Построение параллельных алгоритмов для решения задачи быстродействия с фазовыми ограничениями

студент 5 курса К. Ю. Егоров
научный руководитель — к.ф-м.н., доцент И. В. Востриков

Кафедра системного анализа

28 мая 2022 г.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\dot{x} = f(t, x, u), \text{ где } x = [x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2].$$

Фазовые ограничения

$$[x_1, x_2] \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Минимизируем функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u)\, dt \to \min_u .$$

Необходимо решать уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\min_{u \in U} \left\{ g(x, u) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \right\} = 0.$$

Дискретизация задачи

Введем равномерную сетку

$$\Xi = \left\{ (x_i, y_j) \in \Pi, x_i = \varepsilon \frac{i}{N}, y_j = \varepsilon \frac{j}{M} \right\}, \text{ где } \Omega \subseteq \Pi.$$

Возможные переходы для (i, j)

$$\text{possible}(i,j) = \{(i,j) \mid i \in \{i, i \pm 1\}, j \in \{j, j \pm 1\}, (x_i, y_j) \in \Omega\}$$

Предложение. Время перехода не зависит от предыдущей скорости и направления. Обозначим это время за

$$d_{i_{from}, j_{from}}(i_{to}, j_{to}).$$

Неявное матричное уравнение

$$V_{i,j} = \min_{(\hat{i},\hat{j}) \in \text{possible}(i,j)} \{d_{i,j}(\hat{i}, \hat{j}) + V_{\hat{i},\hat{j}}\},$$

$$V_{i_1, j_1} = 0.$$

Алгоритм Беллмана–Форда

1. Изначально все узлы, кроме целевого, промаркированы значением $+\infty$, а целевой — нулем;
2. Необходимо провести $(NM - 1)$ итерации алгоритма;
3. На каждой итерации происходит полный проход по сетке, далее (i, j) — позиция при проходе;
4. Для каждой вершины из возможного множества $(\hat{i}, \hat{j}) \in \text{possible}(i, j)$ происходит перемаркировка: в случае, если $V(i, j) > d_{i,j}(\hat{i}, \hat{j}) + V(\hat{i}, \hat{j})$, перемаркируем

$$V(i, j) \leftarrow d_{i,j}(\hat{i}, \hat{j}) + V(\hat{i}, \hat{j}).$$

Замечание

Оптимальная траектория не может иметь более $(NM - 1)$ перемещения. Таким образом алгоритм действительно ищет кратчайший путь.

Параллельный алгоритм Беллмана–Форда

На центральном процессоре

- Разбиваем сетку на каждой итерации на C (число ядер) подсеток, считающихся параллельно
- Синхронизацию при обработке последнего ряда подсетки осуществляем массивом мьютексов

На графическом процессоре

- Каждый узел считается на отдельном процессоре
- Синхронизация осуществляется за счет того, что проводится не один проход по матрице, а восемь: отдельно для каждого возможного направления движения

На многонодной установке

- Одна мастер программа, LC_l (совокупное число ядер) вычислителей (сервисов, общающихся по http)
- Синхронизация осуществляется за счет передачи мастером минимального инкремента каждому вычислителю

Алгоритм Дейкстры

1. На начало алгоритма в множестве граничных узлов находится только целевой узел.
2. На каждой итерации алгоритма из множества граничных узлов выбирается узел с минимальной маркировкой.
3. Этот узел добавляется в множество обработанных узлов и удаляется из граничного множества.
4. Затем из возможного множества выбираются узлы, которые не находятся в множестве обработанных узлов. Эти узлы добавляются в множество граничных вершин, маркировка таких вершин обновляется.

Алгоритм останавливается в случае, если на некоторой итерации алгоритма был выбран начальный узел (i_0, j_0).

Параллельный алгоритм Дейкстры

Распараллеливанию подвергается самый алгоритмически сложная часть алгоритма — поиск минимума в граничном множестве. Для этого граничное множество представляется в виде C (число доступных ядер процессора) хэш-таблиц. Запись нового узла осуществляется в наименее полную таблицу.

- Для программы на центральном процессоре не требуется дополнительная синхронизация;
- Нет нативного метода, который мог бы поддержать графический процессор, так как взаимодействие с ним осуществляется копированием последовательных страниц памяти. Это потребовало бы использование массива для хранения граничного множества, и в конечном итоге ускорение было бы скомпенсировано операцией удаления из массива;
- Для многонодной установки минимальная инкрементальная информация — это выбранный узел, и узлы, добавленные в граничное множество.

Программное решение

Программы написаны на языке Go

- go routines;
- компилируемый;
- сборка мусора.

Помимо основных алгоритмов написаны:

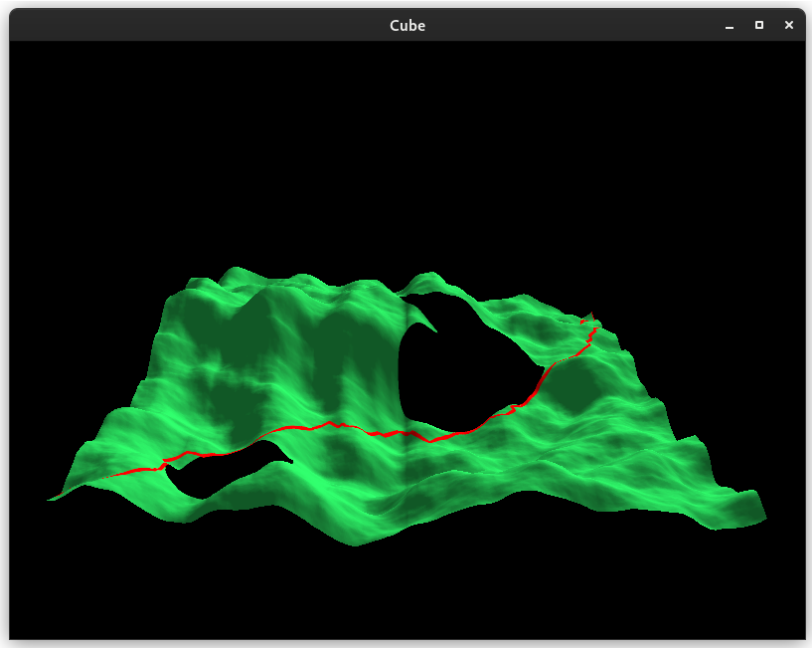
- генератор ландшафта, использующий перлиновый шум;
- визуализатор пути, использующий OpenGL.

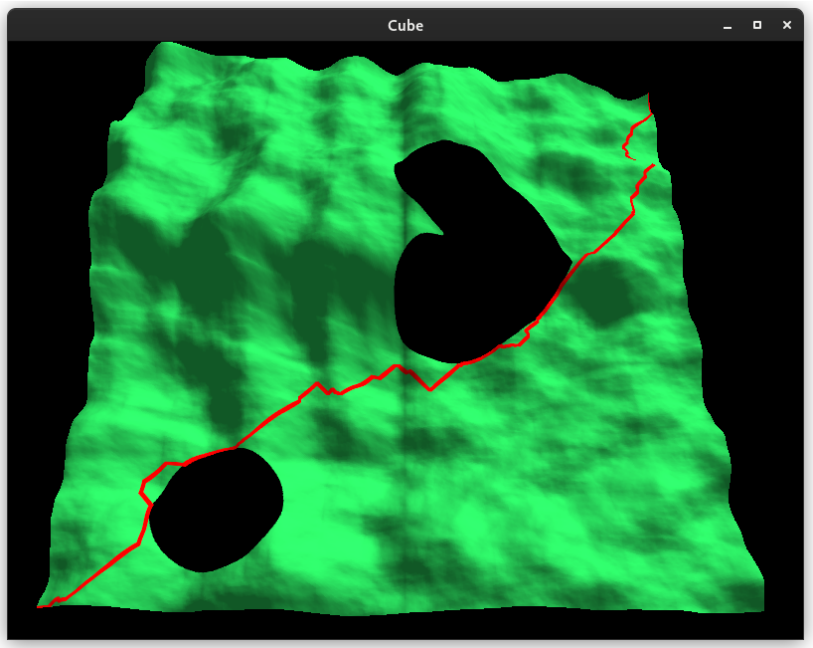
Программы для многонодной установки

- поставляются в виде двух docker-образов: для мастера и вычислителе;.
- тестировалось только на Kubernetes кластере;
- требуют ручного применения Kubernetes манифестов.

Пример 1

Алгоритм Дейкстры из (1, 1) в (1000, 1000)



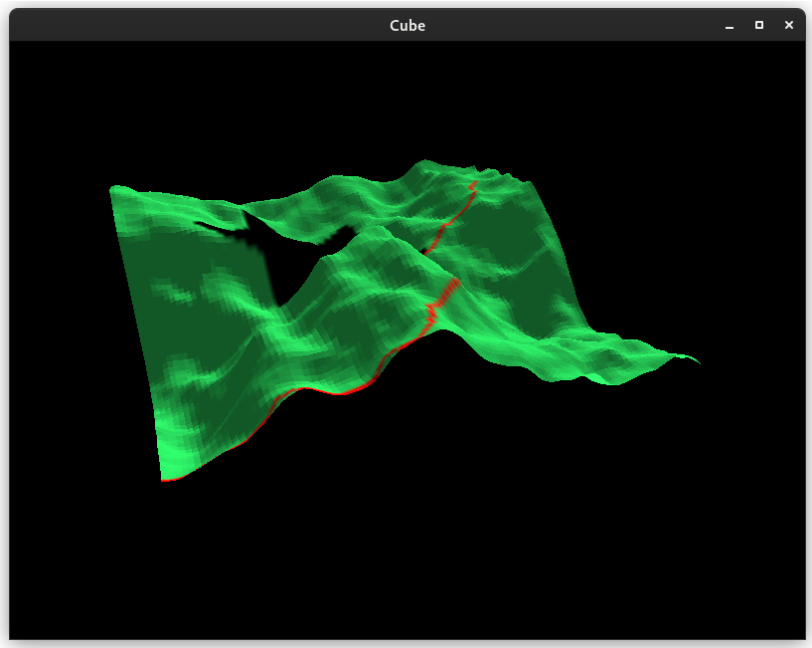


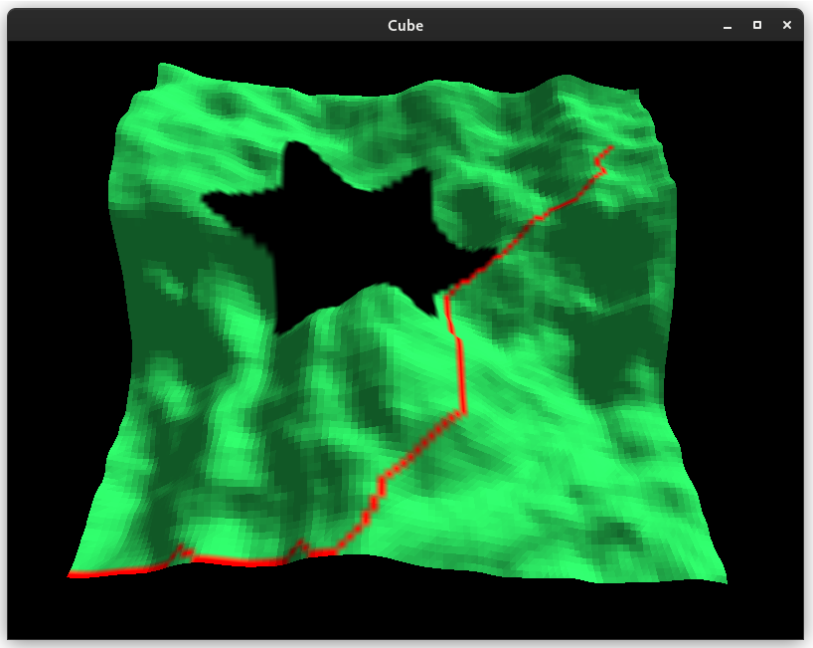
Время перехода

$$d_{i,j}(\hat{i},\hat{j}) = 100 \cdot (\mathrm{height}(\hat{i},\hat{j}) - \mathrm{height}(i,j))_+ + 5.$$

Пример 2

Алгоритм Беллмана–Форда из (1, 1) в (90, 90)





Время перехода

$$d_{i,j}(\hat{i},\hat{j}) = 100 \cdot (\mathrm{height}(\hat{i},\hat{j}) - \mathrm{height}(i,j))_+ + 5.$$

Сравнение времени работы

Время работы алгоритма Беллмана–Форда

Сетка	Классический	Парал. однонод.	Парал. многонод.
50×50	2s	700ms	2s
100×100	28s	11s	24s
250×250	14m 17s	4m 56s	10m 24s
500×500	≈4h 50m	≈1h 20m	≈2h 40m

Время работы алгоритма Дейкстры

Сетка	Классический	Парал. однонод.	Парал. многонод.
500×500	2.9	4.5s	19.4s
1000×1000	36s	40s	3m 20s
2500×2500	10m 40s	6m 48s	34m 42s
5000×5000	≈1h 15m	≈39m	≈2h 40m

Литература

1. Беллман Р., Дрейфус С. *Прикладные задачи динамического программирования.* М.: Наука, 1965.
2. Shu-Xi, Wang. *The Improved Dijkstra's Shortest Path Algorithm and Its Application.* Procedia Engineering. 29. 1186-1190. 2012.
3. Glabowski, M., Musznicki, B. *Review and Performance Analysis of Shortest Path Problem Solving Algorithms.* International Journal On Advances in Software. 7. 20-30. 2014.
4. Ведякова А. О., Милованович Е. В. *Методы теории оптимального управления.* М.: Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО. Санкт-Петербург, 2021.