



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Егоров Кирилл Юлианович

# О задаче целевого управления по результатам наблюдений, поступающих с запаздыванием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

*Научный руководитель*

к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2020

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Задача с непрерывной передачей наблюдений</b>	<b>6</b>
3.1	Формализация задачи . . . . .	6
3.2	Решение задачи . . . . .	7
3.3	Численный синтез управления . . . . .	9
3.4	Пример работы программы . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Задача с интервалом между наблюдениями</b>	<b>16</b>
4.1	Формализация задачи . . . . .	16
4.2	Решение задачи . . . . .	17
4.3	Численный синтез управления . . . . .	19
4.4	Пример работы программы . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Дискретный пример</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>24</b>

# 1 Введение

Работа посвящена задаче построения линейно-квадратичного регулятора динамической системы в форме стратегии с запаздывающей обратной связью.

Данная задача прежде всего возникает при передаче сигнала на большие расстояния, либо при помощи компьютерных и прочих сетей. В таких случаях информация о состоянии фазовых переменных поступает с некоторой задержкой. В работе допускается, что эта задержка детерминированна и фазовые координаты передаются без помех.

Способом решения поставленной задачи предлагается метод динамического программирования, разработанный Р. Беллманом [1]. Данный метод предполагает синтезировать управление как минимизатор в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана.

В работе представлен алгоритм построения оптимальной стратегии, а также редукция к дискретной системе в случае интервалов между замерами фазовых переменных больших, чем величина запаздывания. Представлены примеры работы программы.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим управляемый объект, положение которого задаётся динамической системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, v) \quad (1)$$

на промежутке времени  $t_0 \leq t \leq t_1$  с заданным начальным состоянием

$$x(t_0) = x^0.$$

Информация о состоянии объекта передаётся центру управления с некоторой известной задержкой  $h_{tc}$ , а само управление передается объекту с другой известной задержкой  $h_{fc}$ . То есть необходимо синтезировать оптимальную стратегию в форме

$$v(t) = v(t, x(t - h_{tc})),$$

на промежутке  $t_0 - h_{fc} \leq t \leq t_1 - h_{fc}$ . На момент времени  $t$  центру известно управление, переданное объекту за все предыдущее время  $\tau : t_0 - h_{fc} \leq \tau < t$ . При этом система (1) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), v(t - h_{fc}, x(t - h_{tc} - h_{fc}))).$$

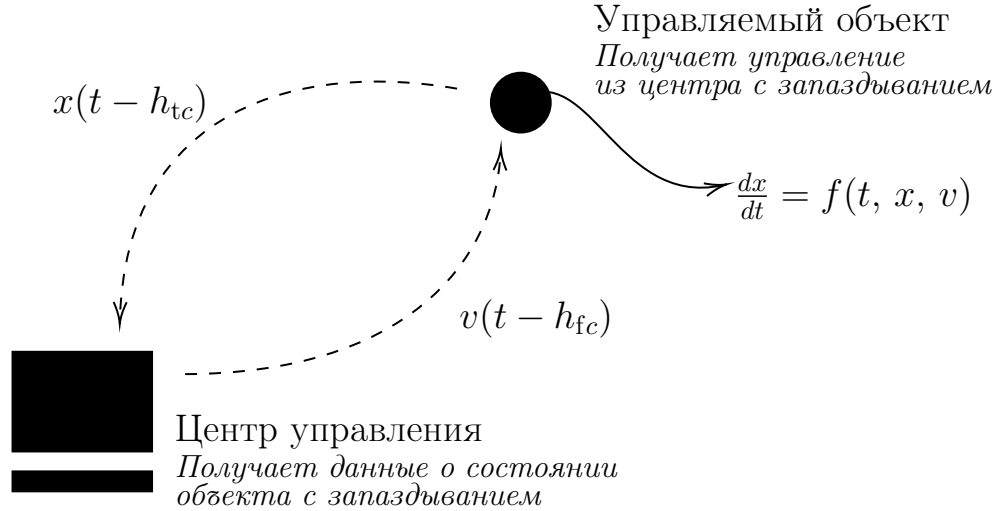


Рис. 1: Иллюстрация поставленной задачи.

Обозначим за  $h$  общую величину задержки  $h = h_{tc} + h_{fc}$ , а за  $u$  такое управление, что  $u(t) = v(t - h_{fc})$  для всех  $t \in [t_0, t_1]$ . Тогда мы можем сформулировать общую постановку задачи следующим образом: необходимо найти

оптимальное управление  $u$  в форме стратегии  $u = u(t, x(t - h))$  для следующей динамической системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x^0.$$

## 3 Задача с непрерывной передачей наблюдений

### 3.1 Формализация задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему с непрерывными ограниченными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3)$$

с заданным начальным условием

$$x(t_0) = x^0. \quad (4)$$

Для задачи Коши (3)–(4) поставим задачу поиска измеримого управления, минимизирующего следующий интегрально-квадратичный функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [\langle x, M(s)x \rangle + \langle u, N(s)u \rangle] ds + \langle x(t_1), Tx(t_1) \rangle \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (5)$$

где  $M(s) = M^T(s) \geq 0$ ,  $N(s) = N^T(s) > 0$ ,  $T > 0$ , а  $U = U[t_0, t_1]$  — множество измеримых функций на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Допустимый класс управления выбран таким образом, чтобы выполнялись достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (3)–(4) на промежутке  $t_0 \leq t \leq t_1$  [5].

*Замечание 1.* Решением задачи Коши (3)–(4) мы называем *решение Каратеодори*, то есть измеримую функцию  $x(t)$ , удовлетворяющую уравнениям (3), (4), а также интегральному уравнению

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t [A(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau)] d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

## 3.2 Решение задачи

Обозначим за  $\hat{x}(t, x^0, t_0)$  решение системы (3) с заданным начальным условием  $x(t_0) = x^0$  и введём в рассмотрение функцию цены

$$V(t, x) = \inf_{u \in U[t, t_1]} \left\{ \int_t^{t_1} [\langle \hat{x}(s, t, x), M(s)\hat{x}(s, t, x) \rangle + \langle u(s), N(s)u(s) \rangle] ds + \right. \\ \left. + \langle \hat{x}(t_1, t, x), T\hat{x}(t_1, t, x) \rangle \right\}.$$

При этом  $V(t_0, x^0) = \inf_{u \in U} J(u)$ . Тогда согласно [2] такая функция цены удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ \underbrace{\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, Ax + Bu \right\rangle}_{\Psi} + \langle x, Mx \rangle + \langle u, Nu \rangle \right\} = 0 \quad (6)$$

с краевым начальным условием

$$V(t_1, x) = \langle x, Tx \rangle. \quad (7)$$

К тому же выполняется следующая теорема.

**Теорема 1** (О верификации). *Пусть существует гладкая функция  $W(t, x)$ , удовлетворяющая уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \min_u \Psi \left( \frac{\partial W}{\partial x}, x, u \right) = 0$$

*с краевым начальным условием  $W(t_1, x) = \langle x, Tx \rangle$ , причём минимум достигается на элементе  $u^*$ . Тогда*

$$V(t_0, x) = W(t_0, x).$$

Как следствие получаем, что измеримое управление  $u^* = \arg \min_u \Psi$ , если такое существует, будет оптимальным для рассматриваемой задачи.

Так как получившаяся функция  $\Psi$  строго выпукла по переменной  $u$ , то минимум будет достигнут в единственной точке. Запишем необходимое условие экстремума:

$$\text{grad}_u \Psi \left( \frac{\partial V}{\partial x}, x, u^* \right) = 0, \\ B^T \frac{\partial V}{\partial x} + 2Nu^* = 0.$$

Получается, что оптимальное управление может быть задано как

$$u^* = -\frac{1}{2}N^{-1}B^T\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (8)$$

Вернёмся к уравнению (6), подставив в него получившийся результат:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, Ax \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, BN^{-1}B^T\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle + \langle x, Mx \rangle = 0.$$

Будем искать функцию цены как квадратичную форму  $V(t, x) = \langle x, P(t)x \rangle$ , где  $P(t) = P^T(t) > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left\langle x, \frac{dP}{dt}x \right\rangle + 2\langle Px, Ax \rangle - \langle Px, BN^{-1}B^TPx \rangle + \langle x, Mx \rangle &= 0, \\ \left\langle x, \frac{dP}{dt}x \right\rangle + \langle x, PAx \rangle + \langle A^TPx, x \rangle - \langle Px, BN^{-1}B^TPx \rangle + \langle x, Mx \rangle &= 0, \\ \left\langle x, \frac{dP}{dt}x \right\rangle + \langle x, PAx \rangle + \langle x, A^TPx \rangle - \langle x, PBN^{-1}B^TPx \rangle + \langle x, Mx \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Так как в правой части скалярных произведений стоят симметричные матрицы, мы можем записать следующее матричное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять матрица  $P$ :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + PA + A^TP - PBN^{-1}B^TP + M = 0, \\ P(t_1) = T. \end{cases} \quad (9)$$

Уравнение (9) называют *уравнением Риккати*. Подробно о свойствах решений уравнения Риккати можно прочитать в работе [3]. Нам достаточно того, что для симметричных матриц решение данного уравнения существует и единственно в некоторой окрестности каждой точки  $t$  рассматриваемого промежутка  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Теперь вспомним, что информация о состоянии системы в текущий момент времени недоступна наблюдению. Воспользуемся формулой Коши:

$$x(t) = X(t, t-h)\xi + \int_{t-h}^t X(t, s)B(s)u(s)ds,$$

где  $\xi$  — состояние системы в момент времени  $t-h$ , а  $X(t, s)$  — матрица Коши, определяющаяся следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}X(t, s) = A(t)X(t, s), \\ X(s, s) = I. \end{cases}$$



Таким образом, мы можем записать оптимальную стратегию

$$u^*[t] = -N^{-1}(t)B^T(t)P(t)x[t], \quad (10)$$

где матрица  $P(t)$  является решением системы (9), а

$$x[t] = \begin{cases} x_0, & \text{при } t = t_0 \\ X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)B(s)u^*[s] ds, & \text{при } t_0 < t < t_0 + h, \\ X(t, t-h)x[t-h] + \int_{t-h}^t X(t, s)B(s)u^*[s] ds, & \text{при } t_0 + h < t \leq t_1. \end{cases}$$

Отметим также, что с точки зрения поставленной задачи интегрирование управления до момента  $t$  нам доступно, так как центр может хранить информацию о посланном ранее управлении.

Таким образом получили, что если отказаться от знания состояния в текущий момент времени, то для построения регулятора нам необходимо использовать как состояние в предыдущий момент времени  $x(t-h)$ , так и всё посланное управление  $u(\tau)$  на интервале  $t-h \leq \tau < t$ .

### 3.3 Численный синтез управления

Приведем алгоритм для построения управления. Мы будем строить кусочно-постоянное управление на сетке с мелким шагом, как минимум меньшим, чем величина запаздывания. Такой способ не идеален: основная ошибка будет накапливаться не только за счет интегрирования, а в первую очередь из-за выбора класса управления, никак не учтенного в теории. С другой стороны при стремлении шага разбиения к нулю численное решение, построенное по предложенному алгоритму, будет приближено к теоретическому результату.

1. Введём на отрезке времени  $[t_0, t_1]$  равномерное разбиение с шагом  $\varepsilon$ :

$$\{t^k\}_{k=1}^N, \text{ где } t_0 = t^1 < t^2 < \dots < t^N \leq t_1, \quad t^{k+1} - t^k = \varepsilon, \quad t_1 - t^N < \varepsilon.$$

2. Численно решим уравнение (9) и запомним получившиеся значения

$$P^k = P(t^k), \quad \text{где } k = \overline{1, N}.$$

3. На каждом участке  $[t^k, t^{k+1}]$  будем численно строить постоянное управление  $u^k$  по формуле (10) и запоминать его. Здесь мы будем использовать посчитанную ранее  $P^k$ , а величину запаздывания наблюдения увеличим до  $\tilde{h} = \lceil \frac{h}{\varepsilon} \rceil \varepsilon$ .
4. Решим систему (3) для построенного управления  $u^k$  на отрезке  $[t^k, t^{k+1}]$  и запомним финальное состояние  $x(t^{k+1})$ .

### 3.4 Пример работы программы

Рассмотрим в качестве примера работы программы модель управления скоростью электродвигателя постоянного тока. Данная модель была предложена и исследована на управляемость в [4]. Мы сравним полученные в работе [4] управления без запаздывания с построенными нами.

Итак, модель представляет собой систему:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}i(t) = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{K_b}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t), \\ \frac{d}{dt}\omega(t) = -\frac{K_T}{J}i(t) - \frac{B}{J}\omega(t). \end{cases} \quad (11)$$

Здесь  $i, [A]$  — сила тока на соответствующем участке цепи;  $\omega, \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right]$  — угловая скорость вращения;  $u, [B]$  — управляемое нами напряжение на концах цепи.

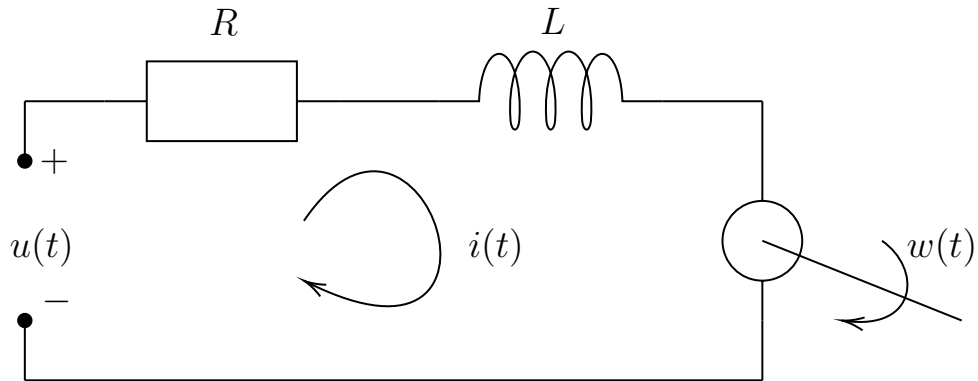


Рис. 2: Схема электрической цепи электродвигателя постоянного тока.

Ниже приведем таблицу с описанием констант в системе (11) и их характерными значениями для электродвигателя постоянного тока:

Обозначение	Физ. величина	Хар. значение
$J$	Момент инерции	$0,01 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{рад}}$
$B$	Коэффициент вязкого трения	$0,1 \frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$
$K_T$	Постоянная кручения	$0,01 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}$
$K_b$	Постоянная ЭДС	$0,01 \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{рад}}$
$R$	Сопротивление резистора	1 Ом
$L$	Индуктивность катушки	0,5 Гн

Таким образом, мы приходим к удобному нам виду уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & -0,02 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u. \quad (12)$$

Для него мы поставим задачу минимизации на отрезке  $1 \leq t \leq 3$  функционала (5) с матрицами:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad N = (1), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Начальными условиями будут:

$$x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

На рисунках Рис. 3 и Рис. 4 можно посмотреть оптимальное управление и поведение системы (12) для задачи без запаздывания по наблюдению. С этими графиками мы будем сравнивать управления, построенные по нашему алгоритму. Значение функционала при такой постановке задачи равно  $J = 4970,8$ .

Теперь построим управление по нашему алгоритму. Будем считать, что запаздывание по наблюдению равно  $h = 0,5$ . Возьмем мелкое разбиение

$\varepsilon = 10^{-2}$ . Как видно из рисунков Рис. 5 и Рис. 6 построенное управление практически не отличается от случая без запаздывания, что соответствует приведённой теории. Значение функционала  $J = 4971$ .

Предложенный алгоритм предполагает вычисление  $\left\lceil \frac{h}{\varepsilon} \right\rceil$  интегралов на каждом шаге работы программы. Это значит, что при увеличении времени задержки, время работы программы так же будет увеличиваться. Если на каждом шаге программы запоминать вычисленное положение  $x(t - \varepsilon)$ , то можно сократить количество интегралов до одного. График сравнения времени работы программы с и без улучшения алгоритма представлен на рисунке Рис. 7.

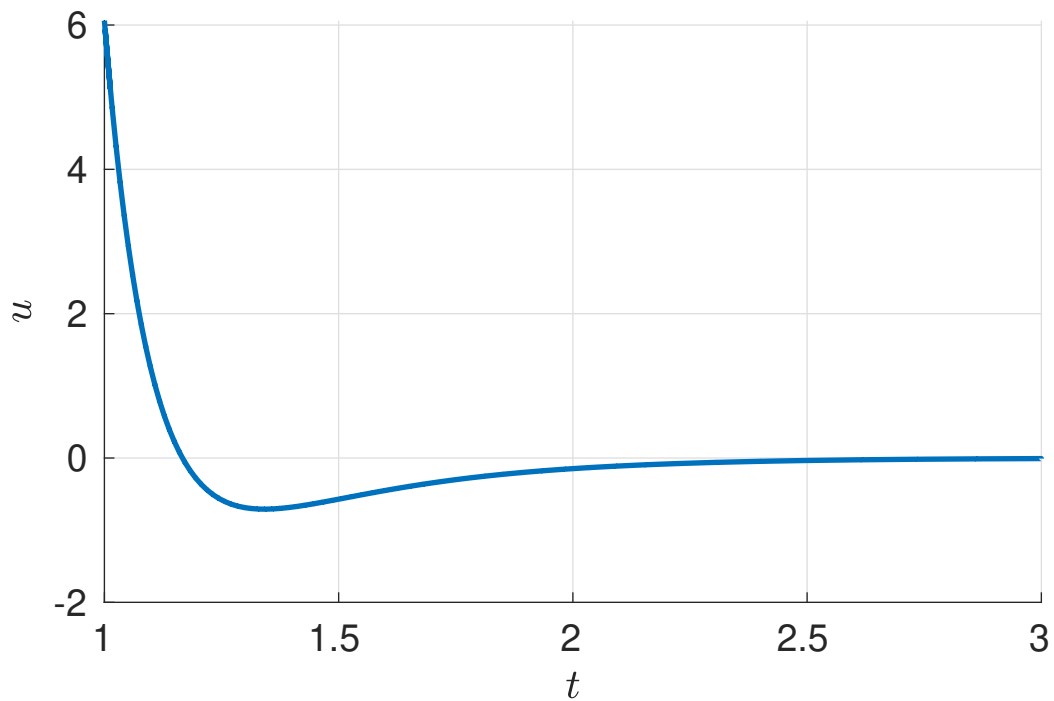


Рис. 3: Оптимальная стратегия без запаздывания наблюдения для системы (12). Значение функционала  $J = 4970,8$ .

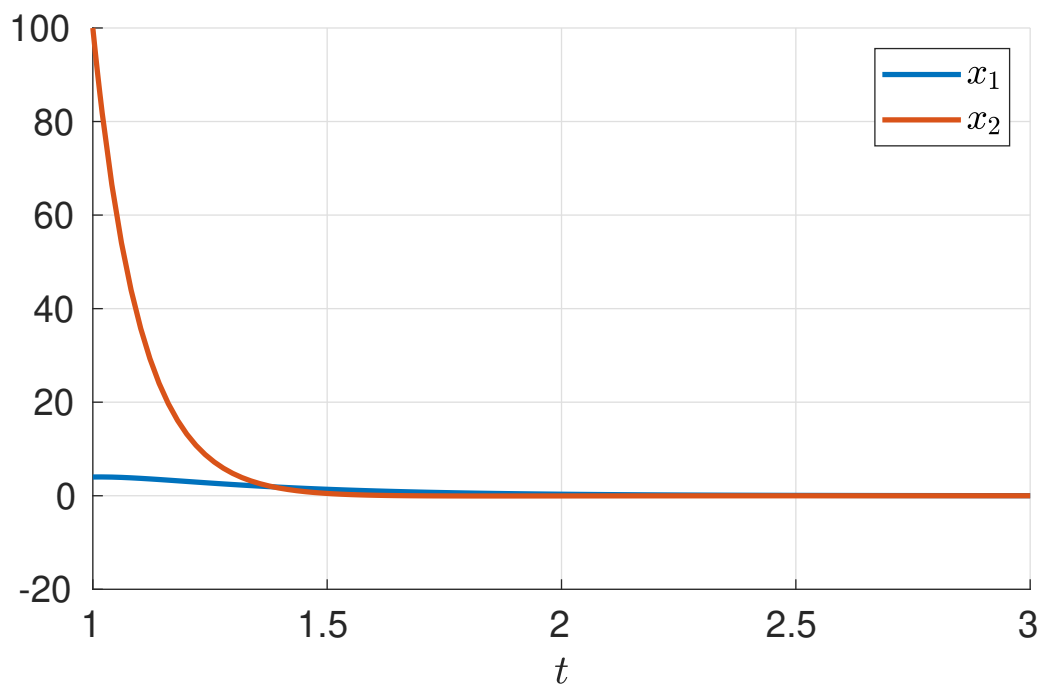


Рис. 4: Поведение системы (12) при использовании оптимальной стратегии без запаздывания наблюдения.

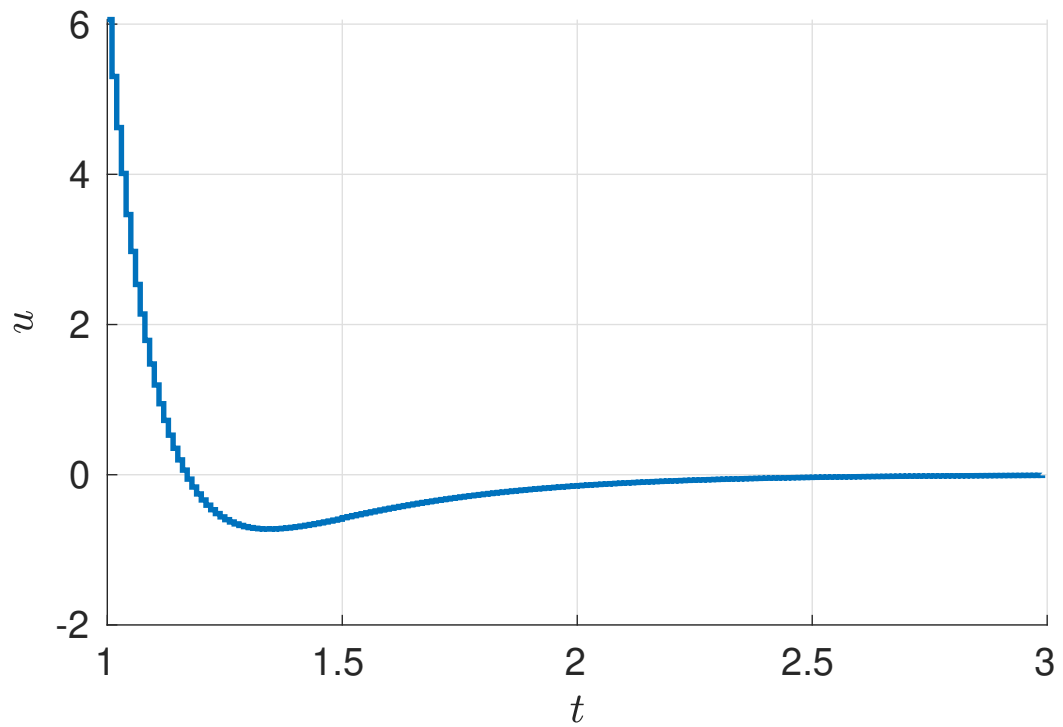


Рис. 5: Оптимальная стратегия с запаздыванием наблюдения  $h = 0,5$  для системы (12) с разбиением  $\varepsilon = 0,01$ . Значение функционала  $J = 4971$ .

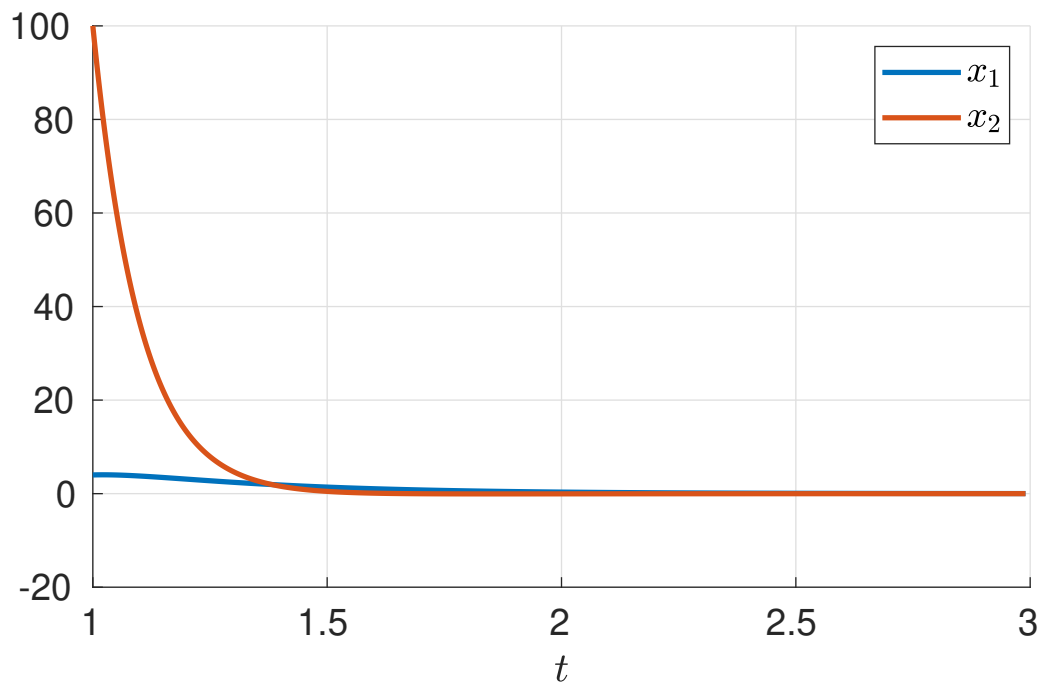


Рис. 6: Поведение системы (12) при использовании оптимальной стратегии с запаздыванием наблюдения (Рис. 5).

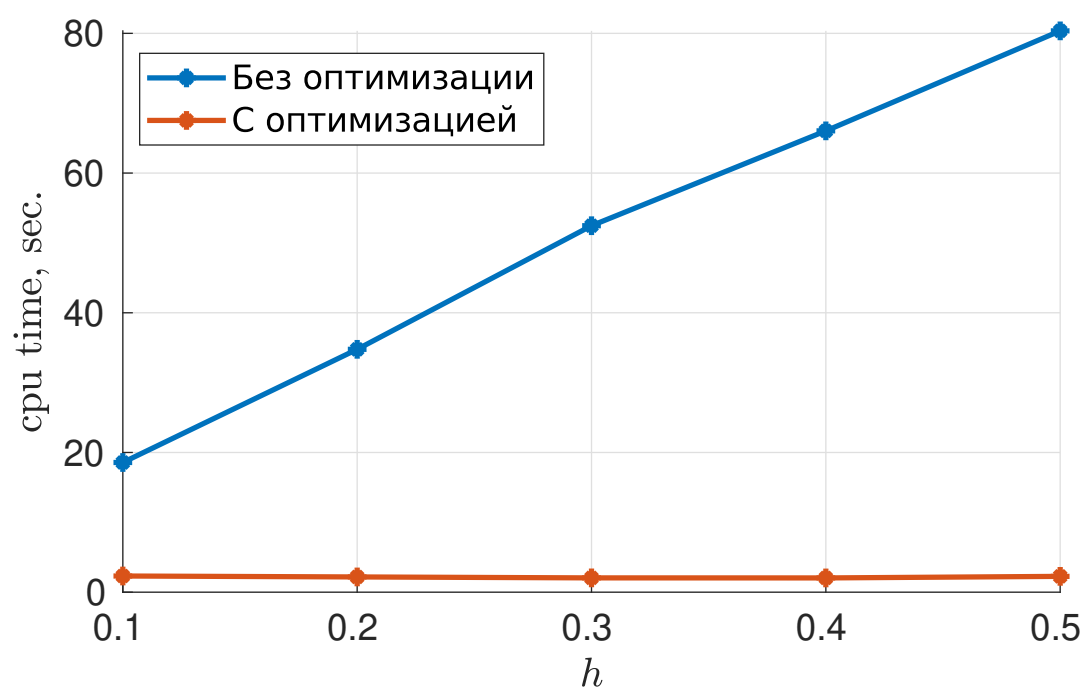


Рис. 7: Время работы программы в зависимости от величины задержки  $h$  для изначального и оптимизированного алгоритмов.

## 4 Задача с интервалом между наблюдениями

### 4.1 Формализация задачи

Реальные системы не могут передавать данные о своём положении непрерывно. В данном разделе мы будем считать, что данные о состоянии передаются с некоторым известным детерминированным интервалом времени  $\varepsilon$ .

В таком случае кажется естественным провести редукцию системы (3) к дискретному виду. Обозначим за  $\{t^k : t^{k+1} > t^k\}_{k=1}^N$  времена поступления наблюдений, а за  $x^k = x(t^k)$  — соответствующие состояния системы (3). Будем строить кусочно-постоянное управление вида

$$u(t) \equiv u^k, \quad t^k + h \leq t \leq t^{k+1} + h.$$

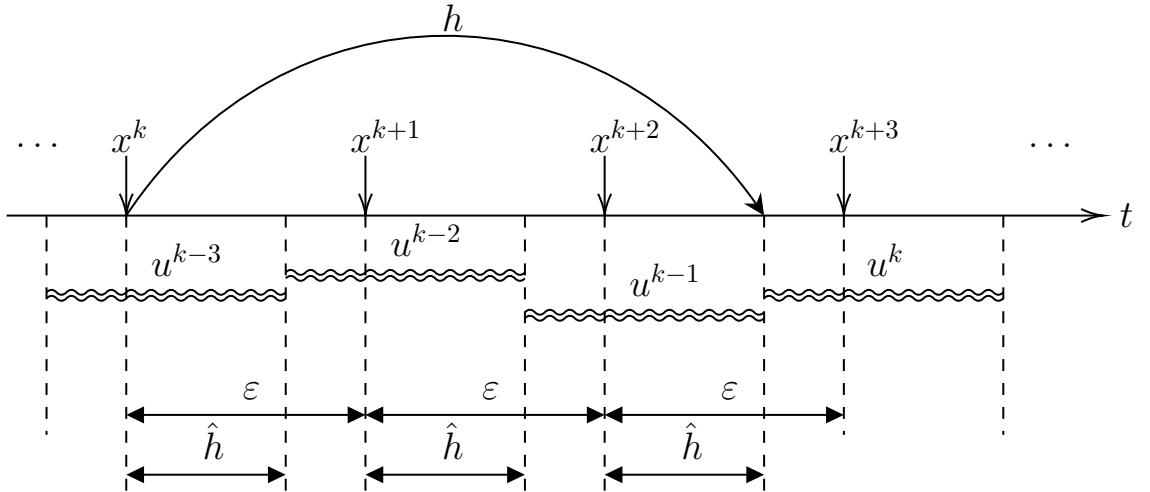


Рис. 8: Иллюстрация перехода к дискретной системе. Здесь показано в какие моменты времени наблюдается состояние системы и на каких промежутках действуют постоянные управления.

Применим на промежутке  $t^k \leq t \leq t^{k+1}$  формулу Коши:

$$x^{k+1} = X(t^{k+1}, t^k)x^k + \int_{t^k}^{t^k + \hat{h}} X(t^k + \hat{h}, s)B(s)ds \cdot u^{k-m-1} + \\ + \int_{t^k + \hat{h}}^{t^{k+1}} X(t^{k+1}, s)B(s)ds \cdot u^{k-m},$$



где  $m = \lfloor \frac{h}{\varepsilon} \rfloor$ ,  $\hat{h} = h - m\varepsilon$ . Таким образом, мы получили дискретную систему с запаздыванием по управлению

$$x^{k+1} = \Phi^k x_k + \Gamma_1^k u^{k-m} + \Gamma_2^k u^{k-m-1}. \quad (13)$$

Упростим систему (13). На момент времени  $t^k$  помимо состояния системы  $x^k$  нам известны все переданные на тот момент управления  $u^0, \dots, u^{k-1}$ . Это значит, что мы можем рассчитать  $x^{k+m}$ , последовательно  $m$  раз применив формулу (13) к состоянию  $x^k$ . Таким образом, не ограничивая общности, можем считать, что величина запаздывания  $h$  строго меньше интервала между наблюдениями  $\varepsilon$ , и система преобразуется к виду

$$x^{k+1} = \Phi^k x^k + \Gamma_1^k u^k + \Gamma_2^k u^{k-1}. \quad (14)$$

Для системы (14) поставим задачу минимизации квадратичного функционала

$$J(u) = \sum_{k=1}^N [\langle x^k, M^k x^k \rangle + \langle u^k, N^k u^k \rangle] + \langle x^{N+1}, T x^{N+1} \rangle \rightarrow \min_u, \quad (15)$$

где  $M^k = (M^k)^T \geq 0$ ,  $N^k = (N^k)^T > 0$ ,  $k = \overline{1, N}$  и  $T = T^T > 0$ .

## 4.2 Решение задачи

Прежде всего сделаем замену фазовой переменной, чтобы избавиться от запаздывания по управлению в системе (14):

$$z^k = \begin{pmatrix} x^k \\ u^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда условие задачи (14)–(15) можно переписать в следующем виде:

$$z^{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi^k & \Gamma_2^k \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{\Phi}^k} z^k + \underbrace{\begin{pmatrix} \Gamma_1^k \\ I \end{pmatrix}}_{\tilde{\Gamma}^k} u^k, \quad (16)$$

$$J(u) = \sum_{k=1}^N \left\langle z^k, \underbrace{\begin{pmatrix} M^k & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{M}^k} z^k \right\rangle + \sum_{k=1}^N \langle u^k, N^k u^k \rangle + \left\langle z^{N+1}, \underbrace{\begin{pmatrix} T & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{\tilde{T}} z^{N+1} \right\rangle. \quad (17)$$

**Утверждение 1.** В формуле (17) матрицы  $\tilde{M}^k \geq 0$ ,  $\tilde{T} > 0$ .

**Доказательство.** Докажем для матрицы  $\tilde{T}$ , для остальных матриц аналогично. По определению

$$\langle z, \tilde{T}z \rangle = \langle x, Tx \rangle + \langle u, Ou \rangle = \langle x, Tx \rangle > 0.$$

■

Будем действовать так же, как и в случае с непрерывной системой. Введём функцию цены

$$V^l(z) = \min_u \left\{ \sum_{k=l}^N \langle z^k, \tilde{M}^k z^k \rangle + \sum_{k=l}^N \langle u^k, N^k u^k \rangle + \langle z^{N+1}, \tilde{T} z^{N+1} \rangle \right\}, \quad z^l = z.$$

Причём  $V^1(z^1) = \min_u J(u)$ . Такая функция цены удовлетворяет дискретному уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое позволяет определить  $V^k(z)$  рекурсивно

$$V^{k-1}(z) = \langle z, \tilde{M}^k z \rangle + \min_{u^k} \left\{ \langle u^k, N^k u^k \rangle + V^k(\tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^k) \right\}, \quad (18)$$

с краевым начальным условием

$$V^{N+1}(z) = \langle z, \tilde{T} z \rangle. \quad (19)$$

Предположим, что функция цены задаётся квадратичной формой  $V^k(z) = \langle z, P^k z \rangle$ , где  $P^k = (P^k)^T > 0$  и покажем, что  $V^{k-1}(z)$  будет иметь ту же форму. Из (18) получаем:

$$V^{k-1}(z) = \langle z, \tilde{M}^k z \rangle + \min_{u^k} \left\{ \underbrace{\langle u^k, N^k u^k \rangle + \langle \tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^k, P^k(\tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^k) \rangle}_{\Psi(z, u^k)} \right\}.$$

Воспользуемся необходимым условием минимума, приравняв производную  $\Psi'_{u^k}(u^*, z)$  к нулю:

$$\begin{aligned} 2N^k u^{k*} + 2(\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k z + 2(\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k u^{k*} &= 0, \\ u^{k*} &= -[N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k]^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k z. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда функция цены

$$\begin{aligned}
V^{k-1}(z) &= \langle z, \tilde{M}^k z \rangle + \langle u^*, N^k u^* \rangle + \langle \tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^*, P^k(\tilde{\Phi}^k z + \tilde{\Gamma}^k u^*) \rangle = \\
&= \langle z, [\tilde{M}^k + (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k - \\
&\quad - (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k (N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k)^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k] z \rangle = \\
&= \langle z, P^{k-1} z \rangle,
\end{aligned}$$

причем, очевидно, что  $P^k = (P^k)^T > 0$ .

Подведём итог: оптимальную стратегию можно найти используя формулу (20), где матрица  $P^k$  должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{cases} P^{k-1} = \tilde{M}^k + (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k - (\tilde{\Phi}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k (N^k + (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Gamma}^k)^{-1} (\tilde{\Gamma}^k)^T P^k \tilde{\Phi}^k, \\ P^{N+1} = \tilde{T}. \end{cases} \quad (21)$$

### 4.3 Численный синтез управления

Приведем алгоритм для построения управления:

1. Переведем систему к дискретному виду, посчитав соответствующие матрицы  $\{\tilde{\Phi}^k\}_{k=1}^N$ ,  $\{\tilde{\Gamma}^k\}_{k=1}^N$ .
2. Запомним матрицы  $\{P^k\}_{k=1}^N$ , полученные из соотношений (21).
3. На каждом шаге работы алгоритма будем переводить  $x^k \longrightarrow x^{k+m}$  так, чтобы величина запаздывания  $h$  стала меньше интервала между наблюдениями  $\varepsilon$ . Причём это можно сделать “прогнав через систему” положение  $x^{k+m-1}$ , посчитанное на предыдущей итерации алгоритма, тем самым исключив зависимость времени работы программы от величины задержки  $h$ .
4. Найти управление  $u^k$  из выражения (20).

В отличие от алгоритма без запаздывания построенный нами алгоритм предполагает дополнительное хранение предыдущего состояния и предыдущего управления.

#### 4.4 Пример работы программы

[illegible]

## 5 Дискретный пример

Рассмотрим ту же самую модель электродвигателя, что и в позапрошлой секции. Но теперь будем предполагать, что управление запаздывает на  $h = 0,05$ , а периодичность наблюдений  $\varepsilon = 0,2$ .

Проведем редукцию той системы к дискретной. Посчитаем все матрицы численными методами.

$$x^{k+1} = \Phi x^k + \Gamma_1 u^k + \Gamma_2 u^{k-1},$$

где

$$\Phi = e^{A\varepsilon} \approx \begin{pmatrix} 0,6705 & -0,0013 \\ -0,0669 & 0,1354 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \int_h^\varepsilon e^{As} ds \cdot B \approx \begin{pmatrix} 0,2345 \\ -0,0175 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \int_0^h e^{As} ds \cdot B \approx \begin{pmatrix} 0,0952 \\ -0,0021 \end{pmatrix}.$$

Убедиться в том, что построенная система действительно приближает исходную можно на рисунке Рис. 9.

Оставим все абсолютно так же и посмотрим на графики координат и оптимального управления.

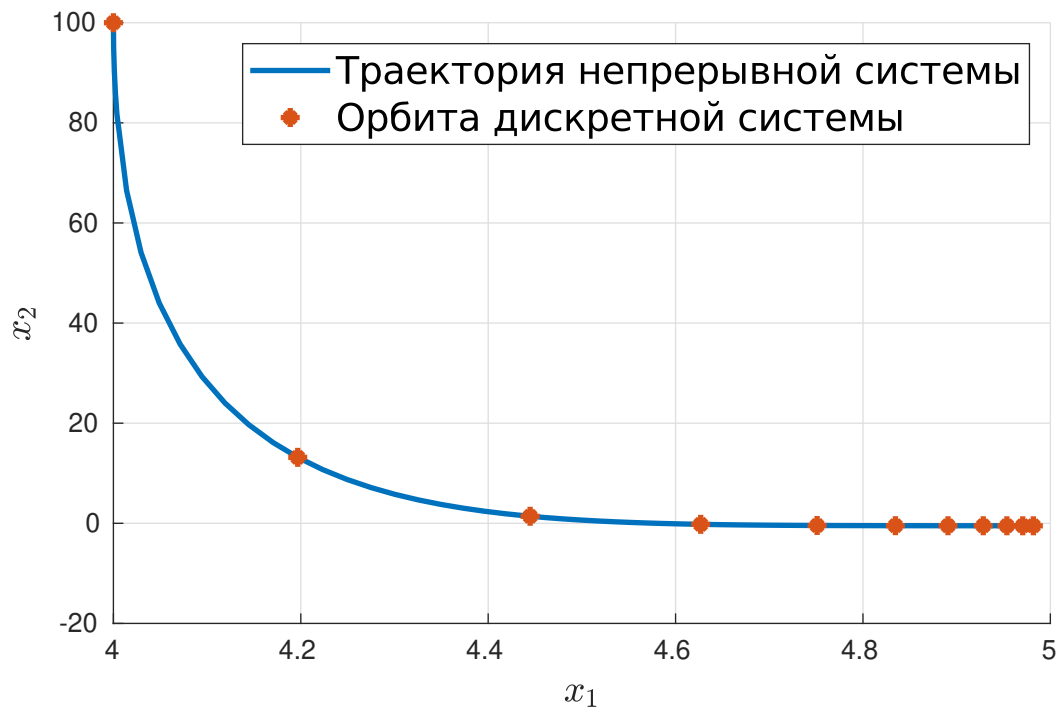


Рис. 9: Траектория непрерывной системы и орбита соответствующей редуцированной дискретной системы выпущенной из начальной точки  $x_0 = [4, 100]^T$  с постоянным управлением  $u \equiv 1$ .

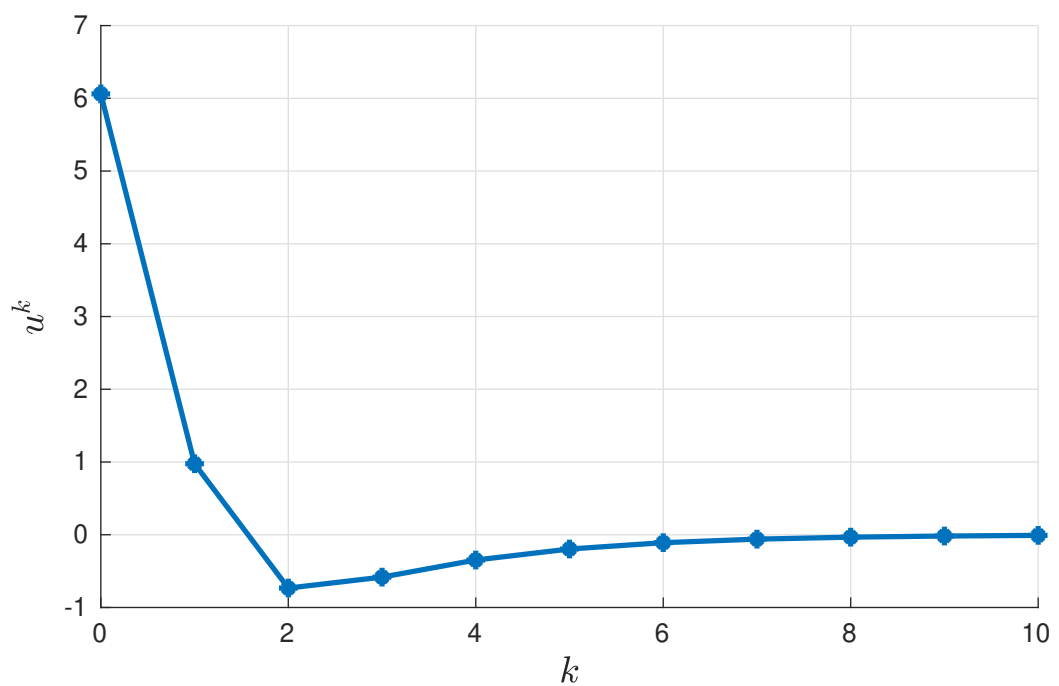


Рис. 10: .

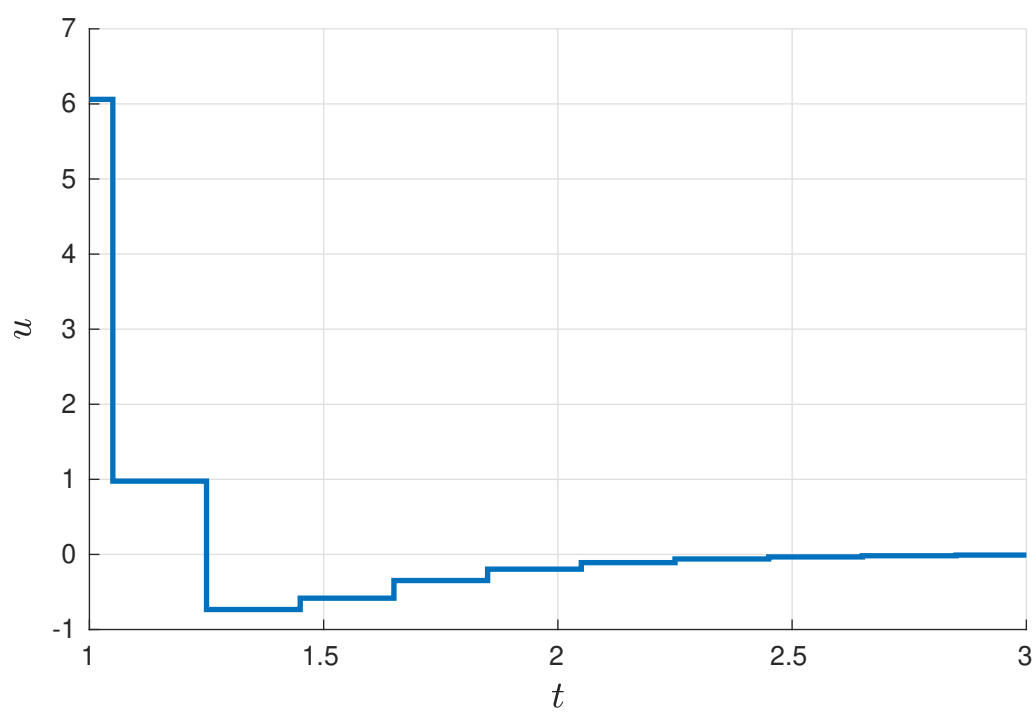


Рис. 11: .

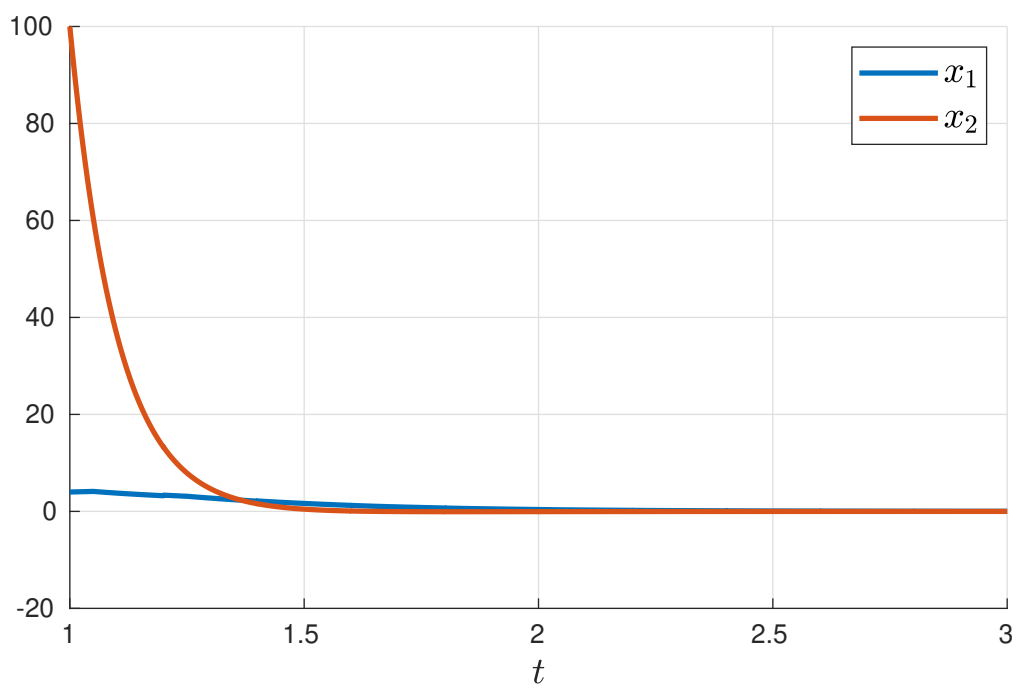


Рис. 12: .

## 6 Заключение



## Список литературы

- [1] Беллман Р. *Динамическое программирование*. М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 400с.
- [2] Красовский Н. Н. *Теория управления движением*. М.: Наука, 1968.
- [3] Егоров А. И. *Уравнения Риккати*. М.: Физматлит, 2001, 320с.
- [4] Ruba M. K. Al-Mulla Hummadi *Simulation Of Optimal Speed Control For a Dc Motor Using Linear Quadratic Regulator (LQR)*. Juornal of Engineering, Number 3, Volume 18 march 2012, Baghdad.
- [5] Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М.: Наука, Москва, 1985.