Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Практикум

«Элементы финансовой математики»

Студент 515 группы
К. Ю. Егоров

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент С. Н. Смирнов

Москва, 2022

Содержание

1 Постановка задачи **3**

2 Условие безарбитражности **4**

3 Алгоритм решения уравнения Беллана–Айзекса **4**

4 Влияние торговых ограничений **5**

5 Результаты вычислений **6**

1 Постановка задачи

Рассматривается задача суперхеджирования опциона Call On Max американского типа с ценой исполнения $\chi > 0$ и функцией выплат

$$\begin{cases} g_t(\bar{x}_t) = \max\{\max\{x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^n\} - \chi,\, 0\}, \text{ при } t = 1, 2, \ldots, T, \\ g_0(\bar{x}_0) = -\infty, \end{cases} \tag{1}$$

для $n = 2$ рисковых активов при наличии торговых ограничений. Время t в задаче принимается дискретным, неотрицательным и ограниченным горизонтом T.

Положительный вектор $x_t = (x_t^1, x_t^2, \ldots, x_t^n) > 0$ обозначает дисконтированные цены рисковых активов в момент времени t. За $\bar{x}_{t-1} = (x_0, x_1, \ldots, x_{t-1})$ обозначим предысторию цен, сложившуюся к моменту времени t. Также считаем, что цена безрискового актива постоянна, равна единице, а торговые ограничения для него отсутствуют.

Стратегией хеджера называется последовательность векторов $h_1, h_2, \ldots, h_T$, удовлетворяющая торговым ограничениям, заданным многозначным отображением $D_t(\cdot)$:

$$h_t \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Динамика цен описывается мультипликативной моделью:

$$x_t = m_t \odot x_{t-1}, \text{ где } m_t \in E_t(\bar{x}_{t-1}). \tag{3}$$

Здесь $\odot$ обозначает поэлементное произведение векторов, а $E_t(\cdot)$ — компактнозначное отображение, задающее ограничения на мультипликаторы. По условию задачи, $E_t(\cdot) \equiv \Pi$, где $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ — прямоугольник, $0 < a < b$, $0 < c < d$. Параметры множества Π выбираются таким образом, чтобы $\Pi \subset \mathbb{R}_+^n$ и выполнялось условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью $NDSAUP$, то есть когда

$$\mathrm{conv} K_t(\cdot) \cap \mathrm{bar} D_t(\cdot) \neq \varnothing, \text{ где } K_t(\bar{x}_{t-1}) = (\Pi - \bar{1}) \odot x_{t-1}. \tag{4}$$

Здесь отображение $K_t(\cdot)$ задает ограничения для данной модели, если записать её в аддитивной форме:

$$x_t = x_{t-1} + y_t, \text{ где } y_t \in K_t(\bar{x}_{t-1}). \tag{5}$$

Целевая функция $v_t^*(\bar{x}_t)$ — это резервы, необходимые для покрытия обязательств по проданному опциону. Целевая функция $v_t^*(\bar{x}_t)$ удовлетворяет уравнению Беллмана–Айзекса (мы считаем, что выполнены необходимые условия полунепрерывности сверху функции $v_t^*(\bar{x}_t)$):

$$\begin{cases} v_t^*(\bar{x}_t) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1})} \left\{ \int v_t^*(\bar{x}_{t-1},\, x_{t-1} + y)\, Q(dy) - \rho\left(\int y\, Q(dy) \middle| D_t(\bar{x}_{t-1}) \right) \right\}, \\ v_T^*(\bar{x}_T) = g_T(\bar{x}_T), \end{cases} \tag{6}$$

где $\rho\,(\cdot\,|D_t(\bar{x}_{t-1})\,)$ обозначает опорную функцию множества $D_t(\bar{x}_{t-1})$, а $\mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1})$ — все вероятностные меры, носители которых вложены в $K_t(\bar{x}_{t-1})$ и состоят не более, чем из $(n+1)$ точки. Отметим также, что данный подход позволяет разделить задачи ценообразования и хеджирования.

Целью данной практической работы является нахождение решения уравнения Беллмана–Айзекса и анализ качественного поведения премии за опцион $v_0^*(x_0)$ в зависимости от следующих факторов:

1. начальных цен рисковых активов,
2. дисперсии цен активов,

при вариантах торговых ограничений $D_t(\cdot)$:

1. отсутствие торговых ограничений,
2. запрет коротких позиций по обоим активам,
3. запрет коротких позиций по более волатильному активу,
4. запрет коротких позиций по менее волатильному активу.

2 Условие безарбитражности

Заметим, что условие безарбитражности (4) будет выполнено для любых торговых ограничений $D_t(\cdot)$, если оно выполнено для случая без торговых ограничений $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathrm{bar}\mathbb{R}^n = \{0\}$ и получаем

$$0 \in (\Pi - \bar{1}) \odot x_{t-1}, \tag{7}$$

или, в силу положительности цен,

$$\bar{1} \in \Pi. \tag{8}$$

Таким образом, условие безарбитражности $NDSAUP$ выполнено для любого прямоугольника Π с ограничениями

$$a \leqslant 1,\ b \geqslant 1,$$

$$c \leqslant 1,\ d \geqslant 1.$$

3 Алгоритм решения уравнения Беллана–Айзекса

Уравнение Беллмана–Айзекса (6) может быть решено при каждом t в два этапа:

1. для фиксированного $z \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ вычисляется функция

$$u_t(\bar{x}_{t-1}, z) = \sup\nolimits_{Q\in\mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1}),\,\int yQ(dy)=z} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1}+y)\,Q(dy); \tag{9}$$

2. функция цены находится как

$$v^*_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \sup_{z \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \{u_t(\bar{x}_{t-1}, z) - \rho(z|D_t(\bar{x}_{t-1}))\}. \qquad (10)$$

Заметим, что функция $u_t(\bar{x}_{t-1}, z)$ совпадает в точке z с вогнутой оболочкой функции

$$f(y) = \begin{cases} v^*_t(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y), & \text{где } y \in K_t(\bar{x}_{t-1}); \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (11)$$

При этом в пункте 2 достаточно рассматривать только векторы z из $K_t(\bar{x}_{t-1}) \cap D_t(\bar{x}_{t-1})$.

При построение вогнутой оболочки компакты $K_t(\cdot)$ аппроксимируются (по метрике Хаусдорфа) конечными множествами на сетке $\hat{K}_t(\cdot)$. Для численного решения использовался комплекс программ «Робастное управление портфелем финансовых инструментов» (версия 0.1.0)[1]. Для перехода от мультипликативной модели с независящими от цен ограничениями к аддитивной модели используется класс MDAFDynamics.

4 Влияние торговых ограничений

Докажем лемму, применив которую, мы сможем существенно сократить количество вычислений.

Лемма 1. *Пусть функция выплат $g_t(\bar{x}_t)$ одинакова при всех t, зависит только от x_t и неубывает, то есть для любого $y \in \mathbb{R}^n_+$ выполнено $g(x_t + y) \geqslant g(x_t)$. Тогда премии за опцион совпадают для всевозможных торговых ограничений $D_t(\cdot)$ таких, что $D_t(x_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n_+$.*

Доказательство. С помощью уравнения Беллмана–Айзекса (6) легко показать по индукции, что функция $v^*_t(\bar{x}_{t-1}, \cdot)$ также является неубывающей. Её вогнутая оболочка $u_t(\bar{x}_{t-1}, z)$ также является неубывающей. В силу наложенных на $D_t(\cdot)$ ограничений,

$$\mathrm{bar}\, D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \leqslant 0, \ i = \overline{1, n}.\} \qquad (12)$$

Таким образом, максимум в (13) достигается на $z = 0 \in K_t(\bar{x}_{t-1}) \cap \mathrm{bar}\, D_t(\bar{x}_{t-1})$. В частности, минимум достигается в $z = 0$ в случае отсутствия торговых ограничений, когда $\mathrm{bar}\, D_t(\cdot) = \{0\}$, поэтому значения всех функций v^*_t будут совпадать.

■

Утверждение леммы можно интерпретировать следующим образом: при суперхеджирования опциона с неубывающей функций выплат хеджер всегда может занимать неотрицательные позиции по всем активам. Заданная функция выплат (1) не убывает, поэтому, согласно предыдущей лемме, мы можем строить графики для одного любого из предложенных типов ограничений, остальные обязаны совпасть. Далее, если не оговорено обратное, программа работала в режиме без торговых ограничений.

[1]https://github.com/doctormee/robust-fpm-cmc-msu-edu-2021

5 Результаты вычислений

Ниже представлены результаты работы программы: интересные графики с кратким пояснением происходящего. Временной горизонт T у всех графиков равен 5.

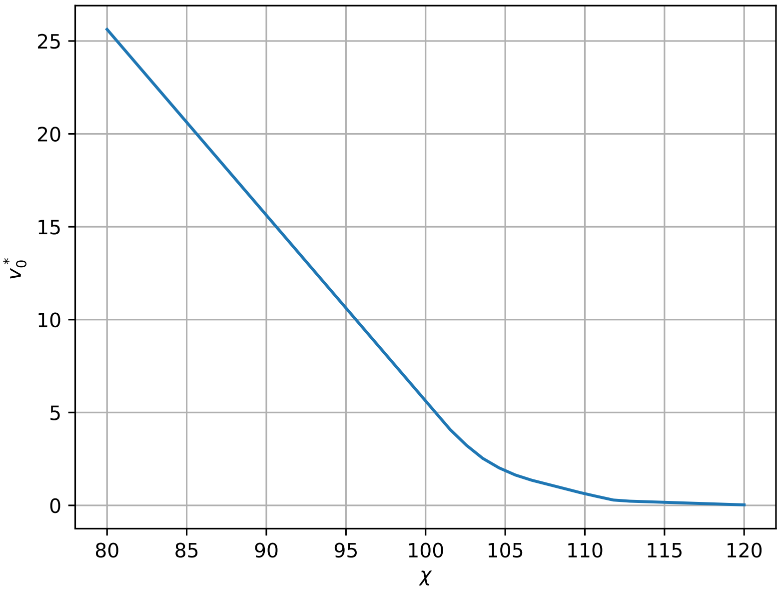

Рис. 1: Зависимость премии за опцион от величины страйка для начальной стоимости $x_0 = [100, 100]$ и ограничений $\Pi = [0{,}97, 1{,}03] \times [0{,}99, 1{,}01]$.

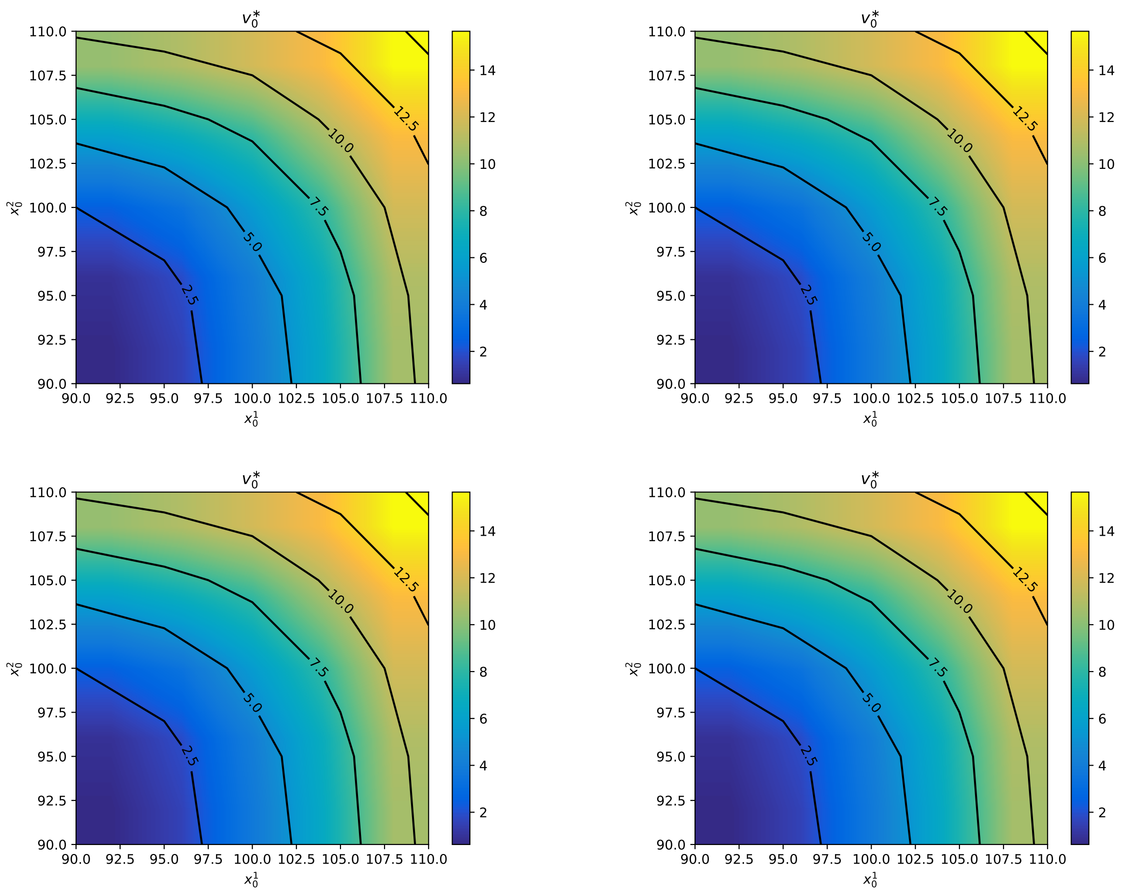

Рис. 2: Зависимость премии от начальной цены активов на крупной сетке для различных типов торговых ограничений: без ограничений, без коротких позиций, без коротких позиций по более волатильному активу, без коротких позиций по менее волатильному активу. Здесь ограничения задаются как $\Pi = [0{,}97, 1{,}03] \times [0{,}99, 1{,}01]$. Видно что графики идентичны, как было доказано выше.

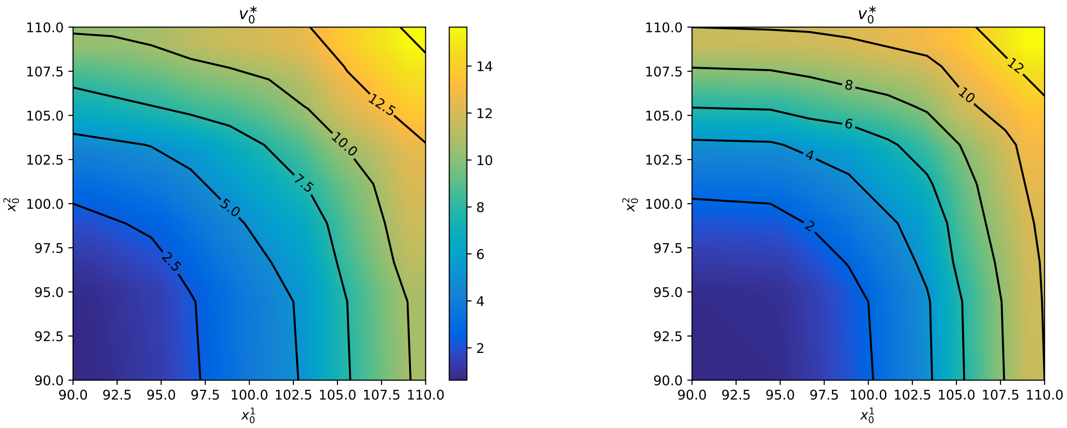

Рис. 3: Зависимость премии от начальной цены рисковых активов x_0. Ограничения слева равны $\Pi = [0{,}97, 1{,}03] \times [0{,}99, 1{,}01]$, справа — $\Pi = [0{,}99, 1{,}01] \times [0{,}99, 1{,}01]$.

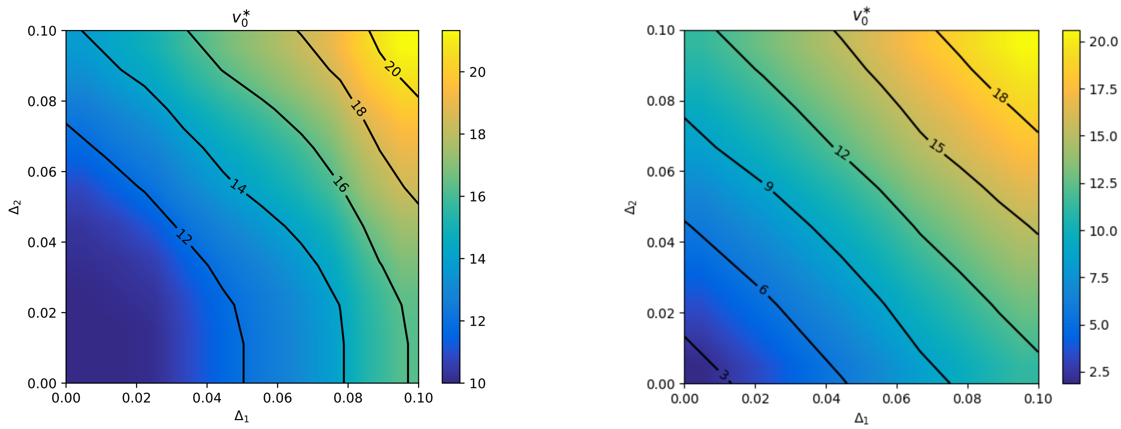

Рис. 4: Зависимость премии от дисперсии рисковых активов, то есть ограничения $\Pi = [1 - \Delta_1, 1 + \Delta_1] \times [1 - \Delta_2, 1 + \Delta_2]$. Начальная стоимость слева равна $x_0 = [90, 110]$, справа — $x_0 = [100, 100]$.