0.1 Уравнение динамики

Для получения уравнения динамики рассматриваемой физической системы воспользуемся методом Эйлера–Лагранжа [?]. Идея метода состоит в проведении следующих последовательных шагов:

1. Выбор обобщённых координат;
2. Получение выражения для кинетической K и потенциальной Π энергий системы, записанных в обобщённых координатах;
3. Получение выражения для лагранжиана системы $\mathcal{L}$;
4. Составление системы уравнений движения, соответствующих каждой обобщённой координате.

Обобщёнными координатами для нашей системы выберем углы поворота сочленений θ_i, $i = 1, 2, 3$. Далее перейдем к выражению энергий через обобщенные координаты. Для подсчета кинетической энергии воспользуемся теоремой Кёнинга [?].

Теорема 1 (Кёнинг). *Кинетическая энергия тела есть энергия поступательного движения центра масс плюс энергия вращательного движения относительно центра масс*

$$K = \frac{1}{2}m\|v_c\|^2 + \frac{1}{2}\omega^{\mathrm{T}} I \omega, \tag{0.1}$$

где m — полная масса тела, I — тензор инерции тела, v_c — линейная скорость центра масс, ω — скорость вращения тела относительно центра масс.

Далее в работе мы будем полагать, что каждое из сочленений представляет собой однородный стержень длины l_i массы m_i. В таком случае получаем следующие значения для положения центра масс $c^i \in \mathbb{R}^2$ i-ого сочленения:

$$c^i = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_j cos\theta_j + \frac{l_i}{2} cos\theta_i \\ \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_j sin\theta_j + \frac{l_i}{2} sin\theta_i \end{bmatrix}.$$

Выражения для момента инерции и скорости вращательного движения относительно центра масс для стержня получаются соответственно:

$$I_i = \int\limits_{(m_i)} r^2\,dm = \rho_i \int\limits_{(l_i)} r^2\,dl = \frac{m_i l_i^2}{12},$$

$$\omega_i = 2\dot{\theta}_i.$$

Потенциальная энергия i-ого сочленения рассчитывается по формуле

$$\Pi_i = m_i g c_2^i,$$

где g — ускорение свободного падения.

Общая кинетическая и потенциальная энергии системы рассчитываются как сумма энергий каждого из сочленений:

$$K = \sum_{i=1}^{3} K_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{m_i \|\dot{c}^i\|^2}{2} + \frac{m_i l_i^2 |\dot{\theta}_i|^2}{6} \right),$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{3} \Pi_i = \sum_{i=1}^{3} m_i g c_2^i.$$

Теперь введём лагражиан системы

$$\mathcal{L} = K - \Pi$$

и построим систему уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{0.2}$$

где τ_i — момент силы, действующий на i-ое сочленение, который доступен для управления.

Продифференцировав члены из левой части уравнения (0.2), получим уравнение динамики для рассматриваемой системы:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + L(\theta, \dot{\theta}) = \tau, \tag{0.3}$$

где $M(\theta) = M^{\mathrm{T}}(\theta) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ — матрица инерции системы, $L(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^3$ — вектор центростремительных и кориолисовых сил. На Рис. 1 приведено численное моделирование свободного падения системы в соответствии с полученным уравнением динамики (0.3).

Замечание 1. Матрица инерции $M(\theta)$ является положительно-определённой, поскольку кинетическая энергия системы K всегда неотрицательна:

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left\langle \dot{\theta}, M(\theta)\dot{\theta} \right\rangle > 0 \text{ для любого } \dot{\theta} \neq 0.$$

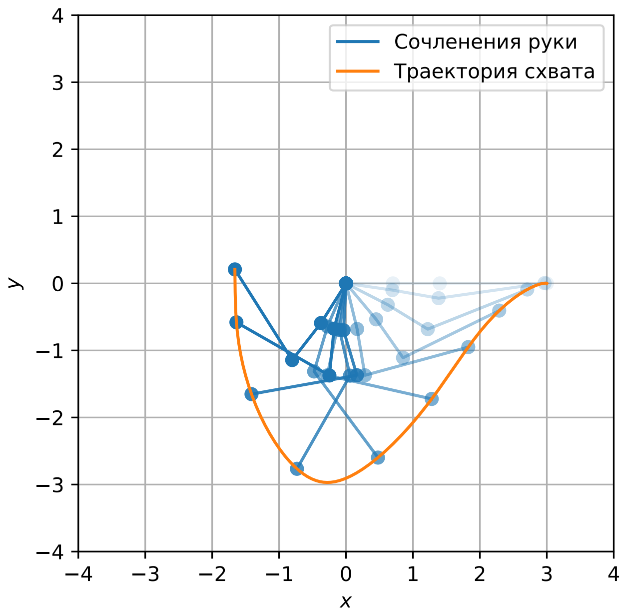

Рис. 1: Траектория системы в свободном падении из начального положения $\theta^{\text{start}} = [0\ 0\ 0]^{\text{T}}$, $\dot{\theta}^{\text{start}} = [0\ 0\ 0]^{\text{T}}$ на временном интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Положения системы, соответствующие более раннему времени, показаны бледнее. Для изображения положений используется равномерное разбиение временного интервала.