

0.1 Уравнение динамики

Для получения уравнения динамики рассматриваемой физической системы воспользуемся методом Эйлера–Лагранжа [?]. Идея метода состоит в проведении следующих последовательных шагов:

1. Выбор обобщённых координат;
2. Получение выражения для кинетической K и потенциальной Π энергий системы, записанных в обобщённых координатах;
3. Получение выражения для лагранжиана системы \mathcal{L} ;
4. Составление системы уравнений движения, соответствующих каждой обобщённой координате.

Обобщёнными координатами для нашей системы выберем углы поворота сочленений θ_i , $i = 1, 2, 3$. Далее перейдем к выражению энергий через обобщенные координаты. Для подсчета кинетической энергии воспользуемся теоремой Кёнинга [?].

Теорема 1 (Кёнинг). *Кинетическая энергия тела есть энергия поступательного движения центра масс плюс энергия вращательного движения относительно центра масс*

$$K = \frac{1}{2}m\|v_c\|^2 + \frac{1}{2}\omega^T I \omega, \quad (0.1)$$

где m — полная масса тела, I — тензор инерции тела, v_c — линейная скорость центра масс, ω — скорость вращения тела относительно центра масс.

Далее в работе мы будем полагать, что каждое из сочленений представляет собой однородный стержень длины l_i массы m_i . В таком случае получаем следующие значения для положения центра масс $c^i \in \mathbb{R}^2$ i -ого сочленения:

$$c^i = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{i-1} l_j \cos \theta_j + \frac{l_i}{2} \cos \theta_i \\ \sum_{j=1}^{i-1} l_j \sin \theta_j + \frac{l_i}{2} \sin \theta_i \end{bmatrix}.$$

Выражения для момента инерции и скорости вращательного движения относительно центра масс для стержня получаются соответственно:

$$I_i = \int_{(m_i)} r^2 dm = \rho_i \int_{(l_i)} r^2 dl = \frac{m_i l_i^2}{12},$$

$$\omega_i = 2\dot{\theta}_i.$$

Потенциальная энергия i -ого сочленения рассчитывается по формуле

$$\Pi_i = m_i g c_2^i,$$

где g — ускорение свободного падения.

Общая кинетическая и потенциальная энергии системы рассчитываются как сумма энергий каждого из сочленений:

$$K = \sum_{i=1}^3 K_i = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i \|\dot{c}^i\|^2}{2} + \frac{m_i l_i^2 |\dot{\theta}_i|^2}{6} \right),$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \Pi_i = \sum_{i=1}^3 m_i g c_2^i.$$

Теперь введём лагранжевы функции системы

$$\mathcal{L} = K - \Pi$$

и построим систему уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (0.2)$$

где τ_i — момент силы, действующий на i -ое сочленение, который доступен для управления.

Продифференцировав члены из левой части уравнения (0.2), получим уравнение динамики для рассматриваемой системы:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + L(\theta, \dot{\theta}) = \tau, \quad (0.3)$$

где $M(\theta) = M^T(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — матрица инерции системы, $L(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^3$ — вектор центробежных и кориолисовых сил. Выражения для M и L представлены в Приложении В. На Рис. 1 приведено численное моделирование свободного падения системы в соответствии с полученным уравнением динамики (0.3).

Замечание 1. Матрица инерции $M(\theta)$ является положительно-определённой, поскольку кинетическая энергия системы K всегда неотрицательна:

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \langle \dot{\theta}, M(\theta) \dot{\theta} \rangle > 0 \text{ для любого } \dot{\theta} \neq 0.$$

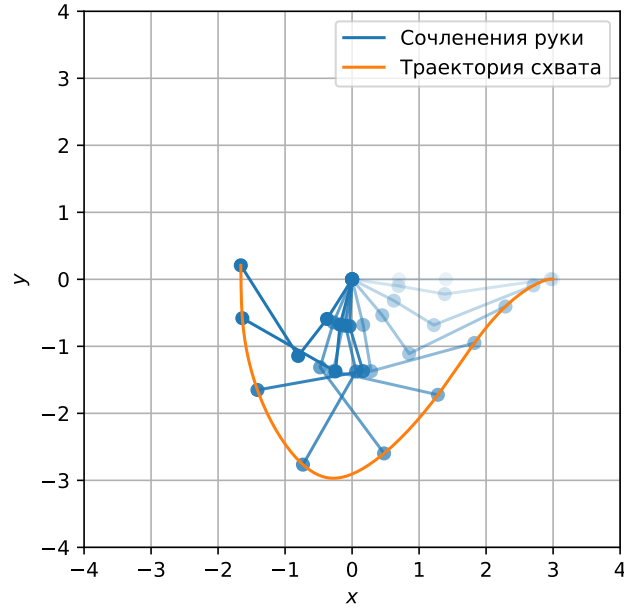


Рис. 1: Траектория системы в свободном падении из начального положения $\theta^{\text{start}} = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\dot{\theta}^{\text{start}} = [0 \ 0 \ 0]^T$ на временном интервале $0 \leq t \leq 1$. Положения системы, соответствующие более раннему времени, показаны бледнее. Для изображения положений используется равномерное разбиение временного интервала.