0.1 Непрерывная постановка задачи

Поставим задачу целевого управления для модели, построенной в Разделе 1. Для этого рассмотрим расширенное фазовое пространство с состоянием

$$x = [\theta \; \dot{\theta} \; \tau]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^9.$$

Тогда уравнение динамики системы (**??**) можно переписать в виде системы однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(x) + Bu, \tag{0.1}$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1}(x_1)(x_3 - L(x_1, x_2)) \\ O \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ O \\ I \end{bmatrix}.$$

Считаем, что для данной системы поставлена задача Коши, то есть нам известно начальное состояние системы

$$x(t_0) = x^{\mathrm{start}}. \tag{0.2}$$

Замечание 1. Отметим, что для выполнения достаточных условий существования и единственности решения Каратеодори для задачи Коши (0.1)-(0.2) управление u достаточно брать из класса измеримых на рассматриваемом отрезке $t_{\mathrm{start}} \leqslant t \leqslant t_{\mathrm{final}}$ функций.

Для задачи Коши (0.1)-(0.2) поставим задачу поиска управления $u \in U[t_{\mathrm{start}}, t_{\mathrm{final}}]$, минимизирующего функционал вида:

$$J = q^{\mathrm{final}}(x(t_{\mathrm{final}})) + w_1 \int\limits_{t_{\mathrm{start}}}^{t_{\mathrm{final}}} q(x(t))\, dt + w_2 \int\limits_{t_{\mathrm{start}}}^{t_{\mathrm{final}}} r(u(t))\, dt, \tag{0.3}$$

где q^{final}, q отвечают за терминальное и фазовые ограничения соответственно и выбираются в зависимости от конкретной постановки задачи, а r отвечает за энергетические затраты и в соответствии с (**??**) равна:

$$r(u) = \|u\|^2,$$

а w_1, w_2 — веса соответствующих критериев для данной многокритериальной задачи.

Для дальнейших рассуждений потребуем, чтобы функции q^{final}, q были дважды непрерывно дифференцируемыми. Полученные из модели функции A и r заведомо удовлетворяют этому требованию.

Замечание 2. Учёт фазовых ограничений в интегральной части функционала качества J, представленный в работе, позволяет лишь приближенно уписать условия вида

$$g_i(x) \leqslant 0,$$

которые часто встречаются в задачах, например, для обхода препятствия. Для этого функция q выбирается таким образом, чтобы штрафовать за приближение траектории к препятствию. Для строго формального решения задачи с подобным условием, необходимо пользоваться методами расширенного лангранжиана [1], которые предполагают решение серии задач типа (0.1)-(0.2)-(0.3). Это приводит к существенному ухудшению асимптотики алгоритмов и тем самым увеличению времени работы программного решения.

Список литературы

[1] Ernesto G. Birgin and J. M. Martínez. *Practical augmented Lagrangian methods*. Springer US, Boston, MA, 2009.

[2] M. Jordan E. Todorov. Optimal feedback control as a theory of motor coordination. *Nature Neuroscience*, 5(11):1226–1235, 2002.

[3] C. M. Harris and D. M. Wolpert. Signal-dependent noise determines motor planning. *Nature*, 394, August 1998.

[4] N. Hogan. An organizing principle for a class of voluntary movement. *Journal of Neuroscience*, 4(11):2745–2754, 1984.

[5] Donald E. Knuth. *The TEX Book*. Addison-Wesley Professional, 1986.

[6] M. Kawato Y. Uno and R. Suzuki. Formation and control of optimal trajectory in human multijoint arm movement - minimum torque-change model. *Biological Cybernetics*, 61(2):89–101, 1989.

[7] С. А. Колюбин. *Динамика робототехнических систем*. Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО, Санкт-Петербург, 2017.