

0.1 Синтез управления

Приведём систему (??) к линейному виду заменой управления на

$$\hat{u} = M^{-1}(x_1)[\tau - L(x_1, x_2)]. \quad (0.1)$$

Тогда в фазовом пространстве $\hat{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^6$ задача Коши примет вид

$$\begin{cases} \hat{x}^{k+1} = \hat{A}\hat{x}^k + \hat{B}\hat{u}^k \\ \hat{x}^0 = x^{\text{start}}, \end{cases} \quad (0.2)$$

где

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} I & \Delta t I \\ \hline O & I \end{array} \right), \quad \hat{B} = \left(\begin{array}{c} O \\ \hline \Delta t I \end{array} \right).$$

Будем считать, что для исходной задачи задачи (??) известно некоторое состояние x^{final} , минимизирующее терминальное условие q^{final} , то есть

$$x^{\text{final}} \in \text{Argmin } q^{\text{final}}(x).$$

В таком случае для задачи Коши (0.2) поставим задачу минимизации следующего функционала

$$J = \|\hat{x}^{N+1} - x^{\text{final}}\|^2 + \hat{w}_1 \sum_{k=1}^N \langle \hat{x}^k, \hat{Q}\hat{x}^k \rangle + \hat{w}_2 \sum_{k=1}^N \|\hat{u}^k\|^2 \longrightarrow \min. \quad (0.3)$$

Здесь матрица $\hat{Q} = \hat{Q}^T$ выбирается для исключения возможного *проворачивания* сочленений относительно друг друга следующим образом

$$\hat{Q} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & O \\ -1 & 2 & -1 & O \\ 0 & -1 & 1 & O \\ \hline O & O & O & O \end{array} \right). \quad (0.4)$$

Иными словами матрица \hat{Q} является матрицей следующей квадратичной формы

$$\langle \hat{x}, \hat{Q}\hat{x} \rangle = \theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2.$$

Данное фазовое условие штрафует траекторию в случае большого относительного отклонения между углами сочленений.

После решения задачи (0.2)-(0.3) мы можем восстановить соответствующее управление исходной задачи. Пусть \hat{u}^* , \hat{x}^* — оптимальное управление и соответствующая ему оптимальная траектория задачи (0.2)-(0.3). Тогда соответствующее управление для исходной задачи u , можно получить по формуле

$$u^k = \frac{\hat{\tau}^{k+1} - \hat{\tau}^k}{\Delta t}, \quad (0.5)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\tau}^k = M(\hat{x}_1^{k*})\hat{u}^{k*} + L(\hat{x}_1^{k*}, \hat{x}_2^{k*}), \text{ при } k = \overline{1, N} \\ \hat{\tau}^{N+1} = 0. \end{cases}$$

Построим гамильтониан задачи (0.2)-(0.3)

$$\hat{H}_k = \langle \hat{x}^k, \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k \rangle + \langle \hat{u}^k, \hat{w}_2 \hat{u}^k \rangle + (\hat{\lambda}^{k+1})^T [\hat{A} \hat{x}^k + \hat{B} \hat{u}^k]. \quad (0.6)$$

Оптимальное управление \hat{u}^* должно удовлетворять необходимому условию оптимальности:

$$\left. \frac{\partial \hat{H}_k}{\partial \hat{u}^k} \right|_{\hat{u}^k = \hat{u}^{k*}} = \hat{w}_2 \hat{u}^{k*} + \hat{B}^T \hat{\lambda}^{k+1} = 0,$$

что дает следующее выражение для управления

$$\hat{u}^{k*} = -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^T \hat{\lambda}^{k+1}. \quad (0.7)$$

И уравнение (0.2) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{x}^{k+1} = \hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T \hat{\lambda}^{k+1}. \quad (0.8)$$

При этом имеет силу следующая сопряженная система:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}^k = \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^T \hat{\lambda}^{k+1}, \text{ при } k = \overline{1, N} \\ \hat{\lambda}^{N+1} = \hat{x}^{N+1} - x^{\text{final}} \end{cases} \quad (0.9)$$

Теорема 1. *Оптимальное управление \hat{u}^* задачи (0.2)-(0.3) задается формулой*

$$\hat{u}^{k*} = \hat{L}_k \hat{x}^k + \hat{d}^k, \quad (0.10)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_k &= -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^T S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A}, \\ \hat{d}^k &= -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^T \left(I - S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B} \hat{B}^T \right) v^{k+1}. \end{aligned}$$

Причем переменные S_k , v^k могут быть найдены в обратном времени из соотношений

$$\begin{aligned} S_k &= \hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^T S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A}, \\ v_k &= \hat{A}^T \left(I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B} \hat{B}^T \right) v^{k+1} \end{aligned} \quad (0.11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= I, \\ v^{N+1} &= -x^{\text{final}}. \end{aligned} \quad (0.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству теоремы (1) будем искать решение сопряженной системы в аффинном виде

$$\hat{\lambda}^k = S_k \hat{x}^k + v^k. \quad (0.13)$$

Из сопряженной системы (0.9) получаем граничные условия:

$$\hat{\lambda}^{N+1} = \hat{x}^{N+1} - x^{\text{final}} \implies S_{N+1} = I, \quad v^{N+1} = -x^{\text{final}}.$$

Подставив выражение (0.13) в уравнение (0.8), получим

$$\hat{x}^{k+1} = \hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T (S_{k+1} \hat{x}^{k+1} + v^{k+1}),$$

откуда выражаем

$$\hat{x}^{k+1} = \left(\underbrace{I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1}}_{K_k} \right)^{-1} \left(\hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T v^{k+1} \right).$$

Теперь подставим получившееся выражение в (0.9):

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^k &= S_k \hat{x}^k + v^k = \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^T (S_{k+1} \hat{x}^{k+1} + v^{k+1}) = \\ &= \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^T S_{k+1} K_k^{-1} \left(\hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T v^{k+1} \right) + \hat{A}^T v^{k+1} = \\ &= \left(\hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^T S_{k+1} K_k^{-1} \hat{A} \right) \hat{x}^k + \hat{A}^T \left(I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} K_k^{-1} \hat{B} \hat{B}^T \right) v^{k+1}. \end{aligned}$$

Откуда получаем искомые соотношения:

$$S_k = \hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^T S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A},$$

$$v_k = \hat{A}^T \left(I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} \left(I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B} \hat{B}^T \right) v^{k+1}.$$

Теперь выражение для оптимального управления (0.10) получается прямой подстановкой получившихся соотношений в выражение (0.7). ■