0.1 Синтез оптимальной поправки

Допустим мы имеем некоторое референсное управление $\bar{u} = \{\bar{u}^k\}_{k=1}^{N}$ и соответствующую ему референсную траекторию $\bar{x} = \{\bar{x}^k\}_{k=1}^{N+1}$. Введем обозначения:

$$f_x^k = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x}^k,\bar{u}^k)}, \quad f_u^k = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{x}^k,\bar{u}^k)},$$

$$q^k = q(\bar{x}^k), \quad q_x^k = \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{\bar{x}^k}, \quad q_{xx}^k = \left.\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right|_{\bar{x}^k},$$

$$r^k = r(\bar{u}^k), \quad r_x^k = \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{\bar{u}^k}, \quad r_{xx}^k = \left.\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\right|_{\bar{u}^k}.$$

Тогда, линеаризуя вдоль референсной траектории задачу Коши (**??**) и строя квадратичную аппроксимацию вдоль той же траектории функционала качества (**??**), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \delta x^{k+1} = f_x^k \delta x + f_u^k \delta u,\ k = \overline{1, N}, \\ \delta x^1 = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} J = q^{N+1} + q_x^{N+1}\tilde{x}^{N+1} + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}^{N+1}, q_{xx}^{N+1}\tilde{x}^{N+1}\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{N}\left[q^k + q_x^k\tilde{x}^k + \frac{1}{2}\langle\tilde{x}^k, q_{xx}^k\tilde{x}^k\rangle\right] + \\ + \sum_{k=1}^{N}\left[r^k + r_u^k\tilde{u}^k + \frac{1}{2}\langle\tilde{u}^k, r_{uu}^k\tilde{u}^k\rangle\right], \end{aligned} \tag{0.2}$$

где

$$\tilde{x}^k = \bar{x}^k + \delta x^k, \qquad \tilde{u}^k = \bar{u}^k + \delta u^k.$$

Построим гамильтониан для задачи (0.1)-(0.2):

$$\begin{aligned} H_k = q^k + q_x^k\tilde{x}^k + \frac{1}{2}\langle\tilde{x}^k, q_{xx}^k\tilde{x}^k\rangle + \\ + r^k + r_u^k\tilde{u}^k + \frac{1}{2}\langle\tilde{u}^k, r_{uu}^k\tilde{u}^k\rangle + \\ + (\lambda^{k+1})^{\mathrm{T}}(f_x^k\delta x^k + f_u^k\delta u^k), \end{aligned} \tag{0.3}$$

где λ^{k+1} — мультипликаторы Лагранжа.

Оптимальное управление δu должно удовлетворять необходимому условию $\frac{\partial H_k}{\partial u^k} = 0$:

$$r_u^k + r_{uu}^k(\bar{u}^k + \delta u^k) + (f_u^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} = 0.$$

что дает следующее выражение для поправки:

$$\delta u^k = -(r_{uu}^k)^{-1}[(f_u^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} + r_u^k] - \bar{u}^k. \tag{0.4}$$

При этом имеет силу сопряженная задача:

$$\begin{cases} \lambda^k = (f_x^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} + q_x^k + q_{xx}^k(\bar{x}^k + \delta x^k) \\ \lambda^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}(\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1}). \end{cases} \tag{0.5}$$

Из (0.4) и (0.5) вытекает

$$\begin{pmatrix} \delta x^{k+1} \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x^k & -f_u^k(r_{uu}^k)^{-1}(f_u^k)^{\mathrm{T}} \\ q_{xx}^k & (f_x^k)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}}_{\Phi^k} \begin{pmatrix} \delta x^k \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -f_u^k(r_{uu}^k)^{-1}r_u^k \\ q_x^k \end{pmatrix}}_{\Gamma^k}. \tag{0.6}$$

Теорема 1. *Оптимальная поправка δu для задачи* (0.1)-(0.2) *вычисляется как*

$$\delta u^k = -(r_{uu}^k + (f_u^k)^{\mathrm{T}}S_{k+1}f_u^k)^{-1}((f_u^k)^{\mathrm{T}}S_{k+1}f_u^k\delta x + v^{k+1} + r_u^k), \tag{0.7}$$

где S_k и v^k высчитываются в обратном времени как

$$\begin{aligned} S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1}(I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1}\Phi_{11}^k, \\ v^k &= \Phi_{22}^k S_{k+1}(I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1}(\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + \Phi_{22}^k v^{k+1} + \Gamma_2^k \end{aligned} \tag{0.8}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= q_{xx}^{N+1}, \\ v^{N+1} &= q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}\bar{x}^{N+1}. \end{aligned} \tag{0.9}$$

Доказательство. Предположим, что мультипликаторы λ имеют следующую аффинную форму относительно фазовой переменной δx

$$\lambda^k = S_k\delta x^k + v^k \tag{0.10}$$

Тогда из граничного условия (0.5) вытекает граничное условие на S_k, v^k (0.9):

$$\lambda^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}\left(\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$S_{N+1} = q_{xx}^{N+1}, v^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}\bar{x}^{N+1}.$$

Теперь подставим (0.10) в выражение (0.6) для δx^{k+1}:

$$\delta x^{k+1} = \Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k (S_{k+1}\delta x^{k+1} + v^{k+1}) + \Gamma_1^k.$$

Получаем

$$\delta x^{k+1} = \left(\underbrace{I - \Phi_{12}^k S_{k+1}}_{K_k}\right)^{-1} \left(\Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k\right).$$

Подставим получившееся выражение в (0.6) для λ^k:

$$\begin{aligned} \lambda^k = S_k \delta x^k + v^k = \Phi_{21}^k \delta x^k + \Phi_{22}^k \left(S_{k+1}\delta x^{k+1} + v^{k+1}\right) + \Gamma_2^k = \\ = \Phi_{21}^k \delta x^k + \Phi_{22}^k \left(S_{k+1} K_k^{-1} (\Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + v^{k+1}\right) + \Gamma_2^k. \end{aligned}$$

Таким образом получаем искомые соотношения (0.8):

$$\begin{aligned} S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1} K_k^{-1} \Phi_{11}^k, \\ v^k &= \Phi_{22}^k (S_{k+1} K_k^{-1} (\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + v^{k+1}) + \Gamma_2^k. \end{aligned}$$

Итоговая формула для оптимальной поправки (0.7) получается прямой подстановкой получившихся соотношений в выражение (0.4).

■

Замечание 1. Приведенная теорема требует существование обратных матриц для $K_k, k = \overline{1, N}$. При этом для нелинейных систем данное условие может не выполняться. Чтобы метод продолжал работать, предлагается в случае нулевого определителя $\det K_k = 0$, заменять в формулах (0.7), (0.8) матрицу K_k на регуляризованную

$$\mathcal{K}_k = K_k + \mu I. \tag{0.11}$$

В данной работе при численном построении управления использовалась следующая константа регуляризации:

$$\mu = 10^{-8}.$$

Замечание 2. Данная теорема не учитывает возможные ограничения на управление, которые естественным образом возникают для данной задачи. Далее мы будем считать, что задано некоторое поточечное ограничение на управление $u^k \in \mathcal{U}^k$. В этом случае, мы будем считать домножать поправку на некоторую величину η, такую что $u^k + \eta \delta u^k \in \partial \mathcal{U}^k$.

Добавить замечание, почему только r_{uu} должна быть > 0 — типа лемма об обращении матриц.

Не забыть, что так как метод итеративный, нет надобности рассматривать большую систему с уравнение наблюдаемости, так как это предполагало бы, что каждая итерация алгоритма производится не на компьютере, где с наблюдаемостью все хорошо, а на настоящем человеке.