Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Конспект лекций

«Преобразования Лапласа и Фурье»

Лектор
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв

Москва, 2019

Содержание

1 Как заполнять документ

Сейчас я расскажу, как максимально быстро собрать лекцию, чтобы никому ничего не сломать. Предлагаю также ориентироваться на этот пример (папка `ch0`). Итак, порядок действий:

1. Скачать себе этот архив.
   Он собирается командой `make` или `pdflatex doc`, если вы используете Windows.

2. Создать в корне вашу папку `chНОМЕРГЛАВЫ`.
   В примере папка `ch0`.

3. Заполнить в этой папке три документа: `doc.tex`, `bib.tex`, `set.tex`, положить туда все ваши картинки и все, что вам нужно.

4. Проверить, что все собралось правильно.

5. Отослать мне на почту `kireku@gmail.com` с темой "ВКР" или, если вы умеете, сделать `pull request`.

1.1 doc.tex

Это файл с вашим текстом. Туда вы пишите лекцию.

Я добавил уже ряд математических операторов. Если вы хотите добавить свои смотри раздел про `set.tex`.

Код	Результат
`\sgn`	sgn
`\const`	const
`\T`	T
`\SetN`	$\mathbb{N}$
`\SetZ`	$\mathbb{Z}$
`\SetQ`	$\mathbb{Q}$
`\SetR`	$\mathbb{R}$
`\SetC`	$\mathbb{C}$
`\Prb`	$\mathbb{P}$
`\Ind`	$\mathbb{I}$
`\Exp`	$\mathbb{E}$
`\Var`	$\mathbb{V}\mathrm{ar}$
`\SetX`	$\mathcal{X}$
`\SetP`	$\mathcal{P}$

Также встроены окружения. Они как в книжке Арама, то есть красивые, не используйте другие.

Код	Результат

`\begin{theorem}`
`        Это теорема.`
`\end{theorem}`
	Теорема 1.1. *Это теорема.*

`\begin{definition}`
`        Это определение`
`        \textit{сходимости}.`
`\end{definition}`
	Определение 1.1. Это определение *сходимости.*

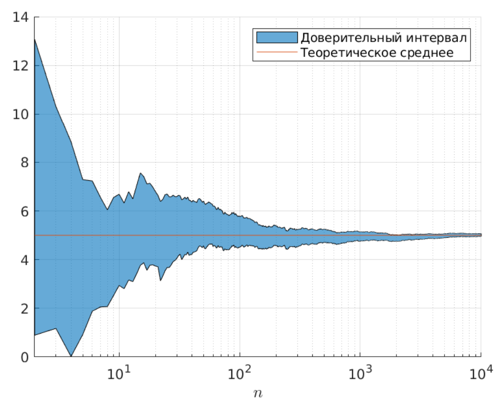
`\begin{lemma}`
`        Это лемма.`
`\end{lemma}`
	Лемма 1.1. *Это лемма.*

`\begin{assertion}`
`        Это утверждение.`
`\end{assertion}`
	Утверждение 1.1. *Это утверждение.*

`\begin{example}`
`        Это пример.`
`\end{example}`
	Пример 1.1. Это пример.

`\begin{proof}`
`        Это доказательство чего-либо.`
`\end{proof}`
	Доказательство. Это доказательство чего-либо. ■

Чтобы добавить картинку, положите ее в вашу папку и укажите полный путь:

Код	Результат
`\includegraphics{ch0/example.eps}`	

Используя метки, обязательно ставьте префикс-название папки:

Код	Результат

`\begin{equation}`
`\label{ch0.square}`
`        x^2 = 0.`
`\end{equation}`
	$$x^2 = 0. \quad (1.1)$$

1.2 bib.tex

Если вам нужна библиография — сюда можно написать библиографию, она автоматом окажется внизу. Все ссылки, по-прежнему с префиксом.

Содержимое `ch0/bib.tex`

```
\bibitem{ch0.voroncov}
        К.~В.~Воронцов. \textit{\LaTeX в примерах}.~--- М.: МЦНМО, 2005.
```

1.3 set.tex

Если вам жизненно не хватает какой-нибудь суперштуки, которую обычно объявляют в начале файла: новую команду, окружение или что-то в этом духе, то напишите сюда. Но все это пишите с каким-нибудь префиксом.

Например, я очень захотел писать прикольные дроби, типа $\nicefrac{3}{4}$ и новый оператор $\operatorname{Kirill}_{x\in\mathcal{X}}$, тогда я должен туда написать:

Содержимое `ch0/bib.tex`

```
\usepackage{nicefrac}
\DeclareMathOperator{\zeroKir}{Kirill}
```

Но вообще, если вы не уверены, что все не перестанет компилиться, то не стоит подключать пакеты. Пакеты будут действовать на весь документ в целом.

1.4 Заключение

Вообще, было бы круто, чтобы все получилось примерно одинаково и красиво. В библиографии есть книжка хорошая по Латеху, если кому нужна.

1.5 Список приславших

1. Абрамова
2. Авалиани
3. Ашабоков
4. Егоров
5. Зинченко
6. Кожевец
7. Копосов
8. Кулешов
9. Наумова
10. Пак
11. Садков

Часть I

Преобразование Лапласа–Фурье

2 Некоторые сведения из комплексного анализа

Перед тем, как перейти непосредственно к теме лекций, стоит привести известные сведения из курса «Теории функций комплексного переменного». Итак рассмотрим функцию

$$f(z) = u(x,\,y) + iv(x,\,y), \quad \text{где } z = x + iy.$$

2.1 Основные определения

Определение 2.1. *Производной* функции $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ называется

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad \text{где } \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Теорема 2.1 (Условия Коши–Римана)**.** *Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы её вещественная и мнимая части $u(x,\,y)$ и $v(x,\,y)$ были дифференцируемы в точке $(x_0,\,y_0)$ и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись условия Коши–Римана:*

$$\begin{cases} u'_x = v'_y, \\ u'_y = -v'_x. \end{cases}$$

Определение 2.2. *Интегралом* функции $f(z)$ по некоторой кусочно-гладкой кривой $\Gamma = \{\, z = z(t) \,:\, dz(t) = z'(t)dt,\, t \in [t_0,\,t_1] \,\}$ называется следующий предел последовательности интегральных сумм

$$\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\Delta z_j \xrightarrow[\Delta z_j \to 0]{} \int_\Gamma f(z)\,dz, \quad \text{где } \xi_j \in [z_{j-1},\,z_j],\ \Delta z_j = z_j - z_{j-1}.$$

Из определения получаем также

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[(u'_x - v'_y) + i(v'_x + u'_y)\right]\,dt =$$
$$= \int_\Gamma (udx - vdy) + i\int_\Gamma (vdx + udy).$$

Определение 2.3. Функция $f(z)$ называется *аналитической* в некоторой области $A \subset \mathbb{C}$ если выполняется одно из четырёх равносильных условий:

1. Ряд Тейлора функции в каждой точке $z \in A$ сходится к $f(z)$;
2. Функция дифференцируема в каждой точке $z \in A$;
3. В каждой точке $z \in A$ выполняются условия Коши–Римана;
4. Интеграл $\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$ для любой замкнутой кривой $\Gamma \subset A$.

Утверждение 2.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области γ, тогда в любой точке $z \in \gamma$ её можно представить в виде интеграла*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

Утверждение 2.2. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области γ, тогда в любой точке $z \in \gamma$ она имеет производные любого поряка и справедлива формула:*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\,d\xi.$$

2.2 О теории вычетов

Определение 2.4. Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ называется *рядом Лорана* функции $f(z)$, если его коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad \text{где } n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots .$$

Замечание 2.1. При этом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ называется *правильной частью* ряда Лорана, а $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ – *главной частью*. Ряд Лорана сходится тогда и только тогда, когда сходятся его правильная и главная части.

Определение 2.5. Говорят, что изолированная точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f(z)$ называется *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Замечание 2.2. Номер старшего члена главной части ряда Лорана функции в ее разложении в окрестности полюса называется порядком полюса. Главная часть ряда Лорана в случае полюса порядка и записывается следующим образом:

а) в случае $z_0 \in \mathbb{C}$ в виде $\sum_{k=-n}^{-1} c_k(z-z_0)^n$, или $\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$, подробнее:

$$c_n \cdot z^n + c_{n-1}\cdot z^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot z, \quad c_n \neq 0.$$

б) в случае $z_0 = \infty$ в виде:

$$c_n \cdot z^n + c_{n-1}\cdot z^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot z, \quad c_n \neq 0.$$

Определение 2.6. Назовём особой точку, в которой нарушается аналитичность функции $f(z)$. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz,$$

где γ — контур, принадлежащий окрестности точки z_0 и охватывающий ее.

Теорема 2.2 (Основная теорема о вычетах). *Пусть функция $f(z)$ аналитична в $\overline{D}$ за исключением конечного числа особых точек $z_k \in D$. Тогда справедливо равенство*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z), \quad \text{где } z_k \in D.$$

Утверждение 2.3. *Вычет функции в изолированной особой точке равен коэффициенту c_{-1} при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, т.е. при $\dfrac{1}{z-z_0}$ для $z_0 \in \mathbb{C}$, и этому коэффициенту, взятому с противоположным знаком, для $z_0 = \infty$:*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = c_{-1}, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1}, \quad z_0 = \infty.$$

Утверждение 2.4. *Пусть z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big[f(z)\cdot(z-z_0)^n\big],$$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\big[f(z)\cdot(z-z_0)\big].$$

2.3 Применение вычетов для вычисления интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} g(x)\,dx$

Большой интерес представляет возможность применения вычетов для вычисления несобственных интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, где интеграл понимается в смысле главного значения, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ (здесь отрезок $[a,b]=[-R,R]$).

Будем рассматривать функцию $f(x)$, непрерывную на $(-\infty,+\infty)$. Возможность использования вычетов при решении такой задачи основана на том, что отрезок $[-R,R]$ действительной оси рассматривается как часть замкнутого контура C, состоящего из этого отрезка и дуги окружности, а интеграл по контуру записывается в виде суммы:

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz, \text{где } C_R \text{ – дуга окружности } |z|=R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется как предел:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \oint\limits_C f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)\,dz\,.$$

Интерес, с точки зрения применения вычетов, представляют интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, где функция $f(x)$ такова, что $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$. Классы таких функций выделяются, и для всех функций рассматриваемого класса устанавливается формуа $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \oint\limits_C f(z)dz$.

Мы же, далее, рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x) = R(x)e^{i\lambda x}$ и $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $m-n \geqslant 1$ и $Q_m(x) \neq 0$, $x \in R$, а $R(x)$ принимает действительные значения. Такой интеграл сходится, так как он может быть записан в виде суммы двух сходящихся интегралов:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x\,dx\,.$$

Доказательство возможности применения вычетов к вычислению интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx$ основано на следующем утверждении.

Утверждение 2.5 (Лемма Жордана)**.** *Пусть функция f(z) непрерывна в области* $D: |z| \geqslant R_0$, $\operatorname{Im} z \geqslant -a$ *и* $\lim\limits_{R\to\infty} \max_{C_R} |f(z)| = 0$, *где* C_R *– дуга окружности* $|z|=R$, $\operatorname{Im} z \geqslant -a$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *справедливо равенство*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz = 0.$$

Для рассматриваемых в данном пункте интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx$ функция $f(z) = R(z)$ удовлетворяет лемме Жордана. Подводя итог приведенным рассуждениям, запишем следующее утверждение.

Утверждение 2.6. *Пусть* $R(x)$ *– рациональная функция, не имеющая особых точек на действительной оси (т.е.* $Q(x) \neq 0$ *для* $x \in \mathbb{R}$*), для которой точка* $z=\infty$ *– нуль порядка не ниже первого (т.е.* $m-n \geqslant 1$*). Тогда справедливы формулы:*

1. при $\lambda > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}\bigl[R(z)e^{i\lambda z}\bigr], \quad \operatorname{Im} z_k > 0;$$

2. при $\lambda < 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\lambda x}\,dx = -2i\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}\bigl[R(z)e^{i\lambda z}\bigr], \quad \operatorname{Im} z_k < 0;$$

3 Вывод преобразования Фурье

Пусть $f(t)$ – периодическая с периодом $T = 2\pi,\ t \in [-\pi, \pi]$.

$$f(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos kt + b_k \sin kt\right],$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\ dt, k = 0, 1, \ldots,$$
$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\ dt, k = 1, 2, \ldots.$$

Запишем ряд в наних обозначениях

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt,\ c_0 = a_0,\ c_k = a_k + ib_k,$$

$$c_k e^{ikt} + c_{-k}e^{-ikt} = [a_k - ib_k][\cos\ kt + i\sin\ kt] + [a_k + ib_k][\cos\ kt - i\sin\ kt] = 2a_k\cos\ kt + 2b_k \sin\ kt.$$

Далее, сделаем небольшую замену

$$f(t) \longrightarrow f(s),\ s \in [-T/2, T/2],\ t = \frac{2\pi s}{T} \Rightarrow f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}.$$

Тогда

$$f(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi i s}{T}}, \quad c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(s)e^{\frac{-2\pi isk}{T}}ds.$$

Пусть теперь

$$f_T(t) = f(t),\ \text{но продолженное по периоду } t \in [-T/2, T/2]\,,\ f(t) \in (\infty, +\infty).$$

$$f_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_{k,T} e^{\frac{2\pi it}{T}}, \quad c_{k,T} = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{\frac{-2\pi itk}{T}}ds.$$

Пусть $\exists\lambda \in \mathbb{R},\ \Delta\lambda > 0$ и $k : \lambda \leqslant \dfrac{2\pi k}{T} < \lambda + \Delta\lambda\ \Rightarrow\ \dfrac{T\lambda}{2\pi} \leq k < \dfrac{T\lambda}{2\pi} + \dfrac{T\Delta\lambda}{2\pi}$, значит

$$k \approx \frac{T\Delta\lambda}{2\pi}, \quad c_{k,T} \approx c_{\lambda,T} = \frac{1}{T}\underbrace{\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\lambda t}}_{=F_T(\lambda)}$$

В итоге получим

$$f_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{F_T(\lambda)}{T}e^{\frac{2\pi ikt}{T}} \approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{F_T(\lambda)}{T}e^{-\lambda t}\frac{T}{2\pi}\Delta\lambda \xrightarrow{\Delta\lambda\to 0}$$

$$\xrightarrow{\Delta\lambda\to 0} \boxed{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda = f(t)}$$ **– обратное преобразование Фурье**

$$\boxed{F_T(\lambda) \xrightarrow{T\to\infty} F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda\, t}dt}$$ **– прямое преобразование Фурье**

Другие формы преобразования Фурье, встречающиеся в литературе

$$F(\lambda) = \frac{1}{g}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega\lambda\, t}dt, \quad f(t) = \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\omega\lambda\, t}d\lambda, \quad gh = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

1. $\omega = \pm 1; \quad g = 1,\ h = 2\pi.$
2. $\omega = \pm 2\pi; \quad g = h = 1.$
3. $\omega = \pm 1; \quad g = h = \sqrt{2\pi}.$

3.1 Примеры

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt \text{— прямое преобразование}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{i\lambda t}dt \text{— обратное преобразование}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 3.1. Пусть $f(t) = e^{-\beta t^2}, \beta > 0, \beta \neq 0,\ \frac{i\lambda t}{\beta} = \frac{2i\lambda t}{2i\beta} = 2(\frac{i\lambda}{2\beta})t$, тогда

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t^2}e^{-i\lambda t}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(t+\frac{i\lambda}{2\beta})^2-\frac{\lambda^2}{4\beta}}dt = \left\{s = t + \frac{i\lambda}{\beta}\right\} = \int\limits_{\frac{i\lambda}{2\beta}-\infty}^{\frac{i\lambda}{2\beta}+\infty} e^{-\beta^2 s}ds \cdot e^{\frac{-\lambda^2}{4\beta}} =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \cdot e^{\frac{-\lambda^2}{3\beta}}\left(\int\limits_{-R+\frac{i\lambda}{2\beta}}^{-R}(...)ds + \int\limits_{-R}^{R}(...)ds + \int\limits_{R}^{R+\frac{i\lambda}{2\beta}ds}\right) =$$

$$= \left\{\left|\int\limits_{R}^{R+\frac{i\lambda}{2\beta}} e^{-\beta s^2}ds\right| = \left|\int\limits_{0}^{\frac{\lambda}{2\beta}} e^{-\beta(R^2-y^2+2iyR)}idy\right| \le \int\limits_{0}^{\frac{\lambda}{2\beta}} e^{-\beta(R^2-y^2)}dy \le \frac{\lambda}{2\beta}e^{\beta(\frac{\lambda}{4\beta}-R^2)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\right\} =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\int\limits_{-R}^{R} e^{-\beta s^2}ds = e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta s^2}ds = e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

Пример 3.2. Пусть $f(t) = e^{-\beta|t|}$, $\beta > 0$, тогда

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t|}e^{-i\lambda t}dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{t(\beta-i\lambda)}dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{t(-\beta-i\lambda)}dt =$$

$$= \frac{e^{t(\beta-i\lambda)}}{(\beta-i\lambda)}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{t(-\beta-i\lambda)}}{-\beta-i\lambda}\Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\beta-i\lambda} - 0 + 0 + \frac{1}{\beta-i\lambda} = \frac{2\beta}{\beta^2+\lambda^2}e^{-\beta|t|} \leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2+\lambda^2}$$

Таким образом, получили, что $e^{-\beta|t|} \leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2+\lambda^2}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda e^{i\lambda t}}{1+\lambda^2} = \pi e^{-|t|} \implies$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+\lambda^2}e^{i\lambda t}d\lambda = e^{-|t|} \qquad \text{— обратное преобразование Фурье}$$

4 Свойства преобразования Фурье

В этом разделе мы опишем основные свойства преобразования Фурье и докажем наиболее интересные из них. Прежде всего, напомним внешний вид преобразования:

$$F[f](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt,$$

где $f \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, то есть функция f интегрируема по Риману (Лебегу) на всей числовой прямой и выполнено условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < +\infty.$$

Замечание 4.1. Принадлежность функции f классу L_1 гарантирует существование ее преобразования Фурье $F[f]$.

Для начала выпишем свойства, которые напрямую следуют из определения: линейность, масштабируемость и сдвиг. Мы не будем долго на них останавливаться.

1. **Линейность.**

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2], \qquad \forall f_1, f_2 \in \mathrm{L}_1,\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. **Сдвиг.**

$$F[f(t-t_0)] = e^{-\lambda t_0}\cdot F[f],$$
$$F[e^{i\lambda_0 t}\cdot f(t)] = F[f]\cdot(\lambda - \lambda_0).$$

3. **Масштабируемость.**

$$F[f(\alpha t)](\lambda) = \frac{1}{|\alpha|}F[f(t)]\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\, \alpha \neq 0.$$

4. **О четности.** Если функция f является четной, то ее образ $F[f]$ будет действительной функцией.

5. **О нечетности.** Если же f — нечетная, то образ $F[f]$ будет чисто мнимой функцией.

Теперь перейдем к более интересным свойствам. Далее каждая теорема, следствие или замечание будут являться свойствами преобразования Фурье. Большая часть из них будет доказана. Для удобства навигации наиболее важные формулы пронумерованы.

Теорема 4.1. *Рассмотрим последовательность функций из класса* L_1*, стремящуюся по норме* L_1 *к некоторой функции* f *из того же класса, то есть*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty},\ f_n \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty) \quad : \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}_1} f \in \mathrm{L}_1.$$

Тогда

$$F[f_n] \rightrightarrows F[f].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем несложные выкладки:

$$\sup_{\lambda} |F[f_m](\lambda) - F[f_n](\lambda)| =$$
$$= \sup_{\lambda}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f_m(t) - f_n(t))e^{-i\lambda t}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_m(t) - f_n(t)|\,dt < \varepsilon.$$

■

Теорема 4.2. *Преобразование Фурье $F[f]$ есть непрерывная ограниченная функция.*

Доказательство. На самом деле ограниченность мы нечаянно вывели в предыдущей теореме. Действительно,

$$|F[f](\lambda)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\, dt \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = \mathrm{const}\,.$$

С непрерывностью дела обстоят куда сложнее. Здесь нам придется записать наше преобразование в виде

$$F[f](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)\, dt - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)\, dt$$

и сослаться на книгу А. М. Тер–Крикорова, М. И. Шабунина «Курс математического анализа,» где на 645 странице доказана непрерывность каждого из кусочков. ■

Замечание 4.2. Из последней теоремы следует, например, что

$$F[f](\lambda) \xrightarrow[|\lambda|\to\infty]{} 0.$$

Теперь рассмотрим специальный вид функций, который часто встречается на практике: непрерывные и дифференцируемые функции.

Теорема 4.3. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть*[1]

$$f \in \mathrm{C}^1(-\infty, +\infty) \cap \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty),\ f' \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$$

Тогда

$$F[f'](\lambda) = i\lambda \cdot F[f](\lambda).$$

Доказательство. Представим функцию в виде

$$f(t) = f(0) + \int\limits_0^t f'(t)\, dt.$$

Из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} f'(t)\, dt$ следует существование пределов $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ и $\lim_{t\to-\infty} f(t)$. Они не могут быть отличными от нуля в силу сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$F[f'](\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\lambda t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\lambda t}\, dt = i\lambda \cdot F[f](\lambda).$$

■

Замечание 4.3. Как следствие, получаем более занятную формулу:

$$\text{Пусть } f \in \mathrm{C}^{k-1}(-\infty, +\infty), \quad \exists f^{(k)} : f^{(k)} \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty), \text{ тогда}$$

$$F[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^k \cdot F[f]. \tag{4.1}$$

[1]Теорема ходит в интернете в нескольких вариантах условий: совершенно не понятно, f или f' должна быть непрерывной или интегрируемой. Причем доказательства везде примерно одинаковые. Здесь приведен вариант к.ф.-м.н. доцента И. В. Рублева.

Теорема 4.4. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема, абсолютно интегрируема, и ее производная так же абсолютно интегрируема, то есть*

$$f \in \mathrm{C}^1(-\infty, +\infty) \cap \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty), \; f' \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$$

Тогда

$$|F[f](\lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}.$$

Доказательство.

$$\left| \int\limits_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \right| = \frac{f(t)e^{-i\lambda t}}{-i\lambda}\Big|_{-T}^{+T} + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{-T}^{+T} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

■

Замечание 4.4. Как следствие, получаем более занятную формулу:

$$\text{Пусть } f \in \mathrm{C}^{k-1}(-\infty, +\infty), \quad \exists f^{(k)} : f^{(k)} \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty), \text{ тогда}$$

$$F[f](\lambda) \leqslant \frac{C_m}{|\lambda|^m}, \quad \text{где } C_m = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(t)|\,dt. \tag{4.2}$$

Теорема 4.5. *Пусть задана функция f такая, что $\int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, тогда*

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds\right](\lambda) = \frac{1}{i\lambda}F[f](\lambda).$$

Теорема 4.6. *Пусть задана функция f такая, что $t \cdot f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)$, тогда*

$$F[f]'(\lambda) = F[-it \cdot f(t)](\lambda).$$

Доказательство.

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt \right)'_{\lambda} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-it)f(t)e^{-i\lambda t}\,dt.$$

■

Замечание 4.5. Как следствие:

$$\text{Пусть } f : t^p f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty), \; p = \overline{1, k}, \text{ тогда}$$

$$F[f]^{(k)}(\lambda) = F[(-it)^k \cdot f(t)]. \tag{4.3}$$

Теорема 4.7. *Пусть $t^p f(t) \in \mathrm{L}_1(-\infty, +\infty)\; \forall p$, тогда*

$$F\left[-\frac{1}{it}f(t)\right](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} F[f](\xi)\,d\xi. \tag{4.4}$$

Теперь поговорим о свойствах преобразования Фурье, связанных с операцией свертки. Напомним, как выглядит эта операция:

$$(f_1 * f_2)(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s)f_2(t-s)ds.$$

Эта операция является билинейной, коммутативной и ассоциативной.

Теорема 4.8. *Пусть* $f_1, f_2 \in \mathrm{L}_1$, *тогда*

$$F[f_1 * f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda). \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) f_2(t-s) e^{-\lambda t}\, ds\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) e^{-i\lambda s} \left(f_2(t-s) e^{-i\lambda(t-s)}\right) ds\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) e^{-i\lambda s}\, ds \cdot F[f_2](\lambda) = F[f_1](\lambda) \cdot F[f_2](\lambda).$$

■

Замечание 4.6. Аналогично доказывается и такой факт:

$$\begin{gathered}\text{Если } F[f_1], F[f_2] \in \mathrm{L}_1(-\infty,\, +\infty), \text{ то}\\ F[f_1 \cdot f_2](\lambda) = 2\pi \cdot (F[f_1] * F[f_2])(\lambda).\end{gathered} \tag{4.6}$$

Теорема 4.9 (Муавра - Лапласа). *Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха p:*

$$\xi_k = \begin{cases} 0, & q \\ 1, & p \end{cases}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

$$\sigma_n = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}S_n}}$$

$$p_k(x) = q\delta(x) + p\delta(x-1) = \frac{dF_k}{dt} \textit{ (в обобщенном смысле)}$$

$$F_k(x) = \mathbb{P}\{\xi_k < x\}$$

Тогда

$$\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{слабо}} \sigma \sim N(0,1). \tag{4.7}$$

Разложим функцию на непрерывную и функцию скачков:

$$f(x) = f_{\text{непрер.}}(x) + f_{\text{скачков}}(x)$$

$$f'(x) = f'_{\text{непрер.}}(x) + \sum h_j\delta(x - x_j)\text{равенство в смысле интегралов} \tag{4.8}$$

$$\varphi(\cdot) \in D$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'_{\text{непрер.}}(x)\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum h_j\delta(x-x_j)f(x)dx \tag{4.9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \tag{4.10}$$

$$f_k(x) = \mathbb{E}e^it\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(q\delta(x) + p\delta(x-1))dx = qe^{it} + pe^{it} \tag{4.11}$$

$$\mathbb{E}\xi_k = p$$
$$\mathbb{E}S_n = np$$
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}S_n = n\mathbb{V}\mathrm{ar}\xi_k = npq$$
$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\xi}_k, \quad \tilde{\xi}_k = \frac{\xi_k - p}{\sqrt{npq}}$$
$$f_{\tilde{\xi}_k}(t) = qe\left\{\frac{-ipt}{\sqrt{npq}}\right\} + pe\left\{\frac{it(1-p)}{\sqrt{npq}}\right\}$$
$$f_{\sigma_n}(t) = \left[qe\left\{\frac{-ipt}{\sqrt{npq}}\right\} + pe\left\{\frac{it(1-p)}{\sqrt{npq}}\right\}\right]^n \to ?, \quad n \to \infty$$
$$\psi(0) = 1$$
$$\psi'(z) = -\frac{ipq}{\sqrt{pq}}e\left\{\frac{-ipz}{\sqrt{pq}}\right\} + \frac{ipq}{\sqrt{pq}}e\left\{\frac{iqz}{\sqrt{pq}}\right\} \Rightarrow \psi'(0) = 0$$
$$\psi(z) = qe\left\{\frac{-ipz}{\sqrt{pq}}\right\} + pe\left\{\frac{iqz}{\sqrt{pq}}\right\}$$
$$\psi'(z) = -\frac{p^2q^2}{pq}e\left\{\frac{-ipz}{\sqrt{pq}}\right\} - \frac{pq^2}{pq}e\left\{\frac{iqz}{\sqrt{pq}}\right\} \Rightarrow \psi''(0) = -1$$
$$\Rightarrow \psi(z) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \overline{o}(z^2)$$
$$\Rightarrow f_{\sigma_n}(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \overline{o}\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$\sigma \sim N(0,1)$$
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$
$$\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{слабо}} \sigma \sim N(0,1)$$

$f(t)$ — обычная (необобщенная) функция, $f \in C^1,\ f' \in L_1,\ f \in L_1$.
Гребенчатая функция:

$$d_{\Delta_t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\Delta_t).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d_{\Delta_t}(t)\varphi(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k\Delta_t), \quad \varphi(\cdot) \in D.$$

1. Дискретизация

$$f_{\Delta_t}(t) = f(t)d_{\Delta_t}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)d_{\Delta_t}(t)\varphi(t)dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta_t)\delta(t - k\Delta_t)\varphi(t)dt =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta_t)\varphi(k\Delta_t)$$

2. Продолжение по периоду

$$f^0_{\Delta_t}(t) = \left[f(\cdot) * d_{\Delta_t}(\cdot)\right](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - s - k\Delta_t)ds = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - k\Delta_t)$$

$f^0_{\Delta_t}(t+\Delta_t) = f^0_{\Delta_t}(t)$ — периодическая с периодом Δ_t.
Пусть $F(\lambda)$ — преобразование Фурье для $f(t)$. Разложим $f^0_{\Delta_t}$ в ряд Фурье.

$$f^0_{\Delta_t} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_l e\left\{\frac{2\pi i t l}{\Delta_t}\right\}$$

$$C_l = \frac{1}{\Delta_t}\int_{-\frac{\Delta_t}{2}}^{\frac{\Delta_t}{2}} f^0_{\Delta_t}(s) e\left\{-\frac{2\pi i s l}{\Delta_t}\right\} ds = \frac{1}{\Delta_t}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{\Delta_t}{2}}^{\frac{\Delta_t}{2}} f^0_{\Delta_t}(\underbrace{s-k\Delta_t}_{r}) e\left\{-\frac{2\pi i s l}{\Delta_t}\right\} ds =$$
$$= \frac{1}{\Delta_t}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{\Delta_t}{2}-k\Delta_t}^{\frac{\Delta_t}{2}-k\Delta_t} f(r) e\left\{-\frac{2\pi i l(r+k\Delta_t)}{\Delta_t}\right\} dr = \left\{e^{-2\pi i k l} = 1\right\} =$$
$$= \frac{1}{\Delta_t}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\frac{\Delta_t}{2}-k\Delta_t}^{\frac{\Delta_t}{2}-k\Delta_t} f(r) e\left\{-\frac{2\pi i l r}{\Delta_t}\right\} dr = \frac{1}{\Delta_t} F\left(\frac{2\pi l}{\Delta_t}\right)$$

$$f^0_{\Delta_t} = \frac{1}{\Delta_t}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{2\pi l}{\Delta_t}\right) e\left\{\frac{2\pi i l t}{\Delta_t}\right\} \tag{4.12}$$

$f(t) = \delta(t)$ приблизим нормальными функциями.

$$f_n(\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл.}} f(\cdot).$$

То есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt.$$

$$f_n(t) \longleftrightarrow F_n(\lambda)$$
$$f^0_{n,\Delta_t}(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_n\left(\frac{2\pi l}{\Delta_t}\right) e\left\{\frac{2\pi i l t}{\Delta_t}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл.}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \varphi(t)dt$$

$\delta(t)$ принимает значение 0 с вероятностью 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\lambda t} dt = e^{-i\lambda\cdot 0} = 1$$
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{i\lambda t} d\lambda$$

Последнее равенство не стоит понимать как равенство чисел, ведь дельта-функция является, вообще говоря, обобщенной функцией.

$$\boxed{\delta(t) \longleftrightarrow 1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\lambda\right]\varphi(t)dt = \{\text{т. Фубини}\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\boxed{1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\lambda)}$$

Пусть $f(t)=\delta(t)$, тогда
$$f^0_{\Delta_t}(t)=d_{\Delta_t}(t)=\frac{1}{\Delta_t}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}e\left\{\frac{2\pi ilt}{\Delta_t}\right\}.$$
Последняя формула называется формулой суммирования Пуассона.
Пусть f,g — гладкие, быстро затухающие при $t\to\pm\infty$.
$$h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}g(t)f(t-k\Delta_t)=f^0_{\Delta_t}\cdot g(t)\longleftrightarrow H(\lambda)?$$
Пусть
$$f(t)\longleftrightarrow F(\lambda),\quad g(t)\longleftrightarrow G(\lambda).$$
$$H(\lambda)=\frac{1}{\Delta_t}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\sum_{l=-\infty}^{+\infty}F\left(\frac{2\pi l}{\Delta_t}\right)e\left\{\frac{2\pi ilt-i\lambda t}{\Delta_t}\right\}dt=\frac{1}{\Delta_t}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}F\left(\frac{2\pi l}{\Delta_t}\right)G\left(\lambda-\frac{2\pi l}{\Delta_t}\right)$$
$$g(t)\equiv 1$$
$$f(t)\equiv\delta(t)$$
$$h(t)=d_{\Delta_t}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\Delta_t)$$
$$H(\lambda)=\frac{2\pi}{\Delta_t}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\lambda-\frac{2\pi l}{\Delta_t}\right)$$
$$\boxed{d_{\Delta_t}(t)\longleftrightarrow\tfrac{2\pi}{\Delta_t}d_{\frac{2\pi}{\Delta_t}}(\lambda)}$$

$$d_{\Delta t}(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\Delta t} d_{\frac{2\pi}{\Delta t}}(\lambda)$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\lambda)$$

$$f_{\Delta t}(t) = f(t) \cdot d_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t)\delta(t - k\Delta t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}(F * \frac{2\pi}{\Delta t} d_{\frac{2\pi}{\Delta t}})(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}) = \frac{1}{\Delta t} F^0_{\frac{2\pi}{\Delta t}}(\lambda)| \cdot \Delta t H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda)$$

Пусть $\exists \Lambda > 0 : F(\lambda) \equiv 0,\ |\lambda| > \frac{\Lambda}{2}$ — ограниченый спектр, $\Rightarrow \frac{\pi}{\Delta t} \geq \frac{\Lambda}{2}$ не происходит наложение спектра. $\Delta t = \frac{2\pi}{\Lambda}$ — частота Найквиста.
$F(\lambda) = F^0_{\frac{2\pi}{\Delta t}}(\lambda) \cdot H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda)$, где $H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda)$ — оконная функция:

$$H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda) = \begin{cases} 1, |\lambda| \leq \frac{\Lambda}{2} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1, |t| \leq \frac{\Lambda}{2} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

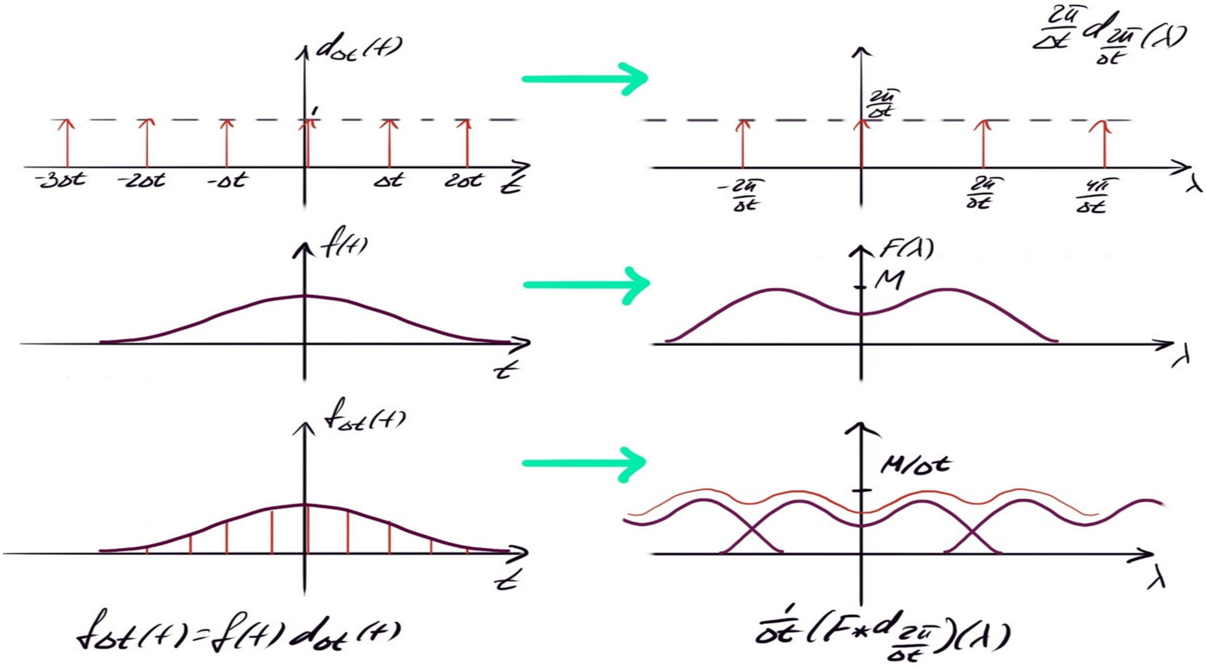
$$\leftrightarrow 2\frac{\sin(\lambda A)}{\lambda} = G(\lambda)$$

$$h_{\frac{\Lambda}{2}}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\frac{\Lambda}{2} t)}{t} \leftrightarrow H_{\frac{\Lambda}{2}}(\lambda)$$

$$\Delta t (f_{\Delta t} + h_{\frac{\Lambda}{2}}) \leftrightarrow f(\lambda)$$

Интероляционная формула Котельникова:

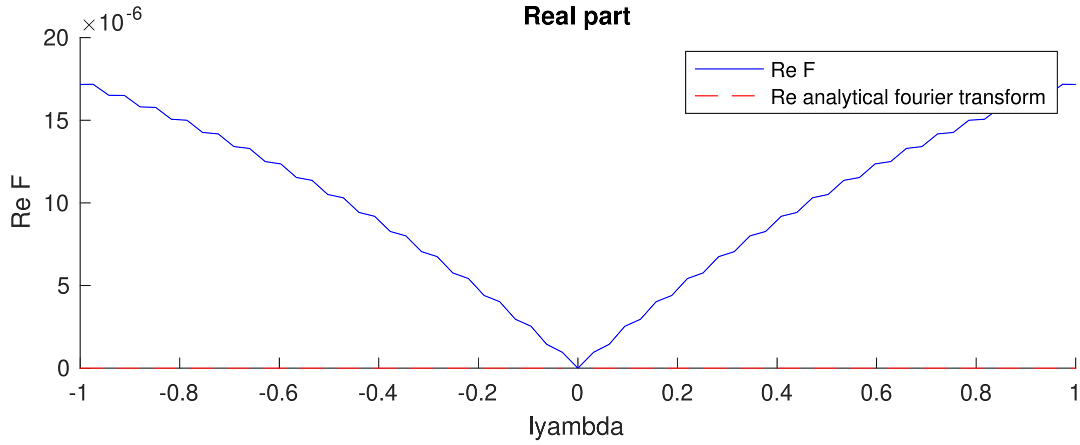
$$\Delta t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - s - k\Delta t) \cdot h_{\frac{\Lambda}{2}}(s) ds = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta t) \frac{\frac{\Lambda}{2} \sin(t - k\Delta t)}{t - k\Delta t}$$

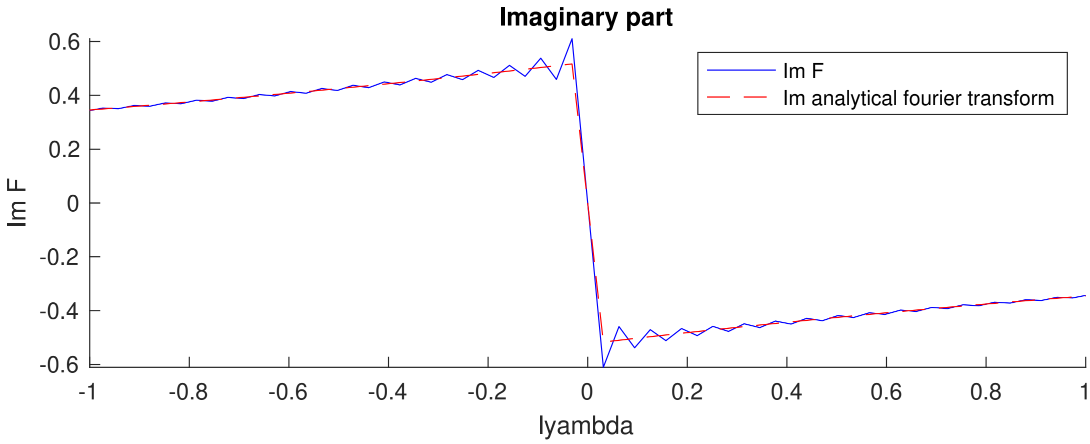


$$h_{\frac{T}{2}}(t) = \begin{cases} 1, |t| \le \frac{T}{2} \\ 0, \texttt{иначе} \end{cases}$$

$$H_{\frac{T}{2}}(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\sin(\frac{T\lambda}{2})$$

Пример Ряби:





Введем функцию:

$$\widetilde{F} = F * d_{\frac{2\pi}{\Delta t}};\ \frac{T}{2\pi}(\widetilde{F} * sync(\frac{T}{2}\cdot))(\lambda) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{F}(t-s)\frac{\sin(\frac{T}{2}s)}{\frac{T}{2}s}ds =$$

$$= \frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t-s-k\Delta t)\frac{\sin(\frac{T}{2})}{\frac{T}{2}s}ds \quad (4.13)$$

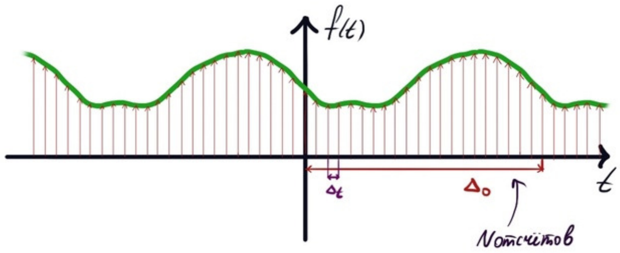
Если T достаточно большое:

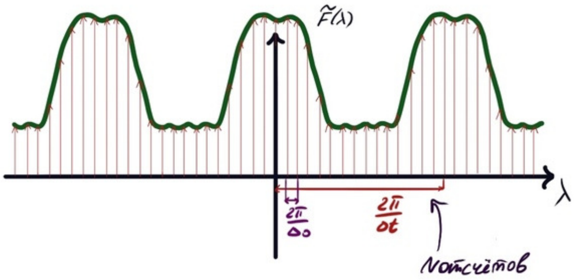
$$W_T(s) = \frac{T}{2\pi}\frac{\sin(\frac{T}{2}\lambda)}{\frac{T}{2}\lambda} \xrightarrow[T\to\infty]{\text{сл}} \delta(\lambda)$$

Теперь введем функцию $\widetilde{\widetilde{F}}$:

$$\widetilde{\widetilde{F}}(\lambda) = \frac{T}{2\pi}(\widetilde{F} + sync(\frac{T}{2}\cdot))(\lambda)$$

Дискретизация $\widetilde{\widetilde{F}}$





$$\Big(f(\cdot)d_{\Delta t}(\cdot)h_{\frac{T}{2}}(\cdot) * d_{\Delta 0}\Big)(t) \qquad\qquad \tfrac{2\pi}{\Delta t\Delta 0}\widetilde{\widetilde{F}}(\lambda)\cdot d_{\frac{2\pi}{\Delta 0}}(\lambda)$$

$$\widetilde{f}_{\Delta t}(t) = \widetilde{f}(t)d_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\widetilde{F} * \frac{2\pi}{\Delta t}d_{\frac{2\pi}{\Delta t}} = \frac{1}{\Delta t}\widetilde{F} * d_{\frac{2\pi}{\Delta t}}$$

$$\widetilde{h_{\Delta_0}}(t) = \begin{cases} 1, t\in[-\frac{\Delta t}{2}, \Delta_0 - \frac{\Delta t}{2}] \\ 0, \texttt{иначе} \end{cases}$$

$$h_{\Delta_0}(t) = \begin{cases} 1, |t| \le \frac{\Delta_0}{2} \\ 0, \texttt{иначе} \end{cases}$$

$$\widetilde{h_{\Delta_0}}(t) = h_{\Delta_0}(t - \frac{\Delta_0+\Delta t}{2})$$

$$h_{\Delta_0}(t) \leftrightarrow \frac{2}{\lambda}\sin(\frac{\Delta_0\lambda}{2})$$

$$\widetilde{H_{\Delta_0}}(\lambda) = e^{-\frac{i(\Delta_0+\Delta t)\lambda}{2}}$$

$$\widetilde{f_{\Delta t}}(t)\widetilde{h_{\Delta_0}}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\Delta t}\widetilde{F^0_{\frac{2\pi}{\Delta t}}} * \frac{1}{2\pi\lambda}\sin(\frac{\Delta_0\lambda}{2})\cdot e^{-\frac{i(\Delta_0+\Delta t)\lambda}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\widetilde{F}(\lambda-\mu-\frac{2\pi l}{\Delta t})e^{-\frac{i(\Delta_0+\Delta t)\mu}{2}}\frac{1}{2\pi\mu}\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})d\mu$$

$$\widetilde{f}_{\Delta t}(t)\widetilde{h}_{\Delta_0}(t) = \sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)$$

$$\widetilde{\widetilde{f}}(t) = ((\widetilde{f}_{\Delta t}\cdot\widetilde{h}_{\Delta_0}) * d_{\Delta_0})(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t-m\Delta_0)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\frac{2\pi}{\Delta_0}\widetilde{\widetilde{F}}d_{\frac{2\pi}{\Delta_0}}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\delta(\lambda-\frac{2\pi}{\Delta_0}n)$$

$$\widetilde{f}(t_k) : \widetilde{f}_0, ..., \widetilde{f}_{N-1} \to \alpha_0, ..., \alpha_{N-1} - - -?$$

Найдем формулу:

$$\widetilde{\widetilde{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n\delta(\lambda-\frac{2\pi n}{\Delta_0}))e^{i\lambda t}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{\frac{2\pi i n t}{\Delta_0}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\alpha_n = \frac{1}{\Delta_0}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\Delta_0-\frac{\Delta t}{2}}\widetilde{\widetilde{f}}(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{\Delta_0}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\Delta_0-\frac{\Delta t}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t-m\Delta_0)e^{-\frac{2\pi int}{\Delta 0}}dt$$

Ненулевое только при $m=0$

$$m \geq 1;\ \ t-k\Delta t-m\Delta_0 \leq \Delta_0-\frac{\Delta t}{2}-\Delta_0<0$$

$$m \leq -1;\ \ t-k\Delta t-m\Delta_0 \geq -\frac{\Delta t}{2}-N\Delta t+\Delta t+\Delta_0 \geq \frac{\Delta t}{2}>0 \Rightarrow$$

При $m \neq 0$ нулевые слагаемые.

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{\Delta_0}\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\Delta_0-\frac{\Delta t}{2}} \sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t-m\Delta_0)e^{-i\lambda t}dt = \frac{2\pi}{\Delta_0}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}(k\Delta t)e^{-\frac{2\pi ink}{N}}$$

$\{\frac{\Delta t}{\Delta_0}=\frac{1}{N}\}$

$$\alpha_n \approx \frac{2\pi}{\Delta_0\Delta t}\widetilde{F}(\lambda_n);\ \ \lambda_n=\frac{2\pi n}{\Delta_0},\ n=0,...,N-1$$

$$\widetilde{F}(\lambda_n)=\widetilde{F}_n \approx \Delta t\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{f}_k e^{\frac{2\pi ink}{N}}$$

ПДПФ:

$$F_n=\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}},\ n=0,...,N-1$$

ОДПФ:

$$f_k=\sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{\frac{2\pi ink}{N}},\ k=0,...,N-1$$

$$\widetilde{F}(\lambda_n)=\widetilde{F}_n,\ n=0,...,[\frac{N}{2}];\ \widetilde{F}(-\frac{2\pi}{\Delta_0})=\widetilde{F}_{N-1};\ \widetilde{F}(\frac{2\pi n}{\Delta_0})\approx\widetilde{F}_n(\mod N)$$

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\Delta_t)e^{-i\lambda k\Delta t}\Delta t$$

$$\lambda=\frac{2\pi n}{\Delta_0};\ \ F(\frac{2\pi n}{\Delta_0})\approx\Delta t\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(k\Delta t)e^{-\frac{2\pi ink\Delta t}{\Delta_0}}=\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}f(k\Delta t)e^{-\frac{2\pi ink}{N}}$$

5 Оценка погрешности

5.1 Эффект наложения спектров

Пусть:

$f \in C^2(-\infty,+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\infty;\ \int_{-\infty}^{+\infty}|f^{'}(t)|dt<\infty;\ \int_{-\infty}^{+\infty}|f^{''}(t)|dt \leq c<\infty \quad (5.1)$$

$$f^{''}(t)\leftrightarrow(i\lambda)^2F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^{''}(t)e^{-i\lambda t}dt;\ \ \lambda^2|F(\lambda)|\leq c;\ \ \lambda\neq 0;\ \ |F(\lambda)|\leq\frac{c}{\lambda^2}$$

$$f_{\Delta t}(t)\leftrightarrow\frac{1}{\Delta t}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}F(\lambda-\frac{2\pi l}{\Delta t})=\frac{1}{\Delta t}(F(\lambda)+\sum_{l\neq 0}F(\lambda-\frac{2\pi l}{\Delta t}))$$

$$\sum_{l\neq 0} F(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}))\ \texttt{-- ошибка наложения спектра.}$$

$$|\sum_{l\neq 0} F(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}))| \leq \sum_{l\neq 0} \frac{c}{(\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t})^2} \leq \{(*)\} \leq \frac{2c(\Delta t)^2}{\pi^2} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} < \varepsilon$$

$$(*)\ l > 0;\ |\lambda - \frac{2\pi l}{\Delta t}| \geq \frac{2\pi l}{\Delta t} - |\lambda| \geq \frac{2\pi l}{\Delta t} - \frac{\Lambda}{2} > \{\frac{\Lambda}{2} < \frac{\pi}{\Delta t}\} > \frac{\pi}{\Delta t}(2l-1)$$

5.2 Рябь($\Delta_0 > 0$)

$$h_{\Delta_0}(t) = \begin{cases} 1, |t| \leq \frac{\Delta_0}{2} \\ 0, \texttt{иначе} \end{cases}$$

$$f(t) \cdot h_{\Delta_0}(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F * H_{\Delta_0}(\lambda) = \{H_{\Delta_0}(\lambda) = \frac{2}{\lambda}\sin(\frac{\Delta_0 \lambda}{2})\} = (F * \frac{1}{\pi\lambda}\sin(\frac{\Delta_0 \cdot}{2}))(\lambda) =$$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda-\mu)\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu$

$$F(\lambda) = F(\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu$$

$$h_{\Delta_0}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\mu}\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})e^{-i\mu t}d\mu$$

5.3 Ошибка ряби

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\lambda-\mu) - F(\lambda)]\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu$$

1. F непрерывна при $\lambda = \lambda_0$
2. Пусть $F(\lambda_0 \pm 0);\ F(\lambda_0 - 0) \neq F(\lambda_0 + 0)$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\lambda-\mu) - F(\lambda)]\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu$$

а). F непрерывна по $\lambda;\ \Lambda > 0;\ |\lambda| \leq \frac{\Lambda}{2}$

$$f(\cdot) : \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \leq c_0 < +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt \leq c_1 < \infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |tf'(t)|dt \leq \tilde{c_1} < \infty \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ Задача: найти ограничение на Δ_0 :

$$|I| \leq \varepsilon;\ \delta = \frac{\varepsilon\pi}{6c_1} > 0$$

$$I = \int_{-\delta}^{\delta}[F(\lambda-\mu) - F(\lambda)]\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu + \int_{|\mu|\geq\delta} F(\lambda-\mu)\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu -$$
$$- \int_{|\mu|\geq\delta} F(\lambda)\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu \quad (5.2)$$

$$1).|I_1| \leq \int_{-\delta}^{\delta} |F(\lambda-\mu) - F(\lambda)|\frac{|\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})|}{|\pi\mu|}d\mu \leq \frac{c_1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})| \leq \frac{2\delta c_1}{\pi} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\{F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt;\ F^{'}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}(-it)f(t)e^{-i\lambda t}dt\}$$

$$\Rightarrow F^{'}(\lambda)\le c_1 \Rightarrow |F(\lambda-\mu)-F(\lambda)|\le c_1|\mu|\}$$

$$|\mu|\ge\delta;\ |\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}|\le\frac{c_0}{\pi\delta}=\alpha_0$$

$$(-it)f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F^{'}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda|\cdot\frac{d}{dt}$$

$$-i(f(t)+tf^{'}(t))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F^{'}(\lambda)(i\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

$$(i\lambda)F^{'}(\lambda)=i\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)+tf^{'}(t)]e^{-i\lambda t}dt$$

$$|\lambda||F^{'}(\lambda)|\le c_0+\widetilde{c}_1;\ |\frac{F(\lambda-\mu)}{\mu\pi}|\le\alpha_0$$

$$|\frac{F^{'}(\lambda-\mu)}{\mu\pi}|\le\frac{c_0+\widetilde{c}_1}{\pi|\mu||\lambda-\mu|}=\frac{c_0+\widetilde{c}_1}{\pi|\mu|(|\mu|-|\lambda|)}\le(**)\le\frac{c_0+\widetilde{c}_1}{\pi(\mu^2-|\mu|\frac{\Lambda}{2})}\le\frac{2(c_0+\widetilde{c}_1)}{\pi\mu^2}$$

$$(**)\ |\mu|-\frac{\Lambda}{2}\le|\mu|-|\lambda|\le(\mu-\lambda);$$

$$\mu|\ge\max(\delta,\Lambda);\ \frac{\mu^2}{2}\le\mu^2-|\mu|\frac{\Lambda}{2}\leftrightarrow\frac{\mu^2}{2}-|\mu|\frac{\Lambda}{2}=|\mu|(|\mu|-\Lambda)>0$$

$$|\frac{d}{d\mu}[\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}]|=\frac{1}{\pi}|-\frac{F^{'}(\lambda-\mu)\mu-F(\lambda-\mu)}{\mu^2}|=\frac{1}{\pi}[\frac{F^{'}(\lambda-\mu)}{\mu}+\frac{F(\lambda-\mu)}{\mu^2}]\le$$

$\le\frac{2(c_0+\widetilde{c}_1)}{\pi\mu^2}+\frac{c_0}{\pi\mu^2}=\frac{3c_0+2\widetilde{c}_1}{\pi}\frac{1}{\mu^2}=\frac{\widetilde{\alpha}_1}{\mu^2}$ 2). $R>0;\ R>\Lambda>0$

$$I_2^R=\int_{R\ge|\mu|\ge\delta}F(\lambda-\mu)\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\pi\mu}d\mu=-\frac{2}{\Delta_0}\int_{R\ge|\mu|\ge\delta}\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}d(\cos(\frac{\Delta_0\mu}{2}))=$$

$$=\frac{2}{\Delta_0}\Big(-[\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}\cos(\frac{\Delta_0\mu}{2})\Big|_{\mu=-R}^{-\delta}+-||-\Big|_{\mu=\delta}^{R}]+\int_{R\ge|\mu|\ge\delta}\frac{d}{d\mu}[\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}]\cos(\frac{\Delta_0\mu}{2})d\mu\Big)$$

$$|I_2^R|\le\frac{2}{\Delta_0}[4\alpha_0+|\int_{R\ge|\mu|\ge\Lambda}\frac{d}{d\mu}[...]\cos(...)d\mu|+|\int_{\Lambda\ge|\mu|\ge\delta}\frac{d}{d\mu}[...]\cos(...)d\mu|]\le$$

$\le\frac{2}{\Delta_0}[4\alpha_0+\widetilde{\alpha}_1\int_{R\ge|\mu|\ge\Lambda}\frac{d\mu}{\mu^2}+|\int_{\Lambda\ge|\mu|\ge\delta}...|]$

$$\int_{-R}^{-\Lambda}\frac{d\mu}{\mu^2}=\frac{1}{\Lambda}-\frac{1}{R}\le\frac{1}{\Lambda};\ \int_{\Lambda}^{R}\frac{d\mu}{\mu^2}=\frac{1}{\Lambda}-\frac{1}{R}\le\frac{1}{\Lambda}$$

$$\Rightarrow|I_2^R|\le\frac{2}{\Delta_0}[4\alpha_0+\frac{2\widetilde{\alpha}_1}{\Lambda}+|\int_{\Lambda\ge|\mu|\ge\delta}...d\mu|]$$

При $\Lambda\ge|\mu|\ge\delta:$

$$|\frac{d}{d\mu}[\frac{F(\lambda-\mu)}{\pi\mu}]|=\frac{1}{\pi}|\frac{F^{'}(\lambda-\mu)}{\mu}+\frac{F(\lambda-\mu)}{\mu^2}|\le\frac{1}{\pi}[\frac{c_1}{\delta}+\frac{c_0}{\delta^2}]=\alpha_1$$

$$\Rightarrow|\int_{\Lambda\ge|\mu|\ge\delta}\frac{d}{d\mu}(...)cos(...)d\mu|\le2\Lambda\alpha_1\Rightarrow|I_2^R|\le\frac{2}{\Delta_0}[4\alpha_0+\frac{2\widetilde{\alpha}_1}{\Lambda}+2\Lambda\alpha_1]$$

$$R\to\infty\ \ |I_2|\le\frac{1}{\Delta_0}[8\alpha_0+\frac{4\widetilde{\alpha}_1}{\Lambda}+4\Lambda\alpha_1]\le\frac{\varepsilon}{3}$$

$$3).|I_3| \le \frac{|F(\lambda)|}{\pi}|\int_{\mu\ge\delta}\frac{\sin(\frac{\Delta_0\mu}{2})}{\mu}d\mu| \le \{\mu=\frac{2\psi}{\Delta_0};\ d\mu=\frac{2}{\Delta_0}d\psi\} \le \frac{2c_0}{\pi}|\int_{\frac{\Delta_0\delta}{2}}^{+\infty}\frac{\sin(\psi)}{\psi}|d\psi$$

Пусть $\frac{\Delta_0\delta}{2} = 2\pi k_0,\ k_0\in\mathbb{N};\ \Delta_0 = \frac{4\pi k_0}{\delta}$

$$\int_{2\pi k_0}^{+\infty}\frac{\sin(\psi)}{\psi}d\psi = \sum_{l=k_0}^{+\infty}[\int_{2\pi l}^{\pi+2\pi l}\frac{\sin(\psi)}{\psi}d\psi - \int_{\pi+2\pi l}^{2\pi+2\pi l}-\frac{\sin(\psi)}{\psi}d\psi] =$$

$= \sum_{k=2k_0}^{+\infty}(-1)^k\sigma_k$ – ряд Лейбница.

$$0<\sigma_{k+1}\le\sigma_k\le\frac{1}{k};\ R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k\sigma_k;\ \sigma_{2k_0}\ge\sigma_{2k+1}\ge\sigma_{2k_0+2}$$

$$0>R_{2k_0-1}=-\sigma_{2k_0-1}+R_{2k_0}\Rightarrow 0\le R_{2k_0}\le\sigma_{2k_0-1}\le\frac{1}{2k_0-1}\Rightarrow\frac{1}{2k_0-1}\le\frac{\varepsilon\pi}{6c_0}$$

$$2k_0-1\ge\frac{6c_0}{\varepsilon\pi}\Leftarrow k_0\ge[\frac{3c_0}{\varepsilon\pi}+1]$$

$$|I_3|\le\frac{2c_0}{\pi}\int_{2\pi k_0}^{+\infty}\frac{\sin(\psi)}{\psi}d\psi\le\frac{\varepsilon\pi 2c_0}{6c_0\pi}=\frac{\varepsilon}{3}$$

Теорема 5.1. *Если* $\Delta_0\ge\max\{\frac{4\pi}{\delta}[\frac{3c_0}{\varepsilon\pi}+1],\frac{3}{\varepsilon}[8\alpha_0+4\Lambda\alpha_1+\frac{4\tilde{\alpha}_1}{\Lambda}]\},$ *то* $|I|\le\varepsilon.$

6 Быстрое преобразование Фурье

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}}, n = 0, \ldots, N-1.$$

Пусть $W_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, тогда при чётном N

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_k^{-nk} = \sum_{l=0}^{N/2-1} (f_{2l} W_N^{-n(2l)} + f_{2l+1} W_N^{-n(2l+1)}) = \sum_{l=0}^{N/2-1} (f_{2l} W_{N/2}^{-nl} + f_{2l+1} W_N^{-n} W_{N/2}^{-nl}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N/2-1} (f_{2l} + f_{2l+1} W_N^{-n}) W_{N/2}^{-nl} = \sum_{l=0}^{N/2-1} f_{2l} W_{N/2}^{-nl} + W_N^{-n} \sum_{l=0}^{N/2-1} f_{2l+1} W_{N/2}^{-nl}.$$

При $N = 2^k$ имеем $N \cdot k$ вычислений.

Задача

$x \in [0, l]$;

$$\begin{cases} u''_{xx}(x) - \mu u(x) = f(x), \\ u(0) = u_0, \\ u(l) = u_1. \end{cases}$$

Пусть $u(x) = v(x) + \dfrac{u_1 - u_0}{l} x$, тогда $u'(x) = v'(x) + \dfrac{u_1 - u_0}{l}, u''(x) = v''(x)$, и

$$\begin{cases} v''_{xx}(x) - \mu v(x) = f(x) + \mu \dfrac{u_1 - u_0}{l} x = g(x), \\ v(0) = u_0, \\ v(l) = u_0. \end{cases}$$

Тогда без ограничения общности

$$\begin{cases} u''_{xx}(x) - \mu u(x) = f(x), \\ u(0) = u_0, \\ u(l) = u_0. \end{cases}$$

$h = \dfrac{l}{N}; x_i = \dfrac{il}{N}, y_i = u(x_i), \varphi_i = f(x_i), i = 0, \ldots, N.$

Разностная схема:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \mu y_i = \varphi_i, i = 1, \ldots, N-1 \\ y_0 = y_N = u_0 \end{cases}$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}}, a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{\frac{2\pi ink}{N}}$$

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}}, b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi e^{\frac{2\pi ink}{N}}.$$

Подставим соотношения в систему:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \left[\frac{e^{-\frac{2\pi i(n+1)k}{N}} - 2e^{-\frac{2\pi ink}{N}} + e^{-\frac{2\pi i(n-1)k}{N}}}{h^2} - \mu e^{-\frac{2\pi ink}{N}} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-\frac{2\pi ink}{N}},$$

$$a_k\left[\frac{e^{-\frac{2\pi ink}{N}}-2+e^{\frac{2\pi ink}{N}}}{h^2}-\mu\right]=b_k, a_k\left[\frac{2\cos\dfrac{2\pi k}{N}-2}{h^2}-\mu\right]=b_k,$$

$$a_k\left[-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N}-\mu\right]=b_k\Rightarrow a_k=-\frac{b_k}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N}+\mu}.$$

$$b_k=\frac{1}{N}\varphi_0+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\varphi_n e^{\frac{2\pi ink}{N}}=\frac{1}{N}\varphi_0+b_k^0;$$

b_k^0 получаются из $0,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$ при помощи ОДПФ (обратного дискретного преобразования Фурье).

$$a_k=-\frac{-\frac{1}{N}\varphi_0+b_k^0}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N}+\mu}=\frac{\varphi_0}{N\left(\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N}+\mu\right)}+a_k^0, a_k^0=-\frac{b_k^0}{\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k}{N}+\mu}.$$

$$y_n=-\varphi_0\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\frac{1}{N}e^{-\frac{2\pi ink}{N}}}{\frac{4}{N^2}\sin^2\frac{\pi k}{N}+\mu}+\sum_{k=0}^{N}a_k^0e^{-\frac{2\pi ink}{N}}=-\varphi_0c_n+y_n^0.$$

$$y_0=y_N=-\varphi_0c_0+y_0^0=u_0, \varphi_0=\frac{y_0^0-u_0}{c_0}.$$

Итоговая схема решения задачи:

$$0,\varphi_1,\dots,\varphi_{N-1}\xrightarrow{\text{ОДПФ}}b_k^0\to a_k^0\xrightarrow{\text{ПДПФ}}y_n^0\to\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{N-1}\xrightarrow{\text{ОДПФ}}b_k\to a_k\xrightarrow{\text{ПДПФ}}y_n$$

7 Многомерное преобразование Фурье

$f(x)=f(x_1,\dots,x_m)\leftrightarrow F(\lambda)=F(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$.

$$F(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}f(x)e^{-i\langle\lambda,x\rangle}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda_1x_1}\,dx_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda_2x_2}\,dx_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\dots,x_m)e^{-i\lambda_mx_m}\,dx_m$$

.

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}F(\lambda)e^{i\langle\lambda,x\rangle}\,d\lambda.$$

Дискретное преобразование Фурье: $f_{k_1\dots k_m}\leftrightarrow F_{n_1\dots n_m}$.

$$F_{n_1\dots n_m}=\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\dots\sum_{k_m=0}^{N_m-1}e^{-2\pi i\left(\frac{k_1n_1}{N_1}+\dots+\frac{k_mn_m}{N_m}\right)}\cdot f_{k_1\dots k_m}$$

$$f_{k_1\dots k_m}=\frac{1}{N_1\dots N_m}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\dots\sum_{n_m=0}^{N_m-1}e^{2\pi i\left(\frac{k_1n_1}{N_1}+\dots+\frac{k_mn_m}{N_m}\right)}\cdot F_{n_1\dots n_m}$$

Задача

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\Delta u+f,\\ u(0,x,y)=u^0(x,y), & -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.\\ u_t'(0,x,y)=u^1(x,y),\end{cases}$$

$$u(t,x,y)\leftrightarrow U(t,\lambda,\mu),$$
$$u^0(x,y)\leftrightarrow U^0(\lambda,\mu),$$
$$u^1(x,y)\leftrightarrow U^1(\lambda,\mu),$$

$$f(t,x,y) \leftrightarrow F(t,\lambda,\mu).$$

$$U(t,\lambda,\mu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x,y)e^{-i(\lambda x+\mu y)}\,dy$$

$$u_t \leftrightarrow U_t, u_{tt} \leftrightarrow U_{tt}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}; \Delta u \leftrightarrow (i\lambda)^2 U + (i\mu)^2 U = -(\lambda^2+\mu^2)U.$$

$$\begin{cases} U_t t = -a^2(\lambda^2+\mu^2)U + F \\ U(0,\lambda,\mu) = U^0(\lambda,\mu) \\ U_t(0,\lambda,\mu) = U^1(\lambda,\mu) \end{cases}$$

Решаем полученную систему: пусть $v = U, w = v_t, \varphi = F, v(0) = v^0, v'(0) = v^1, b = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}$ тогда

$$\begin{cases} v_t = w \\ w_t = -b^2 v + \varphi \\ v(0) = v^0 \\ w(0) = v^1 \end{cases}$$

Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & 0 \end{bmatrix}$, тогда

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix} + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi(\tau) \end{bmatrix}\,d\tau;$$

$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos bt & -\frac{1}{b}\sin bt \\ b\sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$,

$$\Rightarrow v = \cos{(bt)}v^0 - \frac{1}{b}\sin{(bt)}v^1 + \int\limits_0^t \sin{(b(t-s))}\varphi(s)\,ds$$

$$\Rightarrow U(t,\lambda,\mu) = \cos{(a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}t)}\cdot U^0(\lambda,\mu) - \frac{1}{a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sin{(a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}t)}\cdot U^1(\lambda,\mu) -$$

$$-\frac{1}{a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\int\limits_0^1 \sin{(a\sqrt{\lambda^2+\mu^2}(t-s))}F(s,\lambda,\mu)\,ds.$$

Задача

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} - \mu u = f, \\ u(x,0) = u(x,1) = \xi(x), \\ u(0,y) = u(1,y) = \eta(y), \\ \xi(0) = \eta(0), \end{cases} \quad x \in [0,1], y \in [0,1].$$

$$h_x = \frac{1}{M}, h_y = \frac{1}{N}, y_{ij} = u(x_i,y_j), x_i = ih_x, y_j = jh_y.$$

$$y_{kl} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} a_{mn}e^{-2\pi i\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)}$$

$$\varphi_{kl} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} b_{mn}e^{-2\pi i\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)}$$

По аналогии с одномерным случаем, $a_{mn} = -\dfrac{b_{mn}}{\frac{4}{h_x^2}\sin^2\frac{\pi m}{M} + \frac{4}{h_y^2}\sin^2\frac{\pi n}{N} + \mu}$.

$$y_{k0} = \alpha_k, k = 1, \ldots, M-1;$$

$$y_{0l} = \beta_l, l = 1, \ldots, N-1;$$

$$\alpha_0 = \beta_0.$$

8 Преобразования Лапласа

8.1 Введение

Будем рассматривать $f_\mu(t)$:

$$f_\mu(t) = f(t)e^{-\mu t},$$

где $f(t) = 0$ при $t < 0$.

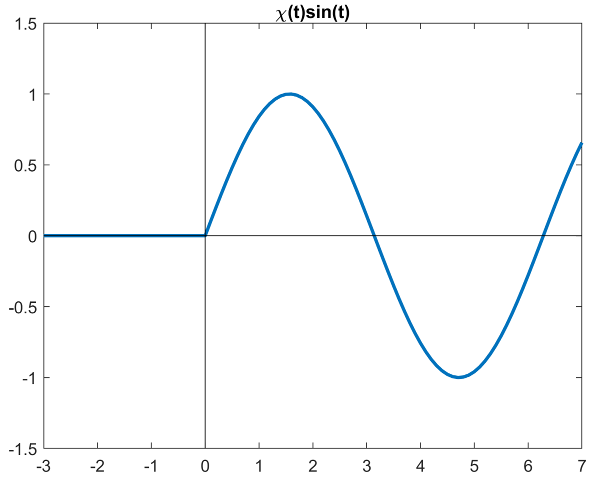
Функция Хевисайда:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Если домножить $f(t)$ на $\chi(t)$ выйдет:

$$f(t)\chi(t) = \begin{cases} f(t), & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Пример:



$$F_\mu(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\mu(t)e^{-i\lambda t}dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(\mu+i\lambda)t}dt = \{\underline{p = \mu + i\lambda}\} = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p), \qquad p \in \mathbb{C}.$$

$$f(t)e^{-\mu t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\mu+i\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\mu+i\lambda)e^{(\mu+i\lambda)t}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} F(p)e^{pt}dt.$$

Преобразование Лапласа: $\quad F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$

Формула Меллина: $\quad f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} F(p)e^{pt}dt.$

Преобразование несимметрично!

При $\mathrm{Re}\,p > \widetilde{\mu}$ мы не выйдем из класса приемлемых функций: $F(p)$ – определена.

Пусть $M_f = \left\{\mu \in \mathbb{R} : \exists \int\limits_0^{+\infty} |f(t)e^{-\mu t}|dt\right\}$. Если $\mu_1 \in M_f$, то $\forall \mu_2 \geqslant \mu_1 \Rightarrow \mu_2 \in M_f$.

Рассматриваются $f : M_f \neq \varnothing$. Абсцисса сходимости $\boldsymbol{\widetilde{\mu}} = \inf\{\mu \in M_f\} \in [-\infty, +\infty]$.

Продифференцируем $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ по p и для $\forall \mu > \widetilde{\mu}$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|(-t)f(t)e^{-pt}\right| dt = \left\{\begin{array}{c} \mu - \widetilde{\mu} = \Delta\mu > 0, \\ \mu = \frac{\Delta\mu}{2} + \mu - \frac{\Delta\mu}{2}, \\ \text{причем } \mu - \frac{\Delta\mu}{2} > \widetilde{\mu} \end{array}\right\} = \int\limits_0^{+\infty} \left|(-t)f(t)e^{-\frac{\Delta\mu}{2}t}e^{-(\mu-\frac{\Delta\mu}{2})t}e^{-i\lambda t}\right| dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left|(-t)e^{-\frac{\Delta\mu}{2}t}\right| \left|f(t)e^{-(\mu-\frac{\Delta\mu}{2})t}\right| \left|e^{-i\lambda t}\right| dt = \left\{\begin{array}{c} \left|(-t)e^{-\frac{\Delta\mu}{2}t}\right| \text{-огранич.} \\ \left|f(t)e^{-(\mu-\frac{\Delta\mu}{2})t}\right| \in M_f \\ \left|e^{-i\lambda t}\right| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow F'(p) \in M_f.$$

Получаем:

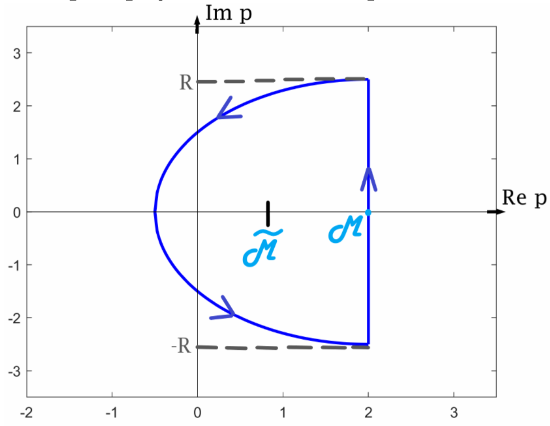
$$F'(p) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt,$$

$$F^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} (-t)^{(k)} f(t) e^{-pt} dt.$$

$$\operatorname{Re} p > \widetilde{\mu} \quad \Rightarrow \quad F(p) - \text{ аналитическая при } \operatorname{Re} p > \widetilde{\mu}$$

Часть F является мероморфной, т.е. аналитической за исключением конечного числа особых точек, которые являются полюсами или устранимыми особыми точками.

Перевернутая лемма Жордана



$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{p=p_j} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}] \Rightarrow$$

$$! \quad f(t) = \sum_{p=p_j} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}] \quad !$$

$$\exists A \geqslant 0 \, \mu_0 \in \mathbb{R} \, |f(t)| \leqslant A e^{\mu_0 t} \Rightarrow \widetilde{\mu} \leqslant \mu_0$$

Будем обозначать соответствие следующим образом: $\mathbf{f(t)} \supset \mathbf{F(p)}$: $\begin{matrix} \mathbf{f(t)} \text{ — оригинал} \\ \mathbf{F(p)} \text{ — изображение} \end{matrix}$

8.2 Таблица преобразований:

Простые:

- $\chi(t) \supset \dfrac{1}{p}$

- $\begin{cases} \chi(t) t^\alpha \supset \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \ \alpha > -1 \\ \chi(t) t^n \supset \dfrac{n!}{p^{n+1}} \end{cases}$

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-pt} = \begin{Bmatrix} p > 0, p \in \mathbb{R}, \\ pt = s \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{p^\alpha} e^{-s} \frac{ds}{p} =$$

$$= \frac{1}{p^\alpha} \int_0^\infty s^\alpha e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^\alpha}$$

- $\begin{cases} \chi(t) t^\alpha e^{\beta t} \supset \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\beta)^{\alpha+1}} \\ \chi(t) t^n e^{\beta t} \supset \dfrac{n!}{(p-\beta)^{n+1}} \end{cases}$

$$\left[\begin{matrix} \text{от } t^\alpha \text{ появляется } \Gamma(\alpha+1) \text{ и везде } p^{\alpha+1} \\ \text{от } e^{\beta t} \text{ появляется } (p-\beta) \end{matrix} \right]$$

Тригонометрические:

- $\boldsymbol{\cos(wt)}$

$$\begin{cases} \chi(t)t^{\alpha}\cos(\omega t) \supset \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\dfrac{1}{(p+i\omega)^{\alpha+1}} \overset{!}{+} \dfrac{1}{(p-i\omega)^{\alpha+1}}\right] \\ \chi(t)\cos(\omega t) \supset \dfrac{p}{p^2+\omega^2}, \\ \chi(t)e^{\beta t}\cos(\omega t) \supset \dfrac{(p-\beta)}{(p-\beta)^2+\omega^2}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{p}$ сверху

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} \Rightarrow$$

$$\chi(t)t^{\alpha}e^{i\omega t} \supset \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-i\omega)^{\alpha+1}},$$

$$+$$

$$\chi(t)t^{\alpha}e^{-i\omega t} \supset \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+i\omega)^{\alpha+1}},$$

- $\boldsymbol{\sin(wt)}$

$$\begin{cases} \chi(t)t^{\alpha}\sin(\omega t) \supset \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left[\dfrac{1}{(p+i\omega)^{\alpha+1}} \overset{!}{-} \dfrac{1}{(p-i\omega)^{\alpha+1}}\right] \\ \chi(t)\sin(\omega t) \supset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \\ \chi(t)e^{\beta t}\sin(\omega t) \supset \dfrac{\omega}{(p-\beta)^2+\omega^2}, \end{cases}$$

$\boldsymbol{w}$ сверху

Гиперболические:

- $\boldsymbol{\cosh(wt)}$

$$\begin{cases} \chi(t)\cos(\omega t) \supset \dfrac{p}{p^2-\omega^2}, \\ \chi(t)e^{\beta t}\cos(\omega t) \supset \dfrac{(p-\beta)}{(p-\beta)^2-\omega^2}, \end{cases}$$

«—» в знаменателе

$$\cosh(\omega t) = \frac{e^{-\omega t}+e^{\omega t}}{2}$$

- $\boldsymbol{\sin(wt)}$

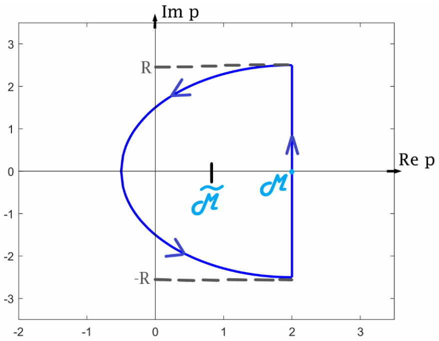
$$\begin{cases} \chi(t)\sin(\omega t) \supset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}, \\ \chi(t)e^{\beta t}\sin(\omega t) \supset \dfrac{\omega}{(p-\beta)^2-\omega^2}, \end{cases}$$

«—» в знаменателе

Рассмотрим формулу Меллина: $f(t) = \sum\limits_{p=p_j} \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]$

$$F(p)e^{pt} \overset{R\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{равномерно по } \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$p = \mu + \operatorname{Re}\, e^{i\varphi t}$$



Пример 8.1.

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \qquad f(t) = ?$$

$$F(p)e^{pt} = \frac{c_{-1}}{p+1} + c_0 + c_1(p+1) + \cdots$$

$$\left| \begin{array}{l} p_1 = -1: \quad \lim\limits_{p\to -1} \frac{(p+1)e^{pt}}{(p+1)(p+2)} \to e^{-t} \\ p_2 = -2: \quad \lim\limits_{p\to -2} \frac{(p+2)e^{pt}}{(p+1)(p+2)} \to -e^{-2t} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

8.3 Свойства преобразования Лапласа

$\boxed{\text{I}}$ Линейные подстановки

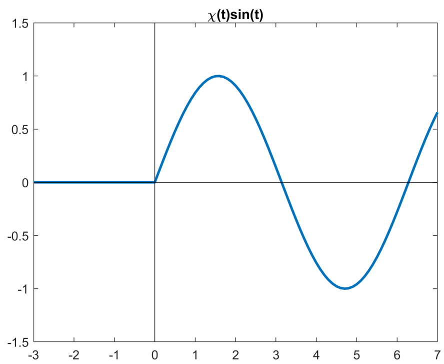
1. Th подобия

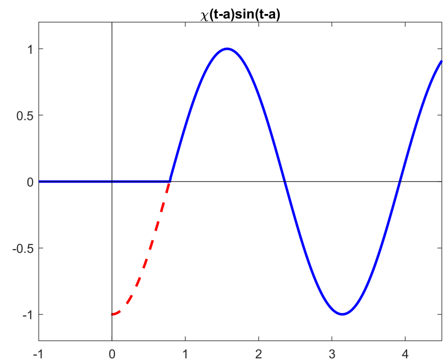
$$f(at) \supset \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\ a > 0 \qquad \Bigg| \qquad \int\limits_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt \quad \{s = at\}$$

$$\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right) \supset F(pb), \quad b = \frac{1}{a} > 0$$

2. 1-ая Th смещения

$$\chi(t-a)f(t-a) \supset e^{-ap}F(p),\ a > 0$$





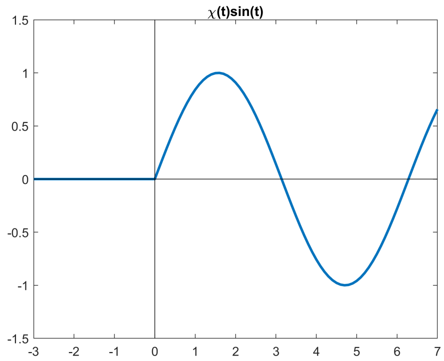
$$\chi(t)\sin(t) \supset \frac{1}{1+p^2} \qquad\qquad \underline{\chi(t-1)}\sin(t-1) \supset \frac{e^{-p}}{1+p^2}$$

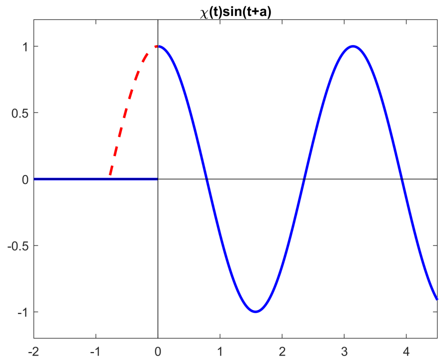
$$\textbf{!} \quad \underline{\chi(t)}\sin(t-1) \supset \frac{\cos(1)}{1+p^2} - \frac{\sin(1)p}{1+p^2} \quad \textbf{!}$$

[Мы знаем преобразования для $\chi(t)$,
а у нас все с a начинается здесь.
Аккуратно с $\chi(t)$**!**,
нужно смотреть на аргумент.]

3. 2-ая Th смещения

$$\chi(t)f(t+a) \supset e^{ap}\left[F(p) - \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right],\ a > 0$$





$$\int\limits_0^{+\infty} f(t+a)e^{-pt}dt = \{s=t+a\} = \int\limits_a^{+\infty} f(s)e^{-p(s-a)}dt = e^{ap}\left[F(p) - \int\limits_0^a f(t)e^{-pt}dt\right]$$

Эта часть с минусом — поправка на вылезшую за 0 часть графика.

4. Th затухания

$$\chi(t)f(t)e^{-\beta t} \supset F(p+\beta), \qquad \beta \in \mathbb{C}$$

$\boxed{\text{II}}$ Дифференцирование

1. Дифференцирование оригинала

$$f \in \mathbb{C}^k(0,+\infty), \text{ т.е. } \exists f(+0), f'(+0), \cdots, f^{k-1}(+0)$$

$$f^{(k)}(t) \supset p^kF(p) - p^0f^{(k-1)}(+0) - p^1f^{(k-2)}(+0) - \cdots - p^{k-1}f^{(0)}(+0) \;\Big|\; \text{сумма степеней у частей с минусом равна } k-1$$

$$k=1: \qquad \int\limits_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{\infty} - \int\limits_0^{\infty}(-p)f(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0)$$

- Важность $f(+0)$

  $\chi(t) \supset \dfrac{1}{p} \qquad \Big| \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0+}$

  $0 \supset 1 - \mathbf{1} \leftarrow$ из $p^0f^{(k-1)}(+0)$ Если $t=0$, то $\nexists \chi'(0)$

- Важность $\mathbb{C}^k(0,+\infty)$

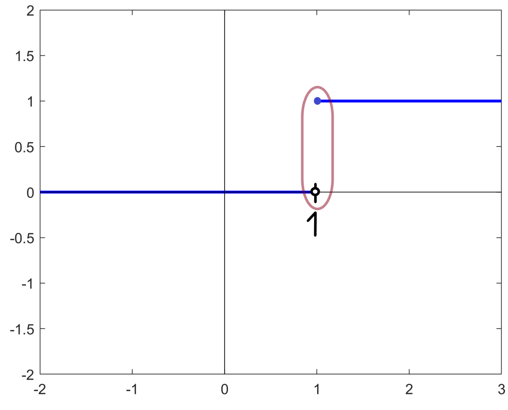
$$\chi(t-1) \supset \frac{e^{-p}}{p} \quad \Big|\frac{d}{dt}$$

$$0 \overset{?!}{\supset} e^{-p}$$

Противоречие т.к. $f(t) \notin C^k(0;+\infty)$, но

$$\underline{\delta(t-1) \supset e^{-p}}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt}dt \equiv 1 \qquad \int\limits_0^{\infty} \delta^{(k)}(t)e^{-pt}dt \equiv p^{(k)}$$



2. Дифференцирование изображения

$$\chi(t)(-t)^k f(t) \supset F^{(k)}(p)$$

9 Умножение и свертка

1) Свертка

$$f(t) \supset F(p)$$
$$g(t) \supset G(p)$$
$$(f * g)(t) \supset F(p)G(p)$$

$\int_0^t f(s)g(t-s)ds$ $\left(\begin{matrix} \text{т.к. при} \quad s<0, f=0 \\ \text{при} \quad s>t, g=0 \end{matrix}\right)$

2) Умножения

$$f(t)g(t) \supset (F*G)(p) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} F(z)G(p-z)dz, & \overline{\mu_1} \le \chi_1 \le Rep - \overline{\mu_2} \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\chi-i\infty}^{\chi+i\infty} F(p-z)G(z)dz, & \overline{\mu_2} \le \chi_1 \le Rep - \overline{\mu_1} \end{cases}$$

$Rep \ge \overline{\mu_1} + \overline{\mu_2}$

10 Периодические функции

$$f(t+T) = f(t), \ T>0, \ t \ge 0$$

$1^\circ) f = sin(t)$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \Sigma_{k=1}^\infty \int_{(k-1)T}^{kT} f(t)e^{-pt}dt = \{t = s+(k-1)T\} =$$
$$= \Sigma_{k=1}^\infty e^{-(k+1)Tp}\int_0^\pi f(s)e^{-ps}ds \ = \frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pt}}$$

$1^\circ)$ Пр.) $= \int_0^{2\pi} sin(t)e^{-pt}dt = -\int_0^{2\pi} e^{pt}dcos(t) = -\underbrace{e^{-pt}cos(t)\,|_{t=0}^{2\pi}}_{1-e^2\pi p} - p\int_0^{2\pi} e^{-pt}dsin(t) =$

$= \ 1 - e^2\pi p - p^2 I(p)$

$$I(p) = \frac{1-e^2\pi p}{1+p^2}, \qquad \chi(t)sin(t) \supset \frac{1}{1+p^2}$$

$$2^\circ) \ \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-pt}tdt + \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-pt}(T-t)dt = -\frac{1}{p}\int_0^{\frac{T}{2}} tde^{-pt} - \frac{1}{p}\int_{\frac{T}{2}}^T (T-t)de^{-pt} =$$
$$= -\frac{1}{p}\frac{\Gamma}{2}e^{-p\frac{T}{2}} + \frac{1}{p}\frac{\Gamma}{2}e^{-p\frac{T}{2}} + \frac{1}{p}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-pt}dt - \frac{1}{p}\int_{\frac{T}{2}}^T e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2}\left[1 - e^{-p\frac{T}{2}}\right] -$$
$$- \frac{1}{p^2}\left[e^{p\frac{T}{2}} - e^{-pT}\right]$$

11 Отыскание оригинала по изображению

$F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ $\quad Q, R -$ многочлены

$degQ < degR$

$R(p) = (p-\lambda_1)^{k_1}\dots(p-\lambda_m)^{k_m}(p^2+\lambda_1 p+\beta_1)^(L_1)\dots(p^2+\lambda_n p+\beta_n)^{L_n}$

$$\frac{Q(p)}{R(p)} = \overbrace{\frac{A_{11}}{p-\lambda_1}}^{\subset A_{11}e^{\lambda_1 t}} + \overbrace{\frac{A_{12}}{(p-\lambda_1)^2)}}^{\subset A_{12}te^{\lambda_1 t}} + \ldots + \overbrace{\frac{A_{1,k1}}{(p-\lambda_1)^{k1}}}^{\subset A_{11}t^{k-1-1}e^{\lambda_1 t}} + \overbrace{\frac{B_{11}p + C_{11}}{p^2 + \lambda_1 p + \beta_1}}^{\subset ...?} +$$
$$+ \frac{B_{12}p+C_{12}}{(p^2+\lambda_1 p+\beta_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1,l}p+C_{1,l}}{(p^2+\lambda_1 p+\beta_1)^{l1}} + \ldots$$

Как просто найти?

1) $A_{i1} \ldots Aik_i$:

$$A_{i,k_i}: \;\; F(p)(p-\lambda_i)^{k_i} = A_{i1}(p-\lambda_i)^{k_i-1} + \ldots + A_{i,k_1}(p-\lambda_i)^1 + \ldots + A_{i,k_i} + G_i(p)$$

$$\overset{\textit{подставляем}}{p = \lambda_i \;\; G(\lambda_i) = 0}$$

$$2) \; \frac{Bp+C}{p^2+\alpha p+\beta} = \frac{B(p-\mu)+(C+B\mu)\frac{\mu}{\omega}}{(p-\mu)^2+\omega^2} \subset Be^{\mu t}cos(\omega t) + \frac{(B\mu+C)}{\omega}e^{\mu t}sin(\omega t)$$

$\chi(t)e^{\beta t}sin(\omega t) \supset \frac{\omega}{(p-\beta)^2+\omega^2}$

12 Уравнение n-ого порядка (с постоянными коэфициентами)

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 y^{(1)}(t) + c_0 y(t) = f(t) \\ y(0) = y_0, \;\; y^{(1)}(0), = y_1 \;\; , \ldots y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

$$y(t) = u(t) + \upsilon(t)$$

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + c_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 u^{(1)}(t) + c_0 u(t) = 0 \\ u(0) = u_0, \;\; u^{(1)}(0), = u_1 \;\; , \ldots u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon^{(n)}(t) + c_{n-1}\upsilon^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 \upsilon^{(1)}(t) + c_0 \upsilon(t) = \upsilon \\ \upsilon(0) = \upsilon_0, \;\; \upsilon^{(1)}(0), = \upsilon_1 \;\; , \ldots \upsilon^{(n-1)}(0) = \upsilon_{n-1} \end{cases}$$

12.1 Фундаментальтаное решение(функция Грина)

$G(p) \subset g(t):$

$$\begin{cases} g^{(n)}(t) + c_{n-1}g^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 g^{(1)}(t) + c_0 g(t) = 0 \\ g(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0, \;\; g^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

Либо:

$$\begin{cases} g^{(n)}(t) + c_{n-1}g^{(n-1)}(t) + \ldots + c_1 g^{(1)}(t) + c_0 g(t) = \delta(t) \\ g(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$$p^n G - 1 + c_{n-1}p^{n-1}G + \ldots + c_1 pG + c_0 G = 0$$

$$\underbrace{(p^n + c_{n-1}p^{n-1} + \ldots + c_1 p + c_0)}_{=Z(p)} G(p) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; G(p) = \tfrac{1}{Z(p)}$$

Если $\;\; v \supset V$
$ZV = F, \;\; V = \frac{F}{Z} = FG \qquad\qquad v = g * f$

а $\;\; u(t) = y_{n-1}g(t) + y_{n-2}$

$$\begin{cases} y''(t) + c_1 y'(t) + c_0 y(t) = 0 \\ y(0) = y_0, \;\; y'(0) = y_1 \end{cases}$$

$$p^2 Y - y_1 p y_0 + c_1(pY - y_0) + c_0 Y = 0$$
$$(p^2 + c_1 p + c_0)Y = y_1 + y_0(p + c_1)$$
$$y = \underbrace{y_1 G)}_{\subset y_1 g(t)} + \underbrace{y_0(pG + c_1 G)}_{\subset y_0 g(t) + c_1 g(t)}$$

12.2 Пример задачи

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 2cos(t) \\ x(o) = 0, \;\; x'(0) = -1 \end{cases}$$

$x(t) \supset X(p) \;\; f^{(k)}(t) \supset p^k F(p) - \ldots - f^{(k-1)}(0) - p^{k-1} f(0)$

$$p^2 X - (-1) + X = 2\frac{p}{p^2+1}$$

$$X(p^2+1) = \frac{2p}{p^2+1} - 1 \qquad\qquad \frac{2p}{(p^2+1)^2} \subset tsin(t)$$

$$X = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1} \qquad\qquad \frac{1}{p^2+1} \subset sin(t)$$

$$x(t) = tsin(t) - sin(t)$$

$$\begin{cases} x'' - 4x = sin(\frac{3t}{2})sin(\frac{t}{2}) \\ x(o) = 1, \;\; x'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(cos(\frac{3t}{2}) - cos(\frac{t}{2}) = \frac{1}{2}(cos(t) - cos(2t))$$

$$t^{(k)}(t) \supset p^k F(p) - \Sigma_{i=0}^{k-1} p^i f^{k-i-1}(t_0)$$

$$p^2 X - p - 4X = \frac{1}{2}(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-4})$$

$$(p^2-4)X = \frac{1}{2}(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+4})$$

$$X = \frac{1}{2}(\frac{p}{(p^2+1)(p^2-4)} - \frac{p}{(p^2+4)(p^2-4)}) + \frac{p}{p^2-4}$$

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2-4)} - \frac{p}{5(p^2-4)} = \frac{5p-p^3+p}{5(p^2+1)(p^2-4)} = \frac{4p-p^3}{5(p^2+1)(p^2-4)} = \frac{p(4-p^2)}{5(p^2+1)(p^2-4)} = \frac{-p}{5(p^2+1)}$$

$$\frac{p}{(p-2)(p+2)(p^2+1)} = \frac{\overbrace{A_1}^{=\frac{1}{16}}}{p-2} + \frac{\overbrace{A_2}^{=\frac{1}{16}}}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+4}$$

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = \frac{2}{4*8} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16}(\frac{p+2+p-2}{p^2-4}) = \frac{1}{8}\frac{p}{p^2-4}$$

$$\frac{p}{(p^2+4)(p^2-4)} - \frac{p}{8(p^2-4)} = \frac{8p-p^3-4p}{8(p^2-4)(p^2+4)} = \frac{-p(p^2-4)}{8(p^2-4)(p^2+4)} =$$

$$x(t) = ch(2t) + (\frac{1}{26} - \frac{1}{32})e^{2t} + (\frac{1}{26} - \frac{1}{32})e^{-2t}$$

Матричная экспонента.

$x(t)$ удовлетвояет условию:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \\ X(0) = I \end{cases}$$

$X(t) \supset \Phi(p)$

$p\Phi - I = A\Phi \;\Rightarrow\; \Phi(pI - A) = I \;\Rightarrow\; \Phi(p) = (pI - A)^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} p-1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} (p-1)^2 & 0 & p-1 & 2 \\ 0 & p-1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{p-1} & \frac{2}{(p-1)^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{p-1} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{p-1} & \frac{2}{(p-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{p-1} \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} = e^{At}$$

13 Теоремы о предельных значениях

Теорема 13.1. *Пусть f — непрерывно-дифференцируемая функция и $f(t) \supset F(p)$, существует $f(+\infty)$; тогда $f(+\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p)$.*

Доказательство.

$$f'(t) \supset pF(p) - f(+0)$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(+0)$$

При $p \to 0$ выражение $\to f(+\infty) - f(+0)$.

$$\cos t \supset \frac{p}{p^2+1} \qquad \sin t \supset \frac{1}{p^2+1}$$

$$pF(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \to 0(p \to 0)$$

$$pF(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \to 1(p \to \infty)$$

$$\frac{p}{p^2+1} \to 0(p \to \infty)$$

■

Теорема 13.2. *Пусть f — непрерывно-дифференцируема; $f(t) \supset F(p)$ и существует $f(+0)$. Тогда $f(+0) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$.*

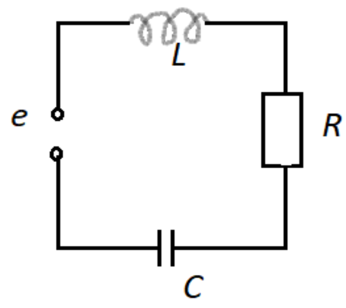
Доказательство.

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(+0)$$

■

14 Приложения преобразования Лапласа к исследованию процессов в электрических цепях

$$i \supset I, \quad e \supset E.$$

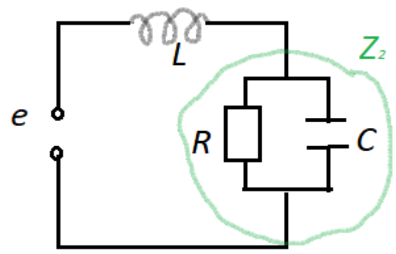


$$U_L = L\frac{di}{dt}$$
$$U_R = Ri$$
$$U_C = \frac{1}{C}\int 0ti(t)\,dt$$

Пусть $i(0) = 0$.

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int 0ti(r)\,dr = e(t)$$
$$pLI + RI + \frac{I}{Cp} = E$$
$$(pL + R + \frac{1}{Cp})I = E,$$

$Z = pL + R + \dfrac{1}{Cp}$ — импеданс(операторное сопротивление), $Y = \dfrac{1}{Z}$ — адмитанс.



$$Z = Z_1 + Z_2$$
$$\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{Z_2}$$
$$C_p + \frac{1}{R} = \frac{CR_P + 1}{R}$$
$$Z_2 = \frac{R}{CR_p + 1}$$

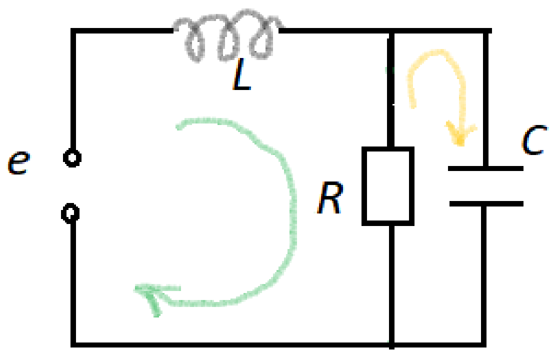
$$Z = pL = \frac{R}{CR_p + 1}$$

При параллельном соединении:

$$Z_1 ... Z_n;$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} ... Y_n = \frac{1}{Z_n}$$

$$Y = Y_1 + ... + Y_n$$



Рассмотрим схему как двухконтурную(закон Кирхгофа):

$$\begin{cases} pLI_1 + R(I_1 - I_2) = E \\ R(I_2 - I_1) + \frac{1}{Cp} I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_2(R + \frac{1}{Cp}) - RI_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}} I_1$$

$$I_1 - I_2 = \left(1 - \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}}\right) I_1 = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}} I_1 = \frac{1}{CR_p + 1} I_1$$

$$I_1(pL + \frac{R}{CR_p + 1}) = E$$

$$I_1 Z = E$$

$\boxed{\text{I}}$ Постоянный ток

$$l = l_0 \quad E = \frac{l_0}{p}$$

$\boxed{\text{II}}$ Переменный ток

$$l = l_0 \sin \omega t \quad E = \frac{l_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$(L_p + R + \frac{1}{Cp}) = \frac{l_0}{p}$$

$$I = \frac{l_0}{p} \left(\frac{1}{L_p + R + Cp}\right) = \frac{l_0 Cp}{p(CLp^2 + RCp + 1)} = \frac{l_0}{(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} =$$

$$= \frac{l_0}{(L(p+\frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}}.$$

$$D = C^2R^2 - 4CL$$

Пусть $C^2R^2 - 4CL < 0 \Rightarrow$ комплексные корни.

$$\frac{l_0}{(L(p+\frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}} = \frac{l_0 C}{CLp^2 + \frac{2\sqrt{CL}}{2\sqrt{CL}} + \frac{(CR)^2}{4CL} - \frac{CR^2}{4CL} + 1} =$$

$$= \frac{Cl_0}{(\sqrt{CL}p + \frac{CR}{4\sqrt{CL}})^2 - \frac{CR^2}{4CL} + 1} = \frac{l_0 C/CL}{(p+\frac{R}{2L})^2 + \frac{1-\frac{CR^2}{4L}}{CL}}$$

$$\frac{l_0}{L(p+\frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}} = \frac{l_0/L}{(p+\frac{R}{2L})^2 + (\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})} < e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{l_0}{L}\sin\frac{\sqrt{(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})t}}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

15 Теоремы о предельных значениях

Теорема 15.1. *Пусть f – непрерывно дифференцируема; $f(t) \supset F(p)$. Если существует предел $f(+\infty)$, тогда*

$$f(+\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Доказательство.

$$f'(t) \supset pF(p) - f(+0)$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0)$$

что при p стремящемся к нулю стремится к $f(+\infty) - f(+0)$. ■

Контрпримеры:

$$\cos t \supset \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow pF(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \xrightarrow{p\to 0} 0$$

$$\sin t \supset \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow pF(p) = \frac{p}{p^2+1} \xrightarrow{p\to 0} 0$$

Однако, мы знаем, что у синуса и косинуса пределов на бесконечности не существует.

Теорема 15.2. *Пусть f – непрерывно дифференцируема; $f(t) \supset F(p)$. Если существует предел $f(+0)$, то*

$$f(+0) = \lim_{p\to\infty} pF(p).$$

Доказательство.

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0),$$

здесь левая часть равенства при p стремящемся к бесконечности сходится к нулю. ■

Обратимся к предыдущему примеру:

$$\frac{p^2}{p^2+1} \xrightarrow{p\to\infty} 1 = \cos(0),$$

$$\frac{p}{p^2+1} \xrightarrow{p\to\infty} 0 = \sin(0).$$

16 Приложения преобразования Лапласа к исследованию процессов в электрических цепях

Рассмотрим электрическую цепь, включающую в себя индуктивную катушку, сопротивление и конденсатор, рис. 16.1. Обозначим I – ток, E – и $i \supset I, e \supset E$. Переходя к комплексному току $i(t)$, и полагая $i(0) = 0$, можно описать систему следующим образом:

$$U_L = L\frac{di}{dt}, U_R = Ri(t), U_C = \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)dt$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)dt = e(t)$$

$$pLI + RI + \frac{I}{Cp} = E$$

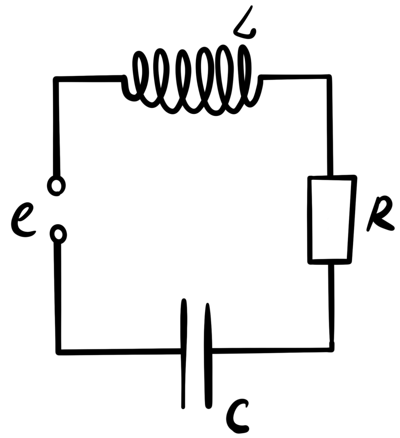


Рис. 16.1: Электрическая цепь, включающая в себя индуктивную катушку, конденсатор и резистор

$$(pL + R + \frac{1}{Cp})I = ZI = E$$

Здесь Z – *импеданс* (операторное сопротивление), а $Y = \frac{1}{Z}$ – *адмитанс.*

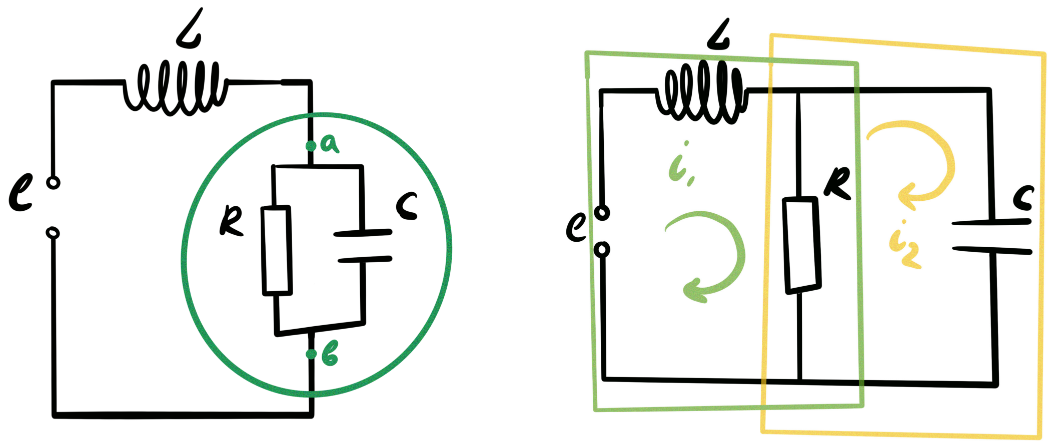
Теперь рассмотрим цепь с параллельным соединением, рис. 16.2a. Для цепей с параллельным соединением при импедансах $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ верно:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_2 = \frac{1}{Z_2}, \ldots, \frac{1}{Z_k}, \quad Y = Y_1 + Y_2 + \ldots Y_k.$$

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} = \frac{1}{Z_2} = Cp + \frac{1}{R} = \frac{CRp + 1}{R}$$

$$Z_2 = \frac{R}{CRp + 1}, Z = pL + \frac{R}{CRp + 1}$$



(a) Рассматриваем как цепь с параллельным соединением

(b) Рассматриваем как двухконтурную цепь

Рис. 16.2: Цепь с параллельным соединением

Можно эту же цепь рассмотреть как двухконтурную, рис. 16.2b, и, опираясь на законы Кирхгофа, получить

$$\begin{cases} pLI_1 + R(I_1 - I_2) = E \\ R(I_2 - I_1) + \frac{1}{Cp}I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_2(R + \frac{1}{Cp}) - RI_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}}I_1$$

$$I_1 - I_2 = (1 - \frac{R}{R + \frac{1}{Cp}})I_1 = \frac{1}{CRp + 1}I_1$$

$$I_1(pL + \frac{R}{CRp + 1}) = E = I_1 Z$$

В задачах часто рассматривают случаи

- Постоянного тока
$$e = e_0, E = \frac{e_0}{p}$$

- Переменного тока
$$e = e_0 \sin(wt), E = \frac{e_0 w}{p^2 + w^2}$$

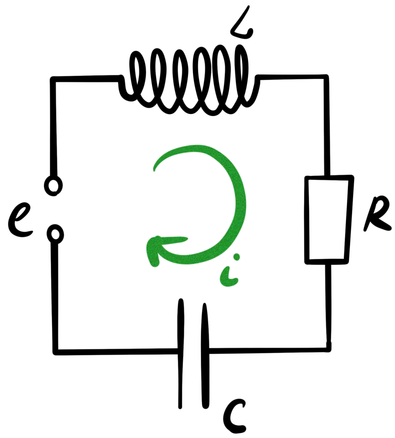


Рис. 16.3: Конкретный пример

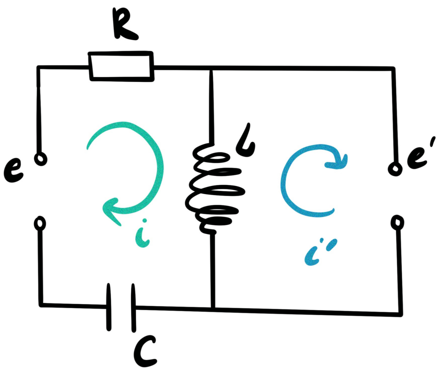
Решим конкретную задачу, рис. 16.3:

$$(Lp + R + \frac{1}{Cp})I = \frac{e_0}{p}$$

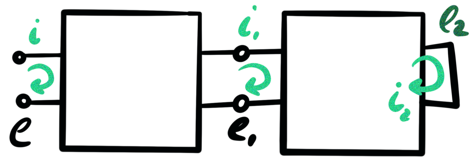
$$I = \frac{e_0}{p}\Big(\frac{1}{Lp + R + 1/Cp}\Big) = \frac{e_0 C}{CLp^2 + RCp + 1} = \frac{e_0}{L(p + \frac{R}{2L})^2 - \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{C}} =$$

$$= \Big\{\text{пусть } D = C^2r^2 - 4CL < 0, \text{ тогда корни будут комплексными}\Big\} =$$

$$= \frac{e_0/L}{(p + \frac{R}{2L}^2) + (\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})} \subset e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{e_0}{L}\frac{\sin\Big(\sqrt{(\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2})}t\Big)}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$



(a) Цепь с нагрузкой



(b) Можно рассматривать и так

Рис. 16.4: Пример 2

Рассмотрим цепь с нагрузкой, рис. 16.4a

$$RI + pL(I - I') + RI + \frac{1}{Cp} I = E$$

$$pL(I' - I) = -E'$$

$$RI + \frac{1}{Cp} I = E - E'$$

$$\begin{cases} E' = E - RI + \frac{1}{Cp} I \\ I' = I - \frac{E - (R + \frac{1}{Cp})I}{pL} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E' = A(p)E + B(p)I \\ I' = C(p)E + D(p)I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \tilde{A}(p)E' + \tilde{B}(p)I' \\ I' = \tilde{C}(p)E' + \tilde{D}(p)I' \end{cases}$$

Положим

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(p) & \tilde{B}(p) \\ \tilde{C}(p) & \tilde{D}(p) \end{bmatrix} = \tilde{U}.$$

$$\begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \tilde{U}_1 \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \{E_2 = 0\} = \tilde{U}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

17 Электромеханические аналогии

Рассмотрим Гамильтонову систему, с переменными $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$, на которую действуют внешние силы Q. Внешние силы могут быть следующих типов:

$\boxed{\text{I}}$ *Диссипативные*

$$Q = n - B\dot{q}, \quad B = B^T > 0$$

$$\langle \dot{q}, Q \rangle = -\langle \dot{q}, B\dot{q} \rangle < 0$$

К ним относится сила трения. Можно также ввести *функцию Релея* $R = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, B\dot{q} \rangle$ и тогда $Q = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}}$.

$\boxed{\text{II}}$ *Гироскопические*

$$Q = \Gamma\dot{q}, \quad \Gamma^T = -\Gamma$$

$$\langle \dot{q}, Q \rangle = \langle \dot{q}, \Gamma\dot{q} \rangle = \langle \Gamma^T\dot{q}, \dot{q} \rangle = \langle \dot{q}, \Gamma\dot{q} \rangle = -\langle \dot{q}, \Gamma \rangle = 0$$

q	b	m	c	Q	$\mathrm{K} = 1/2m\dot{q}^2$	$R = 1/2b\dot{q}^2$	$\Pi = 1/2cq^2$
q	L	R	$1/$	l	$L/2\dot{q}^2$	$R/2\dot{q}^2$	$1/2Ctq^2$
U	C	$1/R$	$1/L$	di/dt	–	–	–

Таблица 1: Электромеханические аналогии

Далее обозначим К – кинетическую энергию системы, П – потенциальную энергию, $\mathrm{E} = \mathrm{K} + \Pi$ – полную энергию системы,

$$\dot{q} = \mathrm{K} - \Pi, \quad \mathrm{K} = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, M\dot{q}\rangle, \Pi = \Pi(q),$$

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt} = \sum_j \langle \dot{q}_j, Q_j\rangle$$

Положим $M = M^T$ и $\frac{\partial \mathrm{K}}{\dot{q}} = M\dot{q}$. Запишем уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_j Q_j$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}}\Big) - \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \sum_j Q_j$$

Воспользуемся соотношением $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \dot{q}}\right) = M\ddot{q}$, и пусть П имеет вид $\Pi = \Pi(q) = Cq$. Следовательно, получим $M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q_{\text{внешние}}$ или в одномерном случае

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q_{\text{внешние}}. \tag{17.1}$$

Проведем аналогию с уравнением

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = e.$$

Если мы вспомним, что $i = \frac{dq}{dt}$, то получим представление аналогичное (17.1):

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R + \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} = e.$$

Кратко выводы можно описать таблицей 1.

Для цепи, иллюстрирующей сложение токов, изображенной на рисунке 17.1, можно выписать следующие соотношения

$$U = L\frac{di}{dt}, U = Ri, i = \frac{U}{R}, C\frac{dU}{dt} = i, i = \frac{1}{L}\int_0^{t_0} U(\tau)d\tau.$$

18 Управляемые и наблюдаемые системы

Рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + D_1v \\ y = Cx + D_2v. \end{cases} \tag{18.1}$$

Здесь x – *фазовая переменная*, которую мы наблюдаем, u – *управление*, v – *помеха*, причиной появления которой зачастую являются неточность линеризации или внешние условия. Второе

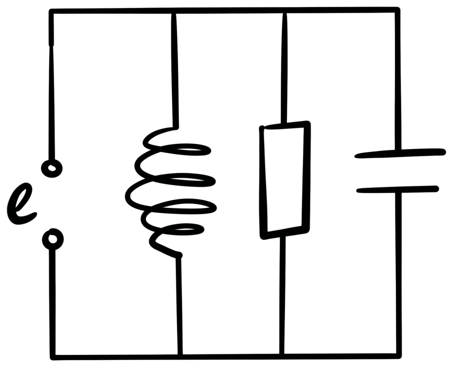


Рис. 17.1: Сложение токов

уравнение в данной системе называется *уравнением наблюдения*, и соответственно y – *наблюдением*. Применим преобразование Лапласа, обозначив $x(0) = x^0$, $x \supset X, y \supset Y, v \supset V, u \supset U$.

$$pX - x^0 = AX + BU + D_1V$$

$$(pI - A)X = x^0 + BU + D_1V$$

$$X = (pI - A)^{-1}x^0 + (pI - A)^{-1}BU + (pI - A)^{-1}D_1V$$

$$Y = CX + D_2V = C(pI - A)^{-1}x^0 + C(pI - A)^{-1}BU + (C(pI - A)^{-1}D_1 + D_2)V =$$

$$= C(pI - A)^{-1}x^0 + H_{yu}U + H_{yv}V$$

$H_{yu} = C(pI - A)^{-1}B$ принято называть *передаточной функцией (transfer function).*

Пусть наблюдение одномерно $y \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, и удовлетворяет системе

$$\frac{d^n y}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + c_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + \dots c_1\frac{dy}{dt} + c_0 y = u. \tag{18.2}$$

Сведем ее к системе (18.1):

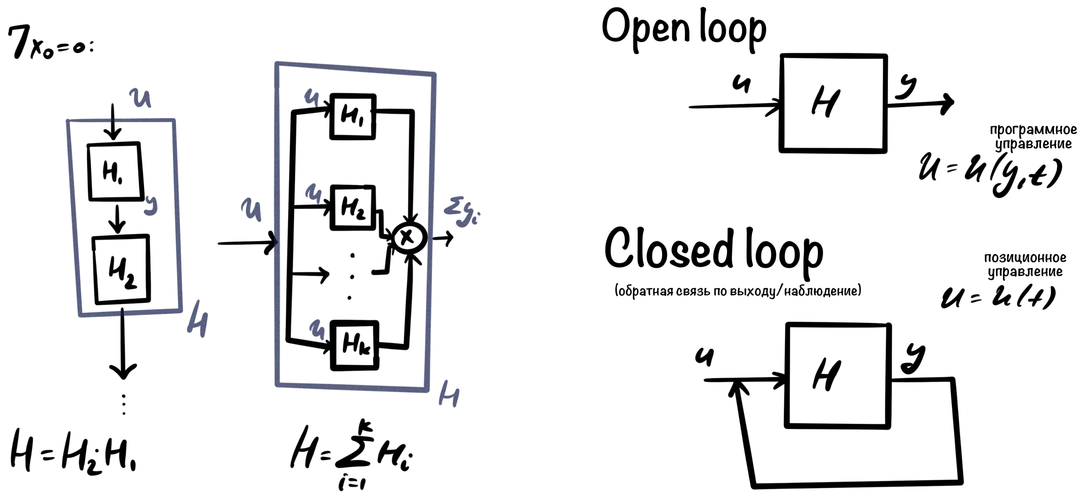
$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \frac{dy}{dt} \\ \dots \\ x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad (y = x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = -c_{n-1}x_n - c_{n-2}x_{n-1} - \dots - c_0 x_1 + u. \end{cases} \tag{18.3}$$

Возвращаясь к многомерной системе, для y справедливо:

$$\begin{cases} y = \underline{C^T x}, \quad (C = C^T) \\ \frac{dy}{dt} = \underline{C^T Ax} + C^T Bu \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \underline{C^T A^2 x} + C^T ABu + C^T B\frac{du}{dt} \\ \dots \\ \frac{d^n y}{dt^n} = \underline{C^T A^n x} + C^T A^{n-1}Bu + \dots C^T B\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}. \end{cases} \tag{18.4}$$

По теореме Гамильтона-Кэли A имеет разложение $A^n = c_0 I + c_1 A + \dots c_{n-1}A^{n-1}$. С тем, чтобы избавиться от подчеркнутых слагаемых домножим первое из уравнений системы (18.4) на $-c_0$, второе на $-c_1$, третье на $-c_2$, далее на аналогичные коэффициенты вплоть до предпоследнего уравнения, а затем сложим их все. Тогда мы сможем продолжить равенство из уравнения (18.2):

$$u = \beta_0 u + \beta_1\frac{du}{dt} + \dots \beta_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}.$$



(a) Различное соединение блоков (b) Замкнутая и разомкнутая система

Рис. 18.1: Различные управляемые системы

Положив $x^0 = 0$ и исключив помеху, получим $Y = H_{yu}U$. Различные схемы управления можно увидеть на рисунках 18.1a, 18.1b.

Для передаточной функции $H = H_{yu} = C(pI - A)^{-1}$ вводят понятие *частотной характеристики,* определяемой как $H(iw), w \in \mathbb{R}$. $|H(iw)|$ называют *коэффициентом усиления.*

Рассмотрим управление вида

$$u(t) = ae^{iwt}, \quad a \in \mathbb{R}^{n\times 1}, w \in \mathbb{R},$$

и будем считать A устойчивой матрицей (это верно, например, если все собственные ее значения имеют отрицательную вещественную часть). Справедлива теорема

Теорема 18.1. *Пусть A устойчивая матрица, $\bar{y}(t) = H(iw)ae^{iwt}$. Тогда*

$$\|y(t) - \bar{y}(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $y(t)$ – выход при $u(t) = ae^{iwt}$ (устойчивый режим).

Доказательство.

$$y(t) = Ce^{At}x^0 + C\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}Bae^{iwt}d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{t \to \infty, Ce^{At}x^0 \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ce^{At}\int\limits_0^t e^{-A\tau}Be^{iwt}ad\tau = Ce^{At}\int\limits_0^t e^{(iwI-A)\tau}d\tau Ba =$$

$$= C\big[e^{iwI} - e^{-At}\big]\big[iwI - A\big]^{-1}Ba \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} C\big[iwI - A\big]^{-1}Bae^{iwt} = H(iw)ae^{iwt}$$

Здесь мы воспользовались следующим преобразованием:

$$\int\limits_0^t e^{(iwI-A)\tau}d\tau = \left\{ \frac{e^{(iwI-A)\tau}}{(iwI-A)}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \right\} = \big[e^{(iwI-A)t} - I\big](iwI - A)^{-1},$$

справедливость этой формулы доказывается прямым дифференцированием. ■

19 Устойчивость

Исследуем на устойчивость систему $\dot{x} = Ax$, где $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ и $\operatorname{Re}\lambda_j \neq 0$. Введем функцию $\chi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + C_{n-1} + \cdots + C_1\lambda + C_0 = (\lambda - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Проблема в том, что все собственные значения сложно искать

Определение 19.1. Матрица A - усточива $\Leftrightarrow$ $\forall j \operatorname{Re}\lambda_j < 0$. Матрица A - неусточива $\Leftrightarrow$ $\exists j \operatorname{Re}\lambda_j > 0$.

$\chi(\lambda) = 0$ — критерий асимптотической устойчивости.
A — устойчива $\Rightarrow \chi(0) = C_0 > 0$. Заметим, что $\chi(0) = \prod_{j=1}^{n}(-\lambda_j)$. В случае действительного λ_j получаем $-\lambda_j > 0$, а в комплексном случае получим $(-\lambda_j)(-\overline{\lambda_j}) = |\lambda_j|^2 = (\alpha^2 + \beta^2) > 0$

19.1 Графический метод исследования на устойчивость

Рассмотрим $\lambda = i\omega$. Заметим, что тогда $\overline{\chi}(i\omega) = \chi(i\omega)$ Тогда получим:

$$\chi(i\omega) = (i\omega - \lambda_1) \cdot \cdots \cdot (i\omega - \lambda_n)$$

Тогда возможны два случая:

$$\begin{array}{cc} \operatorname{Re}\lambda_j < 0 & \operatorname{Re}\lambda_j > 0 \\ \operatorname{Arg} i\omega - \lambda_i \Big|_{w=-\infty}^{+\infty} = \pi & \operatorname{Arg} i\omega - \lambda_i \Big|_{w=-\infty}^{+\infty} = -\pi \end{array}$$

Тогда получим критерий асимптотической устойчивости Михайлова:
$\operatorname{Arg}\chi(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}n \Leftrightarrow \forall j \operatorname{Re}\lambda_j < 0$.
Иначе критерий Михайлова можно воспринимать как количество четвертей пройденных графиком $\chi(i\omega)$ или годографом по $\omega \in \mathbb{R}^+$

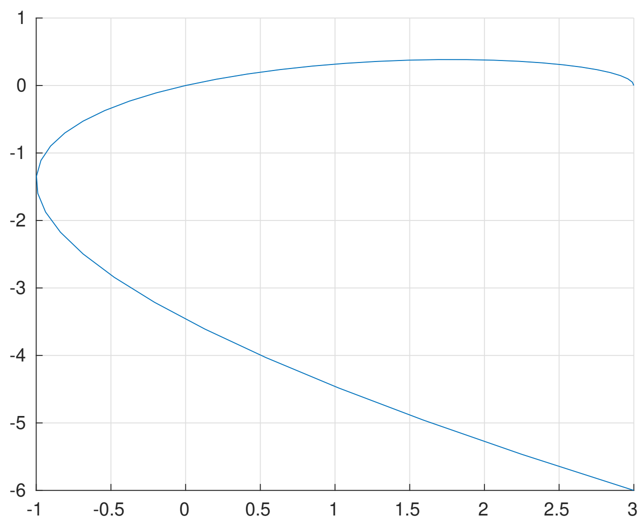
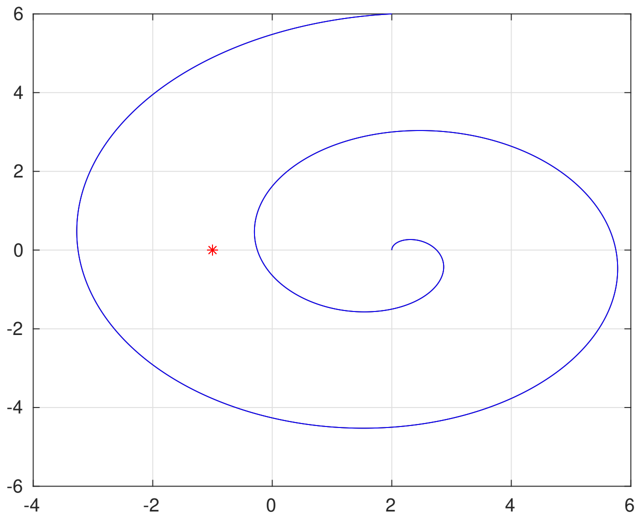


Рис. 19.1: Пример годографа с $\chi(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 3$

19.2 Применение к теории управления

19.3 Теорема Найквиста

Пусть H имеет q неустойчивых полюсов и $n - q$ устойчивых (не имеет чисто мнимых). Тогда замкнутая система устойчива тогда и только тогда когда $H(i\omega)$ не проходит через -1 и делает при $\omega = (0; +\infty)$ $\frac{q}{2}$ полных оборотов против часовой стрелки.


6
4
2
0
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
4
6

Список литературы

[1] К. В. Воронцов. *LaTeXв примерах.* — М.: МЦНМО, 2005.