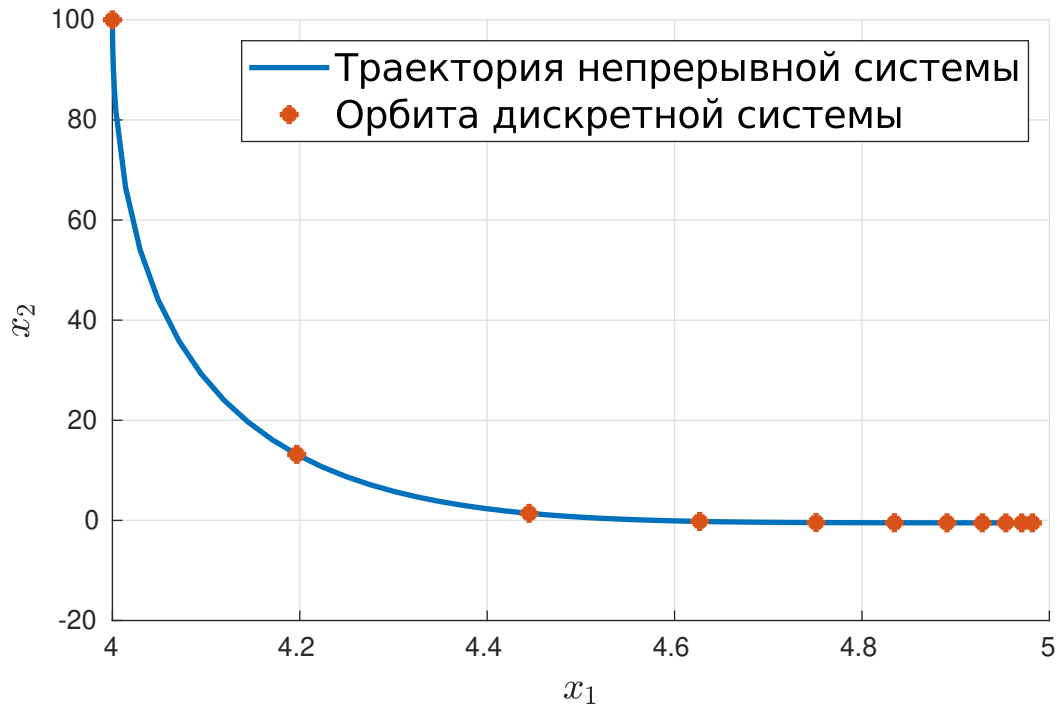


Рис. 8: Траектория непрерывной системы (12) и орбита соответствующей редуцированной дискретной системы (24), выпущенной из начальной точки $x_0 = [4, 100]^T$ с постоянным управлением $u \equiv 1$.

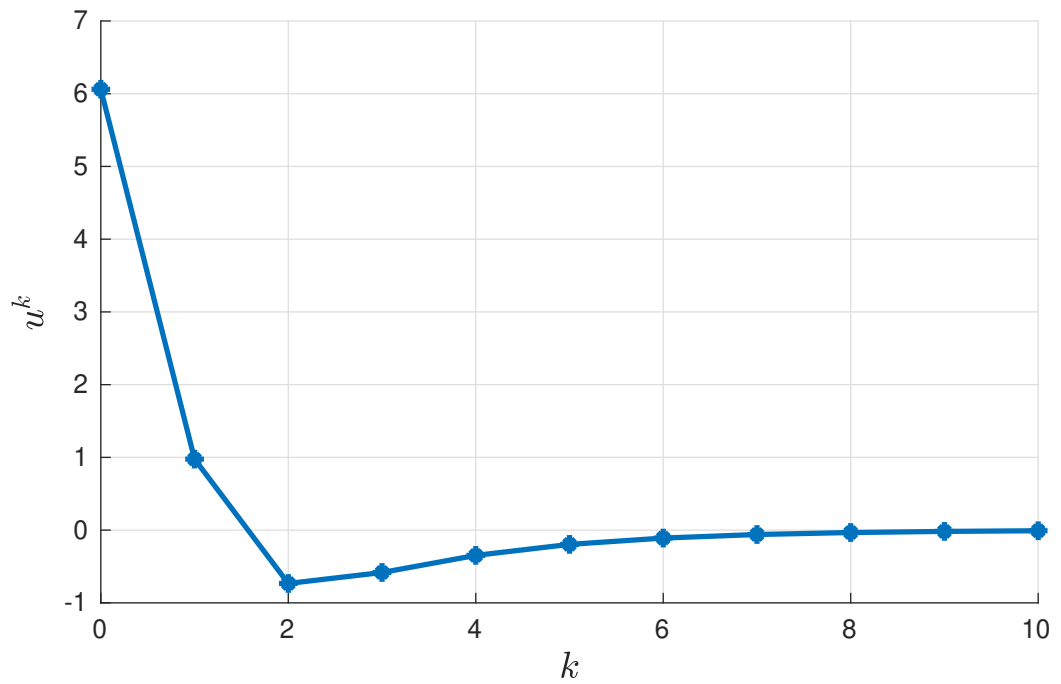


Рис. 9: Оптимальное управление дискретной системой (24).

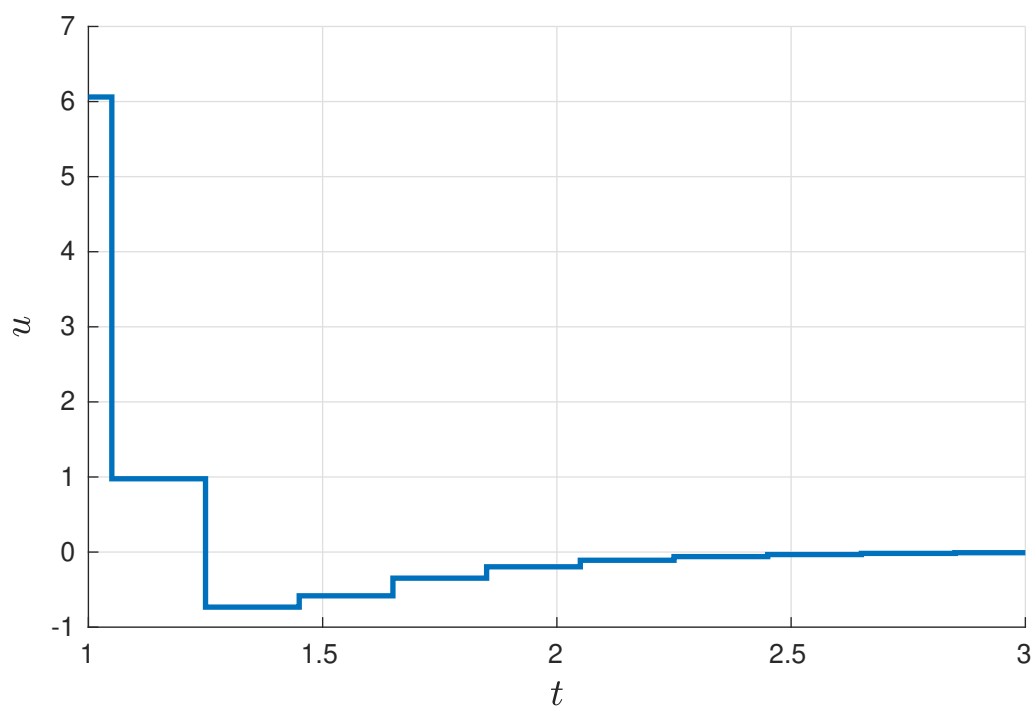


Рис. 10: Управление, действующее на объект, при использовании оптимальной стратегии Рис. 9.

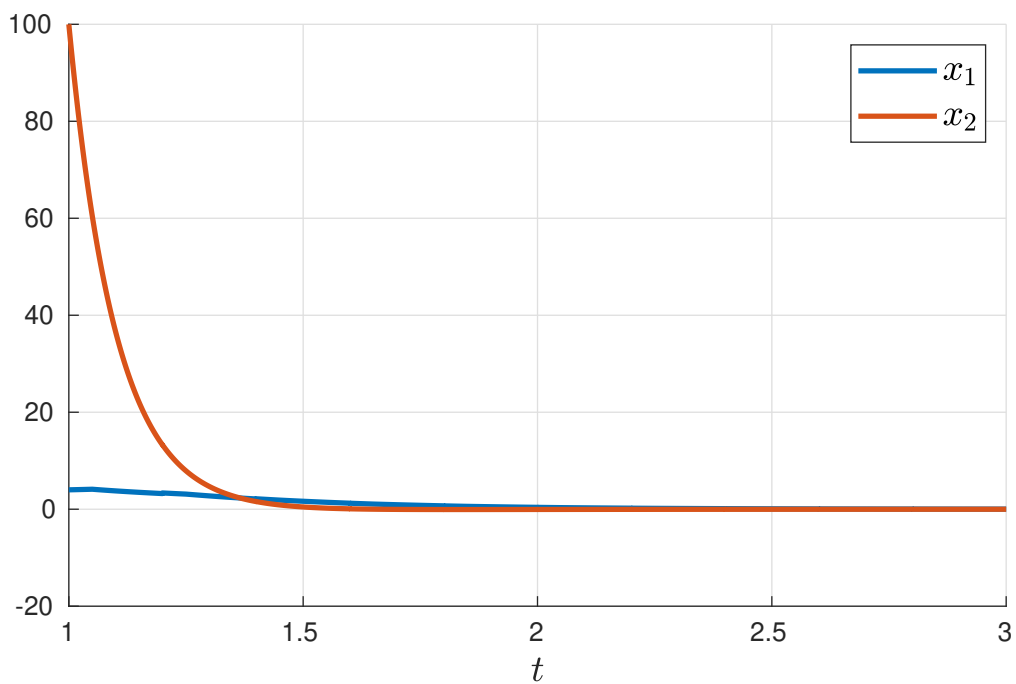


Рис. 11: Поведение системы (12) при передаче управления Рис. 10.

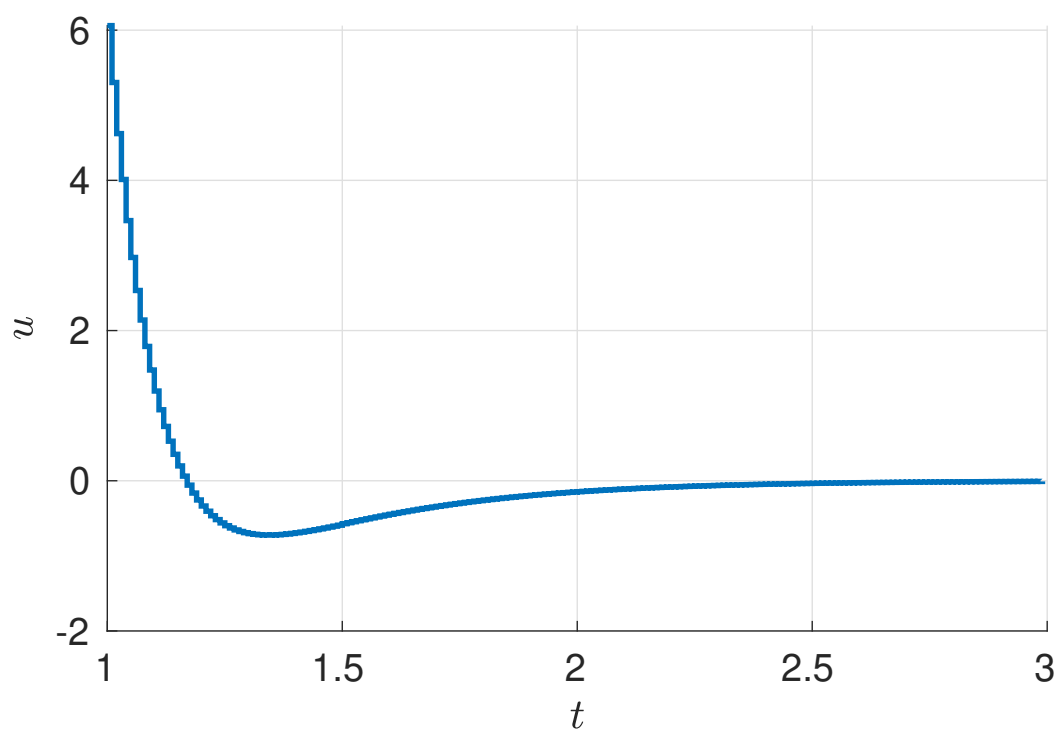


Рис. 12: Результат работы алгоритма для малого интервала ε .

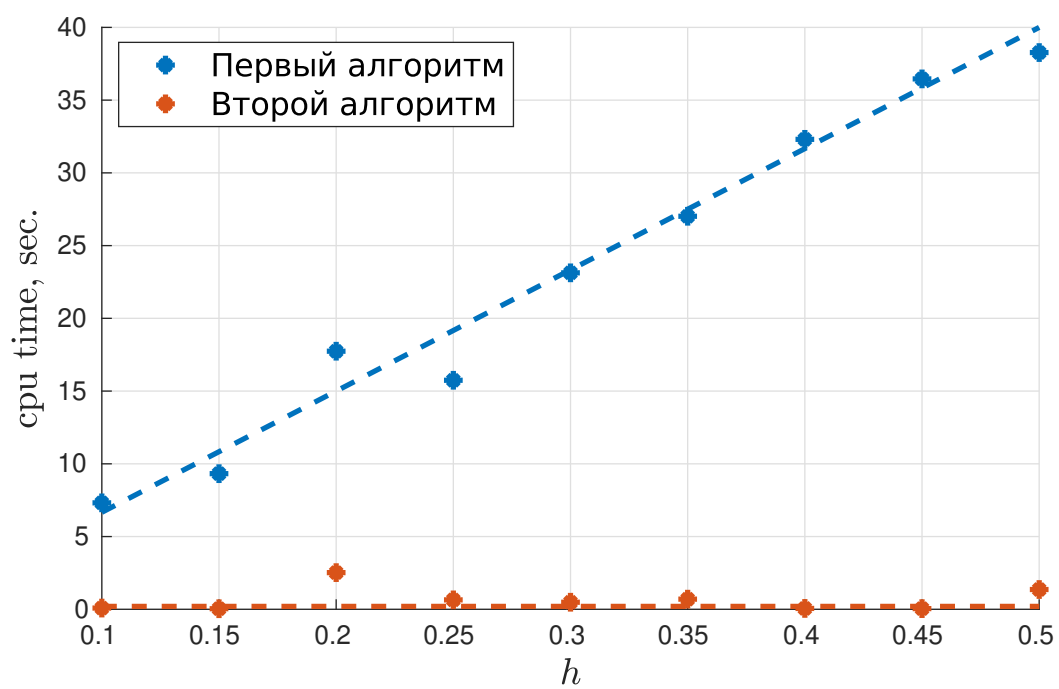


Рис. 13: Время работы алгоритмов в зависимости от величины запаздывания h .

5 Заключение

Таким образом, в работе было проведено следующее:

- а) Предложены алгоритмы для построения линейно-квадратичного регулятора для динамической системы с запаздывающей обратной связью при непрерывном и дискретном типах передачи наблюдений.
- б) Был продемонстрирован результат работы программы для модели электродвигателя построенного тока.
- в) Проведено сравнение предложенного алгоритма с классическим алгоритмом построения линейно-квадратичного регулятора для системы без запаздывания.
- г) Представлено сравнение времени работы построенного алгоритма для непрерывной передачи наблюдений и дискретной передачи наблюдений при малой величине интервала между наблюдениями в зависимости от величины задержки.

Список литературы

- [1] Беллман Р. *Динамическое программирование*. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 400с.
- [2] Егоров А. И. *Уравнения Риккати*. М.: Физматлит, 2001, 320с.
- [3] Красовский Н. Н. *Теория управления движением*. М.: Наука, 1968.
- [4] Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М.: Наука, Москва, 1985.
- [5] Johan Nilsson. *Real-Time Control Systems with Delays*. Lund Institute of Technology, 1998.
- [6] Ruba M. K. Al-Mulla Hummadi *Simulation Of Optimal Speed Control For a Dc Motor Using Linear Quadratic Regulator (LQR)*. Juornal of Engineering, Number 3, Volume 18 march 2012, Baghdad.