

## 0.1 Синтез оптимальной поправки

Допустим мы имеем некоторое референсное управление  $\bar{u} = \{\bar{u}^k\}_{k=1}^N$  и соответствующую ему референсную траекторию  $\bar{x} = \{\bar{x}^k\}_{k=1}^{N+1}$ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} f_x^k &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}^k, \bar{u}^k)}, & f_u^k &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}^k, \bar{u}^k)}, \\ q^k &= q(\bar{x}^k), & q_x^k &= \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}^k}, & q_{xx}^k &= \left. \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right|_{\bar{x}^k}, \\ r^k &= r(\bar{u}^k), & r_x^k &= \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{\bar{u}^k}, & r_{xx}^k &= \left. \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^k}. \end{aligned}$$

Тогда, линеаризуя вдоль референсной траектории задачу Коши (??) и строя квадратичную аппроксимацию вдоль той же траектории функционала качества (??), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \delta x^{k+1} = f_x^k \delta x + f_u^k \delta u, & k = \overline{1, N}, \\ \delta x^1 = 0. \end{cases} \quad (0.1)$$

$$\begin{aligned} J &= q^{N+1} + q_x^{N+1} \tilde{x}^{N+1} + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^{N+1}, q_{xx}^{N+1} \tilde{x}^{N+1} \rangle + \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[ q^k + q_x^k \tilde{x}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^k, q_{xx}^k \tilde{x}^k \rangle \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[ r^k + r_u^k \tilde{u}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{u}^k, r_{uu}^k \tilde{u}^k \rangle \right], \end{aligned} \quad (0.2)$$

где

$$\tilde{x}^k = \bar{x}^k + \delta x^k, \quad \tilde{u}^k = \bar{u}^k + \delta u^k.$$

Построим гамильтониан для задачи (0.1)-(0.2):

$$\begin{aligned} H_k &= q^k + q_x^k \tilde{x}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^k, q_{xx}^k \tilde{x}^k \rangle + \\ &+ r^k + r_u^k \tilde{u}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{u}^k, r_{uu}^k \tilde{u}^k \rangle + \\ &+ (\lambda^{k+1})^T (f_x^k \delta x^k + f_u^k \delta u^k), \end{aligned} \quad (0.3)$$

где  $\lambda^{k+1}$  — мультипликаторы Лагранжа.

Оптимальное управление  $\delta u$  должно удовлетворять необходимому условию

$$\left. \frac{\partial H_k}{\partial(\delta u^k)} \right|_{\delta u^k = \delta u^{k*}} = r_u^k + r_{uu}^k(\bar{u}^k + \delta u^{k*}) + (f_u^k)^T \lambda^{k+1} = 0,$$

что дает следующее выражение для поправки:

$$\delta u^{k*} = -(r_{uu}^k)^{-1}[(f_u^k)^T \lambda^{k+1} + r_u^k] - \bar{u}^k. \quad (0.4)$$

При этом имеет силу сопряженная задача:

$$\begin{cases} \lambda^k = (f_x^k)^T \lambda^{k+1} + q_x^k + q_{xx}^k(\bar{x}^k + \delta x^k) \\ \lambda^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}(\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1}). \end{cases} \quad (0.5)$$

Из (0.4) и (0.5) вытекает

$$\begin{pmatrix} \delta x^{k+1} \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x^k & -f_u^k(r_{uu}^k)^{-1}(f_u^k)^T \\ q_{xx}^k & (f_x^k)^T \end{pmatrix}}_{\Phi^k} \begin{pmatrix} \delta x^k \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -f_u^k(r_{uu}^k)^{-1}r_u^k \\ q_x^k \end{pmatrix}}_{\Gamma^k}. \quad (0.6)$$

**Теорема 1.** *Оптимальная поправка  $\delta u$  для задачи (0.1)-(0.2) вычисляется как*

$$\delta u^k = -(r_{uu}^k + (f_u^k)^T S_{k+1} f_u^k)^{-1}((f_u^k)^T S_{k+1} f_u^k \delta x + v^{k+1} + r_u^k), \quad (0.7)$$

где  $S_k$  и  $v^k$  вычисляются в обратном времени как

$$\begin{aligned} S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1} (I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1} \Phi_{11}^k, \\ v^k &= \Phi_{22}^k S_{k+1} (I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1} (\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + \Phi_{22}^k v^{k+1} + \Gamma_2^k \end{aligned} \quad (0.8)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= q_{xx}^{N+1}, \\ v^{N+1} &= q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1} \bar{x}^{N+1}. \end{aligned} \quad (0.9)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что мультипликаторы  $\lambda$  имеют следующую аффинную форму относительно фазовой переменной  $\delta x$

$$\lambda^k = S_k \delta x^k + v^k \quad (0.10)$$

Тогда из граничного условия (0.5) вытекает граничное условие на  $S_k, v^k$  (0.9):

$$\begin{aligned} \lambda^{N+1} &= q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1} (\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1}) \\ &\Downarrow \\ S_{N+1} &= q_{xx}^{N+1}, v^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1} \bar{x}^{N+1}. \end{aligned}$$

Теперь подставим (0.10) в выражение (0.6) для  $\delta x^{k+1}$ :

$$\delta x^{k+1} = \Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k (S_{k+1} \delta x^{k+1} + v^{k+1}) + \Gamma_1^k.$$

Получаем

$$\delta x^{k+1} = \left( \underbrace{I - \Phi_{12}^k S_{k+1}}_{K_k} \right)^{-1} (\Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k).$$

Подставим получившееся выражение в (0.6) для  $\lambda^k$ :

$$\begin{aligned} \lambda^k &= S_k \delta x^k + v^k = \Phi_{21}^k \delta x^k + \Phi_{22}^k (S_{k+1} \delta x^{k+1} + v^{k+1}) + \Gamma_2^k = \\ &= \Phi_{21}^k \delta x^k + \Phi_{22}^k (S_{k+1} K_k^{-1} (\Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + v^{k+1}) + \Gamma_2^k. \end{aligned}$$

Таким образом получаем искомые соотношения (0.8):

$$\begin{aligned} S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1} K_k^{-1} \Phi_{11}^k, \\ v^k &= \Phi_{22}^k (S_{k+1} K_k^{-1} (\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + v^{k+1}) + \Gamma_2^k. \end{aligned}$$

Итоговая формула для оптимальной поправки (0.7) получается прямой подстановкой получившихся соотношений в выражение (0.4). ■

*Замечание 1.* Полученная теорема требует существования обратных матриц для  $K_k, k = \overline{1, N}$ . При этом для нелинейных систем данное условие может не выполняться. Чтобы метод продолжал работать, предлагается в случае нулевого определителя  $\det K_k = 0$ , заменять в формулах (0.7), (0.8) матрицу  $K_k$  на регуляризованную

$$\mathcal{K}_k = K_k + \mu I. \tag{0.11}$$