



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Лабораторная работа

«Теория стабилизации»

Студент 515 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
д.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2020

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Модель перевёрнутого маятника	5
2.1	Построение математической модели	5
2.2	Устойчивость верхнего положения равновесия	6
2.3	Линеаризация модели	7
3	Стабилизация модели	9
3.1	Линейный стабилизатор по полной обратной связи	9
3.2	Линейный стабилизатор по динамической обратной связи	9
3.3	Линейный стабилизатор, решающий линейно-квадратичную задачу оптимальной стабилизации	11
4	Примеры	12

1 Постановка задачи

Рассматривается математическая модель движения вертикального маятника на подвижном основании (тележке) массы M . На конце маятника расположен груз малых размеров массы m . Длина невесомого стержня маятника равна l . Предполагается, что маятник может совершать вращательные движения относительно его крепления без ограничений на углы отклонения. К шарниру, соединяющему маятник и тележку, прикреплена спиральная пружина жесткости ξ . При верхнем, вертикальном положении маятника пружина не деформирована. Сила сопротивления пружины, действующая на маятник, пропорциональна величине угла, отсчитываемого от вертикального положения маятника. Тележка может двигаться по прямой (в горизонтальной плоскости). Задан коэффициент вязкого трения тележки о воздух (сила трения пропорциональна первой степени скорости) — k . Силой трения, действующей на маятник и груз, можно пренебречь. К тележке может быть приложена сила $u \in \mathbb{R}$, позволяющая двигаться влево или вправо.

Необходимо последовательно выполнить следующие задания:

1. Выписать математические уравнения системы. Определить параметры, соответствующие верхнему, неустойчивому положению равновесия маятника и неподвижному положению тележки в заданной точке с координатами s^* . Обосновать неустойчивость.
2. Выписать математические уравнения для “линеаризованной” модели движения в малой окрестности найденного неустойчивого положения равновесия.
3. Написать программу, рассчитывающую траектории движения исходной, нелинейной системы при заданном законе управления (в позиционной форме или в зависимости от вектора наблюдений).
4. Исследовать возможность построения линейного стабилизатора для линеаризованной системы, делающего найденное неустойчивое положение равновесия асимптотически устойчивым:
 - (а) линейный стабилизатор по полной обратной связи с заданными собственными значениями замкнутой системы;
 - (б) линейный стабилизатор по динамической обратной связи с заданными собственными значениями замкнутой системы и коэффициентами усиления асимптотического наблюдателя (при условии, что в каждый момент времени доступны только координаты тел и конца маятника, но не их скорости);
 - (с) линейный стабилизатор, решающий линейно-квадратичную задачу оптимальной стабилизации (при известной полной позиции системы), с заданными матрицами из функционала качества.

Для каждого случая написать программу, позволяющую построить линейный стабилизатор по произвольным заданным пользователем параметрам (собственным значениям замкнутой системы; матрицам из функционала качества). Построенный стабилизатор должен быть подставлен, как в линеаризованную, так и в исходную нелинейную систему. Необходимо поставить эксперименты относительно возможности использования построенного стабилизатора при различных отклонениях начального положения от равновесного, а также при случайных малых возмущениях, действующих на маятник (верхнюю точку).

2 Модель перевёрнутого маятника

2.1 Построение математической модели

Рассмотрим “перевёрнутый” маятник, схематично изображённый на Рис. 1. Будем считать, что вся масса маятника сосредоточена в одной точке — точке маятника, максимально удалённой от шарнира. Кроме того считаем, что сила сопротивления спиралевидной пружины приложена к той же точке.

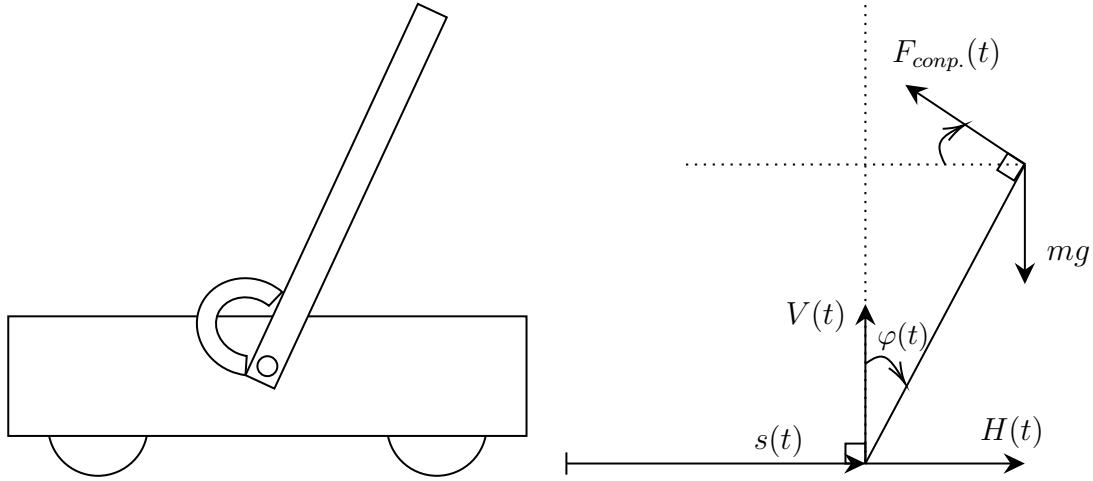


Рис. 1: Схематичное изображение маятника и сил, приложенных к нему.

Пусть в момент времени t перемещение шарнира характеризуется функцией $s(t)$, а угловое отклонение маятника — функцией $\varphi(t)$. Обозначим за $H(t)$ и $V(t)$ соответственно горизонтальную и вертикальную силы реакции, приложенные к шарниру, а за J — момент инерции маятника относительно оси, проведённой через груз (так как вся масса маятника содержится в грузе, то $J = 0$). Остальные использованные параметры описаны в предыдущем разделе. Тогда для рассматриваемой системы справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2}{dt^2}(s(t) + l \sin \varphi(t)) &= H(t) - \xi \varphi(t) \cos \varphi(t); \\
 m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \varphi(t)) &= V(t) + \xi \varphi(t) \sin \varphi(t) - mg; \\
 J \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) &= l V(t) \sin \varphi(t) - l H(t) \cos \varphi(t) = 0; \\
 M \frac{d^2}{dt^2} s(t) &= u(t) - H(t) - k \frac{d}{dt} s(t).
 \end{aligned} \tag{1}$$

С целью упрощения уравнений предположим, что масса груза m много меньше массы тележки M , и поэтому пренебрежем горизонтальной реакцией $H(t)$ на движе-

ние тележки. В итоге после преобразований уравнений (1) получим:

$$\begin{aligned} m\ddot{s}(t) + ml\ddot{\varphi}(t) \cos \varphi(t) - ml\dot{\varphi}^2(t) \sin \varphi(t) &= H(t) - \xi\varphi(t) \cos \varphi(t); \\ - ml\ddot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) - ml\dot{\varphi}^2(t) \cos \varphi(t) &= V(t) - mg + \xi\varphi(t) \sin \varphi(t); \\ V(t) &= \frac{\cos \varphi(t)}{\sin \varphi(t)} H(t); \\ M\ddot{s}(t) &= u(t) - k\dot{s}(t). \end{aligned}$$

Исключив из последних соотношений $H(t)$ и $V(t)$ получим окончательный закон движения рассматриваемой системы тел:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{\xi}{ml}\varphi - \frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{1}{l} \ddot{s} \cos \varphi &= 0; \\ M\ddot{s} &= u - k\dot{s}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, введя вектор $x = [\varphi, \dot{\varphi}, s, \dot{s}]^T$, получим нелинеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\xi}{ml}x_1 + \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{1}{Ml}(u - kx_4) \cos x_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{u}{M} - \frac{k}{M}x_4. \end{cases} \quad (3)$$

2.2 Устойчивость верхнего положения равновесия

Проверим, когда положение равновесия для неподвижной тележки с координатой $s(t) \equiv s^*$ является неустойчивым. Так как $s(t) = \text{const}$, то $\dot{s}(t) = \ddot{s}(t) \equiv 0$, тогда уравнение (2) примет вид:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\xi}{ml}\varphi + \frac{g}{l} \sin \varphi \quad (4)$$

Теперь воспользуемся следующей теоремой, доказанной в курсе «Теории устойчивости»:

Теорема 1 (Ляпунов). Пусть рассматривается система вида

$$A\ddot{q} = -\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q},$$

где $A = A^T$, $\Pi(0) = \frac{\partial \Pi}{\partial q}(0) = 0$, $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ — изолированное положение равновесия системы.

Тогда если $q = 0$ не является точкой локального минимума функции $\Pi(q)$, причём существует отрицательное собственное значение матрицы $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}(0)$, то положение $(0, 0)$ не устойчиво по Ляпунову.

Действительно, для нашей системы (4) существует функция

$$\Pi(\varphi) = \frac{\xi}{2ml}\varphi^2 + \frac{g}{l}\cos\varphi - \frac{g}{l}$$

такая, что выполнены условия предыдущей теоремы. Единственное собственное значение Якобиана $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}(0)$ вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{\xi}{ml} - \frac{g}{l}.$$

Получается, что при

$$\xi < mg. \quad (5)$$

верхнее положение равновесия “перевёрнутого” маятника будет неустойчиво. Это соотносится с физикой рассматриваемой системы. Далее мы будем рассматривать систему при условии (5).

2.3 Линеаризация модели

Разложив в ряд Тейлора синусы и косинусы в уравнении (2) в окрестности интересующего нас положения $\varphi = 0$, получим следующую линеаризацию:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\xi - mg}{ml}\varphi + \frac{1}{l}\ddot{s} = 0.$$

Для упрощения дальнейших рассуждений мы введем новый вектор состояний, первая компонента которого будет представлять аппроксимацию перемещения груза, то есть

$$z(t) = [s(t) + l\varphi(t), \dot{s}(t) + l\dot{\varphi}(t), s(t), \dot{s}(t)]^T.$$

Таким образом получили линеаризованную систему:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{mg - \xi}{ml}(z_1 - z_3) \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \frac{u}{M} - \frac{k}{M}z_4 \end{cases} \iff \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mg - \xi}{ml} & 0 & -\frac{mg - \xi}{ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{M} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u. \quad (6)$$

Рассмотрим вопрос об управляемости получившейся системы. Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 2 (Уточнённый критерий Калмана). Система $\dot{x} = Ax + Bu$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ является полностью управляемой тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости $C = [B, AB, \dots, A^{n-m}B]$ равен n .

Составим матрицу управляемости для линеаризованной системы и посчитаем её определитель.

$$C = [B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\xi - mg}{Mml} \\ 0 & 0 & \frac{\xi - mg}{Mml} & -k \frac{\xi - mg}{M^2ml} \\ 0 & \frac{1}{M} & -\frac{k}{M^2} & \frac{k^2}{M^3} \\ \frac{1}{M} & -\frac{k}{M^2} & \frac{k^2}{M^3} & -\frac{k^3}{M^4} \end{pmatrix},$$

$$\det C = \frac{(\xi - mg)^2}{M^4 m^2 l^2}.$$

Получается, если $\xi \neq mg$, то $\text{rank } C = n$, а, значит, линеаризованная система полностью управляема.

3 Стабилизация модели

3.1 Линейный стабилизатор по полной обратной связи

Из курса «Теории стабилизации» помним, что для системы $\dot{x} = Ax + Bu$ либо всегда существует линейный стабилизатор, либо не существует никакого стабилизатора. Итак замкнем систему (6) управлением вида $u = Kx$. Тогда имеем:

$$\dot{x} = (A + BK)x, \quad (7)$$

где $K = [k_i] \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ — искомая матрица.

Требуется найти такую матрицу K , чтобы система (7) была асимптотически устойчива, причём собственные числа матрицы $(A + BK)$ были равны эталонным наперёд заданным μ_1, \dots, μ_n .

Найдем характеристический полином матрицы $(A + BK)$:

$$\begin{aligned} \chi(A + BK) = \lambda^4 - \frac{k_4 + k}{M} \lambda^3 + \left(\frac{\xi}{ml} - \frac{g}{l} - \frac{k_3}{M} \right) \lambda^2 + \\ + \left(\frac{k_2g + k_4g - kg - k_2\xi}{Ml} + \frac{k\xi - k_2\xi - k_4\xi}{Mml} \right) \lambda + \frac{k_1g + k_3g}{Ml} - \frac{k_1\xi + k_3\xi}{Mlm}. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим за $d = [d_i] \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ коэффициенты эталонного полинома

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \mu_i).$$

Тогда искомая матрица K удовлетворяет уравнению:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{M} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{M} & 0 \\ 0 & \frac{mg-\xi}{Mml} & 0 & \frac{mg-\xi}{Mml} \\ \frac{mg-\xi}{Mml} & 0 & \frac{mg-\xi}{Mml} & 0 \end{pmatrix} K^T = d - \begin{pmatrix} -\frac{k}{M} \\ \frac{\xi-mg}{ml} \\ \frac{k}{Mml}(\xi - mg) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.2 Линейный стабилизатор по динамической обратной связи

Пусть наряду с системой (6) нам задано уравнение наблюдателя (или измерителя):

$$y = Cz, \quad (9)$$

где y — известная вектор функция, интерпретируемая как показания приборов. Мы считаем, что в каждый момент времени нам известно лишь положение тележки и груза, но не их скорости, поэтому в нашем случае

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется построить такую оценку $\hat{z}(t)$ вектора состояния $z(t)$, чтобы она обладала свойством

$$\hat{z}(t) - z(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Тогда, согласно теории, стабилизирующее управление системой (6) примет вид

$$u = K\hat{z},$$

а асимптотическим идентификатором состояния линейной системы (6), (9) является

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Bu + L(y - C\hat{z}),$$

где неизвестная матрица L подлежит определению.

Рассмотрим две вспомогательные системы:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= Az_1 + Bu_1, \\ \dot{z}_2 &= A^T z_2 - C^T u_2, \end{aligned} \tag{10}$$

где переменные z_1, z_2, u_1, u_2 носят характер формальных обозначений. Управляемость первой вспомогательной системы исследована в предыдущем разделе. Исследуем управляемость второй вспомогательной системы аналогично. Матрица управляемости второй вспомогательной системы имеет вид

$$[C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{mg-\xi}{lm} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\xi-mg}{lm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{k}{M} \end{pmatrix},$$

и очевидно имеет ранг равный размерности системы. Это значит, что вторая вспомогательная система так же полностью управляема.

Тогда мы можем найти искомые матрицы K и L^T как решение задачи линейной стабилизации первой и второй вспомогательных систем соответственно. Для первой системы решение известно из предыдущего раздела, поэтому далее будем искать матрицу L .

Пусть $-C^T = [q_1, q_2]$, тогда составим матрицу $T = [e_1, e_2, e_3, e_4]$, $\det T \neq 0$, где

$$\begin{aligned} e_1 = q_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & e_2 = A^T q_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ e_3 = (A^T)^2 q_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{mg-\xi}{ml} \\ 0 \\ \frac{mg-\xi}{ml} \\ 0 \end{pmatrix}, & e_4 = (A^T)^3 q_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{mg-\xi}{ml} \\ 0 \\ \frac{mg-\xi}{ml} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Делаем замену переменных $z = T\zeta$. Тогда

$$\tilde{A} = T^{-1}A^T T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{k(\xi - mg)}{Mlm} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\xi - mg}{lm} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{k}{M} \end{pmatrix}$$

и замечаем, что полученная матрица имеет форму Фробениуса. Это означает, что коэффициенты ее характеристического полинома равны соответственно:

$$p_1 = \frac{k}{M}, \quad p_2 = \frac{\xi - mg}{lm}, \quad p_3 = \frac{k(\xi - mg)}{Mlm}, \quad p_4 = 0.$$

Пусть d_i — коэффициенты эталонного полинома:

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \nu_i),$$

тогда можем построить матрицу

$$L^T = \Gamma(T\tilde{K})^{-1},$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} p_1 - d_1 & p_2 - d_2 & p_3 - d_3 & p_4 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 1 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Линейный стабилизатор, решающий линейно-квадратичную задачу оптимальной стабилизации

Пусть теперь наряду с системой (6) нам задан критерий оптимальности

$$J = \int_0^{+\infty} [\langle x, Qx \rangle + \langle u, Ru \rangle] dt, \quad (11)$$

где Q и R — вещественные симметричные положительно полуопределенная и положительно определенная матрицы соответственно. Найденный линейный стабилизатор должен минимизировать критерий оптимальности (11).

Согласно теории этот закон управления имеет вид

$$u = -R^{-1}B^T Px,$$

где матрица P удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

4 Примеры

Ниже приведены примеры работы программы для каждого из описанных в предыдущем разделе алгоритмов стабилизации и прочие пояснительные графики. Для каждого из приведённых случаев, значения основных констант одинаково и равно

$$m = 2, \xi = 5, l = 10, g = 10, k = 2, M = 20.$$

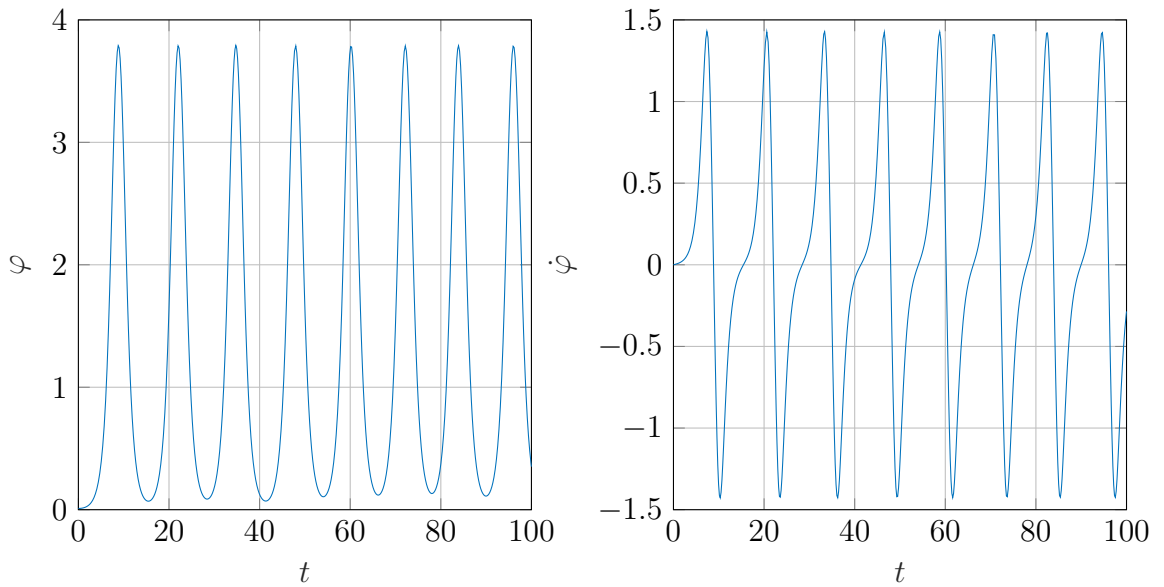


Рис. 2: Поведение нелинеаризованной системы вблизи положения равновесия $[\varphi^0, \dot{\varphi}^0] = [0,001, 0]$ без переданного управления с постоянным положением тележки. Демонстрируется неустойчивость верхнего положения равновесия. Движение груза представляет собой незатухающие колебания, так как на груз действуют только консервативные силы (трение маятника о шарнир и сопротивление воздуха математической моделью не учитывались).

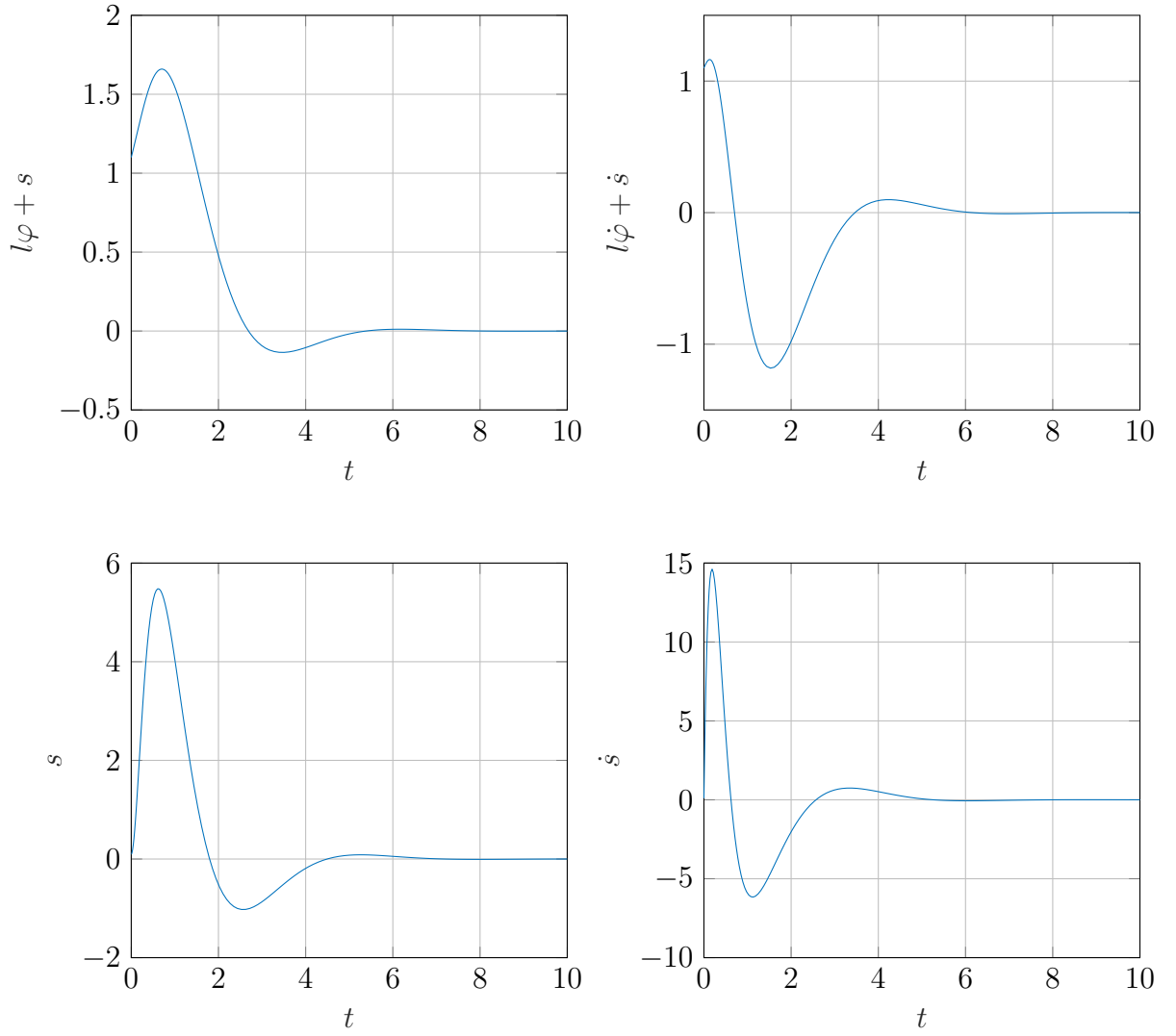


Рис. 3: Поведение линеаризованной системы при действии линейного стабилизатора с полной обратной связью для заданных собственных значений замкнутой системы $\mu_1 = -2 + i$, $\mu_2 = -2 - i$, $\mu_3 = \mu_4 = -3$ из положения $z^0 = [1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1]$.

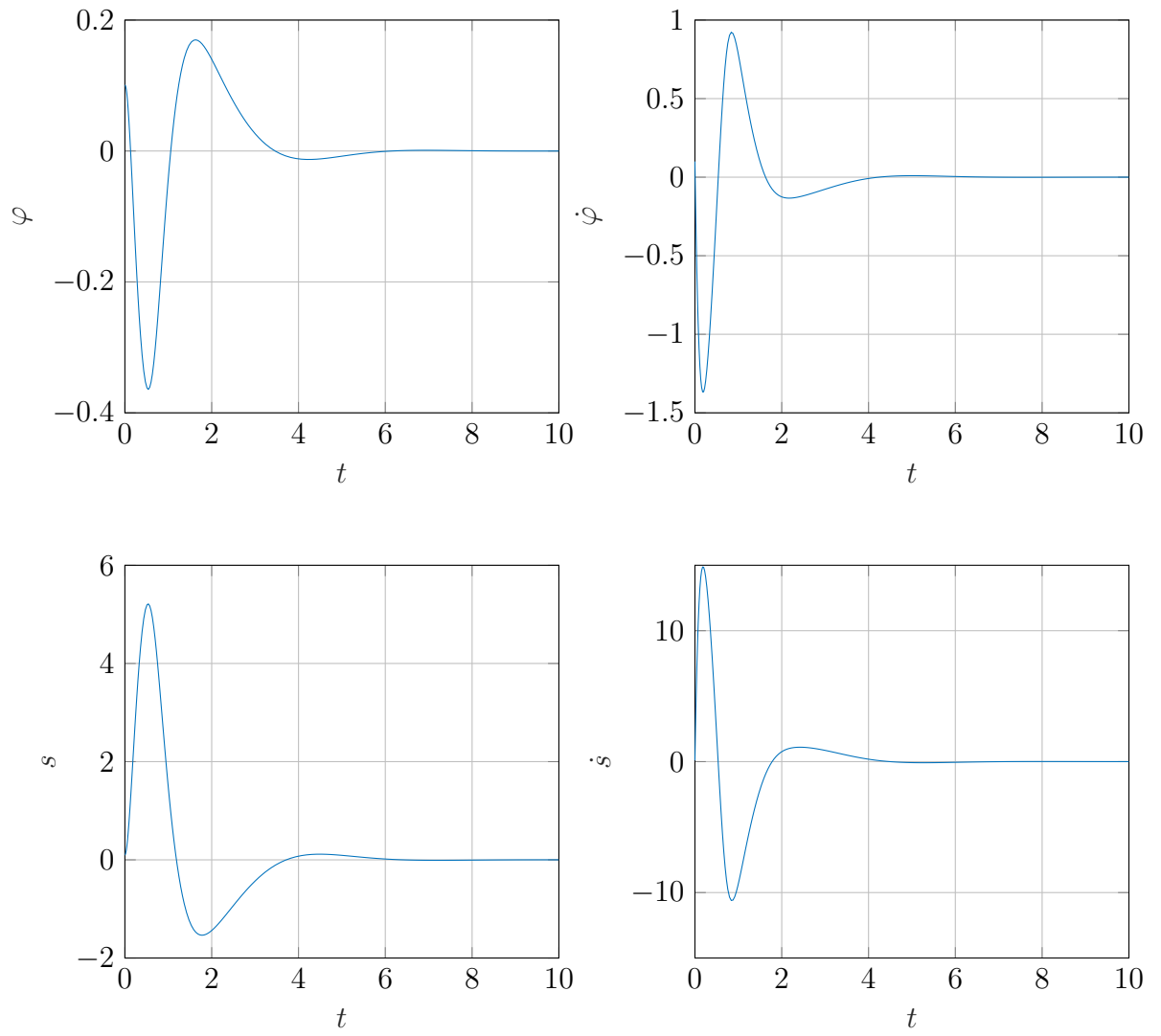


Рис. 4: Поведение нелинеаризированной системы при действии линейного стабилизатора с полной обратной связью для заданных собственных значений замкнутой системы $\mu_1 = -2 + i$, $\mu_2 = -2 - i$, $\mu_3 = \mu_4 = -3$ из положения $x^0 = [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]$.

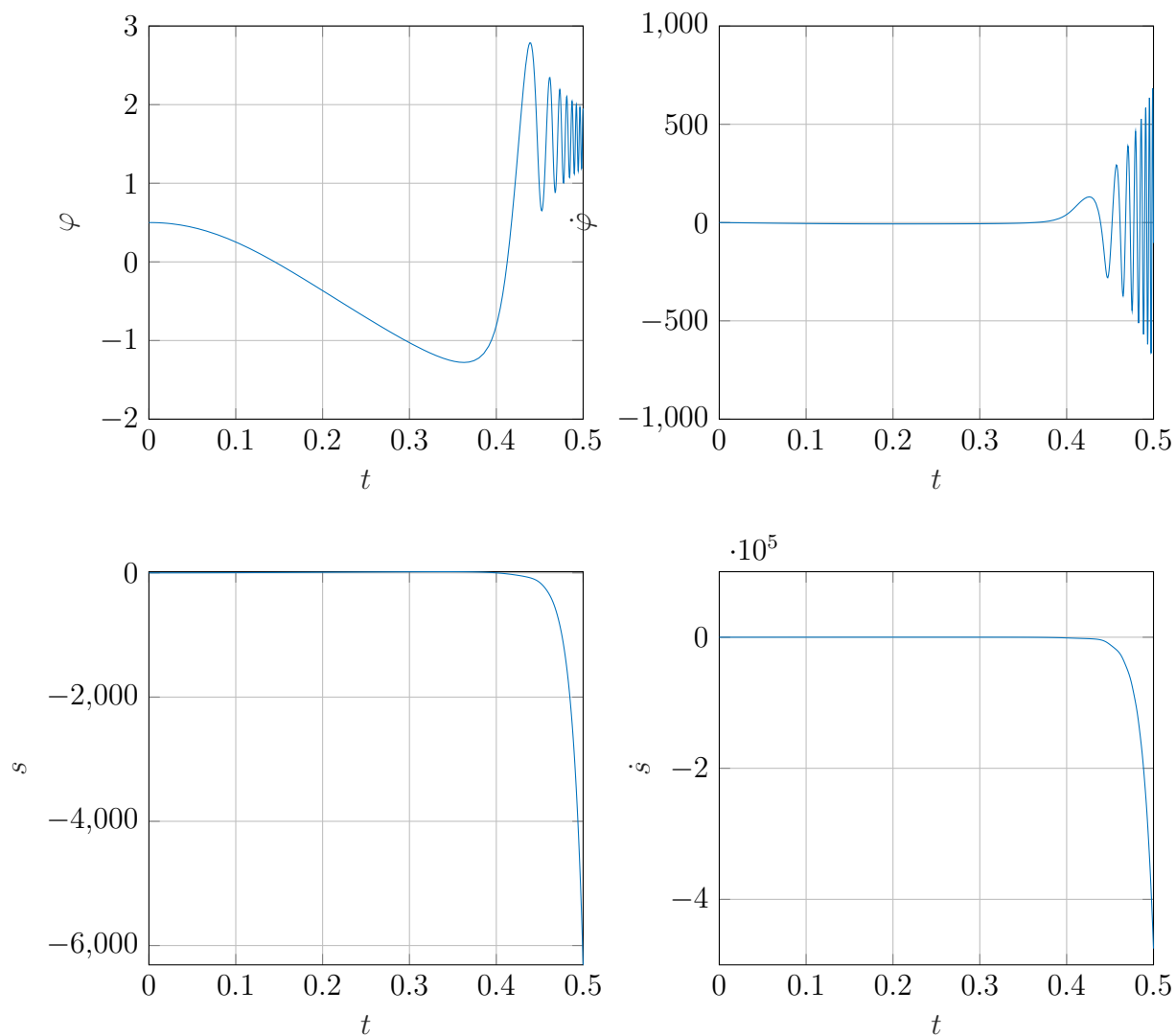


Рис. 5: Поведение нелинеаризированной системы при действии линейного стабилизатора с полной обратной связью для заданных собственных значений замкнутой системы $\mu_1 = -2 + i$, $\mu_2 = -2 - i$, $\mu_3 = \mu_4 = -3$ из положения $x^0 = [0,5, 0,1, 0,1, 0,1]$. Демонстрируются ограничения линейного стабилизатора при больших начальных отклонениях груза от положения равновесия. Это происходит из-за погрешности, возникающей при линеаризации модели.

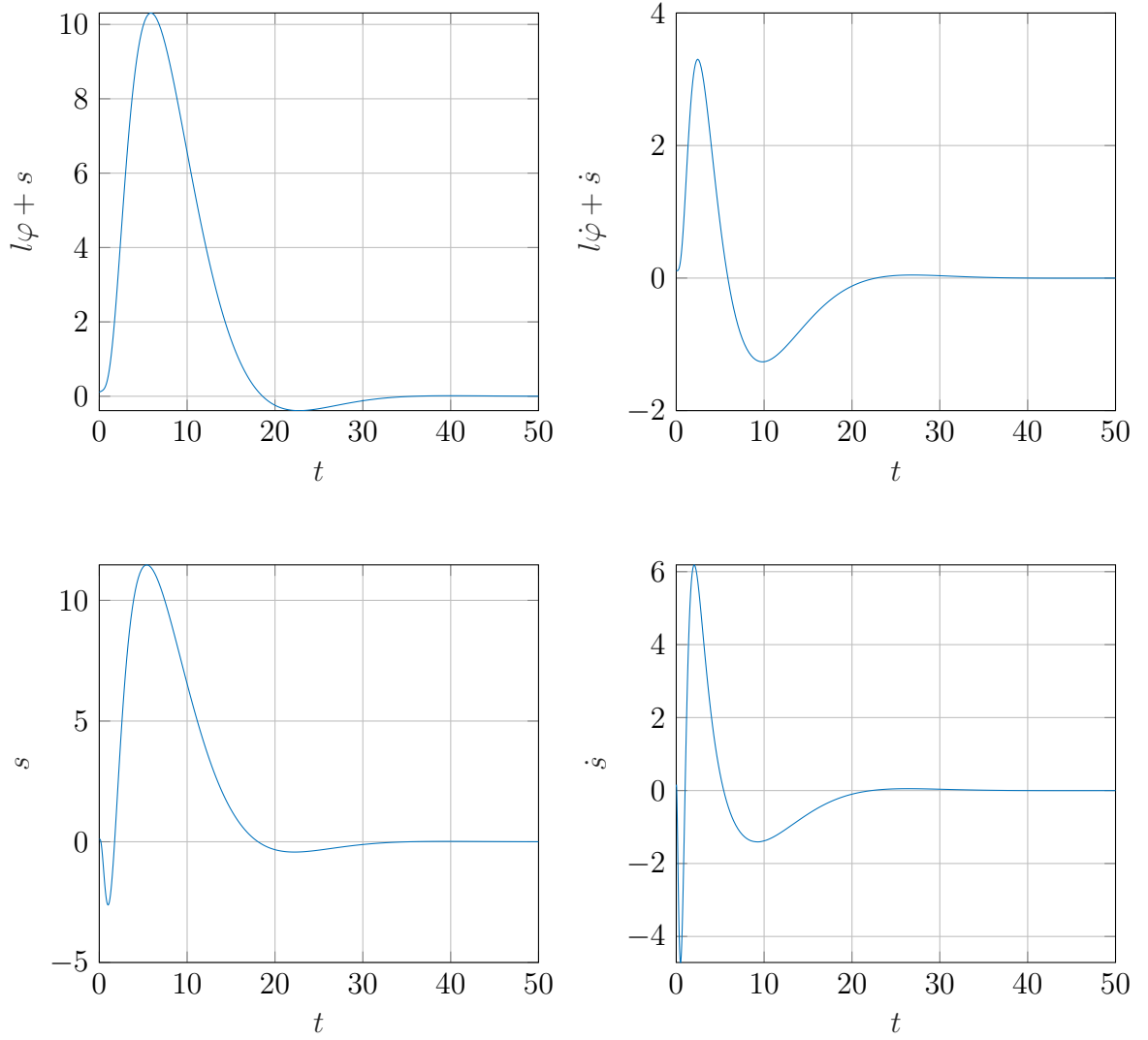


Рис. 6: Поведение линеаризованной системы при действии линейного стабилизатора с динамической обратной связью для заданных собственных значений замкнутой системы $\mu_1 = -2 + i$, $\mu_2 = -2 - i$, $\mu_3 = \mu_4 = -3$ и коэффициентов усиления асимптотического наблюдателя $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = -1$, $\nu_3 = -3$, $\nu_4 = -4$ из положения $z^0 = [0, 11, 0, 11, 0, 1, 0, 1]$ и начальным наблюдением $\hat{z}^0 = [0, 12, 0, 12, 0, 11, 0, 11]$.

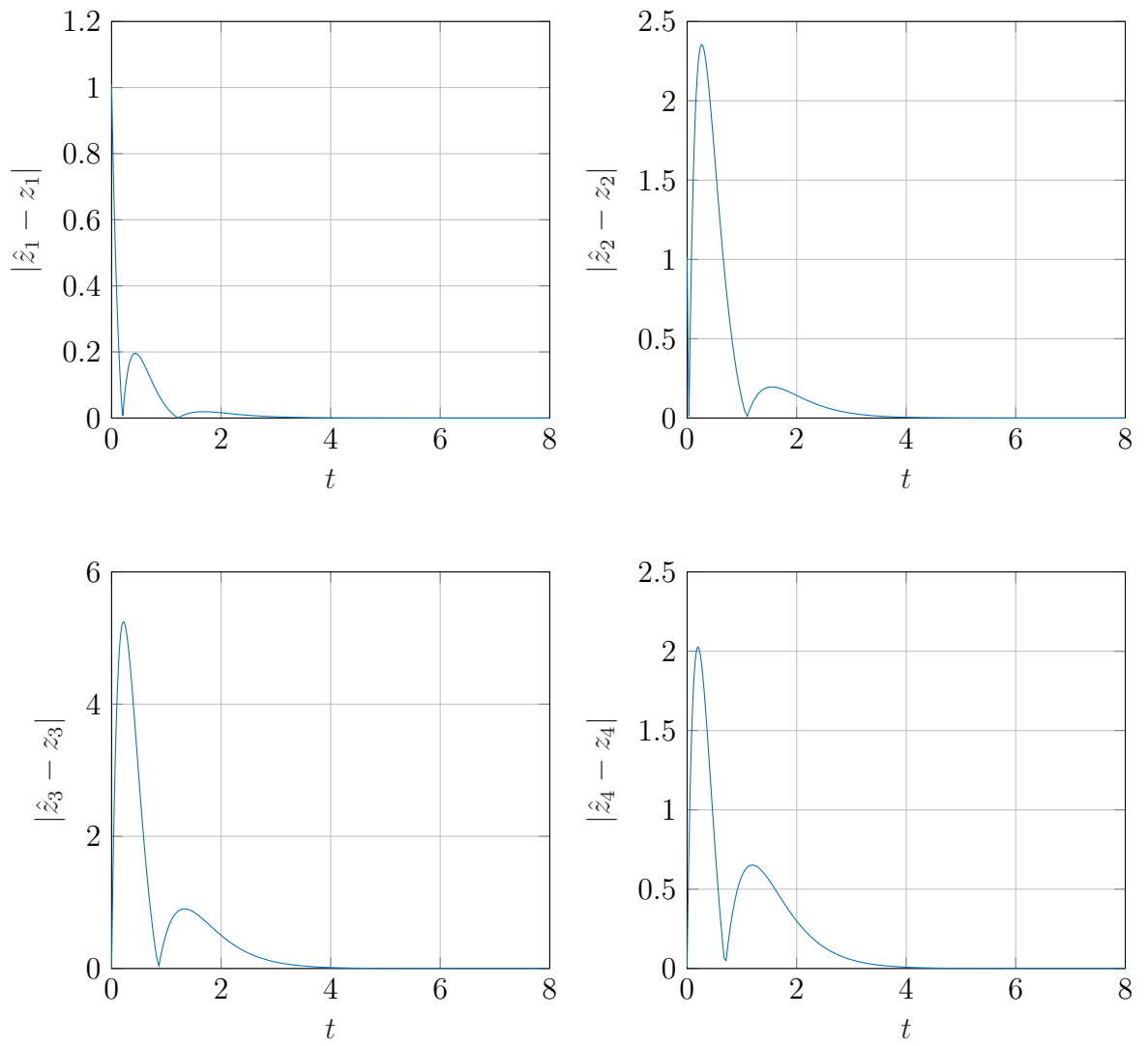


Рис. 7: Абсолютное отклонение оценки от настоящего состояния линейной системы для предыдущей задачи.

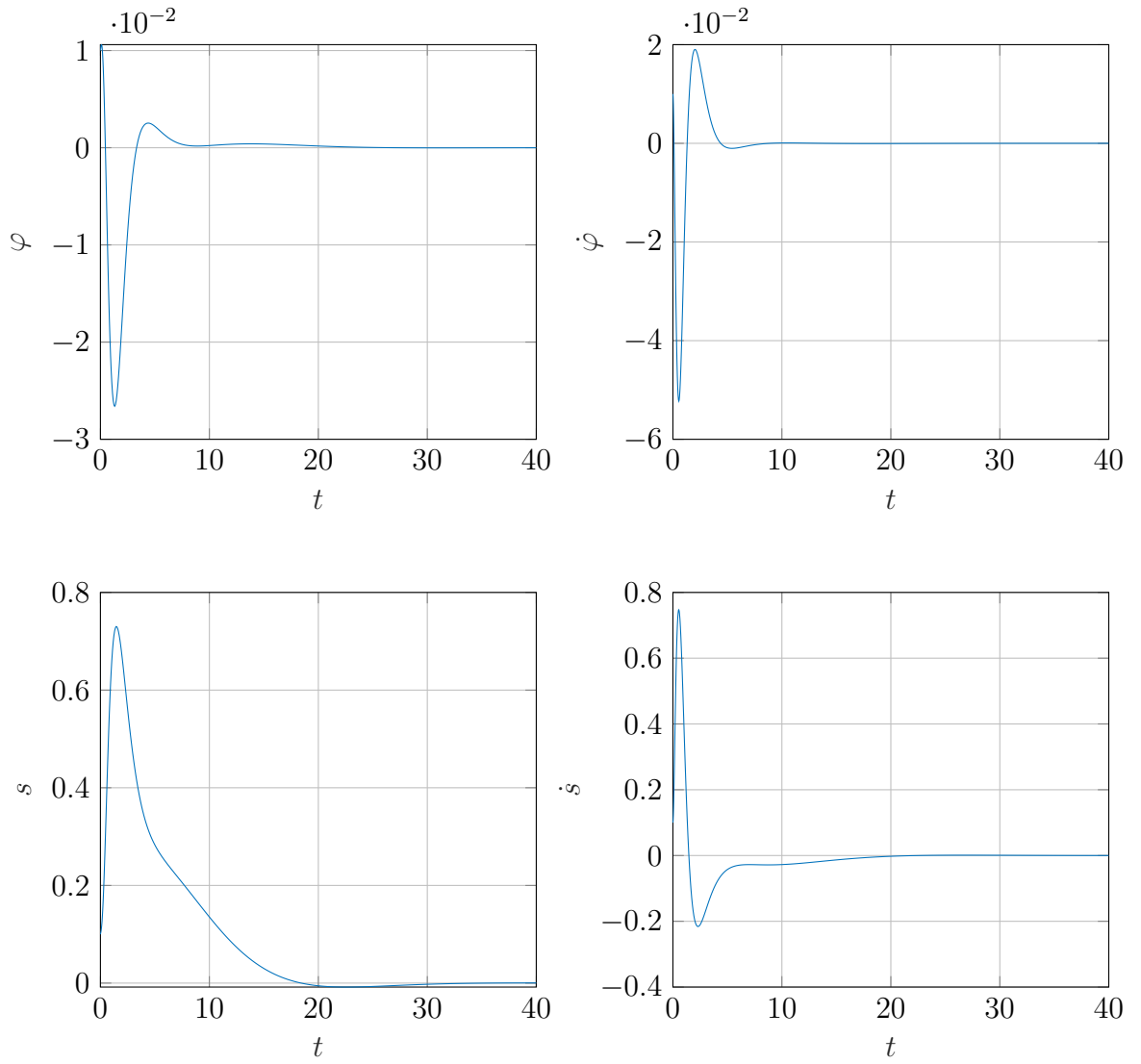


Рис. 8: Поведение нелинеаризированной системы при действии линейного стабилизатора с динамической обратной связью для заданных собственных значений замкнутой системы $\mu_1 = -2 + i$, $\mu_2 = -2 - i$, $\mu_3 = \mu_4 = -3$ и коэффициентов усиления асимптотического наблюдателя $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = -1$, $\nu_3 = -3$, $\nu_4 = -4$ из положения $z^0 = [0,01, 0,01, 0,1, 0,1]$ и начальным наблюдением $\hat{x}^0 = [0,011, 0,011, 0,11, 0,11]$.

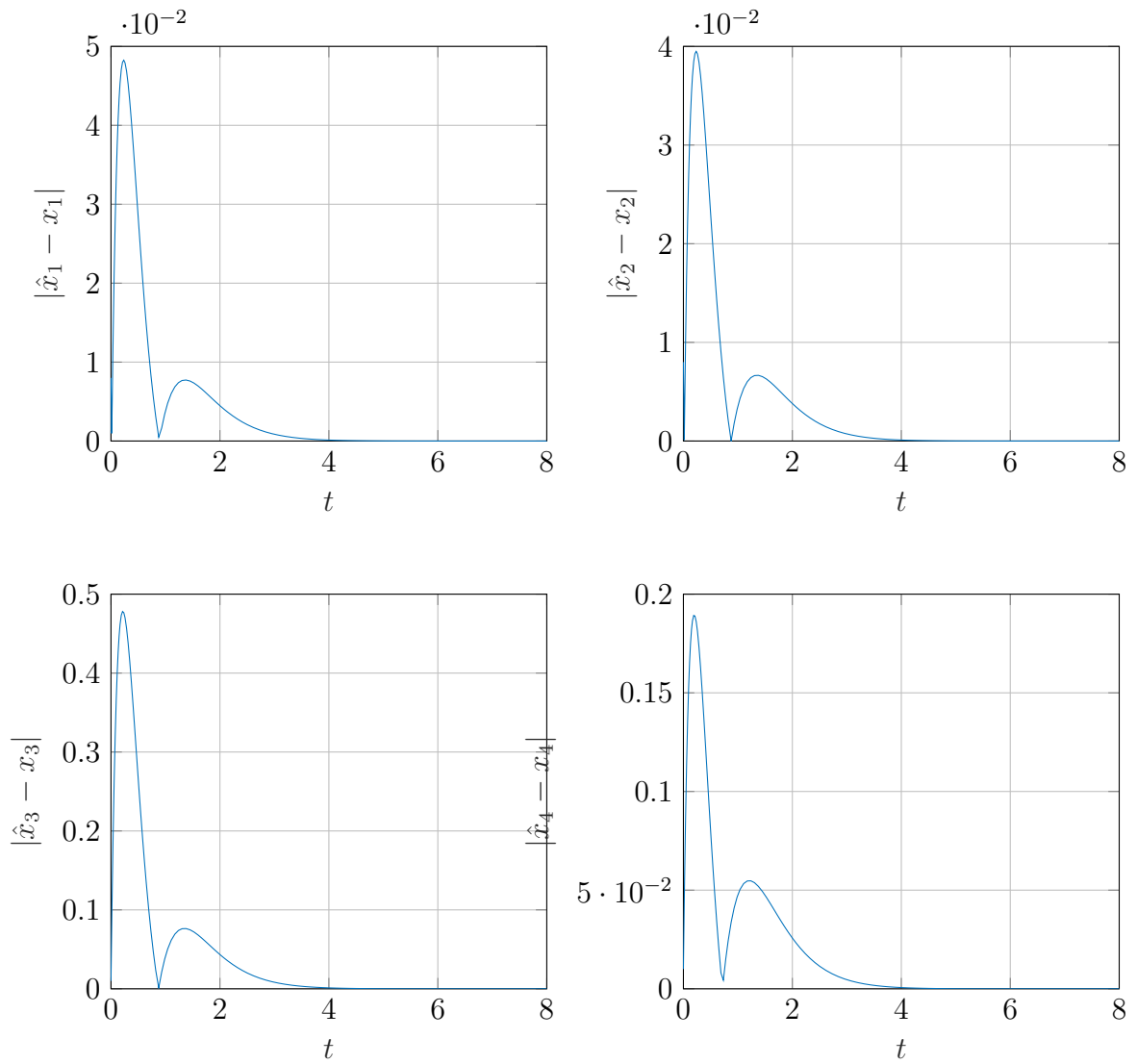


Рис. 9: Абсолютное отклонение оценки от настоящего состояния линейной системы для предыдущей задачи.

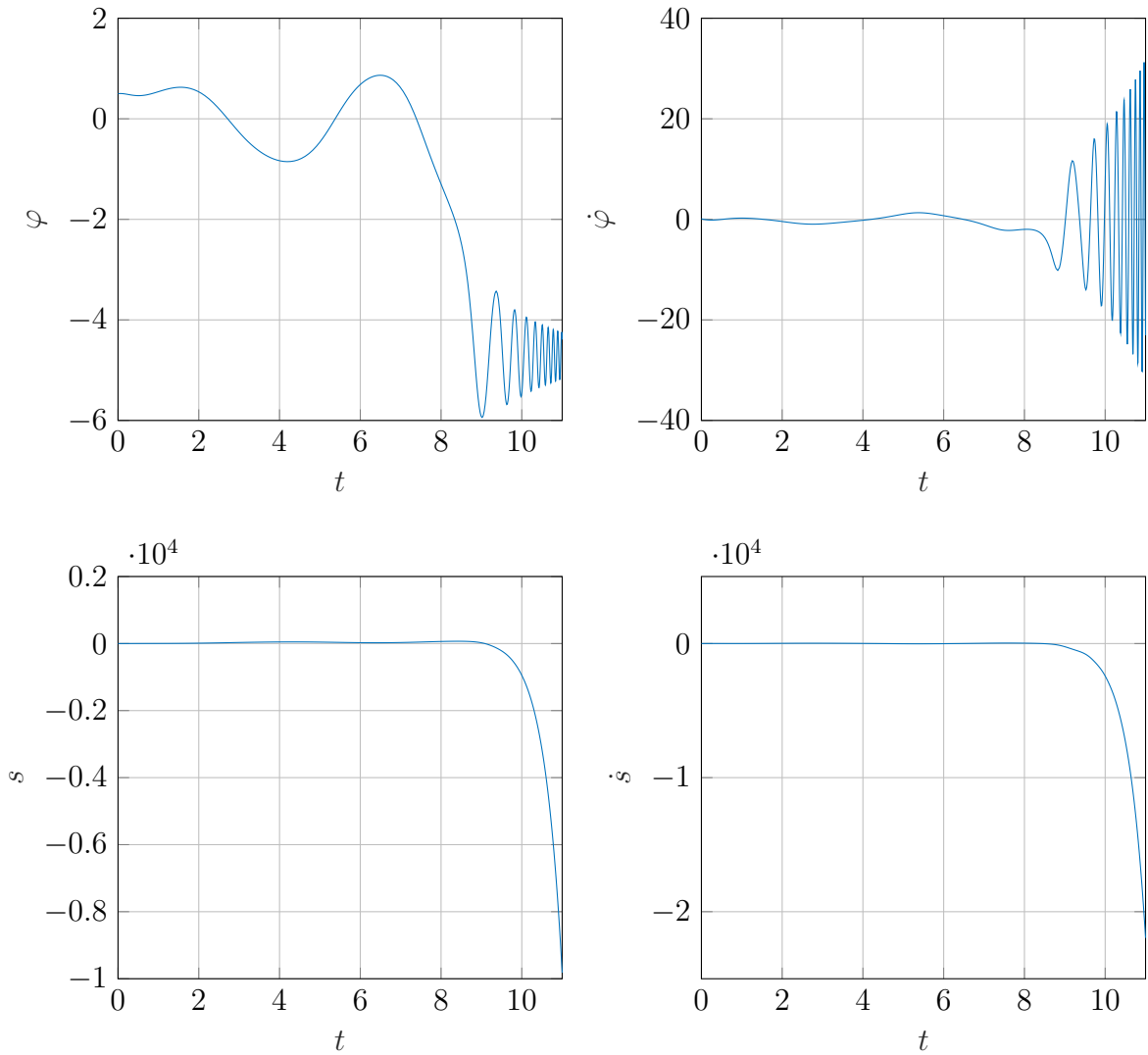


Рис. 10: Поведение нелинеаризированной системы при действии линейного стабилизатора с динамической обратной связью для заданных собственных значений замкнутой системы $\mu_1 = -2 + i$, $\mu_2 = -2 - i$, $\mu_3 = \mu_4 = -3$ и коэффициентов усиления асимптотического наблюдателя $\nu_1 = -2$, $\nu_2 = -1$, $\nu_3 = -3$, $\nu_4 = -4$ из положения $z^0 = [0,5, 0,01, 0,1, 0,1]$ и начальным наблюдением $\hat{x}^0 = [0,51, 0,011, 0,11, 0,11]$. Демонстрируются ограничения линейного стабилизатора при больших начальных отклонениях груза от положения равновесия. Это происходит из-за погрешности, возникающей при линеаризации модели.

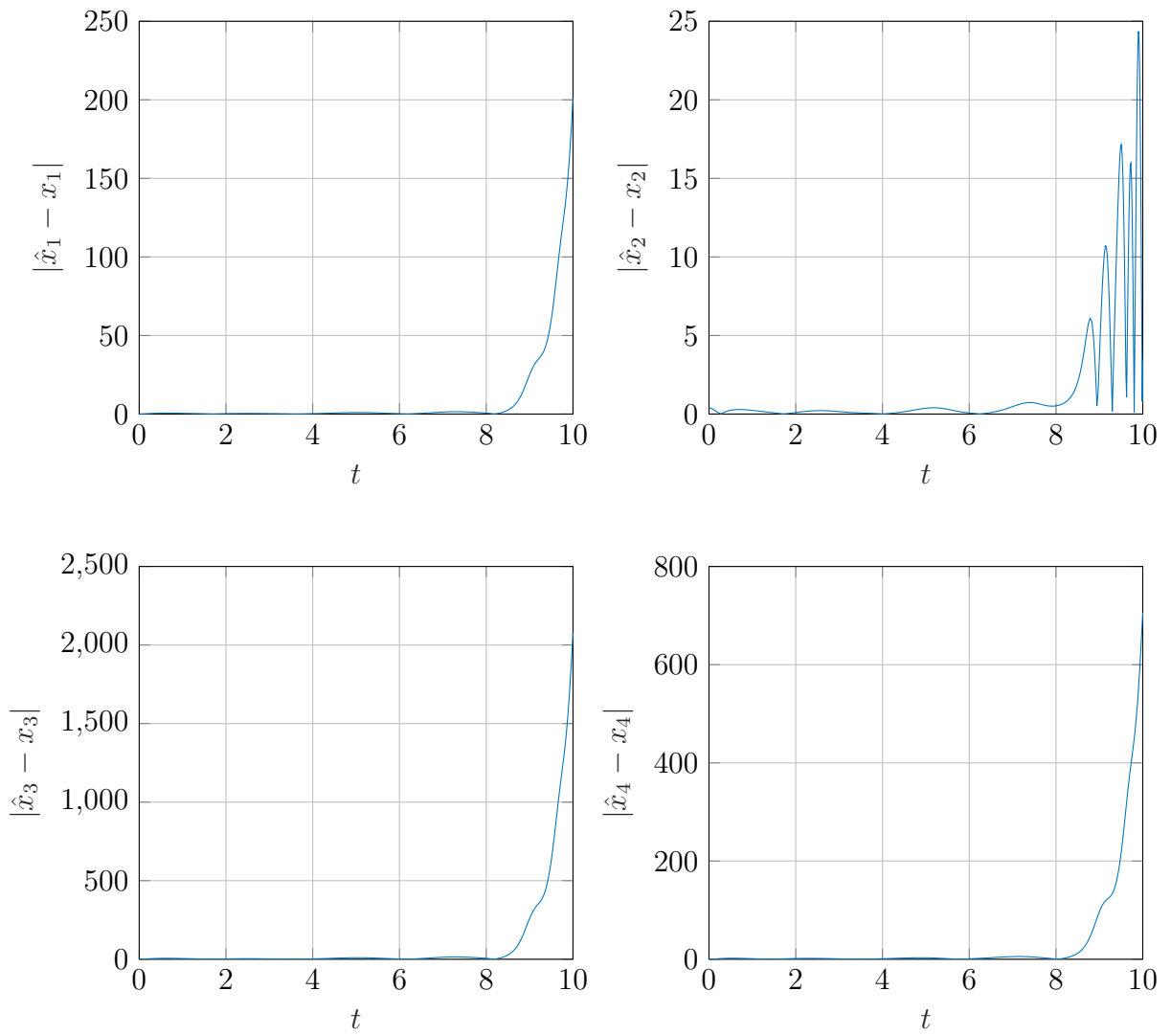


Рис. 11: Абсолютное отклонение оценки от настоящего состояния линейной системы для предыдущей задачи.

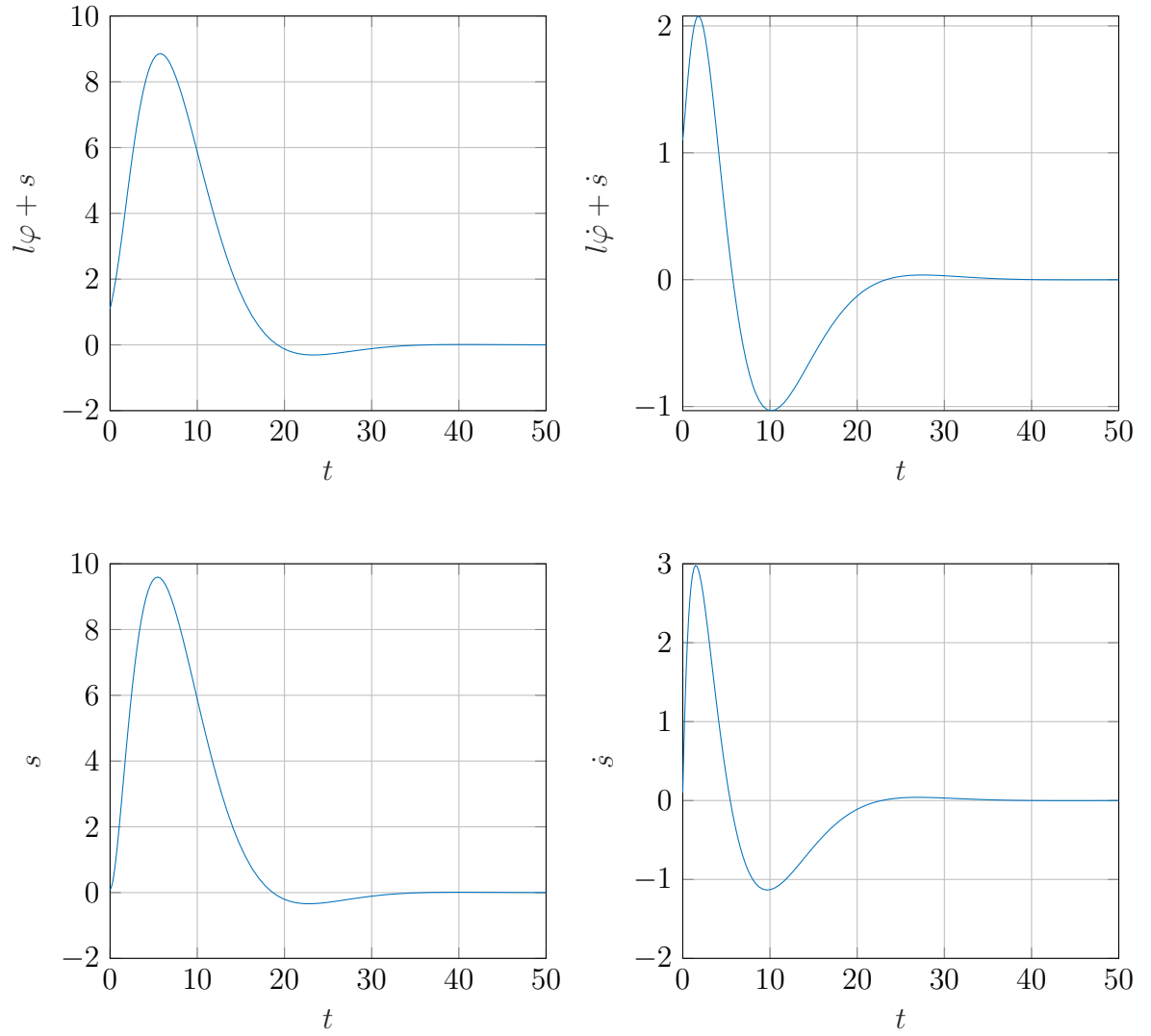


Рис. 12: Поведение линеаризованной системы при действии линейного стабилизатора, решающего задачу оптимальной линейно-квадратичной стабилизации для заданных матриц функционала качества $Q = I \in \mathbb{R}^4$, $R = 1$ из положения $z^0 = [1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1]$.

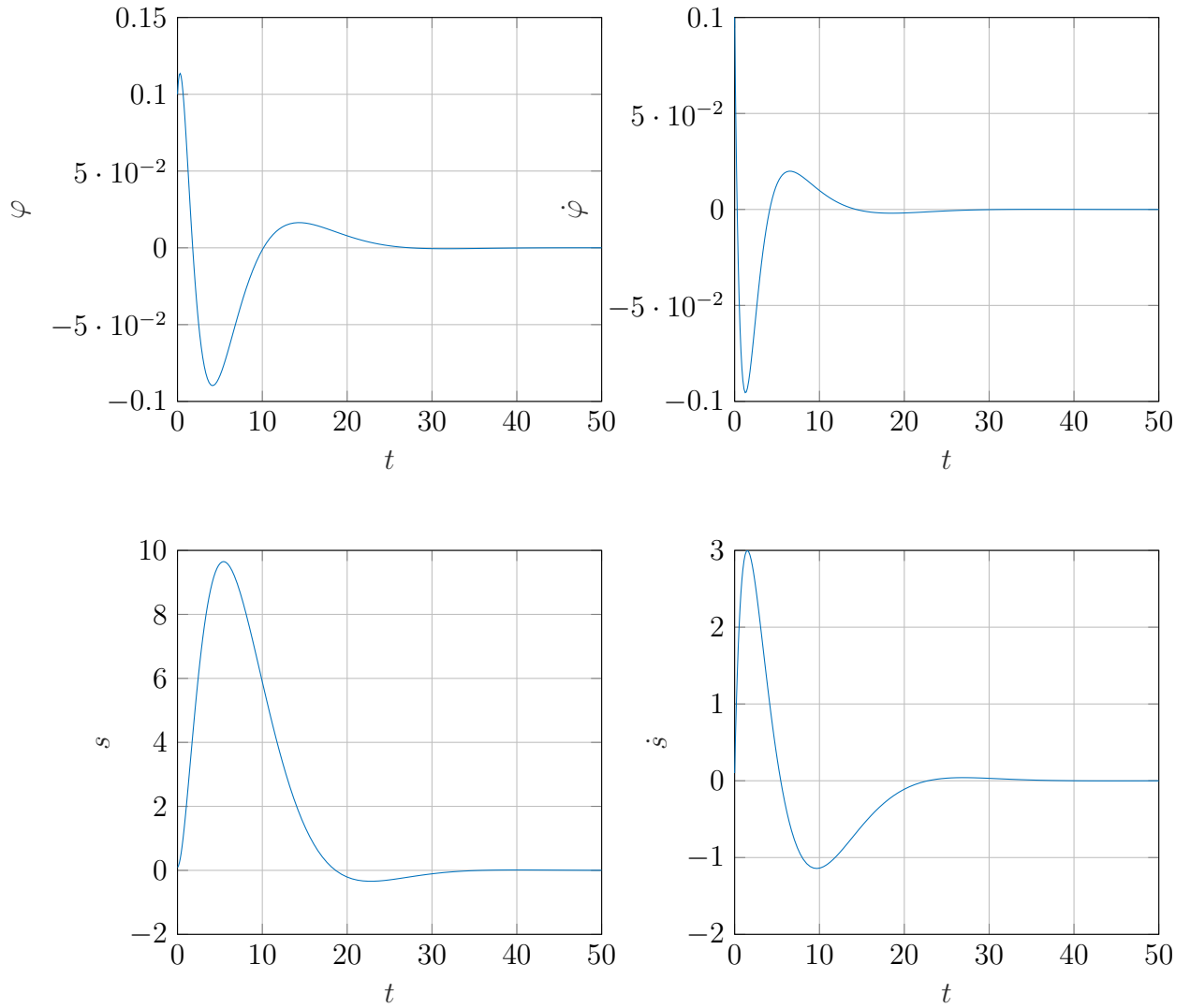


Рис. 13: Поведение нелинеаризированной системы при действии линейного стабилизатора, решающего задачу оптимальной линейно-квадратичной стабилизации для заданных матриц функционала качества $Q = I \in \mathbb{R}^4$, $R = 1$ из положения $x^0 = [0, 1, 0, 1, 0, 1]$.

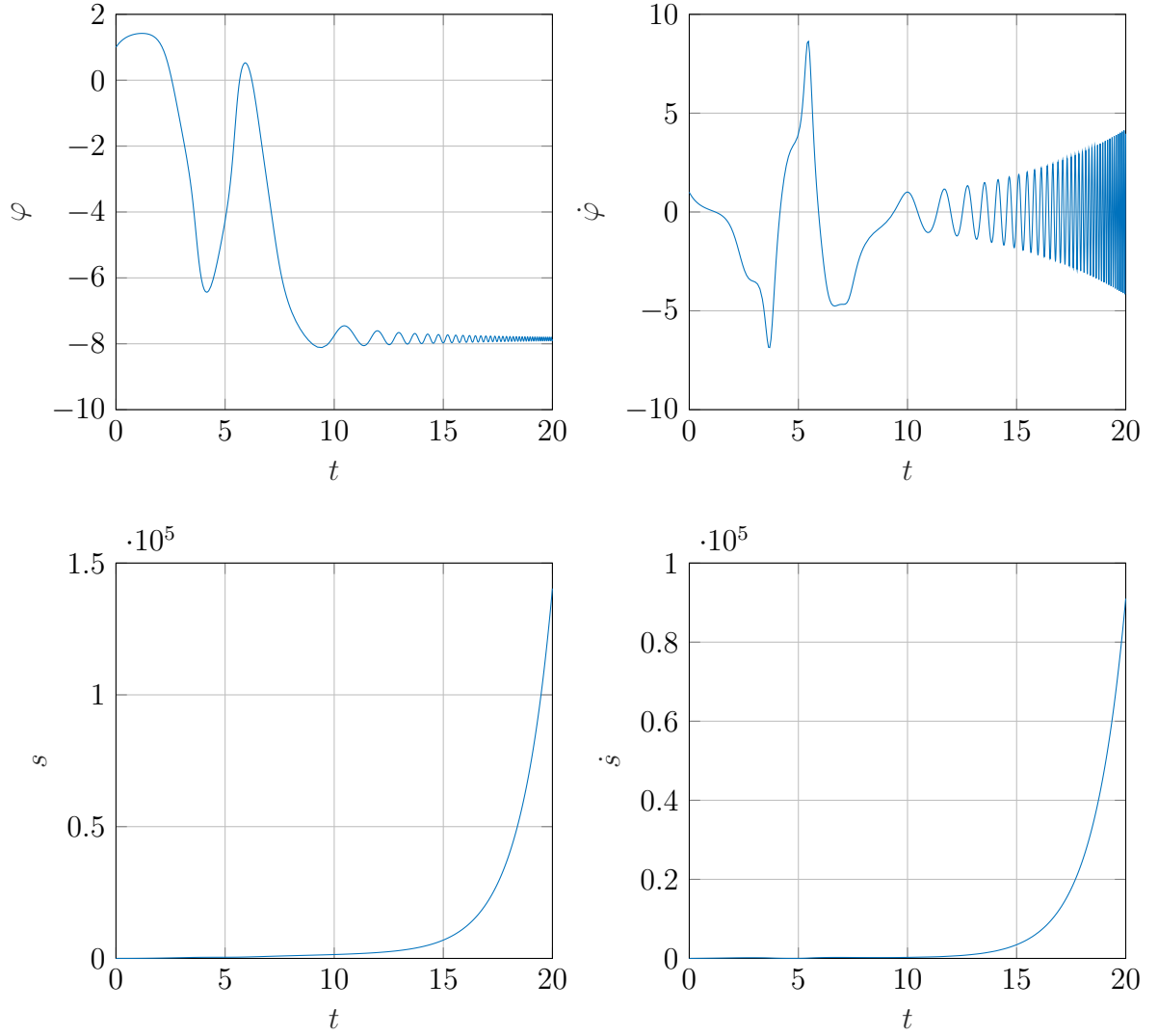


Рис. 14: Поведение нелинеаризованной системы при действии линейного стабилизатора, решающего задачу оптимальной линейно-квадратичной стабилизации для заданных матриц функционала качества $Q = I \in \mathbb{R}^4$, $R = 1$ из положения $x^0 = [1, 1, 0, 1, 0, 1]$. Демонстрируются ограничения линейного стабилизатора при больших начальных отклонениях груза от положения равновесия. Это происходит из-за погрешности, возникающей при линеаризации модели. Надо отметить, что этот стабилизатор дольше сопротивлялся, чем предыдущие.

Список литературы

- [1] Г. Ш. Тамасян. *Программные управления и наблюдаемость: учебное пособие*. Санкт-Петербургский гос. ун-т, Фак. прикладной математики - процессов упр. - Санкт-Петербург: [б. и.], 2008.
- [2] Эмирбеков Н.Э., Эмирбеков М.Э. *Разработка алгоритмов раскачки и стабилизации обратного маятника, закрепленного на валу двигателя*. Автоматика и программная инженерия. 2016, No1(15). ФГБОУ ВПО НГТУ, Новосибирск, Россия.
- [3] Vinodh Kumar E, Jovitha Jerome. *Robust LQR Controller Design for Stabilizing and Trajectory Tracking of Inverted Pendulum*. International Conference On DESIGN AND MANUFACTURING, IConDM 2013.