Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Элементы финансовой математики»

Студент 515 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2022

Содержание

1 Постановка задачи

Рассматривается задача суперхеджирования опциона Call On Max американского типа с ценой исполнения $\chi > 0$ и функцией выплат

$$\begin{cases} g_t(\bar{x}_t) = \max\{\max\{x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n\} - \chi,\, 0\}, \text{ при } t = 1, 2, \dots, T, \\ g_0(\bar{x}_0) = -\infty, \end{cases} \tag{1}$$

для $n = 2$ рисковых активов при наличии торговых ограничений. Время t в задаче принимается дискретным, неотрицательным и ограниченным горизонтом T.

Положительный вектор $x_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n) > 0$ обозначает дисконтированные цены рисковых активов в момент времени t. За $\bar{x}_{t-1} = (x_0, x_1, \dots, x_{t-1})$ обозначим предысторию цен, сложившуюся к моменту времени t. Также считаем, что цена безрискового актива постоянна, равна единице, а торговые ограничения для него отсутствуют.

Стратегией хеджера называется последовательность векторов $h_1, h_2, \dots, h_T$, удовлетворяющая торговым ограничениям, заданным многозначным отображением $D_t(\cdot)$:

$$h_t \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Динамика цен описывается мультипликативной моделью:

$$x_t = m_t \odot x_{t-1}, \text{ где } m_t \in E_t(\bar{x}_{t-1}). \tag{3}$$

Здесь $\odot$ обозначает поэлементное произведение векторов, а $E_t(\cdot)$ — компактнозначное отображение, задающее ограничения на мультипликаторы. По условию задачи, $E_t(\cdot) \equiv \Pi$, где $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ — прямоугольник, $0 < a < b$, $0 < c < d$. Параметры множества Π выбираются таким образом, чтобы $\Pi \subset \mathbb{R}_+^n$ и выполнялось условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью *NDSAUP*, то есть когда

$$\mathrm{conv}K_t(\cdot) \cap \mathrm{bar}D_t(\cdot) \neq \varnothing, \text{ где } K_t(\bar{x}_{t-1}) = (\Pi - \bar{1}) \odot x_{t-1}. \tag{4}$$

Здесь отображение $K_t(\cdot)$ задает ограничения для данной модели, если записать её в аддитивной форме:

$$x_t = x_{t-1} + y_t, \text{ где } y_t \in K_t(\bar{x}_{t-1}). \tag{5}$$

Целевая функция $v_t^*(\bar{x}_t)$ — это резервы, необходимые для покрытия обязательств по проданному опциону. Целевая функция $v_t^*(\bar{x}_t)$ удовлетворяет уравнению Беллмана–Айзекса (мы считаем, что выполнены необходимые условия полунепрерывности сверху функции $v_t^*(\bar{x}_t)$):

$$\begin{cases} v_t^*(\bar{x}_t) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1})} \left\{ \int v_t^*(\bar{x}_{t-1},\, x_{t-1} + y)\, Q(dy) - \rho \left(\int y\, Q(dy) \middle|\, D_t(\bar{x}_{t-1}) \right) \right\}, \\ v_T^*(\bar{x}_T) = g_T(\bar{x}_T), \end{cases} \tag{6}$$

где $\rho\,(\cdot\,|D_t(\bar{x}_{t-1})\,)$ обозначает опорную функцию множества $C_t(\bar{x}_{t-1})$, а $\mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1})$ — все вероятностные меры, носители которых вложены в $K_t(\bar{x}_{t-1})$ и состоят не более, чем из $(n+1)$ точки. Отметим также, что данный подход позволяет разделить задачи ценообразования и хеджирования.

Целью данной практической работы является нахождение решения уравнения Беллмана–Айзекса и анализ качественного поведения премии за опцион $v_0^*(x_0)$ в зависимости от следующих факторов:

1. начальных цен рисковых активов,
2. дисперсии цен активов,

при вариантах торговых ограничений $D_t(\cdot)$:

1. отсутствие торговых ограничений,
2. запрет коротких позиций по обоим активам,
3. запрет коротких позиций по более волатильному активу,
4. запрет коротких позиций по менее волатильному активу.

2 Условие безарбитражности

Заметим, что условие безарбитражности (4) будет выполнено для любых торговых ограничений $D_t(\cdot)$, если оно выполнено для случая без торговых ограничений $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathrm{bar}\mathbb{R}^n = \{0\}$ и получаем

$$0 \in (\Pi - \bar{1}) \odot x_{t-1}, \tag{7}$$

или, в силу положительности цен,

$$\bar{1} \in \Pi. \tag{8}$$

Таким образом, условие безарбитражности $NDSAUP$ выполнено для любого прямоугольника Π с ограничениями

$$a \leqslant 1,\ b \geqslant 1,$$

$$c \leqslant 1,\ d \geqslant 1.$$

3 Алгорит решения уравнения Беллана–Айзекса

Уравнение Беллмана–Айзекса (6) может быть решено при каждом t в два этапа:

1. для фиксированного $z \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ вычисляется функция

$$u_t(\bar{x}_{t-1}, z) = \sup\nolimits_{Q \in \mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1}),\, \int yQ(dy)=z} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y)\, Q(dy); \tag{9}$$

2. функция цены находится как

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \sup_{z \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \{u_t(\bar{x}_{t-1}, z) - \rho(z | D_t(\bar{x}_{t-1}))\}. \qquad (10)$$

Заметим, что функция $u_t(\bar{x}_{t-1}, z)$ совпадает в точке z с вогнутой оболочкой функции

$$f(y) = \begin{cases} v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y), & \text{где } y \in K_t(\bar{x}_{t-1}); \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (11)$$

При этом в пункте 2 достаточно рассматривать только векторы z из $K_t(\bar{x}_{t-1}) \cap D_t(\bar{x}_{t-1})$.

При построение вогнутой оболочки компакты $K_t(\cdot)$ аппроксимируются (по метрике Хаусдорфа) конечными множествами на сетке $\hat{K}_t(\cdot)$. Для численного решения использовался комплекс программ «Робастное управление портфелем финансовых инструментов» (версия 0.1.0) https://github.com/doctormee/robust-fpm-cmc-msu-edu-2021. Для перехода от мультипликативной модели с независящими от цен ограничениями к аддитивной модели используется класс MDAFDynamics.

4 Влияние торговых ограничений

Лемма 1. *Пусть функция выплат $g_t(\bar{x}_t)$ одинакова при всех t, зависит только от x_t и неубывает, то есть для любого $y \in \mathbb{R}_+^n$ выполнено $g(x_t + y) \geqslant g(x_t)$. Тогда премии за опцион совпадают для всевозможных торговых ограничений $D_t(\cdot)$ таких, что $\mathbb{R}_+^n \subset D_t(x_{t-1})$.*

Доказательство. С помощью уравнения Беллмана–Айзекса (6) легко показать по индукции, что функция $v_t^*(\bar{x}_{t-1}, \cdot)$ также является неубывающей. Её вогнутая оболочка $u_t(\bar{x}_{t-1}, z)$ также является неубывающей. В силу наложенных на $D_t(\cdot)$ ограничений,

$$\operatorname{bar} D_t(\bar{x}_{t-1}) \subset \mathbb{R}_-^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \leqslant 0, \ i = \overline{1, n}.\} \qquad (12)$$

Таким образом, максимум в (13) достигается на $z = 0 \in K_t(\bar{x}_{t-1}) \cap \operatorname{bar} D_t(\bar{x}_{t-1})$. В частности, минимум достигается в $z = 0$ в случае отсутствия торговых ограничений, когда $\operatorname{bar} D_t(\cdot) = \{0\}$, поэтому значения всех функций v_t^* будут совпадать. ■

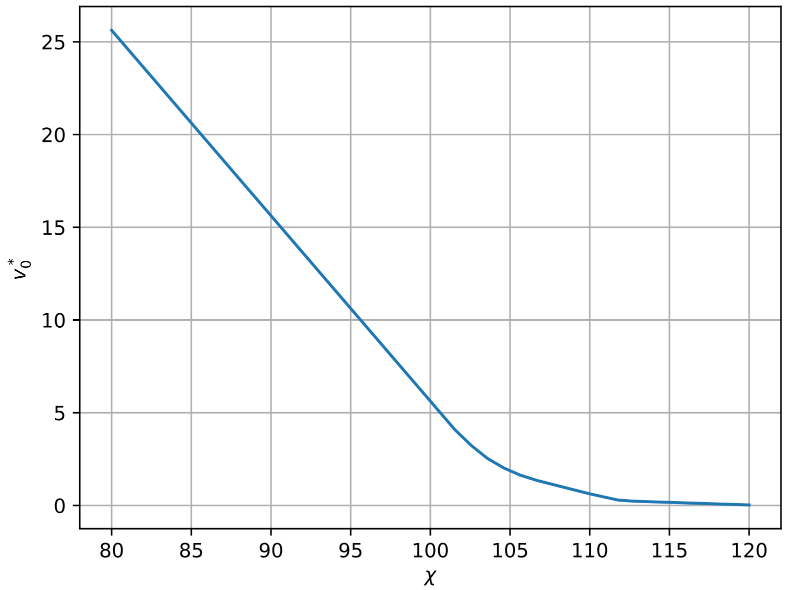

Рис. 1: Поточечный график винеровского процесса демонстрирует его непрерывность. Параметрами алгоритма были взяты $\alpha = 0{,}3$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

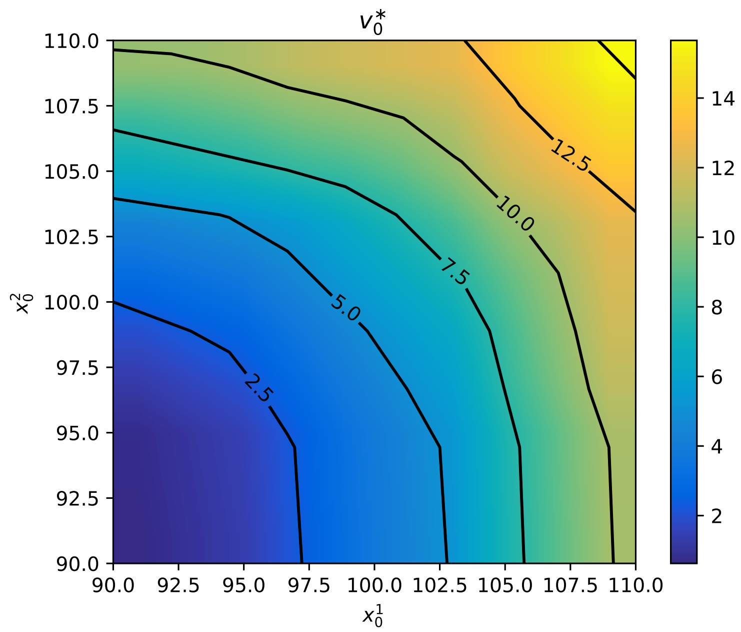

Рис. 2: Поточечный график винеровского процесса демонстрирует его непрерывность. Параметрами алгоритма были взяты $\alpha = 0{,}3$, $\varepsilon = 10^{-4}$.