2022г.

Практикум по курсу

«Элементы финансовой математики»*

Постановка задачи

Необходимо численно решить уравнение Беллмана-Айзекса для задачи гарантированного суперхеджирования опциона американского типа с заданной функцией выплат для n (рисковых) активов при наличии торговых ограничений. Предполагается, что на рынке нет транзакционных издержек.

Задача рассматривается в дискретном времени на конечном горизонте N. Пусть $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n) \in (0, \infty)^n$ — вектор (дисконтированных) цен рисковых активов в момент $t \in [0, N]$. Будем называть предысторией цен (к текущему моменту времени $t = 1, \dots, N$) последовательность $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$. Считается, что безрисковый актив имеет постоянную цену, равную единице, и не подвержен торговым ограничениям. Стратегией хеджера называется последовательность векторов $h_1, \dots, h_N$, описывающая структуру портфеля рисковых активов, такая что $h_t \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n$ при априори заданных торговых ограничениях, задаваемых многозначными отображениями $D_t(\cdot)$.

Неопределенная динамика цен может быть описана в аддитивной форме: $x_t = x_{t-1} + y_t$; предполагается, что приращение цен $y_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})$, где компактнозначные отображениях $K_t(\cdot)$ имеют смысл заданных априори допустимых сценариев изменения цен. От чисто детерминистского описания модели можно перейти к описанию динамики цен посредством смешанных стратегий рынка из класса $\mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$ вероятностных мер с носителями, содержащимися в $K_t(\bar{x}_{t-1})$, который содержит все меры, сосредоточенные в одной точке из $K_t(\bar{x}_{t-1})$ (меры Дирака). Обозначим $\mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1})$ — множество вероятностных мер из $\mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке.

Пусть $g_t(\bar{x}_t)$, $t = 0, \dots, N$, — функции выплат по американскому опциону. Соответствующая целевая функция $v_t^*(\bar{x}_t)$, $t = 0, \dots, N$, — резервы на (гарантированное) покрытие текущих и будущих обусловленных обязательств по проданному опциону. Считаем, что условия задачи таковы, что функции v_t^* полунепрерывны сверху. Тогда имеет место игровое равновесие и уравнения Беллмана-Айзекса, отражающие игровую

*Составители: Андреев Н.А, Смирнов С.Н.

интерпретацию для исходной (детерминистской) задачи, могут быть записаны в виде уравнений Беллмана, где задача ценообразования отделена от задачи хеджирования:

$$
\begin{gathered}
v_N^*(\bar{x}_{t-1}) = g_N(\bar{x}_{t-1}), \\
v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1})} \left[\int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})} \left(\int y \, Q(dy) \right) \right], \\
t = 1, .., N,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(\cdot)$ – опорная функция множества $D_t(\bar{x}_{t-1})$. Уравнение (1) может быть решено для каждого t в два этапа:

1. для фиксированного $z \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ находится функция

$$
u_t(\bar{x}_{t-1}, z) = \sup_{\substack{Q \in \mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1}) \\ \int y Q(dy) = z}} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y) Q(dy). \tag{2}
$$

2. функция цены находится как

$$
v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \sup_{z \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \left[u_t(\bar{x}_{t-1}, z) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(z) \right]. \tag{3}
$$

Функция $z \mapsto u_t(\bar{x}_{t-1}, z)$, определенная посредством (2), совпадает с вогнутой оболочкой[1] функции $f(y) = \begin{cases} v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y), & y \in K_t(\bar{x}_{t-1}), \\ -\infty, & y \notin K_t(\bar{x}_{t-1}) \end{cases}$ в точке z. Таким образом, для решения задач требуется находить вогнутую оболочку функции.

Для описания неопределенной динамики цен модели будем использовать мультипликативную форму, эквивалентную аддитивной. Обозначим

$$
\begin{cases}
x_t^i = m_t^i x_{t-1}^i, \ i = 1, \dots, n, \\
m_t = (m_t^1, \dots, m_t^n) \in E_t(\cdot),
\end{cases}
\tag{4}
$$

где компактное множество $E_t(\cdot)$ задается как множество мультипликаторов $m = (m^1, \dots, m^n)$, таких что точка $y = (y^1, \dots, y^n)$ с координатами $y^i = (m^i - 1)x_{t-1}^i$, $i = 1, \dots, n$ принадлежит $K_t(\cdot)$. Цены рисковых активов в каждый момент времени $t = 0, \dots, n$ должны быть положительными, т.е. $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n) \in (0, \infty)^n$, что равносильно положительности цен в начальный момент и условию $E_t(\cdot) \subseteq (0, \infty)^n$. При этом начальные цены предполагаются известными и фиксированными.

[1]Вогнутой оболочкой функции f называется функция, чей подграфик является выпуклой оболочкой подграфика f (в частности, область ее определения — выпуклая оболочка области определения f).

Варианты заданий

Во всех вариантах $n = 2$. Требуется построить решения уравнений (1) используя двухэтапную схему (2) и (3). Для корректного численного анализа моделей следует убедиться в выполнении RNDSAUP, грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Далее необходимо качественное поведение премии $V_0(\cdot)$ за опцион (при суперхеджировании) при разных торговых ограничениях в зависимости от

1. начальных цен активов
2. дисперсии цен
3. коэффициента корреляции (для эллипса E_t)

и проинтерпретировать результаты. Стоимости сравниваются при следующих торговых ограничениях $D_t(\cdot)$:

1. запрет коротких позиций по обоим активам
2. запрет коротких позиций по более волатильному активу
3. запрет коротких позиций по менее волатильному активу
4. отсутствие ограничений

Вариант 1

Динамика цен описывается при помощи $E_t(\cdot) \equiv E$, где $E = [a; b] \times [c; d]$ — прямоугольник, $0 < a < b$, $0 < c < d$. Найти значение параметров, для которых выполняется условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью $NDSAUP$, т.е. когда $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$ и использовать их в расчетах.

Опцион — Call on Max американского типа с ценой исполнения (страйком) $\chi > 0$ и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\big\{\max\{x_t^1, x_t^2\} - \chi, 0\big\},\ t = 1, \ldots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

Вариант 2

Динамика цен описывается при помощи $E_t(\cdot) \equiv E$, где E — эллипс с полуосями $a > 0$ и $b > 0$ и с углом поворота φ. Параметры эллипса должны быть выбраны так, чтобы он не содержал отрицательных координат. Параметры эллипса выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Put on Max американского типа с ценой исполнения (страйком) $\chi > 0$ и функцией выплат

$$g_N(\bar{x}_N) = \max\big\{\chi - \max\{x_N^1, x_N^2\}, 0\big\},\ t = 1, \ldots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

Вариант 3

Динамика цен описывается при помощи $E_t(\cdot) \equiv E$, где $E = [a; b] \times [c; d]$ — прямоугольник, $0 < a < b$, $0 < c < d$. Параметры прямоугольника выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Put on Min американского типа с ценой исполнения (страйком) $\chi > 0$ и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\big\{\chi - \min\{x_t^1, x_t^2\}, 0\big\},\ t = 1, \ldots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

Вариант 4

Динамика цен описывается при помощи $E_t(\cdot) \equiv E$, где E — эллипс с полуосями $a > 0$ и $b > 0$ и с углом поворота φ. Параметры эллипса должны быть выбраны так, чтобы он не содержал отрицательных координат. Параметры эллипса выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Put 2 and Call 1 американского типа с функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\big\{x_t^1 - x_t^2, 0\big\},\ t = 1, \ldots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

Вариант 5

Динамика цен описывается при помощи $E_t(\cdot) \equiv E$, где E — эллипс с полуосями $a > 0$ и $b > 0$ и с углом поворота φ. Параметры эллипса должны быть выбраны так, чтобы он не содержал отрицательных координат. Параметры эллипса выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Best of Asset or Cash американского типа с ценой исполнения (страйком) $\chi > 0$ и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{x_t^1, x_t^2, K\},\ t = 1, \ldots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

Вариант 6

Динамика цен описывается при помощи $E_t(\cdot) \equiv E$, где $E = [a; b] \times [c; d]$ — прямоугольник, $0 < a < b$, $0 < c < d$. Параметры прямоугольника выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Call on Min американского типа с ценой исполнения (страйком) $\chi > 0$ и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{\min\{x_t^1, x_t^2\} - \chi, 0\},\ t = 1, \ldots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

Вариант 7

Динамика цен описывается при помощи $E_t(\cdot) \equiv E$, где E — эллипс с полуосями $a > 0$ и $b > 0$ и с углом поворота φ. Параметры эллипса должны быть выбраны так, чтобы он не содержал отрицательных координат. Параметры эллипса выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Multi-strike американского типа с ценами исполнения (страйками) $\chi^1, \ldots, \chi^n > 0$ и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{x_t^1 - \chi^1, x_t^2 - \chi^2, 0\},\ t = 1, \ldots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

Представление результатов

По итогам работы должен быть подготовлен отчет, в котором описано численное решение задачи, а также представлены графики сравнения стоимостей опциона в зависимости от торговых ограничений для N не менее 3. Графики должны быть наглядны. Если графики сливаются, результаты можно иллюстрировать на картах высот.

Указания к решению

1. Функцию цены рекомендуется искать на сетке, восстанавливая от конечного к начальному моменту времени. Задачу поиска вогнутой оболочки функции можно тогда свести к задаче поиска выпуклой оболочки конечного множества точек в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Подграфик функции при этом можно ограничить снизу нулевой плоскостью, поскольку функция цены $v_t^*(\cdot) \geq 0$.

2. Найдя точки выпуклой оболочки, максимум в (2) можно найти, определив соответствующую грань многогранника, проекция которой содержит z, также можно свести задачу к задаче линейного программирования.

3. Аппроксимирующие компакты $\tilde{K}_t$ — конечные множества на сетке.

4. Максимизацию в (3) имеет смысл проводить на множестве тех z, для которых $\sigma_{D_t(\cdot)}(z) < +\infty$ (непустом благодаря условию безарбитражности NDSAUP).

5. Для поиска выпуклой оболочки можно использовать различные численные алгоритмы, включая уже реализованные в MATLAB/Python.

6. Для решения задачи можно использовать разработанный комплекс программ «Робастное управление портфелем финансовых инструментов» `https://github.com/andreevnick/robust-financial-portfolio-management-framework`. Документация: `https://robust-financial-portfolio-management-framework.readthedocs.io/en/stable/?badge=stable`. В коде проекта возможны изменения.

   Для студентов создан fork основного проекта (версия 0.1.0), доступный по ссылке: `https://github.com/doctormee/robust-fpm-cmc-msu-edu-2021`. Документация для fork находится в папке `docs/stable`.

Список литературы

[1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998. 544 с.

[2] Föllmer, H. Schied. A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time, 4nd edition New York : Walter de Gruyter, 2016. 608 p.

[3] Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистскиий подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана–Айзекса // Математическая теория игр и е приложения. 2018. Т. 10. No 4. С. 59–99.

[4] Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. No 2. С. 68–95.

[5] Смирнов, С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса // Математическая теория игр и е приложения. 2019. Т. 11. No 4. С. 87–115.

[6] Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие // Математическая теория игр и е приложения. 2020. Т. 12, No 1. С. 60–90.

[7] Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. № 3. С. 50–88.

[8] Смирнов С. Н. Порог структурной устойчивости для грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная Математика и Кибернетика. 2021. № 1. С. 38–49.