Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Егоров Кирилл Юлианович

О задаче целевого управления по результатам наблюдений, поступающих с запаздыванием

выпускная квалификационная работа

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2020

Содержание

1 Введение

Работа посвящена задаче построения линейно-квадратичного регулятора динамической системы в форме стратегии с запаздывающей обратной связью.

Данная задача прежде всего возникает при передаче сигнала на большие расстояния, либо при помощи компьютерных и прочих сетей. В таких случаях информация о состоянии фазовых переменных поступает с некоторой задержкой. В работе допускается, что эта задержка детерминированна и фазовые координаты передаются без помех.

Способом решения поставленной задачи предлагается метод динамического программирования, разработанный Р. Беллманом [1]. Данный метод предполагает синтезировать управление как минимизатор в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана.

В работе представлен алгоритм построения оптимальной стратегии, а также редукция к дискретной системе в случае интервалов между замерами фазовых переменных больших, чем величина запаздывания. Представлены примеры работы программы.

2 Постановка задачи

Рассмотрим управляемый объект, положение которого задаётся динамической системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\, x,\, v) \tag{1}$$

на промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ с заданным начальным состоянием

$$x(t_0) = x^0.$$

Информация о состоянии объекта передаётся центру управления с некоторой известной задержкой h_{tc}, а само управление передается объекту с другой известной задержкой h_{fc}. То есть необходимо синтезировать оптимальную стратегию в форме

$$v(t) = v(t,\, x(t - h_{\text{tc}})),$$

на промежутке $t_0 - h_{\text{fc}} \leqslant t \leqslant t_1 - h_{\text{fc}}$. На момент времени t центру известно управление, переданное объекту за все предыдущее время $\tau\ :\ t_0 - h_{\text{fc}} \leqslant \tau < t$. При этом система (1) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t,\, x(t),\, v(t - h_{\text{fc}},\, x(t - h_{\text{tc}} - h_{\text{fc}}))).$$

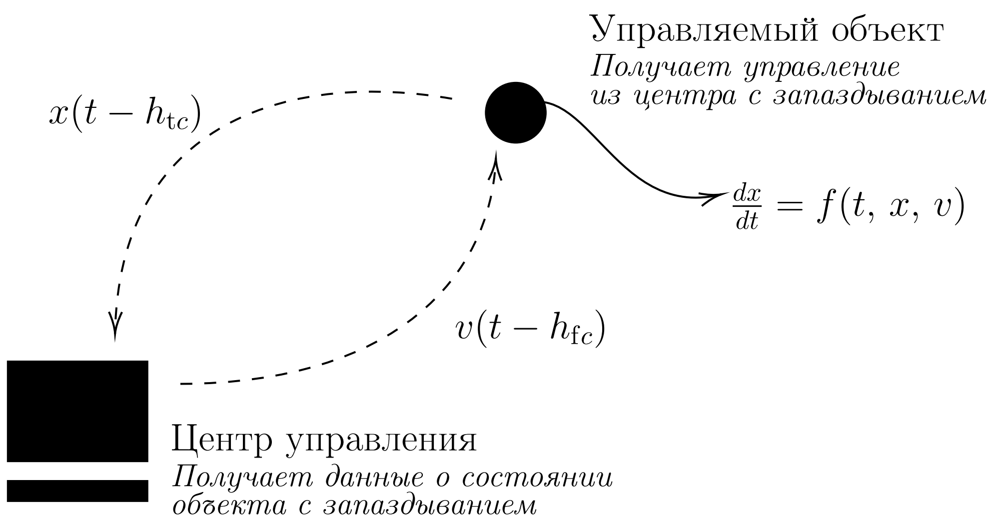

Рис. 1: Иллюстрация поставленной задачи.

Обозначим за h общую величину задержки $h = h_{\text{tc}} + h_{\text{fc}}$, а за u такое управление, что $u(t) = v(t - h_{\text{fc}})$ для всех $t \in [t_0,\, t_1]$. Тогда мы можем сформулировать общую постановку задачи следующим образом: необходимо найти оптимальное управление u в форме стратегии $u = u(t,\, x(t-h))$ для следующей динамической системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t,\, x(t),\, u(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{2}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x^0.$$

3 Задача с непрерывной передачей наблюдений

3.1 Формализация задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему с непрерывными ограниченными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{3}$$

с заданным начальным условием

$$x(t_0) = x^0. \tag{4}$$

Для задачи Коши (3)–(4) поставим задачу поиска измеримого управления, минимизируещего следующий интегрально-квадратичный функционал

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [\langle x,\, M(s)x\rangle + \langle u,\, N(s)u\rangle]\, ds + \langle x(t_1),\, Tx(t_1)\rangle \to \min_{u\in U}, \tag{5}$$

где $M(s) = M^{\mathrm{T}}(s) \geqslant 0$, $N(s) = N^{\mathrm{T}}(s) > 0$, $T > 0$, а $U = U[t_0,\, t_1]$ — множество измеримых функций на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Допустимый класс управления выбран таким образом, чтобы выполнялись достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (3)–(4) на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ [5].

Замечание 1. Решением задачи Коши (3)–(4) мы называем *решение Каратеодори*, то есть измеримую функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнениям (3), (4), а также интегральному уравнению

$$x(t) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)]\, d\tau, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

3.2 Решение задачи

Обозначим за $\hat{x}(t,\, x^0,\, t_0)$ решение системы (3) с заданным начальным условием $x(t_0) = x^0$ и введём в рассмотрение функцию цены

$$V(t,\, x) = \inf_{u \in U[t,\, t_1]} \left\{ \int\limits_t^{t_1} [\langle \hat{x}(s,\, t,\, x),\, M(s)\hat{x}(s,\, t,\, x)\rangle + \langle u(s),\, N(s)u(s)\rangle]\, ds + \right.$$
$$\left. + \langle \hat{x}(t_1,\, t,\, x),\, T\hat{x}(t_1,\, t,\, x)\rangle \right\}.$$

При этом $V(t_0,\, x^0) = \inf\limits_{u \in U} J(u)$. Тогда согласно [2] такая функция цены удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ \underbrace{\left\langle \frac{\partial V}{\partial x},\, Ax + Bu \right\rangle + \langle x,\, Mx\rangle + \langle u,\, Nu\rangle}_{\Psi} \right\} = 0 \tag{6}$$

с краевым начальным условием

$$V(t_1,\, x) = \langle x,\, Tx\rangle. \tag{7}$$

К тому же выполняется следующая теорема.

Теорема 3.1 (О верификации)**.** *Пусть существует гладкая функция $W(t,\, x)$, удовлетворяющая уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \min_u \Psi\left(\frac{\partial W}{\partial x},\, x,\, u\right) = 0$$

с краевым начальным условием $W(t_1,\, x) = \langle x,\, Tx\rangle$, причём минимум достигается на элементе u^*. Тогда

$$V(t_0,\, x) = W(t_0,\, x).$$

Как следствие получаем, что измеримое управление $u^* = \arg\min\limits_u \Psi$, если такое существует, будет оптимальным для рассматриваемой задачи.

Так как получившаяся функция Ψ строго выпукла по переменной u, то минимум будет достигнут в единственной точке. Запишем необходимое условие экстремума:

$$\mathrm{grad}_u \Psi\left(\frac{\partial V}{\partial x},\, x,\, u^*\right) = 0,$$
$$B^{\mathrm{T}}\frac{\partial V}{\partial x} + 2Nu^* = 0.$$

Получается, что оптимальное управление может быть задано как

$$u^* = -\frac{1}{2} N^{-1} B^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{8}$$

Вернёмся к уравнению (6), подставив в него получившийся результат:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x},\, Ax \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x},\, BN^{-1}B^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle + \langle x,\, Mx \rangle = 0.$$

Будем искать функцию цены как квадратичную форму $V(t,\, x) = \langle x,\, P(t)x \rangle$, где $P(t) = P^{\mathrm{T}}(t) > 0$. Тогда

$$\left\langle x,\, \frac{dP}{dt} x \right\rangle + 2\langle Px,\, Ax \rangle - \langle Px,\, BN^{-1}B^{\mathrm{T}}Px \rangle + \langle x,\, Mx \rangle = 0,$$

$$\left\langle x,\, \frac{dP}{dt} x \right\rangle + \langle x,\, PAx \rangle + \langle A^{\mathrm{T}}Px,\, x \rangle - \langle Px,\, BN^{-1}B^{\mathrm{T}}Px \rangle + \langle x,\, Mx \rangle = 0,$$

$$\left\langle x,\, \frac{dP}{dt} x \right\rangle + \langle x,\, PAx \rangle + \langle x,\, A^{\mathrm{T}}Px \rangle - \langle x,\, PBN^{-1}B^{\mathrm{T}}Px \rangle + \langle x,\, Mx \rangle = 0.$$

Так как в правой части скалярных произведений стоят симметричные матрицы, мы можем записать следующее матричное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять матрица P:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + PA + A^{\mathrm{T}}P - PBN^{-1}B^{\mathrm{T}}P + M = 0, \\ P(t_1) = T. \end{cases} \tag{9}$$

Уравнение (9) называют *уравнением Риккати*. Подробно о свойствах решений уравнения Риккати можно прочитать в работе [3]. Нам достаточно того, что для симметричных матриц решение данного уравнения существует и единственно в некоторой окрестности каждой точки t рассматриваемого промежутка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Теперь вспомним, что информация о состоянии системы в текущий момент времени недоступна наблюдению. Воспользуемся формулой Коши:

$$x(t) = X(t,\, t-h)\xi + \int\limits_{t-h}^{t} X(t,\, s)B(s)u(s)\, ds,$$

где ξ — состояние системы в момент времени $t-h$, а $X(t, s)$ — матрица Коши, определяющаяся следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(t,\, s) = A(t)X(t,\, s), \\ X(s,\, s) = I. \end{cases}$$

Таким образом, мы можем записать оптимальную стратегию

$$u^*[t] = -N^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)P(t)x[t], \tag{10}$$

где матрица $P(t)$ является решением системы (9), а

$$x[t] = \begin{cases} x_0, & \text{при } t = t_0 \\ X(t,\, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\, s)B(s)u^*[s]\, ds, & \text{при } t_0 < t < t_0 + h, \\ X(t,\, t-h)x[t-h] + \int\limits_{t-h}^{t} X(t,\, s)B(s)u^*[s]\, ds, & \text{при } t_0 + h < t \leqslant t_1. \end{cases}$$

Отметим также, что с точки зрения поставленной задачи интегрирование управления до момента t нам доступно, так как центр может хранить информацию о посланном ранее управлении.

Таким образом получили, что если отказаться от знания состояния в текущий момент времени, то для построения регулятора нам необходимо использовать как состояние в предыдущий момент времени $x(t-h)$, так и всё посланное управление $u(\tau)$ на интервале $t - h \leqslant \tau < t$.

3.3 Численный синтез управления

Приведем алгоритм для построения управления. Мы будем строить кусочно-постоянное управление на сетке с мелким шагом, как минимум меньшим, чем величина запаздывания. Такой способ не идеален: основная ошибка будет накапливаться не только за счет интегрирования, а в первую очередь из-за выбора класса управления, никак не учтенного в теории. С другой стороны при стремлении шага разбиения к нулю численное решение, построенное по предложенному алгоритму, будет приближено к теоретическому результату.

1. Введём на отрезке времени $[t_0,\, t_1]$ равномерное разбиение с шагом ε:

$$\{t^k\}_{k=1}^{N}, \text{ где } t_0 = t^1 < t^2 < \ldots < t^N \leqslant t_1, \quad t^{k+1} - t^k = \varepsilon, \quad t_1 - t^N < \varepsilon.$$

2. Численно решим уравнение (9) и запомним получившиеся значения

$$P^k = P(t^k), \quad \text{где } k = \overline{1, N}.$$

3. На каждом участке $[t^k,\, t^{k+1}]$ будем численно строить постоянное управление u^k по формуле (10) и запоминать его. Здесь мы будем использовать посчитанную ранее P^k, а величину запаздывания наблюдения увеличим до $\tilde{h} = \left\lceil \frac{h}{\varepsilon} \right\rceil \varepsilon$.

4. Решим систему (3) для построенного управления u^k на отрезке $[t^k,\, t^{k+1}]$ и запомним финальное состояние $x(t^{k+1})$.

3.4 Пример работы программы

Рассмотрим в качестве примера работы программы модель управления скоростью электродвигателя постоянного тока. Данная модель была предложена и исследована на управляемость в [4]. Мы сравним полученные в работе [4] управления без запаздывания с построенными нами.

Итак, модель представляет собой систему:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} i(t) = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{K_b}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t), \\ \frac{d}{dt}\omega(t) = -\frac{K_T}{J} i(t) - \frac{B}{J}\omega(t). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь i, [A] — сила тока на соответстующем участке цепи; ω, $\left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$ — угловая скорость вращения; u, [B] — управляемое нами напряжение на концах цепи.

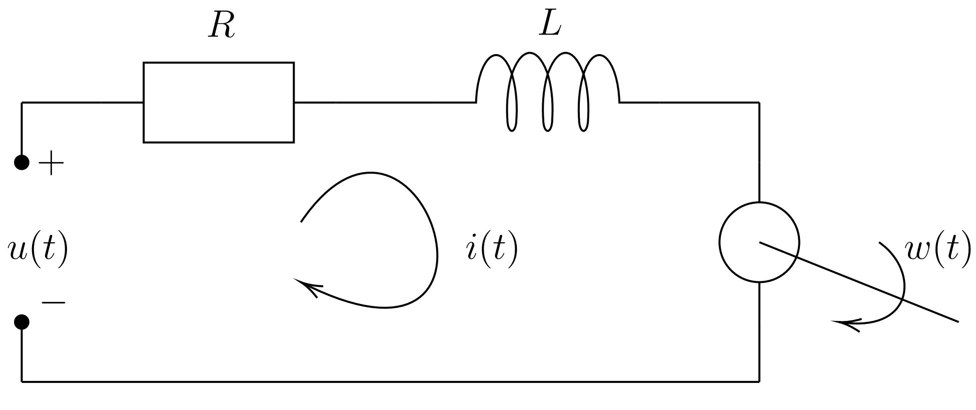

Рис. 2: Схема электрической цепи электродвигателя постоянного тока.

Ниже приведем таблицу с описанием констант в системе (11) и их характерными значениями для электродвигателя постоянного тока:

Обозначение	Физ. величина	Хар. значение
J	Момент инерции	$0{,}01\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{рад}}$
B	Коэффициент вязкого трения	$0{,}1\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$
K_T	Постоянная кручения	$0{,}01\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}$
K_b	Постоянная ЭДС	$0{,}01\ \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$
R	Сопротивление резистора	1 Ом
L	Индуктивность катушки	0,5 Гн

Таким образом, мы приходим к удобному нам виду уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -0{,}02 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u. \tag{12}$$

Для него мы поставим задачу минимизации на отрезке $1 \leqslant t \leqslant 3$ функционала (5) с матрицами:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad N = (1), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Начальными условиями будут:

$$x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

На рисунках Рис. 3 и Рис. 4 можно посмотреть оптимальное управление и поведение системы (12) для задачи без запаздывания по наблюдению. С этими графиками мы будем сравнивать управления, построенные по нашему алгоритму. Значение функционала при такой постановке задачи равно $J = 4970,8$.

Теперь построим управление по нашему алгоритму. Будем считать, что запаздывание по наблюдению равно $h = 0{,}5$. Возьмем мелкое разбиение

$\varepsilon = 10^{-2}$. Как видно из рисунков Рис. 5 и Рис. 6 построенное управление практически не отличается от случая без запаздывания, что соответствует приведённой теории. Значение функционала $J = 4971$.

Предложенный алгоритм предполагает вычисление $\lceil \frac{h}{\varepsilon} \rceil$ интегралов на каждом шаге работы программы. Это значит, что при увеличении времени задержки, время работы программы так же будет увеличиваться. Если на каждом шаге программы запоминать вычисленное положение $x(t-\varepsilon)$, то можно сократить количество интегралов до одного. График сравнения времени работы программы с и без улучшения алгоритма представлен на рисунке Рис. 7.

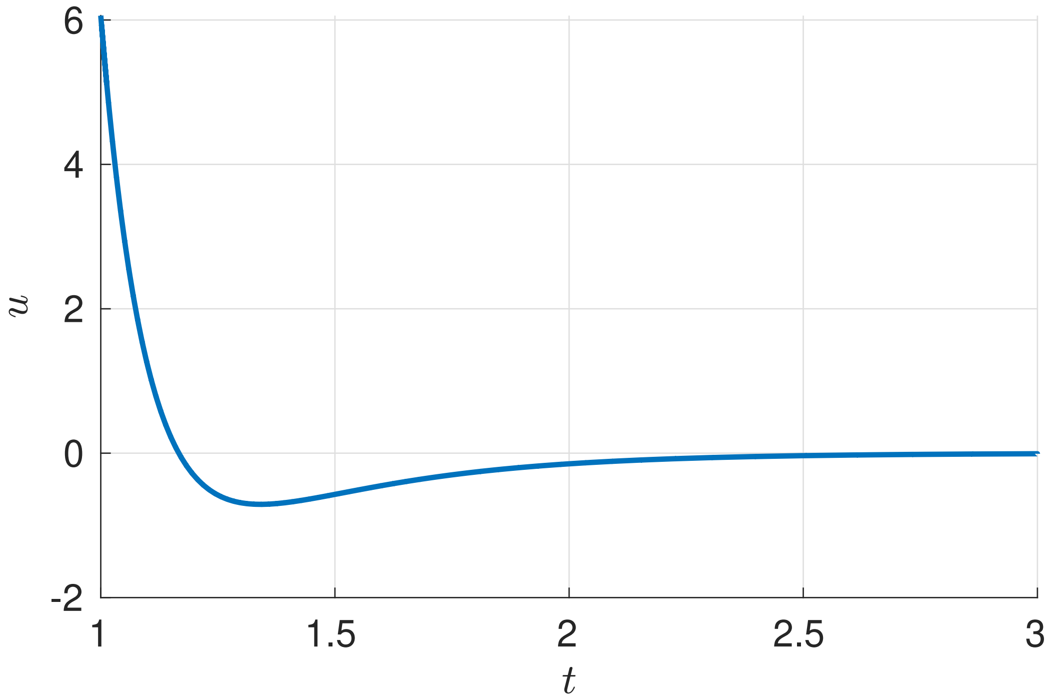

Рис. 3: Оптимальная стратегия без запаздывания наблюдения для системы (12). Значение функционала $J = 4970{,}8$.

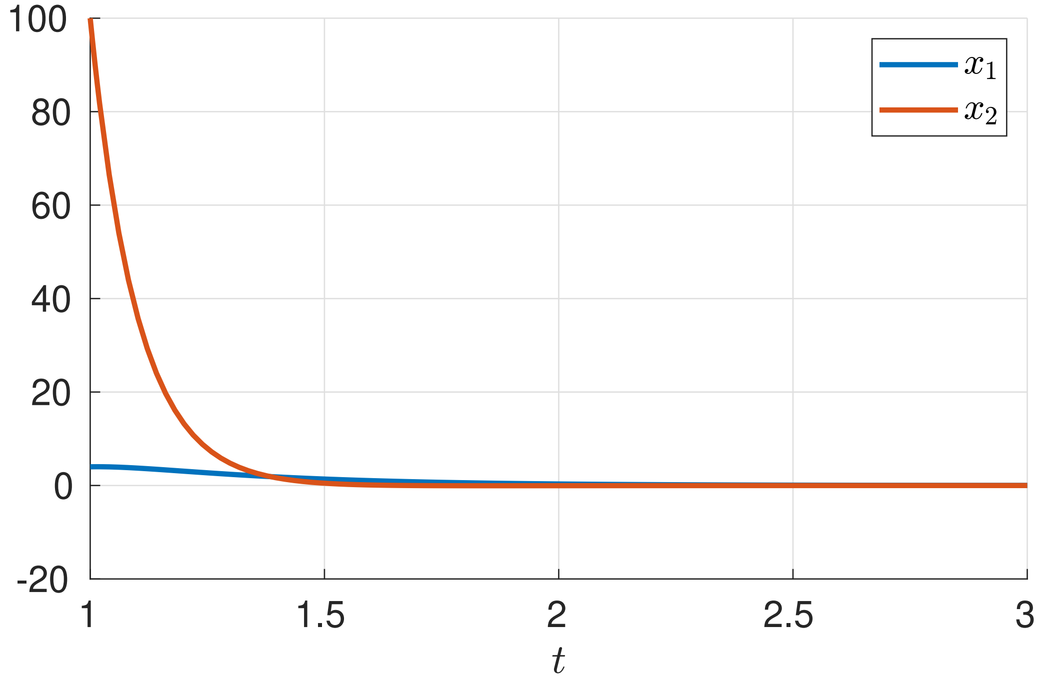

Рис. 4: Поведение системы (12) при использовании оптимальной стратегии без запаздывания наблюдения.

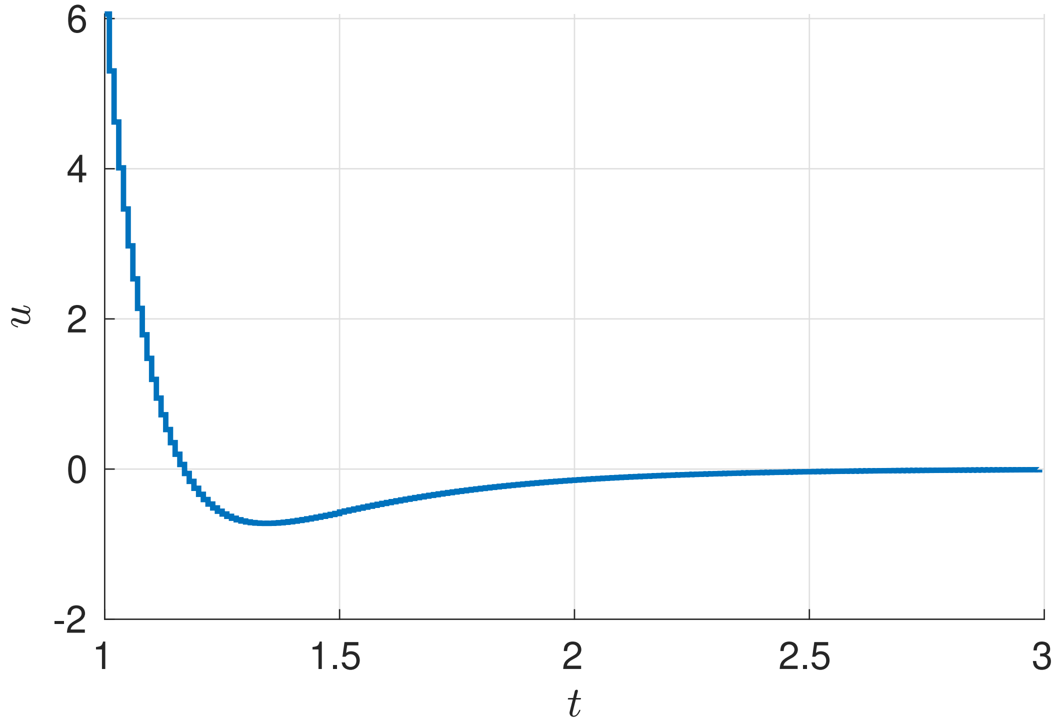

Рис. 5: Оптимальная стратегия с запаздыванием наблюдения $h = 0{,}5$ для системы (12) с разбиением $\varepsilon = 0{,}01$. Значение функционала $J = 4971$.

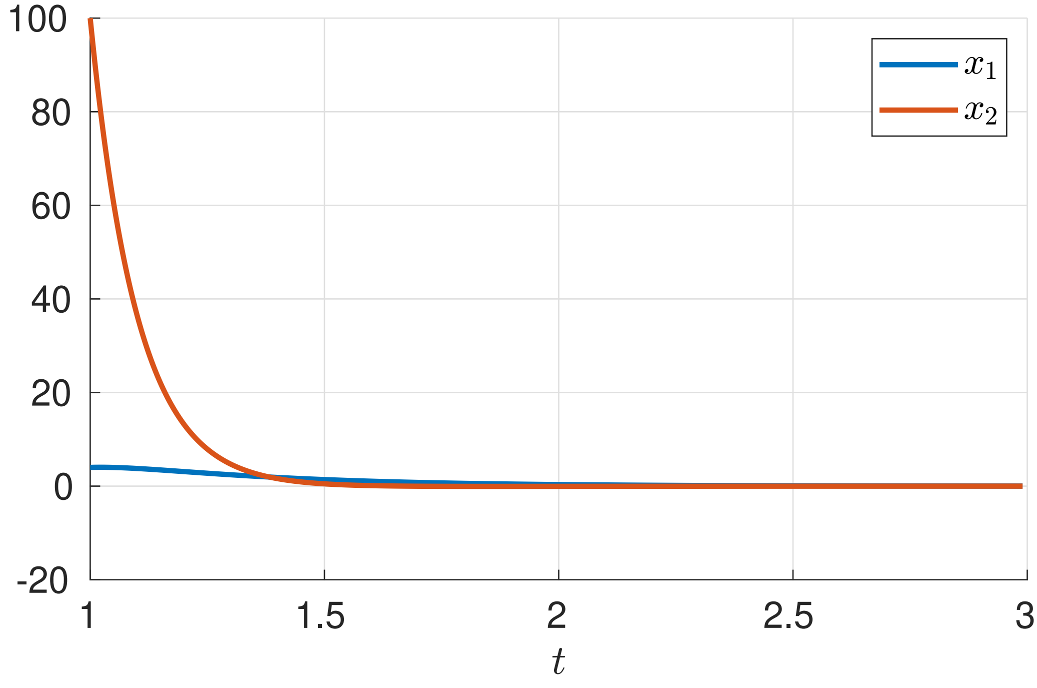

Рис. 6: Поведение системы (12) при использовании оптимальной стратегии с запаздыванием наблюдения (Рис. 5).

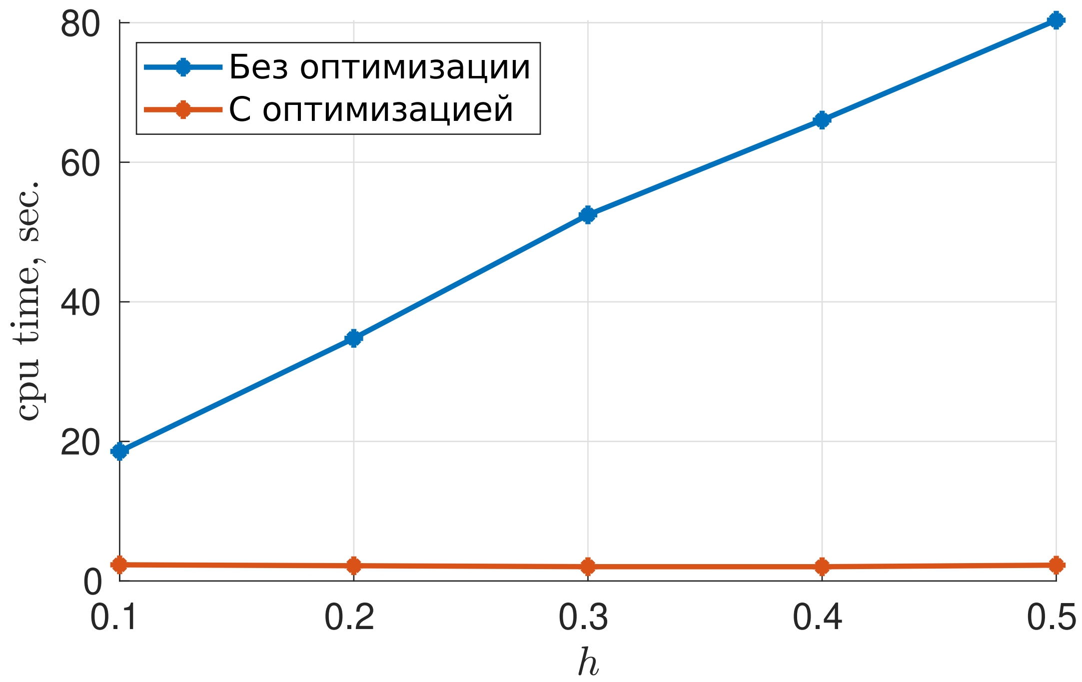

Рис. 7: Время работы программы в зависимости от величины задержки h для изначального и оптимизированного алгоритмов.

4 Задача с интервалом между наблюдениями

5 Система с интервалом между наблюдениями

Мы уже говорили, что реальные системы не могут передавать данные о своём положении непрерывно. В таком случае будем считать, что данные о состоянии передаются с некоторым известным (будем предполагать, детерминированным) интервалом времени. В таком случае можно рассматривать шаг сетки построенного алгоритма ε как время между отправкой наблюдений. При этом мы не можем уменьшать шаг — он становится фиксированным для рассматриваемой системы.

Как видно из рисунков Рис. 9 и Рис. 10, построенные алгоритмом упраления приближают исходное в таком случае, но точность становится меньше. Зависимость среднеквадратичного отклонения функциона J_ε от посчитанного без запаздывания J приведена на рисунке Рис. 11.

Особым случаем можно считать ситуацию, при которой время, между двумя отправками данных о состоянии ε становится больше времени запаздывания h. В таком случае кажется естественным провести редукцию системы (3) к дискретному виду.

Мы по прежнему строим кусочно-постоянное управление $u(t) = u^k$ на отрезке $t^{k+1} - h \leqslant t < t^{k+1} - h$. Обозначим за $x^k = x(t^k)$. Тогда применим формулу Коши:

$$x^{k+1} = X(t^{k+1}, t^k)x^k + \int\limits_{t^k}^{t^k+h} X(t^{k+1} - h, s)B(s)\,ds \cdot u^{k-1} + \\ + \int\limits_{t^k+h}^{t^{k+1}} X(t^{k+1}, s)B(s)\,ds \cdot u^k.$$

Из этого получаем следующую дискретную систему с запаздыванием по управлению:

$$x^{k+1} = \Phi^k x^k + \Gamma_1^k u^k + \Gamma_2^k u^{k-1}. \tag{13}$$

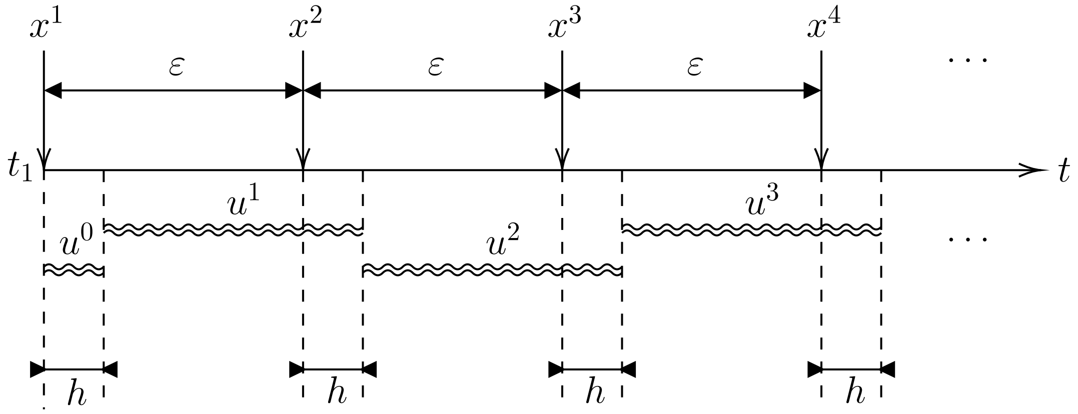

Рис. 8: Иллюстрация системы, где величина запаздывания h меньше интервала времени между наблюдениями ε. Здесь показано в какие моменты времени наблюдается состояние системы и на каких промежутках действуют постоянные управления.

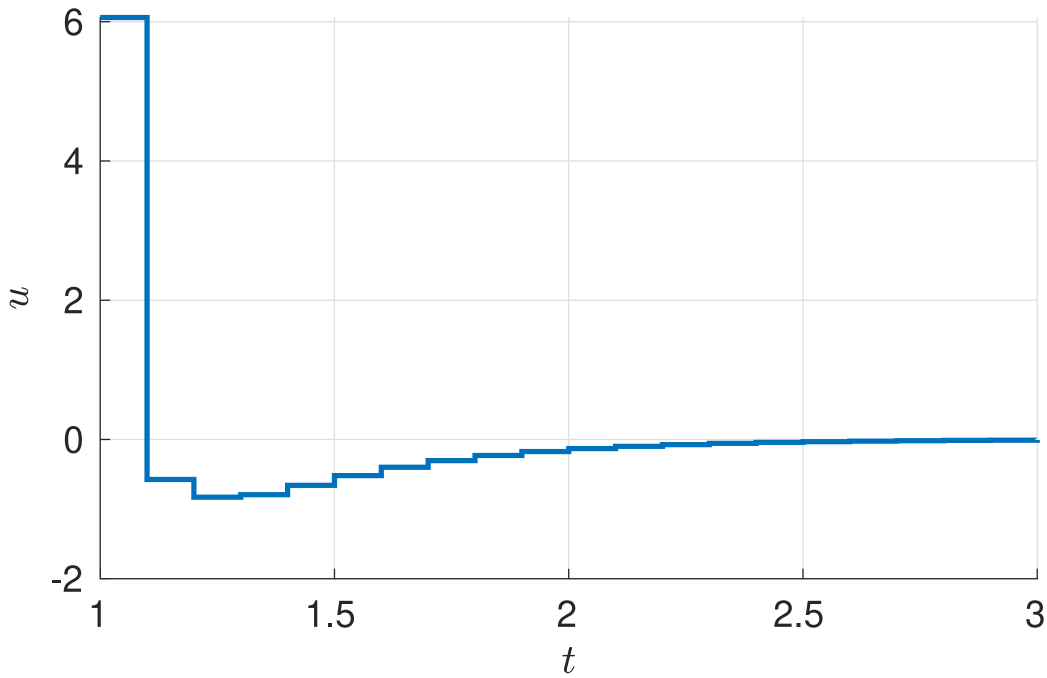

Рис. 9: Оптимальная стратегия с запаздыванием наблюдения $h = 0{,}5$ для системы (12) с разбиением $\varepsilon = 0{,}1$.

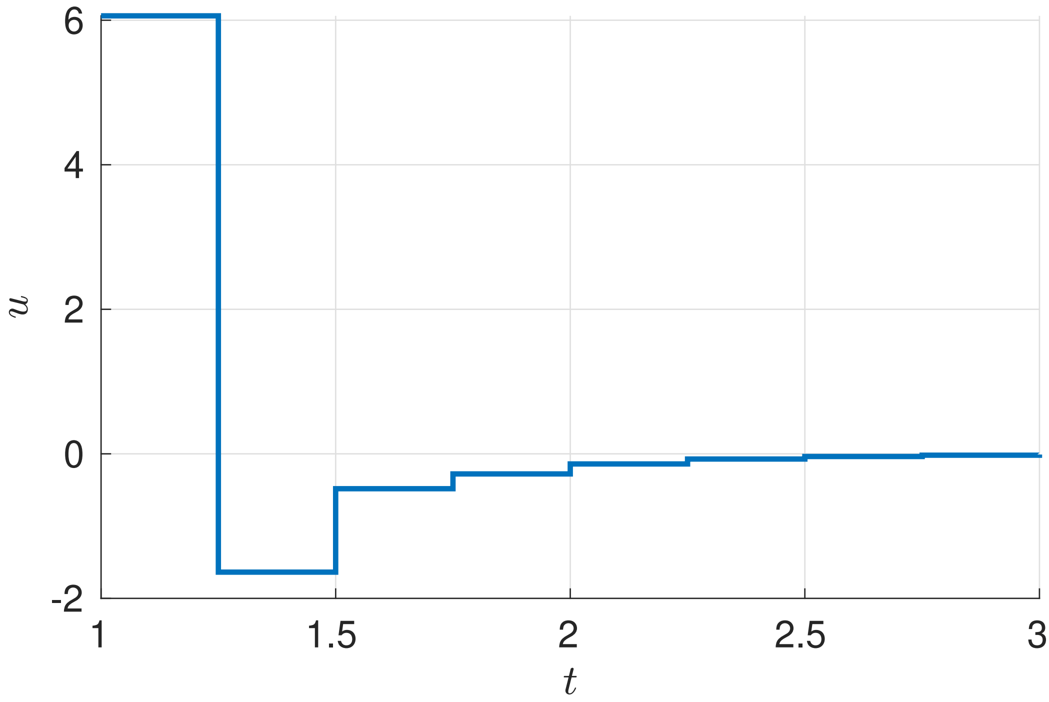

Рис. 10: Оптимальная стратегия с запаздыванием наблюдения $h = 0{,}5$ для системы (12) с разбиением $\varepsilon = 0{,}25$.

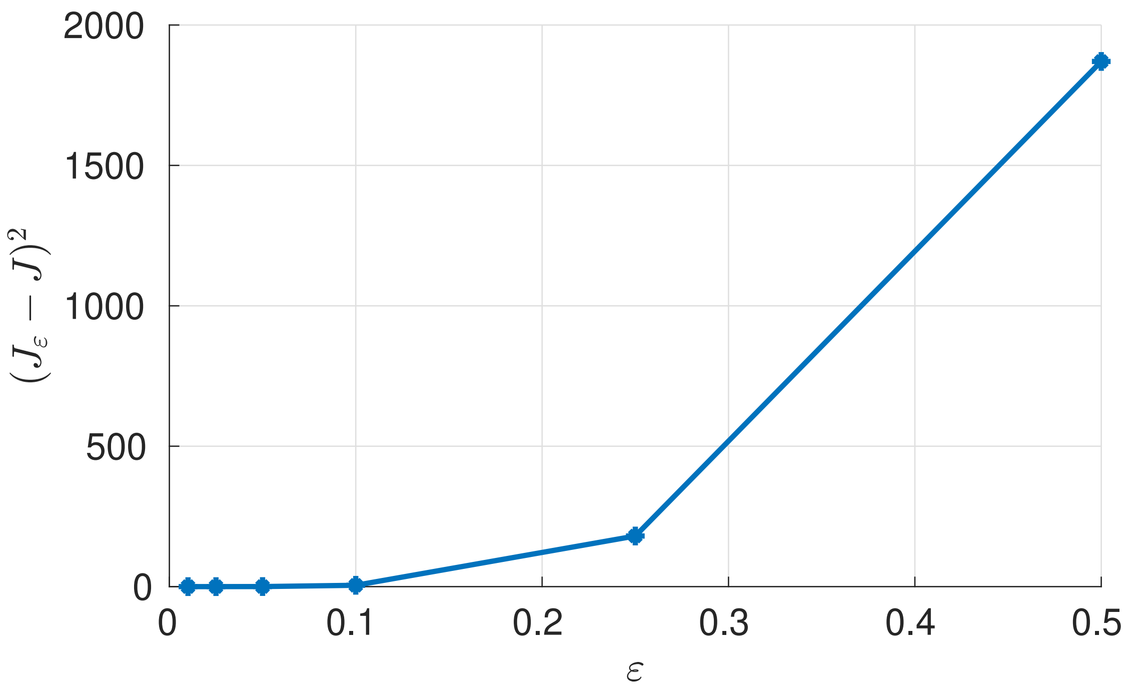

Рис. 11: Среднеквадратичное отклонение функционала качества построенного алгоритма в зависимости от шага сетки ε. Здесь время запаздывания выбрано $h = 0{,}5$.

6 Дискретная задача

Итак, рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x^{k+1} = \Phi^k x^k + \Gamma_1^k u^k + \Gamma_2^k u^{k-1}$$

и составим для нее задачу минимизации функционала

$$J(u) = \sum_{k=1}^{N} \left[\langle x^k,\, M^k x^k \rangle + \langle u^k,\, N^k u^k \rangle \right] + \langle x^{N+1},\, T x^{N+1} \rangle \to \min_u,$$

где $M^k = (M^k)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$, $N^k = (N^k)^{\mathrm{T}} > 0$ для всех $k = \overline{1, N}$ и $T = T^{\mathrm{T}} > 0$.

Сделаем замену фазовой переменной, теперь

$$z^k = \begin{pmatrix} x^k \\ u^{k-1} \end{pmatrix},$$

Теперь предыдущее уравнение можно переписать в виде:

$$z^{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi^k & \Gamma_2^k \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{\Phi}^k} z^k + \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_1^k \\ I \end{pmatrix}}_{\tilde{\Gamma}^k} u^k,$$

$$J = \sum_{k=1}^{N} \left\langle z^k,\, \underbrace{\begin{pmatrix} M^k & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{M}^k} z^k \right\rangle + \sum_{k=1}^{N} \langle u^k,\, N^k u^k \rangle + \left\langle z^{N+1},\, \underbrace{\begin{pmatrix} T & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{T}} z^{N+1} \right\rangle.$$

Утверждение. *Матрицы $\tilde{M}^k$ и $\tilde{T}$ явдяются положительно определенными.*

Доказательство. Докажем для матрицы $\tilde{T}$, для остальных матриц аналогично. По определению:

$$\langle z,\, \tilde{T} z \rangle = \langle x,\, T x \rangle + \langle u,\, O u \rangle = \langle x,\, T x \rangle > 0.$$

ч.т.д.

Рассмотрим функцию цены $V^k(z)$, она удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое позволяет определить $V^k(z)$:

$$V^k(z) = \langle z,\, \tilde{M} z \rangle + \min_u \left\{ \langle u,\, N u \rangle + V^{k+1}(\tilde{\Phi} z + \tilde{\Gamma} u) \right\}.$$

Предположим, что $V^{k+1}(z) = \langle z,\, P^{k+1}z$, где $P^{k+1} = (P^{k+1})^{\mathrm{T}} \geqslant 0$ и покажем, что V^k будет иметь ту же форму:

$$V^k(z) = \langle z,\, \tilde{M}z\rangle + \min_u \left\{\langle u,\, Nu\rangle + \langle\tilde{\Phi}z + \tilde{\Gamma}u,\, P^{k+1}(\tilde{\Phi}z + \tilde{\Gamma}u)\rangle\right\},$$

приравняем производную нулю

$$2u^{\mathrm{T}}N + 2(\tilde{\Phi}z + \tilde{\Gamma}u)^{\mathrm{T}}P^{k+1}B = 0,$$

$$u^* = -(N + \tilde{\Gamma}^{\mathrm{T}}P^{k+1}\tilde{\Gamma})^{-1}\tilde{\Gamma}^{\mathrm{T}}P^{k+1}\tilde{\Phi}z.$$

Тогда функция цены

$$\begin{aligned} V^k(z) &= \langle z,\, \tilde{M}z\rangle + \langle u^*,\, Nu^*\rangle + \langle\tilde{\Phi}z + \tilde{\Gamma}u^*,\, P^{k+1}(\tilde{\Phi}z + \tilde{\Gamma}u^*) = \\ &= \langle z,\, [\tilde{M} + \tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}P^{k+1}\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}^{\mathrm{T}}P^{k+1}\tilde{\Gamma}(N + \tilde{\Gamma}^{\mathrm{T}}P^{k+1}\tilde{\Gamma})^{-1}\tilde{\Gamma}^{\mathrm{T}}P^{k+1}\tilde{\Phi}]z\rangle = \\ &= \langle z,\, P^k z\rangle. \end{aligned}$$

Видно, что $P^k = (P^k)^{\mathrm{T}} > 0$.

$$P^{N+1} = T.$$

7 Дискретный пример

Рассмотрим ту же самую модель электродвигателя, что и в позапрошлой секции. Но теперь будем предполагать, что управление запаздывает на $h = 0{,}05$, а периодичность наблюдений $\varepsilon = 0{,}2$.

Проведем редукцию той системы к дискретной. Посчитаем все матрицы численными методами.

$$x^{k+1} = \Phi x^k + \Gamma_1 u^k + \Gamma_2 u^{k-1},$$

где

$$\Phi = e^{A\varepsilon} \approx \begin{pmatrix} 0{,}6705 & -0{,}0013 \\ -0{,}0669 & 0{,}1354 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \int\limits_h^\varepsilon e^{As}\, ds \cdot B \approx \begin{pmatrix} 0{,}2345 \\ -0{,}0175 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \int\limits_0^h e^{As}\, ds \cdot B \approx \begin{pmatrix} 0{,}0952 \\ -0{,}0021 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в том, что построенная система действительно приближает исходную можно на рисунке Рис. 12.

Оставим все абсолютно так же и посмотрим на графики координат и оптимального управления.

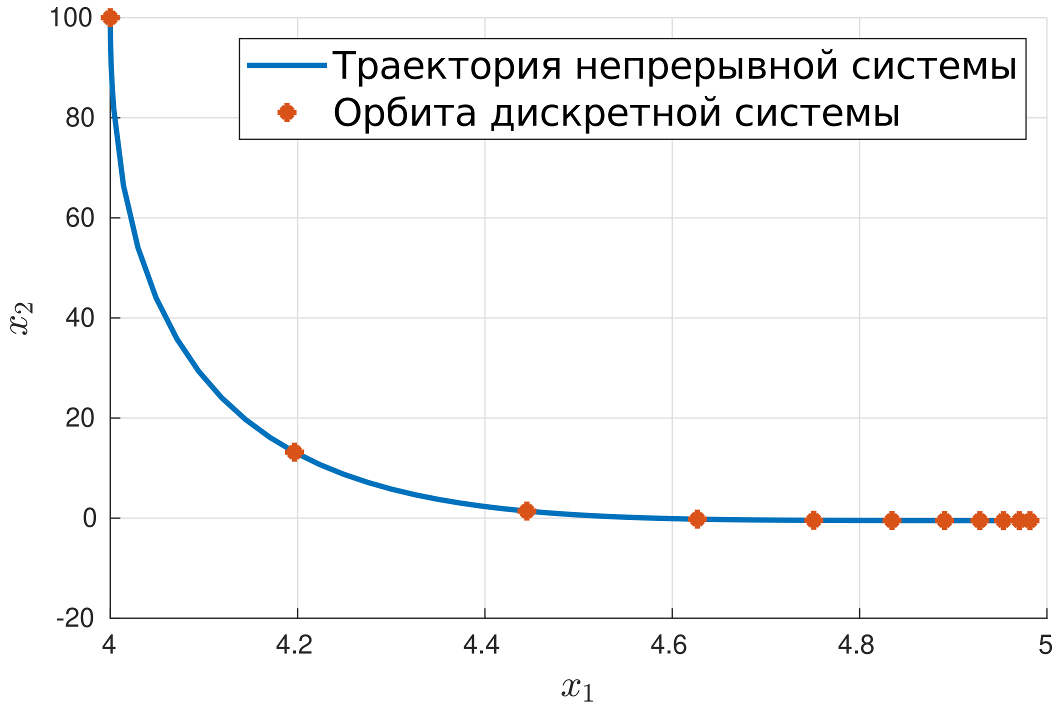

Рис. 12: Траектория непрерывной системы и орбита соответствующей редуцированной дискретной системы выпущенной из начальной точки $x_0 = [4,\ 100]^{\mathrm{T}}$ с постоянным управлением $u \equiv 1$.

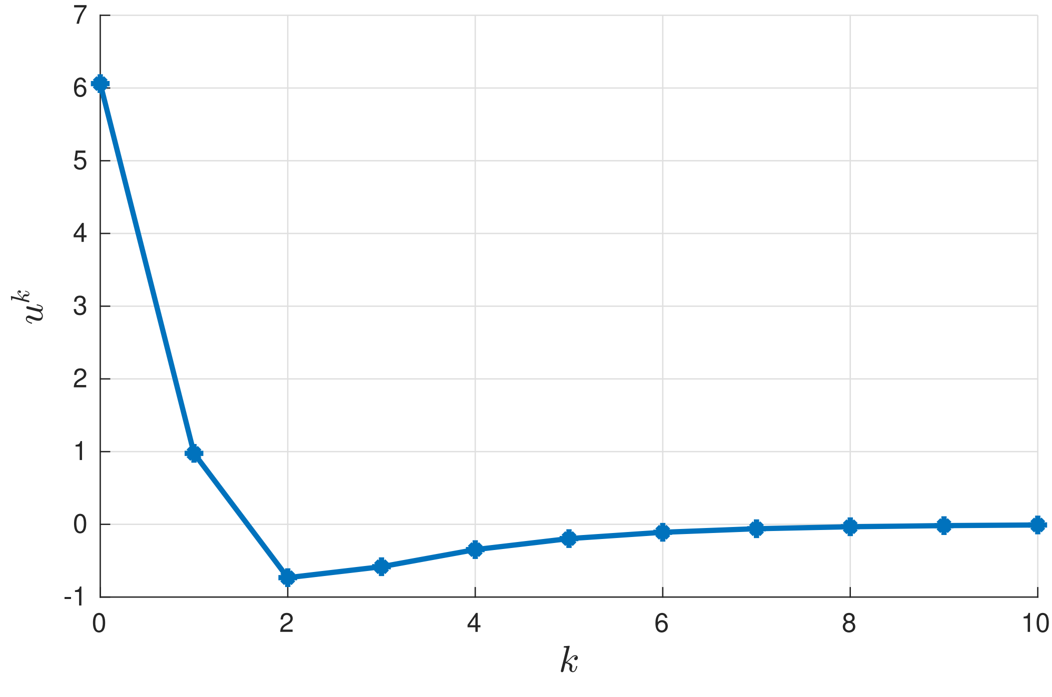

Рис. 13: .

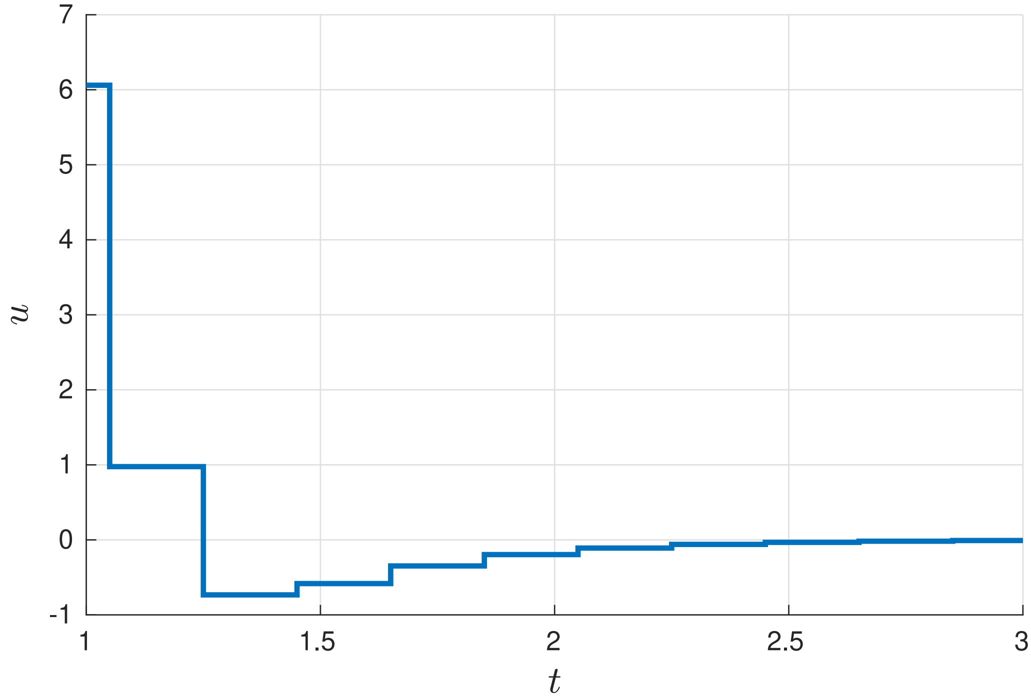

Рис. 14: .

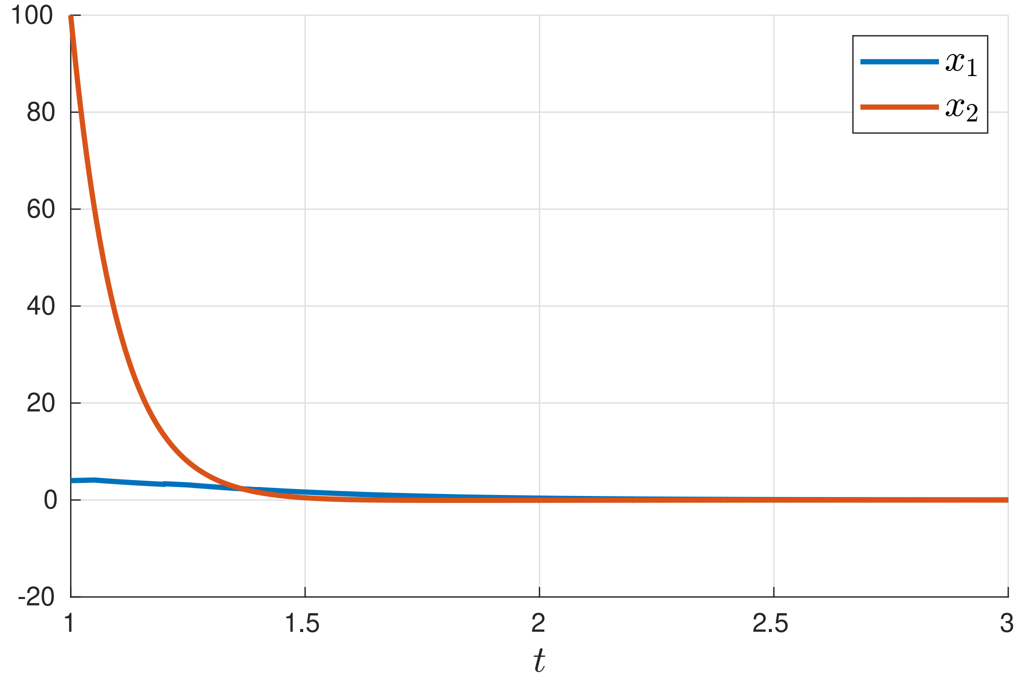

Рис. 15: .

8 Заключение

Список литературы

[1] Беллман Р. *Динамическое программирование.* М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 400с.

[2] Красовский Н. Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

[3] Егоров А. И. *Уравнения Риккати.* М.: Физматлит, 2001, 320с.

[4] Ruba M. K. Al-Mulla Hummadi *Simulation Of Optimal Speed Control For a Dc Motor Using Linear Quadratic Regulator (LQR).* Juornal of Engineering, Number 3, Volume 18 march 2012, Baghdad.

[5] Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М.: Наука, Москва, 1985.