



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Конспект лекций

## «Динамические системы и модели биологии»

*Лектор*  
д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>Как заполнять документ</b>	<b>3</b>
1.1	doc.tex . . . . .	3
1.2	bib.tex . . . . .	5
1.3	set.tex . . . . .	5
1.4	Заключение . . . . .	5
1.5	Список приславших . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Дискретные системы с запаздыванием</b>	<b>6</b>
2.1	Падение и взлет численности математической модели популяции жука (tribolium)	7
<b>3</b>	<b>Непрерывные системы</b>	<b>8</b>
3.1	Свойства автономных систем . . . . .	8
3.2	Теорема Лиувилля о скорости изменения фазового объема . . . . .	11
3.3	Классификация положений равновесия . . . . .	13
3.4	Теорема Ляпунова об устойчивости . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Теорема Ляпунова–Пуанкаре об устойчивости о первому приближению</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Система Лотки–Вольтерры «хищник–жертва»</b>	<b>26</b>

# 1 Как заполнять документ

Сейчас я расскажу, как максимально быстро собрать лекцию, чтобы никому ничего не сломать. Предлагаю также ориентироваться на этот пример (папка `ch0`). Итак, порядок действий:

1. Скачать себе этот архив.  
*Он собирается командой `make` или `pdflatex doc`, если вы используете Windows.*
2. Создать в корне вашу папку `chНОМЕРГЛАВЫ`.  
*В примере папка `ch0`.*
3. Заполнить в этой папке три документа: `doc.tex`, `bib.tex`, `set.tex`, положить туда все ваши картинки и все, что вам нужно.
4. Проверить, что все собралось правильно.
5. Отослать мне на почту `kireku@gmail.com` с темой “БКР” или, если вы умеете, сделать `pull request`.

## 1.1 doc.tex

Это файл с вашим текстом. Туда вы пишите лекцию.

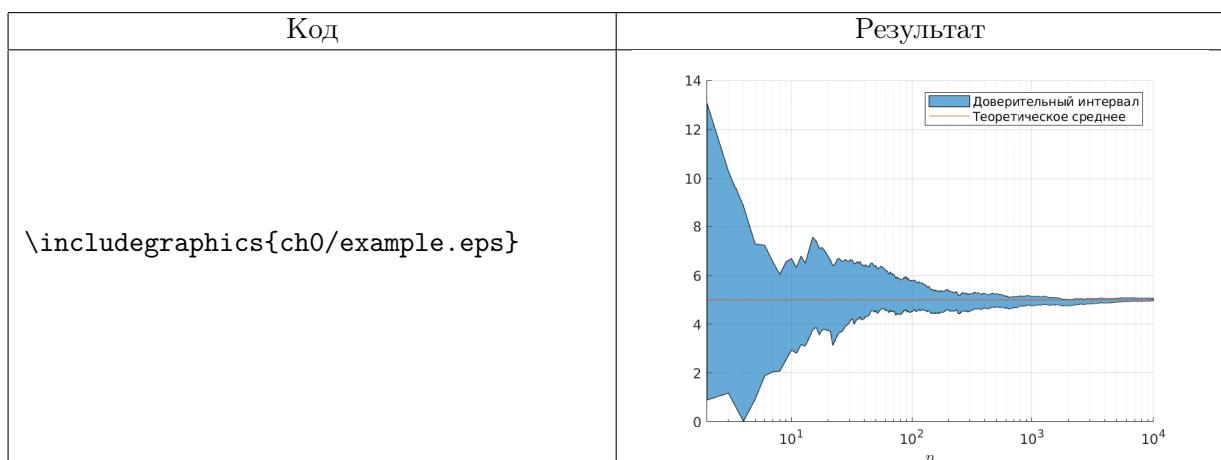
Я добавил уже ряд математических операторов. Если вы хотите добавить свои смотри раздел про `set.tex`.

Код	Результат
<code>\sgn</code>	$\text{sgn}$
<code>\const</code>	$\text{const}$
<code>\T</code>	$\mathbb{T}$
<code>\SetN</code>	$\mathbb{N}$
<code>\SetZ</code>	$\mathbb{Z}$
<code>\SetQ</code>	$\mathbb{Q}$
<code>\SetR</code>	$\mathbb{R}$
<code>\SetC</code>	$\mathbb{C}$
<code>\Prb</code>	$\mathbb{P}$
<code>\Ind</code>	$\mathbb{I}$
<code>\Exp</code>	$\mathbb{E}$
<code>\Var</code>	$\mathbb{Var}$
<code>\SetX</code>	$\mathcal{X}$
<code>\SetP</code>	$\mathcal{P}$

Также встроены окружения. Они как в книжке Арама, то есть красивые, не используйте другие.

Код	Результат
<pre>\begin{theorem}     Это теорема. \end{theorem}</pre>	<b>Теорема 1.1.</b> <i>Это теорема.</i>
<pre>\begin{definition}     Это определение     \textit{сходимости}. \end{definition}</pre>	<b>Определение 1.1.</b> Это определение <i>сходимости.</i>
<pre>\begin{lemma}     Это лемма. \end{lemma}</pre>	<b>Лемма 1.1.</b> <i>Это лемма.</i>
<pre>\begin{assertion}     Это утверждение. \end{assertion}</pre>	<b>Утверждение 1.1.</b> <i>Это утверждение.</i>
<pre>\begin{example}     Это пример. \end{example}</pre>	<b>Пример 1.1.</b> Это пример.
<pre>\begin{proof}     Это доказательство чего-либо. \end{proof}</pre>	Доказательство. Это доказательство чего-либо. ■

Чтобы добавить картинку, положите ее в вашу папку и укажите полный путь:



Используя метки, обязательно ставьте префикс-название папки:

Код	Результат
<pre>\begin{equation} \label{ch0.square} x^2 = 0. \end{equation}</pre>	$x^2 = 0. \quad (1.1)$

## 1.2 bib.tex

Если вам нужна библиография — сюда можно написать библиографию, она автоматом окажется внизу. Все ссылки, по-прежнему с префиксом.

Содержимое ch0/bib.tex
<pre>\bibitem{ch0.voroncov}     К.~В.~Воронцов. \textit{\LaTeX{} в примерах}. --- М.: МЦНМО, 2005.</pre>

## 1.3 set.tex

Если вам жизненно не хватает какой-нибудь суперштуки, которую обычно объявляют в начале файла: новую команду, окружение или что-то в этом духе, то напишите сюда. Но все это пишите с каким-нибудь префиксом.

Например, я очень захотел писать прикольные дроби, типа  $3/4$  и новый оператор  $\text{Kirill}_{x \in \mathcal{X}}$ , тогда я должен туда написать:

Содержимое ch0/bib.tex
<pre>\usepackage{nicefrac} \DeclareMathOperator{\zeroKir}{Kirill}</pre>

Но вообще, если вы не уверены, что все не перестанет компилиться, то не стоит подключать пакеты. Пакеты будут действовать на весь документ в целом.

## 1.4 Заключение

Вообще, было бы круто, чтобы все получилось примерно одинаково и красиво. В библиографии есть книжка хорошая по Латеху, если кому нужна.

## 1.5 Список приславших

1. Абрамова
2. Авалиани
3. Егоров

## 2 Дискретные системы с запаздыванием

Иногда удобно рассматривать  $N_{t+1} = f(N_t, \dots, N_{t-\tau})$ . Эквивалентная запись в виде многомерной системы:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= N_t, u_2(t) = N_{t-1}, \dots, u_{\tau+1}(t) = N_{t-\tau} \Rightarrow u_1(t+1) = f(u_1(t), \dots, u_{\tau+1}(t)), \\ u_2(t+1) &= u_1(t), u_3(t+1) = u_2(t), \dots, u_{\tau+1}(t+1) = u_{\tau}(t). \end{aligned}$$

**Определение 2.1.** Для многомерной системы неподвижной точкой называется  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ , такая что

$$\begin{cases} u_1^* = f(u_1^*, \dots, u_n^*), \\ u_2^* = u_1^*, \\ \vdots \\ u_{\tau+1}^* = u_{\tau}^*. \end{cases}$$

Для системы с запаздыванием:  $u^* = f(u^*, \dots, u^*)$ .

Исследуем на устойчивость: пусть  $f(N_t, \dots, N_{t-\tau}) \in C(\mathbb{R}^\tau)$ . Дадим всем точкам приращение:

$$\begin{aligned} u_1(t+1) &= u^* + \Delta u_1(t+1) \\ u_2(t+1) &= u^* + \Delta u_2(t+1) \\ &\vdots \\ u_{\tau}(t+1) &= u^* + \Delta u_{\tau}(t+1) \end{aligned}$$

$$u^* + \Delta u_1(t+1) = f(u^* + \Delta u_1(t), \dots, u^* + \Delta u_{\tau+1}(t)) = f(u^*, \dots, u^*) + \sum_{i=1}^{\tau+1} \frac{\partial f}{\partial u_i}(u^*, \dots, u^*) \Delta u_i(t) + o(|\Delta u|)$$

В первом приближении это линейная система  $u(t+1) = Au(t)$ .

**Лемма 2.1.** Собственное значение  $A$  удовлетворяет  $\mu^{\tau+1} = \sum_{i=1}^{\tau} a_i \mu^{\tau-i}$ .

Доказательство. По индукции

База:  $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi(\mu) = \begin{pmatrix} a_1 - \mu & a_2 \\ 1 & -\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \mu^2 = \mu a_1 + a_2$$

Переход:  $n = n - 1$

$$\begin{vmatrix} a_0 - \mu & a_1 & \dots & a_{\tau-1} & a_{\tau} \\ 1 & -\mu & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\mu \end{vmatrix} = -\mu \left( \mu^{\tau} - \sum_{i=0}^{\tau-1} a_i \mu_i^{\tau-1-i} \right) + a_{\tau}$$

■ Из леммы выше следует:

- Характеристический многочлен  $\mu^{\tau+1} = \sum_{i=1}^{\tau} a_i \mu_i^{\tau-i}$ .

2. Если все  $|\mu_i| < 1$ ,  $i = \overline{1, \tau + 1}$ , то неподвижная точка устойчива
3. Если существует  $|\mu_i| > 1$ , то неподвижная точка неустойчива.

Общий случай:  $u_{t+1} = f(u_t)$ ,  $y_t = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  
Матрица Якоби:

$$A = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right\|_{u=u^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(u^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(u^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(u^*) \end{pmatrix}$$

## 2.1 Падение и взлет численности математической модели популяции жука (tribolium)

У жуков три стадии развития. Обозначим фазы следующим образом:

**L–личинка**  $\longrightarrow$  **P–куколка**  $\longrightarrow$  **A–взрослая особь**

Запишем математическую интерпретацию каждой фазы:

$$\begin{cases} L_{t+1} = bA_t, \\ P_{t+1} = (1 - \eta_l)L_t, \\ A_{t+1} = (1 - \eta_p)P_t + (1 - \eta_A)A_t, \end{cases} \quad \begin{matrix} \eta_l - \text{смертность L} \\ \eta_p, \eta_A - \text{смертность P и A.} \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 1 - \eta_l & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \eta_p & 1 - \eta_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A - \mu E| &= \begin{vmatrix} -\mu & 0 & b \\ 1 - \eta_l & -\mu & 0 \\ 0 & 1 - \eta_p & 1 - \eta_A - \mu \end{vmatrix} = \mu^2(1 - \eta_A - \mu) + b(1 - \eta_p)(1 - \eta_l) = \\ &= \mu^3 - \mu^2 \underbrace{(1 - \mu - \eta_A)}_{<1} - b \underbrace{(1 - \eta_p)}_{<1} \underbrace{(1 - \eta_l)}_{<1} \end{aligned}$$

Поскольку  $b > 1$ , то неподвижная точка  $(0, 0, 0)$  неустойчива.

С учетом каннибализма модель можно описать так:

$$\begin{cases} L_{t+1} = bA_t e^{-C_{ea}A_t - C_{al}L_t}, \\ P_{t+1} = (1 - \eta_l)L_t, \\ A_{t+1} = (1 - \eta_p)P_t e^{-C_{pa}A_t} + (1 - \eta_A)A_t. \end{cases}$$

Причем  $C_{ea} = 0.009$ ,  $C_{al} = 0.012$ ,  $C_{pa} = 0.004$ ,  $\eta_l = 0.267$ ,  $\eta_p = 0$ ,  $\eta_A = 0.0036$ ,  $b = 7.48$

### 3 Непрерывные системы

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x), & i = \overline{1, n}, \\ x_i(0) = x_i^0 \end{cases} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{— автономная система.}$$

Будем называть  $\Omega$  фазовым пространством, а множество  $\{x(t, x^0)\}$  — фазовой кривой, и также будем считать, что  $f \in C^\infty(\Omega)$ .

#### 3.1 Свойства автономных систем

Запишем еще раз вид автономной системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), & x \in D \subset \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (3.1)$$

- Если  $x = \psi(t)$  удовлетворяет 3.1,  $\psi$  — гладкая, то  $\bar{x} = \psi(t) + C$  — тоже решение  $\forall C = \text{const}$ .

Доказательство.  $\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\psi(t+C)}{dt} = \frac{\psi(t+C)}{d(t+C)} = f(\psi(t+C))$ , т.к.  $\frac{d\psi}{dt} = f(\psi(t))$

■

- Фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Доказательство. Пусть  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  — точка, через которую проходят две фазовые кривые  $\Rightarrow \exists x_1 = \varphi(t; x^0), x_2 = \psi(t; x^0)$  — решения системы:  $\exists t_1, t_2 : \varphi(t; x^0) = \psi(t; x^0)$ .

Проектируем  $x_1, x_2$  на фазовую плоскость так, чтобы они пересеклись в  $x^0$ . Пусть теперь  $\chi(t; x^0) = \varphi(t+(t_1-t_2); x^0)$ , тогда  $\chi$  является решением по первому свойству.

$\chi(t_2; x^0) = \varphi(t_1; x^0) = \psi(t_2; x^0) \Rightarrow$  в точке  $t_2$   $\chi$  и  $\psi$  проходят через  $x^0 \Rightarrow$  по теореме о единственности кривые совпадают, значит  $\varphi = \psi$ .

- Точка  $a \in D \subset \mathbb{R}^n$  называется неподвижной точкой, если  $f_i(a) = 0, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow$  неподвижная точка является фазовой траекторией.

$$x_i = a_i, \quad \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad f_i(a) = 0.$$

- Всякая фазовая траектория автономной динамической системы может принадлежать одному из трех типов кривых: гладкая кривая без самопересечений, цикл, точка.

- Если фазовая траектория — цикл, то отвечающее ей решение периодическая функция.

Доказательство. Пусть  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), i = \overline{1, n}, x_i(0) = a_i$ . Тогда  $x = \psi(t), a = \psi(0)$ .

$$dS = \sqrt{(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{dt}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2} = |f(\psi(t))|$$

Получили, что  $dS = |f(\psi(t))|dt$ , длина:

$$l(t) = \int_0^t ds = \int_0^t |f(\psi(t))|dt \geq mt.$$

Неподвижная точка ( $|f(\psi(t))| = 0$ )  $\notin \sum$ , т.к. это противоречило бы свойству 2, то есть  $|f(\psi(t))| \neq 0, x \in \sum; m \leq |f(\psi(t))| \leq M, m > 0$ .

Пусть  $L$  – длина замкнутой фазовой траектории. Имеем:  $l(t)$  возрастает,  $l(t) \leq L$ . Тогда

$$\exists T : l(T) = L \Rightarrow L = \int_0^T |f(\psi(t))|dt$$

■

Рассмотрим следующий пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = R^2.$$

$$\int_0^T \sqrt{x_1^2 + x_2^2} dt = \int_0^T R dt = RT \Rightarrow 2\pi R = RT \Rightarrow T = 2\pi.$$

#### 6. Групповое свойство

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x), & x \in D \subset \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad x = x(t; x^0) \text{ – решение}$$

Пусть  $t_1, t_2 > 0 \Rightarrow x(t_1 + t_2; x_0) = x(t_1; x(t_2, x^0)) = x(t_2; x(t_1, x^0))$ .

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= x(t; x(t_1; x^0)) & \varphi_1(0) &= x(0; x(t_1; x^0)) = x(t_1; x^0), \\ \varphi_2(t) &= x(t + t_1; x^0) & \varphi_2(0) &= x(t_1; x^0). \end{aligned}$$

Получаем, что решения совпадают при  $t = 0 \Rightarrow$  совпадут при  $t = t_2$ , в силу единственности

$$x(t_2; x(t_1, x^0)) = x(t_1 + t_2; x^0)$$

■

#### 7. Гладкая неявно заданная замена переменных

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), x \in D \subset \mathbb{R}^n, x_i = \psi_i(y_1, \dots, y_n)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} = f(\psi(y_1, \dots, y_n))$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \ddots & & \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть  $\exists \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)^{-1} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} = f(\psi(y)), \quad \frac{dy}{dt} = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)^{-1} f(\psi(y))$

**Теорема 3.1** (Теорема о выпрямлении векторного поля). *Пусть  $a$  не особая точка динамической системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

*Тогда в достаточно малой окрестности точки  $a$ , существует невырожденная замена переменных  $x_i = \psi_i(y_1, \dots, y_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , которая переводит систему в систему вида:*

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_2}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0, \quad \frac{dy_n}{dt} = 1.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем полагать  $|f_n(a)| \neq 0$ , т.е.  $f_n(a_1, \dots, a_n)$ . Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) \\ x_1(0) = \xi_1, \dots, x_{n-1}(0) = \xi_{n-1}, x_n(0) = a_n \end{cases}$$

Обозначим за  $a'$  и  $\xi'$

$$a' = (a_1, \dots, a_{n-1}), \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in U_{a'}$$

Для всех  $\xi'$  сопоставим соответствующую траекторию, т.е.  $\xi' \longleftrightarrow \psi(t; \xi') = x(t)$ . Пусть  $y_1 = \xi_1, \dots, y_{n-1} = \xi_{n-1}, y_n = t$  и сделаем следующую замену:  $x(t) = \psi(y_n, y')$ ,  $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ .

Проверим, что такая замена переменных невырожденная. В силу задачи Коши имеем:

$$\begin{aligned} \psi_i(0; \xi') &= \psi_i(0, y') = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \psi_n(0; \xi') &= \psi(0, y') = a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} &= \frac{\partial \psi(0; \xi')}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_k} &= 0, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} = \frac{d\psi_n}{dt} = f_n(a) \neq 0 \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_n(a) \end{pmatrix} \Rightarrow \exists J^{-1}$$

■

Таким образом структура фазовой траектории в окрестности любой точки, не являющейся положением равновесия, тривиальна. При подходящем выборе координат фазовая траектория представляет собой пучок параллельных прямых.

### 3.2 Теорема Лиувилля о скорости изменения фазового объема

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n & D_t = \{x = x(t; y) \mid y \in D_0\} \\ x(0) &= y, & y \in D_0 \subset \Omega & V_0 = |D_0|, V_t = |D_t| \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим связь  $x = x(t; y)$ . Введем матрицу

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(t; y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t; y)}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(t; y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t; y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

где  $\frac{\partial x_i(t; y)}{\partial y_j}$  – матрица чувствительности компонент к изменению начальных данных.

Введем также матрицу Якоби

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Лемма 3.1** (Уравнение в вариациях). *Пусть задано (3.2), тогда справедливо следующее матричное уравнение*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right) \quad (3.3)$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_k(t; y)}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{d}{dt} (x_k(t; y)) = \frac{\partial}{\partial y_i} f_k(x(t; y)) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_s} \frac{\partial x_s(t; y)}{\partial y_i}.$$

Полученное выражение и есть покомпонентная запись (3.3). ■

**Лемма 3.2** (Лиувилля о дифференцировании определителя). *Пусть имеется матрица  $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ , тогда*

$$\frac{d}{dt} |A(t)| = |A(t)| \operatorname{tr} \left( \frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t) \right) \quad (3.4)$$

Доказательство.

Пусть  $a_{ij}(t + \Delta t) = a_{ij}(t) + a'_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $\frac{dA}{dt} = \|a'_{ij}(t)\|$ ,  $i, j = \overline{1, n}$

Обозначим  $B = (\frac{dA}{dt} A^{-1}) = b_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$

$$|E + B \Delta t| = \begin{vmatrix} 1 + b_{11} \Delta t & \dots & b_{1n} \Delta t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} \Delta t & \dots & 1 + b_{nn} \Delta t \end{vmatrix}$$

Тогда запишем

$$\begin{aligned} |A(t + \Delta t)| &= |A(t) + \frac{dA}{dt} \Delta t + o(\Delta t)| = |E + \Delta t \frac{dA}{dt} A^{-1}(t) + o(\Delta t)A(t)| = \\ &= |E + \Delta t \underbrace{\left( \frac{dA}{dt} A^{-1}(t) + o(\Delta t) \right)}_{B(t)} |A(t)| = (1 + \Delta t \underbrace{(b_{11} + \dots + b_{nn})}_{\text{tr } B} + o(\Delta t))|A(t)| \end{aligned}$$

Получаем

$$\frac{|A(t + \Delta t)| - |A(t)|}{\Delta t} = \frac{|A(t)| \text{tr} \left( \frac{dA}{dt} A^{-1}(t) \right) \Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Полученная дробь сходится к (3.4). ■

**Теорема 3.2** (Лиувилля). Пусть задано (3.2)  $\Rightarrow \frac{dV_t}{dt} = \int_{D_t} \operatorname{div} f(x) dx_t$ .

$$\operatorname{div}(\underbrace{f_1(x), \dots, f_n(x)}_{\text{вектор}}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}}_{\text{скаляр}}$$

Доказательство.

$$dx_t = dx_1(t; y) \dots dx_n(t; y) = \{x_1(t; y) \dots x(t; y) \rightarrow y_1 \dots y_n\} = \left| \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right| dy_1 \dots dy_n$$

Выражение для  $V_t$  перепишется следующим образом:

$$V_t = \int_{D_t} dx_1(t; y) \dots dx_n(t; y) = \int_{D_0} \left| \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right| dy_1 \dots dy_n$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_t}{dt} &= \int_{D_0} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right| dy_1 \dots dy_n = \{\text{лемма 3.2}\} = \int_{D_0} \operatorname{tr} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right)^{-1} \right) \cdot \\ &\cdot \left( \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right) dy = \{\text{лемма 3.1}\} = \int_{D_0} \operatorname{tr} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right)^{-1} \right) \left( \frac{\partial x(t; y)}{\partial y} \right) dy = \\ &= \int_{D_t} \operatorname{tr} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx_t = \int_{D_t} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_t = \int_{D_t} \operatorname{div} f(x) dx_t \end{aligned}$$

■

Рассмотрим систему, определенную в области  $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in D \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (3.5)$$

**Определение 3.1.** Точку пространства  $a \in D$  такую что  $f(a) = 0$ , или другими словами  $f_i(a) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , называют *положением равновесия* для системы (3.5).

Для изолированных положений равновесия вводится классификация:

**Определение 3.2.** Положение равновесия  $a$  называют *устойчивым по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x^0 \in D, |x^0 - a| < \delta \text{ верно } |x(t; x^0) - a| < \varepsilon, \forall t > 0.$$

**Определение 3.3.** Положение равновесия  $a$  называют *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если

1. положение равновесия  $a$  устойчиво по Ляпунову;
2.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x^0) = a$ .

**Определение 3.4.** Положение равновесия, которое не является устойчивым, называют *неустойчивым по Ляпунову*

Прежде чем перейти к классификации положения равновесия, рассмотрим пример.  
**Пример 1**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^4 \end{cases}$$

Исключая  $t$ , что можно сделать в силу автономности системы, получим

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{x^2}{y}.$$

Траектории данной системы отображены на рисунке 3.1.

### 3.3 Классификация положений равновесия

Строгую классификацию положений равновесия можно провести только для двумерного пространства, так как для пространств большей размерности ситуация заметно усложняется, что мы увидим чуть позже. Поэтому теперь будем рассматривать частный случай системы (3.5), а именно линейную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (3.6)$$

которую также можно записать в виде

$$\dot{x} = Ax. \quad (3.7)$$

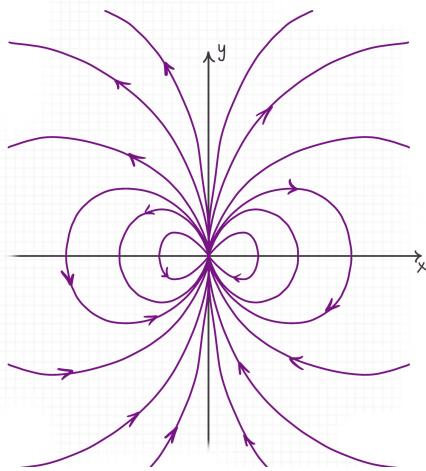


Рис. 3.1: Траектории системы из примера.

Заметим, что условием единственности положения равновесия  $(0, 0)$  этой системы (а также его изолированности) будет

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.8)$$

Приведем заменой переменных вышеуказанную систему к диагональному виду. Из курса линейной алгебры известно, что в случае наличия двух различных собственных значений (или одного геометрической кратности 2) у матрицы  $A$  существует преобразование с матрицей  $T$  такое, что:

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = T^{-1}AT.$$

При этом

$$x = Ty; T\dot{y} = ATy \Rightarrow \dot{y} = \Lambda y,$$

таким образом, мы можем рассматривать систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \end{cases} \quad (3.9)$$

эквивалентную исходной системе (3.7). Тогда изучение сведется к исследованию поведения траекторий системы (3.9) при различных значениях  $\lambda_1, \lambda_2$ . В случае наличия у матрицы  $A$  только вещественных собственных значений обозначим  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = k$ , при этом если  $\lambda_2 = 0$  будем проводить аналогичные далее изложенным рассуждения, перевернув дробь. Заметим, что одновременно оба собственных значения равными нулю быть не могут в силу условия (3.8).

### • Узел

В случае, когда  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ , то есть  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  или  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ , положение равновесия называется *узлом*. Проинтегрируем систему (3.9):

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{y_1}{y_2} \rightarrow \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = k \right\} \rightarrow \ln|y_1| = k \ln|y_2| + \ln|C| \rightarrow y_1 = Cy_2^k.$$

В данном случае  $k > 0$ . При  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  узел является *неустойчивым*; при  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  — *устойчивым* (асимптотически). Типичное поведение траекторий в данном случае можно увидеть на рисунке 3.2.

Здесь так же уместно рассмотреть случай, когда матрица  $A$  не приводится к диагональному виду, то есть приводится только к виду Жордановой клетки размера 2. Такое происходит, если собственное значение у матрицы одно ( $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ) и его геометрическая кратность равна 1. Тогда существует преобразование, приводящее систему (3.7) к виду:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2. \end{cases}$$

Проинтегрируем ее.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dy_2} &= \frac{\lambda_1 y_1 + y_2}{\lambda_2 y_2} = \frac{y_1}{y_2} + \frac{1}{\lambda} \\ z = \frac{y_1}{y_2} &\rightarrow \left\{ z = z(y_2) \right\} \rightarrow \quad y'_1 = z' y_2 + z \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dy_2} y_2 + z = z + \frac{1}{\lambda} \\ z(y_2) &= \frac{1}{\lambda} \ln|y_2| + \ln|C| \\ y_1 &= y_2 \left( \frac{1}{\lambda} \ln|y_2| + C \right) \end{aligned}$$

При этом, учитывая соотношение  $\lim_{y_2 \rightarrow 0} (y_2 \ln|y_2|) = 0$  получим:

$$\left. \frac{dy_1}{dy_2} \right|_{y_1=0} = \infty.$$

При  $\lambda > 0$  получим неустойчивое положение равновесия, при  $\lambda < 0$  устойчивое. Поведение траекторий данной системы напоминает классический узел, повернутый на 90 градусов, что можно увидеть на рисунке 3.3.

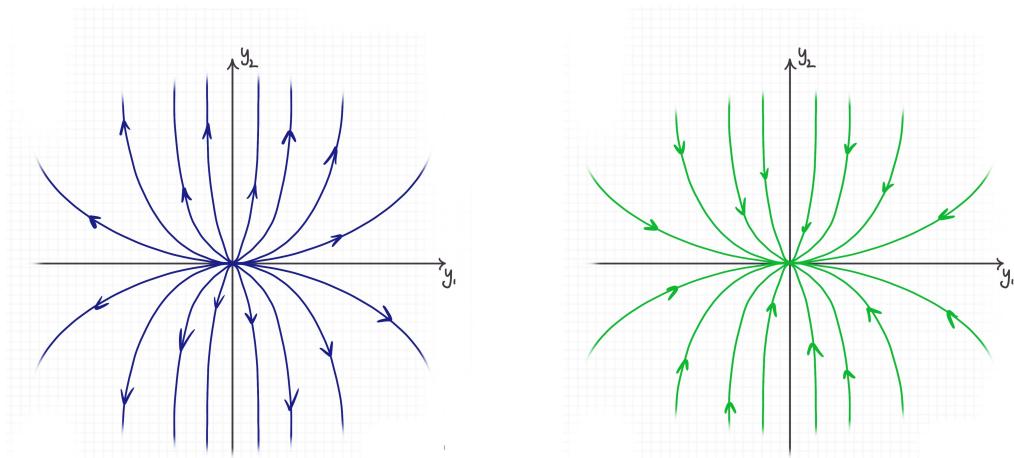


Рис. 3.2: Узел

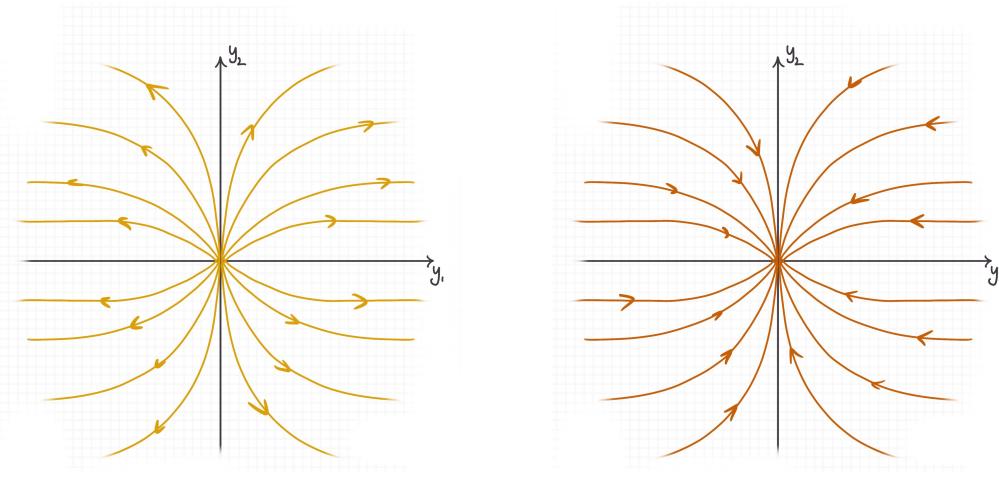


Рис. 3.3: Узел, в случае Жордановой формы

- **Седло**

При  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ , проинтегрировав систему аналогичным способом получим:

$$y_1 = Cy_2^k, \quad k < 0.$$

Получается, что по одному направлению систему «сжимает», по другому «растягивает». При этом оси  $Oy_1, Oy_2$  называются *сепаратрисами седла*. Если  $\lambda_1 > 0$ , то сепаратриса  $Oy_1$  называется *неустойчивой сепаратрисой седла*, в свою очередь при  $\lambda_2 < 0$   $Oy_2$  — *устойчивая сепаратриса седла*. Вид траекторий для различной знакопредопределенности собственных значений можно увидеть на рисунке 3.4.

Заметим, что одно из собственных значений всегда отрицательно для данного случая, поэтому седло — неустойчивое положение равновесия.

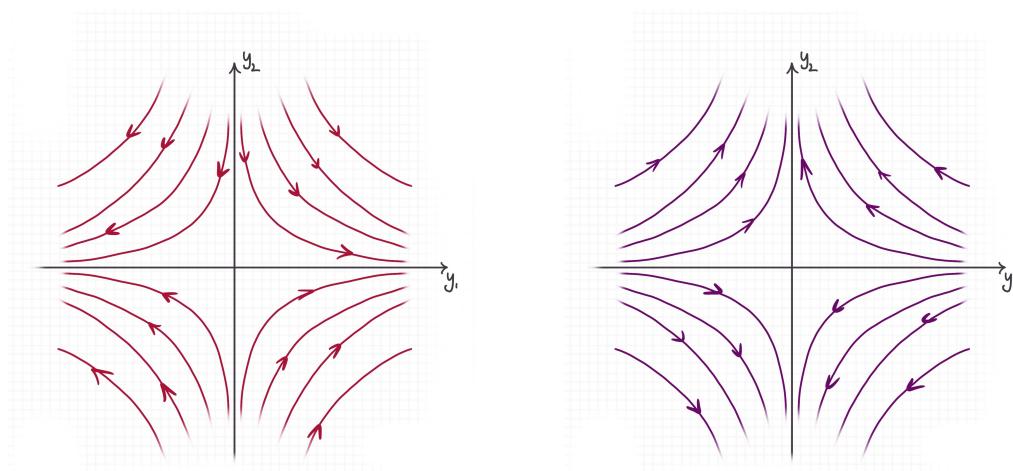


Рис. 3.4: Седла с различными сепаратрисами

- **Фокус**

Ранее мы полагали собственные значения вещественными, теперь перейдем к рассмотрению матрицы системы с комплексными собственными значениями. Тогда  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , и система (3.7) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (\alpha + i\beta)y_1, \\ \dot{y}_2 = (\alpha - i\beta)y_2. \end{cases}$$

Будем рассматривать только одно из уравнений системы, так как

$$\frac{d\bar{y}_2}{dt} = (\alpha - i\beta)\bar{y}_2 \Rightarrow y_1 = \bar{y}_2.$$

Пусть  $\beta > 0$ , сделаем замену  $y_1 = u(t) + i v(t)$  и получим

$$\frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} = (\alpha + i\beta)(u(t) + i v(t)),$$

что равносильно

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \alpha u(t) - \beta v(t), \\ \frac{dv}{dt} = \beta u(t) + \alpha v(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

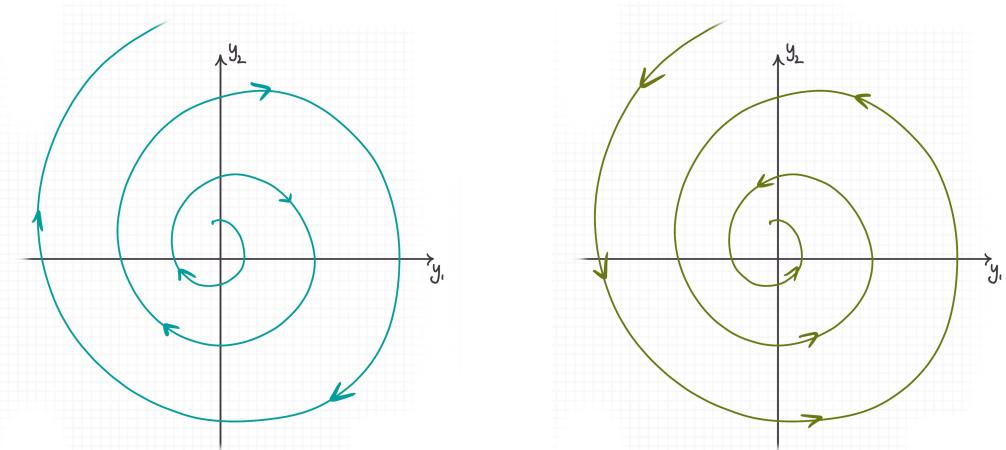
Далее проведем ряд преобразований.

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(t) = r(\varphi)\cos\varphi \\ v(t) = r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1, dr = r' d\varphi \\ \begin{cases} du = (r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)d\varphi \\ dv = (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)d\varphi \end{cases} \Rightarrow \\ \frac{du}{dv} = \frac{\alpha u(t) - \beta v(t)}{\beta u(t) + \alpha v(t)} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} = k \right\} = \frac{ku - x}{u + kv} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}{r'\sin\varphi + r\cos\varphi} = \frac{kr\cos\varphi - r\sin\varphi}{r\cos(\varphi) + kr\sin\varphi} \\ r'(r\cos^2\varphi + kr\cos\varphi\sin\varphi - kr\cos\varphi\sin\varphi + r\sin^2\varphi) = \\ = kr^2\cos^2\varphi - r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos\varphi\sin\varphi + kr^2\sin^2\varphi \\ rr' = kr^2 \rightarrow r' = kr \\ \frac{dr}{d\varphi} r = kr^2 \longleftrightarrow \left\{ \frac{d\varphi}{dt} = 1 \right\} \longleftrightarrow \dot{r} = kr, \quad k = \frac{\alpha}{\beta}, \beta > 0 \end{aligned}$$

Таким образом, система приводится к виду:

$$\begin{cases} u(t) = r(\varphi)\cos\varphi \\ v(t) = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \quad r = C e^{k\varphi}.$$

Если  $\operatorname{Re} \lambda = \alpha > 0$  получаем  $k > 0$ , из чего следует, что траектория со временем удаляется от начала координат. В таком случае положение равновесия классифицируется как *неустойчивый фокус*. При  $\operatorname{Re} \lambda = \alpha < 0$  значение  $k$  отрицательно, и с течением времени траектория приближается к положению равновесия, и мы получаем *устойчивый фокус*. Для обоих видов фокусов типичное поведение траекторий продемонстрировано на рис. 3.5.



(a) Неустойчивый фокус

(b) Устойчивый фокус

Рис. 3.5: Фокус

- **Центр**

Наконец, при наличии у матрицы системы лишь чисто мнимых собственных значений ( $\operatorname{Re} \lambda = \alpha = 0, k = 0$ ) положение равновесия называется *центром*. Центр является примером устойчивой, но не асимптотически устойчивой точки покоя, его изображение можно увидеть на рис. 3.6.

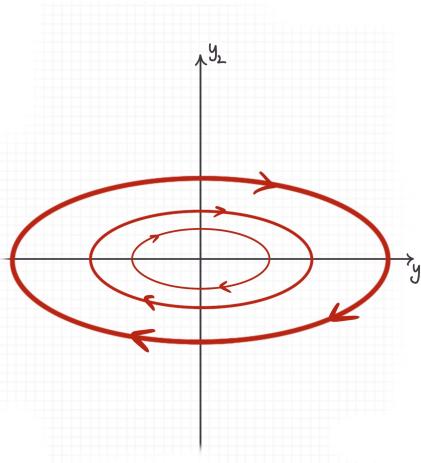


Рис. 3.6: Центр

Подойдем к вопросу устойчивости с другой стороны: попробуем определить вид точки покоя не вычисляя самих собственных значений. Запишем характеристический многочлен матрицы системы  $A$ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 = \lambda^2 - \operatorname{Tr} A + |A|.$$

Тогда собственные значения можно выразить как

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}A \pm \sqrt{(\text{Tr}A)^2 - 4|A|}}{2}.$$

При этом  $\text{Re}\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}A}{2}$ , поэтом условием устойчивости будет

$$\text{Tr}A < 0, |A| > 0.$$

И наконец, чтобы собственный значения были вещественными необходимо и достаточно чтобы

$$|A| < \frac{1}{4}(\text{Tr}A)^2.$$

Полученный результат можно отобразить графически на схеме 3.7.

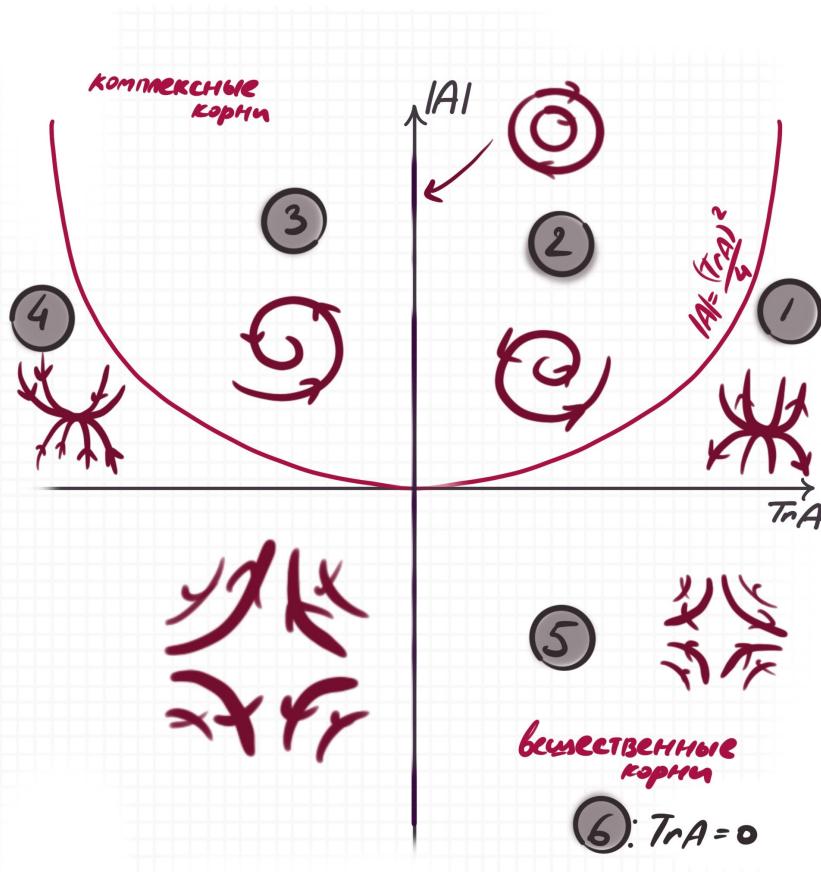


Рис. 3.7: Схема, отображающая зависимость характера точки покоя от значений следа и определителя матрицы линейной системы

В случае нелинейности двумерной системы данная классификация неприменима в точности, однако, полученные выводы легко обобщаются.

*Пример 2.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda x_1^2, & \lambda > 0 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

Приоинтегрируем данную систему, для которой начало координат является положением равновесия.

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\lambda x_1^2}{x_2} \iff \ln|x_2| = \frac{1}{\lambda x_1} + \ln|C| \iff x_2 = C e^{\frac{1}{\lambda x_1}}.$$

Поведение траекторий данной системы напоминает нечто, что можно охарактеризовать как «седлоузел», сами траектории представлены на рисунке 3.8.

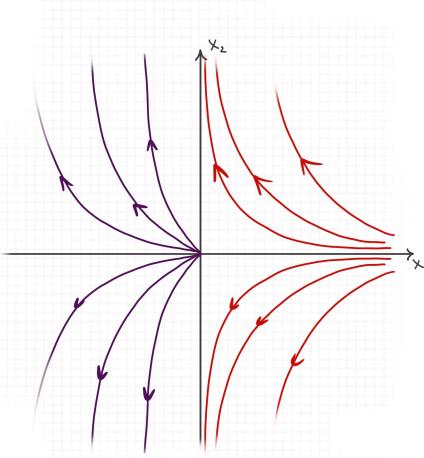


Рис. 3.8: «Седлоузел»

В трехмерном пространстве ситуация сильно усложняется, что можно увидеть на примерах ниже, рис. 3.9. Для упрощения, рассматриваются системы вида

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, i = 1, 2, 3$$

в предположении, что Жордановых клеток у матриц систем нет. На рисунке также изображены схемы расположения собственных значений на вещественной оси/комплексной плоскости.

Для исследования систем, к которым неприменима двумерная линеризация (на которой основана описанная классификация), существует отдельная теория, которая описана ниже.

### 3.4 Теорема Ляпунова об устойчивости

Сначала введем понятие *положительно определенной функции*.

**Определение 3.5.** Функция  $V(x)$  *положительно определена в окрестности точки*  $a$ , если для любого  $x$  из окрестности  $U_a$  точки  $a$

$$V(x) > 0, x \neq a; V(a) = 0.$$

**Определение 3.6.** Положительно определенная в окрестности  $U_a$  неподвижной точки  $a$  системы (3.5), гладкая функция (из  $C^1(D)$ ) называется *функцией Ляпунова системы* (3.5), если

$$\dot{V}(x) = \langle f(x), \nabla V(x) \rangle \leq 0, x \in U_a, \text{ где}$$

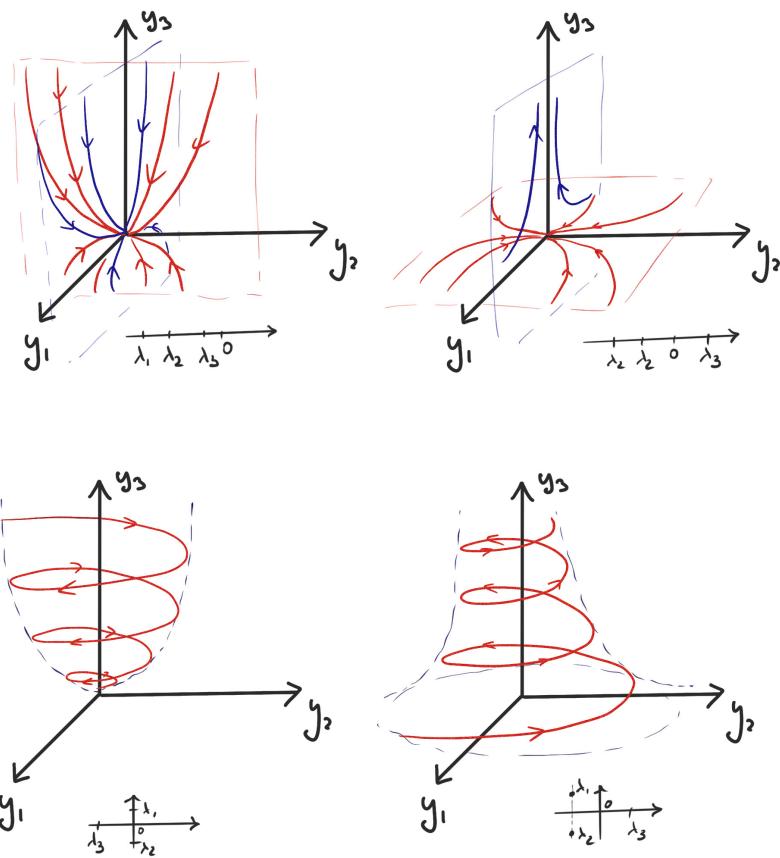


Рис. 3.9: Примеры траекторий систем в трехмерном пространстве

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

Следующие теоремы позволяют установить устойчивость или неустойчивость положения равновесия путем нахождения специальной функции для рассматриваемой системы, что зачастую является непростой задачей, однако однозначно приводит к ответу на вопрос о характере устойчивости особой точки.

**Теорема 3.3. Ляпунова об устойчивости** (*Первая теорема Ляпунова об устойчивости*)

Если в некоторой окрестности положения равновесия  $U_a$  существует функция Ляпунова, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

**Доказательство.** Пусть  $a = 0$  (иначе сделаем замену  $\tilde{x} = x - a$ ).

Покажем, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : |x^0 - a| < \delta : |x(t, x^0)| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим шар  $B_\varepsilon = \{x : |x| \leq \varepsilon\}$ . Тогда  $\partial B_\varepsilon = S_\varepsilon$  — замкнутая область. Следовательно, если функция Ляпунова  $V(x)$  существует, то она достигает своих максимума и минимума на  $S_\varepsilon$ , поэтому

$$\min_{x \in S_\varepsilon} V(x) = m > 0.$$

Рассмотрим  $B_\delta = \{x : |x| \leq \delta\}$ . Так как  $V(0) = 0$ , можно выбрать настолько маленькое  $\delta$ , что:  $V(x) < m, x \in B_\delta$ . Возьмем  $x^0 \in B_\delta$ . Так как  $\dot{V}(x) \leq 0$ , по Лемме (о производной вдоль траекторий системы)  $V$  убывает вдоль траекторий системы. Значит,  $V(x(t, x^0)) \leq m$ , или другими словами траектория, выпущенная из  $x^0$ , не покидает шар  $B_\varepsilon$ . ■

**Теорема 3.4. Ляпунова об асимптотической устойчивости (Вторая теорема Ляпунова об устойчивости)**

Если в некоторой окрестности положения равновесия  $U_a$  существует функция Ляпунова, при этом  $\dot{V}(x) < 0$  в этой окрестности ( $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U_a \setminus \{a\}$ , возможно  $\dot{V}(a) = 0$ ). Тогда положение равновесия асимптотически устойчиво.

Доказательство.  $\dot{V}(x(t; x^0)) = w(t) > 0 \Rightarrow$  пусть  $\lim_{t \rightarrow \infty} = A \geq 0$ , если  $A = 0$  тогда автоматически получаем асимптотическую устойчивость. Предел существует, так как  $\dot{V}(x) < 0$ , то есть  $V(x)$  убывает вдоль траекторий системы, будучи положительно определенной функцией.

Рассмотрим случай  $A > 0$ : поинтересуемся поведением  $x$  из множества  $A = \{x : \alpha \leq |x| \leq \varepsilon\}$ . Так как функция убывает на траекториях получим, что на  $A$ , замкнутом и ограниченном множестве,  $\dot{V}(x) < -m, m > 0$ . Тогда

$$\int_0^t \dot{V}(x) dx < -mt + c,$$

$$V(x(t)) - V(0) < -mt + c, \quad V(0) = 0,$$

устремим  $t$  к бесконечности  $V(x(t)) < 0$ , что является противоречием с определением  $V(t)$  как положительно определенной функции. Значит  $A = 0$ , и точка покоя асимптотически устойчива. ■

В основном теоремы Ляпунова используют применительно к нелинейным системам, предварительно сделав замену координат так, чтобы положение равновесия было в начале координат. Наиболее часто употребимый вид функции Ляпунова таков:

$$V(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Если выполнено условие  $a_{12}^2 - a_{22}a_{11} < 0$ , то  $V(x)$  положительно определена.

Пример 3.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

Для данной системы положим  $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ . Тогда

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2(-x_1 - x_2^3) = -x_2^4 \leq 0,$$

то есть система устойчива, но не обязательно асимптотически устойчива. Обратимся к «спорному случаю»:

$$x_2 = 0 \rightarrow \dot{x}_1 = 0, x_1 = 0 \rightarrow x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0,$$

значит, начало координат является асимптотически устойчивым.

*Пример 4.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 2x_1x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

Здесь нужно выбрать  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^4$ , с помощью нее можно показать, что система асимптотически устойчива в нуле.

**Теорема 3.5. Четаева о неустойчивости**

*Рассматривается система*

$$\dot{x} = f(x), f(a) = 0$$

*Пусть кривая  $\gamma$  такова, что  $a \in \gamma : V(x) > 0, \dot{V}(x) > 0, x \in U_1; \dot{V}(x)|_{x \in \gamma} = 0$ . Тогда  $a$  – неустойчивое положение равновесия.*

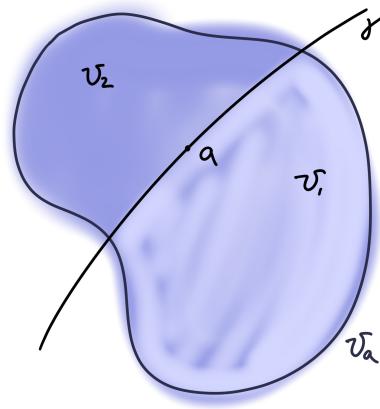


Рис. 3.10: Области, упомянутые в теореме Четаева

*Пример 5.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^2x_2 \end{cases}$$

Рассмотрим  $V = x_1^2 + x_2^2$  и где  $\gamma = \{x_2 = 0\}$ .

$$\dot{V} = 2x_1(x_2 + x_1x_2^2) + 2x_2(-x_1 + x_1^2x_2) = 2x_1x_2 + 2x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2^2 = 4x_1^2x_2^2$$

## 4 Теорема Ляпунова–Пуанкаре об устойчивости о первому приближению

Мы рассматриваем следующую систему и точку равновесия

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x^0, x \in D. \end{cases} \quad f(a) = 0, a \in D. \quad (4.1)$$

Каждую компоненту  $f$  можно разложить в окрестности неподвижной точки  $a$  в вид

$$f_i(x) = f_i(a) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a)(x_i - a_i) + \bar{o}(\rho), \quad \text{где } \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^2}.$$

Вспомнив, что значение функции  $f$  в неподвижной точке равно нулю, а также сделав замену переменной получим

$$\frac{dy}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} \cdot y + \bar{o}(\rho), \quad y = x - a.$$

*Замечание 4.1.* В этом разделе мы обозначаем через  $\frac{\partial f}{\partial x}$  следующую матрицу:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

**Лемма 4.1.** Пусть  $A$  – матрица с эйордановыми клетками, тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такая матрица  $T_\varepsilon$ , что

$$T_\varepsilon^{-1} A T_\varepsilon = \Lambda + B_\varepsilon, \quad \text{где } |b_{ij}| < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Из курса «Линейной алгебры» знаем, что существует матрица  $P$  такая, что

$$P^{-1} A P = J = \begin{pmatrix} [J_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [J_m] \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим следующие матрицы:

$$\dim J_k = k : J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad R_k = \text{diag}(a_1, \dots, a_k).$$

**Пример 4.1.** Рассмотрим частный случай перемножения матриц для  $k = 3$ .

$$R_3^{-1} J_3 R_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3 & r_1^{-1} r_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & r_2^{-1} r_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

В таком случае, чтобы удовлетворить условию леммы, достаточно решить систему

$$\begin{cases} r_1^{-1}r_2 = \varepsilon \\ r_2^{-1}r_3 = \varepsilon \end{cases}$$

В общем случае получается так же, а значит

$$R_k^{-1}J_kR_k = \Lambda_k + B_k^\varepsilon.$$

Теперь можем построить матрицу

$$T_\varepsilon = PR, \quad \text{где } R = \begin{pmatrix} [R_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [R_m] \end{pmatrix}.$$

И получить

$$T_\varepsilon^{-1}AT_\varepsilon = (PR)^{-1}A(PR) = R^{-1}P^{-1}APR = R^{-1}JR = \Lambda + B_\varepsilon.$$

■

**Лемма 4.2.** Линейная система  $\dot{x} = Ax$  является асимптотически устойчивой тогда и только тогда, когда все вещественные части собственных значений матрицы  $A$  меньше нуля.

Доказательство. Для диагональной матрицы  $A$  очевидно, поэтому рассмотрим недиагональную матрицу.

$$\dot{x} = Ax, \quad x = T_\varepsilon y \implies T_\varepsilon \dot{y} = AT_\varepsilon y, \quad \dot{y} = (T_\varepsilon^{-1}AT_\varepsilon)y = \Lambda y + B_\varepsilon y.$$

$$V(y) = \sum_{k=1}^n |y_k|^2 = \langle y, \bar{y} \rangle.$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= \frac{d}{dt} \langle y, \bar{y} \rangle = \left\langle \frac{dy}{dt}, \bar{y} \right\rangle + \left\langle y, \frac{d\bar{y}}{dt} \right\rangle = \\ &= \langle (\Lambda + B_\varepsilon)y, \bar{y} \rangle + \langle y, \overline{(\Lambda + B_\varepsilon)y} \rangle = \underbrace{\langle (\Lambda + \bar{\Lambda})y, \bar{y} \rangle}_{J_1} + \underbrace{\langle B_\varepsilon y, \bar{y} \rangle + \langle y, B_\varepsilon \bar{y} \rangle}_{J_2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим каждый из кусочков по отдельности:

$$\begin{aligned} J_1 &= \langle (\Lambda + \bar{\Lambda})y, \bar{y} \rangle = 2 \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{Re} \lambda_i y_i, \bar{y}_i \rangle \leqslant \\ &\quad \{ \text{Если } \operatorname{Re} \lambda_i \leqslant -\alpha < 0 \} \\ &\leqslant -2\alpha \sum_{i=1}^n y_i \bar{y}_i = -2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = -2\alpha V(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2^1 = \langle B_\varepsilon y, \bar{y} \rangle &\leq |\langle B_\varepsilon y, \bar{y} \rangle| = \left| \sum_{i,j=1}^n b_{ij} y_i \bar{y}_j \right| \leq \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}| |y_i| |\bar{y}_j| \leq \varepsilon \sum_{i,j=1}^n |y_i| |\bar{y}_j| = \\
&= \varepsilon \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right) \leq \{ \text{Неравенство К.-Б.} \} \leq \varepsilon n \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \varepsilon n V(y).
\end{aligned}$$

Тогда получается, что

$$\dot{V}(y) \leq -2\alpha V(y) + 2\varepsilon n V(y) = 2(-\alpha + \varepsilon n)V(y) < 0, \quad \text{при } \varepsilon < \alpha/n.$$

Последнее выражение равно нулю только в случае  $y = 0$ . Тогда по 2-й теореме Ляпунова лемма доказана. ■

**Теорема 4.1** (Ляпунов–Пуанкаре). *Положение равновесия (4.1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все вещественные части собственных значений матрицы  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_{x=a}$  отрицательны.*

Доказательство. Ещё раз напомним, что у нас получилось:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_{x=a} \cdot x + g(x), \quad \text{где } \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Сделаем замену  $x = T_\varepsilon y$ , тогда

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{\left(T_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_{x=0} T_\varepsilon\right)}_{\Lambda+B_\varepsilon} + \underbrace{T_\varepsilon^{-1} g(T_\varepsilon y)}_{H(y)}.$$

Заметим, что  $H(y) \leq C\|y\|^2$ . Проведем доказательство по аналогии с предыдущей леммой:

$$\dot{V}(y) = \underbrace{\langle (\Lambda + \bar{\Lambda})y, \bar{y} \rangle}_{J_1 \leq -2\alpha V(y)} + \underbrace{\langle B_\varepsilon y, \bar{y} \rangle + \langle y, B_\varepsilon \bar{y} \rangle}_{J_2 \leq 2\varepsilon n V(y)} + \langle H(y)y, \bar{y} \rangle + \langle y, \overline{H(y)y} \rangle.$$

Оценим последний член равенства:

$$\langle H(y)y, \bar{y} \rangle \leq |\langle H(y)y, \bar{y} \rangle| \leq |H(y)| \cdot |y| \leq C|y|^3.$$

Итого получаем

$$\dot{V} \leq 2(-\alpha + \varepsilon n + C|y|) \cdot V(y) < 0, \quad \text{в достаточно малой окрестности нуля.} \quad ■$$

## 5 Система Лотки–Вольтерры «хищник–жертва»

Одной из первых математических моделей взаимодействующих популяций является система обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенная Вито Вольтеррой (1860–1940, итальянский математик и физик), которая исторически возникла в связи с попыткой объяснить колебания улова рыбы в Адриатическом море. Та же система была

предложена Лоткой несколько ранее. Модель Лотки–Вольтерры описывает взаимодействие двух видов, один из которых является хищником, а другой — жертвой (например, экологическая система караси–щуки или рыси–зайцы).

Если  $N(t)$  — численность жертв,  $P(t)$  — численность хищников в момент времени  $t$ , тогда модель Лотки–Вольтерры имеет вид

$$\dot{N} = aN - bNP, \quad \dot{P} = -dP + cNP, \quad (5.1)$$

где  $a, b, c, d$  — положительные постоянные.

Основные предположения, положенные в основу системы (5.1) характеризуются следующими гипотезами: в отсутствии хищников жертвы размножаются неограниченно ( $\dot{N} = aN$ ); хищники в отсутствии жертв вымирают ( $\dot{P} = -dP$ ); слагаемые, пропорциональные члену  $NP$ , рассматриваются как превращение энергии одного источника в энергию другого (эффект влияния популяции хищников на популяцию жертв заключается в уменьшении относительной скорости прироста численности жертв на величину, пропорциональную численности хищников).

Рассматривая систему (5.1) в качестве математической модели взаимодействующих популяций, естественно считать фазовым пространством множество  $\mathbb{R}_+^2 = \{N, P : N > 0, P > 0\}$ , которое является инвариантным, так как любая траектория, начинаясь в  $\mathbb{R}_+^2$ , не может пересечь линии  $N = 0$  и  $P = 0$ , являющиеся фазовыми кривыми.

Как уже доказывалось ранее, в безразмерных переменных система (5.1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u(1 - v) \\ \dot{v} = \gamma v(u - 1), \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $u(\tau) = \frac{d}{c}N(t)$ ,  $v(\tau) = \frac{b}{a}P(t)$ ,  $\tau = at$ ,  $\gamma = \frac{c}{a}$ .

Система (5.2) имеет две неподвижные точки:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Стандартный линейный анализ показывает, что точка  $(0, 0)$  — седло. Для точки  $(1, 1)$  матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

ее собственные значения  $\lambda_{1,2} = \pm i\gamma$ . Другими словами, положение равновесия  $(1, 1)$  — негиперболическое, и линейный анализ не позволяет сделать вывод о его устойчивости.

Фазовые кривые системы (5.2) являются интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dv}{du} = \gamma \frac{v(u - 1)}{u(1 - v)},$$

решение которого

$$\gamma u + v - \ln u^\gamma v = H, \quad (5.3)$$

где  $H > H_{\min} = 1 + \gamma$ , где  $H_{\min}$  — минимум функции  $H(u, v)$ , который достигается в точке  $u = 1, v = 1$ . Действительно,  $H'_u(1, 1) = 0$ ,  $H'_v(1, 1) = 0$  и  $H''_{uu}(1, 1) < 0$ ,  $H''_{uv}(1, 1) = 0$ ,  $H''_{vv}(1, 1) < 0$ . Легко проверить, что  $L_t H(u, v) = 0$  и, следовательно, функция  $H(u, v)$  задает первый интеграл системы (5.2). Анализируя линии уровня функции  $H(u, v)$ , можно показать, что для любых  $H > H_{\min}$  они являются замкнутыми кривыми. В общем случае анализ линий уровня функции  $H(u, v)$  достаточно сложен.

Основной недостаток системы (5.2) как математической модели экологической системы заключается в ее структурной неустойчивости: малое изменение правых частей (5.2)

в метрике соответствующего пространства функций может приводить к качественному изменению поведения решений.

**Утверждение 5.1** (Принцип Вольтерры). *Если в системе хищник–жертва, описываемой моделью (5.1), оба вида истребляются равномерно и пропорционально числу их индивидуумов, то среднее число жертв возрастает, а среднее число хищников убывает.*

**Доказательство.** Пусть  $N(t)$ ,  $P(t)$  — периодические решения системы (5.1) с периодом  $T$ . Из (5.1) следует, что

$$\frac{d}{dt} \ln N = a - bP, \quad \frac{d}{dt} \ln P = -d + cN.$$

Интегрируя последние равенства по  $t$  в промежутке от 0 до  $T$ , получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{a}{b}, \quad \frac{1}{T} \int_0^T N(t) dt = \frac{d}{c},$$

так как  $N(T) = N(0)$ ,  $P(T) = P(0)$ . То есть среднее число жертв и хищников остается постоянным и равным координатам нетривиального положения равновесия (5.1). Если оба вида истребляются равномерно и пропорционально числу их индивидуумов, то у жертв уменьшается коэффициент рождаемости  $a$ , который становится равным  $a - \delta_2$ , а у хищников увеличивается коэффициент смертности  $d$ , который становится равен  $d + \delta_1$ , другими словами, среднее число жертв равно  $(a - \delta_2)/b$ , а среднее число хищников —  $(d + \delta_1)/c$ .

■

Описанный выше эффект наблюдается в природе. Например, во время первой мировой войны лов рыбы в Адриатическом море был сильно сокращен, что, к удивлению биологов, привело к увеличению числа хищников и уменьшению числа жертв. Кроме всего прочего, принцип Вольтерры показывает двойственный характер применения средств от насекомых для сохранения урожая на полях. Почти все такие химические вещества действуют не только на вредителей, но и на их естественных врагов, что зачастую приводит к увеличению числа вредителей и уменьшению, например, числа птиц, питающихся этими вредителями. Отметим также, что принцип Вольтерры впервые теоретически показал, что в экосистеме «хищник–жертва» популяция жертв более чувствительна к процессу пропорционального уменьшения особей в популяции.

## **Список литературы**

- [1] К. В. Воронцов. *Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X в примерах*. — М.: МЦНМО, 2005.