



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра системного анализа

Егоров Кирилл Юлианович

# Математическое моделирование движений руки, держащей предмет

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

*Научный руководитель*

к.ф.-м.н., доцент И. В. Востриков

Москва, 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Математическое моделирование . . . . .</b>	<b>4</b>
2.1	Планарная модель руки, держащей предмет . . . . .	4
2.2	Уравнение динамики . . . . .	5
2.3	Учёт энергетических затрат . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Постановка задачи . . . . .</b>	<b>9</b>
3.1	Непрерывная постановка задачи . . . . .	9
3.2	Дискретизация задачи . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Синтез оптимального управления . . . . .</b>	<b>11</b>
4.1	Описание метода . . . . .	11
4.2	Синтез оптимальной поправки . . . . .	12
4.3	Регуляризация оптимальной поправки . . . . .	15
4.4	Алгоритм . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Синтез начального референсного управления . . . . .</b>	<b>20</b>
5.1	Описание метода . . . . .	20
5.2	Синтез управления . . . . .	21
5.3	Алгоритм . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Примеры . . . . .</b>	<b>27</b>
6.1	Целевое положение схвата . . . . .	27
6.2	Обход препятствия . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Заключение. . . . .</b>	<b>31</b>
	Список литературы . . . . .	32
	Приложения . . . . .	34
<b>A</b>	<b>Таблица параметров . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>B</b>	<b>Матрица инерции . . . . .</b>	<b>36</b>

# 1 Введение

Тут будет какое-то введение.

## 2 Математическое моделирование

### 2.1 Планарная модель руки, держащей предмет

Рассмотрим руку человека, держащего стержень. В некотором приближении можно считать, что мы имеем трёхсекционный математический маятник. Для каждого из 3-х сочленений нам известны:

1. Масса сочленения  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;
2. Линейная плотность сочленения  $\rho_i = \rho_i(x)$ ,  $0 \leq x \leq l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;
3. Длина сочленения  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;
4. Угол поворота сочленения  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  относительно оси абсцисс  $Oe_1$ .

Также считаем, что положение плечевого сустава фиксировано для определённости в точке  $(0, 0)$ . На Рис. 1 приведена схема с примером данного маятника и соответствующая позиция человека.

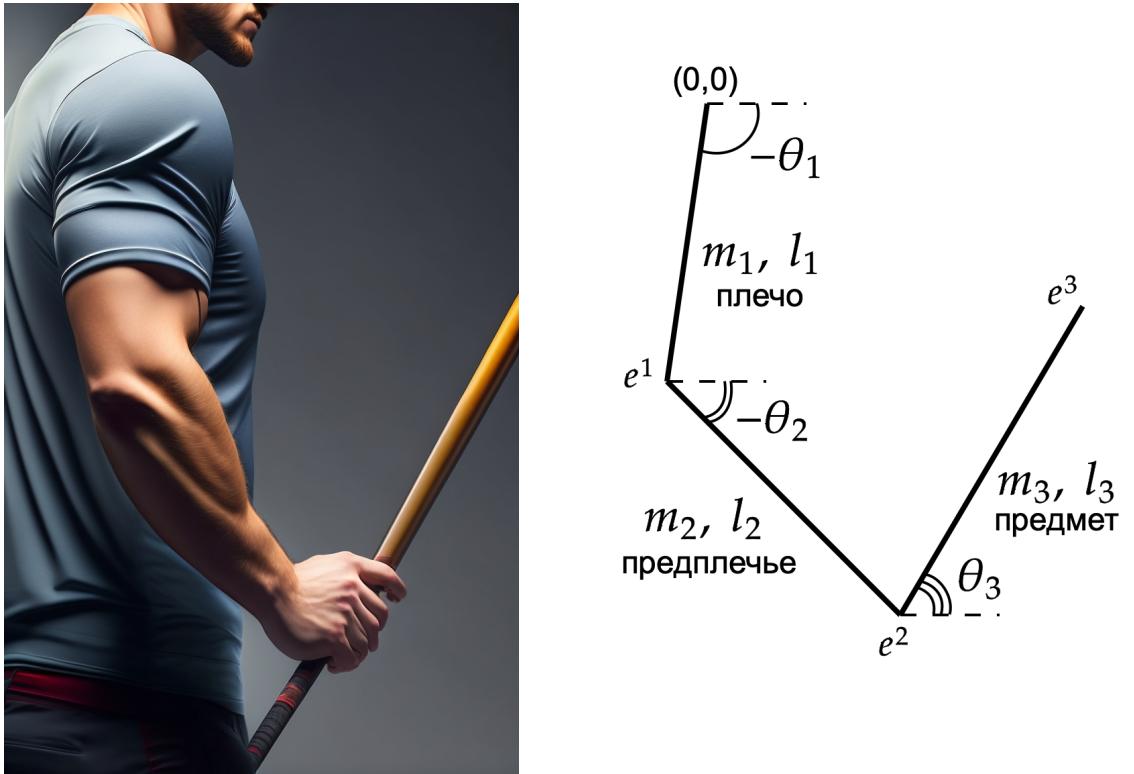


Рис. 1: Иллюстрация предложенной модели. Рисунок слева сгенерирован нейросетью *Lexica Aperture* по текстовому запросу и приведён для визуального соответствия сочленений маятника на схеме с частями тела человека.

В связи с тем, что мы имеем пространство состояний высокой размерности, далее в работе при построении графиков численного решения нам будет удобно рассматривать не траектории фазовых переменных по отдельности, а траекторию *схвата* в картезианской системе координат.

**Определение 1.** *Схватом* будем называть крайнюю точку последнего, в нашем случае третьего, сочленения приведённого маятника. Позицию схвата в картезианской системе координат обозначим за

$$e^3 \in \mathbb{R}^2.$$

Сразу выпишем выражения для позиций крайних точек сочленений:

$$e^i = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^i l_k \cos \theta_k \\ \sum_{k=1}^i l_k \sin \theta_k \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

## 2.2 Уравнение динамики

Для получения уравнения динамики рассматриваемой физической системы воспользуемся методом Эйлера–Лагранжа [13]. Идея метода состоит в проведении следующих последовательных шагов:

1. Выбор обобщённых координат;
2. Получение выражения для кинетической  $K$  и потенциальной  $\Pi$  энергий системы, записанных в обобщённых координатах;
3. Получение выражения для лагранжиана системы  $\mathcal{L}$ ;
4. Составление системы уравнений движения, соответствующих каждой обобщённой координате.

Обобщёнными координатами для нашей системы выберем углы поворота сочленений  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Далее перейдем к выражению энергий через обобщенные координаты. Для подсчета кинетической энергии воспользуемся теоремой Кёнинга [12].

**Теорема 1 (Кёнинг).** *Кинетическая энергия тела есть энергия поступательного движения центра масс плюс энергия вращательного движения относительно центра масс*

$$K = \frac{1}{2} m \|v_c\|^2 + \frac{1}{2} \omega^T I \omega, \quad (2.2)$$

где  $m$  — полная масса тела,  $I$  — тензор инерции тела,  $v_c$  — линейная скорость центра масс,  $\omega$  — скорость вращения тела относительно центра масс.

Далее в работе мы будем полагать, что каждое из сочленений представляет собой однородный стержень длины  $l_i$  массы  $m_i$ . В таком случае получаем следующие значения для положения центра масс  $c^i \in \mathbb{R}^2$   $i$ -ого сочленения:

$$c^i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos \theta_j + \frac{l_i}{2} \cos \theta_i \\ \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin \theta_j + \frac{l_i}{2} \sin \theta_i \end{bmatrix}.$$

Выражения для момента инерции и скорости вращательного движения относительно центра масс для стержня получаются соответственно:

$$I_i = \int_{(m_i)} r^2 dm = \rho_i \int_{(l_i)} r^2 dl = \frac{m_i l_i^2}{12},$$

$$\omega_i = 2\dot{\theta}_i.$$

Потенциальная энергия  $i$ -ого сочленения рассчитывается по формуле

$$\Pi_i = m_i g c_2^i,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Общая кинетическая и потенциальная энергии системы рассчитываются как сумма энергий каждого из сочленений:

$$K = \sum_{i=1}^3 K_i = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{m_i \|\dot{c}^i\|^2}{2} + \frac{m_i l_i^2 |\dot{\theta}_i|^2}{6} \right),$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i = \sum_{i=1}^3 m_i g c_2^i.$$

Теперь введём лагранжиан системы

$$\mathcal{L} = K - \Pi$$

и построим систему уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

где  $\tau_i$  — момент силы, действующий на  $i$ -ое сочленение, который доступен для управления.

Продифференцировав члены из левой части уравнения (2.3), получим уравнение динамики для рассматриваемой системы:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + L(\theta, \dot{\theta}) = \tau, \quad (2.4)$$

где  $M(\theta) = M^T(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — матрица инерции системы,  $L(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^3$  — вектор центробежных и кориолисовых сил. На Рис. 2 приведено численное моделирование свободного падения системы в соответствии с полученным уравнением динамики (2.4).

*Замечание 1.* Матрица инерции  $M(\theta)$  является положительно-определённой, поскольку кинетическая энергия системы  $K$  всегда неотрицательна:

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\theta}, M(\theta)\dot{\theta} \rangle > 0 \text{ для любого } \dot{\theta} \neq 0.$$

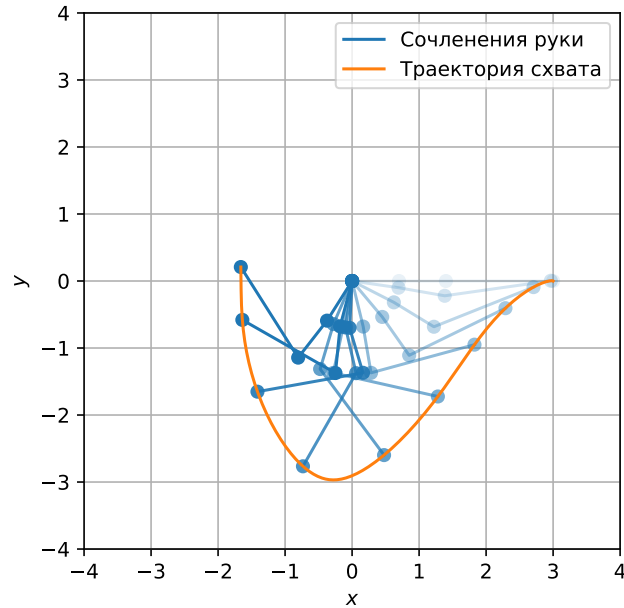


Рис. 2: Траектория системы в свободном падении из начального положения  $\theta^{\text{start}} = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\dot{\theta}^{\text{start}} = [0 \ 0 \ 0]^T$  на временном интервале  $0 \leq t \leq 1$ . Положения системы, соответствующие более раннему времени, показаны бледнее. Для изображения положений используется равномерное разбиение временного интервала.

## 2.3 Учёт энергетических затрат

Для моделирования биологического движения необходимо выяснить, какими принципами руководствуется мозг при выборе траектории для некоторого целевого движения. Существует бесконечное число возможных путей и профилей скорости для перемещения руки из одной точки в другую, и каждая траектория может быть достигнута несколькими возможными комбинациями углов между сочленениями. При этом нервная и моторно-двигательные системы человека для выбора одной конкретной траектории анализируют большой объем информации, поступающий от всех органов чувств.

В силу того, что нервная система человека есть результат оптимизационных процессов: эволюции, адаптации к условиям среды, обучения, мы постулируем следующий биологический принцип оптимальности.

**Утверждение 1** (Биологический принцип оптимальности). *Выбираемые нервной системой схемы движения являются оптимальными для поставленной задачи.*

Применение данного принципа позволяет не только моделировать движения методами оптимального управления, но и анализировать их причины.

В работе [2] было показано, что оптимизации проводятся с целью уменьшения затрат энергии. Однако общего подхода к формализации энергетических затрат пока не выработано. Так, например, в работе [4] предлагается минимизировать *рывок* схвата, то есть

$$\int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{final}}} \left\| \frac{d^3 e^3}{dt^3} \right\|^2 dt \longrightarrow \min,$$

а в работе [11] — изменение крутящего момента

$$\int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{final}}} \left\| \frac{d\tau}{dt} \right\|^2 dt \longrightarrow \min. \quad (2.5)$$

Причём существуют и другие менее популярные варианты, например, [3].

Мы будем использовать для формализации энергетических затрат выражение (2.5), поскольку данный критерий напрямую зависит от динамики руки и лучше согласуется с эмпирическими данными, чем модель минимального рывка [6].



## 3 Постановка задачи

### 3.1 Непрерывная постановка задачи

Поставим задачу целевого управления для модели, построенной в Разделе 2. Для этого рассмотрим расширенное фазовое пространство с состоянием

$$x = [\theta \ \dot{\theta} \ \tau]^T \in \mathbb{R}^9.$$

Тогда уравнение динамики системы (2.4) можно переписать в виде стационарной системы однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(x) + Bu, \quad (3.1)$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1)(x_3 - L(x_1, x_2)) \\ O \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ O \\ I \end{bmatrix}.$$

Считаем, что для данной системы поставлена задача Коши, то есть нам известно начальное состояние системы

$$x(t_{\text{start}}) = x^{\text{start}}. \quad (3.2)$$

*Замечание 2.* Отметим, что для выполнения достаточных условий существования и единственности решения Каратеодори для задачи Коши (3.1)-(3.2) управление  $u$  достаточно брать из класса измеримых на рассматриваемом отрезке  $t_{\text{start}} \leq t \leq t_{\text{final}}$  функций [14].

Для задачи Коши (3.1)-(3.2) поставим задачу поиска управления  $u \in U[t_{\text{start}}, t_{\text{final}}]$ , минимизирующего функционал качества вида:

$$J = q^{\text{final}}(x(t_{\text{final}})) + w_1 \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{final}}} q(x(t)) dt + w_2 \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{final}}} r(u(t)) dt, \quad (3.3)$$

где  $q^{\text{final}}$ ,  $q$  отвечают за терминальное и фазовые ограничения соответственно и выбираются в зависимости от конкретной постановки задачи, а  $r$  отвечает за энергетические затраты и в соответствии с (2.5) равна:

$$r(u) = \|u\|^2,$$

а  $w_1, w_2$  — веса соответствующих критериев для данной многокритериальной задачи.

Для дальнейших рассуждений потребуем, чтобы функции  $q^{\text{final}}, q$  были дважды непрерывно дифференцируемыми. Полученные из модели функции  $A$  и  $r$  заведомо удовлетворяют этому требованию.

## 3.2 Дискретизация задачи

Для удобства дальнейших рассуждений дискретизируем задачу (3.1)-(3.2)-(3.3) по времени  $t_{\text{start}} \leq t \leq t_{\text{final}}$ . Для этого введем равномерную сетку с шагом  $\Delta t$ :

$$\{t_i\}_{i=1}^{N+1}, \quad t_1 = t_{\text{start}}, \quad t_{N+1} = t_{\text{final}}, \quad t_{i+1} - t_i = \Delta t.$$

Тогда, сузив класс допустимых управлений до кусочно-постоянных, получаем дискретный вариант рассматриваемой задачи Коши (3.1)-(3.2):

$$\begin{cases} x^{k+1} = f(x^k, u^k), & k = \overline{1, N}, \\ x^1 = x^{\text{start}}, \end{cases} \quad (3.4)$$

где

$$f(x^k, u^k) = \Delta t (A(x^k) + Bu^k) + x^k.$$

При этом функционал (3.3) для дискретной задачи приобретет вид

$$J = q^{N+1}(x^{N+1}) + \sum_{k=1}^N q^k(x^k) + \sum_{k=1}^N r^k(u^k), \quad (3.5)$$

где

$$q^{N+1} = q^{\text{final}}, \quad q^k = w_1 q \Delta t, \quad r^k = w_2 r \Delta t \quad k = \overline{1, N}.$$

## 4 Синтез оптимального управления

### 4.1 Описание метода

Существует два базовых метода для решения задач нелинейных задач оптимального управления, к классу которых относится задача (3.4)-(3.5):

1. Метод дифференциального динамического программирования (DDP) [8], [9];
2. Метод итеративного линейно-квадратичного регулятора (iLQR<sup>1</sup>) [5].

Методы идейно схожи:

1. Методы итеративны и используют полную информацию о состоянии системы<sup>2</sup>;
2. На каждой итерации методы используют некоторое *референсное* управление  $\bar{u}$  и соответствующую ему референсную траекторию  $\bar{x}$ ;
3. Вдоль референсной траектории задача полиномиально аппроксимируется;
4. На основании аппроксимированной системы строится некоторая поправка на исходное референсное управление.

**Определение 2.** Под *референсным управлением*  $\bar{u}$  мы будем понимать управление, которое подается на вход каждой итерации соответствующего алгоритма. Под *референсной траекторией* — соответствующую референсному управлению траекторию системы  $\bar{x}$ , либо иногда пару  $(\bar{u}, \bar{x})$ .

Отличие методов заключается в способе получения оптимальной поправки: метод DDP строит поправку как градиент гамильтониана аппроксимированной задачи

$$\delta u^k = \alpha \nabla_u H(\bar{u}^k),$$

метод iLQR — как её линейно-квадратичный регулятор.

---

<sup>1</sup>В некоторых источниках, например [10], используется аббревиатура SLQ.

<sup>2</sup>Наличие уравнения наблюдения предполагало бы, что каждая итерация алгоритма проводится не на компьютере, а на реальном объекте. Применительно к нашей модели это означает, что человек достигнет цели движения только с некоторой попытки.

Считается, что метод iLQR более надежный, так как в меньшей степени подвержен проблемам, присущим градиентным методам, таким как остановка в локальном минимуме, но сходится за большее число итераций, чем метод DDP. Однако при проведении численного эксперимента для сравнения скорости сходимости на конкретных задачах авторы приходят к противоположным результатам. Лучше всего резюмирует это положение вещей работа [7], в которой проведено сравнение двух методов для трёх классических задач механики, и в каждой задаче методы показывают разную асимптотику сходимости.

В данной работе для построения управления был выбран метод iLQR. Выпишем его основные шаги:

1. На каждой итерации имеем референсную траекторию  $(\bar{u}, \bar{x})$ ;
2. Вдоль референсной траектории линеаризуем задачу Коши и аппроксимируем функционал качества до второго порядка;
3. Строим поправку на управление  $\delta u$  как линейно-квадратичный регулятор аппроксимированной задачи;
4. Если не выполнено терминальное условие

$$|J(\bar{u}) - J(\bar{u} + \delta u)| < \varepsilon, \quad (4.1)$$

то используем поправленное управление  $\bar{u} + \delta u$  в качестве референсного на следующей итерации алгоритма.

## 4.2 Синтез оптимальной поправки

Допустим мы имеем некоторое референсное управление  $\bar{u} = \{\bar{u}^k\}_{k=1}^N$  и соответствующую ему референсную траекторию  $\bar{x} = \{\bar{x}^k\}_{k=1}^{N+1}$ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} f_x^k &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}^k, \bar{u}^k)}, & f_u^k &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}^k, \bar{u}^k)}, \\ q^k &= q(\bar{x}^k), & q_x^k &= \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_{\bar{x}^k}, & q_{xx}^k &= \left. \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right|_{\bar{x}^k}, \\ r^k &= r(\bar{u}^k), & r_x^k &= \left. \frac{\partial r}{\partial u} \right|_{\bar{u}^k}, & r_{xx}^k &= \left. \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} \right|_{\bar{u}^k}. \end{aligned}$$

Тогда, линеаризуя вдоль референсной траектории задачу Коши (3.4) и строя квадратичную аппроксимацию вдоль той же траектории функционала качества (3.5), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \delta x^{k+1} = f_x^k \delta x + f_u^k \delta u, & k = \overline{1, N}, \\ \delta x^1 = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} J = q^{N+1} + q_x^{N+1} \tilde{x}^{N+1} + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^{N+1}, q_{xx}^{N+1} \tilde{x}^{N+1} \rangle + \\ + \sum_{k=1}^N \left[ q^k + q_x^k \tilde{x}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^k, q_{xx}^k \tilde{x}^k \rangle \right] + \\ + \sum_{k=1}^N \left[ r^k + r_u^k \tilde{u}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{u}^k, r_{uu}^k \tilde{u}^k \rangle \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\tilde{x}^k = \bar{x}^k + \delta x^k, \quad \tilde{u}^k = \bar{u}^k + \delta u^k.$$

Построим гамильтониан для задачи (4.2)-(4.3):

$$\begin{aligned} H_k = q^k + q_x^k \tilde{x}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^k, q_{xx}^k \tilde{x}^k \rangle + \\ + r^k + r_u^k \tilde{u}^k + \frac{1}{2} \langle \tilde{u}^k, r_{uu}^k \tilde{u}^k \rangle + \\ + (\lambda^{k+1})^T (f_x^k \delta x^k + f_u^k \delta u^k), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $\lambda^{k+1}$  — мультипликаторы Лагранжа.

Оптимальное управление  $\delta u$  должно удовлетворять необходимому условию

$$\left. \frac{\partial H_k}{\partial (\delta u^k)} \right|_{\delta u^k = \delta u^{k*}} = r_u^k + r_{uu}^k (\bar{u}^k + \delta u^{k*}) + (f_u^k)^T \lambda^{k+1} = 0,$$

что дает следующее выражение для поправки:

$$\delta u^{k*} = -(r_{uu}^k)^{-1} [(f_u^k)^T \lambda^{k+1} + r_u^k] - \bar{u}^k. \quad (4.5)$$

При этом имеет силу сопряженная задача:

$$\begin{cases} \lambda^k = (f_x^k)^T \lambda^{k+1} + q_x^k + q_{xx}^k (\bar{x}^k + \delta x^k) \\ \lambda^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1} (\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1}). \end{cases} \quad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6) вытекает

$$\begin{pmatrix} \delta x^{k+1} \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x^k & -f_u^k(r_{uu}^k)^{-1}(f_u^k)^T \\ q_{xx}^k & (f_x^k)^T \end{pmatrix}}_{\Phi^k} \begin{pmatrix} \delta x^k \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -f_u^k(r_{uu}^k)^{-1}r_u^k \\ q_x^k \end{pmatrix}}_{\Gamma^k}. \quad (4.7)$$

**Теорема 2.** *Оптимальная поправка  $\delta u$  для задачи (4.2)-(4.3) вычисляется как*

$$\delta u^k = -(r_{uu}^k + (f_u^k)^T S_{k+1} f_u^k)^{-1} ((f_u^k)^T S_{k+1} f_u^k \delta x + v^{k+1} + r_u^k), \quad (4.8)$$

где  $S_k$  и  $v^k$  высчитываются в обратном времени как

$$\begin{aligned} S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1} (I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1} \Phi_{11}^k, \\ v^k &= \Phi_{22}^k S_{k+1} (I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1} (\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + \Phi_{22}^k v^{k+1} + \Gamma_2^k \end{aligned} \quad (4.9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= q_{xx}^{N+1}, \\ v^{N+1} &= q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1} \bar{x}^{N+1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что мультипликаторы  $\lambda$  имеют следующую аффинную форму относительно фазовой переменной  $\delta x$

$$\lambda^k = S_k \delta x^k + v^k \quad (4.11)$$

Тогда из граничного условия (4.6) вытекает граничное условие на  $S_k$ ,  $v^k$  (4.10):

$$\lambda^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1} (\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1})$$

$\Downarrow$

$$S_{N+1} = q_{xx}^{N+1}, v^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1} \bar{x}^{N+1}.$$

Теперь подставим (4.11) в выражение (4.7) для  $\delta x^{k+1}$ :

$$\delta x^{k+1} = \Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k (S_{k+1} \delta x^{k+1} + v^{k+1}) + \Gamma_1^k.$$

Получаем

$$\delta x^{k+1} = \left( \underbrace{I - \Phi_{12}^k S_{k+1}}_{K_k} \right)^{-1} (\Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k).$$

Подставим получившееся выражение в (4.7) для  $\lambda^k$ :

$$\begin{aligned}\lambda^k &= S_k \delta x^k + v^k = \Phi_{21}^k \delta x^k + \Phi_{22}^k (S_{k+1} \delta x^{k+1} + v^{k+1}) + \Gamma_2^k = \\ &= \Phi_{21}^k \delta x^k + \Phi_{22}^k (S_{k+1} K_k^{-1} (\Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + v^{k+1}) + \Gamma_2^k.\end{aligned}$$

Таким образом получаем искомые соотношения (4.9):

$$\begin{aligned}S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1} K_k^{-1} \Phi_{11}^k, \\ v^k &= \Phi_{22}^k (S_{k+1} K_k^{-1} (\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + v^{k+1}) + \Gamma_2^k.\end{aligned}$$

Итоговая формула для оптимальной поправки (4.8) получается прямой подстановкой получившихся соотношений в выражение (4.5). ■

*Замечание 3.* Полученная теорема требует существования обратных матриц для  $K_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . При этом для нелинейных систем данное условие может не выполняться. Чтобы метод продолжал работать, предлагается в случае нулевого определителя  $\det K_k = 0$ , заменять в формулах (4.8), (4.9) матрицу  $K_k$  на регуляризованную

$$\mathcal{K}_k = K_k + \mu I. \quad (4.12)$$

### 4.3 Регуляризация оптимальной поправки

Согласно Теореме 1 оптимальная поправка имеет следующую аффинную форму

$$\delta u^{k*} = L_k \delta x^k + d^k,$$

где  $L_k$  — коэффициент управления с обратной связью,  $d^k$  — коэффициент управления без обратной связи, возникающий по причине того, что мы имеем дело с отклонениями от заданного состояния.

Данная форма не налагает никаких ограничений на поправку  $\delta u$ . На практике это означает, что на начальных итерациях алгоритма, когда референсная траектория далека от оптимальной, поправка зачастую выводит систему за область действия аппроксимации. Визуально это выражается в том, что на каждой итерации алгоритм выдаёт некоторую случайную траекторию и в конечном итоге не сходится к оптимальной траектории. Чтобы избежать такого эффекта, необходимо регуляризовать коэффициент управления без обратной

связи  $d^k$ :

$$\delta u^{k*}(\eta) = L_k \delta x^k + \eta d^k.$$

Теперь остается ответить на вопрос, как выбрать подходящий коэффициент регуляризации  $\eta$ . Это можно сделать двумя способами:

1. Дополнительно поточечно ограничить область допустимых управлений

$$u^k \in \mathcal{U}^k.$$

В таком случае можно выбирать коэффициент из соотношения

$$\eta = \min\{\eta \mid \bar{u}^k + \delta u^{k*}(\eta) \in \mathcal{U}^k\}.$$

Такой способ предполагает всего один дополнительный проход алгоритма для поиска минимума, однако накладывает ограничения, не предусмотренные исходной задачей, и не даёт гарантии на то, что в среднем отклонение в конечном счёте не накопится.

2. Использовать ожидаемое отклонение от функции цены

$$\xi_1 \leq \frac{J(\bar{u}) - J(\bar{u} + \delta u)}{J_\delta(0) - J_\delta(\delta u^*(\eta))} \leq \xi_2. \quad (4.13)$$

Данный способ не накладывает дополнительных ограничений. При этом для нахождения правильного коэффициента может потребоваться несколько итераций. Изначально коэффициент  $\eta$  инициализируется единицей, затем считается оптимальная поправка, и если условие (4.13) не выполнено, то коэффициент уменьшается  $\eta = \gamma \eta$ , где  $\gamma < 1$ .

*Замечание 4.* В случае задачи с заданными ограничениями на управление необходимо комбинировать оба рассмотренных условия. Для численного решения нашей задачи было использовано второе.

## 4.4 Алгоритм

С учетом вышесказанного можно построить следующий алгоритм. Алгоритмы 1, 2 демонстрируют обратный и прямой проход для получения оптимальной поправки. Алгоритм 3 демонстрирует общий алгоритм построения управления.



---

**Алгоритм 1: Обратный проход**

---

```
function BackwardPass( $\bar{u}$ ,  $\bar{x}$ )  
begin  
     $S_{N+1}, v^{N+1} \leftarrow (4.10)$   
    for  $k \leftarrow N$  to 1 do  
         $S_k, v^k \leftarrow (4.9)$   
    end  
  
    return  $S, v$   
end
```

---

Продemonстрируем работу алгоритма для классической задачи перехода в целевое состояние  $x^{\text{final}}$  без фазовых ограничений. Для этого будем использовать следующие компоненты функции цены:

$$q^{\text{final}}(x) = \|x - x^{\text{final}}\|^2, \quad q(x) \equiv 0. \quad (4.14)$$

Начальным референсным управлением выберем

$$\bar{u}^k = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.15)$$

---

**Алгоритм 2:** Прямой проход

---

```
function ForwardPass( $\bar{u}$ ,  $\bar{x}$ )  
begin  
   $\eta, \gamma \leftarrow 1, \frac{1}{2}$   
  do  
    for  $k \leftarrow 1$  to  $N$  do  
       $\delta u^k, \delta x^{k+1} \leftarrow (4.8), (4.2)$   
       $u^k \leftarrow \bar{u}^k + \delta u^k$   
    end  
     $\eta \leftarrow \gamma \eta$   
  while  $\xi_1 \leq \frac{J_{\text{prev}} - J}{J_\delta(0) - J_\delta(\delta u)} \leq \xi_2$   
  return  $u$   
end
```

---

---

**Алгоритм 3:** Синтез управления

---

```
function Synthesis( $\bar{u}$ )  
begin  
   $J \leftarrow (\text{формула})$   
  do  
     $J_{\text{prev}} \leftarrow J$   
     $\bar{x} \leftarrow (\text{формула})$   
     $S, v \leftarrow \text{BackwardPass}(\bar{u}, \bar{x})$   
     $u \leftarrow \text{ForwardPass}(S, v, J_{\text{prev}})$   
     $J \leftarrow (\text{формула})$   
  while  $\|J - J_{\text{prev}}\| < \varepsilon$   
  return  $u$   
end
```

---

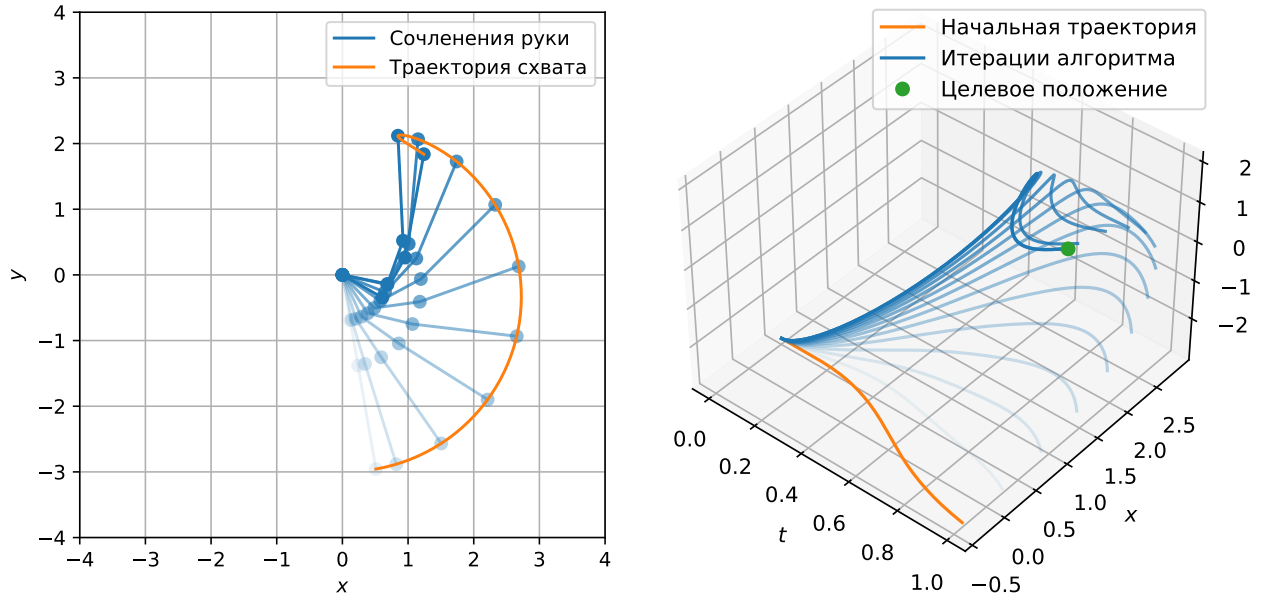


Рис. 3: Решение задачи перехода в целевое состояние (4.14) с начальным референсным управлением (4.15). Слева: поведение системы при полученном управлении. Справа: траектории схвата на каждой итерации алгоритма, более ранние итерации показаны бледнее. Начальное положение  $x_1^{\text{start}} = [-1,4; -1,4; -1,4]^T$ ,  $x_2^{\text{start}} = 0$ ,  $x_3^{\text{start}} = 0$ . Конечное положение  $x_1^{\text{final}} = [-0,5; 1,1; 1,4]^T$ ,  $x_2^{\text{final}} = [-5,0; -5,0; -5,0]^T$ ,  $x_3^{\text{final}} = 0$ . Коэффициент значимости энергетического критерия  $w_2 = 10^{-2}$ . Коэффициент остановки  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Алгоритм сошелся на 14 итерации.

## 5 Синтез начального референсного управления

### 5.1 Описание метода

Скорость сходимости метода, приведенного в Разделе 4, зависит от выбора начального референсного управления  $\bar{u}$ . Считается, что в этом деле можно положиться на мнение эксперта в предметной области, который нарисует траекторию системы  $\bar{x}$  и мы потом решим задачу идентификации управления  $\bar{u}$ , приводящего к такой траектории методом следящего управления.

Для того, чтобы использовать метод необходимо, чтобы он:

1. Строил управление *быстро*. Желательно, чтобы алгоритм имел линейную асимптотику.
2. Получившаяся референсная траектория была близка к оптимальной.
3. Получившаяся референсная траектория была бы возможной для рассматриваемой задачи. Это важно, если в задаче присутствуют строгие ограничения на управление.

В отсутствии эксперта, предлагается использовать следующий метод, удовлетворяющий этим условиям.

1. Необходимо аналитически найти состояние системы, которое минимизирует терминальное условие

$$x^{\text{final}} \in \text{Argmin } q^{\text{final}}(x).$$

2. Привести систему к линейной и поставить для нее задачу минимизации интегрально-квадратичного функционала для перехода в состояние  $x^{\text{final}}$ .
3. Построить линейно-квадратичный регулятор для полученной задачи. Тем самым мы получим управление, которое минимизирует терминальное условие, но ничего не говорит об энергетическом и фазовом условиях. Тем не менее такой подход будет работать лучше, чем выбор случайного управления.

В случае, если мы можем аналитически найти несколько минимизаторов терминального условия, можно провести перебор с последующим выбором самого подходящего управления.

## 5.2 Синтез управления

Приведём систему (3.4) к линейному виду заменой управления на

$$\hat{u} = M^{-1}(x_1)[\tau - L(x_1, x_2)]. \quad (5.1)$$

Тогда в фазовом пространстве  $\hat{x} = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^6$  задача Коши примет вид

$$\begin{cases} \hat{x}^{k+1} = \hat{A}\hat{x}^k + \hat{B}\hat{u}^k \\ \hat{x}^0 = x^{\text{start}}, \end{cases} \quad (5.2)$$

где

$$\hat{A} = \left( \begin{array}{c|c} I & \Delta t I \\ \hline O & I \end{array} \right), \quad \hat{B} = \left( \begin{array}{c} O \\ \hline \Delta t I \end{array} \right).$$

Будем считать, что для исходной задачи задачи (??) известно некоторое состояние  $x^{\text{final}}$ , минимизирующее терминальное условие  $q^{\text{final}}$ , то есть

$$x^{\text{final}} \in \text{Argmin } q^{\text{final}}(x).$$

В таком случае для задачи Коши (5.2) поставим задачу минимизации следующего функционала

$$J = \|\hat{x}^{N+1} - x^{\text{final}}\|^2 + \hat{w}_1 \sum_{k=1}^N \langle \hat{x}^k, \hat{Q}\hat{x}^k \rangle + \hat{w}_2 \sum_{k=1}^N \|\hat{u}^k\|^2 \longrightarrow \min. \quad (5.3)$$

Здесь матрица  $\hat{Q} = \hat{Q}^T$  выбирается для исключения возможного *проворачивания* сочленений относительно друг друга следующим образом

$$\hat{Q} = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & O \\ -1 & 2 & -1 & O \\ 0 & -1 & 1 & O \\ \hline & & O & O \end{array} \right). \quad (5.4)$$

Иными словами матрица  $\hat{Q}$  является матрицей следующей квадратичной формы

$$\langle \hat{x}, \hat{Q}\hat{x} \rangle = \theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2.$$

Данное фазовое условие штрафует траекторию в случае большого относительного отклонения между углами сочленений.

После решения задачи (5.2)-(5.3) мы можем восстановить соответствующее управление исходной задачи. Пусть  $\hat{u}^*$ ,  $\hat{x}^*$  — оптимальное управление и соответствующая ему оптимальная траектория задачи (5.2)-(5.3). Тогда соответствующее управление для исходной задачи  $u$ , можно получить по формуле

$$u^k = \frac{\hat{\tau}^{k+1} - \hat{\tau}^k}{\Delta t}, \quad (5.5)$$

где

$$\begin{cases} \hat{\tau}^k = M(\hat{x}_1^{k*})\hat{u}^{k*} + L(\hat{x}_1^{k*}, \hat{x}_2^{k*}), \text{ при } k = \overline{1, N} \\ \hat{\tau}^{N+1} = 0. \end{cases}$$

Построим гамильтониан задачи (5.2)-(5.3)

$$\hat{H}_k = \langle \hat{x}^k, \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k \rangle + \langle \hat{u}^k, \hat{w}_2 \hat{u}^k \rangle + (\hat{\lambda}^{k+1})^T [\hat{A} \hat{x}^k + \hat{B} \hat{u}^k]. \quad (5.6)$$

Оптимальное управление  $\hat{u}^*$  должно удовлетворять необходимому условию оптимальности:

$$\left. \frac{\partial \hat{H}_k}{\partial \hat{u}^k} \right|_{\hat{u}^k = \hat{u}^{k*}} = \hat{w}_2 \hat{u}^{k*} + \hat{B}^T \hat{\lambda}^{k+1} = 0,$$

что дает следующее выражение для управления

$$\hat{u}^{k*} = -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^T \hat{\lambda}^{k+1}. \quad (5.7)$$

И уравнение (5.2) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{x}^{k+1} = \hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T \hat{\lambda}^{k+1}. \quad (5.8)$$

При этом имеет силу следующая сопряженная система:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}^k = \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^T \hat{\lambda}^{k+1}, \text{ при } k = \overline{1, N} \\ \hat{\lambda}^{N+1} = \hat{x}^{N+1} - x^{\text{final}} \end{cases} \quad (5.9)$$

**Теорема 3.** *Оптимальное управление  $\hat{u}^*$  задачи (5.2)-(5.3) задается формулой*

$$\hat{u}^{k*} = \hat{L}_k \hat{x}^k + \hat{d}^k, \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_k &= -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^T S_{k+1} \left( I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A}, \\ \hat{d}^k &= -\frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B}^T \left( I - S_{k+1} \left( I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B} \hat{B}^T \right) v^{k+1}. \end{aligned}$$

Причем переменные  $S_k$ ,  $v^k$  могут быть найдены в обратном времени из соотношений

$$\begin{aligned} S_k &= \hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^T S_{k+1} \left( I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A}, \\ v_k &= \hat{A}^T \left( I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} \left( I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B} \hat{B}^T \right) v^{k+1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= I, \\ v^{N+1} &= -x^{\text{final}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Аналогично доказательству теоремы (1) будем искать решение сопряженной системы в аффинном виде

$$\hat{\lambda}^k = S_k \hat{x}^k + v^k. \quad (5.13)$$

Из сопряженной системы (5.9) получаем граничные условия:

$$\hat{\lambda}^{N+1} = \hat{x}^{N+1} - x^{\text{final}} \implies S_{N+1} = I, \quad v^{N+1} = -x^{\text{final}}.$$

Подставив выражение (5.13) в уравнение (5.8), получим

$$\hat{x}^{k+1} = \hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T (S_{k+1} \hat{x}^{k+1} + v^{k+1}),$$

откуда выражаем

$$\hat{x}^{k+1} = \left( \underbrace{I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1}}_{K_k} \right)^{-1} \left( \hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T v^{k+1} \right).$$

Теперь подставим получившееся выражение в (5.9):

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^k &= S_k \hat{x}^k + v^k = \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^T (S_{k+1} \hat{x}^{k+1} + v^{k+1}) = \\ &= \hat{w}_1 \hat{Q} \hat{x}^k + \hat{A}^T S_{k+1} K_k^{-1} \left( \hat{A} \hat{x}^k - \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T v^{k+1} \right) + \hat{A}^T v^{k+1} = \\ &= \left( \hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^T S_{k+1} K_k^{-1} \hat{A} \right) \hat{x}^k + \hat{A}^T \left( I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} K_k^{-1} \hat{B} \hat{B}^T \right) v^{k+1}. \end{aligned}$$

Откуда получаем искомые соотношения:

$$S_k = \hat{w}_1 \hat{Q} + \hat{A}^T S_{k+1} \left( I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{A},$$

$$v_k = \hat{A}^T \left( I - \frac{1}{\hat{w}_2} S_{k+1} \left( I + \frac{1}{\hat{w}_2} \hat{B} \hat{B}^T S_{k+1} \right)^{-1} \hat{B} \hat{B}^T \right) v^{k+1}.$$

Теперь выражение для оптимального управления (5.10) получается прямой подстановкой получившихся соотношений в выражение (5.7). ■

### 5.3 Алгоритм

Алгоритм 4 резюмирует метод, предложенный в данном разделе.

На Рис. 4 представлен результат работы алгоритма для задачи (??) с построенным начальным управлением.

*Замечание 5.* С физической точки зрения решение данной задачи минимизирует угловые ускорения сочленений руки. Таким образом результирующая траектория будет самой плавной из возможных. Кажется естественным, чтобы такая траектория входило в множество допустимых управлений для исходной задачи.



---

**Алгоритм 4:** Поиск начальной траектории

---

```
function InitialControl
begin
    /* Обратный проход */
     $S_{N+1}, v^{N+1} \leftarrow (5.12)$ 
    for  $k \leftarrow N$  to 1 do
        |  $S_k, v^k \leftarrow (5.11)$ 
    end

    /* Прямой проход */
     $\hat{x}^0 \leftarrow x^{\text{start}}$ 
    for  $k \leftarrow 1$  to  $N$  do
        |  $\hat{u}^k, \hat{x}^{k+1} \leftarrow (5.10), (5.2)$ 
    end

    /* Конвертация управления */
    for  $k \leftarrow 1$  to  $N$  do
        |  $u^k \leftarrow (5.5)$ 
    end
    return  $u$ 
end
```

---

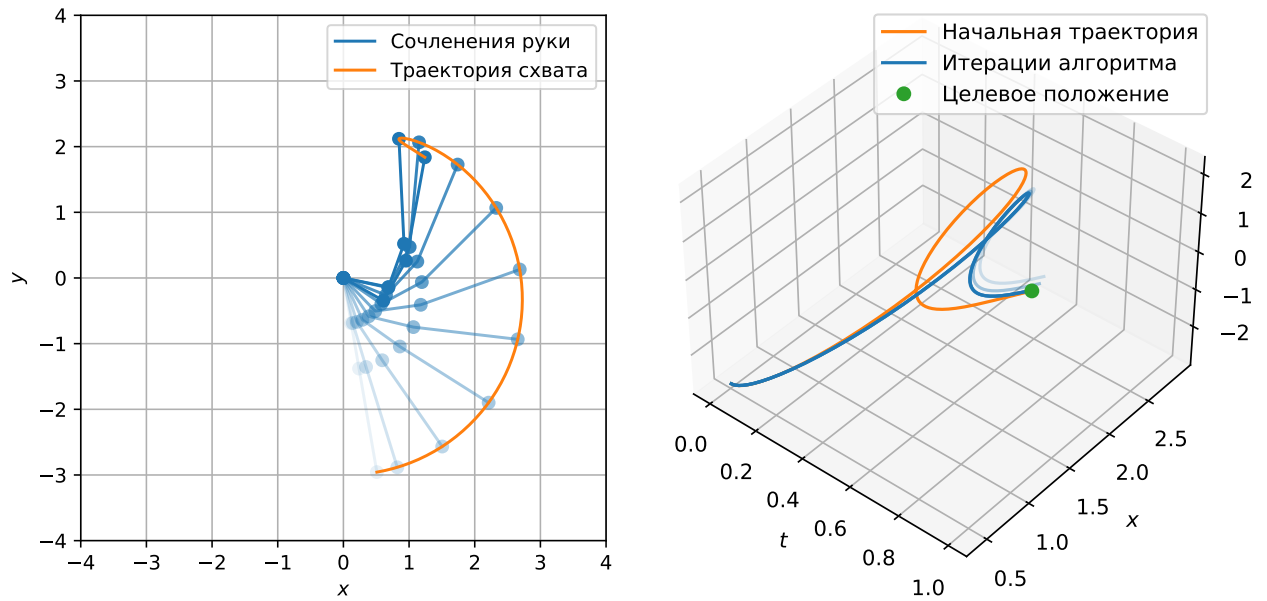


Рис. 4: Оптимальная траектория и траектории схвата на различных итерациях алгоритма при решении задачи (??) с начальным управлением, построенным методом из данного раздела. Алгоритм сошелся на 4 итерации.

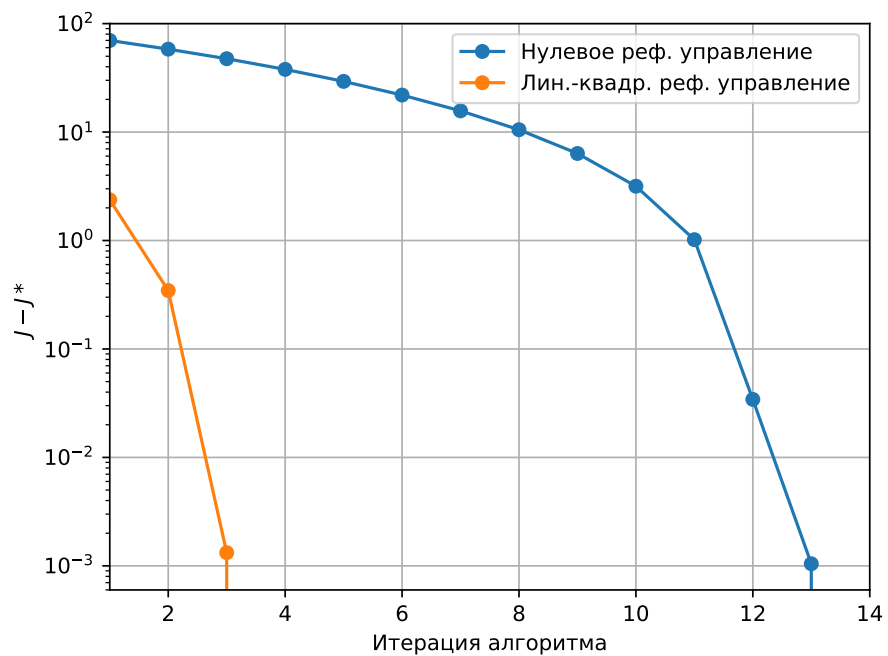


Рис. 5: Сравнение скорости сходимости для задачи (??) в зависимости от выбора начального референсного управления.

## 6 Примеры

### 6.1 Целевое положение схвата

В данном разделе мы приведем примеры работы алгоритма для классических задач биологического движения.

*Замечание 6.* В каждом из примеров, для избежания проворачивания сочленений, в интегральную часть функционала качества дополнительно добавлена поправка

$$10^{-5} \cdot \langle x^k, \hat{Q}x^k \rangle.$$

Пусть целью нашего движения является достижение схватом заранее определенного положения  $e^{\text{final}} \in \mathcal{B}_0 \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)$  с заданной скоростью  $e^{\text{final}}$ . Таким образом получаем следующие компоненты функционала качества:

$$q^{\text{final}}(x) = \|e^3(x) - e^{\text{final}}\|^2 \quad (6.1)$$

Аналитически найдем  $x^{\text{final}}$ , требующийся для построения начального референсного управления из следующих соотношений:

$$\text{tg } \theta_3 = \begin{cases} \frac{e_2^{\text{final}}}{e_1^{\text{final}}}, & \text{при } e_1^{\text{final}} \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 = e_1^{\text{final}} - l_3 \cos \theta_3, \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 = e_2^{\text{final}} - l_3 \sin \theta_3. \end{cases}$$

Данная система имеет два решения на рассматриваемом интервале  $\theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi]$ , которые соответствуют возможному положению руки. В работе строились начальные траектории для обоих вариантов, затем для итеративного алгоритма выбиралась траектория с наименьшим значением функционала качества.

Для скорости минимизации по скорости фиксируем  $\dot{\theta}_1 = 0$ , а оставшиеся компоненты так же получаем из соотношений:

$$\begin{cases} -l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 - l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 = \dot{e}_1^{\text{final}}, \\ l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + l_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 = \dot{e}_2^{\text{final}}, \end{cases}$$

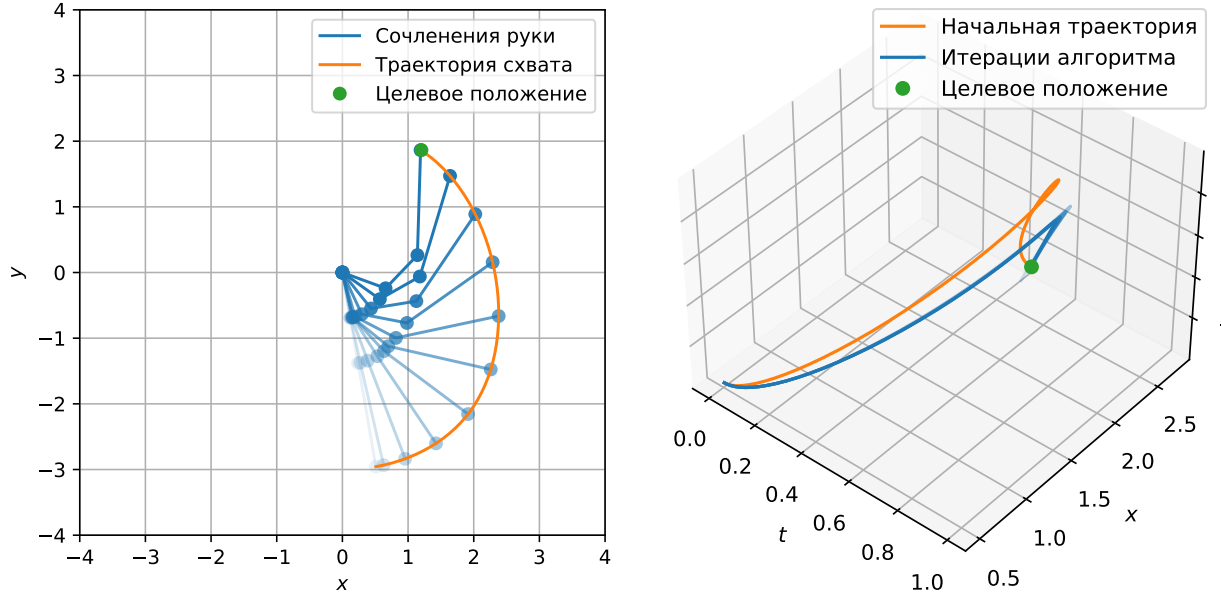


Рис. 6: Reaching Task

## 6.2 Обход препятствия

*Замечание 7.* Учёт фазовых ограничений в интегральной части функционала качества  $J$ , представленный в работе, позволяет лишь приближенно уписать условия вида

$$g_i(x) \leq 0,$$

которые часто встречаются в задачах, например, для обхода препятствия. Для этого функция  $q$  выбирается таким образом, чтобы штрафовать за приближение траектории к препятствию. Для строго формального решения задачи с подобным условием, необходимо пользоваться методами расширенного лангранжиана [1], которые предполагают решение серии задач типа (3.1)-(3.2)-(3.3). Это приводит к существенному ухудшению асимптотики алгоритмов и тем самым увеличению времени работы программного решения.

Пусть задано некоторое точечное препятствие с центром  $e^{\text{obstacle}}$  и радиусом  $r^{\text{obstacle}}$ . Тогда зададим функцию цены:

$$q(x) = \left| \|e^3(x) - e^{\text{obstacle}}\|^2 - r^{\text{obstacle}} \right|^{-2}$$

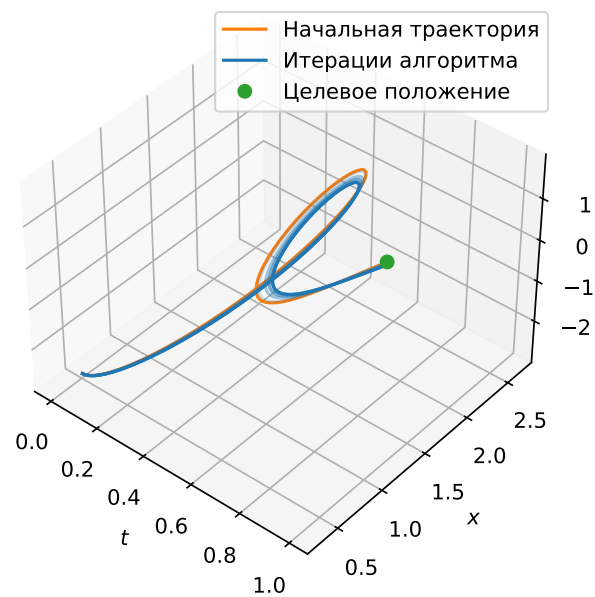
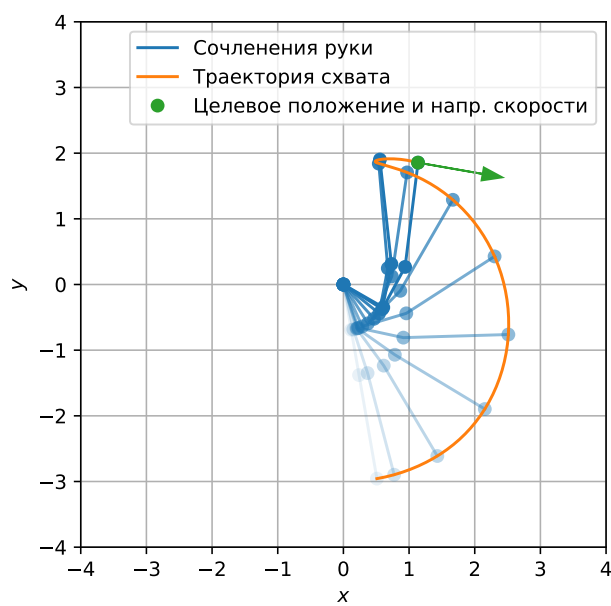


Рис. 7: Reaching Speed Task

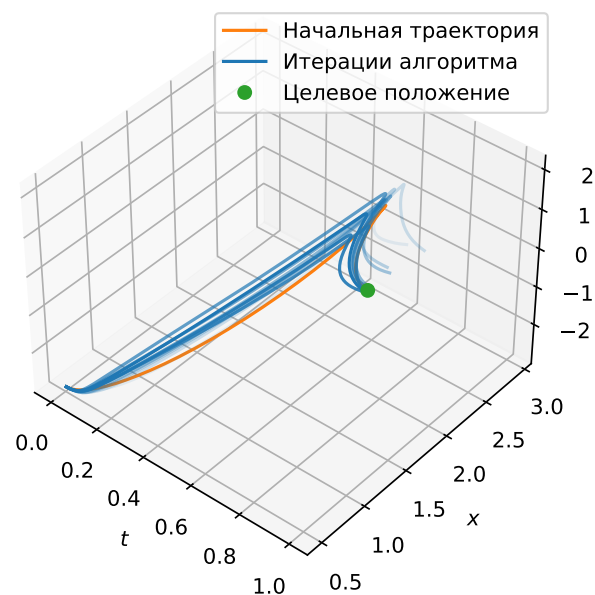
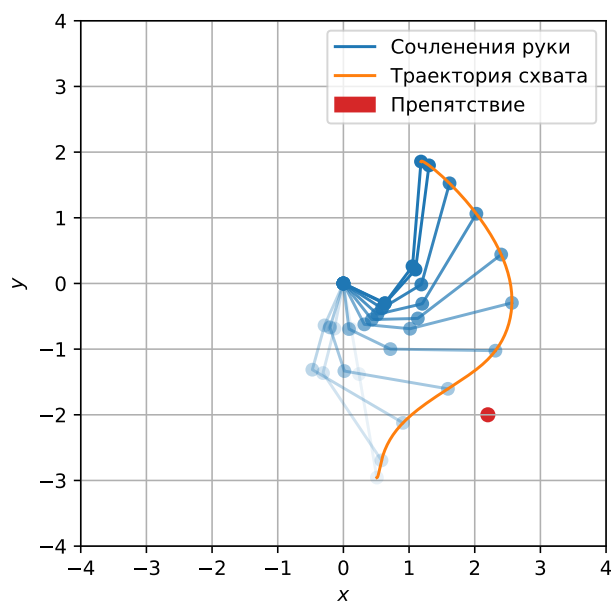


Рис. 8: Obstacle Task.

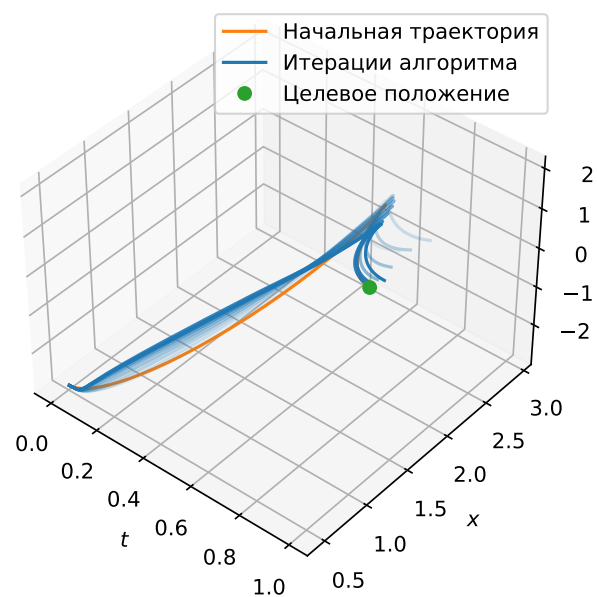
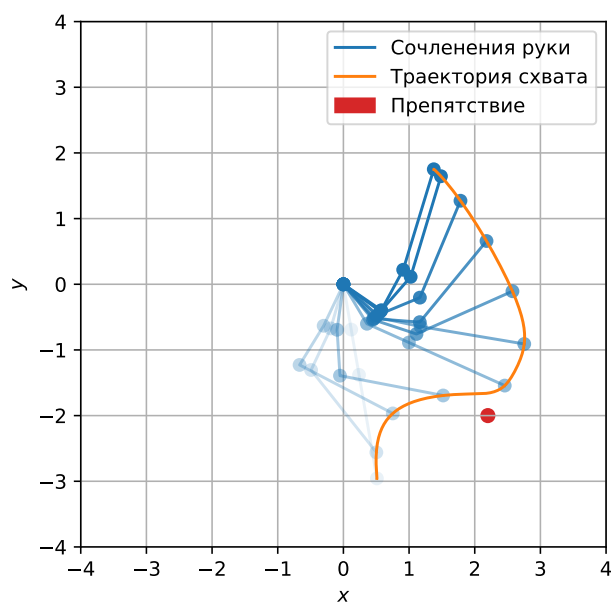


Рис. 9: Obstacle Less Task.

## 7 Заключение

Тут будет какое-то заключение.

## Список литературы

- [1] Ernesto G. Birgin and J. M. Martínez. *Practical augmented Lagrangian methods*. Springer US, Boston, MA, 2009.
- [2] M. Jordan E. Todorov. Optimal feedback control as a theory of motor coordination. *Nature Neuroscience*, 5(11):1226–1235, 2002.
- [3] C. M. Harris and D. M. Wolpert. Signal-dependent noise determines motor planning. *Nature*, 394, August 1998.
- [4] N. Hogan. An organizing principle for a class of voluntary movement. *Journal of Neuroscience*, 4(11):2745–2754, 1984.
- [5] Weiwei Li and Emanuel Todorov. Iterative linear quadratic regulator design for nonlinear biological movement systems. In *ICINCO (1)*, pages 222–229. Citeseer, 2004.
- [6] R. Meulenbroek M. Breteler and S. Gielen. An evaluation of the minimum-jerk and minimum torque-change principles at the path, trajectory, and movement-cost levels. *Motor control*, 6:69–83, 02 2002.
- [7] Z. Manchester and S. Kuindersma. Derivative-free trajectory optimization with unscented dynamic programming. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 3642–3647, 2016.
- [8] D. Mayne. A second-order gradient method for determining optimal trajectories of non-linear discrete-time systems. *International Journal of Control*, 3(1):85–95, 1966.
- [9] D. Murray and S. Yakowitz. Differential dynamic programming and newton’s method for discrete optimal control problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 43(3):395–414, 1984.
- [10] A. Sideris and J. E. Bobrow. An efficient sequential linear quadratic algorithm for solving nonlinear optimal control problems. *Transactions on Automatic Control*, 50(12):2043–2047, 2005.



- [11] M. Kawato Y. Uno and R. Suzuki. Formation and control of optimal trajectory in human multijoint arm movement - minimum torque-change model. *Biological Cybernetics*, 61(2):89–101, 1989.
- [12] В. Ф. Журавлёв. *Основы теоретической механики*. М: Физматлит, 2001.
- [13] С. А. Колюбин. *Динамика робототехнических систем*. Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО, Санкт-Петербург, 2017.
- [14] А. Ф. Филиппов. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М: Наука, Москва, 1985.

# Приложения

## Приложение А Таблица параметров

Для возможности сопоставления результатов в работе использовались общие параметры при построении численных решений задач. Ниже приведена таблица параметров, которые использовались для построения графиков в случае, если в подписи к соответствующему рисунку не оговорено обратное.

Символ	Краткое описание	Значение
Параметры модели		
$l$	Длины сочленений	$[0,7, 0,7, 1,6]$
$m$	Массы сочленений	$[0,8, 0,8, 1,2]$
$g$	Ускорение свободного падения	9,8
Параметры задачи		
$t_{\text{start}}$	Время начала движения	0
$t_{\text{final}}$	Время окончания движения	1
$\Delta t$	Шаг дискретизации	$10^{-3}$
$\theta^{\text{start}}$	Начальные углы	$[-1,4, -1,4, -1,4]$
$\dot{\theta}^{\text{start}}$	Начальные угловые скорости	$[0, 0, 0]$
$\tau^{\text{start}}$	Начальные моменты силы	$[0, 0, 0]$
$w_2$	Вес энергетического критерия	$10^{-2}$
Параметры основного алгоритма		
$\varepsilon$	Критерий останова	$10^{-2}$
$\mu$	Константа регуляризации матрицы $K$	$10^{-8}$
$\xi_1, \xi_2$	Интервал регуляризации поправки	$10^{-1}, 10$
Параметры алгоритма поиска начальной траектории		
$\hat{w}_1$	Вес фазового критерия	$10^{-2}$
$\hat{w}_2$	Вес критерия минимизации ускорения	$10^{-2}$

Задача перехода в целевое состояние (Разделы 4 и 5)		
$\theta^{\text{final}}$	Целевые углы	??
$\dot{\theta}^{\text{final}}$	Целевые угловые скорости	??
$\tau^{\text{final}}$	Целевые моменты силы	??
$w_1$	Вес фазового критерия	??

## Приложение В Матрица инерции