Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Волновые решения в распределённой модели “хищник–жертва”»

Студент 515 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
д.ф.-м.н., профессор Д. А. Алимов

Москва, 2020

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается двумерная динамическая система

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{au(K-u)}{K} - \dfrac{buv}{1+Nu} + d_1 u_{xx} \\ \dot{v} = -cv + \dfrac{duv}{1+Nu} + d_2 v_{xx}, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, c, d, N, K, d_1, d_2 — положительные параметры, $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$. Здесь $u(x,t)$ ($v(x,t)$) — плотность популяции жертв (хищников) в точке с координатой x в момент времени t, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, d_1, d_2 — величины коэффициентов диффузии жертв и хищников соответственно.

В рамках задачи, для системы (1) требуется:

1. Уменьшить число параметров, сделав замену переменных;
2. Исследовать фазовый портрет нераспределённой системы;
3. Проверить наличие решений распределённой системы;
4. Выбрать подходящее решение и скорость волны;
5. Привести иллюстрации и графики фазовых портретов и решений.

2 Уменьшение числа параметров

Для уменьшения числа параметров проведём линейную замену переменных, которая не изменит свойств исходной системы. Итак, пусть

$$\tilde{u} = \alpha u,\ \tilde{v} = \beta v,\ \tilde{t} = \gamma t,\ \tilde{x} = \delta x.$$

Тогда частные производные исходных переменных u и v примут вид:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tilde{u}}{\alpha}\right) = \frac{\gamma}{\alpha}\tilde{u}_{\tilde{t}}, \quad u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{u}}{\alpha}\right) = \frac{\delta}{\alpha}\tilde{u}_{\tilde{x}}, \quad u_{xx} = \frac{\delta^2}{\alpha}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}},$$

$$v_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tilde{v}}{\beta}\right) = \frac{\gamma}{\beta}\tilde{v}_{\tilde{t}}, \quad v_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{v}}{\beta}\right) = \frac{\delta}{\beta}\tilde{v}_{\tilde{x}}, \quad v_{xx} = \frac{\delta^2}{\beta}\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}}.$$

Подстановкой в рассматриваемую систему (1) получим

$$\begin{cases} \dfrac{\gamma}{\alpha}\tilde{u}_{\tilde{t}} = \dfrac{a}{\alpha K}\tilde{u}(K-\tilde{u}) - \dfrac{b}{\alpha\beta}\cdot\dfrac{\tilde{u}\tilde{v}}{1+\frac{N}{\alpha}\tilde{u}} + \dfrac{d_1\delta^2}{\alpha}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} \\ \dfrac{\gamma}{\beta}\tilde{v}_{\tilde{t}} = -\dfrac{c}{\beta}\tilde{v} + \dfrac{d}{\alpha\beta}\cdot\dfrac{\tilde{u}\tilde{v}}{1+\frac{N}{\alpha}\tilde{u}} + \dfrac{d_2\delta^2}{\beta}\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}}. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что если выбрать коэффициенты замены таким образом:

$$\alpha = N,\ \beta = \frac{Nb}{d},\ \gamma = \frac{d}{N}, \delta^2 = \frac{d}{d_1 N},$$

то система (2) примет вид

$$
\begin{cases}
\tilde{u}_{\tilde{t}} = \dfrac{aN}{d}\tilde{u} - \dfrac{a}{dK}\tilde{u}^2 - \dfrac{\tilde{u}\tilde{v}}{1+\tilde{u}} - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} \\
\tilde{v}_{\tilde{t}} = -\dfrac{cN}{d}\tilde{v} + \dfrac{\tilde{u}\tilde{v}}{1+\tilde{u}} + \dfrac{d_2}{d_1}\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}}.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Таким образом, всюду далее будем исследовать следующую эквивалентную исходной систему с положительными параметрами A, B, C и D:

$$
\begin{cases}
\dot{u} = -Au^2 + Bu - \dfrac{uv}{1+u} - u_{xx} \\
\dot{v} = -Cv + \dfrac{uv}{1+u} + Dv_{xx}.
\end{cases}
\tag{4}
$$

3 Исследование сосредоточенной системы

Мы будем понимать под *сосредоточенной* систему, лишённую диффузии. Для нашей задачи (4) это соответственно:

$$
\begin{cases}
\dot{u} = -Au^2 + Bu - \dfrac{uv}{1+u} \\
\dot{v} = -Cv + \dfrac{uv}{1+u}.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Система (5) не зависит от координаты x, поэтому в данном разделе рассматриваем $u(x,t) \equiv u(t)$, $v(x,t) \equiv v(t)$.

3.1 Поиск неподвижных точек

Найдем неподвижные точки системы (5):

$$
\begin{cases}
0 = -Au^2 + Bu - \dfrac{uv}{1+u} \\
0 = -Cv + \dfrac{uv}{1+u}.
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
0 = u\left(-Au + B - \dfrac{v}{1+u}\right) \\
0 = v\left(-C + \dfrac{u}{1+u}\right).
\end{cases}
\iff
$$

$$
\iff
\begin{cases}
\left[\begin{array}{l} 0 = u \\ 0 = -Au + B - \dfrac{v}{1+u} \end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l} 0 = v \\ 0 = -C + \dfrac{u}{1+u} \end{array}\right.
\end{cases}
\iff
\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\
\begin{cases} u = \dfrac{B}{A} \\ v = 0 \end{cases} \\
\begin{cases} u = \dfrac{C}{1-C} \\ v = \dfrac{B}{1-C} - \dfrac{AC}{(1-C)^2}. \end{cases}
\end{array}\right.
$$

Таким образом, неподвижными для нашей системы являются точки

$$
P_1 = (0,\,0), \quad P_2 = \left(\frac{B}{A},\,0\right) \quad \text{и} \quad P_3 = \left(\frac{C}{1-C},\,\frac{B}{1-C} - \frac{AC}{(1-C)^2}\right).
$$

Отметим также, что точка P_3 лежит в первой координатной четверти, если выполнено условие
$$C \leqslant \frac{B}{A+B} < 1, \tag{6}$$
и при равенстве $C = \frac{B}{A+B}$ совпадает с точкой P_2.

3.2 Типы неподвижных точек

Для определения типов неподвижных точек будем пользоваться Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Для этого приведём якобиан системы (5):
$$J(u,v) = \begin{pmatrix} -2Au + B - \frac{v}{(u+1)^2} & -\frac{u}{1+u} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & -C + \frac{u}{1+u} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Теорема. [Ляпунов. О первом приближении.]*Если все собственные значения λ_i якобиана J для особой точки (u_0, v_0) имеют отрицательные действительные части, то решение $(u,v) \equiv (u_0, v_0)$ системы является асимптотически устойчивым. Если же хотя бы одно собственное значение λ_i якобиана J имеет положительную действительную часть, то решение $(u,v) \equiv (u_0, v_0)$ системы является неустойчивым.*

Найдём собственные значения матрицы Якоби $J(u,v)$ для точки $P_1 = (0,\, 0)$. Выпишем характеристический многочлен:
$$\chi_1(\lambda) = \det \begin{pmatrix} B-\lambda & 0 \\ 0 & -C-\lambda \end{pmatrix} = (B-\lambda)(-C-\lambda).$$
Приравняв нулю характеристический многочлен $\chi_1(\lambda)$, получили собственные значения:
$$\lambda_1 = B, \quad \lambda_2 = -C.$$
Заметим, что при любом значении параметров собственные числа λ_1 и λ_2 вещественные, и $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 < 0$, то есть точка P_1 является седлом.

Найдём собственные значения матрицы Якоби $J(u,v)$ для точки $P_2 = \left(\frac{B}{A},\, 0\right)$. Выпишем характеристический многочлен:
$$\chi_2 = \det \begin{pmatrix} -B-\lambda & -\frac{B}{A+B} \\ 0 & -C + \frac{B}{A+B} - \lambda \end{pmatrix} = (-B-\lambda)\left(-C + \frac{B}{A+B} - \lambda\right)$$
Приравняв нулю характеристический многочлен $\chi_1(\lambda)$, получили собственные значения:
$$\lambda_1 = -B, \quad \lambda_2 = -C + \frac{B}{A+B}.$$
Заметим, что при любом значении параметров собственные числа λ_1 и λ_2 вещественные; $\lambda_1 < 0$ при любом значении параметров, а $\lambda_2 > 0$ при $C < \frac{B}{A+B}$, $\lambda_2 < 0$ при $C > \frac{B}{A+B}$ и $\lambda_2 = 0$ при $C = \frac{B}{A+B}$.

Таким образом,

1. При $C > \frac{B}{A+B}$: P_1 является устойчивым узлом;
2. При $C < \frac{B}{A+B}$: P_1 является седлом.

Найдём собственные значения матрицы Якоби $J(u,v)$ для точки $P_3 = \left(\frac{C}{1-C},\ \frac{B-BC-AC}{(1-C)^2}\right)$. Выпишем характеристический многочлен:

$$\chi_3 = \det\begin{pmatrix} \frac{C}{1-C}(-A+B-(A+B)C)-\lambda & -C \\ B-(A+B)C & -\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda\left(\frac{C}{1-C}(-A+B-(A+B)C)-\lambda\right) + C(B-(A+B)C) =$$
$$= \lambda^2 - \frac{C}{1-C}(-A+B-(A+B)C)\lambda + C(B-(A+B)C).$$

В таком случае:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{C}{1-C}(-A+B-(A+B)C) \pm \sqrt{\frac{C^2}{(1-C)^2}(-A+B-(A+B)C)^2 - 4(B-(A+B)C)}}{2}$$

Введём обозначения: $M = \frac{C}{1-C}(-A+B-(A+B)C)$, $N = 4(B-(A+B)C)$ и заметим, что N на рассматриваемом промежутке $0 < C \leqslant \frac{B}{A+B}$ ограничена $0 \leqslant N < 4B$. Таким образом устойчивость выражения не зависит от подкоренного выражения.

$$\lambda_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - N}}{2}, \quad \text{где } N \geqslant 0.$$

Получается, что точка устойчива при $\frac{B-A}{A+B} < C < \frac{B}{A+B}$ и неустойчива при $0 < C < \frac{B-A}{A+B}$. При этом для анализа характера точек нужно исследовать знак подкоренного выражения, что аналитически сделать сложно. Подбором параметров можно получить ситуации, когда точка P_3 является узлом, фокусом или центром.

3.3 Изоклины

Также рассмотрим изоклины системы (4), которые задаются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} u &= \frac{C}{1-C}, \\ v &= -Au^2 + (B-A)u + B. \end{aligned} \tag{8}$$

Отметим, что первая изоклина представляет собой вертикальную прямую, а вторая параболу с ветвями вниз, максимальная точка которой $\left(\frac{B-A}{2\sqrt{2}},\ AB + \frac{1}{4}A(B-A)^2\right)$. Таким образом обе изоклины лежат в первой координатной четверти. Первая изоклина существует при $C < 1$.

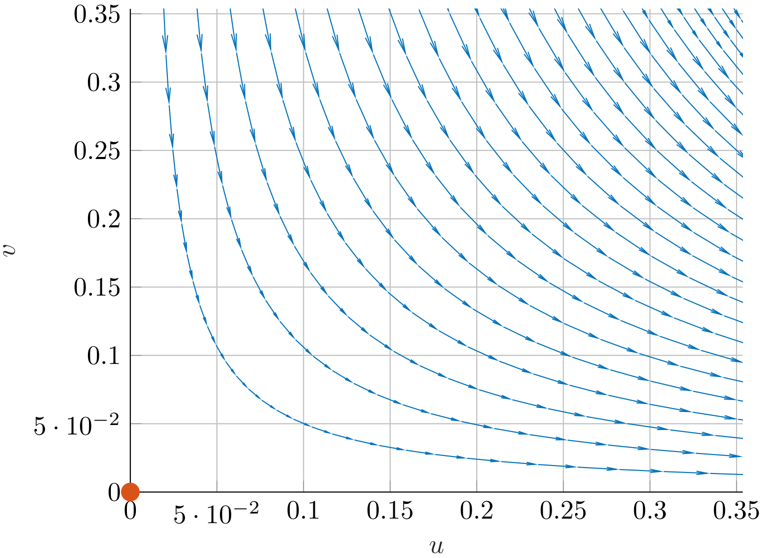


Рис. 1: Фазовый портрет системы (4) вблизи точки P_1 при $A = B = C = 1$.

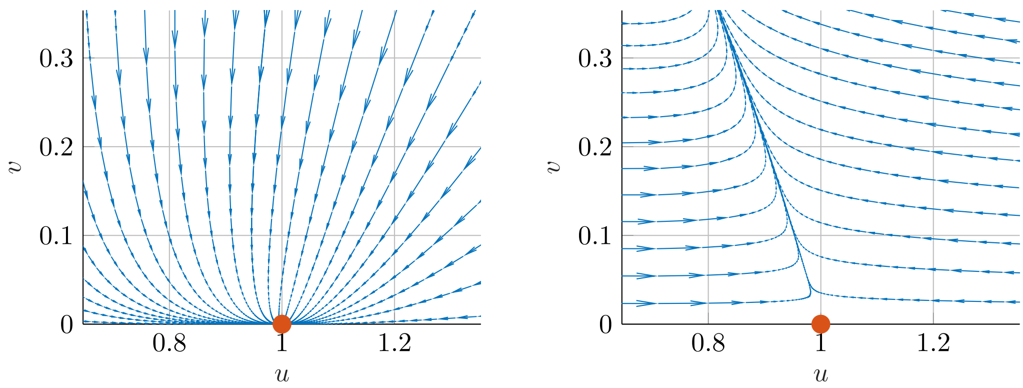


Рис. 2: Фазовый портрет системы (4) вблизи точки P_2 при значениях параметров $A = B = 1$, $C = 2$(слева) и $C = 0{,}4$(справа).

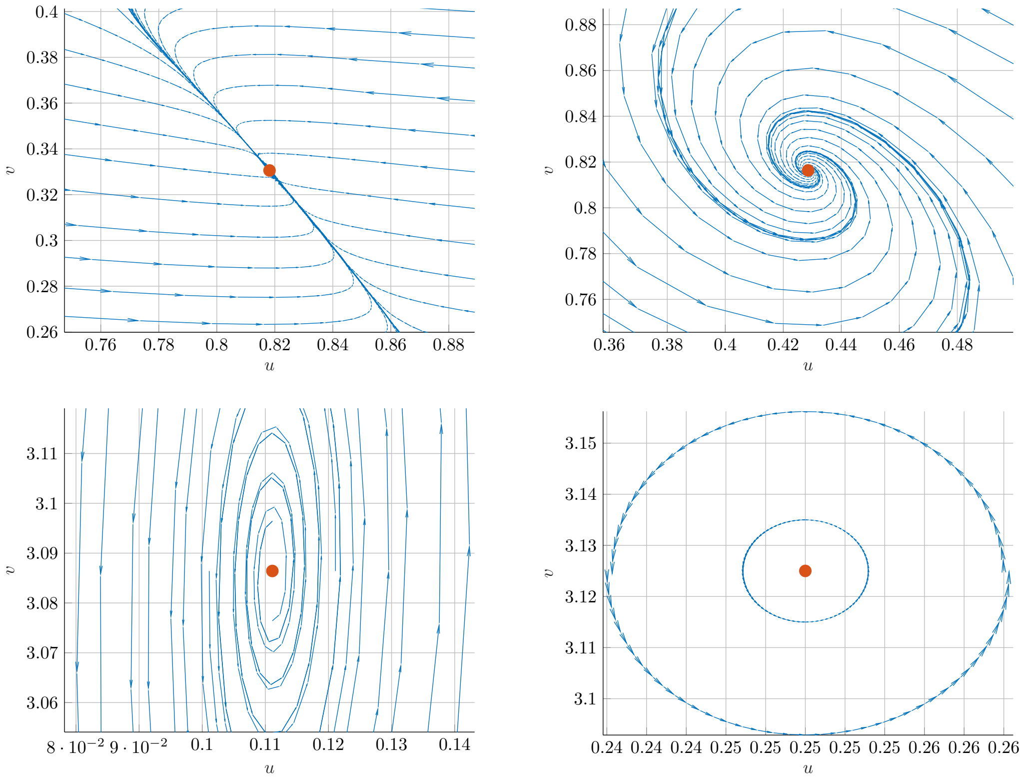


Рис. 3: Фазовый портрет точки P_3 при значениях параметров: $A = B = 1$, $C = 0{,}45$ (слева сверху); $A = B = 1$, $C = 0{,}5$ (справа сверху); $A = 2$, $B = 3$, $C = 0{,}1$ (слева снизу); $A = 2$, $B = 3$, $C = 0{,}2$ (справа снизу).

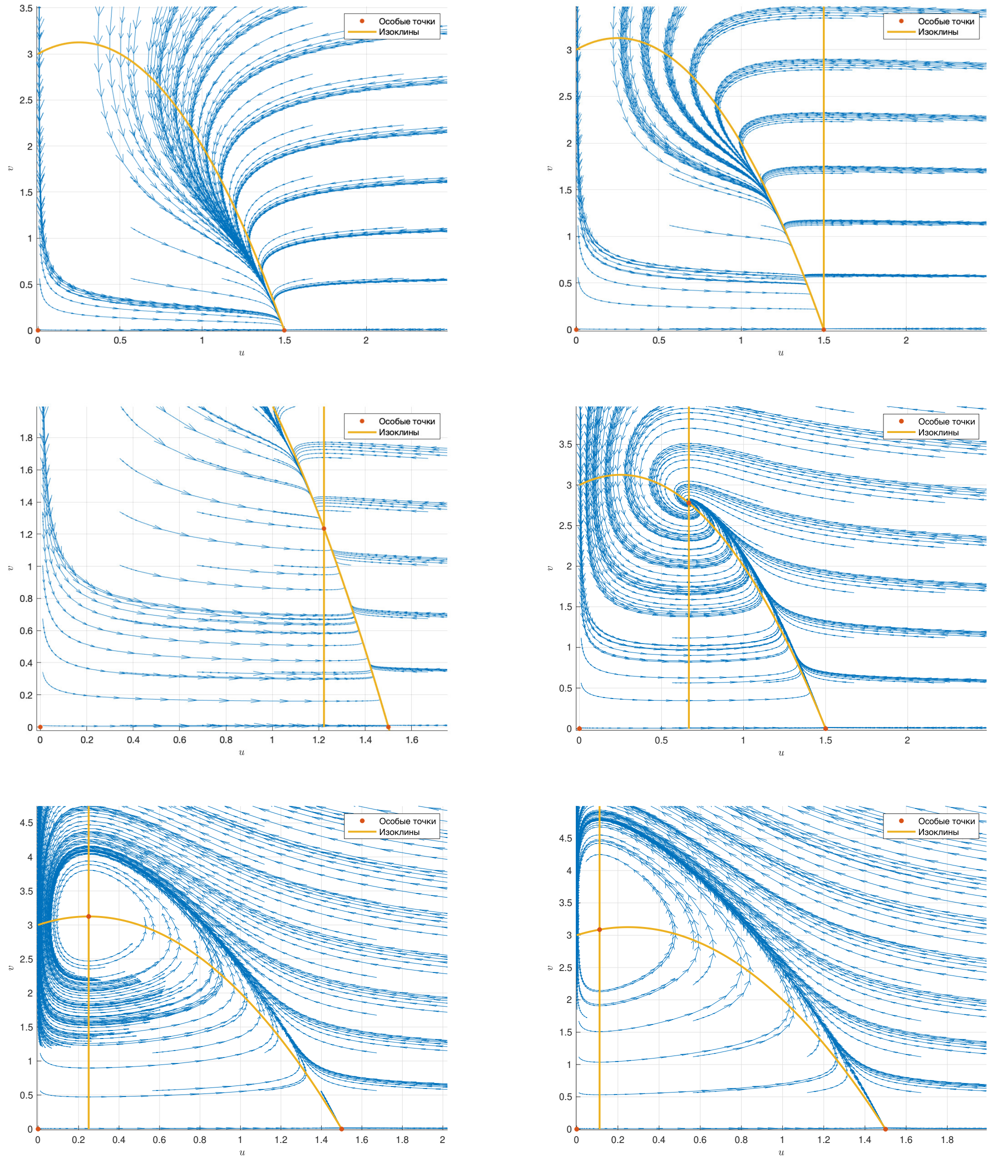


Рис. 4: Фазовые портреты всех состояний системы. Здесь были взяты фиксированные параметры $A = 2$, $B = 3$ и уменьшали C от 1 до 0,1.

4 Исследование распределённой системы

Предположим, что решения системы (4) представляются в виде $u(z) = u(x,t)$, $v(z) = v(x,t)$, $z = x + mt$, $m > 0$. Тогда система (4) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} mu'(z) = -Au^2(z) + Bu(z) - \dfrac{u(z)v(z)}{1+u(z)} + u''(z) \\ mv'(z) = -Cv(z) + \dfrac{u(z)v(z)}{1+u(z)} + Dv''(z) \end{cases} \tag{9}$$

Упростим задачу, полагая $D = 0$, то есть считаем, что коэффициент диффузии жертв много больше, чем коэффициент диффузии хищников. При сделанных предположениях из (9) следует, что

$$\begin{cases} \dot{u} = w \\ \dot{v} = -\dfrac{C}{m}v + \dfrac{uv}{m(1+u)} \\ \dot{w} = Au^2 - Bu + \dfrac{uv}{1+u} + mw \end{cases} \tag{10}$$

В фазовом пространстве (u, v, w) имеются следующие положения равновесия системы (10):

$$P_1 = (0,\, 0,\, 0), \quad P_2 = \left(\frac{B}{A},\, 0,\, 0\right), \quad P_3 = \left(\frac{C}{1-C},\, \frac{B-(A+B)C}{(1-C)^2},\, 0\right).$$

Исследуем устойчивость точек P_1, P_2 и P_3 аналогично предыдущему разделу. Матрица Якоби имеет вид:

$$J(u,v,w) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \frac{v}{c(1+u)^2} & -\frac{C}{m} + \frac{u}{m(1+u)} - \lambda & 0 \\ 2Au - B + \frac{v}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} & m-\lambda \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первую точку:

$$J_1 = \left(-\frac{C}{m} - \lambda\right)\left(-\lambda(m-\lambda) + B\right)$$

$$\lambda_1 = -\frac{C}{m} < 0,$$
$$\lambda_{2,3} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4B}}{2},\ \operatorname{Re}\lambda_{2,3} > 0.$$

Отметим, что при $m < 2\sqrt{B}$ возникают неустойчивые периодические колебания системы относительно точки $P_1 = (0,0,0)$. Так как по смыслу задачи функции u, v неотрицательны, то этот случай необходимо исключить из рассмотрения.

Рассмотрим вторую точку:

$$J_2 = \left(-\frac{C}{m} + \frac{B}{(A+B)m} - \lambda\right)\left(-\lambda(m-\lambda) - B\right).$$

$$\lambda_1 = -\frac{C}{m} + \frac{B}{(A+B)m},$$
$$\lambda_{2,3} = \frac{m \pm \sqrt{m^2+4B}}{2},\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0.$$

Отметим, что $\lambda_1 > 0$ при $C < \frac{B}{A+B}$ и $\lambda_1 < 0$ при $C > \frac{B}{A+B}$. Все собственные значения вещественные.

Из предыдущего следует, что при $m > 2\sqrt{B}$ и $C < \frac{B}{A+B}$ существует монотонное волновое решение, переводящее из точки P_2 в точку P_1 волновые решения; при $m > 2\sqrt{B}$ и $C > \frac{B}{A+B}$ существует монотонное волновое решение, переводящее из P_1 в P_2, либо наоборот. Приведём ниже соответствующие графики для второго случая. Из фазового портерта системы можно получить, что при любом из таких решений $v(z) \equiv 0$, что протеворечит условию задачи.

Рассмотрим третью точку:

$$J_3 = -\lambda^3 + m\lambda^2 - \frac{AC - BC + AC^2 + BC^2}{1-C}\lambda + \frac{B - AC - BC}{m}C.$$

$$-3\lambda^2 + 2m\lambda - \frac{AC - BC + AC^2 + BC^2}{1-C} = 0.$$

$$\lambda_{\max,\min} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 3\frac{AC-BC+AC^2+BC^2}{1-C}}}{-3}.$$

Из последнего соотношения вытекает, что либо существует как минимум одно вещественное собственное значение с положительной действительной частью, либо существует два комплексно-сопряженных собственных значения с положительной действительной частью.

Из анализа нераспределённой системы мы ожидаем, что при близости к C к $\frac{B}{A+B}$ мы будем иметь монотонный переход из P_3 в P_1, а при близости к нулю не обязательно монотонный переход. Приведем графики для второго случая как более интересного.

Приведём изоклины данной системы:

$$u = \frac{1}{1-C},$$
$$v = -\frac{A}{m}u^2 + \frac{B}{m}u - \frac{uv}{m(1+u)},$$
$$w = 0.$$

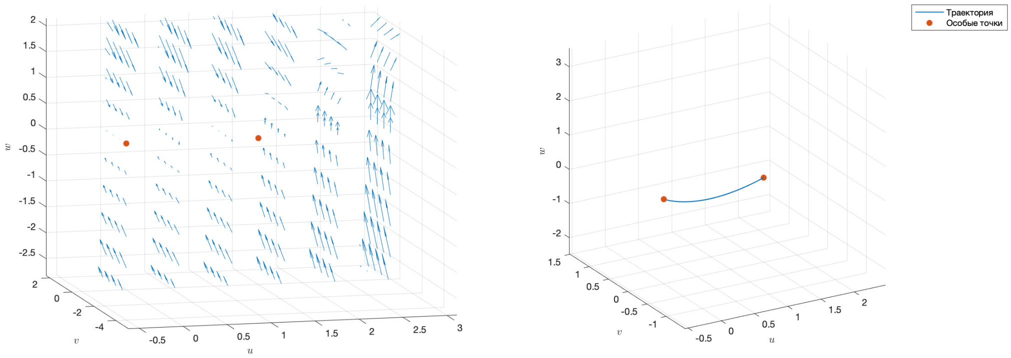


Рис. 5: Фазовый портрет системы (10) вблизи точки при $A = 2$, $B = 3$, $C = 2$, $m = 4$ и траектория волнового решения.

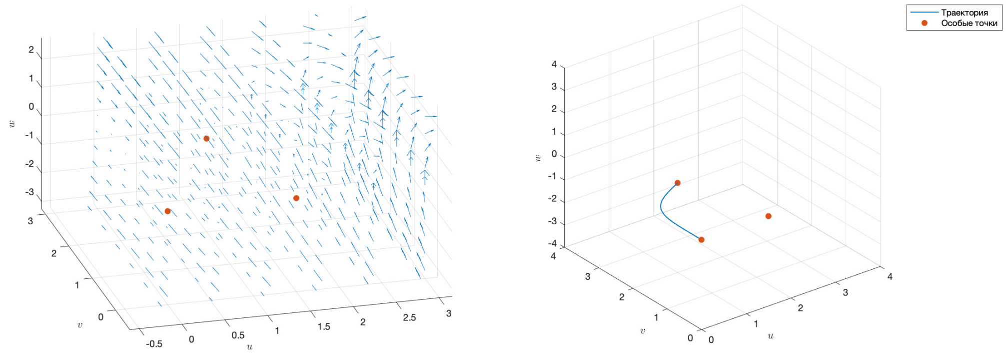
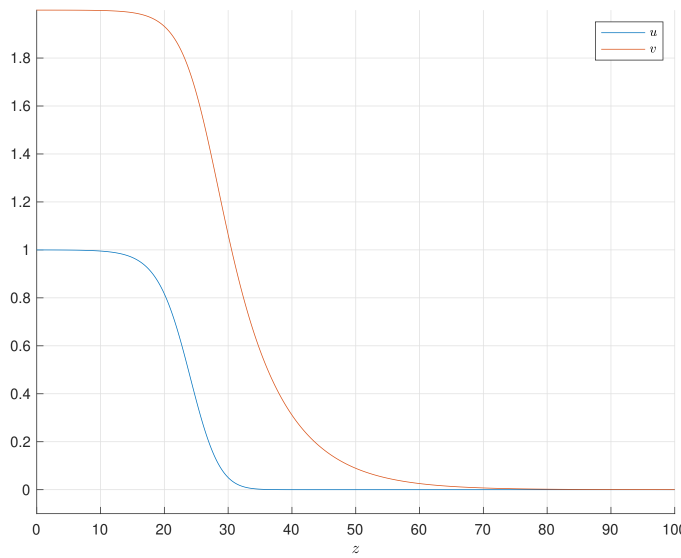


Рис. 6: Фазовый портрет системы (10) вблизи точки при $A = 2$, $B = 3$, $C = 0{,}5$, $m = 4$ и траектория волнового решения.



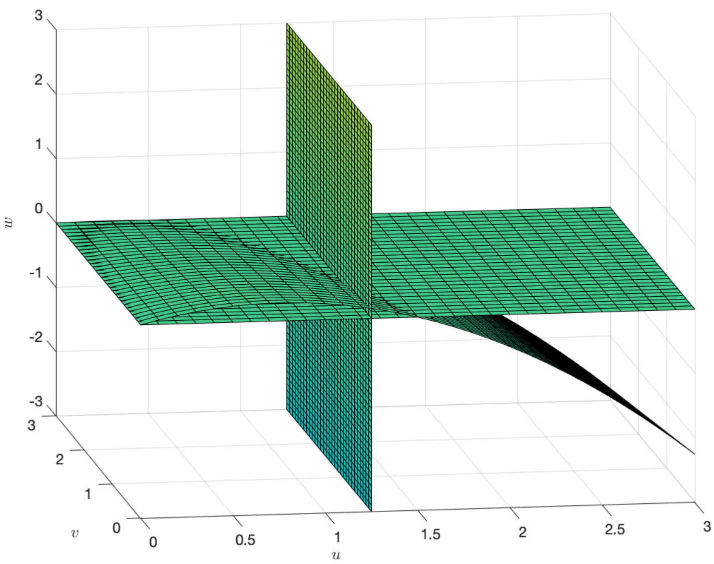


Рис. 7: Изоклины системы (10).

Список литературы

[1] А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.