1 Теоремы о предельных значениях

Теорема 1. *Пусть f — непрерывно-дифференцируемая функция и $f(t) \supset F(p)$, существует $f(+\infty)$; тогда $f(+\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p)$.*

Доказательство.

$$f'(t) \supset pF(p) - f(+0)$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(+0)$$

При $p \to 0$ выражение $\to f(+\infty) - f(+0)$.

$$\cos t \supset \frac{p}{p^2+1} \qquad \sin t \supset \frac{1}{p^2+1}$$

$$pF(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \to 0(p \to 0)$$

$$pF(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \to 1(p \to \infty)$$

$$\frac{p}{p^2+1} \to 0(p \to \infty)$$

$\square$

Теорема 2. *Пусть f — непрерывно-дифференцируема; $f(t) \supset F(p)$ и существует $f(+0)$. Тогда $f(+0) = \lim_{p\to +\infty} pF(p)$.*

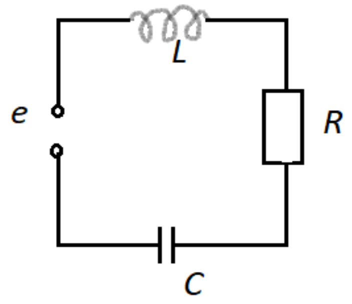
Доказательство.

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(+0)$$

$\square$

2 Приложения преобразования Лапласа к исследованию процессов в электрических цепях

$$i \supset I, \quad e \supset E.$$

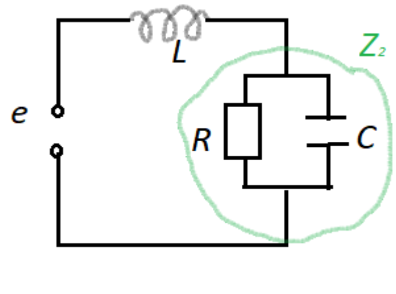


$$U_L = L\frac{di}{dt}$$
$$U_R = Ri$$
$$U_C = \frac{1}{C}\int 0ti(t)\,dt$$

Пусть $i(0) = 0$.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int 0ti(r)\,dr = e(t)$$
$$pLI + RI + \frac{I}{Cp} = E$$
$$(pL + R + \frac{1}{Cp})I = E,$$

$Z = pL + R + \dfrac{1}{Cp}$ — импеданс(операторное сопротивление), $Y = \dfrac{1}{Z}$ — адмитанс.

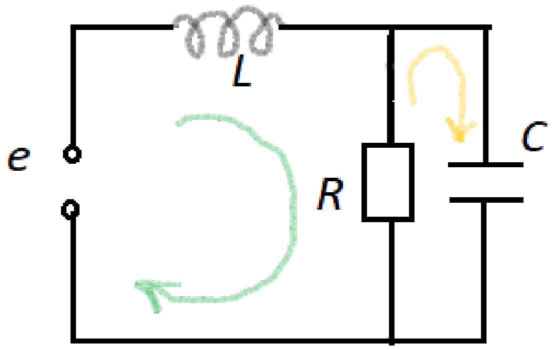


$$Z = Z_1 + Z_2$$
$$\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{Z_2}$$

$$C_p + \frac{1}{R} = \frac{CR_P + 1}{R}$$
$$Z_2 = \frac{R}{CR_p + 1}$$
$$Z = pL = \frac{R}{CR_p + 1}$$

При параллельном соединении:

$$Z_1 ... Z_n;$$
$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} ... Y_n = \frac{1}{Z_n}$$
$$Y = Y_1 + ... + Y_n$$



Рассмотрим схему как двухконтурную(закон Кирхгофа):

$$\begin{cases} pLI_1 + R(I_1 - I_2) = E \\ R(I_2 - I_1) + \frac{1}{Cp} I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_2(R + \frac{1}{Cp}) - RI_1 = 0$$
$$I_2 = \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}} I_1$$
$$I_1 - I_2 = \left(1 - \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}}\right) I_1 = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}} I_1 = \frac{1}{CR_p + 1} I_1$$
$$I_1(pL + \frac{R}{CR_p + 1}) = E$$
$$I_1 Z = E$$

1. Постоянный ток

$$l = l_0 \quad E = \frac{l_0}{p}$$

2. Переменный ток

$$l = l_0 \sin \omega t \quad E = \frac{l_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$(L_p + R + \frac{1}{Cp}) = \frac{l_0}{p}$$

$$I = \frac{l_0}{p} \left(\frac{1}{L_p + R + Cp} \right) = \frac{l_0 Cp}{p(CLp^2 + RCp + 1)} = \frac{l_0}{(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} =$$

$$= \frac{l_0}{(L(p + \frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}}.$$

$$D = C^2 R^2 - 4CL$$

Пусть $C^2R^2 - 4CL < 0 \Rightarrow$ комплексные корни.

$$\frac{l_0}{(L(p + \frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}} = \frac{l_0 C}{CLp^2 + \frac{2\sqrt{CL}}{2\sqrt{CL}} + \frac{(CR)^2}{4CL} - \frac{CR^2}{4CL} + 1} =$$

$$= \frac{Cl_0}{(\sqrt{CL}p + \frac{CR}{4\sqrt{CL}})^2 - \frac{CR^2}{4CL} + 1} = \frac{l_0 C / CL}{(p + \frac{R}{2L})^2 + \frac{1 - \frac{CR^2}{4L}}{CL}}$$

$$\frac{l_0}{L(p + \frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}} = \frac{l_0 / L}{(p + \frac{R}{2L})^2 + (\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})} < e^{-\frac{R}{2L}t} \frac{l_0}{L} \sin \frac{\sqrt{(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})t}}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$