Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Егоров Кирилл Юлианович

Математическое моделирование движений руки, держащей предмет

выпускная квалификационная работа

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2023

Содержание

1 Введение

Тут будет какое-то введение.

2 Математическое моделирование

2.1 Планарная модель руки человека

Рассмотрим руку человека, держащего стержень. В некотором приближении можно считать, что мы имеем трехсекционный математический маятник. Для каждого из 3-х сочленений нам известны:

1. Масса сочленения m_i, $i = 1, 2, 3$;
2. Линейная плотность сочленения $\rho_i = \rho_i(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l_i$, $i = 1, 2, 3$;
3. Длина сочленения l_i, $i = 1, 2, 3$;
4. Угол поворота сочленения θ_i, $i = 1, 2, 3$ относительно оси абсцисс Oe_1.

Также считаем, что положение плечевого сустава фиксировано для определенности в точке $O = (0, 0)$.

2.2 Уравнение динамики системы

Для получения уравнения динамики рассматриваемой физической системы воспользуемся методом Эйлера–Лагранжа [ссылка]. Идея метода состоит в проведении следующих последовательных шагов:

1. Выбор обобщенных координат;
2. Получение выражения для кинетической K и потенциальной Π энергий системы, записанных в обобщенных координатах;
3. Получение выражения для лагражиана системы $\mathcal{L}$;
4. Составление системы уравнений движения, соответствующих каждой обобщенной координате.

Обобщенными координатами для нашей системы выберем углы поворота сочленений θ_i, $i = 1, 2, 3$. Далее перейдем к выражению энергий через обобщенные координаты.

Для подсчета кинетической энергии воспользуемся теоремой Кёнинга [ссылка куда-то].

Теорема 1 (Кёнинг). *Кинетическая энергия тела есть энергия поступательного движения центра масс плюс энергия вращательного движения относительно центра масс*

$$K = \frac{1}{2}m\|v_c\|^2 + \frac{1}{2}\omega^{\text{т}} I\omega, \tag{1}$$

где m — полная масса тела, I — тензор инерции тела, v_c — линейная скорость центра масс, ω — скорость вращения тела относительно центра масс.

Далее в работе мы будем полагать, что каждое из сочленений представляет собой однородный стержень длины l_i массы m_i. В таком случае получаем следующие значения для положения центра масс $c^i \in \mathbb{R}^2$ i-ого сочленения:

$$c^i = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_j cos\theta_j + \frac{l_i}{2} cos\theta_i \\ \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_j sin\theta_j + \frac{l_i}{2} sin\theta_i \end{bmatrix}.$$

Выражения для момента инерции и скорости вращательного движения относительно центра масс для стержня получаются соответственно:

$$I_i = \int\limits_{(m_i)} r^2\, dm = \rho_i \int\limits_{(l_i)} r^2\, dl = \frac{m_i l_i^2}{12},$$

$$\omega_i = 2\dot{\theta}_i.$$

Потенциальная энергия i-ого сочленения рассчитывается по формуле

$$\Pi_i = m_i g c_2^i,$$

где $g \approx 9{,}8$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Общая кинетическая и потенциальная энергии системы рассчитываются как сумма энергий каждого из сочленений:

$$K = \sum_{i=1}^{3} K_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{m_i \|\dot{c}^i\|^2}{2} + \frac{m_i l_i^2 |\dot{\theta}_i|^2}{6} \right),$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^{3} \Pi_i = \sum_{i=1}^{3} m_i g c_2^i.$$

Теперь введём лагражиан системы

$$\mathcal{L} = K - \Pi$$

и построим систему уравнений Эйлера–Лагранжа [ссылка]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \tau_i, \ i = \overline{1, 3}, \tag{2}$$

где τ_i — момент силы, действующий на i-ое сочленение, который доступен для управления.

Продифференцировав члены из левой части уравнения (2), получим уравнение динамики для рассматриваемой системы:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + L(\theta, \dot{\theta}) = \tau, \tag{3}$$

где $M(\theta) = M^{\mathrm{T}}(\theta) \in \mathbb{R}^{3\times 3} > 0$ — матрица инерции системы, $L(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^3$ — вектор центростремительных и кореолисовых сил.

2.3 Учёт энергетических затрат

Биологическое движение требует обработки большого количества информации.

Сюда можно добавить воды.

Моторно-двигательная система как результат эволюции и обучения строит движение в соотвествии с принципом оптимальности [ссылка].

Утверждение 1 (Биологический принцип оптимальности)**.** *Выбираемые нервной системой схемы движения являются оптимальными для поставленной задачи.*

В работе [ссылка] было показано, что оптимизации проводятся с целью уменьшения затрат энергии. Однако общего подхода к формализации энергетических затрат пока не выработано. Так, например, в работе [ссылка] предлагается минимизировать *рывок* схвата, то есть

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d^3 e^3}{dt^3} \right\|^2 dt \longrightarrow \min,$$

а в работе [ссылка] — изменение крутящего момента:

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\tau}{dt} \right\|^2 dt \longrightarrow \min. \tag{4}$$

Причём, существуют и другие менее популярные варианты [ссылка].

Мы будем использовать для формализации энергетических затрат выражение (4), так как оно напрямую зависит от динамики руки и, вероятно, лучше предсказывает траектории биологического движения.

2.4 Уравнение кинематики системы

Рассмотрим расширенное фазовое пространство. Введем состояние системы как

$$x = [\theta\ \dot{\theta}\ \tau]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^7.$$

Тогда уравнение динамики системы (3) можно переписать в виде системы однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(x) + Bu, \tag{5}$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1)(x_3 - L(x_1, x_2)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Считаем, что для данной системы поставлена задача Коши, то есть нам известно начальное состояние системы:

$$x(t_0) = x^0. \tag{6}$$

Замечание 1. Отметим, что получившаяся функция $A(x)$ бесконечное число раз непрерывно дифференцируема всюду.

Замечание 2. Отметим также, что для выполнения достаточных условий существования и единственности решения Каратеодори для задачи Коши (5)-(6) управление $u(\cdot)$ достаточно брать из класса измеримых на рассматриваемом отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ функций.

Для задачи Коши (5)-(6) поставим задачу поиска управления $u(\cdot) \in \mathcal{U} \subset U[t_0, t_1]$, минимизирующего функционал вида:

$$J = q^{final}(x(t_1)) + w_1 \int\limits_{t_0}^{t_1} q(x(t))\,dt + w_2 \int\limits_{t_0}^{t_1} r(u(t))\,dt, \tag{7}$$

где $q^{final}(\cdot)$, $q(\cdot)$ отвечают за терминальное и фазовые ограничения соответственно и выбираются в зависимости от конкретной постановки задачи, а $r(\cdot)$ отвечает за энергетические затраты и в соответствии с (4) равна:

$$r(u) = \|u\|^2,$$

а w_1, w_2 — веса соответствующих критериев для данной многокритериальной задачи.

2.5 Дискретизация задачи

Тут уже чувствуется, что буквы начали повторяться.

Для удобства дальнейших рассуждений дискретизируем задачу (5)-(6)-(7) по времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Для этого введем равномерную сетку с шагом Δt:

$$\{t_i\}_{i=0}^{N+1}, \quad t_0 = t_0, \quad t_N = t_1, \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t.$$

Тогда, сузив класс допустимых управлений до кусочно-постоянных, получаем дискретный вариант рассматриваемой задачи Коши (5)-(6):

$$\begin{cases} x^{k+1} = f(x^k, u^k), \\ x^0 = x^0, \end{cases} \tag{8}$$

где $f(x^k, u^k) = \Delta t(A(x^k) + Bu^k) + x^k$.

При этом функционал (7) для дискретной задачи приобретет вид

$$J = q^{N+1}(x^{N+1}) + w_1 \sum_{i=0}^{N} \Delta t q(x^N) + w_2 \sum_{i=0}^{N} \Delta t r(u^N). \tag{9}$$

3 Итеративный метод синтеза оптимального управления

3.1 Общая идея метода

Есть хорошо разработанная теория для решения интегральных линейно-квадратичных задач. Большинство работ, посвященных управлению нелинейными системами, предлагают линеаризацию задачи с потерей физического смысла управления (давайте минимизировать то, что мы умеем минимизировать). Поэтому далее предложен метод, который решает эту проблему. Общая идея метода схожа с идеей метод дифференциального динамического программирования.

Метод итеративный.

1. Предположим, что на k-ой итерации мы имеем некоторое *референсное* управление $\bar{u}^k$ и соответствующую ему референсную траекторию $\bar{x}^k$.

2. Линеаризуем систему и функционал качества в окрестности референсной траектории и построим поправку δu для референсного управления $\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k + \delta u$.

3. Используем поправленное управление в качестве референсного на следующей итерации алгоритма.

Критерий остановки алгоритма, если $|J(u^k) - J(u^{k-1})| < \varepsilon$ для некоторого заданного наперед $\varepsilon > 0$.

3.2 Синтез управления

Допустим мы имеем некоторое референсное управление $\bar{u}$ и соответствующую ему референсную траекторию $\bar{x}$. Введем обозначения:

$$f_x^k = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x}^k, \bar{u}^k)}, \quad f_u^k = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{x}^k, \bar{u}^k)},$$

$$q^k = q(\bar{x}^k), \quad q_x^k = \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{\bar{x}^k}, \quad q_{xx}^k = \left.\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right|_{\bar{x}^k},$$

$$r^k = r(\bar{u}^k), \quad r_x^k = \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{\bar{u}^k}, \quad r_{xx}^k = \left.\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\right|_{\bar{u}^k}.$$

Тогда, линеаризуя вдоль референсной траектории задачу Коши (8) и строя квадратичную аппроксимацию вдоль той же траектории функционала качества (9), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \delta x^{k+1} = f_x^k \delta x + f_u^k \delta u \\ \delta x^0 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

$$J = q^{N+1} + q_x^{N+1}\tilde{x}^{N+1} + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}^{N+1}, q_{xx}^{N+1}\tilde{x}^{N+1}\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{N}\left[q^k + q_x^k\tilde{x}^k + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}^k, q_{xx}^k\tilde{x}^k\rangle\right] + \\ + \sum_{k=1}^{N}\left[r^k + r_u^k\tilde{u}^k + \frac{1}{2}\langle \tilde{u}^k, r_{uu}^k\tilde{u}^k\rangle\right], \tag{11}$$

где $\tilde{x}^k = \bar{x}^k + \delta x^k$, $\tilde{u}^k = \bar{u}^k + \delta u^k$.

Построим гамильтониан для задачи (10)-(11):

$$H_k = q^k + q_x^k\tilde{x}^k + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}^k, q_{xx}^k\tilde{x}^k\rangle + \\ + r^k + r_u^k\tilde{u}^k + \frac{1}{2}\langle \tilde{u}^k, r_{uu}^k\tilde{u}^k\rangle + \\ + (\lambda^{k+1})^{\mathrm{T}}(f_x^k\delta x^k + f_u^k\delta u^k), \tag{12}$$

где λ^{k+1} — мультипликаторы Лагранжа.

Оптимальное управление δu должно удовлетворять необходимому условию $\frac{\partial H_k}{\partial u^k} = 0$:

$$r_u^k + r_{uu}^k(\bar{u}^k + \delta u^k) + (f_u^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} = 0.$$

что дает следующее выражение для поправки:

$$\delta u^k = -(r_{uu}^k)^{-1}[(f_u^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} + r_u^k] - \bar{u}^k. \tag{13}$$

При этом имеет силу сопряженная задача:

$$\begin{cases} \lambda^k = (f_x^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} + q_x^k + q_{xx}^k(\bar{x}^k + \delta x^k) \\ \lambda^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}(\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1}). \end{cases} \tag{14}$$

Из (13) и (14) вытекает

$$\begin{bmatrix} \delta x^{k+1} \\ \lambda^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_x^k & -f_u^k (r_{uu}^k)^{-1} (f_u^k)^{\mathrm{T}} \\ q_{xx}^k & (f_x^k)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}}_{\Phi^k} \begin{bmatrix} \delta x^k \\ \lambda^{k+1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -f_u^k (r_{uu}^k)^{-1} r_u^k \\ q_x^k \end{bmatrix}}_{\Gamma^k}. \tag{15}$$

Предположим, что мультипликаторы λ имеют следующую афинную форму относительно фазовой переменной δx

$$\lambda^k = S_k \delta x^k + v^k$$

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Оптимальная поправка δu для задачи* (10)-(11) *вычисляется как*

$$\delta u^k = -(r_{uu}^k + (f_u^k)^{\mathrm{T}} S_{k+1} f_u^k)^{-1} ((f_u^k)^{\mathrm{T}} S_{k+1} f_u^k \delta x + v^{k+1} + r_u^k), \tag{16}$$

где S_k и v^k высчитываются в обратном времени как

$$\begin{aligned} S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1} (I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1} \Phi_{11}^k, \\ v^k &= \Phi_{22}^k S_{k+1} (I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1} (\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + \Phi_{22}^k v^{k+1} + \Gamma_2^k \end{aligned} \tag{17}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= q_{xx}^{N+1}, \\ v^{N+1} &= q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1} \bar{x}^{N+1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство.

Тут будет много формул, которые будут следовать из предыдущих формул, и при этом докажут верхнее утверждение.

■

Замечание 3. Данная теорема не учитывает возможные ограничения на управление, которые естественным образом возникают для данной задачи. Далее мы будем считать, что задано некоторое поточечное ограничение на управление $u^k \in \mathcal{U}^k$. В этом случае, мы будем считать домножать поправку на некоторую величину η, такую что $u^k + \eta \delta u^k \in \partial \mathcal{U}^k$.

Добавить замечание, почему только r_{uu} должна быть > 0 — типа лемма об обращении матриц.

Не забыть, что так как метод итеративный, нет надобности рассматривать большую систему с уравнение наблюдаемости, так как это предполагало бы, что каждая итерация алгоритма производится не на компьютере, где с наблюдаемостью все хорошо, а на настоящем человеке.

3.3 Построение начальной референсной траектории

Очевидно, что скорость что можно сильно увеличить скорость сходимости предложенного метода выбором некоторой начальной референсной траектории, близкой к оптимальной. При этом изначальное референсное управление должно строиться *быстро*. В данном разделе предложено построение такой траектории.

Все еще мы умеем хорошо строить управление для интегральных линейно-квадратичных задач. Поэтому приведем систему (8) к линейной заменой управления:

$$\tilde{u} = M^{-1}(x_1)(\tau - L(x_1, x_2)). \tag{19}$$

Тогда в фазовом пространстве $\tilde{x} = [x_1\ x_2] \in \mathbb{R}^6$ задача Коши примет вид

$$\begin{cases} \tilde{x}^{k+1} = \underbrace{\operatorname{diag}\{I\ O\}}_{A_{\text{ref}}} \tilde{x}^k + \underbrace{\operatorname{diag}\{O\ I\}}_{B_{\text{ref}}} \tilde{u}^k \\ \tilde{x}^0 = x^0. \end{cases} \tag{20}$$

Для задачи Коши (20) поставим задачу достижения целевого состояния $x^* \in \mathbb{R}^6$:

$$J_{\text{ref}} = \|\tilde{x}^{N+1} - x^*\|^2 + \sum_{k=1}^{N} \|\tilde{u}^k\|^2 \longrightarrow \min. \tag{21}$$

Замечание 4. Для того, чтобы использовать данную траекторию, как референсную для задачи (8)-(9), необходимо, чтобы конечное состояние x^* минимизировало терминальную часть функционала качества исходной задачи (9).

Замечание 5. С физической точки зрения решение данной задачи минимизирует угловые ускорения сочленений руки. Таким образом результатирующая траектория будет самой плавной из возможных. Кажется естественным, чтобы такая траектория входило в множество допустимых управлений для исходной задачи.

Замечание 6. Решив эту задачу, мы легко можем получить соответствующее управление для исходной задачи по формуле

$$\tau^k = M(x_1^k)\tilde{u}^k + L(x_1^k, x_2^k) \Longrightarrow u^k = \frac{\tau^{k+1} - \tau^k}{\Delta t}. \tag{22}$$

Теорема 3. *Оптимальное управление для задачи (ссылка) задаётся*

$$\tilde{u}^k * = -[I + B_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{T}} P_k B_{\mathrm{ref}}] B_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{T}} P_k A_{\mathrm{ref}} \tilde{x}, \tag{23}$$

где матрицы $P_k = P_k^{\mathrm{T}} > 0$ *можно найти в обратном времени из соотношений*

$$\begin{aligned} &P_{k-1} = A_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{T}} P_k A_{\mathrm{ref}} - A_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{T}} P_k B_{\mathrm{ref}} (I + B_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{T}} P_k A_{\mathrm{ref}}) P_k A_{\mathrm{ref}}, \\ &P_{N+1} = I. \end{aligned} \tag{24}$$

Доказательство.

Пользуемся методом динамического программирования. Строим функцию цены. Предполагаем что-то, получаем результат. Готово.

■

3.4 Применение метода для классических задач

Тут будут примеры с картинками, как данный метод применяется для задач:

- Перехода в целевое состояние
- Перехода в целевое положение схвата
- Обход препятствия

4 Задача отбивания мяча

4.1 Задача с известным терминальным временем

Теперь формализуем отбитие мяча. Рассмотрим точечное тело массы m, летящее в пространстве по некоторому заранее известному закону $\hat{x}(t)$. Поставим задачу оптимального отбивания этого мяча.

Допустим, что нам известно оптимальное время отбития t_1. Пусть в терминальный момент времени t_1 мяч находится в точке $e^* = \hat{x}(t_1)$. В таком случае нам необходимо формализовать два терминальных условия:

1. Условие на соприкосновение третьего сочленения системы с мячом,
2. Условие на необходимую приобретённую мячом скорость, после соприкосновения.

Рассмотрим эти условия по-отдельности. Формализация первого условия следует из геометрических свойств задачи:

$$J_{\text{сопр.}} = \|e^2 - e^*\| + \|e^3 - e^*\|. \tag{25}$$

Для формализации второго условия выпишем закон сохранения импульса для системы «третье сочлеление–мяч»: Выписать таки это дурацкое уравнение, которое никак не выходит. Таким образом, в предположении что что-то там получаем следующее условие:

$$J_{\text{скор.}} = \|\dot{e} - \dot{e}^{\text{target}}\|^2, \tag{26}$$

где e — координата точки, лежащей на третьем сочленении, удаленной от точки соединения на $\|e^2 - e^*\|$.

Причем первый критерий должен считаться более приоритетным, то есть

$$w_{\text{сопр.}} > w_{\text{скор.}}.$$

Для построения референсной траектории выбирается терминальное положение таким образом, чтобы центр третьего сочленения касался мяча с заданной скоростью, то есть

$$\text{формула для } \theta = \theta(e^*) \text{ через много синусов}$$

4.2 Задача с неизвестным терминальным временем

К сожалению общего метода для решения задач с неизвестным концом нет. В работе [ссылка] рассматривается вариант без интегрального условия. В работах [ссылка], [ссылка] — строются итеративные поправки на конечное время в предположении, что терминальное условие обращается в ноль конечное число раз.

В нашем же случае ничего не остается, кроме как устроить полный перебор терминального времени, и решения предыдущей задачи заново. Тем не менее данный подход не лишен достоинств: его можно легко распараллелить.

Пусть $\hat{t}_0 < \hat{t}_1 \in \{t | x(t) \cap \mathcal{B}_0(\sum_{i=1}^{3} l_i)\}$. Таких точек действительно две, если мы рассматриваем движение мяча, как тела, летящего под углом к горизонту. Тогда получим M задач, каждую из которых мы решаем независимо.

Список литературы

[1] Беллман Р. *Динамическое программирование.* М.: Изд-во иностр. лит., 1960, 400с.

[2] Егоров А. И. *Уравнения Риккати.* М.: Физматлит, 2001, 320с.

[3] Красовский Н. Н. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

[4] Филиппов А. Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М.: Наука, Москва, 1985.

[5] Johan Nilsson. *Real-Time Control Systems with Delays.* Lund Institute of Technology, 1998.

[6] Ruba M. K. Al-Mulla Hummadi *Simulation Of Optimal Speed Control For a Dc Motor Using Linear Quadratic Regulator (LQR).* Juornal of Engineering, Number 3, Volume 18 march 2012, Baghdad.