

# Математическое моделирование движений руки, держащей предмет

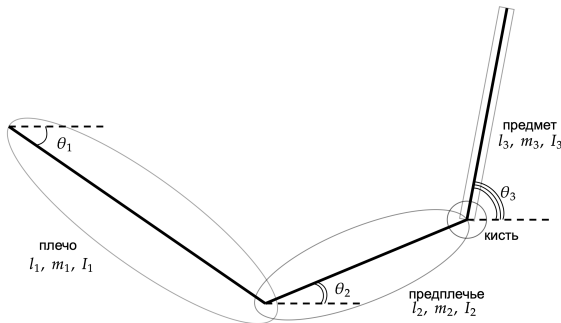
студент 2 курса магистратуры К. Ю. Егоров  
научный руководитель — к.ф-м.н., доцент И. В. Востриков

Кафедра системного анализа  
ВМК МГУ

26 апреля 2023

- 1 Построение математической модели
- 2 Постановка задачи оптимального управления
- 3 Алгоритм синтеза управления
- 4 Выбор начальной траектории алгоритма
- 5 Применение в классических задачах
- 6 Литература

# Математическое моделирование



## Начальные данные

- Рука — 3-х сочленённый математический маятник.
- Известны длины  $\ell_i$ , массы  $m_i$  и моменты инерции  $I_i$ .
- Фазовые переменные — углы поворота сочленения  $\theta_i$  относительно оси  $Ox$ .

# Уравнение динамики

## Метод Эйлера–Лагранжа

$$\mathcal{L} = \Pi - K \implies \tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i},$$

где  $K$  и  $\Pi$  — общие кинетическая и потенциальная энергии системы.

## Уравнение динамики

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + L(\theta, \dot{\theta})$$

- $\tau_i$  — момент силы, действующей на  $i$ -е сочленение
- $M(\theta) = M^T(\theta) > 0$  — матрица инерции
- $L(\theta, \dot{\theta})$  — вектор центробежных и корелисовых сил

# Математическое моделирование

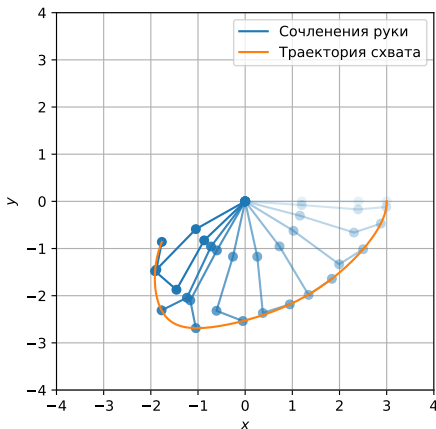


Рис.: Траектория руки в свободном падении

# Принцип оптимальности

Моторно-двигательная система как результат эволюции и обучения строит движение в соответствии с принципом оптимальности.

## Биологический принцип оптимальности

Выбираемые нервной системой схемы движения являются оптимальными для поставленной задачи.

В работе [2] показано, что оптимизации проводится с целью уменьшения затрат энергии.

## Формализация энергетических затрат [3]

$$\text{Затраты} = \int_{t_{start}}^{t_{final}} \|\dot{\tau}\|^2 dt$$

# Постановка задачи

Введем  $x = [\theta \ \dot{\theta} \ \tau]^T$ , тогда уравнение динамики примет вид

$$\dot{x} = A(x) + Bu, \text{ где } A(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1)(x_3 - L(x_1, x_2)) \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Задано начальное положение:

$$x(t_{\text{start}}) = x^{\text{start}}$$

Задача минимизации функционала:

$$J = q_{\text{терм.}}(x^{\text{final}}) + w_1 \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{final}}} q_{\text{фаз.}}(x) dt + w_2 \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{final}}} \|u\|^2 dt \longrightarrow \min,$$

где  $q_{\text{терм.}}$ ,  $q_{\text{фаз.}}$  выбираются исходя из конкретной постановки задачи.

# Дискретный вариант задачи

Введем сетку по переменной  $t = \{t_k\}_{k=1}^{N+1}$  с шагом  $\Delta t$ , тогда

$$\begin{cases} x^{k+1} = f(x^k, u^k) \\ x^0 = x^{start}, \end{cases}$$

где  $f(x^k, u^k) = \Delta t[A(x^k) + Bu^k] + x^k$ .

$$J = q^{N+1}(x^{N+1}) + \sum_{k=1}^N q^k(x^k) + \sum_{k=1}^N r^k(u^k) \longrightarrow \min,$$

$$q^{N+1}(x) = q_{\text{терм.}}(x), \quad q^k(x) = w_1 \Delta t q_{\text{фаз.}}(x), \quad r^k(u) = w_2 \Delta t \|u\|^2.$$



# Алгоритм синтеза управления

## Идея метода

- 1 Пусть на  $k$  шаге алгоритма дано *референсное* управление  $\bar{u}$  и соответствующая ему траектория  $\bar{x}$ .
- 2 Вдоль траектории линеаризуем систему, квадратично аппроксимируем функционал качества.
- 3 Построим оптимальную поправку на управление  $\delta u = \delta u(\bar{x}, \bar{u})$ .
- 4 Если поправка выходит за допустимую область, то есть  $\bar{u}^k + \delta u^k \notin \mathcal{U}^k$ , то берем в качестве поправки  $\eta \delta u^k$  такую, что  $\bar{u}^k + \eta \delta u^k \in \partial \mathcal{U}^k$ .
- 5 Если мы не достигли требуемой точности, то есть  $|J(\bar{u}) - J(\bar{u} + \delta u)| \geq \varepsilon$ , повторяем действия с новым референсным управлением.

# Аппроксимированная задача

Допустим мы имеем некоторое референсное управление  $\bar{u}$  и соответствующую ему референсную траекторию  $\bar{x}$ .

$$\begin{cases} \delta x^{k+1} = f_x^k \delta x + f_u^k \delta u \\ \delta x^0 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} J = & q^{N+1} + q_x^{N+1} \tilde{x}^{N+1} + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^{N+1}, q_{xx}^{N+1} \tilde{x}^{N+1} \rangle + \\ & + \sum_{k=1}^N \left[ q^k + q_x^k \tilde{x}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^k, q_{xx}^k \tilde{x}^k \rangle \right] + \\ & + \sum_{k=1}^N \left[ r^k + r_u^k \tilde{u}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{u}^k, r_{uu}^k \tilde{u}^k \rangle \right], \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\tilde{x}^k = \bar{x}^k + \delta x^k$ ,  $\tilde{u}^k = \bar{u}^k + \delta u^k$ .

# Синтез управления

## Теорема [Об оптимальной поправке]

Оптимальная поправка  $\delta u$  для задачи (1)-(2) вычисляется как

$$\delta u^k = -(r_{uu}^k + (f_u^k)^T S_{k+1} f_u^k)^{-1} ((f_u^k)^T S_{k+1} f_u^k \delta x + v^{k+1} + r_u^k),$$

где  $S_k$  и  $v^k$  вычисляются в обратном времени как

$$S_k = q_{xx}^k + (f_x^k)^T S_{k+1} (I + f_u^k (r_{uu}^k)^{-1} (f_u^k)^T S_{k+1})^{-1} f_x^k,$$

$$v^k = (f_x^k)^T S_{k+1} (I + f_u^k (r_{uu}^k)^{-1} (f_u^k)^T S_{k+1})^{-1} \cdot$$

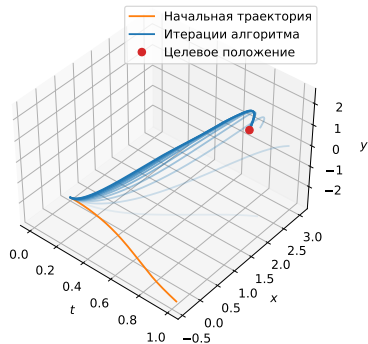
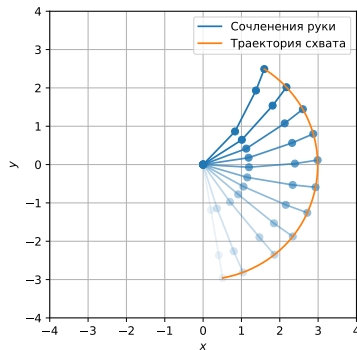
$$\cdot (-f_u^k (r_{uu}^k)^{-1} (f_u^k)^T v^{k+1} + f_u^k (r_{uu}^k)^{-1} r_u^k) + (f_x^k)^T v^{k+1} + q_x^k$$

с граничными условиями

$$S_{N+1} = q_{xx}^{N+1}, \quad v^{N+1} = q_x^{N+1}.$$

# Пример: Целевое состояние

$$q_{\text{терм.}}(x) = \|x - x^{\text{final}}\|^2$$



**Рис.:** Траектории руки и схвата для задачи при нулевом начальном управлении  $\bar{u} \equiv 0$ . Показана каждая 3-я итерация алгоритма.

# Выбор начальной траектории

## Мотивация

Предложенный метод сходится медленно. Построим начальное референсное управление  $\bar{u}$  так, чтобы:

- Оно удовлетворяло терминальному условию;
- Оно *быстро* строилось;
- Оно было допустимо для рассматриваемой задачи.

# Референсная траектория

Приведем систему к линейной, заменой управления

$$v = M^{-1}(x_1)(\tau - L(x_1, x_2))$$

Тогда система примет вид:

$$x^{k+1} = \underbrace{\text{diag}\{I, O\}}_A x^k + \underbrace{\text{diag}\{O, I\}}_B v^k \quad (3)$$

Выберем  $x^{\text{final}} \in \text{Argmin}_x q^{N+1}(x)$  и решим задачу минимизации

$$J = \|x - x^{\text{final}}\|^2 + w \sum_{k=1}^N \|v^k\|^2 \longrightarrow \min \quad (4)$$

Получим референсное управление  $u$  из соотношения

$$\tau^k = M(x_1^k)v_*^k + L(x_1^k, x_2^k) \implies u^k = \frac{\tau^{k+1} - \tau^k}{\Delta t}$$

# Референсная траектория

Метод динамического программирования даёт решение задачи.

## Утверждение

Оптимальное управление  $v_*$  задачи (3)-(4) высчитывается как

$$v_*^k = -[wI + B^T P^k B]^{-1} P^k B A x,$$

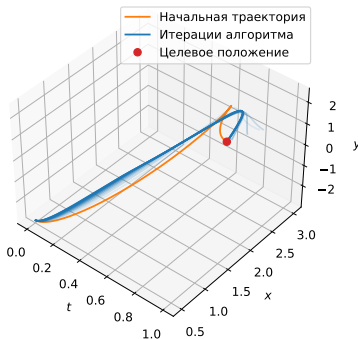
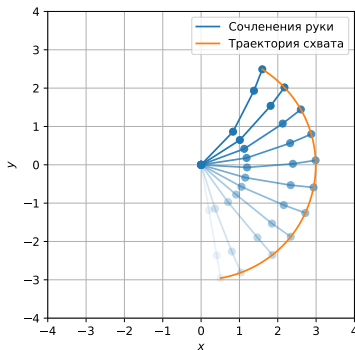
где матрица  $P^k$  может быть посчитана в обратном времени как решение уравнения Риккати

$$P^{k-1} = A^T P^k A - A^T P^k B [wI + B^T P^k B]^{-1} B^T P^k A$$

$$P^{N+1} = I$$

# Пример: целевое состояние

$$q_{\text{терм.}}(x) = \|x - x^{\text{final}}\|^2$$



**Рис.:** Траектории руки и схвата для задачи при новом начальном управлении. Показана *КАЖДАЯ* итерация алгоритма.



# Задача: обход препятствия

$$q_{\text{терм.}}(x) = \|x - x^{\text{final}}\|^2$$

$$q_{\text{фаз.}}(x) = (\|e_{\text{схват}}(x) - e_{\text{препят}}\|^2 - r_{\text{препят}})^2$$

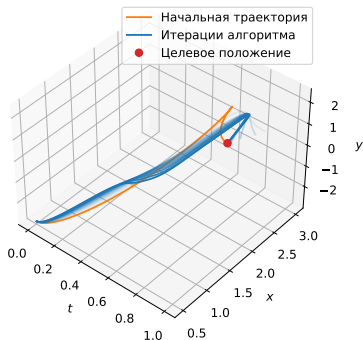
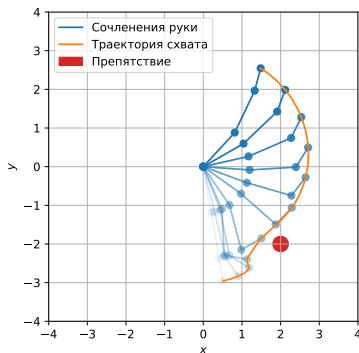


Рис.: Траектории руки и схвата для задачи.

# Задача: целевое положение схвата

$$q_{\text{терм.}}(x) = \|e_{\text{схват}}(x) - e^{\text{final}}\|^2$$

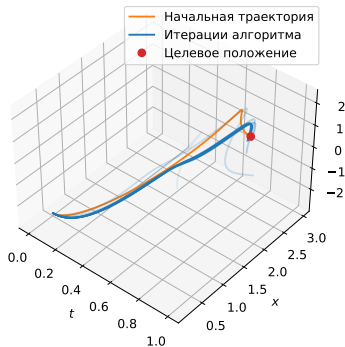
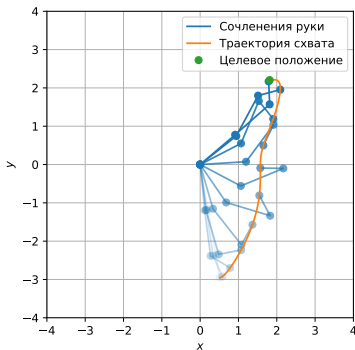


Рис.: Траектории руки и схвата для задачи.

# Задача: целевое положение схвата

$$q_{\text{терм.}}(x) = \|e_{\text{схват}}(x) - e^{\text{final}}\|^2$$

$$q_{\text{фаз.}}(x) = \sum_{i=2}^3 (x_i - x_{i-1})^2$$

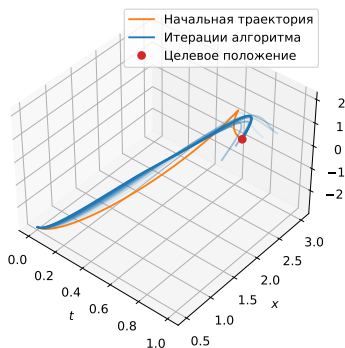
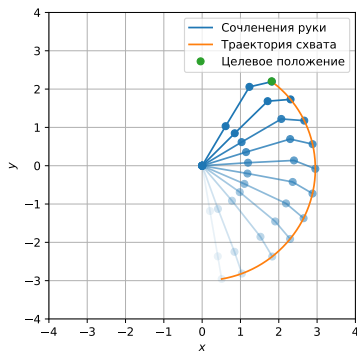


Рис.: Траектории руки и схвата для задачи.

# Доклады

- Егоров К. Ю., Востриков И. В. Математическое моделирование движения руки и поведенческих движений // Доклад науч. конф. «Ломоносовские чтения» (Москва, 4-14 апреля 2023).

# Список литературы

- 1 Колюбин С. А. Динамика робототехнических систем // Учебное пособие. — СПб.: Университет ИТМО, 2017. — 117 с.
- 2 E. Todorov, M. Jordan. Optimal feedback control as a theory of motor coordination // Nature Neuroscience, Vol.5, No.11, 1226-1235, 2002.
- 3 Y. Uno, M. Kawato, R. Suzuki. Formation and control of optimal trajectory in human multijoint arm movement — minimum torque-change model // Biological Cybernetics 61, 89-101, 1989.
- 4 B.D.O. Anderson, J.B. Moore. Optimal Control: Linear Quadratic Methods // Prentice Hall, Upper Saddle River, 1990.
- 5 D. H. Jacobson. Differential dynamic programming methods for determining optimal control of non-linear systems // University of London, 1967.

# Список литературы

- 6 E. Guechi, S. Bouzoualegh, Y. Zennir, S. Blažič. MPC Control and LQ Optimal Control of A Two-Link Robot Arm: A Comparative Study // Machines 6, no. 3: 37, 2018.
- 7 A. Babazadeh, N. Sadati. Optimal control of multiple-arm robotic systems using gradient method // IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, Singapore, pp. 312-317 vol.1, 2004.