Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Конспект лекций

«Преобразования Лапласа и Фурье»

Лектор
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2019

Содержание

1 Как заполнять документ

Сейчас я расскажу, как максимально быстро собрать лекцию, чтобы никому ничего не сломать. Предлагаю также ориентироваться на этот пример (папка `ch0`). Итак, порядок действий:

1. Скачать себе этот архив.
   Он собирается командой `make` или `pdflatex doc`, если вы используете Windows.

2. Создать в корне вашу папку `chНОМЕРГЛАВЫ`.
   В примере папка `ch0`.

3. Заполнить в этой папке три документа: `doc.tex`, `bib.tex`, `set.tex`, положить туда все ваши картинки и все, что вам нужно.

4. Проверить, что все собралось правильно.

5. Отослать мне на почту `kireku@gmail.com` с темой "ВКР" или, если вы умеете, сделать `pull request`.

1.1 doc.tex

Это файл с вашим текстом. Туда вы пишите лекцию.

Я добавил уже ряд математических операторов. Если вы хотите добавить свои смотри раздел про `set.tex`.

Код	Результат
`\sgn`	sgn
`\const`	const
`\T`	T
`\SetN`	$\mathbb{N}$
`\SetZ`	$\mathbb{Z}$
`\SetQ`	$\mathbb{Q}$
`\SetR`	$\mathbb{R}$
`\SetC`	$\mathbb{C}$
`\Prb`	$\mathbb{P}$
`\Ind`	$\mathbb{I}$
`\Exp`	$\mathbb{E}$
`\Var`	$\mathbb{V}\mathrm{ar}$
`\SetX`	$\mathcal{X}$
`\SetP`	$\mathcal{P}$

Также встроены окружения. Они как в книжке Арама, то есть красивые, не используйте другие.

Код	Результат

`\begin{theorem}`
`        Это теорема.`
`\end{theorem}`
	Теорема 1.1. *Это теорема.*

`\begin{definition}`
`        Это определение`
`        \textit{сходимости}.`
`\end{definition}`
	Определение 1.1. Это определение *сходимости.*

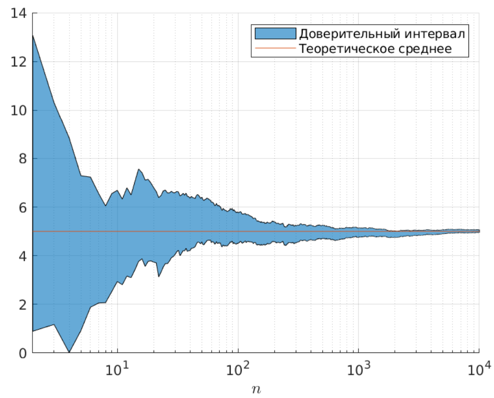
`\begin{lemma}`
`        Это лемма.`
`\end{lemma}`
	Лемма 1.1. *Это лемма.*

`\begin{assertion}`
`        Это утверждение.`
`\end{assertion}`
	Утверждение 1.1. *Это утверждение.*

`\begin{example}`
`        Это пример.`
`\end{example}`
	Пример 1.1. Это пример.

`\begin{proof}`
`        Это доказательство чего-либо.`
`\end{proof}`
	Д о к а з а т е л ь с т в о. Это доказательство чего-либо. ■

Чтобы добавить картинку, положите ее в вашу папку и укажите полный путь:

Код	Результат
`\includegraphics{ch0/example.eps}`	

Используя метки, обязательно ставьте префикс-название папки:

Код	Результат

`\begin{equation}`
`\label{ch0.square}`
`        x^2 = 0.`
`\end{equation}`
	$x^2 = 0. \qquad (1.1)$

1.2 bib.tex

Если вам нужна библиография — сюда можно написать библиографию, она автоматом окажется внизу. Все ссылки, по-прежнему с префиксом.

Содержимое `ch0/bib.tex`

```
\bibitem{ch0.voroncov}
        К.~В.~Воронцов. \textit{\LaTeX в примерах}.~--- М.: МЦНМО, 2005.
```

1.3 set.tex

Если вам жизненно не хватает какой-нибудь суперштуки, которую обычно объявляют в начале файла: новую команду, окружение или что-то в этом духе, то напишите сюда. Но все это пишите с каким-нибудь префиксом.

Например, я очень захотел писать прикольные дроби, типа $\nicefrac{3}{4}$ и новый оператор $\operatorname{Kirill}_{x \in \mathcal{X}}$, тогда я должен туда написать:

Содержимое `ch0/bib.tex`

```
\usepackage{nicefrac}
\DeclareMathOperator{\zeroKir}{Kirill}
```

Но вообще, если вы не уверены, что все не перестанет компилиться, то не стоит подключать пакеты. Пакеты будут действовать на весь документ в целом.

1.4 Заключение

Вообще, было бы круто, чтобы все получилось примерно одинаково и красиво. В библиографии есть книжка хорошая по Латеху, если кому нужна.

1.5 Список приславших

1. Абрамова
2. Авалиани
3. Ашабоков
4. Егоров
5. Кожевец

6. Копосов

7. Кулешов

8. Наумова

9. Садков

2 Преобразование Лапласа-Фурье

2.1 Некоторые сведения из ТФКП

Перед тем, как приступить непосредственно к преобразованиям Фурье, вспомним, для начала, курс ТФКП.

Вспомним как задается функция комплексной переменной:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy$$

Производная в точке z_0:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \text{где } \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

1. $\Delta z = \Delta x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \Rightarrow \exists u_x, v_x : \lim_{\Delta x \to 0} \{\ldots\} = u'_x + iv'_x$$

2. $\Delta z = i\Delta y$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y_0) + iv(x_0, y_0 + \Delta y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \Rightarrow \exists u_y, v_y : \lim_{\Delta y \to 0} \{\ldots\} = -iu'_y + v'_y$$

Условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases}$$

Напомним, что интеграл от функции комплексного переменного вводится (так же, как и в действительной области) как предел последовательности интегральных сумм; функция при этом определена на некоторой кривой Γ, кривая предполагается гладкой или кусочно-гладкой:

$$\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\Delta z_j \longrightarrow \int_\Gamma f(z)dz; \quad \Delta z_j = z_j - z_{j-1},\ \Gamma : z = z(t),\ dz = z'(t)dt,\ t \in [t_0, t_1]$$

Тогда

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[(u'_x - v'_y) + i(v'_x + u'_y)\right] dt = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma vdx + udy$$

Среди интегралов в комплексном анализе важное место в теории и практике интегрирования и приложениях занимает интеграл вида $\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, зависящий от ζ.

В частности, полагая $f(z)$ аналитической в замкнутой области γ, получаем, что для любой точки аналитичности функция может быть записана в виде интеграла

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Аналитическая функция имеет производные любого порядка, для которых справедлива формула
$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$
Теперь дадим определение ряда Лорана необходимого для последующего повествования

Определение 2.1. Ряд
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2.1}$$
называется рядом Лорана функции $f(z)$, если его коэффициенты вычисляются по формуле
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Замечание 2.1. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ – правильная часть ряда Лорана и $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ – главная часть ряда Лорана. При этом, ряд Лорана считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся его правильная и главная части.

Важное место в изучении и применении теории функций комплексного переменного занимает исследование их поведения в особых точках, где нарушается аналитичность функции. В частности, это точки, где функция не определена.

Одной из таких особых точек является полюс.

Определение 2.2. Говорят, что изолированная точка $z_0 \in \overline{C}$ функции $f(z)$ называется полюсом, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Замечание 2.2. Номер старшего члена главной части ряда Лорана функции в ее разложении в окрестности полюса называется порядком полюса. Главная часть ряда Лорана в случае полюса порядка и записывается следующим образом:

а) в случае $z_0 \in \mathbb{C}$ в виде $\sum_{k=-n}^{-1} c_k (z - z_0)^n$, или $\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$, подробнее:
$$c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot z, \quad c_n \neq 0.$$

б) в случае $z_0 = \infty$ в виде:
$$c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot z, \quad c_n \neq 0.$$

Определение 2.3. Вычетом функции f(z) в изолированной особой точке z_0 $(z_0 \in \overline{\mathbb{C}})$ называется интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz$, где γ — контур, принадлежащий окрестности точки z_0 и охватывающий ее.

Теорема 2.1 (Основная теорема о вычетах). *Если функция f(z) – аналитическая в $\overline{D}$ за исключением конечного числа особых точек $z_k \in D$, то справедливо равенство (где C — граница области D):*
$$\oint\limits_{C} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z), \quad z_k \in D. \tag{2.2}$$

Утверждение 2.1. *Вычет функции в изолированной особой точке равен коэффициенту c_{-1} при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, т.е. при* $\dfrac{1}{z-z_0}$ *для* $z_0 \in \mathbb{C}$, *и этому коэффициенту, взятому с противоположным знаком, для* $z_0 = \infty$:

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}, \quad z_0 = \infty.$$

Утверждение 2.2. *Если* z_0 *полюс порядка* n *функции* $f(z)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, *то*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big[f(z) \cdot (z-z_0)^n \big], \quad z_0 - \Pi(n);$$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \big[f(z) \cdot (z-z_0) \big], \quad z_0 - \Pi(1).$$

2.2 Применение вычетов для вычисления интеграла вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} R(x)$

Большой интерес представляет возможность применения вычетов для вычисления несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, где интеграл понимается в смысле главного значения, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ (здесь отрезок $[a,b] = [-R,R]$).

Будем рассматривать функцию $f(x)$, непрерывную на $(-\infty, +\infty)$. Возможность использования вычетов при решении такой задачи основана на том, что отрезок $[-R,R]$ действительной оси рассматривается как часть замкнутого контура C, состоящего из этого отрезка и дуги окружности, а интеграл по контуру записывается в виде суммы:

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz, \text{где } C_R - \text{дуга окружности } |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется как предел:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \oint\limits_C f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz\,.$$

Интерес, с точки зрения применения вычетов, представляют интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, где функция $f(x)$ такова, что $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$. Классы таких функций выделяются, и для всех функций рассматриваемого класса устанавливается формуа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \oint\limits_C f(z)dz$.

Мы же, далее, рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x) = R(x)e^{i\lambda x}$ и $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $m - n \geqslant 1$ и $Q_m(x) \neq 0$, $x \in R$, а $R(x)$ принимает действительные значения. Такой интеграл сходится, так как он может быть записан в виде суммы двух сходящихся интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx\,.$$

Доказательство возможности применения вычетов к вычислению интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx$ основано на следующем утверждении.

Утверждение 2.3 (Лемма Жордана)**.** *Пусть функция f(z) непрерывна в области* $D\,:\,|z| \geqslant R_0,\ \operatorname{Im} z \geqslant -a$ *и* $\lim\limits_{R\to\infty} \max_{C_R} |f(z)| = 0$, *где* C_R *– дуга окружности* $|z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant -a$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *справедливо равенство*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz = 0.$$

Для рассматриваемых в данном пункте интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx$ функция $f(z) = R(z)$ удовлетворяет лемме Жордана. Подводя итог приведенным рассуждениям, запишем следующее утверждение.

Утверждение 2.4. *Пусть* $R(x)$ *– рациональная функция, не имеющая особых точек на действительной оси (т.е.* $Q(x) \neq 0$ *для* $x \in \mathbb{R}$*), для которой точка* $z = \infty$ *– нуль порядка не ниже первого (т.е.* $m - n \geqslant 1$*). Тогда справедливы формулы:*

1. *при* $\lambda > 0$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \big[R(z)e^{i\lambda z}\big], \quad \operatorname{Im} z_k > 0;$$

2. *при* $\lambda < 0$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = -2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} \big[R(z)e^{i\lambda z}\big], \quad \operatorname{Im} z_k < 0;$$

2.3 Ряды и преобразование Фурье

Пусть $f(t)$ – периодическая с периодом $T = 2\pi,\ t \in [-\pi, \pi]$.

$$f(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt\right],$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\;dt, k = 0, 1, \ldots,$$
$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\;dt, k = 1, 2, \ldots.$$

Запишем ряд в наних обозначениях

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikt},\quad c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt,\ c_0=a_0,\ c_k=a_k+ib_k,$$

$c_k e^{ikt}+c_{-k}e^{-ikt}=[a_k-ib_k][\cos kt+i\sin kt]+[a_k+ib_k][\cos kt-i\sin kt]=2a_k\cos kt+2b_k\sin kt.$
Далее, сделаем небольшую замену

$$f(t)\longrightarrow f(s),\ s\in[-T/2,T/2],\ t=\frac{2\pi s}{T}\Rightarrow f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ikt}.$$

Тогда

$$f(s)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{\frac{2\pi is}{T}},\quad c_k=\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(s)e^{\frac{-2\pi isk}{T}}ds.$$

Пусть теперь

$$f_T(t)=f(t),\ \text{но продолженное по периоду}\ t\in[-T/2,T/2]\,,\ f(t)\in(\infty,+\infty).$$

$$f_T(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}c_{k,T}e^{\frac{2\pi it}{T}},\quad c_{k,T}=\frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{\frac{-2\pi itk}{T}}ds.$$

Пусть $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \Delta\lambda>0$ и $k:\lambda\leqslant\dfrac{2\pi k}{T}<\lambda+\Delta\lambda\ \Rightarrow\ \dfrac{T\lambda}{2\pi}\le k<\dfrac{T\lambda}{2\pi}+\dfrac{T\Delta\lambda}{2\pi}$, значит

$$k\approx\frac{T\Delta\lambda}{2\pi},\quad c_{k,T}\approx c_{\lambda,T}=\frac{1}{T}\underbrace{\int\limits_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-i\lambda t}}_{=F_T(\lambda)}$$

В итоге получим

$$f_T(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{F_T(\lambda)}{T}e^{\frac{2\pi ikt}{T}}\approx\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{F_T(\lambda)}{T}e^{-\lambda t}\frac{T}{2\pi}\Delta\lambda\xrightarrow{\Delta\lambda\to0}$$

$$\xrightarrow{\Delta\lambda\to0}\boxed{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda=f(t)}$$ **– обратное преобразование Фурье**

$$\boxed{F_T(\lambda)\xrightarrow{T\to\infty}F(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt}$$ **– прямое преобразование Фурье**

Другие формы преобразования Фурье, встречающиеся в литературе

$$F(\lambda)=\frac{1}{g}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega\lambda t}dt,\quad f(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\omega\lambda t}d\lambda,\quad gh=\frac{2\pi}{|\omega|}$$

1. $\omega = \pm 1;\quad g = 1,\ h = 2\pi.$

2. $\omega = \pm 2\pi;\quad g = h = 1.$

3. $\omega = \pm 1;\quad g = h = \sqrt{2\pi}.$

2.4 Примеры

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt\text{— прямое преобразование}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda t}dt\text{— обратное преобразование}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 2.1. Пусть $f(t) = e^{-\beta t^2}, \beta > 0, \beta \neq 0,\ \frac{i\lambda t}{\beta} = \frac{2i\lambda t}{2i\beta} = 2(\frac{i\lambda}{2\beta})t$, тогда

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t^2}e^{-i\lambda t}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(t+\frac{i\lambda}{2\beta})^2-\frac{\lambda^2}{4\beta}}dt = \left\{s = t + \frac{i\lambda}{\beta}\right\} = \int\limits_{\frac{i\lambda}{2\beta}-\infty}^{\frac{i\lambda}{2\beta}+\infty} e^{-\beta^2 s}ds\cdot e^{\frac{-\lambda^2}{4\beta}} =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\cdot e^{\frac{-\lambda^2}{3\beta}}\left(\int\limits_{-R+\frac{i\lambda}{2\beta}}^{-R}(...)ds + \int\limits_{-R}^{R}(...)ds + \int\limits_{R}^{R+\frac{i\lambda}{2\beta}ds}\right) =$$

$$= \left\{\left|\int\limits_{R}^{R+\frac{i\lambda}{2\beta}} e^{-\beta s^2}ds\right| = \left|\int\limits_{0}^{\frac{\lambda}{2\beta}} e^{-\beta(R^2-y^2+2iyR)}idy\right| \leq \int\limits_{0}^{\frac{\lambda}{2\beta}} e^{-\beta(R^2-y^2)}dy \leq \frac{\lambda}{2\beta}e^{\beta(\frac{\lambda}{4\beta}-R^2)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\int\limits_{-R}^{R} e^{-\beta s^2}ds = e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta s^2}ds = e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

Пример 2.2. Пусть $f(t) = e^{-\beta|t|}$, $\beta > 0$, тогда

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|}e^{-i\lambda t}dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{t(\beta-i\lambda)}dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{t(-\beta-i\lambda)}dt =$$
$$= \frac{e^{t(\beta-i\lambda)}}{(\beta-i\lambda)}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{t(-\beta-i\lambda)}}{-\beta-i\lambda}\Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\beta-i\lambda} - 0 + 0 + \frac{1}{\beta-i\lambda} = \frac{2\beta}{\beta^2+\lambda^2}e^{-\beta|t|} \leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2+\lambda^2}$$

Таким образом, получили, что $e^{-\beta|t|} \leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2+\lambda^2}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda e^{i\lambda t}}{1+\lambda^2} = \pi e^{-|t|} \implies$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+\lambda^2}e^{i\lambda t}d\lambda = e^{-|t|}\qquad\text{— обратное преобразование Фурье}$$

3 Свойства преобразования Фурье

В этом разделе мы опишем основные свойства преобразования Фурье и докажем наиболее интересные из них. Прежде всего, напомним внешний вид преобразования:

$$F[f](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt,$$

где $f \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, то есть функция f интегрируема по Риману (Лебегу) на всей числовой прямой и выполнено условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty.$$

Замечание 3.1. Принадлежность функции f классу L_1 гарантирует существование ее преобразования Фурье $F[f]$.

Для начала выпишим свойства, которые напрямую следуют из определения: линейность, масштабируемость и сдвиг. Мы не будем долго на них останавливаться.

1. **Линейность.**
$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2], \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}_1,\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. **Сдвиг.**
$$F[f(t - t_0)] = e^{-\lambda t_0} \cdot F[f],$$
$$F[e^{i\lambda_0 t} \cdot f(t)] = F[f] \cdot (\lambda - \lambda_0).$$

3. **Масштабируемость.**
$$F[f(\alpha t)](\lambda) = \frac{1}{|\alpha|} F[f(t)]\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\, \alpha \neq 0.$$

4. **О четности.** Если функция f является четной, то ее образ $F[f]$ будет действительной функцией.

5. **О нечетности.** Если же f — нечетная, то образ $F[f]$ будет чисто мнимой функцией.

Теперь перейдем к более интересным свойствам. Далее каждая теорема, следствие или замечание будут являться свойствами преобразования Фурье. Большая часть из них будет доказана. Для удобства навигации наиболее важные формулы пронумерованы.

Теорема 3.1. *Рассмотрим последовательность функций из класса* L_1*, стремящуюся по норме* L_1 *к некоторой функции* f *из того же класса, то есть*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty},\ f_n \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty) \quad : \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}_1} f \in \mathrm{L}_1.$$

Тогда

$$F[f_n] \rightrightarrows F[f].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем несложные выкладки:

$$\sup_\lambda |F[f_m](\lambda) - F[f_n](\lambda)| =$$

$$= \sup_\lambda \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f_m(t) - f_n(t)) e^{-i\lambda t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_m(t) - f_n(t)|\, dt < \varepsilon.$$

■

Теорема 3.2. *Преобразование Фурье $F[f]$ есть непрерывная ограниченная функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле ограниченность мы нечаянно вывели в предыдущей теореме. Действительно,

$$|F[f](\lambda)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \mathrm{const}\,.$$

С непрерывностью дела обстоят куда сложнее. Здесь нам придется записать наше преобразование в виде

$$F[f](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda t)\, dt - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t)\, dt$$

и сослаться на книгу А. М. Тер–Крикорова, М. И. Шабунина «Курс математического анализа,» где на 645 странице доказана непрерывность каждого из кусочков. ■

Замечание 3.2. Из последней теоремы следует, например, что

$$F[f](\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to \infty]{} 0.$$

Теперь рассмотрим специальный вид функций, который часто встречается на практике: непрерывные и дифференцируемые функции.

Теорема 3.3. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть*[1]

$$f \in \mathrm{C}^1(-\infty, +\infty) \cap \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty),\ f' \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$$

Тогда

$$F[f'](\lambda) = i\lambda \cdot F[f](\lambda).$$

[1]Теорема ходит в интернете в нескольких вариантах условий: совершенно не понятно, f или f' должна быть непрерывной или интегрируемой. Причем доказательства везде примерно одинаковые. Здесь приведен вариант к.ф.-м.н. доцента И. В. Рублева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим функцию в виде

$$f(t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(t)\,dt.$$

Из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ следует существование пределов $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ и $\lim_{t\to-\infty} f(t)$. Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$F[f'](\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\lambda t}\,dt = i\lambda\cdot F[f](\lambda).$$

■

Замечание 3.3. Как следствие, получаем более занятную формулу:

$$\text{Пусть } f\in \mathrm{C}^{k-1}(-\infty,\,+\infty),\quad \exists f^{(k)} : f^{(k)} \in \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty),\ \text{тогда}$$

$$F[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k\cdot F[f]. \tag{3.1}$$

Теорема 3.4. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть*

$$f\in \mathrm{C}^1(-\infty,\,+\infty)\cap \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty),\ f'\in \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty)$$

Тогда

$$|F[f](\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\left|\int\limits_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right| = \frac{f(t)e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}\Big|_{-T}^{+T} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

■

Замечание 3.4. Как следствие, получаем более занятную формулу:

$$\text{Пусть } f\in \mathrm{C}^{k-1}(-\infty,\,+\infty),\quad \exists f^{(k)} : f^{(k)} \in \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty),\ \text{тогда}$$

$$F[f](\lambda) \leqslant \frac{C_m}{|\lambda|^m},\quad \text{где } C_m = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(t)|\,dt. \tag{3.2}$$

Теорема 3.5. *Пусть задана функция f такая, что $\int_{-\infty}^t f(s)\,ds \in \mathrm{L}_1(-\infty,\,+\infty)$, тогда*

$$F\left[\int_{-\infty}^t f(s)\,ds\right](\lambda) = \frac{1}{i\lambda}F[f](\lambda).$$

Теорема 3.6. *Пусть задана функция f такая, что $t \cdot f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, тогда*

$$F[f]'(\lambda) = F[-it \cdot f(t)](\lambda).$$

Доказательство.

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right)'_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-it)f(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

■

Замечание 3.5. Как следствие:

$$\text{Пусть } f : t^p f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty),\ p = \overline{1, k},\ \text{тогда}$$
$$F[f]^{(k)}(\lambda) = F[(-it)^k \cdot f(t)]. \tag{3.3}$$

Теорема 3.7. *Пусть $t^p f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$ $\forall p$, тогда*

$$F\left[-\frac{1}{it}f(t)\right](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} F[f](\xi)\,d\xi. \tag{3.4}$$

Теперь поговорим о свойствах преобразования Фурье, связанных с операцией свертки. Напомним, как выглядит эта операция:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)f_2(t-s)ds.$$

Эта операция является билинейной, коммутативной и ассоциативной.

Теорема 3.8. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{L}_1$, тогда*

$$F[f_1 * f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda). \tag{3.5}$$

Доказательство.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)f_2(t-s)e^{-\lambda t}\,ds\,dt =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)e^{-i\lambda s}\left(f_2(t-s)e^{-i\lambda(t-s)}\right)ds\,dt =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)e^{-i\lambda s}\,ds \cdot F[f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda).$$

■

Замечание 3.6. Аналогично доказывается и такой факт:

$$\begin{gathered}\text{Если } F[f_1], F[f_2] \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty),\ \text{то}\\ F[f_1 \cdot f_2](\lambda) = 2\pi \cdot (F[f_1] * F[f_2])(\lambda).\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$d_{\Delta t}(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\Delta t} d_{\frac{2\pi}{\Delta t}}(\lambda)$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\lambda)$$

$$f_{\Delta t}(t) = f(t) \cdot d_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}(F * \frac{2\pi}{\Delta t} d_{\frac{2\pi}{\Delta t}})(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}) = \frac{1}{\Delta t} F^0_{\frac{2\pi}{\Delta t}}(\lambda)| \cdot \Delta t H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda)$$

Пусть $\exists \Lambda > 0 : F(\lambda) \equiv 0,\ |\lambda| > \frac{\Lambda}{2}$ — ограниченый спектр, $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{\Delta t} \geq \frac{\Lambda}{2}$ не происходит наложение спектра. $\Delta t = \frac{2\pi}{\Lambda}$ — частота Найквиста.
$F(\lambda) = F^0_{\frac{2\pi}{\Delta t}}(\lambda) \cdot H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda)$, где $H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda)$ — оконная функция:

$$H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda) = \begin{cases} 1, |\lambda| \leq \frac{\Lambda}{2} \\ 0, \texttt{иначе} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1, |t| \leq \frac{\Lambda}{2} \\ 0, \texttt{иначе} \end{cases}$$

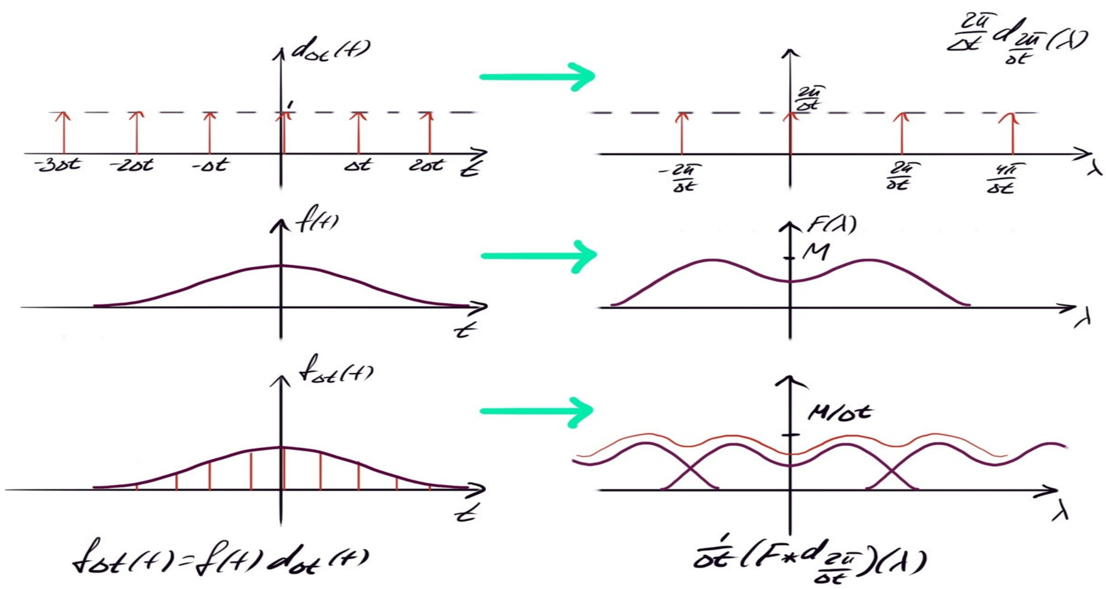
$$\leftrightarrow 2\frac{\sin(\lambda A)}{\lambda} = G(\lambda)$$

$$h_{\frac{\Lambda}{2}}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\frac{\Lambda}{2} t)}{t} \leftrightarrow H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda)$$

$$\Delta t(f_{\Delta t} + h_{\frac{\Lambda}{2}}) \leftrightarrow f(\lambda)$$

Интероляционная формула Котельникова:

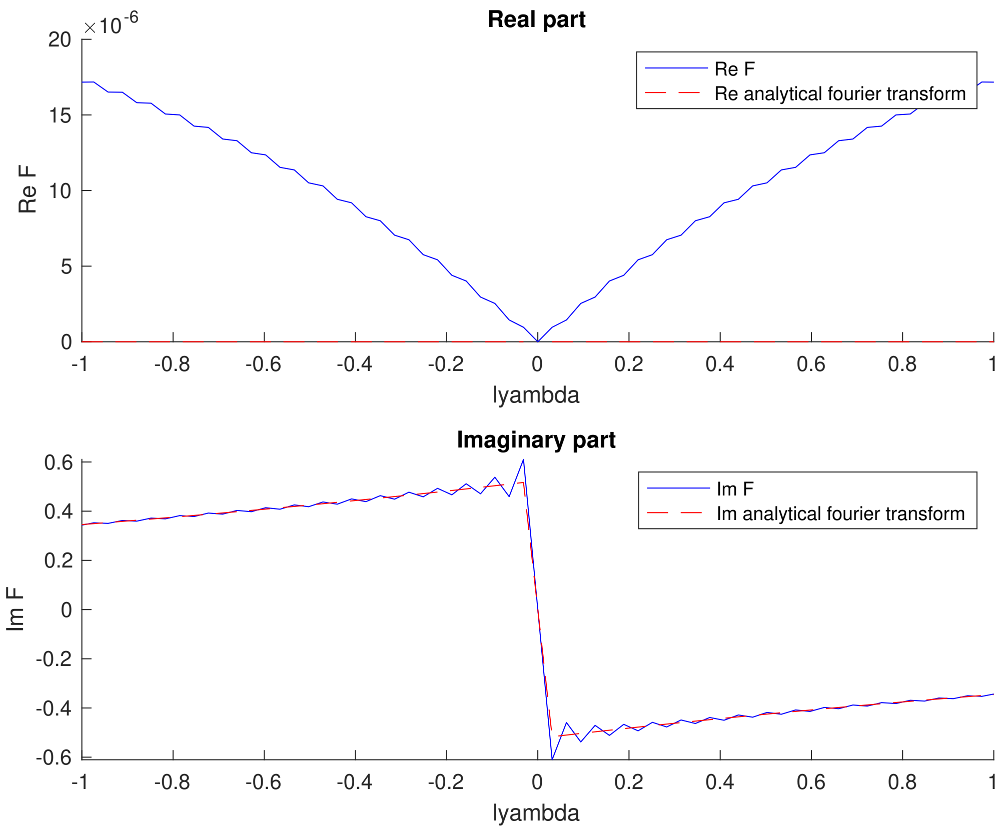
$$\Delta t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - s - k\Delta t) \cdot h_{\frac{\Lambda}{2}}(s) ds = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) \frac{\frac{\Lambda}{2} \sin(t - k\Delta t)}{t - k\Delta t}$$



$$h_{\frac{T}{2}}(t) = \begin{cases} 1, |t| \le \frac{T}{2} \\ 0, \texttt{иначе} \end{cases}$$

$$H_{\frac{T}{2}}(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\sin(\frac{T\lambda}{2})$$

Пример Ряби:



Введем функцию:

$$\widetilde{F} = F * d_{\frac{2\pi}{\Delta t}};\ \frac{T}{2\pi}(\widetilde{F} * sync(\frac{T}{2}\cdot))(\lambda) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{F}(t-s)\frac{\sin(\frac{T}{2}s)}{\frac{T}{2}s}ds =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t-s-k\Delta t)\frac{\sin(\frac{T}{2})}{\frac{T}{2}s}ds \quad (3.7)$$

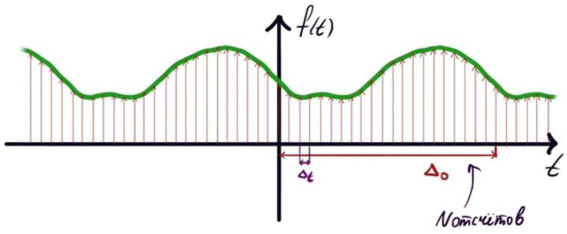
Если T достаточно большое:

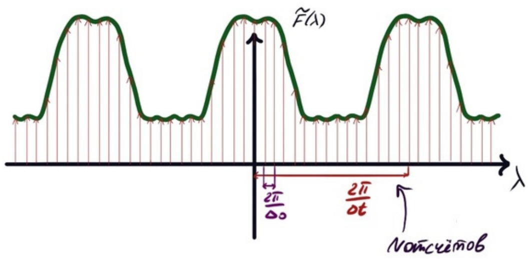
$$W_T(s) = \frac{T}{2\pi}\frac{\sin(\frac{T}{2}\lambda)}{\frac{T}{2}\lambda} \xrightarrow[T\to\infty]{\text{сл}} \delta(\lambda)$$

Теперь введем функцию $\widetilde{\widetilde{F}}$:

$$\widetilde{\widetilde{F}}(\lambda) = \frac{T}{2\pi}(\widetilde{F} + sync(\frac{T}{2}\cdot))(\lambda)$$

Дискретизация $\widetilde{\widetilde{F}}$





$$\Big(f(\cdot)d_{\Delta t}(\cdot)h_{\frac{T}{2}}(\cdot) * d_{\Delta 0}\Big)(t) \qquad\qquad \tfrac{2\pi}{\Delta t\Delta 0}\widetilde{\widetilde{F}}(\lambda)\cdot d_{\frac{2\pi}{\Delta 0}}(\lambda)$$

$$\widetilde{f}_{\Delta t}(t) = \widetilde{f}(t)d_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\widetilde{F} * \frac{2\pi}{\Delta t}d_{\frac{2\pi}{\Delta t}} = \frac{1}{\Delta t}\widetilde{F} * d_{\frac{2\pi}{\Delta t}}$$

$$\widetilde{h_{\Delta_0}}(t) = \begin{cases} 1, t \in [-\frac{\Delta t}{2}, \Delta_0 - \frac{\Delta t}{2}] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$h_{\Delta_0}(t) = \begin{cases} 1, |t| \le \frac{\Delta_0}{2} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$\widetilde{h_{\Delta_0}}(t) = h_{\Delta_0}(t - \frac{\Delta_0 + \Delta t}{2})$$

$$h_{\Delta_0}(t) \leftrightarrow \frac{2}{\lambda}\sin(\frac{\Delta_0\lambda}{2})$$

$$\widetilde{H_{\Delta_0}}(\lambda) = e^{-\frac{i(\Delta_0+\Delta t)\lambda}{2}}$$

$$\widetilde{f_{\Delta t}}(t)\widetilde{h_{\Delta_0}}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\Delta t}\widetilde{F^0_{\frac{2\pi}{\Delta t}}} * \frac{1}{2\pi\lambda}\sin(\frac{\Delta_0\lambda}{2})\cdot e^{-\frac{i(\Delta_0+\Delta t)\lambda}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\widetilde{F}(\lambda-\mu-\frac{2\pi l}{\Delta t})e^{-\frac{i(\Delta_0+\Delta t)\mu}{2}}\frac{1}{2\pi\mu}\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})d\mu$$

$$\widetilde{f}_{\Delta t}(t)\widetilde{h}_{\Delta_0}(t) = \sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)$$

$$\widetilde{\widetilde{f}}(t) = ((\widetilde{f}_{\Delta t}\cdot\widetilde{h}_{\Delta_0}) * d_{\Delta_0})(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t-m\Delta_0)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\frac{2\pi}{\Delta_0}\widetilde{\widetilde{F}}d_{\frac{2\pi}{\Delta_0}}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\delta(\lambda-\frac{2\pi}{\Delta_0}n)$$

$$\widetilde{f}(t_k) : \widetilde{f}_0, ..., \widetilde{f}_{N-1} \to \alpha_0, ..., \alpha_{N-1} ---?$$

Найдем формулу:

$$\widetilde{\widetilde{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\delta(\lambda-\frac{2\pi n}{\Delta_0}))e^{i\lambda t}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{\frac{2\pi i n t}{\Delta_0}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\alpha_n = \frac{1}{\Delta_0}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\Delta_0-\frac{\Delta t}{2}} \widetilde{\widetilde{f}}(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{\Delta_0}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\Delta_0-\frac{\Delta t}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t-m\Delta_0)e^{-\frac{2\pi int}{\Delta 0}}dt$$

Ненулевое только при $m = 0$

$$m \geq 1;\ \ t-k\Delta t-m\Delta_0 \leq \Delta_0 - \frac{\Delta t}{2} - \Delta_0 < 0$$

$$m \leq -1;\ \ t-k\Delta t-m\Delta_0 \geq -\frac{\Delta t}{2} - N\Delta t + \Delta t + \Delta_0 \geq \frac{\Delta t}{2} > 0 \Rightarrow$$

При $m \neq 0$ нулевые слагаемые.

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{\Delta_0}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\Delta_0-\frac{\Delta t}{2}} \sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t-m\Delta_0)e^{-i\lambda t}dt = \frac{2\pi}{\Delta_0}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k\Delta t)e^{-\frac{2\pi ink}{N}}$$

$\{\frac{\Delta t}{\Delta_0} = \frac{1}{N}\}$

$$\alpha_n \approx \frac{2\pi}{\Delta_0\Delta t}\widetilde{F}(\lambda_n);\ \ \lambda_n = \frac{2\pi n}{\Delta_0},\ n = 0, ..., N-1$$

$$\widetilde{F}(\lambda_n) = \widetilde{F}_n \approx \Delta t\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}_k e^{\frac{2\pi ink}{N}}$$

ПДПФ:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}},\ n = 0, ..., N-1$$

ОДПФ:

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{\frac{2\pi ink}{N}},\ k = 0, ..., N-1$$

$$\widetilde{F}(\lambda_n) = \widetilde{F}_n,\ n = 0, ..., [\frac{N}{2}];\ \widetilde{F}(-\frac{2\pi}{\Delta_0}) = \widetilde{F}_{N-1};\ \widetilde{F}(\frac{2\pi n}{\Delta_0}) \approx \widetilde{F}_n(\mod N)$$

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta_t)e^{-i\lambda k\Delta t}\Delta t$$

$$\lambda = \frac{2\pi n}{\Delta_0};\ \ F(\frac{2\pi n}{\Delta_0}) \approx \Delta t\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t)e^{-\frac{2\pi ink\Delta t}{\Delta_0}} = \Delta t\sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta t)e^{-\frac{2\pi ink}{N}}$$

4 Оценка погрешности

4.1 Эффект наложения спектров

Пусть:

$f \in C^2(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty; \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{'}(t)|dt < \infty; \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{''}(t)|dt \le c < \infty \quad (4.1)$$

$$f^{''}(t) \leftrightarrow (i\lambda)^2 F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{''}(t) e^{-i\lambda t} dt; \;\; \lambda^2 |F(\lambda)| \le c; \;\; \lambda \ne 0; \;\; |F(\lambda)| \le \frac{c}{\lambda^2}$$

$$f_{\Delta t}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}) = \frac{1}{\Delta t}(F(\lambda) + \sum_{l \ne 0} F(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}))$$

$$\sum_{l \ne 0} F(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t})) \text{ -- ошибка наложения спектра.}$$

$$|\sum_{l \ne 0} F(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}))| \le \sum_{l \ne 0} \frac{c}{(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t})^2} \le \{(*)\} \le \frac{2c(\Delta t)^2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} < \varepsilon$$

$$(*) \; l > 0; \; |\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}| \ge \frac{2\pi l}{\Delta t} - |\lambda| \ge \frac{2\pi l}{\Delta t} - \frac{\Lambda}{2} > \{\frac{\Lambda}{2} < \frac{\pi}{\Delta t}\} > \frac{\pi}{\Delta t}(2l-1)$$

4.2 Рябь($\Delta_0 > 0$)

$$h_{\Delta_0}(t) = \begin{cases} 1, |t| \le \frac{\Delta_0}{2} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(t) \cdot h_{\Delta_0}(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F * H_{\Delta_0}(\lambda) = \{H_{\Delta_0}(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\sin(\frac{\Delta_0 \lambda}{2})\} = (F * \frac{1}{\pi\lambda}\sin(\frac{\Delta_0 \cdot}{2}))(\lambda) =$$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda - \mu) \frac{\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})}{\pi\mu} d\mu$

$$F(\lambda) = F(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})}{\pi\mu} d\mu$$

$$h_{\Delta_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\mu} \sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2}) e^{-i\mu t} d\mu$$

4.3 Ошибка ряби

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\lambda - \mu) - F(\lambda)] \frac{\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})}{\pi\mu} d\mu$$

1. F непрерывна при $\lambda = \lambda_0$

2. Пусть $F(\lambda_0 \pm 0);\ F(\lambda_0 - 0) \neq F(\lambda_0 + 0)$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\lambda - \mu) - F(\lambda)] \frac{\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})}{\pi \mu} d\mu$$

a). F непрерывна по λ; $\Lambda > 0$; $|\lambda| \leq \frac{\Lambda}{2}$

$$f(\cdot) : \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \leq c_0 < +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt \leq c_1 < \infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |tf^{'}(t)|dt \leq \widetilde{c_1} < \infty \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ Задача: найти ограничение на Δ_0 :

$$|I| \leq \varepsilon;\ \delta = \frac{\varepsilon \pi}{6c_1} > 0$$

$$I = \int_{-\delta}^{\delta} [F(\lambda - \mu) - F(\lambda)] \frac{\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})}{\pi \mu} d\mu + \int_{|\mu| \geq \delta} F(\lambda - \mu) \frac{\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})}{\pi \mu} d\mu -$$
$$- \int_{|\mu| \geq \delta} F(\lambda) \frac{\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})}{\pi \mu} d\mu \quad (4.2)$$

$$1).|I_1| \leq \int_{-\delta}^{\delta} |F(\lambda - \mu) - F(\lambda)| \frac{|\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})|}{|\pi \mu|} d\mu \leq \frac{c_1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |\sin(\frac{\Delta_0 \mu}{2})| \leq \frac{2\delta c_1}{\pi} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\{F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt;\ F^{'}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it) f(t) e^{-i\lambda t} dt\}$$

$$\Rightarrow F^{'}(\lambda) \leq c_1 \Rightarrow |F(\lambda - \mu) - F(\lambda)| \leq c_1 |\mu| \}$$

$$|\mu| \geq \delta;\ |\frac{F(\lambda - \mu)}{\pi \mu}| \leq \frac{c_0}{\pi \delta} = \alpha_0$$

$$(-it)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{'}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda | \cdot \frac{d}{dt}$$

$$-i(f(t) + tf^{'}(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{'}(\lambda)(i\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

$$(i\lambda) F^{'}(\lambda) = i \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) + tf^{'}(t)] e^{-i\lambda t} dt$$

$$|\lambda||F^{'}(\lambda)| \leq c_0 + \widetilde{c}_1;\ |\frac{F(\lambda - \mu)}{\mu \pi}| \leq \alpha_0$$

$$|\frac{F^{'}(\lambda - \mu)}{\mu \pi}| \leq \frac{c_0 + \widetilde{c}_1}{\pi |\mu||\lambda - \mu|} = \frac{c_0 + \widetilde{c}_1}{\pi |\mu|(|\mu| - |\lambda|)} \leq (**) \leq \frac{c_0 + \widetilde{c}_1}{\pi(\mu^2 - |\mu| \frac{\Lambda}{2})} \leq \frac{2(c_0 + \widetilde{c}_1)}{\pi \mu^2}$$

$$(**)\ |\mu| - \frac{\Lambda}{2} \leq |\mu| - |\lambda| \leq (\mu - \lambda);$$

$$\mu| \geq \max(\delta, \Lambda);\ \frac{\mu^2}{2} \leq \mu^2 - |\mu| \frac{\Lambda}{2} \leftrightarrow \frac{\mu^2}{2} - |\mu| \frac{\Lambda}{2} = |\mu|(|\mu| - \Lambda) > 0$$

$$|\frac{d}{d\mu}[\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}]| = \frac{1}{\pi}|-\frac{F^{'}(\lambda-\mu)\mu - F(\lambda-\mu)}{\mu^2}| = \frac{1}{\pi}[\frac{F^{'}(\lambda-\mu)}{\mu} + \frac{F(\lambda-\mu)}{\mu^2}] \le$$

$\le \frac{2(c_0+\widetilde{c}_1)}{\pi\mu^2} + \frac{c_0}{\pi\mu^2} = \frac{3c_0+2\widetilde{c}_1}{\pi}\frac{1}{\mu^2} = \frac{\widetilde{\alpha}_1}{\mu^2}$ 2).$R > 0;\ R > \Lambda > 0$

$$I_2^R = \int_{R\ge|\mu|\ge\delta} F(\lambda-\mu)\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu = -\frac{2}{\Delta_0}\int_{R\ge|\mu|\ge\delta}\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}d(\cos(\frac{\Delta_0\mu}{2})) =$$

$$= \frac{2}{\Delta_0}\Big(-[\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}\cos(\frac{\Delta_0\mu}{2})\Big|_{\mu=-R}^{-\delta} + -||-\Big|_{\mu=\delta}^{R}] + \int_{R\ge|\mu|\ge\delta}\frac{d}{d\mu}[\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}]\cos(\frac{\Delta_0\mu}{2})d\mu\Big)$$

$$|I_2^R| \le \frac{2}{\Delta_0}[4\alpha_0 + |\int_{R\ge|\mu|\ge\Lambda}\frac{d}{d\mu}[...]\cos(...)d\mu| + |\int_{\Lambda\ge|\mu|\ge\delta}\frac{d}{d\mu}[...]\cos(...)d\mu|] \le$$

$\le \frac{2}{\Delta_0}[4\alpha_0 + \widetilde{\alpha}_1\int_{R\ge|\mu|\ge\Lambda}\frac{d\mu}{\mu^2} + |\int_{\Lambda\ge|\mu|\ge\delta}...|]$

$$\int_{-R}^{-\Lambda}\frac{d\mu}{\mu^2} = \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{R} \le \frac{1}{\Lambda};\ \int_{\Lambda}^{R}\frac{d\mu}{\mu^2} = \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{R} \le \frac{1}{\Lambda}$$

$$\Rightarrow |I_2^R| \le \frac{2}{\Delta_0}[4\alpha_0 + \frac{2\widetilde{\alpha}_1}{\Lambda} + |\int_{\Lambda\ge|\mu|\ge\delta}...d\mu|]$$

При $\Lambda \ge |\mu| \ge \delta:$

$$|\frac{d}{d\mu}[\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}]| = \frac{1}{\pi}|\frac{F^{'}(\lambda-\mu)}{\mu} + \frac{F(\lambda-\mu)}{\mu^2}| \le \frac{1}{\pi}[\frac{c_1}{\delta} + \frac{c_0}{\delta^2}] = \alpha_1$$

$$\Rightarrow |\int_{\Lambda\ge|\mu|\ge\delta}\frac{d}{d\mu}(...)cos(...)d\mu| \le 2\Lambda\alpha_1 \Rightarrow |I_2^R| \le \frac{2}{\Delta_0}[4\alpha_0 + \frac{2\widetilde{\alpha}_1}{\Lambda} + 2\Lambda\alpha_1]$$

$$R\to\infty\ \ |I_2| \le \frac{1}{\Delta_0}[8\alpha_0 + \frac{4\widetilde{\alpha}_1}{\Lambda} + 4\Lambda\alpha_1] \le \frac{\varepsilon}{3}$$

$$3).|I_3| \le \frac{|F(\lambda)|}{\pi}|\int_{\mu\ge\delta}\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\mu}d\mu| \le \{\mu = \frac{2\psi}{\Delta_0};\ d\mu = \frac{2}{\Delta_0}d\psi\} \le \frac{2c_0}{\pi}|\int_{\frac{\Delta_0\delta}{2}}^{+\infty}\frac{\sin(\psi)}{\psi}|d\psi$$

Пусть $\frac{\Delta_0\delta}{2} = 2\pi k_0,\ k_0\in\mathbb{N};\ \Delta_0 = \frac{4\pi k_0}{\delta}$

$$\int_{2\pi k_0}^{+\infty}\frac{\sin(\psi)}{\psi}d\psi = \sum_{l=k_0}^{+\infty}[\int_{2\pi l}^{\pi+2\pi l}\frac{\sin(\psi)}{\psi}d\psi - \int_{\pi+2\pi l}^{2\pi+2\pi l} - \frac{\sin(\psi)}{\psi}d\psi] =$$

$= \sum_{k=2k_0}^{+\infty}(-1)^k\sigma_k$ – ряд Лейбница.

$$0 < \sigma_{k+1} \le \sigma_k \le \frac{1}{k};\ R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k\sigma_k;\ \sigma_{2k_0} \ge \sigma_{2k+1} \ge \sigma_{2k_0+2}$$

$$0 > R_{2k_0-1} = -\sigma_{2k_0-1} + R_{2k_0} \Rightarrow 0 \le R_{2k_0} \le \sigma_{2k_0-1} \le \frac{1}{2k_0-1} \Rightarrow \frac{1}{2k_0-1} \le \frac{\varepsilon\pi}{6c_0}$$

$$2k_0 - 1 \ge \frac{6c_0}{\varepsilon\pi} \Leftarrow k_0 \ge [\frac{3c_0}{\varepsilon\pi} + 1]$$

$$|I_3| \le \frac{2c_0}{\pi}\int_{2\pi k_0}^{+\infty}\frac{\sin(\psi)}{\psi}d\psi \le \frac{\varepsilon\pi 2c_0}{6c_0\pi} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Теорема 4.1. *Если* $\Delta_0 \ge \max\{\frac{4\pi}{\delta}[\frac{3c_0}{\varepsilon\pi} + 1], \frac{3}{\varepsilon}[8\alpha_0 + 4\Lambda\alpha_1 + \frac{4\widetilde{\alpha}_1}{\Lambda}]\}$, *то* $|I| \le \varepsilon$.

5 Быстрое преобразование Фурье

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}, n = 0, \ldots, N-1.$$

Пусть $W_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, тогда при чётном N

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_k^{-nk} = \sum_{l=0}^{N/2-1} (f_{2l} W_N^{-n(2l)} + f_{2l+1} W_N^{-n(2l+1)}) = \sum_{l=0}^{N/2-1} (f_{2l} W_{N/2}^{-nl} + f_{2l+1} W_N^{-n} W_{N/2}^{-nl}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N/2-1} (f_{2l} + f_{2l+1} W_N^{-n}) W_{N/2}^{-nl} = \sum_{l=0}^{N/2-1} f_{2l} W_{N/2}^{-nl} + W_N^{-n} \sum_{l=0}^{N/2-1} f_{2l+1} W_{N/2}^{-nl}.$$

При $N = 2^k$ имеем $N \cdot k$ вычислений.

Задача

$x \in [0, l]$;

$$\begin{cases} u''_{xx}(x) - \mu u(x) = f(x), \\ u(0) = u_0, \\ u(l) = u_1. \end{cases}$$

Пусть $u(x) = v(x) + \dfrac{u_1 - u_0}{l} x$, тогда $u'(x) = v'(x) + \dfrac{u_1 - u_0}{l}$, $u''(x) = v''(x)$, и

$$\begin{cases} v''_{xx}(x) - \mu v(x) = f(x) + \mu \dfrac{u_1 - u_0}{l} x = g(x), \\ v(0) = u_0, \\ v(l) = u_0. \end{cases}$$

Тогда без ограничения общности

$$\begin{cases} u''_{xx}(x) - \mu u(x) = f(x), \\ u(0) = u_0, \\ u(l) = u_0. \end{cases}$$

$h = \dfrac{l}{N}; x_i = \dfrac{il}{N}, y_i = u(x_i), \varphi_i = f(x_i), i = 0, \ldots, N.$

Разностная схема:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \mu y_i = \varphi_i, i = 1, \ldots, N-1 \\ y_0 = y_N = u_0 \end{cases}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-\frac{2\pi i n k}{N}}, a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{2\pi i n k}{N}}$$

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}}, b_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \varphi e^{\frac{2\pi ink}{N}}.$$

Подставим соотношения в систему:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \left[\frac{e^{-\frac{2\pi i(n+1)k}{N}} - 2e^{-\frac{2\pi ink}{N}} + e^{-\frac{2\pi i(n-1)k}{N}}}{h^2} - \mu e^{-\frac{2\pi ink}{N}}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}},$$

$$a_k\left[\frac{e^{-\frac{2\pi ink}{N}} - 2 + e^{\frac{2\pi ink}{N}}}{h^2} - \mu\right] = b_k, a_k\left[\frac{2\cos\dfrac{2\pi k}{N} - 2}{h^2} - \mu\right] = b_k,$$

$$a_k\left[-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N} - \mu\right] = b_k \Rightarrow a_k = -\frac{b_k}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N} + \mu}.$$

$$b_k = \frac{1}{N}\varphi_0 + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\varphi_n e^{\frac{2\pi ink}{N}} = \frac{1}{N}\varphi_0 + b_k^0;$$

b_k^0 получаются из $0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ при помощи ОДПФ (обратного дискретного преобразования Фурье).

$$a_k = -\frac{-\frac{1}{N}\varphi_0 + b_k^0}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N} + \mu} = \frac{\varphi_0}{N\left(\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N} + \mu\right)} + a_k^0, a_k^0 = -\frac{b_k^0}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N} + \mu}.$$

$$y_n = -\varphi_0 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\frac{1}{N}e^{-\frac{2\pi ink}{N}}}{\frac{4}{N^2}\sin^2\frac{\pi k}{N} + \mu} + \sum_{k=0}^{N} a_k^0 e^{-\frac{2\pi ink}{N}} = -\varphi_0 c_n + y_n^0.$$

$$y_0 = y_N = -\varphi_0 c_0 + y_0^0 = u_0, \varphi_0 = \frac{y_0^0 - u_0}{c_0}.$$

Итоговая схема решения задачи:

$$0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1} \xrightarrow{\text{ОДПФ}} b_k^0 \to a_k^0 \xrightarrow{\text{ПДПФ}} y_n^0 \to \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1} \xrightarrow{\text{ОДПФ}} b_k \to a_k \xrightarrow{\text{ПДПФ}} y_n$$

6 Многомерное преобразование Фурье

$f(x) = f(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow F(\lambda) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

$$F(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)e^{-i\langle\lambda,x\rangle}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda_1 x_1}\,dx_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda_2 x_2}\,dx_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_m)e^{-i\lambda_m x_m}\,dx_m$$

.

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} F(\lambda)e^{i\langle\lambda,x\rangle}\,d\lambda.$$

Дискретное преобразование Фурье: $f_{k_1\dots k_m} \leftrightarrow F_{n_1\dots n_m}$.

$$F_{n_1\dots n_m} = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{k_m=0}^{N_m-1} e^{-2\pi i\left(\frac{k_1n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_mn_m}{N_m}\right)} \cdot f_{k_1\dots k_m}$$

$$f_{k_1\dots k_m} = \frac{1}{N_1\dots N_m}\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \dots \sum_{n_m=0}^{N_m-1} e^{2\pi i\left(\frac{k_1n_1}{N_1} + \dots + \frac{k_mn_m}{N_m}\right)} \cdot F_{n_1\dots n_m}$$

Задача

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f, \\ u(0,x,y) = u^0(x,y), \ -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty. \\ u'_t(0,x,y) = u^1(x,y), \end{cases}$$

$$u(t,x,y) \leftrightarrow U(t,\lambda,\mu),$$

$$u^0(x,y) \leftrightarrow U^0(\lambda,\mu),$$

$$u^1(x,y) \leftrightarrow U^1(\lambda,\mu),$$

$$f(t,x,y) \leftrightarrow F(t,\lambda,\mu).$$

$$U(t,\lambda,\mu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x,y) e^{-i(\lambda x + \mu y)}\, dy$$

$$u_t \leftrightarrow U_t, u_{tt} \leftrightarrow U_{tt}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}; \Delta u \leftrightarrow (i\lambda)^2 U + (i\mu)^2 U = -(\lambda^2 + \mu^2) U.$$

$$\begin{cases} U_t t = -a^2(\lambda^2 + \mu^2) U + F \\ U(0,\lambda,\mu) = U^0(\lambda,\mu) \\ U_t(0,\lambda,\mu) = U^1(\lambda,\mu) \end{cases}$$

Решаем полученную систему: пусть $v = U, w = v_t, \varphi = F, v(0) = v^0, v'(0) = v^1, b = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ тогда

$$\begin{cases} v_t = w \\ w_t = -b^2 v + \varphi \\ v(0) = v^0 \\ w(0) = v^1 \end{cases}$$

Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{bmatrix}$, тогда

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix} + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi(\tau) \end{bmatrix} \, d\tau;$$

$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos bt & -\frac{1}{b} \sin bt \\ b \sin bt & \cos bt \end{bmatrix},$

$$\Rightarrow v = \cos{(bt)} v^0 - \frac{1}{b} \sin{(bt)} v^1 + \int\limits_0^t \sin{(b(t-s))} \varphi(s)\, ds$$

$$\Rightarrow U(t,\lambda,\mu) = \cos{(a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}t)} \cdot U^0(\lambda,\mu) - \frac{1}{a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \sin{(a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}t)} \cdot U^1(\lambda,\mu) -$$

$$- \frac{1}{a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \int\limits_0^1 \sin{(a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}(t-s))} F(s,\lambda,\mu)\, ds.$$

Задача

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} - \mu u = f, \\ u(x,0) = u(x,1) = \xi(x), \\ u(0,y) = u(1,y) = \eta(y), \\ \xi(0) = \eta(0), \end{cases} \quad x \in [0,1], y \in [0,1].$$

$h_x = \dfrac{1}{M}, h_y = \dfrac{1}{N}, y_{ij} = u(x_i, y_j), x_i = ih_x, y_j = jh_y.$

$$y_{kl} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{mn} e^{-2\pi i \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)}$$

$$\varphi_{kl} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} b_{mn} e^{-2\pi i \left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)}$$

По аналогии с одномерным случаем, $a_{mn} = -\dfrac{b_{mn}}{\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi m}{M} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi n}{N} + \mu}$.

$$y_{k0} = \alpha_k, k = 1, \ldots, M-1;$$

$$y_{0l} = \beta_l, l = 1, \ldots, N-1;$$

$$\alpha_0 = \beta_0.$$

7 Преобразования Лапласа

7.1 Введение

Будем рассматривать $f_\mu(t)$:

$$f_\mu(t) = f(t)e^{-\mu t},$$

где $f(t) = 0$ при $t < 0$.

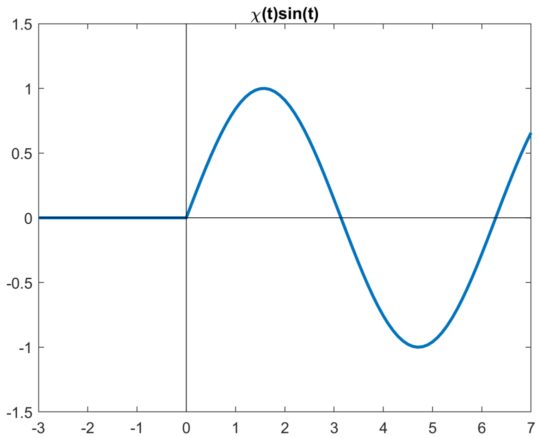
Функция Хевисайда:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Если домножить $f(t)$ на $\chi(t)$ выйдет:

$$f(t)\chi(t) = \begin{cases} f(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Пример:



$$F_\mu(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\mu(t)e^{-i\lambda t}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-(\mu+i\lambda)t}dt = \{\underline{p = \mu + i\lambda}\} = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p), \qquad p \in \mathbb{C}.$$

$$f(t)e^{-\mu t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\mu+i\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\mu+i\lambda)e^{(\mu+i\lambda)t}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} F(p)e^{pt}dt.$$

Преобразование Лапласа: $$F(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

Формула Меллина: $$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} F(p)e^{pt}dt.$$

Преобразование несимметрично!

При $\mathrm{Re}\,p > \widetilde{\mu}$ мы не выйдем из класса приемлемых функций: $F(p)$ – определена.

Пусть $M_f = \left\{\mu \in \mathbb{R} : \exists \int\limits_0^{+\infty} |f(t)e^{-\mu t}|dt\right\}$. Если $\mu_1 \in M_f$, то $\forall \mu_2 \geqslant \mu_1 \Rightarrow \mu_2 \in M_f$.

Рассматриваются $f : M_f \neq \varnothing$. Абсцисса сходимости $\boldsymbol{\widetilde{\mu}} = \inf\{\mu \in M_f\} \in [-\infty, +\infty]$.

Продифференцируем $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ по p и для $\forall \mu > \widetilde{\mu}$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|(-t)f(t)e^{-pt}\right| dt = \left\{\begin{matrix} \mu - \widetilde{\mu} = \Delta\mu > 0, \\ \mu = \frac{\Delta\mu}{2} + \mu - \frac{\Delta\mu}{2}, \\ \text{причем } \mu - \frac{\Delta\mu}{2} > \widetilde{\mu} \end{matrix}\right\} = \int\limits_0^{+\infty} \left|(-t)f(t)e^{-\frac{\Delta\mu}{2}t}e^{-(\mu-\frac{\Delta\mu}{2})t}e^{-i\lambda t}\right| dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left|(-t)e^{-\frac{\Delta\mu}{2}t}\right| \left|f(t)e^{-(\mu-\frac{\Delta\mu}{2})t}\right| \left|e^{-i\lambda t}\right| dt = \left\{\begin{matrix} \left|(-t)e^{-\frac{\Delta\mu}{2}t}\right| \text{-огранич.} \\ \left|f(t)e^{-(\mu-\frac{\Delta\mu}{2})t}\right| \in M_f \\ \left|e^{-i\lambda t}\right| = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow F'(p) \in M_f.$$

Получаем:

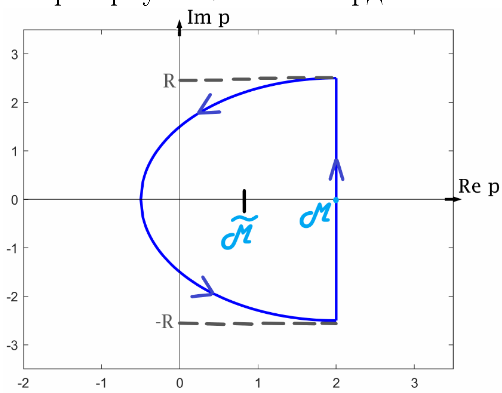
$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} (-t)f(t)e^{-pt}dt,$$

$$F^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} (-t)^{(k)}f(t)e^{-pt}dt.$$

$\operatorname{Re} p > \widetilde{\mu} \quad \Rightarrow \quad F(p) -$ аналитическая при $\operatorname{Re} p > \widetilde{\mu}$

Часть F является мероморфной, т.е. аналитической за исключением конечного числа особых точек, которые являются полюсами или устранимыми особыми точками.

Перевернутая лемма Жордана



$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{p=p_j} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}] \Rightarrow$$

$$! \quad f(t) = \sum_{p=p_j} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}] \quad !$$

$\exists A \geqslant 0\, \mu_0 \in \mathbb{R}\, |f(t)| \leqslant Ae^{\mu_0 t} \Rightarrow \widetilde{\mu} \leqslant \mu_0$

Будем обозначать соответствие следующим образом:

$$\mathbf{f(t)} \supset \mathbf{F(p)} : \begin{matrix} \mathbf{f(t)} \text{ — оригинал} \\ \mathbf{F(p)} \text{ — изображение} \end{matrix}$$

7.2 Таблица преобразований:

Простые:

- $\chi(t) \supset \dfrac{1}{p}$

- $\begin{cases} \chi(t)t^{\alpha} \supset \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \;\; \alpha > -1 \\ \chi(t)t^{n} \supset \dfrac{n!}{p^{n+1}} \end{cases}$

$$\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-pt} = \begin{Bmatrix} p > 0, p \in \mathbb{R}, \\ pt = s \end{Bmatrix} = \int\limits_0^{\infty} \frac{s^{\alpha}}{p^{\alpha}} e^{-s} \frac{ds}{p} =$$

$$= \frac{1}{p^{\alpha}} \int\limits_0^{\infty} s^{\alpha} e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha}}$$

- $\begin{cases} \chi(t)t^{\alpha}e^{\beta t} \supset \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\beta)^{\alpha+1}} \\ \chi(t)t^{n}e^{\beta t} \supset \dfrac{n!}{(p-\beta)^{n+1}} \end{cases}$

[от t^{α} появляется $\Gamma(\alpha+1)$ и везде $p^{\alpha+1}$
от $e^{\beta t}$ появляется $(p-\beta)$]

Тригонометрические:

- $\boldsymbol{\cos(wt)}$

$$\begin{cases} \chi(t)t^{\alpha}\cos(\omega t) \supset \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\dfrac{1}{(p+i\omega)^{\alpha+1}} \overset{!}{+} \dfrac{1}{(p-i\omega)^{\alpha+1}}\right] \\ \chi(t)\cos(\omega t) \supset \dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \\ \chi(t)e^{\beta t}\cos(\omega t) \supset \dfrac{(p-\beta)}{(p-\beta)^2+\omega^2}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{p}$ сверху

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \Rightarrow$$

$$\chi(t)t^{\alpha}e^{i\omega t} \supset \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-i\omega)^{\alpha+1}},$$

$$+$$

$$\chi(t)t^{\alpha}e^{-i\omega t} \supset \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+i\omega)^{\alpha+1}},$$

- $\boldsymbol{\sin(wt)}$

$$\begin{cases} \chi(t)t^{\alpha}\sin(\omega t) \supset \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\dfrac{1}{(p+i\omega)^{\alpha+1}} \overset{!}{-} \dfrac{1}{(p-i\omega)^{\alpha+1}}\right] \\ \chi(t)\sin(\omega t) \supset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \\ \chi(t)e^{\beta t}\sin(\omega t) \supset \dfrac{\omega}{(p-\beta)^2+\omega^2}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{w}$ сверху

Гиперболические:

- $\boldsymbol{\cosh(wt)}$

$$\begin{cases} \chi(t)\cos(\omega t) \supset \dfrac{p}{p^2-\omega^2}, \\ \chi(t)e^{\beta t}\cos(\omega t) \supset \dfrac{(p-\beta)}{(p-\beta)^2-\omega^2}, \end{cases}$$

«−» в знаменателе

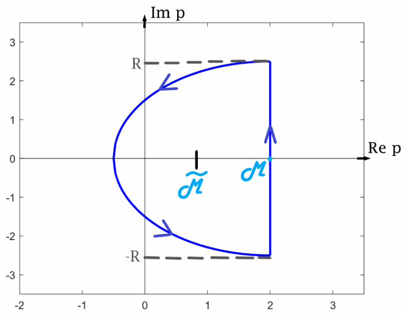
$$\cosh(\omega t) = \frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2}$$

- $\boldsymbol{\sin(wt)}$

$$\begin{cases} \chi(t)\sin(\omega t) \supset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \\ \chi(t)e^{\beta t}\sin(\omega t) \supset \dfrac{\omega}{(p-\beta)^2-\omega^2}, \end{cases} \qquad \text{«}-\text{» в знаменателе}$$

Рассмотрим формулу Меллина: $f(t) = \sum\limits_{p=p_j} \mathrm{Res}[F(p)e^{pt}]$

$$\begin{aligned} &F(p)e^{pt} \overset{R\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \\ &p = \mu + \mathrm{Re}\ e^{i\varphi t} \end{aligned} \qquad \text{равномерно по } \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$



Пример 7.1.

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \qquad f(t) = ?$$

$$F(p)e^{pt} = \frac{c_{-1}}{p+1} + c_0 + c_1(p+1) + \cdots$$

$$\left| \begin{aligned} p_1 = -1: &\quad \lim_{p\to-1} \frac{(p+1)e^{pt}}{(p+1)(p+2)} \to e^{-t} \\ p_2 = -2: &\quad \lim_{p\to-2} \frac{(p+2)e^{pt}}{(p+1)(p+2)} \to -e^{-2t} \end{aligned} \right. \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

7.3 Свойства преобразования Лапласа

$\boxed{\mathrm{I}}$ Линейные подстановки

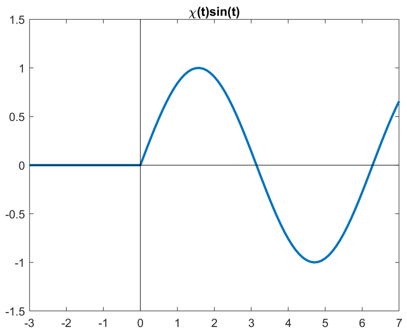
1. Th подобия

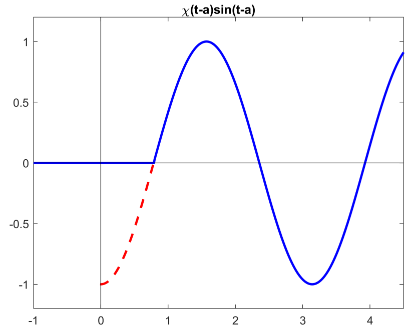
$$f(at) \supset \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\ a > 0 \qquad \Bigg| \qquad \int\limits_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt \quad \{s = at\}$$

$$\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right) \supset F(pb), \quad b = \frac{1}{a} > 0$$

2. 1-ая Th смещения

$$\chi(t-a)f(t-a) \supset e^{-ap}F(p),\ a > 0$$





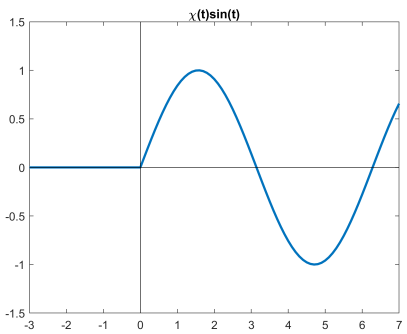
$$\chi(t)\sin(t) \supset \frac{1}{1+p^2} \qquad \underline{\chi(t-1)}\sin(t-1) \supset \frac{e^{-p}}{1+p^2}$$

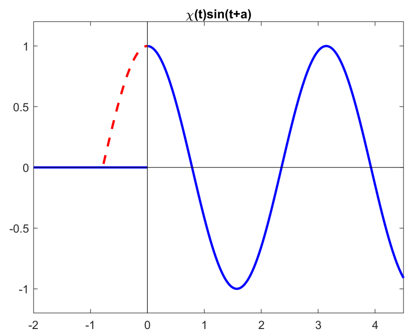
$$\textbf{!} \quad \underline{\chi(t)}\sin(t-1) \supset \frac{\cos(1)}{1+p^2} - \frac{\sin(1)p}{1+p^2} \quad \textbf{!}$$

[Мы знаем преобразования для $\chi(t)$,
а у нас все с a начинается здесь.
Аккуратно с $\chi(t)$**!**,
нужно смотреть на аргумент.]

3. 2-ая Th смещения

$$\chi(t)f(t+a) \supset e^{ap}\left[F(p) - \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right], \; a > 0$$





$$\int\limits_0^{+\infty} f(t+a)e^{-pt}dt = \{s = t+a\} = \int\limits_a^{+\infty} f(s)e^{-p(s-a)}dt = e^{ap}\left[F(p) - \int\limits_0^{a} f(t)e^{-pt}dt\right]$$

Эта часть с минусом — поправка на вылезшую за 0 часть графика.

4. Th затухания

$$\chi(t)f(t)e^{-\beta t} \supset F(p+\beta), \qquad \beta \in \mathbb{C}$$

$\boxed{\text{II}}$ **Дифференцирование**

1. Дифференцирование оригинала

$$f \in \mathbb{C}^k(0,+\infty),\ \text{т.е. } \exists f(+0), f'(+0), \cdots, f^{k-1}(+0)$$

$$f^{(k)}(t) \supset p^k F(p) - p^0 f^{(k-1)}(+0) - p^1 f^{(k-2)}(+0) - \cdots - p^{k-1} f^{(0)}(+0) \quad \Bigg| \ \begin{array}{c}\text{сумма степеней у частей}\\ \text{с минусом равна } k-1\end{array}$$

$$k = 1: \qquad \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty (-p)f(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0)$$

- Важность $f(+0)$

  $\chi(t) \supset \dfrac{1}{p} \qquad \Bigg| \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0+}$

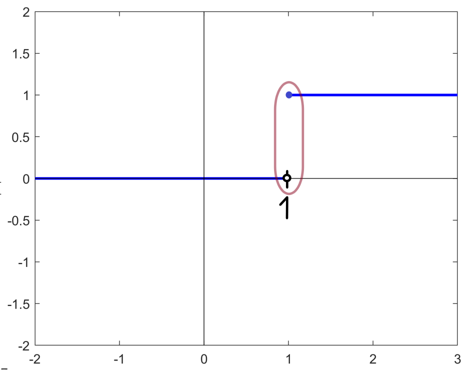
  $0 \supset 1 - \mathbf{1} \leftarrow$ из $p^0 f^{(k-1)}(+0)$ Если $t = 0$, то $\nexists \chi'(0)$

- Важность $\mathbb{C}^k(0,+\infty)$

  $$\chi(t-1) \supset \frac{e^{-p}}{p} \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

  $$0 \overset{?!}{\supset} e^{-p}$$

  Противоречие т.к. $f(t) \notin C^k(0;+\infty)$, н

  $$\underline{\delta(t-1) \supset e^{-p}}$$

  $$\int\limits_0^\infty \delta(t)e^{-pt}dt \equiv 1 \qquad \int\limits_0^\infty \delta^{(k)}(t)e^{-pt}dt \equiv$$

2. Дифференцирование изображения

$$\chi(t)(-t)^k f(t) \supset F^{(k)}(p)$$

8 Умножение и свертка

1) Свертка

$$f(t) \supset F(p)$$
$$g(t) \supset G(p)$$
$$(f * g)(t) \supset F(p)G(p)$$

$\int_0^t f(s)g(t-s)ds$ $\qquad \begin{pmatrix} \text{т.к. при} \quad s<0, f=0 \\ \text{при} \quad s>t, g=0 \end{pmatrix}$

2) Умножения

$$f(t)g(t) \supset (F*G)(p) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} F(z)G(p-z)dz, \ \overline{\mu_1} \le \chi_1 \le Rep - \overline{\mu_2} \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} F(p-z)G(z)dz, \quad \overline{\mu_2} \le \chi_1 \le Rep - \overline{\mu_1} \end{cases}$$

$Rep \ge \overline{\mu_1} + \overline{\mu_2}$

9 Периодические функции

$$f(t+T) = f(t), \ T>0, \ t \ge 0$$

$1^\circ) f = sin(t)$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \Sigma_{k=1}^\infty \int_{(k-1)T}^{kT} f(t)e^{-pt}dt = \{t = s+(k-1)T\} =$$

$$= \Sigma_{k=1}^\infty e^{-(k+1)Tp}\int_0^\pi f(s)e^{-ps}ds \ = \frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pt}}$$

$1^\circ)$ Пр.) $= \int_0^{2\pi} sin(t)e^{-pt}dt = -\int_0^{2\pi} e^{pt}dcos(t) = -\underbrace{e^{-pt}cos(t)\mid_{t=0}^{2\pi}}_{1-e^2\pi p} - p\int_0^{2\pi} e^{-pt}dsin(t) =$

$= \ 1 - e^2\pi p - p^2 I(p)$

$$I(p) = \frac{1-e^2\pi p}{1+p^2}, \qquad \chi(t)sin(t) \supset \frac{1}{1+p^2}$$

$$2^\circ) \ \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-pt}tdt + \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-pt}(T-t)dt = -\frac{1}{p}\int_0^{\frac{T}{2}} tde^{-pt} - \frac{1}{p}\int_{\frac{T}{2}}^T (T-t)de^{-pt} =$$
$$= -\frac{1}{p}\frac{\Gamma}{2}e^{-p\frac{T}{2}} + \frac{1}{p}\frac{\Gamma}{2}e^{-p\frac{T}{2}} + \frac{1}{p}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-pt}dt - \frac{1}{p}\int_{\frac{T}{2}}^T e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2}\left[1 - e^{-p\frac{T}{2}}\right] -$$
$$-\frac{1}{p^2}\left[e^{p\frac{T}{2}} - e^{-pT}\right]$$

10 Отыскание оригинала по изображению

$F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ $\quad Q, R -$ многочлены
$degQ < degR$

$R(p) = (p-\lambda_1)^{k_1} \dots (p-\lambda_m)^{k_m} (p^2+\lambda_1 p + \beta_1)^(L_1) \dots (p^2 + \lambda_n p + \beta_n)^{L_n}$

$$\frac{Q(p)}{R(p)} = \overbrace{\frac{A_{11}}{p-\lambda_1}}^{\subset A_{11}e^{\lambda_1 t}} + \overbrace{\frac{A_{12}}{(p-\lambda_1)^2)}}^{\subset A_{12}te^{\lambda_1 t}} + \ldots + \overbrace{\frac{A_{1,k1}}{(p-\lambda_1)^{k1}}}^{\subset A_{11}t^{k-1-1}e^{\lambda_1 t}} + \overbrace{\frac{B_{11}p + C_{11}}{p^2+\lambda_1 p + \beta_1}}^{\subset ...?} +$$
$$+ \frac{B_{12}p + C_{12}}{(p^2+\lambda_1 p+\beta_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1,l}p + C_{1,l}}{(p^2+\lambda_1 p+\beta_1)^{l1}} + \ldots$$

Как просто найти?

1) $A_{i1} \dots Aik_i :$

$$A_{i,k_i} : \ F(p)(p-\lambda_i)^{k_i} = A_{i1}(p-\lambda_i)^{k_i - 1} + \ldots + A_{i,k_1}(p-\lambda_i)^1 + \ldots + A_{i,k_i} + G_i(p)$$

подставляем

$$p = \lambda_i \ G(\lambda_i) = 0$$

2) $\frac{Bp+C}{p^2+\alpha p+\beta} = \frac{B(p-\mu)+(C+B\mu)\frac{\mu}{\omega}}{(p-\mu)^2+\omega^2} \subset Be^{\mu t}cos(\omega t) + \frac{(B\mu + C)}{\omega}e^{\mu t}sin(\omega t)$

$\chi(t)e^{\beta t}sin(\omega t) \supset \frac{\omega}{(p-\beta)^2+\omega^2}$

11 Уравнение n-ого порядка (с постоянными коэфициентами)

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 y^{(1)}(t) + c_0 y(t) = f(t) \\ y(0) = y_0, \ y^{(1)}(0), = y_1 \ , \ldots y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

$$y(t) = u(t) + \upsilon(t)$$

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + c_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 u^{(1)}(t) + c_0 u(t) = 0 \\ u(0) = u_0, \;\; u^{(1)}(0), = u_1 \;\; , \ldots u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \upsilon^{(n)}(t) + c_{n-1}\upsilon^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 \upsilon^{(1)}(t) + c_0 \upsilon(t \\ \upsilon(0) = \upsilon_0, \;\; \upsilon^{(1)}(0), = \upsilon_1 \;\; , \ldots \upsilon^{(n-1)}(0) = \upsilon_{n-1} \end{cases}$$

11.1 Фундаментальтаное решение(функция Грина)

$G(p) \subset g(t):$

$$\begin{cases} g^{(n)}(t) + c_{n-1}g^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 g^{(1)}(t) + c_0 g(t) = 0 \\ g(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0, \;\; g^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

Либо:

$$\begin{cases} g^{(n)}(t) + c_{n-1}g^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 g^{(1)}(t) + c_0 g(t) = \delta(t) \\ g(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$p^n G - 1 + c_{n-1}p^{n-1}G + \ldots + c_1 pG + c_0 G = 0$$

$$\underbrace{(p^n + c_{n-1}p^{n-1} + \ldots + c_1 p + c_0)}_{=Z(p)} G(p) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; G(p) = \frac{1}{Z(p)}$$

Если $\quad v \supset V$

$ZV = F, \;\; V = \frac{F}{Z} = FG \qquad\qquad v = g * f$

а $\;\; u(t) = y_{n-1}g(t) + y_{n-2}$

$$\begin{cases} y''(t) + c_1 y'(t) + c_0 y(t) = 0 \\ y(0) = y_0, \;\; y'(0) = y_1 \end{cases}$$

$$p^2 Y - y_1 p y_0 + c_1(pY - y_0) + c_0 Y = 0$$
$$(p^2 + c_1 p + c_0)Y = y_1 + y_0(p + c_1)$$
$$y = \underbrace{y_1 G)}_{\subset y_1 g(t)} + \underbrace{y_0(pG + c_1 G)}_{\subset y_0 g(t) + c_1 g(t)}$$

11.2 Пример задачи

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 2cos(t) \\ x(o) = 0, \ \ x'(0) = -1 \end{cases}$$

$x(t) \supset X(p) \ \ f^{(k)}(t) \supset p^k F(p) - \ldots - f^{(k-1)}(0) - p^{k-1} f(0)$

$$p^2 X - (-1) + X = 2\frac{p}{p^2+1}$$

$$X(p^2+1) = \frac{2p}{p^2+1} - 1 \qquad \frac{2p}{(p^2+1)^2} \subset tsin(t)$$

$$X = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1} \qquad \frac{1}{p^2+1} \subset sin(t)$$

$$x(t) = tsin(t) - sin(t)$$

$$\begin{cases} x'' - 4x = sin(\frac{3t}{2})sin(\frac{t}{2}) \\ x(o) = 1, \ x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(cos(\frac{3t}{2}) - cos(\frac{t}{2}) = \frac{1}{2}(cos(t) - cos(2t))$$

$$t^{(k)}(t) \supset p^k F(p) - \Sigma_{i=0}^{k-1} p^i f^{k-i-1}(t_0)$$

$$p^2 X - p - 4X = \frac{1}{2}(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-4})$$

$$(p^2-4)X = \frac{1}{2}(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4})$$

$$X = \frac{1}{2}(\frac{p}{(p^2+1)(p^2-4)} - \frac{p}{(p^2+4)(p^2-4)}) + \frac{p}{p^2-4}$$

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2-4)} - \frac{p}{5(p^2-4)} = \frac{5p-p^3+p}{5(p^2+1)(p^2-4)} = \frac{4p-p^3}{5(p^2+1)(p^2-4)} = \frac{p(4-p^2)}{5(p^2+1)(p^2-4)} = \frac{-p}{5(p^2+1)}$$

$$\frac{p}{(p-2)(p+2)(p^2+1)} = \overbrace{\frac{A_1}{p-2}}^{=\frac{1}{16}} + \overbrace{\frac{A_2}{p+2}}^{=\frac{1}{16}} + \frac{Bp+C}{p^2+4}$$

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = \frac{2}{4*8} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16}(\frac{p+2+p-2}{p^2-4}) = \frac{1}{8}\frac{p}{p^2-4}$$

$$\frac{p}{(p^2+4)(p^2-4)} - \frac{p}{8(p^2-4)} = \frac{8p-p^3-4p}{8(p^2-4)(p^2+4)} = \frac{-p(p^2-4)}{8(p^2-4)(p^2+4)} =$$

$$x(t) = ch(2t) + (\frac{1}{26} - \frac{1}{32})e^{2t} + (\frac{1}{26} - \frac{1}{32})e^{-2t}$$

Матричная экспонента.

$x(t)$ удовлетвояет условию:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \\ X(0) = I \end{cases}$$

$X(t) \supset \Phi(p)$

$p\Phi - I = A\Phi \;\Rightarrow\; \Phi(pI - A) = I \;\Rightarrow\; \Phi(p) = (pI - A)^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} p-1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} (p-1)^2 & 0 & p-1 & 2 \\ 0 & p-1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{p-1} & \frac{2}{(p-1)^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{p-1} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{p-1} & \frac{2}{(p-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{p-1} \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} = e^{At}$$

12 Теоремы о предельных значениях

Теорема 12.1. *Пусть f – непрерывно дифференцируема; $f(t) \supset F(p)$. Если существует предел $f(+\infty)$, тогда*

$$f(+\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Доказательство.

$$f'(t) \supset pF(p) - f(+0)$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0)$$

что при p стремящемся к нулю стремится к $f(+\infty) - f(+0)$. ■

Контрпримеры:

$$\cos t \supset \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow pF(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \overset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\sin t \supset \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow pF(p) = \frac{p}{p^2+1} \overset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Однако, мы знаем, что у синуса и косинуса пределов на бесконечности не существует.

Теорема 12.2. *Пусть f – непрерывно дифференцируема; $f(t) \supset F(p)$. Если существует предел $f(+0)$, то*

$$f(+0) = \lim_{p\to\infty} pF(p).$$

Доказательство.

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0),$$

здесь левая часть равенства при p стремящемся к бесконечности сходится к нулю. ■

Обратимся к предыдущему примеру:

$$\frac{p^2}{p^2+1} \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 1 = \cos(0),$$

$$\frac{p}{p^2+1} \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \sin(0).$$

13 Приложения преобразования Лапласа к исследованию процессов в электрических цепях

Рассмотрим электрическую цепь, включающую в себя индуктивную катушку, сопротивление и конденсатор, рис. 13.1. Обозначим I – ток, E – и $i \supset I, e \supset E$. Переходя к комплексному току $i(t)$, и полагая $i(0) = 0$, можно описать систему следующим образом:

$$U_L = L\frac{di}{dt}, U_R = Ri(t), U_C = \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)dt$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)dt = e(t)$$

$$pLI + RI + \frac{I}{Cp} = E$$

$$(pL + R + \frac{1}{Cp})I = ZI = E$$

Здесь Z – *импеданс* (операторное сопротивление), а $Y = \frac{1}{Z}$ – *адмитанс*.

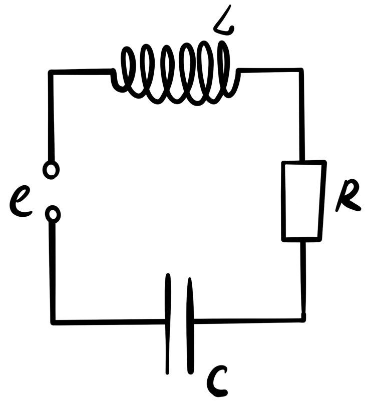


Рис. 13.1: Электрическая цепь, включающая в себя индуктивную катушку, конденсатор и резистор

Теперь рассмотрим цепь с параллельным соединением, рис. 13.2a. Для цепей с параллельным соединением при импедансах $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ верно:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_2 = \frac{1}{Z_2}, \dots, \frac{1}{Z_k}, \quad Y = Y_1 + Y_2 + \dots Y_k.$$

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{Z_2} = Cp + \frac{1}{R} = \frac{CRp + 1}{R}$$

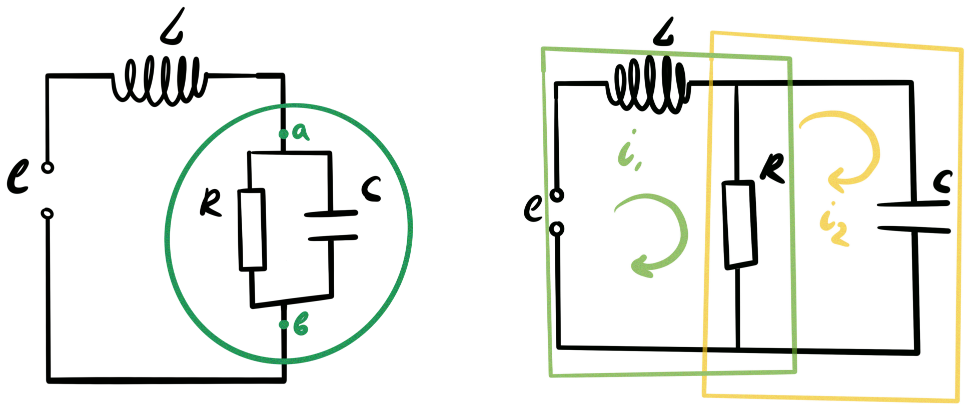
$$Z_2 = \frac{R}{CRp + 1}, Z = pL + \frac{R}{CRp + 1}$$

Можно эту же цепь рассмотреть как двухконтурную, рис. 13.2b, и, опираясь на законы Кирхгофа, получить

$$\begin{cases} pLI_1 + R(I_1 - I_2) = E \\ R(I_2 - I_1) + \frac{1}{Cp}I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_2(R + \frac{1}{Cp}) - RI_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}}I_1$$



(a) Рассматриваем как цепь с параллельным соединением

(b) Рассматриваем как двухконтурную цепь

Рис. 13.2: Цепь с параллельным соединением

$$I_1 - I_2 = (1 - \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}})I_1 = \frac{1}{CRp + 1}I_1$$

$$I_1(pL + \frac{R}{CRp + 1}) = E = I_1 Z$$

В задачах часто рассматривают случаи

- Постоянного тока
$$e = e_0, E = \frac{e_0}{p}$$
- Переменного тока
$$e = e_0 \sin(wt), E = \frac{e_0 w}{p^2 + w^2}$$

Решим конкретную задачу, рис. 13.3:

$$(Lp + R + \frac{1}{Cp})I = \frac{e_0}{p}$$

$$I = \frac{e_0}{p}\left(\frac{1}{Lp + R + 1/Cp}\right) = \frac{e_0 C}{CLp^2 + RCp + 1} = \frac{e_0}{L(p + \frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}} =$$

$$= \left\{\text{пусть } D = C^2r^2 - 4CL < 0, \text{ тогда корни будут комплексными}\right\} =$$

$$= \frac{e_0/L}{(p + \frac{R}{2L}^2) + (\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})} \subset e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{e_0}{L}\frac{\sin\left(\sqrt{(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})}t\right)}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Рассмотрим цепь с нагрузкой, рис. 13.4a

$$RI + pL(I - I') + RI + \frac{1}{Cp}I = E$$

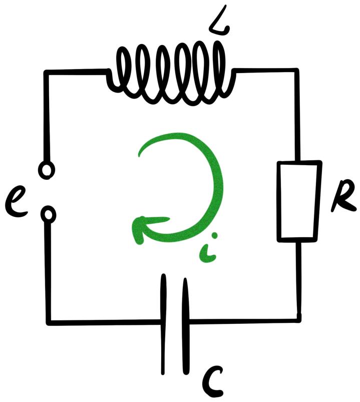
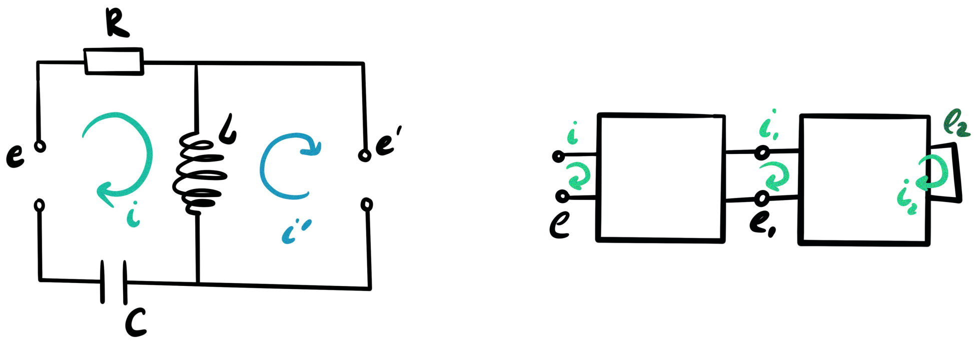


Рис. 13.3: Конкретный пример



(a) Цепь с нагрузкой (b) Можно рассматривать и так

Рис. 13.4: Пример 2

$$pL(I' - I) = -E'$$

$$RI + \frac{1}{Cp} I = E - E'$$

$$\begin{cases} E' = E - RI + \frac{1}{Cp} I \\ I' = I - \frac{E - (R + \frac{1}{Cp})I}{pL} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E' = A(p)E + B(p)I \\ I' = C(p)E + D(p)I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \tilde{A}(p)E' + \tilde{B}(p)I' \\ I' = \tilde{C}(p)E' + \tilde{D}(p)I' \end{cases}$$

Положим

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(p) & \tilde{B}(p) \\ \tilde{C}(p) & \tilde{D}(p) \end{bmatrix} = \tilde{U}.$$

$$\begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \tilde{U}_1 \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \{E_2 = 0\} = \tilde{U}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

14 Электромеханические аналогии

Рассмотрим Гамильтонову систему, с переменными $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$, на которую действуют внешние силы Q. Внешние силы могут быть следующих типов:

$\boxed{\text{I}}$ *Диссипативные*

$$Q = n - B\dot{q}, \quad B = B^T > 0$$

$$\langle \dot{q}, Q \rangle = -\langle \dot{q}, B\dot{q} \rangle < 0$$

К ним относится сила трения. Можно также ввести *функцию Релея* $R = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, B\dot{q} \rangle$ и тогда $Q = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}}$.

$\boxed{\text{II}}$ *Гироскопические*

$$Q = \Gamma\dot{q}, \quad \Gamma^T = -\Gamma$$

$$\langle \dot{q}, Q \rangle = \langle \dot{q}, \Gamma\dot{q} \rangle = \left\langle \Gamma^T\dot{q}, \dot{q} \right\rangle = \langle \dot{q}, \Gamma\dot{q} \rangle = -\langle \dot{q}, \Gamma \rangle = 0$$

Далее обозначим К – кинетическую энергию системы, П – потенциальную энергию, Е = К + П – полную энергию системы,

$$\dot{q} = \text{К} - \Pi, \quad \text{К} = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, M\dot{q} \rangle, \Pi = \Pi(q),$$

$$\frac{d\text{E}}{dt} = \sum_j \langle \dot{q}_j, Q_j \rangle$$

Положим $M = M^T$ и $\frac{\partial \text{К}}{\dot{q}} = M\dot{q}$. Запишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_j Q_j$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \text{К}}{\partial \dot{q}}\Big) - \frac{\partial \text{К}}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \sum_j Q_j$$

Воспользуемся соотношением $\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \text{К}}{\partial \dot{q}}\Big) = M\ddot{q}$, и пусть П имеет вид $\Pi = \Pi(q) = Cq$. Следовательно, получим $M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q_{\text{внешние}}$ или в одномерном случае

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_{\text{внешние}}. \tag{14.1}$$

Проведем аналогию с уравнением

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = e.$$

Если мы вспомним, что $i = \frac{dq}{dt}$, то получим представление аналогичное (14.1):

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R + \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} = e.$$

q	b	m	c	Q	$\text{K} = 1/2m\dot{q}^2$	$R = 1/2b\dot{q}^2$	$\Pi = 1/2cq^2$
q	L	R	$1/$	l	$L/2\dot{q}^2$	$R/2\dot{q}^2$	$1/2Ctq^2$
U	C	$1/R$	$1/L$	di/dt	–	–	–

Таблица 1: Электромеханические аналогии

Кратко выводы можно описать таблицей 1.

Для цепи, иллюстрирующей сложение токов, изображенной на рисунке 14.1, можно выписать следующие соотношения

$$U = L\frac{di}{dt},\, U = Ri,\, i = \frac{U}{R},\, C\frac{dU}{dt} = i,\, i = \frac{1}{L}\int\limits_0^{t_0} U(\tau)d\tau.$$

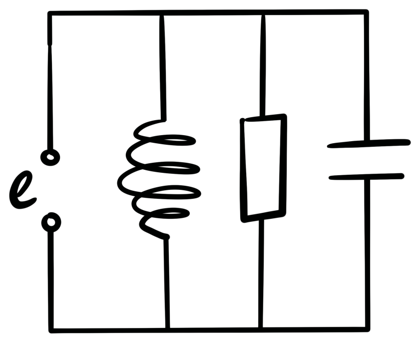


Рис. 14.1: Сложение токов

15 Управляемые и наблюдаемые системы

Рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D_1 v \\ y = Cx + D_2 v. \end{cases} \tag{15.1}$$

Здесь x – *фазовая переменная*, которую мы наблюдаем, u – *управление*, v – *помеха*, причиной появления которой зачастую являются неточность линеризации или внешние условия. Второе уравнение в данной системе называется *уравнением наблюдения*, и соответственно y – *наблюдением*. Применим преобразование Лапласа, обозначив $x(0) = x^0$, $x \supset X, y \supset Y, v \supset V, u \supset U$.

$$pX - x^0 = AX + BU + D_1 V$$

$$(pI - A)X = x^0 + BU + D_1 V$$

$$X = (pI - A)^{-1}x^0 + (pI - A)^{-1}BU + (pI - A)^{-1}D_1V$$
$$Y = CX + D_2V = C(pI - A)^{-1}x^0 + C(pI - A)^{-1}BU + (C(pI - A)^{-1}D_1 + D_2)V =$$
$$= C(pI - A)^{-1}x^0 + H_{yu}U + H_{yv}V$$

$H_{yu} = C(pI - A)^{-1}B$ принято называть *передаточной функцией (transfer function).*

Пусть наблюдение одномерно $y \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, и удовлетворяет системе

$$\frac{d^n y}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + c_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \ldots c_1\frac{dy}{dt} + c_0 y = u. \tag{15.2}$$

Сведем ее к системе (15.1):

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \frac{dy}{dt} \\ \ldots \\ x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad (y = x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \ldots \\ \dot{x}_n = -c_{n-1}x_n - c_{n-2}x_{n-1} - \ldots - c_0x_1 + u. \end{cases} \tag{15.3}$$

Возвращаясь к многомерной системе, для y справедливо:

$$\begin{cases} y = \underline{C^T x}, \quad (C = C^T) \\ \frac{dy}{dt} = \underline{C^T Ax} + C^T Bu \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \underline{C^T A^2 x} + C^T ABu + C^T B\frac{du}{dt} \\ \ldots \\ \frac{d^ny}{dt^n} = \underline{C^T A^n x} + C^T A^{n-1}Bu + \ldots C^T B\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}. \end{cases} \tag{15.4}$$

По теореме Гамильтона-Кэли A имеет разложение $A^n = c_0 I + c_1 A + \ldots c_{n-1}A^{n-1}$. С тем, чтобы избавиться от подчеркнутых слагаемых домножим первое из уравнений системы (15.4) на $-c_0$, второе на $-c_1$, третье на $-c_2$, далее на аналогичные коэффициенты вплоть до предпоследнего уравнения, а затем сложим их все. Тогда мы сможем продолжить равенство из уравнения (15.2):

$$u = \beta_0 u + \beta_1\frac{du}{dt} + \ldots \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}.$$

Положив $x^0 = 0$ и исключив помеху, получим $Y = H_{yu}U$. Различные схемы управления можно увидеть на рисунках 15.1a, 15.1b.

Для передаточной функции $H = H_{yu} = C(pI - A)^{-1}$ вводят понятие *частотной характеристики,* определяемой как $H(iw), w \in \mathbb{R}$. $|H(iw)|$ называют *коэффициентом усиления.*

Рассмотрим управление вида

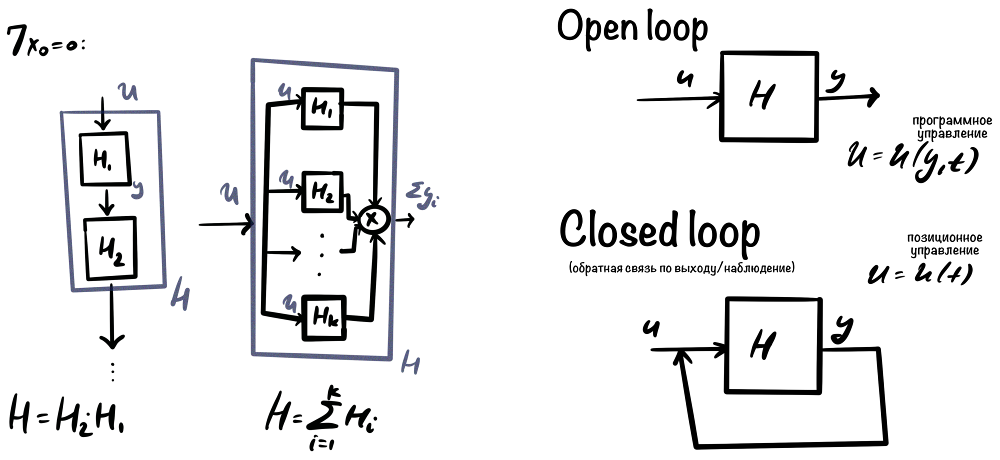
$$u(t) = ae^{iwt}, \quad a \in \mathbb{R}^{n\times 1}, w \in \mathbb{R},$$

и будем считать A устойчивой матрицей (это верно, например, если все собственные ее значения имеют отрицательную вещественную часть). Справедлива теорема

Теорема 15.1. *Пусть A устойчивая матрица, $\bar{y}(t) = H(iw)ae^{iwt}$. Тогда*

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $y(t)$ – выход при $u(t) = ae^{iwt}$ (устойчивый режим).



(a) Различное соединение блоков (b) Замкнутая и разомкнутая система

Рис. 15.1: Различные управляемые системы

Доказательство.

$$y(t) = Ce^{At}x^0 + C\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}Bae^{iwt}d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{t \to \infty, Ce^{At}x^0 \xrightarrow{t\to\infty} 0\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ce^{At}\int\limits_0^t e^{-A\tau}Be^{iwt}ad\tau = Ce^{At}\int\limits_0^t e^{(iwI-A)\tau}d\tau Ba =$$

$$= C\big[e^{iwI} - e^{-At}\big]\big[iwI - A\big]^{-1}Ba \xrightarrow{t\to\infty} C\big[iwI - A\big]^{-1}Bae^{iwt} = H(iw)ae^{iwt}$$

Здесь мы воспользовались следующим преобразованием:

$$\int\limits_0^t e^{(iwI-A)\tau}d\tau = \left\{\frac{e^{(iwI-A)\tau}}{(iwI-A)}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}\right\} = \big[e^{(iwI-A)t} - I\big](iwI-A)^{-1},$$

справедливость этой формулы доказывается прямым дифференцированием. ■

16 Устойчивость

Исследуем на устойчивость систему $\dot{x} = Ax$, где $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ и $\Re\lambda_j \neq 0$. Введем функцию $\chi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + C_{n-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0 = (\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Проблема в том, что все собственные значения сложно искать

Определение 16.1. Матрица A - усточива $\Leftrightarrow \forall j \Re\lambda_j < 0$. Матрица A - неусточива $\Leftrightarrow \exists j \Re\lambda_j > 0$.

$\chi(\lambda) = 0$ — критерий асимптотической устойчивости.
A — устойчива $\Rightarrow \chi(0) = C_0 > 0$. Заметим, что $\chi(0) = \prod_{j=1}^n (-\lambda_j)$. В случае действительного λ_j получаем $-\lambda_j > 0$, а в комплексном случае получим $(-\lambda_j)(-\overline{\lambda_j}) = |\lambda_j|^2 = (\alpha^2 + \beta^2) > 0$

16.1 Графический метод исследования на устойчивость

Рассмотрим $\lambda = i\omega$. Заметим, что тогда $\overline{\chi}(i\omega) = \chi(i\omega)$ Тогда получим:

$$\chi(i\omega) = (i\omega - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (i\omega - \lambda_n)$$

Тогда возможны два случая:

$$\begin{array}{cc} \operatorname{Re}\lambda_j < 0 & \operatorname{Re}\lambda_j > 0 \\ \operatorname{Arg} i\omega - \lambda_i \Big|_{w=-\infty}^{+\infty} = \pi & \operatorname{Arg} i\omega - \lambda_i \Big|_{w=-\infty}^{+\infty} = -\pi \end{array}$$

Тогда получим критерий асимптотической устойчивости Михайлова:
$\operatorname{Arg} \chi(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} n \Leftrightarrow \forall j \operatorname{Re}\lambda_j < 0$.
Иначе критерий Михайлова можно воспринимать как количество четвертей пройденных графиком $\chi(i\omega)$ или годографом по $\omega \in \mathbb{R}^+$

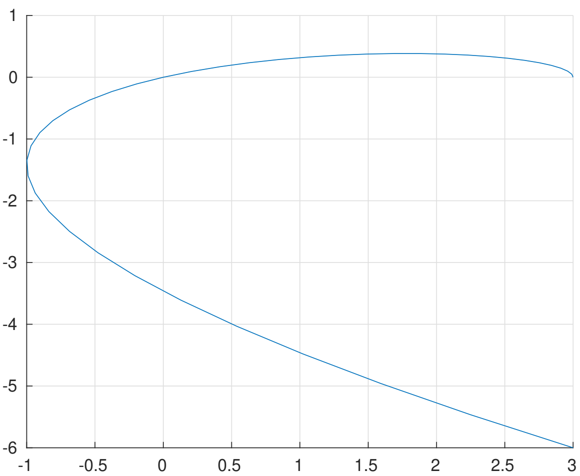
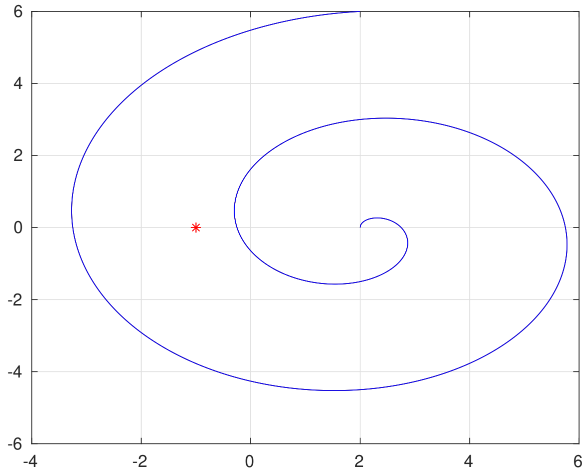


Рис. 16.1: Пример годографа с $\chi(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 3$

16.2 Применение к теории управления

16.3 Теорема Найквиста

Пусть H имеет q неустойчивых полюсов и $n-q$ устойчивых (не имеет чисто мнимых). Тогда замкнутая система устойчива тогда и только тогда когда $H(i\omega)$ не проходит через -1 и делает при $\omega = (0; +\infty)$ $\frac{q}{2}$ полных оборотов против часовой стрелки.



Список литературы

[1] К. В. Воронцов. *LaTeX в примерах.* — М.: МЦНМО, 2005.