0.1 Синтез управления

Приведём систему (**??**) к линейному виду заменой управления на

$$\hat{u} = M^{-1}(x_1)[\tau - L(x_1, x_2)]. \tag{0.1}$$

Тогда в фазовом пространстве $\hat{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6$ задача Коши примет вид

$$\begin{cases} \hat{x}^{k+1} = \hat{A}\hat{x}^k + \hat{B}\hat{u}^k, \ k = \overline{1, N}, \\ \hat{x}^1 = x^{\text{start}}, \end{cases} \tag{0.2}$$

где

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} I & \Delta t I \\ \hline O & I \end{array}\right), \quad \hat{B} = \left(\begin{array}{c} O \\ \hline \Delta t I \end{array}\right).$$

Будем считать, что для исходной задачи задачи (**??**)-(**??**) известно некоторое состояние x^{final}, минимизирующее терминальное условие q^{final}, то есть

$$x^{\text{final}} \in \operatorname{Argmin} q^{\text{final}}(x).$$

В таком случае для задачи Коши (0.2) поставим задачу минимизации следующего функционала

$$J = \left\|\hat{x}^{N+1} - x^{\text{final}}\right\|^2 + \hat{w}_1 \sum_{k=1}^{N} \left\langle \hat{x}^k, \hat{Q}\hat{x}^k \right\rangle + \hat{w}_2 \sum_{k=1}^{N} \left\|\hat{u}^k\right\|^2 \longrightarrow \min. \tag{0.3}$$

Здесь матрица $\hat{Q} = \hat{Q}^{\mathrm{T}}$ выбирается для исключения возможного *проворачивания* сочленений относительно друг друга следующим образом

$$\hat{Q} = \left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -1 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & O \\ 0 & -1 & 1 & \\ \hline & O & & O \end{array}\right). \tag{0.4}$$

Иными словами матрица $\hat{Q}$ является матрицей следующей квадратичной формы

$$\left\langle \hat{x}, \hat{Q}\hat{x} \right\rangle = \theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2.$$

Данное фазовое условие штрафует траекторию в случае большого относительного отклонения между углами сочленений.

После решения задачи (0.2)-(0.3) мы можем восстановить соответствующее управление исходной задачи. Пусть $\hat{u}^*$, $\hat{x}^*$ — оптимальное управление и соответствующая ему оптимальная траектория задачи (0.2)-(0.3). Тогда соответствующее управление для исходной задачи u, можно получить по формуле

$$u^k = \frac{\hat{\tau}^k - \hat{\tau}^{k-1}}{\Delta t}, \tag{0.5}$$

где

$$\begin{cases} \hat{\tau}^k = M(\hat{x}_1^{k*})\hat{u}^{k*} + L(\hat{x}_1^{k*}, \hat{x}_2^{k*}), \text{ при } k = \overline{1, N}, \\ \hat{\tau}^0 = \tau^{\text{start}}. \end{cases}$$

Построим гамильтониан задачи (0.2)-(0.3)

$$\hat{H}_k = \left\langle \hat{x}^k, \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k \right\rangle + \left\langle \hat{u}^k, \hat{w}_2 \hat{u}^k \right\rangle + (\hat{\lambda}^{k+1})^{\mathrm{T}} [\hat{A}\hat{x}^k + \hat{B}\hat{u}^k]. \tag{0.6}$$

Оптимальное управление $\hat{u}^*$ должно удовлетворять необходимому условию оптимальности:

$$\left. \frac{\partial \hat{H}_k}{\partial \hat{u}^k} \right|_{\hat{u}^k = \hat{u}^{k*}} = \hat{w}_2 \hat{u}^{k*} + \hat{B}^{\mathrm{T}} \hat{\lambda}^{k+1} = 0,$$

что дает следующее выражение для управления

$$\hat{u}^{k*} = -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^{\mathrm{T}} \hat{\lambda}^{k+1}. \tag{0.7}$$

И уравнение (0.2) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{x}^{k+1} = \hat{A}\hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}} \hat{\lambda}^{k+1}. \tag{0.8}$$

При этом имеет силу следующая сопряженная система:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}^k = \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^{\mathrm{T}} \hat{\lambda}^{k+1}, \text{ при } k = \overline{1, N} \\ \hat{\lambda}^{N+1} = \hat{x}^{N+1} - x^{\text{final}} \end{cases} \tag{0.9}$$

Теорема 1. *Оптимальное управление $\hat{u}^*$ задачи* (0.2)-(0.3) *задается формулой*

$$\hat{u}^{k*} = \hat{L}_k \hat{x}^k + \hat{d}^k, \tag{0.10}$$

где

$$\hat{L}_k = -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A},$$

$$\hat{d}^k = -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^{\mathrm{T}} \left(I - S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}} \right) v^{k+1}.$$

Причем переменные S_k, v^k могут быть найдены в обратном времени из соотношений

$$
\begin{aligned}
S_k &= \hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A}, \\
v_k &= \hat{A}^{\mathrm{T}} \left(I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} \right) v^{k+1}
\end{aligned}
\tag{0.11}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&S_{N+1} = I, \\
&v^{N+1} = -x^{\mathrm{final}}.
\end{aligned}
\tag{0.12}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству теоремы (1) будем искать решение сопряженной системы в аффинном виде

$$
\hat{\lambda}^k = S_k \hat{x}^k + v^k. \tag{0.13}
$$

Из сопряженной системы (0.9) получаем граничные условия:

$$
\hat{\lambda}^{N+1} = \hat{x}^{N+1} - x^{\mathrm{final}} \quad \Longrightarrow \quad S_{N+1} = I, \ v^{N+1} = -x^{\mathrm{final}}.
$$

Подставив выражение (0.13) в уравнение (0.8), получим

$$
\hat{x}^{k+1} = \hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} (S_{k+1} \hat{x}^{k+1} + v^{k+1}),
$$

откуда выражаем

$$
\hat{x}^{k+1} = \Bigg(\underbrace{I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} S_{k+1}}_{K_k} \Bigg)^{-1} \left(\hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} v^{k+1} \right).
$$

Теперь подставим получившееся выражение в (0.9):

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda}^k = S_k \hat{x}^k + v^k &= \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^{\mathrm{T}} (S_{k+1} \hat{x}^{k+1} + v^{k+1}) = \\
&= \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^{\mathrm{T}} S_{k+1} K_k^{-1} \left(\hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} v^{k+1} \right) + \hat{A}^{\mathrm{T}} v^{k+1} = \\
&= \left(\hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^{\mathrm{T}} S_{k+1} K_k^{-1} \hat{A} \right) \hat{x}^k + \hat{A}^{\mathrm{T}} \left(I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} K_k^{-1} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} \right) v^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Откуда получаем искомые соотношения:

$$S_k = \hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A},$$

$$v_k = \hat{A}^{\mathrm{T}} \left(I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B} \hat{B}^{\mathrm{T}} \right) v^{k+1}.$$

Теперь выражение для оптимального управления (0.10) получается прямой подстановкой получившихся соотношений в выражение (0.7).

■