## 0.1 Синтез оптимальной поправки

Допустим мы имеем некоторое референсное управление $\bar{u} = \{\bar{u}^k\}_{k=1}^N$ и соответствующую ему референсную траекторию $\bar{x} = \{\bar{x}^k\}_{k=1}^{N+1}$. Введем обозначения:

$$f_x^k = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x}^k,\bar{u}^k)}, \quad f_u^k = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{x}^k,\bar{u}^k)},$$

$$q^k = q(\bar{x}^k), \quad q_x^k = \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{\bar{x}^k}, \quad q_{xx}^k = \left.\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right|_{\bar{x}^k},$$

$$r^k = r(\bar{u}^k), \quad r_x^k = \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{\bar{u}^k}, \quad r_{xx}^k = \left.\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}\right|_{\bar{u}^k}.$$

Тогда, линеаризуя вдоль референсной траектории задачу Коши (**??**) и строя квадратичную аппроксимацию вдоль той же траектории функционала качества (**??**), получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \delta x^{k+1} = f_x^k \delta x + f_u^k \delta u, \ k = \overline{1, N}, \\ \delta x^1 = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} J_\delta = q^{N+1} + q_x^{N+1}\tilde{x}^{N+1} + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}^{N+1}, q_{xx}^{N+1}\tilde{x}^{N+1}\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{N}\left[q^k + q_x^k\tilde{x}^k + \frac{1}{2}\langle\tilde{x}^k, q_{xx}^k\tilde{x}^k\rangle\right] + \\ + \sum_{k=1}^{N}\left[r^k + r_u^k\tilde{u}^k + \frac{1}{2}\langle\tilde{u}^k, r_{uu}^k\tilde{u}^k\rangle\right], \end{aligned} \tag{0.2}$$

где

$$\tilde{x}^k = \bar{x}^k + \delta x^k, \qquad \tilde{u}^k = \bar{u}^k + \delta u^k.$$

Построим гамильтониан для задачи (0.1)-(0.2):

$$\begin{aligned} H_k = q^k + q_x^k\tilde{x}^k + \frac{1}{2}\langle\tilde{x}^k, q_{xx}^k\tilde{x}^k\rangle + \\ + r^k + r_u^k\tilde{u}^k + \frac{1}{2}\langle\tilde{u}^k, r_{uu}^k\tilde{u}^k\rangle + \\ + (\lambda^{k+1})^{\mathrm{T}}(f_x^k\delta x^k + f_u^k\delta u^k), \end{aligned} \tag{0.3}$$

где $\lambda^{k+1}$ — мультипликаторы Лагранжа.

Согласно принципу максимума Л. С. Понтрягина [?] оптимальное управление $\delta u^*$ должно удовлетворять необходимому условию

$$\frac{\partial H_k}{\partial(\delta u^k)}\bigg|_{\delta u^k=\delta u^{k*}} = r_u^k + r_{uu}^k(\bar{u}^k + \delta u^{k*}) + (f_u^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} = 0,$$

что дает следующее выражение для поправки:

$$\delta u^{k*} = -(r_{uu}^k)^{-1}[(f_u^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} + r_u^k] - \bar{u}^k. \tag{0.4}$$

И при этом имеет силу сопряженная задача:

$$\begin{cases} \lambda^k = (f_x^k)^{\mathrm{T}}\lambda^{k+1} + q_x^k + q_{xx}^k(\bar{x}^k + \delta x^k) \\ \lambda^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}(\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1}). \end{cases} \tag{0.5}$$

Из (0.4) и (0.5) вытекает

$$\begin{pmatrix} \delta x^{k+1} \\ \lambda^k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x^k & -f_u^k(r_{uu}^k)^{-1}(f_u^k)^{\mathrm{T}} \\ q_{xx}^k & (f_x^k)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}}_{\Phi^k} \begin{pmatrix} \delta x^k \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -f_u^k(r_{uu}^k)^{-1}r_u^k \\ q_x^k \end{pmatrix}}_{\Gamma^k}. \tag{0.6}$$

**Теорема 1.** *Оптимальная поправка $\delta u$ для задачи* (0.1)-(0.2) *вычисляется как*

$$\delta u^k = L_k\delta x^k + d^k, \tag{0.7}$$

*где*

$$\begin{aligned} L_k &= -(r_{uu}^k + (f_u^k)^{\mathrm{T}}S_{k+1}f_u^k)^{-1}(f_u^k)^{\mathrm{T}}S_{k+1}f_u^k, \\ d^k &= -(r_{uu}^k + (f_u^k)^{\mathrm{T}}S_{k+1}f_u^k)^{-1}(v^{k+1} + r_u^k). \end{aligned}$$

*Причем переменные $S_k$, $v^k$ могут быть найдены в обратном времени из соотношений*

$$\begin{aligned} S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1}(I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1}\Phi_{11}^k, \\ v^k &= \Phi_{22}^k S_{k+1}(I - \Phi_{12}^k S_{k+1})^{-1}(\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + \Phi_{22}^k v^{k+1} + \Gamma_2^k \end{aligned} \tag{0.8}$$

*с граничными условиями*

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= q_{xx}^{N+1}, \\ v^{N+1} &= q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}\bar{x}^{N+1}. \end{aligned} \tag{0.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что мультипликаторы $\lambda$ имеют следующую аффинную форму относительно фазовой переменной $\delta x$

$$\lambda^k = S_k\delta x^k + v^k \tag{0.10}$$

Тогда из граничного условия (0.5) вытекает граничное условие на $S_k$, $v^k$ (0.9):

$$\lambda^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}\left(\bar{x}^{N+1} + \delta x^{N+1}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$S_{N+1} = q_{xx}^{N+1}, v^{N+1} = q_x^{N+1} + q_{xx}^{N+1}\bar{x}^{N+1}.$$

Теперь подставим (0.10) в выражение (0.6) для $\delta x^{k+1}$:

$$\delta x^{k+1} = \Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k (S_{k+1}\delta x^{k+1} + v^{k+1}) + \Gamma_1^k.$$

Получаем

$$\delta x^{k+1} = \left(\underbrace{I - \Phi_{12}^k S_{k+1}}_{K_k}\right)^{-1} \left(\Phi_{11}^k \delta x^k + \Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k\right).$$

Подставим получившееся выражение в (0.6) для $\lambda^k$:

$$\begin{aligned}\lambda^k = S_k\delta x^k + v^k = \Phi_{21}^k \delta x^k + \Phi_{22}^k\left(S_{k+1}\delta x^{k+1} + v^{k+1}\right) + \Gamma_2^k = \\ = \Phi_{21}^k \delta x^k + \Phi_{22}^k\left(S_{k+1}K_k^{-1}(\Phi_{11}^k\delta x^k + \Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + v^{k+1}\right) + \Gamma_2^k.\end{aligned}$$

Таким образом получаем искомые соотношения (0.8):

$$\begin{aligned}S_k &= \Phi_{21}^k + \Phi_{22}^k S_{k+1} K_k^{-1}\Phi_{11}^k,\\ v^k &= \Phi_{22}^k (S_{k+1}K_k^{-1}(\Phi_{12}^k v^{k+1} + \Gamma_1^k) + v^{k+1}) + \Gamma_2^k.\end{aligned}$$

Итоговая формула для оптимальной поправки (0.7) получается прямой подстановкой получившихся соотношений в выражение (0.4).

■

*Замечание* 1. Полученная теорема требует существование обратных матриц для $K_k, k = \overline{1, N}$. При этом для нелинейных систем данное условие может не выполняться. Чтобы метод продолжал работать, предлагается в случае нулевого определителя $\det K_k = 0$, заменять в формулах (0.7), (0.8) матрицу $K_k$ на регуляризованную

$$\mathcal{K}_k = K_k + \mu I. \tag{0.11}$$

Однако при построении численного решения для классических задач, рассмотренных в следующих разделах, данная регуляризация не потребовалась.