Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет экономических наук

Образовательная программа «Экономика»

БАКАЛАВРСКАЯ ВЫПУСКНАЯ РАБОТА

“Модель Блэка-Литтермана с использованием рекомендаций аналитиков: пример российского фондового рынка”

Выполнил:
Студент группы № 142
Улыбин Кирилл Александрович

Научный руководитель:
Доцент
Курочкин Сергей Владимирович

Рецензент:
Профессор
Абрамов Александр Евгеньевич

Москва 2018

Аннотация

В данной работе представлен подробный теоретический и эмпирический анализ модели Блэка—Литтермана на основе данных российского фондового рынка в период 2015-2017. Результатом теоретического анализа стало детальное описание параметров модели, методов их спецификации и влияния на поведение модели. Используя рекомендации аналитиков в качестве взглядов, модель была специфицирована и протестирована на акциях, входящих в состав индекса МосБиржи. Результаты тестирования модели показали, что с учетом трансакционных издержек модель Блэка—Литтермана уступает портфелям—бенчмаркам и значимо не превосходит классическую модель Марковица из-за высокой оборачиваемости и чувствительности к спецификации взглядов. Данная работа представляет собой первое подробное описание спецификации модели и её тестирование на российском фондовом рынке, поэтому может служить для инвесторов практическим руководством по применению модели Блэка—Литтермана.

Abstract

This paper presents a detailed theoretical and empirical analysis of the Black—Litterman model based on the Russian stock market data during the 2015-2017 period. Theoretical analysis resulted in a detailed description of the model parameters, methods of their specification and influence on the behaviour of the model. Using analysts' recommendations as views, the model was specified and tested on the stocks included into MOEX Russia index. The testing of the model showed that once accounted for transaction costs, the Black—Litterman model appears to be inferior to benchmark portfolios and does not significantly exceed the results of the classic Markowitz model due to high portfolio turnover and sensitivity to the specification of views. This work appears to be the first to present a detailed description of the model specification process and provide a testing of the model on the Russian stock market. Hence, this study can serve as a practical guide for investors who would want to implement Black—Litterman model on Russian stock market.

Оглавление

Список иллюстраций

Список таблиц

Глава 1

Введение

"A good portfolio is more than a long list of good stocks and bonds. It is a balanced whole, providing the investor with protections and opportunities with respect to a wide range of contingencies."

Harry Markowitz (1959)

Одной из первых количественных моделей портфельной оптимизации, позволяющей получать оптимальные распределения активов в портфеле на основе исторических данных, была модель "риск—доходность", предложенная Гарри Марковицем в знаковой работе "Portfolio selection" (Markowitz, 1952).

Марковиц сформулировал концептуальный подход к решению проблемы распределения активов в портфеле, в котором инвестор сталкивается с выбором между риском и доходностью и оптимизирует свою целевую функцию за счет максимизации ожидаемой доходности, или минимизации риска. При этом комбинация активов с низкой или отрицательной корреляцией позволяет инвестору получать ранее недоступные комбинации риска и доходности — эффект диверсификации.

Хотя модель Марковица была революционной для науки, она не нашла применения среди профессионалов рынка из-за её неэффективности на практике. Вызвано это тем, что модель Марковица не предлагает никаких способов спецификации входных данных модели. Поэтому чаще всего для получения параметров распределения ожидаемой доходности используются оценки по историческим данным, что приводит к проблеме погрешности.

Важный вклад в развитие портфельной теории сделали Блэк и Литтерман, предложившие в своих статьях (Black and Litterman, 1991b, 1992) переосмысление подхода риск—доходность Марковица, которое привносит в оригинальный подход два важных нововведения.

Во-первых, модель Блэка—Литтермана включает в оптимизационную процедуру субъективные «взгляды» инвесторов относительно будущей доходности активов. Во-вторых, с помощью Байесовского подхода модель комбинирует взгляды инвесторов с априорным распределением — рыночным равновесием, тем самым предоставляя инвесторам механизм генерации входных данных для подхода риск-доходность, отличный от использования исторических данных.

Предложенная модель генерирует стабильные и диверсифицированные портфели, способные преодолеть большинство проблем с которыми инвесторы сталкиваются при применении модели Марковица (Walters, 2014). Как результат, именно модель Блэк—Литтермана стала наиболее используемой моделью портфельной оптимизации среди инвесторов в реальном секторе (Bertsimas et al., 2012).

1.1 Цель и задачи исследования

Цель

Хотя модель Блэка—Литтермана нашла своё применение среди узкой группы портфельных управляющих, количество академических работ, досконально исследующих применение модели и её результаты на данных вне тренировочной выборки, достаточно мало́.

С момента появления модели в 1991 многие авторы предлагали способы спецификации входных данных модели Блэка—Литтермана: в частности субъективных взглядов инвесторов на доходность и уверенность в данных взглядах. Без достаточного количества эмпирических свидетельств в пользу того или иного подхода спецификация параметров модели, а также её эффективность, в сравнении с другими инвестиционными стратегиями, до сих пор остаётся достаточно спорной и неоднозначной.

В силу неоднозначности спецификации и общей сложности модели, она до сих пор остается инструментом в руках узкого круга профессионалов рынка. Конечно, в таком случае возникает вопрос: возможно ли достаточно ясно специфицировать параметры модели, чтобы инвесторы на российском рынке могли использовать модель Блэка—Литтермана в своих инвестиционных решениях.

Для проверки этой возможности будет использоваться самый доступный источник для спецификации взглядов — рекомендации аналитиков.

Таким образом, цель работы — специфицировать параметры модели и провести её тестирование на российском фондовом рынке, используя рекомендации аналитиков как взгляды инвесторов.

Задачи

Чтобы достигнуть поставленной цели, необходимо выполнить следующие задачи:

1. Описать принцип работы и математическую основу модели Блэка—Литтермана, и выявить её преимущества в сравнении с классической моделью Марковица.
2. Проанализировать методологию применения модели на реальных данных: методы спецификации неоднозначных параметров модели и их влияние на конечный результат.
3. Для иллюстрации возможности применения модели специфицировать параметры на данных российского рынка, используя для генерации взглядов инвесторов рекомендации аналитиков.
4. Для тестирования модели провести инвестиционную симуляцию и сравнить финансовые результаты модели Блэка—Литтермана, модели Марковица и портфелей—бенчмарков по различным критериям.
5. Оценить результаты исследования для инвесторов: возможно ли однозначно и интуитивно специфицировать модель на российском рынке, и способна ли базовая спецификация модели компенсировать недостатки классического подхода Марковица и показывать результаты, превосходящие другие инвестиционные стратегии.

1.2 Практическая и теоретическая значимость

Во-первых, стоит отметить, что модель Блэка—Литтермана используется профессионалами в инвестиционных банках, хэдж фондах и других финансовых институтах. Так, Роберт Литтерман, говоря о модели, упоминает, что она “является ключевым инструментом в процессе управления активами в Investment Management Division в Goldman Sachs” (Litterman, 2004). В своём отчете Bevan и Winkelmann (Bevan et al., 1998) также описывают свой опыт использования модели в Goldman Sachs. Кроме того, как отмечается в работе Bertsimas et al. (2012), модель является частью инвестиционных стратегий в таких компаниях, как Zephyr Analytics, BlackRock и Neuberger Berman. Все эти компании являются одними из самых успешных инвестиционных компаний в мире, специализирующимися на разработке инвестиционных стратегий, поэтому вопрос о том, может ли более широкий круг инвесторов, не имеющих такой экспертизы в финансовых рынках и моделях, успешно использовать модель Блэка—Литтермана в своих инвестиционных решениях, остается открытым.

Во—вторых, актуальность данной работы особенно заметна в текущей финансовой парадигме расцвета пассивного инвестирования и роста активов под управлением ETF, показывавших существенно лучшие результаты по сравнению с классическими хэдж—фондами за счёт отсутствия высоких затрат на поиск недооцененных или переоцененных активов и, соответственно, меньших комиссий. Как показано в Cheung (2010), подход Блэка и Литтермана к портфельной задаче не требует от инвесторов спецификации прогнозов, то есть взглядов, на все активы на рынке. За счет наличия априорных рыночных весов как исходной точки, индивидуальные инвесторы и портфельные управляющие, не имеющие экспертизы и ресурсов крупных инвестиционных компаний, могут сосредоточиться на анализе нескольких активов и, правильно специфицировав входные параметры, получить результат, превосходящий бенчмарки.

В-третьих, данная работа привносит вклад в немногочисленную литературу, посвящённую эмпирическому тестированию модели Блэка—Литтермана, которое ещё не проводилось на российском рынке. С точки зрения потенциального интереса к результатам данного исследования, следует отметить, что Россия, как и другие рынки развивающихся стран, характеризуется большими трансакционными издержками, выражающимися в широких BID—ASK спрэдах. Финансовые результаты модели Блэка—Литтермана, как и любой инвестиционной стратегии, чувствительны к трансакционным издержкам, поэтому результаты данной работы могут показать, насколько эффективна или неэффективна модель на развивающемся рынке с большими трансакционными издержками.

1.3 Структура работы

Данная работа организованна следующим образом. В главе 2 приводится подробное описание и анализ литературы, посвященной модели Блэка—Литтермана и её тестированию. Затем, в главе 3, приводится краткое описание модели Марковица и её недостатков. После чего приводится подробный теоретический анализ и описание модели Блэка—Литтермана. Глава 4 посвящена описанию используемых в эмпирической части данных и их источников. Глава 5 фокусируется на подробном описании способов спецификации модели. Приводится пример спецификации параметров на российском рынке, а а также описание используемых портфелей—бенчмарков и метрик оценки качества инвестиционных стратегий. В главе 6 реализована инвестиционная симуляция и проанализированы полученные результаты. Заключение работы и основные выводы представлены в главе 7.

Глава 2

Обзор литературы

Данная глава посвящена обзору литературы по модели Блэка—Литтермана. Будет приведен краткий обзор работ, посвященных “демистификации” самой модели. Затем сделан акцент на работах, специфицирующих взгляды инвесторов. Для обоснования разумности использования рекомендаций аналитиков в качестве взглядов, будут приведены результаты исследований наличия инвестиционных сигналов в публичных рекомендациях. Следующим шагом является обзор статей, где проводится эмпирическое тестирование модели Блэка—Литтермана с рекомендациями аналитиков. Затем будет приведен обзор работ, где подробно описана методология и результаты сравнения инвестиционных стратегий.

Как было отмечено выше, фундаментальная модель Марковица, будучи широко признанной в научных кругах, не получила применения в реальном секторе. Главной причиной проблем модели является использование исторических средних в качестве прокси для параметров распределений ожидаемой доходности активов, что приводит к смещённости оценок и так называемой проблеме максимизации ошибки (см. Michaud, 1989; Drobetz, 2001).

Модель Блэка—Литтермана (1991b; 1991a; 1992) была разработана в попытке исправить проблемы, возникающие при использовании подхода риск—доходность Марковица. Модель берет за основу априорное рыночное равновесие и комбинирует его с субъективными взглядами инвесторов, которые влияют на отклонение весов оптимального портфеля от весов в равновесном портфеле, чтобы отразить ожидания инвесторов.

Оригинальные работы Black и Litterman (1991b; 1991a; 1992), а также He и Litterman (1999) обсуждали общую интуицию и обоснование предложенного подхода. Ни математического вывода основных формул модели, ни тем более спецификации входных параметров представлено не было, поэтому применить модель или до конца понять ее работу было затруднительно. В связи с этим в целом ряде работ авторы пытаются "демистифицировать" модель Блэка—Литтермана. Подробное описание и классификация работ, расширяющих и дополняющих оригинальные статьи по модели Блэка—Литтермана, представлены в анализе Walters (2014).

Одни работы, посвящённые подходу Блэка—Литтермана, фокусируются на выводе и подробном объяснении математической составляющей модели. Satchell and Scowcroft (2000) в своей работе приводят вывод формулы Блэк—Литтермана и предлагают методику использования точечных оценок для спецификации взглядов вместо распределений. Drobetz (2001) представляет ещё одно описание модели и обсуждает способы спецификации уверенности во взглядах.

Другая ветвь исследований посвящена расширению оригинальной модели путём различной спецификации взглядов и других входных данных модели Блэка—Литтермана, примером таких работ являются Meucci (2005) и Idzorek (2004). Idzorek (2005) в своей статье описывает "user—specified confidence levels" — метод присваивания "уверенности" взглядам инвесторов. Автор также приводит подробный пример того, как модель можно использовать для построения портфеля акций. Herold (2003) предложил метод внедрения качественных взглядов (покупка/продажа) относительно будущей доходности активов — метод, который позже был дополнен в работе Chiarawongse et al. (2012).

Поскольку в оригинальных работах Блэка и Литтермана не давался ответ на вопрос, как специфицировать субъективные взгляды инвесторов, многие авторы предлагали способы генерации взглядов. Вслед за Fabozzi et al. (2006), предложившим метод комбинирования различных стратегий генерации взглядов, например, факторных моделей, многие авторы пытались использовать факторные модели для получения прогнозов (см. Jones et al., 2007; Becker and Gürtler, 2008). Не так давно работа Beach and Orlov (2007) вдохновила ряд исследований, где для генерации взглядов используются эконометрические модели, такие как GARCH и её вариации.

В то время как одни авторы пытаются генерировать взгляды инвесторов с помощью финансовых и эконометрических моделей, другие разрабатывают методы использования рекомендаций аналитиков для спецификации параметров модели Блэка—Литтермана. Прежде чем перейти к обсуждению работ, где тестировалась модель Блэка—Литтермана с рекомендациями аналитиков в качестве взглядов, стоит рассмотреть вопрос о том, могут ли такие рекомендации содержать какую—то полезную для инвестора информацию. Согласно гипотезе эффективного рынка, рекомендации аналитиков должны немедленно находить отражение в рыночных ценах, то есть не могут генерировать полезные инвестиционные сигналы.

Ранние работы в этой области фокусируются на рекомендациях аналитиков и консенсус—ценах “в уровнях” и приходят к выводу, что, используя такие прогнозы, инвестор не может получить аномальную доходность (Barber et al., 2001; Brav and Lehavy, 2003). При этом авторы отмечают, что изменения рекомендаций аналитиков могут содержать потенциально важные сигналы. Однако последующие работы опровергают это утверждение, показывая, что с учетом транзакционных издержек изменения рекомендаций относительно активов также не позволяют генерировать прибыльные инвестиционные стратегии. Как показывают Boni and Womack (2006), дополнительная сортировка рекомендаций по отраслям экономики демонстрирует существенно лучший результат, чем использование изменений рекомендаций самих по себе. Данный результат также подтверждается в работе Da and Schaumburg (2011), где показано, что при контроле на отрасль консенсус прогнозы цен акций создают потенциально прибыльные инвестиционные сигналы. Кроме того, утверждается, что данный эффект не ограничивается только лишь моментом первоначального обновления рекомендации.

Рассмотрим работы, где для спецификации взглядов авторы использовали рекомендации аналитиков. He et al. (2013) одними из первых использовали рекомендации аналитиков для генерации взглядов и протестировали полученную спецификацию модели Блэка—Литтермана на фондовом рынке Австралии. Для создания взглядов инвесторов He, Grant и Fabre опирались на результаты работы Barber et al. (2001), а использованная ими методология затем применялась во многих других работах на данную тему. Однако тестирование полученного портфеля на реальных данных не показало статистически значимого превосходства доходности оптимального портфеля над доходностью индекса.

В работе Ramírez and Jaramillo (2015) авторы полностью повторяют исследование He et al. (2013) теперь уже на рынке Колумбии, однако, в отличие от результатов предшественников, доходность сгенерированного моделью портфеля превзошла рыночную. Стоит отметить, что авторы не делали сравнение в терминах коэффициента Шарпа, а также не учитывали влияние транзакционных издержек, что могло бы значительно повлиять на результаты.

Arestad and Rahmqvist (2012) тестировали модель Блэка—Литтермана на 36 акциях, входящих в портфель инвестиционного фонда Nordea Sverigefond (Швеция). В качестве взглядов авторы также собирали рекомендации аналитиков, однако подход к спецификации уверенности во взглядах отличает данную работу от He et al. (2013). Традиционно в таких исследованиях для спецификации уверенности авторы используют распространённый, но неинтуитивный подход — подсчёт дисперсии матрицы весов активов во взглядах. Arestad и Rahmqvists попытались специфицировать этот параметр более естественным и интуитивным способом: через количество рекомендаций приходящихся на конкретный прогноз. Результат работы совпадает с таковым у He et al. (2013): значимой разницы между доходностью получившегося портфеля и доходностью фонда найдено не было.

Подход к спецификации уверенности, использованный в работе Arestad и Rahmqvists, пытался дополнить Gertzell (2013), предложивший определять, какой тип рекомендации (покупать/держать/продавать) доминировал в конкретном месяце. В зависимости от того, насколько аналитики сходились в своих рекомендациях, изменялась и уверенность во взглядах. Как и в случае с работой Arestad and Rahmqvist (2012), сравнение полученного портфеля с Норвежским фондовым рынком не показало значимой разницы ни в доходности, ни в коэффициенте Шарпа.

Chen et al. (2015) — другая работа, следующая методологии He, Grant и Fabre, где авторы пытались учесть результаты исследований о возможности извлечь сигналы из рекомендаций аналитиков — работ Da and Schaumburg (2011) и Boni and Womack (2006). Другими словами, авторы решили включить контроль на сектор экономики при генерации взглядов. В отличие от результатов большинства предыдущих работ, результаты данной работы показывают, что на акциях индекса S&P 500 за период 1999—2010 модель генерирует портфель с доходностью, значимо превосходящий рыночную.

Nannar (2016) — самая новая работа, где автор опирается на методологию He et al. (2013) для генерации взглядов, при этом учитывая опыт Chen et al. (2015), то есть также используется контроль на сектор экономики при спецификации входных данных. В качестве источника рекомендаций аналитиков автор использует терминал Bloomberg, и тестируют модель на Тайском фондовом рынке. Полученные в работе результаты совпадают с выводами исследования Chen et al. (2015): модель генерирует портфель, чья доходность даже после учета транзакционных издержек превосходит рыночную.

После обзора работ, в которых авторы приводили методологию и результаты эмпирического тестирования модели Блэка—Литтермана с рекомендациями аналитиков в качестве взглядов инвесторов, стоит привести обзор нескольких работ, где авторы подробно приводят методологию сравнивания разных инвестиционных стратегий.

DeMiguel et al. (2009) проводят обширное тестирование инвестиционных стратегий, основанных на классическом подходе Марковица. Портфель, построенный в рамках оригинальной модели Марковица, а также множество портфелей, полученных с помощью различных модификаций модели Марковица, призванных уменьшить влияние погрешности оценки, сравниваются с “наивно” диверсифицированным портфелем с равными весами активов. Хорошо известный результат данной работы состоит в том, что при тестировании вне тренировочной выборки из 14 моделей на 7 наборах данных ни одна модель статистически значимо не превзошла стратегию “1/N” ни в терминах коэффициента Шарпа, ни в терминах показателя гарантированной эквивалентной доходности (certainty-equivalent return), ни в терминах оборачиваемости активов.

Хотя Kirby and Ostdiek (2012) критикуют методологию, использованную в работе DeMiguel et al., результат сравнения портфеля Марковица и стратегии 1/N с учетом транзакционных издержек даёт такой же результат: простейший портфель с равными весами демонстрирует лучший результат.

Недавняя работа Bessler et al. (2014) продолжает исследование, проделанное в описанных выше статьях, но включает в сравнение модель Блэка—Литтермана. Стоит отметить, что авторы не только подтверждают результаты предыдущих работ относительно портфеля Марковица и “наивной” диверсификации, но также приходят к выводу, что модель Блэка—Литтермана превосходит обе эти стратегии. Авторы утверждают, что портфель Блэка—Литтермана демонстрирует коэффициент Шарпа, значимо превосходящий таковой в порфтелях Марковица и “наивном” портфеле. Кроме того, портфель Блэка—Литтермана характеризуется меньшей оборачиваемостью активов и лучшей диверсификацией, чем портфели, полученные в вариациях подхода Марковица.

В результате проведенного исследования литературы, посвященной модели Блэка—Литтермана и её эмпирическому тестированию, можно сделать следующие выводы.

Во-первых, как классическая модель Марковица, так и многие из модификаций этой модели, созданные за последние 50 лет в попытке исправить проблему погрешности оценки, не нашли свое применение среди инвесторов, так как простейший бенчмарк в виде портфеля 1/N показывает лучший результат.

Во-вторых, можно заметить, что результаты тестирования модели
Блэка—Литтермана оказываются противоречивы: нельзя с уверенностью сказать, что модель плохо работает на развивающихся рынках и хорошо — на развитых рынках, и на тех и на других есть примеры успешного и неуспешного тестирования. Так же нельзя сказать, что конкретный подход к спецификации параметров даёт однозначное хорошие результаты, однако стоит выделить использование контроля на отрасль, как перспективную стратегию, показавшую хороший результат в обеих работах, где она была использована.

Таким образом, можно сделать вывод, что исследования по тестированию модели Блэка—Литтермана и спецификации параметров модели являются достаточно противоречивыми, поэтому данная работа может внести вклад в изучение возможностей применения модели в реальном секторе.

Глава 3

Теория: Марковиц и Блэк-Литтерман

В данной главе сперва будет рассмотрена модель Марковица: вывод основных формул, практические недостатки и возможные путей их решения. Затем будет разобрана сама модель Блэка—Литтермана, как один из способов решения проблем модели Марковица. Во-первых, будет представлена концепция и основная идея модели. Во-вторых, механизм получения основных формул и спецификация параметров будут описаны. Наконец, будет представлено интуитивное объяснение основных формул модели и приведено краткое сравнение с моделью Марковица.

3.1 Модель Марковица

Поскольку модель Блэка—Литтермана была предложена как модификация подхода риск—доходность Марковица, для обсуждения модели необходимо сначала ознакомиться с моделью Марковица. Так как целью работы является применение модели Блэка—Литтермана на российском фондовом рынке, поэтому в данной части будет приведено лишь краткое описание концепции Марковица.

Основную идею подхода риск—доходность, предложенного Гарри Марковицем, можно сформулировать следующим образом: инвестор может значительно снизить риск своего портфеля, сохраняя при этом определенный уровень ожидаемой доходности, или же, наоборот, увеличить ожидаемую доходность для заданного уровня риска, путем комбинирования активов с низкой или отрицательной корреляцией.

В модели Марковица, таким образом, агенты сталкиваются с выбором между риском и доходностью. Markowitz (1959) рассматривал не склонных к риску инвесторов: агентов, чья полезность возрастает с увеличением ожидаемой доходности и падает с ростом уровня риска. В модели предполагается, что доходность активов имеет нормальное распределение, поэтому риск портфеля (взвешенной комбинации активов) можно описать с помощью дисперсии доходности.

Стоит заметить, что модель Марковица по своей сути является нормативной, нежели дескриптивной моделью, то есть нацелена на объяснение того, как инвестору следует строить портфель, а не того, как инвесторы зачастую подходят к этой задаче на практике (Sharpe, 1967).

3.1.1 Задача портфельной оптимизации

В модели Марковица для получения оптимального портфеля в парадигме риск—доходность необходимо специфицировать следующие входные параметры: прокси для ожидаемой доходности активов — обычно исторические средние, а также дисперсию и ковариацию доходности активов — обычно также оцениваются по историческим данным. Традиционно для оценки ожидаемой доходности и ковариационной матрицы используются избыточные доходности.

Пусть портфель активов — n-мерный вектор $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^\top$, где ω_i - вес i-ого актива в портфеле. Пусть Ω - подмножество $\mathbb{R}^n$ допустимых портфелей. Тогда $\omega \in \Omega$ портфели, удовлетворяющие наложенным ограничениям. Для инвестора, максимизирующего функцию полезности, зависящую от доходности и риска, проблема портфельной оптимизации примет вид:

$$\mu^\top \omega - \frac{\lambda}{2} \omega^\top \Sigma \omega \to \max_{\omega \in \Omega} \tag{3.1}$$

где

- λ - параметр, описывающий несклонность инвестора к риску.
- μ - вектор ожидаемой доходности активов $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^\top$, $\mu_i = \mathbb{E}[r_i]$.
- Σ - симметричная ковариационная матрица доходности активов.

Задачу портфельной оптимизации (3.1) можно сформулировать в следующих видах: (см. Kolm et al., 2014)

Как максимизацию ожидаемой доходности при ограничении на дисперсию доходности:

$$\begin{cases} \mu^\top \omega \to \max\limits_{\omega \in \Omega} \\ \omega^\top \Sigma \omega \le \sigma^2_{max} \end{cases} \tag{3.2}$$

Или же как минимизацию дисперсии доходности при ограничении на ожидаемую доходность:

$$\begin{cases} \omega^\top \Sigma \omega \to \min\limits_{\omega \in \Omega} \\ \mu^\top \omega \ge R_{min} \end{cases} \tag{3.3}$$

При решении портфельной задачи (3.1) можно получить оптимальный по Марковицу портфель (в отсутствии ограничения на неотрицательные веса и полное инвестирование, то есть равенство суммы весов единице, которые обычно накладывается):

$$\omega^* = (\lambda\Sigma)^{-1}\mu$$

3.1.2 Ограничения модели Марковица

Несмотря на широкое признание важности модели, преложенной Гарри Марковицем, в академической среде, сама модель не стала привычным инструментом в руках инвесторов в силу ряда недостатков, проявляющихся при практическом применении. Подробно описаны и структурированы эти недостатки и их возможные причины в работе Michaud (1989): “The Markowitz Optimization Enigma: Is ‘Optimized’ Optimal?”, автор которой приходит к выводу, что на практике модель фактически неприменима. Формально Jobson (1981) показывает, что 1/N “наивная” стратегия превосходит на практике поход Марковица.

Проблема смещённости оценки

Фундаментальной проблемой является то, что на практике максимизация ожидаемой доходности превращается в максимизацию погрешности оценки входных параметров. Замена истинных параметров модели их выборочными оценками по историческим данным, стандартный подход к применению модели Марковица на практике, генерирует смещенные оценки истинных параметров (Michaud, 1989; Black and Litterman, 1992).

Максимизация ошибки происходит от того, что активы с такими привлекательными характеристиками, как высокая ожидаемая доходность, низкая дисперсия доходности и отрицательная ковариация, получают наибольший вес в оптимальном по Марковицу портфеле, но при этом они же больше всего подвержены смещенности оценки входных параметров модели.

Michaud отмечает, что в силу своей волатильности и незначительного прогнозного потенциала, использование выборочного среднего в качестве прокси для ожидаемой доходности является основной причиной проблем подхода Марковица. Для сравнения, эффект от смещённости оценок ожидаемой доходности примерно в десять раз критичнее для оптимального портфеля, чем смещённость оценок дисперсии доходности и в двадцать раз критичнее, чем смещённость оценок ковариации (Best and Grauer, 1991).

Как отмечают Green and Hollifield (1992), смещённость оценок сказывается и на диверсифицированности портфелей Мароквица, так как в ходе оптимизации веса одних активов завышаются, в то время как другие активы почти полностью исключаются из портфеля.

Нестабильность портфелей

Важным факторов при практическом применении модели является устойчивость решения. При высокой чувствительности оптимального по Марковицу распределения капитала к входным данным (в особенности к оценкам ожидаемой доходности), даже небольшое изменение входных оценок влечет за собой значительное перераспределение весов активов, что для инвестора оборачивается высокими транзакционными издержками, а значит снижает доходность инвестиционной стратегии.

Слабые вневыборочные результаты

Другим фактором, выделяемым в работе Michaud (1989), является низкая доходность полученных в ходе оптимизационной процедуры портфелей вне тренировочной выборки. Как уже было отмечено выше, выборочное среднее обладает плохой прогнозной силой, что сказывается на тестировании модели: портфели, полученные в рамках оригинального подхода риск—доходность, демонстрируют столь значительное снижение коэффициента Шарпа на тестовой выборке, что, как показано в работах Jobson (1981) и DeMiguel et al. (2009), инвестиционная стратегия 1/N оказывается более привлекательной.

Проблема наличия коротких позиций

Другую практическую проблему выделяют Black and Litterman (1992): в оптимальном по Марковицу решении задачи распределения капитала между активами часть активов получают отрицательные веса. Достижение такого распределения на практике оказывается невозможным, поскольку большинство портфельных управляющих ограничены в открытии коротких позиций законодательно. Если же инкорпорировать эти ограничения в оптимизационную задачу, то проблема слабой диверсификации усугубляется: большинство активов имеют нулевые веса, а оставшиеся активы имеют большие положительные веса. Естественно, полученные распределения характеризуются недостатком диверсификации и являются для инвесторов интуитивно неоптимальными.

Отсутствие возможности специфицировать взгляды

Также нужно отметить, что модель риск—доходность в своем оригинальном варианте не учитывает степень уверенности инвестора в передаваемых им входных параметрах. Другими словами, модель Марковица не предоставляет никаких инструментов для спецификации прогнозов относительно доходности тех или иных активов, следовательно, для инвесторов оптимальные портфели не имеют интуитивной связи с теми прогнозами и взглядами, которые они хотели бы учесть.

3.1.3 Модификации модели Марковица

Если принять во внимание вышеперечисленные проблемы, становится понятно, почему модель Марковица не стала привычным инструментов портфельной оптимизации для инвесторов: поддержание “оптимальных” весов либо невозможно в силу ограничений на короткие позиции, либо экономически невыгодно в силу высоких издержек и низкой доходности при отсутствии реальной диверсификации.

Поскольку перечисленные недостатки портфельной теории Марковица обусловлены по большей части проблемой смещённости оценок, появился широкий спектр работ, посвященных решению этой проблемы. Разработанные методики борьбы со смещённостью оценок можно разделить на два класса: эвристические и байесовские.

Эвристические методики снижения смещённости оценок представлены множеством инструментов: метод повторного семплирования, добавление дополнительных ограничений, различные робастные методы оптимизации, включение дополнительных моментов распределения доходности и другие.

Байесовские методы включают в себя использование различных стягивающих оценок (например, Bayes-Stein shrinkage estimators), а также разновидности модели Блэка-Литтермана. Байесовские подходы привлекательны своей интуитивностью: концептуально они схожи с тем, как люди обрабатывают информацию: инвесторы используют предыдущий опыт (исторические события, тренды) для принятия решения в текущий момент времени.

Следует отметить, что такое разделение основных подходов неслучайно: эвристические и баейсовские методики по-разному подходят к проблеме смещённости оценок. Если эвристические подходы направленны на модификацию самой оптимизационной процедуры, то байесовские подходы направлены на модификацию оценок входных данных. Ни байесовский ни эвристический подход не изменяют концептуально оптимизационную парадигму Марковица, а модифицируют то, как оцениваются или обрабатываются входные данные.

В данной работе рассматривается модель Блэка—Литтермана как конкретный метод из семейства байесовских подходов, способный получать более стабильные, диверсифицированные, интуитивные и эффективные портфели, нежели оригинальная модель Гарри Марковица. В следующей секции главы будет подробно рассмотрена теоретическая основа модели Блэка—Литтермана и концептуальный алгоритм её работы, а также приведено интуитивное объяснение работы основных формул модели.

3.2 Модель Блэка-Литтермана

Модель Блэка—Литтермана была впервые представлена Фишером Блэком и Робертом Литтеманом в Goldman Sachs Fixed Income Research отчете в 1991 году (Black and Litterman, 1991a) как решение некоторых фундаментальных проблем, присущих подходу Гарри Марковица.

На момент своего появления модель Блэка—Литтермана представляла собой новый подход к классической задаче портфельной оптимизации, построенный на уже знакомой всем концепции риск—доходность, предложенной Марковицем. Основное отличие от классической модели Марковица заключается в том, как в модели оценивается ожидаемая доходность активов — основная причина проблемы предшествующего подхода.

Прежде всего оптимизация в модели Блэка—Литтермана начинается не с "нулевого" портфеля, как в модели Марковица, а с равновесного рыночного портфеля, то есть портфель, где веса активов соответствуют рыночной стоимости компаний. Второе важное нововведение Блэка и Литтермана заключается в том, что модель инкорпорирует взгляды инвесторов в оптимизационную процедуру. Если равновесный рыночный портфель является отправной точкой, то субъективные взгляды инвесторов определяют, насколько веса активов будут отклоняться от исходного распределения в сторону активов, в отношении которых инвесторы имеют некие прогнозы, то есть взгляды. Кроме самих взглядов на отклонение весов результирующего портфеля от равновесного влияет также уверенность инвесторов в переданных модели взглядах: чем больше инвестор уверен в своем прогнозе, тем сильнее будет отклонение в пользу его взгляда.

Именно возможность повлиять на результирующий портфель через спецификацию взглядов на будущую доходность активов делает эту модель столь привлекательной для инвесторов на рынке. Другим важным фактором, определяющим, то, насколько модель Блэка—Литтермана может быть полезна инвесторам, является то, что в качестве исходного распределения, помимо равновесного рыночного портфеля, инвестор может использовать свой текущий портфель, или же индекс фондового рынка (Meucci, 2009).

Наконец для получения вектора ожидаемой доходности в парадигме модели Блэка—Литтермана (апостериорное распределение) используется байесовский подход: субъективные взгляды инвесторов (дополнительная информация) комбинируются с вмененной равновесной доходностью (априорное распределение). Затем оптимальные веса активов в портфеле получаются в ходе стандартной оптимизационной процедуры Марковица. Ниже представлена формула Байеса, на которую опирается модель Блэка—Литтермана.

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\,P(A)}{P(B)} \tag{3.4}$$

Схематичная иллюстрация подхода Блэка-Литтермана представлена на рисунке 3.1.

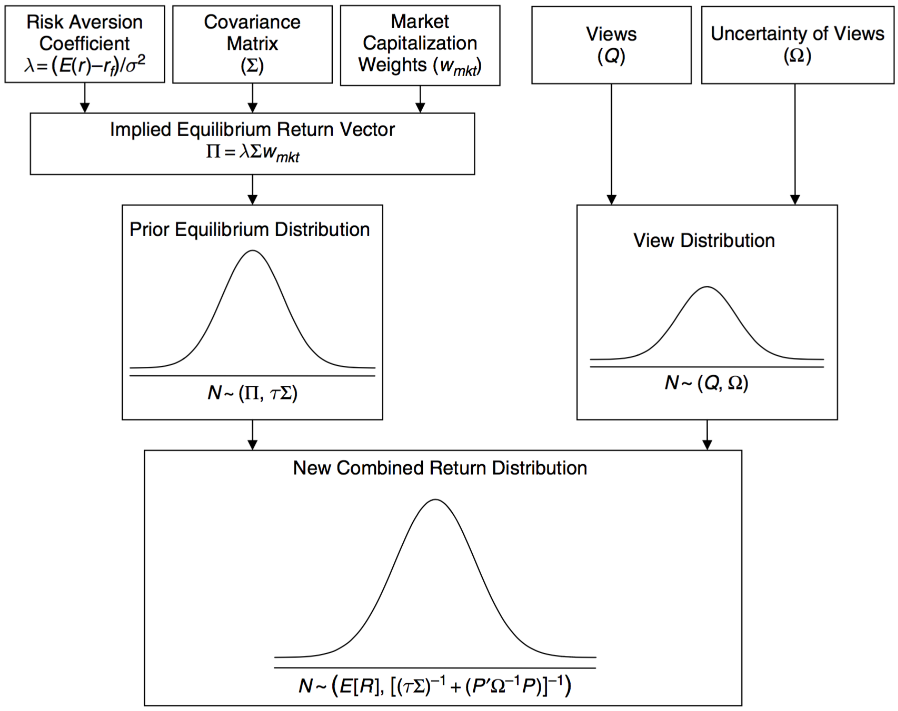

Рис. 3.1: Методология модели Блэка-Литтермана (Idzorek, 2007).

Ниже представлена основная формула, так называемая "мастер-формула" (master formula) модели Блэка—Литтермана, по которой считается скорректированная ожидаемая доходность:

$$\hat{\mu} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^{\top}\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^{\top}\Omega^{-1}Q\right] \tag{3.5}$$

где

$\hat{\mu}$ - вектор ожидаемой доходности

τ - параметр отражающий "вес взглядов"

Σ - ковариационная матрица исторической доходности

P - матрица, определяющая, какие активы участвуют в прогнозе инвестора

Ω - диагональная матрица, определяющая уверенность каждого взгляда

Π - вектор вмененной равновесной доходности

Q - вектор взглядов инвесторов

Полученный по формуле 3.5 вектор ожидаемой доходности подставляется в классическую оптимизационную задачу Марковица (3.2), в результате чего получается вектор оптимальных весов активов в портфеле Блэка—Литтермана.

Данная глава опирается на работы Walters (2008, 2014) и Kolm et al. (2014).

3.2.1 Каноническая референсная модель

Следуя классификации Walters (2014), каноническая референсная модель (Canonical Black-Litterman Reference Model) представляет собой именно тот вариант модели, который был описан Блэком и Литтерманом в своих оригинальных работах, и именно эта модель будет рассмотрена в этом разделе.

Референсная модель для доходности является базой, на которой в дальнейшем строится вся модель Блэка—Литтермана. Она включает в себя предпосылки о том, какие переменные считаются случайными величинами, а какие — нет, она также определяет, какие параметры моделируются. Различные версии модели Блэка—Литтермана, разработанные после выхода оригинальных работ, отличаются друг от друга именно спецификацией референсной модели для доходности.

Рассмотрим рынок из N активов (или классов активов), предположим, что ожидаемая доходность активов имеет нормальное распределение.

$$r \sim \mathbb{N}(\mu, \Sigma) \tag{3.6}$$

Эта случайная величина и есть та ожидаемая доходность, которую мы хотим смоделировать, а первый и второй момент её распределения — все необходимые входные данные для оптимизационной задачи Марковица.

Так как мы знаем о проблеме погрешности оценки, параметр μ (неизвестное среднее ожидаемой доходности) будем считать нормально распределенной случайной величиной, дисперсия которой представляет возможную погрешность.

$$\mu \sim \mathbb{N}(\pi, \Sigma_{\Pi}) \tag{3.7}$$

где π - оценка среднего (получается из равновесия), а Σ_π — дисперсия оценки среднего вокруг истинного значения, μ. Данное соотношение можно также представить в виде:

$$\mu = \pi + \epsilon$$

Априорная доходность нормально распределена вокруг оценки π с возмущением ϵ, причем $\epsilon \sim \mathbb{N}(0, \Sigma_\pi)$ (нет систематической ошибки) и не коррелирует с r. Тогда дисперсия ожидаемой доходности вокруг оценки π может быть представлена в виде:

$$\Sigma_r = \Sigma + \Sigma_\pi \tag{3.8}$$

В отсутствии погрешности оценки, то есть в случае, когда $\epsilon = 0$, $\Sigma_r = \Sigma$, то есть дисперсия ожидаемой доходности относительно её оценки равна истинной дисперсии доходности, когда же существует погрешность оценки, дисперсия ожидаемой доходности относительно её оценки уже не равна истинной дисперсии, а больше неё.

Тогда каноническую референсную модель для доходности (3.6) можно переписать в виде:

$$r \sim \mathbb{N}(\pi, \Sigma_r) \tag{3.9}$$

3.2.2 Обратная оптимизация

В качестве априорной оценки ожидаемой доходности модель Блэка—Литтермана берет равновесный портфель, а процедура получения вмененной равновесной доходности называется методом обратной оптимизации.

На практике чаще всего берется квадратичная функцию полезности и безрисковый актив, поэтому равновесная модель по сути становится Capital Asset Pricing Model (CAPM):

$$\mathbb{E}[r] = r_f + \beta r_m \tag{3.10}$$

где

r_f - безрисковая ставка

r_m - избыточная доходность рыночного портфеля

β - $\frac{\rho\sigma_p}{\sigma_m}$ - коэффициент регрессии

Оптимальный портфель в отсутствии субъективных взглядов инвесторов будет совпадать с рыночным портфелем CAPM, а априорное распределение для модели Блэка—Литтермана будет представлять собой полученную из рыночного портфеля CAPM оценку средней избыточной доходности.

Согласно Two Fund Separation Theorem, все инвесторы должны держать портфели, находящиеся на линии рынка капиталов (Capital Market Line) — касательной к эффективной границе, проведенной через бзрисковый актив, так как они превосходят все портфели на эффективной границе. При этом рыночный портфель CAPM, обладая наибольшим коэффициентом Шарпа, - единственный портфель на эффективной границе, который также лежит и на линии рынка капиталов. Получается, что в рамках CAPM все инвесторы держат один и тот же рискованный портфель - рыночный портфель CAPM, поэтому в равновесии рыночная капитализация определяет вес в рыночном портфеле. При этом оптимальной для инвестора будет некая комбинация безрискового актива и рыночного портфеля CAPM, в зависимости от параметра несклонности к риску.

CAPM—вмененные доходности можно оценить для отдельных активов, но поскольку рыночный портфель CAPM включает в себя все активы в инвестиционной вселенной, поэтому его трудно специфицировать, а получение оценок напрямую затруднительно. Однако предположение о равновесии позволяет использовать аргумент Теории Общего равновесия: все под-рынки также в равновесии, следовательно, можно использовать механизм обратной оптимизации для получения вмененной рыночной доходности из рыночной капитализации активов и ковариационной матрицы.

Также делается предположение о том, что ковариационная матрица доходности, Σ известна. На практике ковариационная матрица оценивается по историческим данным, например, с помощью экспоненциального сглаживания ряда предыдущих реализаций доходности. Это позволяет избежать проблемы плохой спецификации матрицы — она должна быть положительно определенной. Как уже было отмечено выше, погрешность в оценке ковариационной матрицы является значительно менее критичной проблемой нежели погрешность в оценке ожидаемой доходности.

Получение вмененной равновесной доходности начинается с квадратичной функции полезности:

$$U = \omega^\top \Pi - \frac{\delta}{2}\omega^\top \Sigma\omega \tag{3.11}$$

где

- U - функция полезности инвестора — целевая функция в задаче оптимизации Марковица
- ω - вектор весов (по рыночной капитализации)
- Π - вектор равновесной (избыточной) доходности
- δ - параметр несклонности к риску
- Σ - ковариационная матрица избыточной доходности

Условие первого порядка:

$$\frac{dU}{d\omega} = \Pi - \delta\Sigma\omega = 0 \tag{3.12}$$

Если бы решали прямую задачу, как в модели Марковица, то решение (3.12) относительно вектора весов ω было бы следующим :

$$\omega^* = (\delta\Sigma)^{-1}\Pi \tag{3.13}$$

Однако мы решаем задачу обратной оптимизации и хотим найти вектор избыточной вмененной доходности Π:

$$\Pi = \delta\Sigma\omega_{mkt} \tag{3.14}$$

Предположим, что наблюдаемые веса ω, которые можно получить из рыночной капитализации, представляют собой агрегированное решение уравнения (3.13). Ковариационную матрицу можно оценить по историческим данным. Тогда для использования уравнения (3.14), необходимо значение параметра несклонности к риску, δ.

Для того, чтобы найти δ, умножим левую и правую часть уравнения (3.12) на $\omega^\top$:

$$\omega^\top\Pi + r_f - r_f = \delta\omega^\top\Sigma\omega$$

Обозначим:
$r_m = \omega^\top\Pi + r_f$ - общая доходность от рыночного портфеля

$\sigma_m^2 = \omega^\top \Sigma \omega$ - дисперсия доходности рыночного портфеля
Выразим δ:

$$\delta = \frac{r_m - r_f}{\sigma_m^2} \tag{3.15}$$

В терминах коэффициента Шарпа уравнение (3.15) можно переписать:

$$\delta = \frac{SR}{\sigma_m} \tag{3.16}$$

Для получения δ может быть использована как формула (3.15), так и формула (3.16).

Теперь все компоненты формулы (3.14) оценены, следовательно можно получить вектор равновесной вмененной доходности, Π.

Вернемся теперь к референсной модели (3.9), единственным неоцененным параметром остается дисперсия оценки среднего, Σ_π. Для получения априорного распределения можно использовать предположение о структуре ковариационной матрицы, сделанное Блэком и Литтерманом. Предположим, что ковариационная матрица оценки пропорциональна ковариационной матрице ожидаемой доходности: $\Sigma_\pi = \tau\Sigma$, где τ — коэффициент пропорциональности, показывающий степень неопределенности в оценке априорной доходности.

Тогда априорное распределение модели Блэка—Литтермана (P(A) в терминах формулы Байеса (3.4)) представимо в виде:

$$\mu \sim \mathbb{N}(\Pi, \tau\Sigma) \tag{3.17a}$$

$$r \sim \mathbb{N}(\mu, \Sigma) \tag{3.17b}$$

3.2.3 Спецификация взглядов

Для того, чтобы в рамках байесовского подхода в модели Блэка—Литтемана комбинировать полученное априорное равновесной доходности с дополнительной информацией — взглядами инвесторов, необходимо дополнительно специфицировать три компоненты: вектор взглядов Q, матрицу уверенности во взглядах Ω и “связующую” матрицу P.

Предположим, что инвестор имеет k взглядов на N активов, тогда

- $P_{(k \times N)}$ матрица весов активов - определяет, какие активы включаются в прогноз и в какой форме он выражен. Для взглядов в абсолютной форме сумма весов должна равняться нулю, для взглядов в относительной форме — единице. Внутри каждого взгляда (каждой строчки матрицы) веса могут определяться по-разному: одни авторы используют веса на основе рыночной капитализации, другие используют равные веса для активов.

- $Q_{(k \times 1)}$ вектор ожидаемой доходности - отражает тот доход, который, по мнению инвестора, должен принести актив (для абсолютной формы), или разность в доходности активов (для относительной формы).

- $\Omega_{(k \times k)}$ диагональная ковариационная матрица прогнозов - отражает уверенность в прогнозах. При этом $\omega_i = 0$ означает абсолютную уверенность в прогнозе, и чем больше ω_i, тем меньше инвестор уверен в своем прогнозе.

Взгляды инвесторов задаются как условное распределение ($P(B \mid A)$ в терминах формулы Байеса (3.4)), причем каждый прогноз должен быть уникальным и не должен коррелировать с остальными. В таком случае ковариационная будет иметь диагональный вид, что повышает стабильность результатов, а также упрощает модель - оценка ковариаций между взглядами сложнее, чем оценка только дисперсий. В теории взгляды могут противоречить друг другу: байесовский механизм позволяет совместить все компоненты с учетом уверенности в каждом из взглядов, а также уверенности в априорной доходности.

Алгебраически соотношение между этими тремя элементами можно представить следующим образом:

$$P\mu = Q + \epsilon_Q$$

где ϵ_Q — вектор ошибок, $\epsilon_Q \sim \mathbb{N}(0, \Omega)$.

В терминах формулы Байеса (3.4) распределение доходности при условии взглядов можно представить в виде:

$$P(B \mid A) \sim \mathbb{N}(Q, \Omega) \tag{3.18}$$

Рассмотрим пример (Walters, 2014), как взгляды специфицируются на практике. Рассмотрим ситуацию, в которой у инветора есть четыре актива и два прогноза.

1. Относительный взгляд: доходность актива 1 будет больше доходности актива 3 на 2%, степень неопределенности ω_1.

2. Абсолютный взгляд: актив 2 будет иметь доходность 3%, степенью неопределенности ω_2.

У инвестора нет взглядов относительно актива 4, поэтому его ожидаемая доходность не будет модифицироваться, а значит он не включается в спецификацию взглядов. Тогда описанные взгляды задаются через матрицы P, Q и Ω в следующем виде:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \; \Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 \\ 0 & \omega_{22} \end{bmatrix}$$

Мы рассмотрели, как задается вектор Q и матрица P, однако матрица неуверенности во взглядах, Ω, не специфицирована. С момента появления модели было предложено множество способов получения матрицы Ω, среди них:

- Пропорционально дисперсии априорного распределение доходности
- Использование доверительного интервала для получения отклонения
- Использование дисперсии остатка факторной модели
- Использование метода Idzorek — допустимое отклонение весов

Рассмотрим наиболее распространенный в литературе метод спецификации, предложенный He and Litterman (1999), в котором дисперсия взглядов предполагается пропорциональной дисперсии доходности, то есть ковариационной матрице, полученной по историческим данным:

$$\Omega = diag(P(\tau\Sigma)P^\top) \tag{3.19}$$

Такая спецификация неуверенности во взглядах уравнивает вес (вклад) взглядов инвесторов и априорного рыночного равновесия в получении апостериорного распределения.

Альтернативный способ предложен Meucci (2010): диагональность матрицы не предполагается, также не включается параметр τ. В данном варианте параметр $c > 0$ отвечает за общий уровень уверенности во взглядах, при этом c часто приравнивают к τ^{-1}:

$$\Omega = \frac{1}{c} P \Sigma P^\top$$

3.2.4 Апостериорное распределение

Итак, в модели Блэка—Литтермана априорное распределение получается из вмененной равновесной рыночной доходности. В модели делается допущение о том, что ковариационная матрица априорной оценки пропорциональна ковариационной матрице реализованной доходности с коэффициентом пропорциональности τ, однако они независимы. Априорное распределение в модели Блэка—Литтермана специфицировано в формуле (3.17).

Условное распределение в модели Блэка—Литтермана основано на взглядах инвесторов, которые задаются как доходность нескольких портфелей активов, имеющая присущую ей неопределенность, которая влияет на то, каким будет апостериорное распределение. Условное распределение в специфицировано в формуле (3.18).

Имея формулы (3.17) и (3.18), мы можем применить формулу Байеса (3.4), чтобы скомбинировать априорное и условное распределения (оба заданы через нормальное распределение), и получить следующую формулу для апостериорного распределения доходности активов, называемую также “мастер-формула” модели Блэка–Литтермана (Black-Litterman Master Formula):

$$P(A \mid B) = \mu \sim \mathbb{N}\Bigg(\Big[(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P\Big]^{-1} \Big[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^\top \Omega^{-1} Q\Big] ; \\ \Big[(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P\Big]^{-1} \Bigg) \quad (3.20)$$

Вывод данной формулы представлен в работе Walters (2014). Важно отметить. что апостериорная дисперсия, обозначим её за M, является дисперсия апостериорной оценки средней ожидаемой доходности вокруг истинной средней ожидаемой доходности. То есть она отражает неопределенность в апостериорной оценке среднего, а не дисперсию ожидаемой доходности активов.

$$M = \Big[(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P\Big]^{-1} \quad (3.21)$$

Чтобы получить получить апостериорную ковариационную матрицу доходности, нужно вернуться к формуле (3.8) и сложить дисперсия апостериорной оценки среднего с дисперсией доходности, посчитанной по историческим данным:

$$\bar{\Sigma} = \Sigma + M$$

В апостериорной ковариационной матрице, таким образом, учитывается, что среднее ожидаемой доходности, μ, моделируется как случайная величина, а значит инвестор должен учесть дополнительную неопределенность, вытекающую из этого предположения.

Таким образом, распределение доходности, которое ожидаемо будет описывать рынок в период владения активами, то есть формула (3.9), задающая каноническую референсную модель доходности, будет выглядеть следующим образом ($\hat{\mu}$ — математическое ожидание в формуле (3.20)):

$$r \sim \mathbb{N}(\hat{\mu}, \bar{\Sigma}) \tag{3.22}$$

Наконец, для получения оптимального портфеля в модели Блэка—Литтермана, мы можем использовать первый и второй момент распределения (3.22), чтобы специфицировать параметры оптимизационной процедуры Марковица (3.1):

$$\omega_{BL} = (\lambda\bar{\Sigma})^{-1}\hat{\mu} \tag{3.23}$$

3.2.5 Интуиция "мастер-формулы"

Вернемся к "мастер-формуле" модели Блэка—Литермана (3.22):

$$\hat{\mu} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P\right]^{-1} \left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^\top \Omega^{-1} Q\right]$$

Как показано в Meucci (2010), среднее апостериорного распределение можно переписать в виде:

$$\hat{\mu} = \Pi + \tau\Sigma P^\top \left[P\tau\Sigma P^\top + \Omega\right]^{-1} [Q - P\Pi] \tag{3.24}$$

Из записи выше видно, что апостериорное среднее ожидаемой доходности в модели Блэка—Литтермана начинается с вектора вмененной равновесной рыночной доходности, которая затем корректируется путем добавления слагаемого, представляющего собой расстояние от доходности, заданной взглядами инвесторов, до равновесной доходности, $(Q - P\Pi)$, с поправкой на неопределенность во взглядах, Ω, и "вес" (вклад) взглядов, τ.

Если, например, инвестор имеет абсолютную уверенность в своих взглядах, то есть $\Omega = 0$, то формула (3.24) приобретает вид:

$$\hat{\mu} = \Pi + \Sigma P^\top \left[P \Sigma P^\top\right]^{-1} [Q - P\Pi] \tag{3.25}$$

Если же дополнительно предположить, что инвестор специфицирует взгляды (то есть ожидаемую доходность) для всех активов, то матрица P становится обратима и формула (3.25) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} = \Pi + &\left[\Sigma P^\top (P^\top)^{-1} \Sigma^{-1} P^{-1}\right] [Q - P\Pi] = \\ &= \Pi + P^{-1} Q - P^{-1} P \Pi = P^{-1} Q \end{aligned} \tag{3.26}$$

Получается, что при абсолютной уверенности во взглядах, среднее ожидаемой апостериорной доходности равно доходности, специфицированной во взглядах инвесторов. Если же, наоборот, инвестор совершенно не уверен в спецификации взглядов ($\Omega = \inf$), то среднее ожидаемой апостериорной доходности будет равно вмененной равновесной доходности, $\hat{\mu} = \Pi$, так как знаменатель второго слагаемого формулы (3.24) стремится к бесконечности, а значит в пределе второе слагаемое равно нулю.

Теперь, когда стало понятно, что происходит в двух критических случаях: отсутствия неопределенности во взглядах и полной неопределенности, можно показать, что апостериорное среднее ожидаемой доходности есть взвешенное по точности среднее между априорным рыночным равновесием и взглядами инвесторов. Преобразуем формулу (3.22):

$$\begin{aligned} \hat{\mu} = &\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P\right]^{-1} \left[(\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P^\top \Omega^{-1} Q\right] = \\ &= \frac{(\tau\Sigma)^{-1} \Pi + P^\top \Omega^{-1} Q}{(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P} = \\ &= \frac{(\tau\Sigma)^{-1}}{(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P} \Pi + \frac{P^\top \Omega^{-1} P}{(\tau\Sigma)^{-1} + P^\top \Omega^{-1} P} P^{-1} Q \end{aligned} \tag{3.27}$$

Отметим, что $\tau\Sigma$ отвечает за степень неуверенности в оценках априорного рыночного равновесия, а Ω — за степень неуверенности во взглядах, обратные величины, соответственно, отвечают за уверенность, то есть точность. Из формулы (3.27) становится понятно, что, в зависимости от параметров точности рыночного равновесия и взглядов, апостериорное распределение доходности будет смещаться либо в сторону вмененного равновесного распределение, либо условного распределения, заданного инвестором.

Учтем теперь спецификацию матрицы Ω, и покажем, что при использовании самого распространенного способа спецификации неуверенности во взглядах — пропорционально ковариационной матрицы реализованной доходности — неинтуитивный параметр τ не влияет на апостериорное распределение средней доходности. Подставим соответствующее в выражение в последнюю строчку формулы (3.27):

$$\begin{aligned}
&\frac{(\tau\Sigma)^{-1}}{(\tau\Sigma)^{-1}+P^\top\Omega^{-1}P}\Pi+\frac{P^\top\Omega^{-1}P}{(\tau\Sigma)^{-1}+P^\top\Omega^{-1}P}P^{-1}Q=\\
&=\left(\Omega^{-1}=\left(P(\tau\Sigma)P^\top\right)^{-1}=(P^\top)^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}P^{-1}\right)=\\
&=\frac{(\tau\Sigma)^{-1}}{(\tau\Sigma)^{-1}+(\tau\Sigma)^{-1}}\Pi+\frac{(\tau\Sigma)^{-1}}{(\tau\Sigma)^{-1}+(\tau\Sigma)^{-1}}P^{-1}Q=\frac{\Pi+P^{-1}Q}{2}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

При такой спецификации Ω вмененная равновесная доходность, Π, и доходность, получаемая из взглядов равным образом определяют апостериорную доходность, она будет равна простому среднему между ними. Как видно, параметр τ полностью исключается из получившейся формулы. Однако не исключается из формулы апостериорной дисперсии (3.21), при этом, учитывая, что M можно переписать в виде(Walters, 2014):

$$M=\tau\Sigma-\tau\Sigma P^\top\left[P(\tau\Sigma)P+\Omega\right]^{-1}P\tau\Sigma \tag{3.29}$$

При подстановке Ω в эту формулу, формула дисперсии (3.21) принимает вид: $M=\frac{1}{2}\tau\Sigma$.

3.2.6 Альтернативная референсная модель

Наиболее часто используемой модификацией оригинальной модели Блэка—Литтермана является, следуя классификации Walters (2014), “Альтернативная” модель:

$$r\sim\mathbb{N}(\mu,\Sigma) \tag{3.30}$$

Здесь μ уже не является случайной величиной, как в Канонической референсной модели (3.6), в данной спецификации это точечная оценка. Часто эту модель описывают как спецификацию параметра $\tau=1$, однако в данной модели этот параметр отсутствует вовсе. В Канонической модели параметр τ появляется из предположения о том, что ковариационная матрица оценки среднего доходности пропорциональна ковариационной матрице доходности ($\Sigma_\pi = \tau\Sigma$), однако в этой модели μ не является случайной величиной, а значит нет и Σ_π, а значит и параметра τ.

В данной модели Ω — единственный параметр, влияющий на то, как будут комбинироваться априорное и условное распределения. Формула (3.24), тогда будет единственной в "мастер—формуле" модели, и примет вид:

$$\hat{\mu} = \Pi + \Sigma P^\top \left[P\Sigma P^\top + \Omega\right]^{-1} [Q - P\Pi] \tag{3.31}$$

Таким образом, основными следствиями применения такой спецификации является, во-первых, то, что отпадает необходимость специфицировать параметр τ, а, во-вторых, веса оптимального портфеля в отсутствии взглядов будут равны весам равновесного рыночного портфеля. В то время как в Канонической модели, в отсутствии субъективных взглядов и дополнительного бюджетного ограничения, доля $\frac{1}{1+\tau}$ будет инвестирована в равновесный рыночный портфель, а оставшася часть — в безрисковый актив. Это объясняется тем, что в Канонической модели учитывается неуверенность инвесторов в своих оценках истинного значения среднего.

3.2.7 Отличия от модели Марковица

Выше были рассмотрены две знаковые модели портфельной оптимизации. В начале был описан подход Марковица к задаче распределения активов в портфеле. Несмотря на важность работы Гарри Марковица с теоретической точки зрения, получающиеся в результате решения оптимизационной задачи портфели являются нереализуемыми и неэффективными на практике.

Основной причиной проблем модели Марковица является погрешность оценки входных данных: поскольку модель не предоставляет механизма спецификации ожидаемой доходности и ковариационной матрицы доходности активов, стандартным подходом к использованию модели является подстановка оценок, полученных по историческим данным, что приводит к высокой погрешности.

В попытке уменьшить погрешность в оценке входных данных было предложено множетсво подходов. Одним из наиболее используемых на практике стала модель Блэка—Литтермана, опирающаяся на байесовский подход.

В отличие от модели Марковица, где инвесторы напрямую подставляют оценки параметров распределения ожидаемой доходности, полученные по историческим данным, в оптимизационную задачу, модель Блэка-Литтермана предлагает механизм получения оценок параметров распределения, призванный нивелировать проблему погрешности оценок.

Модель Блэка—Литтермана, с одной стороны, предлагает исходную референсную точку — вмененную равновесную рыночную доходность, полученную из равновесия в модели CAPM. С другой стороны, модель Блэка—Литтермана предлагает механизм, с помощью которого инвестор может отклониться от этого априорного равновесного распределения — с помощью спецификации взглядов на ожидаемую доходность и уверенности в этих взглядах. Затем, с помощью теоремы Байеса, модель соединяет эти два элемента: априорное равновесное распределение и условное распределение из взглядов, чтобы получить апостериорное распределение ожидаемой доходности активов, которое уже используется в классической оптимизационной задаче Марковица.

Такой подход позволяет получать более стабильные и эффективные портфели, которые при этом отражают взгляды инвесторов на будущее движение рынка. Считается, что модель Блэка—Литтермана позволяет исправить основные проблемы модели Марковица и может быть использована профессиональными участниками рынка. Однако, как можно убедиться по данной главе, эти улучшения отразились на сложности модели: математический аппарат усложнился, а количество параметров, которые должны быть должным образом специфицированы, увеличилось. Это во многом объясняет тот факт, что модель используется достаточно узким кругом профессиональных портфельных управляющих.

Глава 4

Данные

В данной главе будет представлено описание используемых данных и их источников. Также будет дано объяснение выбора индекса, безрисковой ставки и временного промежутка исследования.

Для эмпирического тестирования модели был выбран российский фондовый рынок. Инвестиционная вселенная в данной работе ограничивается акциями, входящими в расчет индекса МосБиржи, или индекса MOEX Russia — самыми ликвидными акциями крупнейших российских компаний. Тестирование модели Блэка—Литтермана проводится на периоде с 01.01.2015 по 31.12.2017. Список компаний, входивших в расчет индекса на этом промежутке времени можно найти в приложении.

Для акций, входивших в индекс МосБиржи в периоде с 01.01.2010 по 31.12.2017 из терминала Bloomberg были собраны дневные ряды данных: цены закрытия с поправкой на выплату дивидендов и другие корпоративные действия, рыночная капитализация по закрытии торгов, также скорректированная на выплату дивидендов и другие корпоративные действия, рекомендации аналитиков. Для периода с 01.01.2015 по 31.12.2017 был дополнительно получен средний за день BID-ASK спрэд в процентах от цены для учета трансакционных издержек при тестировании модели.

Рекомендации аналитиков являются одной из ключевых особенностей модели Блэка—Литтермана, поэтому без их спецификации использование столь сложной модели не имеет практического смысла. Таким образом, временные рамки работы и выбор индекса для тестирования модели Блэка—Литтермана во много определяются доступностью рекомендаций аналитиков и необходимостью иметь ряд рекомендаций длиной 5 лет для спецификации взглядов инвесторов.

С одной стороны, для того, чтобы получить регулярные рекомендации, которые при этом не будут исходить от одного лишь аналитика, необходимо выбрать ликвидные акции с большим объемом торгов. Такие акции будут наиболее привлекательны для инвесторов, а значит и для финансовых компаний, предоставляющих обзоры и рекомендации для своих клиентов.

При этом для целей сравнения акции должны быть не только ликвидны (то есть иметь достаточно рекомендаций), но и входить в индекс. На российском фондовом рынке под такие критерии подходит индекс МосБиржи, включающий наиболее ликвидные акции крупнейших российских компаний. Этот индекс также служит бенчмарком для многих ПИФов, что дает возможность сравнить результаты модели Блэка—Литтермана с доходностью бенчмарков и ПИФов.

С другой стороны, сами рекомендации даже для высоколиквидных акций индекса МосБиржи не всегда многочисленны и постоянны. За исключением нескольких компаний, для большинства компаний индекса относительно многочисленные и постоянные рекомендации можно найти с 2009-2010 года. До этого для многих компаний рекомендации либо малочисленны (один или два контрибьютера), либо публикуются с большими перерывами.

Поэтому в качестве периодов для конструирования взглядов инвесторов будут использованы временные промежутки 01.01.2010 — 31.12.2014, 01.01.2011 — 31.12.2015, 01.01.2012 — 31.12.2016, а в качестве тестовых периодов будут использованы, соответственно, три года года: 01.01.2015 — 31.12.2015, 01.01.2016 — 31.12.2016, 01.01.2017 — 31.12.2017.

Для оценки ковариационной матрицы была использована избыточная доходность — стандартный подход к оценке ковариационной матрицы. Для получения избыточной доходности необходимо обозначить, что подразумевается под безрисковой доходностью. В качестве безрисковой доходности обычно берется кривая доходности государственных облигаций (ОФЗ в случае России) за период, совпадающий с инвестиционным горизонтом инвестора.

В литературе, тестирующей инвестиционный стратегии, в том числе модель Блэка—Литтермана, нет однозначной конвенции, какой срок безрисково инструмента следует рассматривать: кто-то использует доходность десятилетних государственных облигаций, кто-то — однолетних или трехмесячных. Поскольку в данной работе используется ежедневная ребалансировка, то инвестиционным горизонтом является один день: мы получаем оценку ожидаемой доходности и ковариационной матрицы доходности на один день вперед. В связи с этим логично использовать однодневную безрисковую доходность, поэтому в качестве безрисковой ставки во всех вычислениях (помимо оценки коэффициента несклонности и риску) используется ставка RUONIA O/N, приведенная к дневной доходности. RUONIA выбрана вместо индекса MOSPRIME, поскольку она рассчитывается на основе реально заключенных сделок, а поэтому является более репрезентативным, чем MOSPRIME, представляющий собой индикатив на определенный момент времени. Стоит отметить, что ЦБ РФ использует ставку RUONIA как индикатор ставок денежного рынка [1].Данные по ставке RUONIA O/N за весь необходимый период были получены с сайта ЦБ РФ (https://www.cbr.ru). Для оценки коэффициента несклонности к риску была использована историческая доходность 10-и летних ОФЗ, полученная из Bloomberg.

В качестве рекомендаций аналитиков используются публичные рекомендации аналитиков в форме сигналов “Buy”/“Hold”/“Sell”, публикуемые в терминале Bloomberg, функция ANR. Хотя каждый контрибьютер или аналитик может иметь свою собственную шкалу рекомендации для акций, все шкалы унифицированы аналитиками Bloomberg и приведены к числовой шкале от 1 до 5. Рекомендации “Buy” присваивается значение 5, рекомендации “Hold”— значение 3, а рекомендации “Sell” — значение 1. Используемый в данной работе консенсус—рейтинг — среднее стандартизированных рекомендаций (использовано поле EQY_REC_CONS).

Рекомендации были собраны для акций, входивших в индекс МосБиржи в периоде с 01.01.2010 по 31.12.2017. Периодичность данных — дневная.

[1] https://www.cbr.ru/publ/ondkp/on_2018(2019-2020).pdf

Глава 5

Методология применения модели

В данной главе представлено подробное описание спецификации базовой модели Блэка—Литтермана. Обсуждается, как различные варианты референсной модели влияют на процесс спецификации. Затем приводится пример спецификации базовой модели на примере российского фондового рынка. Кроме того описываются портфели—бенчмарки и метрики сравнения эффективности портфелей. В конце главы приводится методика учета трансакционных издержек.

В данной работе проводится тестирование модели Блэка—Литтермана на российском фондовом рынке, а именно на акциях, входящих в расчет индекса МосБиржи. Для тестирования используются ежедневные данные, собранные за три года: 2015, 2016 и 2017. При этом в качестве взглядов аналитиков будут использованы рекомендации, опубликованные в Bloomberg и оцененные по пятилетнему периоду, предшествующему каждому из тестовых периодов. Портфель Блэка—Литтермана ребалансируется ежедневно по закрытию.

После получения оптимального в терминах модели Блэка—Литтермана портфеля, будет проведено его сравнение с классическим портфелем модели Марковица — портфелем максимального коэффициента Шарпа, а также с тремя другими бенчмарк—портфелями: портфелем с равными весами активов, портфель, взвешенный по рыночной капитализации и портфель наименьшей дисперсии.

Для сравнения результатов всех портфелей будет использовано восемь критериев: кумулятивная доходность, коэффициент Шарпа, коэффициент Сортино, оборачиваемость портфеля, CEQ, коэффициент максимального падения стоимости, индекс Херфиндаля-Хиршмана и погрешность отслеживания

5.1 Спецификация параметров модели

Апостериорная ожидаемая доходность, получаемая с помощью модели Блэка—Литтермана, зависит от того, как специфицированы параметры модели, это же и является основной сложностью, с которой сталкиваются исследователи и инвесторы при применении модели Блэка-Литтермана на финансовом рынке. Поэтому в этой части главы будет подробно описано, как в данной работе специфицируются параметры модели.

5.1.1 Коэффициент несклонности к риску

Выбор инвестора между риском и доходностью определяется коэффициентом несклонности к риску, δ. Как уже было показано в главе 3, для оценки коэффициента можно использовать уравнение (3.15). Для расчета был взят десятилетний период предшествовавший первому году тестирования модели — 2015, чтобы учесть долгосрочную ожидаемую доходность рынка. Аннуализированная рыночная доходность за период с 01.01.2005 по 01.01.2015 составила около 16%. В качестве безрисковой ставки была взята доходность государственных облигаций России за соответствующий период: средняя доходность десятилетних ОФЗ составляла около 7.77%. Оценив волатильноссть рыночной доходности за тот же временной промежуток, было получено, что коэффициент несклонности к риску, δ, составляет 2.69.

Стоит отметить, что наиболее распространенными в литературе значениями параметра δ является промежуток от 2 до 3. Так He and Litterman (1999) оценивают $\delta = 2.5$ как среднее по миру значение коэффициента несклонности к риску. Idzorek (2004) оценивают коэффицинет для глобального рынка и получают значение 3.07. Idzorek (2004) получают оценку для MSCI World Index около 2. Наконец, He et al. (2013) в своей эмпирической работе также используют значение 3.

Кроме того, Meucci (2009) отмечает, что модель Блэка—Литтермана в целом не является чувствительной к изменениям данного параметра. Из приведенных выше работ можно сделать вывод, что полученный для индекса МосБиржи коэффициент несклонности к риску 2.69 можно считать уместной аппроксимацией.

5.1.2 Оценка ковариационной матрицы:

Для того, чтобы понять, как оценить ковариационную матрицу доходности, обратимся к статье Роберта Литтермана (Litterman and Winkelmann, 1998), где описана методология оценки ковариационной матрицы, используемая в Goldman Sachs.

Fama (1965) выделил специфические характеристики финансовых временных рядов, одной из важных характеристик является кластеризация волатильности, то есть дисперсия финансовых временных рядов не постоянна во времени. Для того, чтобы учесть эти эмпирические свойства финансовых данных, Goldman Sachs используют экспоненциально взвешенную оценку (EWMA) ковариационной матрицы. Идея использования коэффициент ослабления (decay factor) вместо одинакового веса для всех наблюдений состоит в том, что поскольку волатильность и корреляция доходности изменяются во времени, более ранние наблюдения имеют меньшее значения для выявления текущей структуры ковариационной матрицы, нежели последние значения.

Для определения оптимальных параметров: коэффициента ослабления и временного промежутка, обратимся к метолологии, разработанной совместно J.P. Morgan и Reuters — RiskMetrics (J.P.Morgan and Reuters, 1996). В данной методологии также предлагается использовать экспоненциально взвешенную ковариационную матрицу, причем для инвестиционного горизонта, равного одному дню, предлагается использовать ежедневные данные, а качестве рекомендуемого коэффициента ослабления приводится значение 0.94. Также утверждается, что выборка свыше 75 наблюдений будет достаточной для оценки ковариационной матрицы. Следует отметить, что оптимальные параметры получены путем минимизации RMSE прогноза для ковариации и дисперсии на следующий период. Подобный подход к оценке ковариационной матрицы используется в работе Fabozzi et al. (2006), коэффициент коэффициент ослабления равен 0.95.

Также, следуя данной методологии и для удовлетворения предположения модели о нормальном распределении доходности, для оценки ковариационной матрицы используется логарифмическая доходность. Кроме того, в соответствии с конвенцией в литературе по применению модели Блэка—Литтермана, будет использована избыточная доходность, то есть доходность выше безрисковой.

Таким образом, для оценки ковариационной матрицы будет использоваться экспоненциальное взвешивание с коэффициентом ослабления 0.94, оценка будет производиться по дневным данным избыточной логарифмической доходности по выборке в 90 наблюдений (около 3 месяцев, как и в работе He et al. (2013)). Обновляться оценка ковариационной матрицы будет для каждой ребалансировки портфеля, то есть ежедневно.

5.1.3 Спецификация tau

В первую очередь следует сказать, что выбор параметра τ, отвечающего за неопределенность в отношении оцененной с помощью обратной оптимизации равновесной доходности, зависит от того, какая референсная модель доходности выбрана. Именно поэтому разные авторы в эмпирических исследованиях модели Блэка—Литтермана использовали различные значения этого параметра. Для того, чтобы понять, как специфицировать τ, рассмотрим, как выбор референсной модели влияет на спецификацию параметров. Рассмотрим две самые популярные референсные модели: Каноническую и Альтернативную.

- ***Каноническая модель***

  1. $\Omega = P(\tau\Sigma)P^{\top}$

     Самый распространенный в литературе вариант спецификации референсной модели и параметров Ω и τ. Для спецификации неуверенности во взглядах за основу берется дисперсия доходности с поправкой на коэффициент τ. Как уже было показано в главе 3, такая спецификация приводит к важному свойству: параметр τ не влияет на формирования вектора апостериорного среднего доходности.

     $$\hat{\mu} = \frac{\Pi + P^{-1}Q}{2}$$

     $$\bar{\Sigma} = \Sigma + \frac{1}{2}\tau\Sigma$$

     При этом параметр τ остается в формуле дисперсии и его все же нужно специфицировать, его рост будет означать рост неуверенности в оценке, а значит и в дисперсии. Если же при этом в данной модели использовать значения параметра τ близкие к единице, вклад дисперсии оценки среднего в финальную дисперсию ожидаемой доходности будет очень существенным.

  2. $\Omega = \alpha P(\tau\Sigma)P^{-1}$

     Преимущество более общей формулы в том, что при том, что все еще нет необходимости специфицировать неуверенность в каждом взгляде отдельно, степень уверенности в априорном распределении и в условном распределений, полученном из взглядов, не обязана быть одинаковой, как в пункте 1. Формулы примут вид:

     $$\hat{\mu} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\Pi + \frac{1}{1+\alpha}P^{-1}Q$$

$$\bar{\Sigma} = \Sigma + \frac{\tau\alpha}{1+\tau}\Sigma$$

Как видно, с ростом α вес априорного распределения увеличивается, так как неуверенность во взглядах растет. Также с ростом α растет неуверенность в общей оценке апостериорного среднего, а значит и растет дисперсия (аналогичный эффект оказывает неуверенность в оценке априорного равновесия, τ). Проблемой является то, что необходимо специфицировать два неинтуитивных параметра: α и τ. Для того, чтобы упростить спецификацию часто принимают $\alpha = \frac{1}{\tau}$, в результате чего уже один параметр τ отвечает и за веса и за вклад диспрсии оценки среднего в общую дисперсию.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{1+\tau}\Pi + \frac{\tau}{1+\tau}P^{-1}Q$$

$$\bar{\Sigma} = \Sigma + \frac{\tau}{1+\tau}\Sigma$$

3. $\Omega = Matrix$

   В данном случае необходимо специфицировать как матрицу неуверенности во взглядах Ω, то есть неуверенность в каждом взгляде отдельно, так и неуверенность в оценке априорного равновесия τ. Для спецификации Ω можно использовать различные методы, например приведенные в главе 3. Априорное и условное распределения уже не получают одинакового веса, влияние каждой из компонент определяется взвешивающими матрицами (3.27).

- ***Альтернативная модель*** Так как здесь μ не является случайной величиной, то матрица М (3.21) оцениваться не будет (τ автоматически равен единице).

  1. $\Omega = P\Sigma P^\top$

     $$\hat{\mu} = \frac{\Pi + P^{-1}Q}{2}$$

     Вклад априорного равновесия и взглядов одинаковый, ничего больше специфицировать не нужно.

  2. $\Omega = \alpha P\Sigma P^{-1}$

     $$\hat{\mu} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\Pi + \frac{1}{1+\alpha}P^{-1}Q$$

     Нужно специфицировать только константу пропорциональности α, отвечающую за неуверенность во взглядах инвестора.

3. $\Omega = Matrix$

   Как и в случае с Канонической моделью, необходимо специфицировать неуверенность в каждом взгляде отдельно.

Итак, как видно, спецификация параметра τ зависит от того, какая референсная модель была выбрана. Одним из наиболее интуитивных способов оценки параметра τ в Канонической модели является использование статистического аргумента (Walters, 2014). Так как на ковариационная матрица Σ оценивается по историческим данным, до $\Sigma_\pi = \tau\Sigma$ по сути представят собой стандартную ошибку.

При оценке среднего для распределения, дисперсия среднего (неуверенность в оценке) будет обратно пропорциональна размеру выборки ($Var_{\bar{x}} = \frac{Var}{n}$. Тогда оценкой максимального правдоподобия будет $\tau = \frac{1}{T}$, где T - размер выборки. Следует отметить, что в этом случае оценка параметра τ должна быть близка к 0, нежели к 1. Поэтому использование $\tau = 1$ не имеет интуитивной связи с данными и говорит о том, что скорее всего авторы используют Альтернативную референсную модель. Другим аргументом в пользу близких к нулю значениях τ, является то, что неопределенность относительно среднего значительно меньше, неопределенности в отношении доходности как таковой (Idzorek, 2004).

В нашем случае T равно количеству дней, используемых для оценки ковариационной матрицы, то есть 90, тогда оценка $\tau = \frac{1}{90} = 0.011$. Стоит отметить, что это соотносится с работами He and Litterman (1999) и Idzorek (2007), где значение параметра устанавливается на уровне 0.025 – 0.050.

В рамках второго варианта спецификации $\Omega = \alpha P \Sigma P^{-1}$ в Канонической модели параметр τ можно использовать для настройки степени занижения/завышения весов активов в зависимости от взглядов инвесторов. Чем больше этот параметр, тем больше будет отклонение от равновесных весов. Поэтому He et al. (2013) в своей работе делают анализ чувствительности модели к параметру τ, перебирая значения 0.01, 0.05 и 0.10 и оценивая влияние на доходность портфеля. В результате анализа авторы заключают, что модель достаточно устойчива к изменению параметра.

5.1.4 Спецификация взглядов: P, Q

В специцикации взглядов данная работа опирается на методологию, предложенную в He et al. (2013).

Инвесторы специфицируют субъективные взгляды относительно ожидаемой доходности и уверенность в этих взглядах, чтобы скорректировать априорное вмененное равновесное рыночное распределение доходности и получить апостериорное распределение.

Для того, чтобы из собранных рекомендаций аналитиков создать взгляды инвестора, необходимо предположить, что акции с положительной рекомендацией будут показывать доходность, превосходящую рынок, а акции с негативной рекомендацией — показывать доходность, уступающую рыночной. Для этого на основе консенсус рекомендаций аналитиков формируются три портфеля, после чего их доходность сравнивается с доходностью рынка за тот же период, разница в доходности портфеля и рынка формирует вектор прогнозов Q.

На основе консенсус рейтинга акции попадают в один из трех портфелей: Buy, если рейтинг акции находится в промежутке $(4; 5]$, Hold, если рейтинг акции в промежутке $[3; 4]$, Sell, если рейтинг акции ниже 3.

Акции в портфелях взвешиваются по рыночной капитализации, предполагается, что ребалансировка и обновление портфеля происходит в конце дня по закрытию. При смене рейтинга акция переходит из одного портфеля в другой, также акция продается (или покупается), если она выходит из состава расчета индекса (или, наоборот, входит). Для упрощения вычислений и избавления от необходимости строить целую торговую систему, было решено использовать предположение о бесконечной делимости акций, что не является таким большим допущением при значительном изначальном капитале.

Таким образом получаются три консенсус—портфеля, каждый из которых состоит из акций с соответствующим рейтингом (соответствующей консенсус-рекомендацией). Следующим шагом является инвестиционная симуляция: по реальным историческим ценам закрытия и рыночной капитализации оценивается доходность построенных портфелей. Чтобы оценить относительную доходность каждого из портфелей в сравнении с доходностью индекса ММВБ, подсчитывается аннуализированная доходность за пятилетний промежуток.

Поскольку в данной работе модель Блэка—Литтермана будет применена для трех лет: 2015, 2016, 2017, то для генерации взглядов оценивается относительная доходность портфелей по трем пятилетним промежуткам: 2010-2014, 2011-2015, 2012-2016 (начало промежутка — 1 января, конец — 31 декабря).

В дальнейшем пятилетняя оцененная избыточная доходность каждого портфеля будет использована как прогноз для последующего года, то есть для построения матрицы P для 2015 года будет использоваться период 2010-2014.

В таблице 5.1 представлена аннуализированная доходность индекса ММВБ и трех консенсус—портфелей для трех пятилетних промежутков: 2010—2014, 2011—2015, 2012—2016.

Графики 5.1, 5.2 и 5.3 иллюстрируют результаты инвестиционной симуляции и показывают кумулятивную доходность портфелей в сравнении с индексом за соответствующие временные промежутки.

Таблица 5.1
Аннуализированная доходность портфелей консенсус—рекомендаций и индекса ММВБ за пятилетнее окно

Оценочный период (с 01.01 по 31.12)	Индекс ММВБ (%)	Портфель Buy (%)	Портфель Hold (%)	Портфель Sell (%)
2010—2014	-0.67	-2.33	-6.53	-10.75
2011—2015	0.56	0.84	-6.01	-11.40
2012—2016	9.99	13.24	3.69	-5.17

Данная таблица показывает аннуализированную доходность индекса ММВБ и трех консенсус—портфелей за три временных промежутка.

Результаты портфелей, построенных в соответствии с рекомендациями аналитиков, в целом коррелируют с ожиданиями. Акции в портфеле Buy, который должен показывать наилучшую доходность, показывают доходность, превосходящую рыночную в двух из трех временных промежутках, а также во всех промежутках значительно превосходят доходность портфелей Hold и Sell. Портфель Hold значительно уступает рыночной доходности во всех трех промежутках, но превосходит доходность портфеля Sell. Наконец, портфель Sell показывает самую слабую доходность из всех, существенно теряя в стоимости даже относительно портфеля Hold. Для модели данные результаты будут означать, что вес акций, входящих в портфель Buy будет завышаться, а вес акций, входящих в портфели Hold и Sell — занижаться.

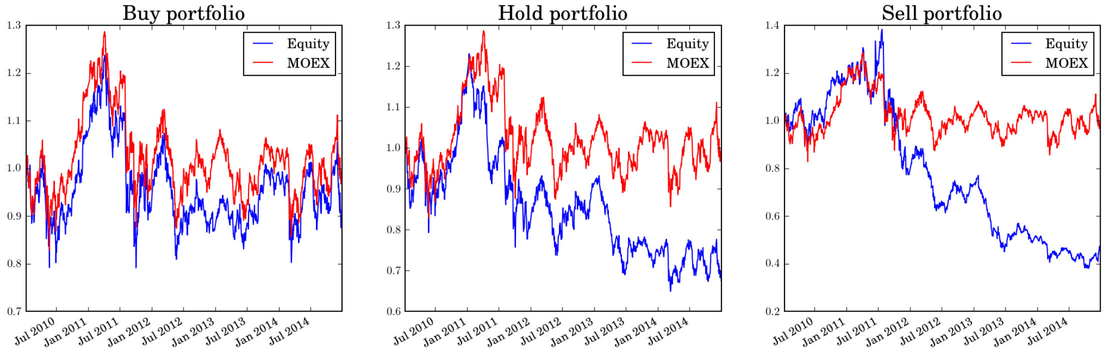

Рис. 5.1: Доходность консенсус—портфелей и индекса ММВБ: 2010—2014

Как видно из графика 5.1, результаты в первый пятилетний период оказались неожиданными: портфель из акций, для которых аналитики давали рекомендацию “Buy” показал доходность вплотную следующую за колебаниями рынка, но при этом завершил данный пятилетний отрезок с доходностью уступающей рыночной. Можно сделать вывод, что точность и качество рекомендаций аналитиков на этом промежутке было низким. При этом портфели Hold и Sell, как и ожидалось, значительно уступают доходности индекса.

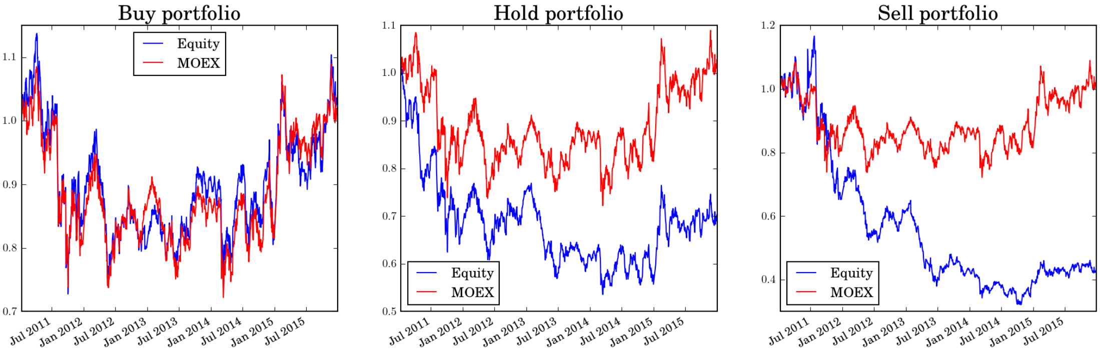

Рис. 5.2: Доходность консенсус—портфелей и индекса ММВБ: 2011—2015

Во втором пятилетнем периоде, как видно из рисунка 5.2, результаты совпадают с ожиданиями: портфель акций Buy показал доходность выше индекса, а портфели Hold и Sell, как и в предыдущем периоде, значительно уступают доходности рынка.

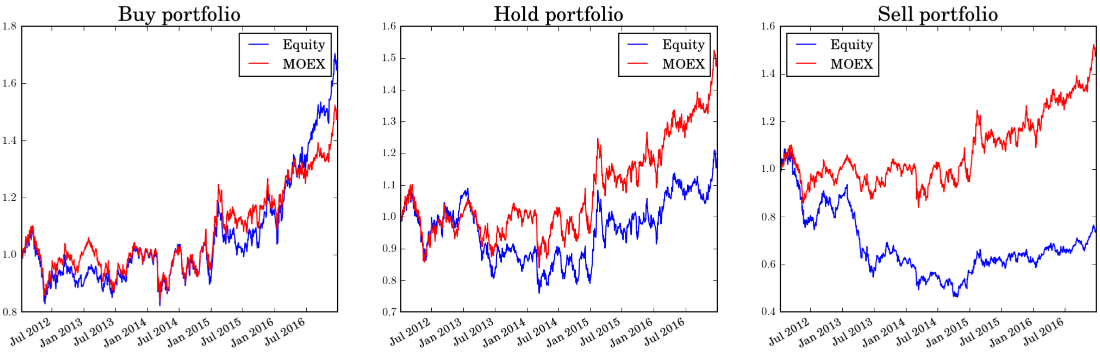

Рис. 5.3: Доходность консенсус—портфелей и индекса ММВБ: 2012—2016

В последнем пятилетнем периоде, иллюстрация 5.3, результаты также совпадают с ожиданиями: портфель акций Buy показал доходность сильно выше индекса MOEX. Возможным объяснением низких результатов портфеля Buy в первом периоде может быть тот факт, что в этом периоде наблюдалось общее падение рынка, в то время как в периоде 2011—2015 и 2012—2016 на рынке наблюдался рост. Можно предположить, что рекомендации аналитиков эффективны во время “бычьего” рынка, в то время как при “медвежьем” рынке их эффективность сильно ниже.

Итак, оценив относительную доходность трех построенных консенсус—портфелей, можно специфицировать матрицу Q. Специфицируется три взгляда, поэтому матрица Q будет содержать избыточную доходность каждого из трех портфелей. Предполагается, что в среднем повышенная относительно рыночной доходность портфеля Buy и пониженная доходность портфелей Sell и Hold будут сохраняться в течение следующего года. Взгляды можно выразить следующим образом:
Акции с рекомендацией "Buy" будут превосходить рыночную доходность на X процентных пунктов за один торговый день. Аналогично для рекомендаций "Hold" и "Sell"

Например, в период 2011—2015 доходность портфеля Buy составила 0.84%, в то время как рыночная доходность составила 0.56%. Отсюда для 2016 года мы предполагаем, что акции с рекомендацией "Buy" будут превосходить рыночную доходность на $\frac{0.84\%-0.56\%}{250} = 0,0000112\%$ за торговый день.

Чтобы реализовать избыточную доходность, специфицированную в векторе Q, инвестор может занять длинную позицию по консенсус—портфелю и короткую позицию по рыночному портфелю. Таким образом, в матрице P, задающей, какие активы включаются во взгляд, будут положительные веса (по рыночной капитализации относительно капитализации консенсус—портфеля) у акций, входящих в консенсус—портфель и отрицательные веса у всех акций в индексе (по рыночной капитализации относительно капитализации рынка).

Рассмотрим пример (He et al., 2013): пусть в конкретный торговый день акция 1 и акция 2 попадают в портфель Buy, акция 3 и 4 попадают в портфель Hold, акция 5 и 6 попадают в портфель Sell. Веса акций в каждом из трех взглядов равны весам, которые бы они получили в консенсус—портфеле. Для первого взгляда (соответствующего консенсус—портфелю Buy) вес акции 1 во взгляде будет равен: W_{p1}, равное рыночной капитализации этой акции, поделенной на сумму рыночной капитализации акции 1 и 2, минус W_{m1}, равное весу акции в индексе, то есть рыночной капитализации акции 1, поделенной на рыночную капитализацию индекса (см. 5.4). Для определения весов акция во взглядах используется схема, основанная на рыночной капитализации, так как это позволяет снизить оборачиваемость портфеля в условиях ежедневной ребалансировки по сравнению с равными весами активов.

5.1.5 Спецификация точности взглядов

После получения матрицы P можно перейти к спецификации точности полученных взглядов, матрицы Ω. Следуя большинству работ в сфере эмпирического тестирования модели Блэка—Литтермана, в данной работе не моделируется субъективная

$$P = \begin{bmatrix} W_{p1} - W_{m1} & W_{p2} - W_{m2} & -W_{m3} & -W_{m4} & -W_{m5} & -W_{m6} & -W_{m7} \cdots -W_{m50} \\ -W_{m1} & -W_{m2} & W_{p3} - W_{pm} & W_{4p} - W_{m1} & -W_{m5} & -W_{m6} & -W_{m7} \ldots -W_{m50} \\ -W_{m1} & -W_{m2} & -W_{m3} & -W_{m4} & W_{p5} - W_{m5} & W_{p6} - W_{m6} & -W_{m7} \cdots -W_{m50} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} R_{p1} - R_m \\ R_{p2} - R_m \\ R_{p3} - R_m \end{bmatrix} \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Рис. 5.4: Пример построения матрицы P и вектора Q

уверенность в каждом взгляде, а предполагается, что неопределенность во взглядах пропорциональна дисперсии доходности. То есть в рамках Канонической модели мы определяем $\Omega = diag(P(\tau\Sigma)P^{\top})$.

Логика такой спецификации состоит в том, что во время волатильности на рынке инвесторы менее уверены в своих прогнозах и предпочитают меньше отклоняться от рыночных весов. Когда же дисперсия доходности в целом ниже, оптимальные веса будут сильнее отклоняться от вмененных рыночных весов, чтобы отразить взгляды инвестора.

При этом следует отметить, что в ходе такой спецификации Ω сама по себе не влияет на конечный результат.

5.2 Оценка оптимального портфеля

Получив оценки и специфицировав все необходимые параметры модели Блэка—Литтермана, можно использовать “мастер—формулу” (3.5), чтобы найти оптимальные веса активов в портфеле.

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^{\top}\Omega^{-1}P\right]^{-1} \left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^{\top}\Omega^{-1}Q\right] \\ \bar{\Sigma} &= \Sigma + M = \Sigma + \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^{\top}\Omega^{-1}P\right]^{-1} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Теперь, получив оценки распределение ожидаемой доходности, для получения оптимальных весов можно, как и для классического портфеля Марковица, использовать обычную оптимизацию.

Каждый из оцениваемых портфелей будет построен с ограничением на открытие коротких позиций. Во-первых, многие инвестиционные компании и фонды не могут открывать короткие позиции, а значит рассматривая неограниченную оптимизацию мы бы исключили большую часть инвесторов, которым может быть интересна модель Блэка—Литтермана. Во-вторых, как было уже сказано в главе 3, подход Марковица часто генерирует портфели с очень большими отрицательными весами в одном или нескольких активах, для того, чтобы избежать такого поведения рассматривается портфель с ограничением на короткие позиции.

Также все портфели будут строиться при бюджетном ограничении на полное инвестирование в рискованный портфель (сумма весов равна единице), то есть исключаются инвестиции в безрисковый актив.

Оптимальные портфели в подходе Марковица можно получить путем максимизации коэффициента Шарпа для портфеля (на примере портфеля Блэка—Литтермана, для портфеля Марковица — аналогично):

$$\max_{\omega_{BL}} \frac{\omega_{BL}^{\top}\mu_{BL}}{(\omega_{BL}^{\top}\Sigma_{BL}\omega_{BL})^{\frac{1}{2}}} \tag{5.2}$$

$$\text{s.t. } \omega_{BL}^{\top}\mathbb{1} = 1;\ \omega_{i,BL} \geq 0 \tag{5.3}$$

Где μ_{BL} и Σ_{BL} равны соответственно $\hat{\mu}$ и $\bar{\Sigma}$, полученным из формулы (5.1). Заметим, что формула выписана для вектора избыточной доходности (то есть сверх безрисковой).

Портфели ребалансируются ежедневно по закрытию. На каждый день ребалансировки для каждого портфеля решается задача, описанная в (5.2)—(5.3). При этом следует отметить, что в силу изменения состава расчета индекса, отсутствия рекомендаций или данных, а также в силу того, что для оценки параметров требуется 90 исторических наблюдений, предшествующих моменту оценки весов, для ковариационной матрицы и 250 — для оценки ожидаемой доходности для портфелей—бенчмарков, для сопоставимости результатов было решено использовать одинаковое количество акций для каждого дня в соответствии со всеми приведенными выше критериями. На рисунке 5.5 можно видеть, как на протяжении тестового периода изменялось количество используемых акций.

Следуя методологии работ DeMiguel et al. (2009), Kirby and Ostdiek (2012) и Bessler et al. (2014), в данной работе используется движущееся окно для оценки портфелей: в любой момент t (день в нашем случае) для получения оптимального портфеля используется информация, доступная к этому моменту времени (включая этот день). Затем полученные оптимальные веса умножаются на доходность за день от

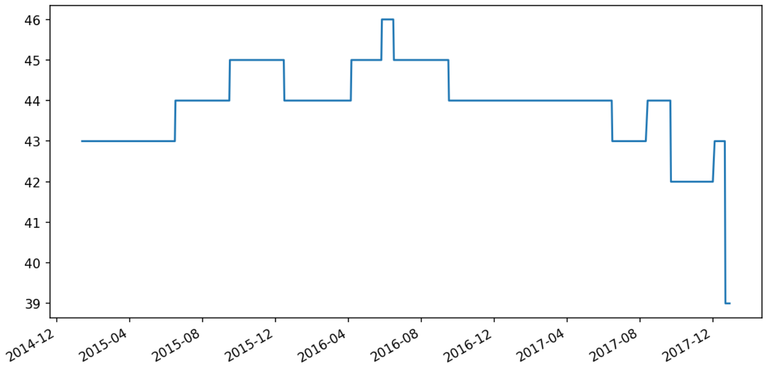

Рис. 5.5: Количество акций, участвующих в оценке оптимальных портфелей на тестовых данных

закрытия дня t до закрытия дня t+1, тем самым получается оценка вневыборочной доходности портфеля за период от t до $t+1$. Затем окно сдвигается на один день вперед и процесс оценки повторяется. Всего в тестом периоде 739 дней.

Также, чтобы учесть предположение о нормальном распределении доходности при расчете доходности использовалась логарифмическая доходность. Таким образом, на каждый день доходность портфеля оценивается по формуле:

$$r_{p,t} = ln(\sum_{i=1}^{N} \omega_{i,t-1} e^{r_{i,t}}) \tag{5.4}$$

Где $r_{i,t} = ln(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}})$ — однодневная логарифмическая доходность.

5.3 Портфели—бенчмарки

Ниже приведено описание инвестиционных стратегий, которые будут использованы для сравнения с оптимальным портфелем Блэка—Литтермана.

Портфель Марковица

Классический оптимальный портфель Марковица, максимизирующий коэффициент Шарпа (5.2).

Для оценки ковариационной матрицы будет использоваться такой же подход, как и для модели Блэка—Литтермана (90 дней с экспоненциальным сглаживанием). Стандартными размерами выборки для оценки ожидаемой доходности являются 60 и 120 месячных наблюдений, для дневных наблюдений часто берут один год (см. Kirby and Ostdiek, 2012). Для оценки ожидаемой доходности будет использовано 3 варианта:

1. Оценка по 252 дневным наблюдениям
2. Оценка по 252 дневным наблюдениям с экспоненциальным сглаживанием, коэффициент ослабления 0.94, как и для ковариационной матрицы
3. Вектор вмененной равновесной рыночной доходности, Pi, используемый в модели Блэка—Литтермана. По сути такой подход эквивалентен модели Блэка—Литтермана в отсутствии взглядов инвесторов.

Портфель наименьшей дисперсии

Другой портфель, построенный в парадигме модели Марковица путем минимизации дисперсии доходности портфеля, то есть решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\min_{\omega} \omega^{\top} \Sigma \omega \\ &\text{s.t. } \omega^{\top} \mathbb{1} = 1 \end{aligned}$$

Для оптимизации и получения весов в данном портфеле не требуется оценивать ожидаемую доходность, только ковариационную матрицу. Следовательно, этот портфель не так подвержен проблеме погрешности оценки.

Портфели "наивной" диверсификации

Наиболее простой и популярный бенчмарк–портфель с одинаковыми весами активов, не требует оптимизации. Как показывают исследования, зачастую превосходит результаты портфелей Марковица в силу проблемы погрешности оценки.

Еще одним портфелем с "наивной" диверсификацией будет порфель с весами, соответствующими рыночной капитализации. Поскольку набор акций, используемых в оптимизации не будет полностью идентичен индексу МосБиржи в силу ограничений, накладываемых доступностью данных, будем использовать эту стратегию как прокси для рынка. Кроме того портфель рыночной капитализации часто реплицируется ПИФами, поэтому является наиболее естественным бенчмарком.

В качестве модификации портфеля рыночных весов возьмем консенсус–портфель Buy, так как при генерации взглядов он показывал доходность выше индекса МосБиржи.

5.4 Критерии сравнения портфелей

Для того, чтобы оценить эффективность полученного портфеля Блэка–Литтермана, его финансовые результаты будут сопоставлены с результатами портфеля Марковица и портфелей–бенчмарков.

Для того, чтобы оценить, какая из инвестиционных стратегий на тестовых данных окажется наиболее эффективной, рассмотрим в соответствии с подходом Fernandes et al. (2012), три основные фактора, которые мы хотим оценить. Поскольку в идеальной ситуации инвестор хотел бы иметь стабильный, диверсифицированный и финансово—эффективный портфель, для оценки будут использованы метрики, оценивающие эти критерии.

В качестве метрики эффективности будет использован индекс Шарпа, кумулятивная доходность, коэффициент Сортино и CEQ. Для оценки стабильности будет использован коэффициент оборачиваемости, коэффициент максимального падения стоимости и погрешность отслеживания. Чтобы оценить, насколько получившийся портфель диверсифицирован воспользуемся индексом Херфиндаля-Хиршмана.

Для того, чтобы проанализировать, есть ли статистически значимая разница между портфелями, будут проведены статистические тесты для коэффициента Шарпа для всех пар портфелей.

5.4.1 Коэффициент Шарпа

Коэффициент Шарпа является одной из самых используемых мер эффективности и сравнения инвестиционных стратегий. Коэффициент Шарпа является мерой доходности, скорректированной на риск: он измеряет среднюю премию за риск (избыточную доходность над безрисковой ставкой) относительно волатильности доходности, измеряемой стандартным отклонением.

Таким образом, коэффициент Шарпа — мера доходности на единицу волатильности: коэффицнет растет с ростом доходности и падает с ростом волатильности. Моделируя доходность как случайную величину, нужно учитывать, что оцениваемый по полученным результатам коэффициент Шарпа является статистической оценкой истинного значения, поэтому, для статистически корректного сравнения портфелей между собой необходимо знать распределение, в соответствии с которым ведет себя оценка коэффициента Шарпа $\widehat{SR}$.

Jobson and Korkie (1981) первыми вывели асимптотическое распределение оценки коэффициента Шарпа и предложили тест для статистического сравнения двух показателей. Коэффициент Шарпа, следуя их определению: $\widehat{SR} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, где $\hat{\mu}$ - выборочное среднее избыточной доходности $\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{et}}{T}$, $R_{et} = R_t - R_{ft}$, а $\hat{\sigma}$ - выборочное стандартное отклонение избыточной доходности $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{et}-\hat{\mu})^2}{T-1}}$. Следует отметить, что другим распространенным способом подсчета валяется использование средней безрисковой ставки за период. Поскольку волатильность безрисковой ставки по сравнению с доходностью акций незначительна, способ учета безрисковой ставки не влияет на результат.

Предложенное Jobson and Korkie (1981) асимптотическое распределение оценки SR было выведено в предположении о то, что доходности iid (одинаково и независимо распределены) и имеют нормальное распределение. Это довольно сильные ограничения, которые обычно не выполняются на практике. Поэтому в данной работе мы будем использовать асимптотическое распределение, полученное Opdyke (2008), где в качестве предпосылок требуется стационарность и эргодичность, но не нормальность и iid. Итак, асимптотическое распределение оценки коэфициента Шарпа имеет вид:

$$\sqrt{T}(\widehat{SR} - SR) \sim \mathbb{N}\left(0, 1 + \frac{SR^2}{4}\left[\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 1\right] - SR\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right) \tag{5.5}$$

Откуда оценка стандартной ошибки:

$$\widehat{SE(\widehat{SR})} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\widehat{SR}^2}{4}\left[\frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 1\right] - \widehat{SR}\frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3}}{T-1}} \tag{5.6}$$

А доверительный интервал для коэффициента Шарпа можно определить как:

$$\widehat{SR} \pm z_{crit}\widehat{SE(\widehat{SR})} \tag{5.7}$$

Где для 95% доверительного интервала $z_{crit} = 1.96$.

Для того, чтобы статистически сравнить две инвестиционные стратегии в терминах коэффициента Шарпа, необходимо также получить асимптотическое распределение для разницы двух коэффициентов. Итак, если нулевая гипотеза сформулирована в виде: $H_0: \; SR_a - SR_b = 0$, то асимптотическое распределение разницы
$\widehat{SR}_{diff} = (\widehat{SR}_a - \widehat{SR}_b) - (SR_a - SR_b)$ будет иметь вид (Opdyke, 2008):

$$\sqrt{T}(\widehat{SR}_{diff}) \sim \mathbb{N}\left(0, Var_{diff}\right) \tag{5.8}$$

Где формула для Var_{diff} имеет сложный вид и доступна в оригинальной статье (Opdyke, 2008), а z—статистика для проверки гипотезы примет вид:

$$z(\widehat{SR}_{diff}) = \frac{\widehat{SR}_{diff}}{\sqrt{Var_{diff}}} \sim \mathbb{N}(0,1) \tag{5.9}$$

Все необходимые формулы для расчета статистики были воспроизведены на языке программирования Python.

Итак, для полученных коэффициентов Шарпа будет проведено тестирование трех тип гипотез:

1. Гипотеза о равенстве коэффициента Шарпа нулю
2. Гипотеза о статистически незначимой разнице между коэффициентом Шарпа портфеля Блэка—Литтерамна и портфеля Марковица.
3. Гипотеза о статистически незначимой разнице между коэффициентом Шарпа портфеля Блэка—Литтерамна или портфеля Марковица и бенчмарк—портфелем.

5.4.2 Другие метрики эффективности

Помимо коэффициента Шарпа также будет оценены несколько других метрик эффективности инвестиционных стратегий.

Кумулятивная доходность

Кумулятивная доходность для каждой стратегии считается за три тестовых года: 2015–2017. Поскольку используется логарифмическая доходность, то кумулятивная доходность за k дней равна сумме однодневных логарифмических доходностей портфеля (5.4).

Коэффициент Сортино

В качестве одной из модификаций коэффициента Шарпа, рассмотри индекс Сортино, измеряющий доходность портфеля, скорректированную уже не на общую волатильность доходности, а на риск получения отрицательной доходности. Другими словами, коэффициент Сортино отделяет положительную и отрицательную волатильность и штрафует только за доходность, падающую ниже некого бенчмарка, что лучше отражает эффективность инвестиционной стратегии при скошенности распределения доходности.

Следуя He and Litterman (1999), в качестве бенчмарка, относительного которого определяется отрицательная волатильность, будет использована безрисковая ставка:

$$Sortino = \frac{R_{pT} - R_{fT}}{\sqrt{\left(\sum_{t=1}^{T}(R_{p,t} - R_{f,t})^2 I(R_{p,t} \leq R_{f,t})\right)/T}}$$

Коэффициент оборачиваемости

Для того, чтобы оценить стабильность портфеля и его чувствительность к трансакционным издержкам будет оценен коэффициент оборачиваемости. Коэффициент оборачиваемости показывает объем торговых операций, необходимых для ребалансировки портфеля. Коэффициент подсчитывается на каждый день, а потом усредняется за период тестирования. Для подсчета используется вариант спецификации, представленный в Kirby and Ostdiek (2012) (см. уравнение 5.4.3).

CEQ

Гарантированная эквивалентная доходность (certainty-equivalent return) показывает, какую безрисковую доходность рациональный агент с определенным уровнем несклонности к риску и с квадратичной функцией полезности, решающий задачу риск—доходность, выберет вместо рискованной стратегии, приносящей более высокую доходность, но сопряженной с неопределенностью. Для оценки используется формула:

$$CEQ = \hat{\mu} - \frac{\delta}{2}\hat{\sigma}^2$$

Где $\hat{\mu}$ — средняя избыточная доходность, $\hat{\sigma}^2$ — дисперсия избыточной доходности. Чтобы быть последовательными, для оценки используется коэффициент несклонности к риску, оцененный выше. При этом рациональному инвестору следует предпочесть стратегию с более высоким CEQ.

Коэффициент максимального падения стоимости

Коэффициент максимального падения стоимости (Maximum Drawdown) будет использован как дополнительный индикатор риска, показывающий, какой наибольший убыток может понести инвестор на протяжении инвестиционного периода. Считается как разница между последней наибольшей и последующей наименьшей стоимостью портфеля.

Индекс Херфиндаля-Хиршмана

Для того, чтобы оценить диверсифицированность портфеля воспользуемся, следуя Fernandes et al. (2012), средним за тестируемый период индексом Херфиндаля-Хиршмана, представляющим сумму квадратов весов в портфеле. Чем больше значение индекса, тем более концентрированным является полученный портфель.

Погрешность отслеживания

Наконец, в качестве еще одной меры устойчивости портфеля будет оценена погрешность отслеживания (Tracking Error). Погрешность отслеживания оценивается как стандартное отклонение разницы между доходностью портфеля и бенчмарка. Идея этой метрики состоит в том, что большие отклонения от бенчмарка представляют собой непредсказуемое поведение, а поэтому нежелательны для инвестора. В качестве бенчмарков выбраны портфель с рыночными весами и портфель с одинаковыми весами — наиболее простые и распространенные инвестиционные стратегии.

5.4.3 Трансакционные издержки

Поскольку инвестиционные стратегии, используемые в данной работе требуют ежедневной ребалансировки портфеля, такая высокая частота совершения торговых операций безусловно связана с трансакционными издержками.

В отличие от многие работ (см. DeMiguel et al., 2009; Kirby and Ostdiek, 2012; Bessler et al., 2014), сравнивающих эффективность различных инвестиционных стратегий, где для учета трансакционных издержек предполагается, что они равны 50 базисным пунктам от объема транзакции, в данной работе, следуя He et al. (2013), используется реализованный средний на каждый день BID-ASK спред конкретной акции.

Из терминала Bloomberg был получен средний за каждый день BID-ASK спред в процентах от цены акции. Для того, чтобы оценить чистую доходность портфеля, то есть доходность после учета трансакционных издержек, определим трансакционные издержки как процент от стоимости портфлея в соотвтсвтии с подходом Kirby and Ostdiek (2012):

$$C_{\%,t+1} = \sum_{i=1}^{N} \left(spread_i \left| \omega_{i,t+1} - \frac{\omega_{i,t} e^{r_{i,t+1}}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \omega_{i,t} e^{r_{i,t+1}}} \right| \right) \tag{5.10}$$

Где $r_{i,t}$ - логарифмическая доходность. Получается, что для подсчета трансакционных издержек по всем акциям суммируются абсолютные отклонения рыночной стоимости доли капитала, вложенного в акцию, от целевых весов (то есть сумма операций, необходимых для ребалансировки), умноженные на спред соответствующей акции.

Затем эта оценка используется для подсчета чистой доходности портфеля:

$$r_{p,t} = ln \left((\sum_{i=1}^{N} \omega_{i,t-1} e^{r_{i,t}})(1 - C_{\%,t}) \right) \tag{5.11}$$

Для оценки эффекта от трансакционных издержек все метрики будут посчитаны на основе чистой доходности портфеля.

Глава 6

Тестирование базовой модели Блэка—Литтермана

В данной главе приведены результаты эмпирического тестирования построенных портфелей на данных российского фондового рынка. Модель Блэка—Литтермана сравнивается с моделью Марковица, а также с портфелями—бенчмарками. Приводится статистический анализ коэффициентов Шарпа. В завершении главы приводятся результаты с учетом трансакционных издержек

В рамках тестирования базовой модели Блэка—Литтермана, спецификация параметров которой была приведена в главе 5, будет проведено сравнение доходности моделей по различным метрикам эффективности инвестиционных стратегий.

Результаты тестирования будут представлены по 9 портфелям: базовому портфелю Блэка–Литтермана (BL), трем портфелям "риск—доходность" Марковица (с разными спецификациями вектора ожидаемой доходности: MV_250, MV_250_exp, MV_pi), портфелю наименьшего риска в парадигме Марковица (Min-Var), а также портфелю с равными весами (Equal), портфелю с рыночными весами (Mrkt), консенсус—портфелю Buy (Buy) и индексу МосБиржи (MOEX).

Будет проведен статистический анализ полученных коэффициентов Шарпа и их статистическое сравнение между портфелями. Также в рамках тестирования базовой модели доходность портфелей будет скорректирована на трансакционные издержки, после чего портфели будут сопоставлены уже по чистой доходности.

Построение портфелей, проведение симуляции, подсчет метрик качества и статистическая оценка коэффициентов Шарпа были реализованы на языке программирования Python. Результаты этой главы являются полностью воспроизводимыми, с

программой и исходными данными можно ознакомиться по ссылке:
https://github.com/kirillulybin/Bachelor_Black_Litterman_MOEX.git

6.1 Сравнение портфелей

Для того, чтобы сравнить получившиеся портфели по разным метрикам и понять, какая стратегия оказалась наиболее эффективной, в рамках каждого критерия эффективности портфелям будет присвоен ранг, после чего будет получен общий рейтинг портфелей на основе всех метрик эффективности.

Кумулятивная доходность

Рассмотрим сперва кумулятивную доходность как самый очевидный индикатор.

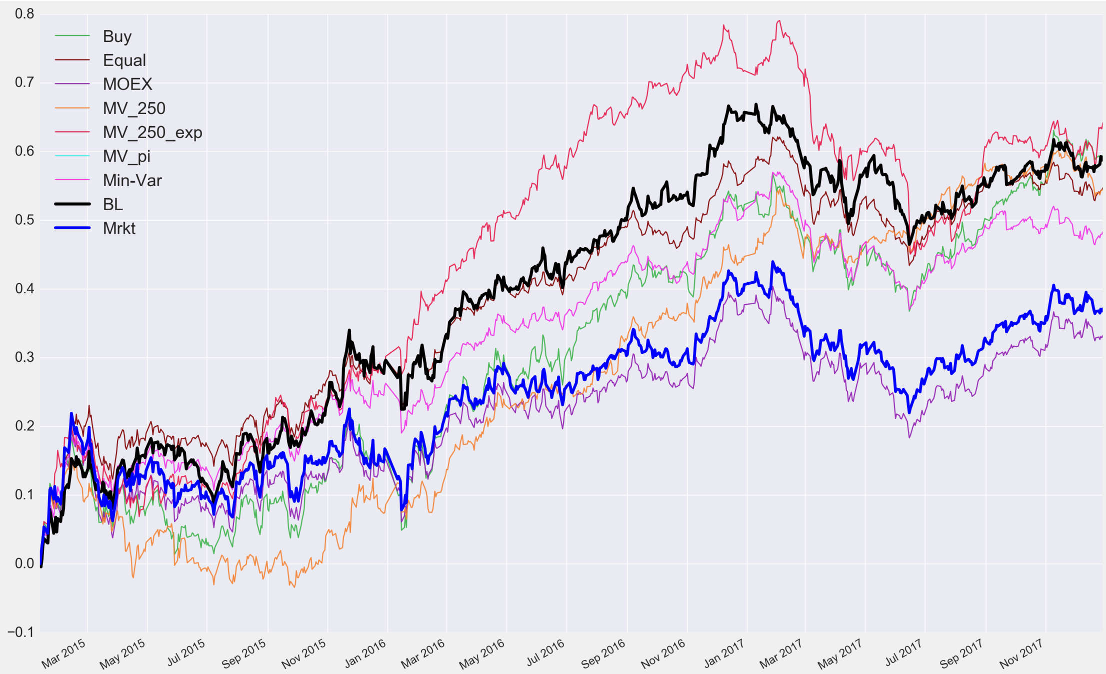

Рис. 6.1: Кумулятивная логарифмическая доходность тестируемых портфелей за период 2015–2017.

На рисунке 6.1 представлена кумулятивная логарифмическая доходность, посчитанная по дневным данным за весь период тестирования. Синим и черным цветом выделены доходность индексного портфеля и доходность портфеля Блэка—Литтермана соответственно. Также в разбивке по отдельным портфелям кумулятивная доходность показана на рисунке 6.2.

Можно отметить, что наш рыночный портфель (Mrkt) показал себя даже лучше полного индекса МосБиржи (MOEX). Это объясняется тем, что в индексный портфель не были включены акции нескольких компаний с проблемами в данных или отсутствием рекомендаций аналитиков, то есть не очень ликвидные акции, скорее всего генерирующие снижение доходности индекса МосБиржи относительно нашего индексного портфеля.

В части общей динамики следует отметить, что в период с начала 2015 года по ноябрь 2015 года на рынке наблюдался явный боковой тренд, при этом доходность всех портфелей была сильно скоррелирована и достаточно близка, наибольшим падением выделялся только портфель Марковица с историческими данными (MV_250). Наилучшим образом себя в этот период показывал портфель с равными весами (Equal) и портфель минимальной дисперсии (Min-Var), что можно объяснить тем, что веса этих портфелей более стабильны, поэтому в такой рыночной ситуации они не так подвержены колебаниям на рынке. Кроме того, портфель Блэка—Литтермана (BL) также показал высокую доходность. Это можно объяснить тем, что, с одной стороны, он опирается на устойчивое рыночное равновесие, а с другой, — на рекомендации аналитиков.

Период с начала ноября 2015 года по конец января — начало февраля 2017 года характеризуется заметным ростом на рынке, что отражается на росте кумулятивной доходности всех портфелей. Можно заметить, что самый маленький рост доходности в этот период показывает индексный портфель — портфель с рыночными весами, который почти полностью повторят индекс МосБиржи и портфель Марковица с оценкой ожидаемой доходности, полученной из рыночного равновесия. Портфель Марковица MV_250 показывал доходность ниже рыночной почти до сентября 2016 года, то есть половину тестового периода. Также следует заметить, что портфель Марковица с весами, полученными из вмененной равновесной рыночной доходности (MV_pi) почти идентичен индексному портфелю (Mrkt) на всем протяжении тестирования.

Можно предположить, что прямая связь с рыночными весами портфелей Mrkt и MV_pi мешает этим портфелям в период роста выделить наиболее перспективные акции, присвоив им больший вес. Именно поэтому в период роста в 2016 году наилучшие результаты показывают портфели, способные лучше подстраиваться под состояние рынка. Низкая доходность классического портфеля Макорвица (MV_250) объясняется тем, что на его оценку ожидаемой доходности влияют все 250 предыдущих торговых дней, что обуславливает его “запаздывание”.

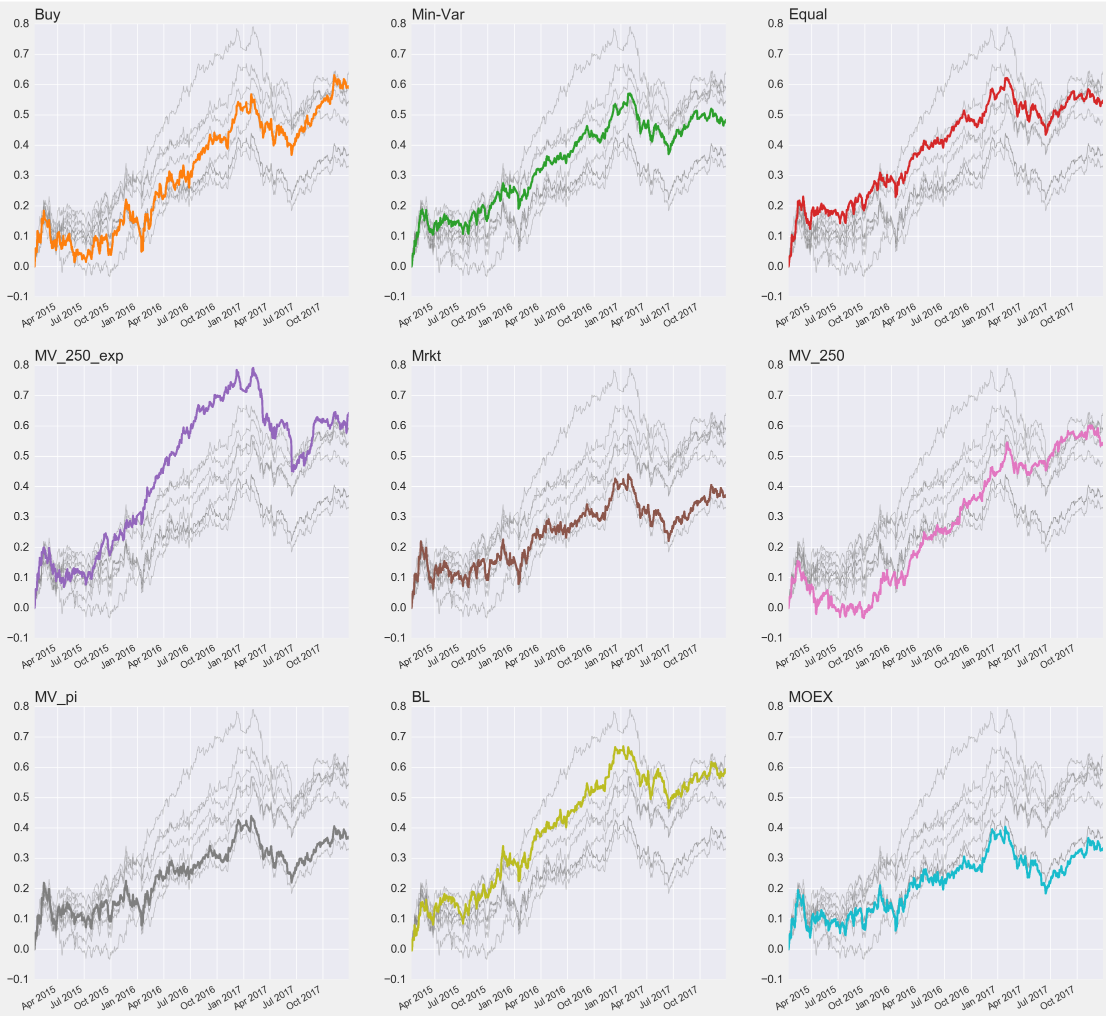

Рис. 6.2: Кумулятивная логарифмическая доходность тестируемых портфелей за период 2015–2017 в разбивке.

Что же касается портфелей с наибольшей доходностью в этот период, еще в конце 2015 года при самом начале подъема выделяются (помимо портфеля с равными весами и наименьшей дисперсией, которые вскоре теряют преимущество, которое они имели при боковом тренде) два портфеля: портфель Блэка–Литтермана (BL) и портфель Марковица с экспоненциальной оценкой ожидаемой доходности (MV_250_exp).

Вплоть до начала 2017 года эти два портфеля показывают наилучшую доходность и самый высокий рост. Портфелю Марковица выбирать нужные активны помогает экспоненциальное взвешивание, которое в сущности ограничивает влияние исторической доходности 2 месяцами, а также присваивание наибольшего значения последним наблюдениям, что позволяет улавливать эффект моментума акций. Портфелю Блэка—Литтермана же выбирать наиболее перспективные активы помогают взгляды инвесторов, а именно рекомендации аналитиков.

Также в период роста ожидаемо хорошую доходность показывает консенсус портфель Buy, состоящий из акций с рекомендаций “покупать”, взвешенных по рыночной капитализации. В период роста консенсус—портфель отыгрывает падение в период бокового тренда и к концу 2016 года сравнивается с доходностью MV_250 и MinVar. Как уже было отмечено в главе 5, вероятно, что рекомендации аналитиков эффективны во время роста рынка, но неэффективны во время бокового тренда или падения. Во-первых, аналитики имеют тенденцию давать положительную рекомендацию, во-вторых, рекомендации аналитиков нацелены на среднесрочную перспективу и исходят из фундаментального анализа, поэтому не содержат инвестиционных сигналов во время общего спада на рынке.

Если сравнить графики кумулятивной доходности экспоненциального портфеля Марковица (MV_250_exp) и портфеля Блэка—Литтермана (BL), то можно сказать, что при том, что портфель Марковица показывает лучшую доходность и более сильный рост, во время падения рынка в первой половине 2017 года снижение стоимости портфеля также оказывается значительным, снижаясь ниже кумулятивной доходности портфеля BL. При этом портфель Блэка—Литтермана, за счет того, что половина ожидаемой доходности выводится из рыночного равновесия, оказывается более стабильным.

Если сравнить базовый портфель Блэка–Литтермана с его версией в отсутствии взглядов — портфелем Марковица с равновесной рыночной оценкой ожидаемой доходности (MV_pi), то можно сделать вывод, что в базовой модели Блэка–Литтермана без учета трансакционных издержек взгляды инвесторов могут существенно увеличить доходность портфеля.

Заметим, что портфель с равными весами оказывается на протяжении периода роста в 2016 году был примерно посередине: между портфелями с рыночными весами, показывающими наименьшую доходность, и портфелями, наилучшим образом распределяющими веса между активами. Можно предположить, что одинаковые веса с одной стороны приносят большую доходность от активно—растущих акций, чем рыночные, но при этом не используют потенциал этих акций в полную силу. Однако в период бокового тренда и падения рынка портфель с равными весами был одним из лучших по кумулятивной доходности, что также говорит о, том, что такая “наивная” диверсификация позволяет добиваться хороших результатов.

Также можно заметить, что разница между портфелями Марковица с простой и экспоненциально взвешенной оценкой доходности состоит в том, что портфель с простым средним заметно запаздывает в реакции на изменения на рынке. В связи с этим он медленнее растет в периоды бума, но при этом и меньше теряет в периоды падения. Особенно это хорошо видно на периоде роста в 2016 году и периоде падения в первой половине 2017 года, когда за счет запаздывания портфель с историческими оценками быстрее уловил эффект моментума при восстановлении рынка в середине 2017 года.

Наконец, если рассмотреть последний год тестирования — 2017, то заметно, что в первой половине года на рынке наблюдалось падение. Можно отметить, что по время падения значительную часть стоимости потерял портфель Марковица с экспоненциальным взвешиванием (MV_250_exp). Во время спада на рынке опустился до уровня кумулятивной доходности портфеля Блэка–Литтермана, которого он обгонял на протяжении предыдущего года. При этом запаздывающая реакция портфеля Марковица с оценкой доходности по всем историческим данным помогла ему раньше всех начать восстановление, поскольку данные последних месяцев не имели большого веса.

Как уже было отмечено выше, лучше всего в период возобновления роста во второй половине 2017 года себя показал портфель Марковица с экспоненциальной доходностью, улавливающий моментум. Также быстрый рост показал и консенсус-портфель Buy. В целом можно сказать, что к концу 2017 года портфели Марковица: MV_250, MV_250_exp, портфель Блэка—Литтермана, BL, портфель с равными весами, Equal, и консенсус—портфель Buy показали по итогам тестирования примерно одинаковую кумулятивную доходность.

Рассмотрим другие метрики эффективности инвестиционных стратегий. В таблице 6.1 представлены значения используемых метрик для всех тестируемых стратегий за период 2015—2018 до учета трансакционных издержек.

Коэффициент Шарпа

В терминах коэффициента Шарпа, несмотря на почти самую высокую среди всех стратегий волатильность, лучше всего себя показал портфель Марковица с экспоненциальным взвешиванием исторических данных. Второй результат из-за низкой дмсперсии доходности показал портфель наивной диверсификации 1/N. Портфель Блэка—Литтермана показал третий результат: при сопоставимой с портфелем Марковица волатильностью доходность оказалась ниже. В целом за исключением индексного портфеля и соответствующего портфеля Марковица (MV_pi), коэффициент Шарпа портфелей достаточно схожи, поэтому для того, чтобы понять, есть ли статистически значимая разница между значениями коэффициентов, будет проведен статистический анализ.

Таблица 6.1
Результаты оценки метрик эффективности портфелей до учета трансакционных издержек за период 2015-2017

	Cumulative return, %	std, %	Sharpe ratio, %	Sortino ratio, %	Turnover	SEQ, %	Max Drawdown, %	HHIndex	Tracking error(Mrkt), %	Tracking error(Equal), %
Min-Var	48	0.80	4.7	6.7	0.04	0.03	-18	0.03	0.45	0.19
Equal	55	0.83	5.6	8.0	0.01	0.04	-17	0.02	0.39	0.00
MV_pi	37	1.01	2.2	3.2	0.01	0.01	-20	0.06	0.00	0.39
MV_250_exp	**64**	1.03	**5.7**	**8.3**	**0.49**	0.04	**-29**	0.13	0.87	**0.73**
MV_250	54	0.80	5.1	7.3	0.24	0.04	-17	0.17	**0.88**	0.71
BL	59	1.02	5.1	7.5	0.38	0.04	-18	0.16	0.60	0.56
Mrkt	37	1.01	2.2	3.2	0.00	0.01	-20	0.06	0.00	0.39
Buy	59	**1.15**	4.6	6.6	0.03	0.03	-18	**0.19**	0.45	0.64

Данная таблица показывает метрики эффективности для каждого портфеля. Оценка параметров получена за весь период тестирования до учета трансакционных издержек

Коэффициент Сортино

Результаты анализа коэффициента Сортино совпадают с результатами анализа коэффицента Шарпа: наиболее эффективным оказывается портфель MV_250_exp, за ним идет портфель Equal и портфель Блэка—Литтермана. Поскольку коэффициент Сортино отделяет негативную волатильность от положительной, можно сделать вывод, что распределения доходности не являются сильно скошенными, что также подтверждается гистограммами, представленными в приложении.

Коэффициент оборачиваемости

Коэффициенты, характеризующие финансовые результаты инвестиционных стратегий говорят о том, что лучше всего себя показывают три портфеля: Марковиц с экспоненциальной оценкой ожидаемой доходности, бенчмарк–портфель с равными весами и портфель Блэка—Литтермана. Однако эти коэффициенты не учитывают объемы транзакций, необходимых для реализации каждой из стратегии.

Если сравнить коэффициент оборачиваемости для трех приведенных выше портфелей, то окажется, что для получения сопоставимого финансового результата портфелю наивной диверсификации требуется в разы меньший объем торговых операций. Тогда как портфель Блэка—Литтермана и Марковица характеризуются наибольшими коэффициентами оборачиваемости. Это говорит о том, реализация данных стратегий будет сопряжена с большими трансакционными издержками из-за наличия BID-ASK спрэда, поэтому позже эффективность портфелей будет оценена на основе чистой доходности.

CEQ

Анализ гарантированной эквивалентной доходности говорит о том, что инвестор с коэффициентом несклонности к риску 2.6 будет готов в среднем получать 0.04% ежедневно без риска, нежели инвестировать в тестируемые портфели. Таким образом, помимо индексного портфеля и порфтеля Марковица с равновесной ожидаемой доходностью, инвестиционные стратегии эквивалентны.

Коэффициент максимального падения стоимости

В качестве дополнительной меры риска был оценен коэффициент максимального падения стоимости. Как заметно на графике кумулятивной доходности 6.1, наибольшее возможное абсолютное падение характерно для портфеля Марковица с экспоненциальной оценкой доходности, коэффициент максимального падения стоимости для этого портфеля равен -29%. Все остальные стратегии имеют сопоставимые коэффициенты максимального падения стоимости около 18%. Из результатов данной оценки можно сделать вывод, что, хотя портфель Марковица с экспоненциальной оценкой доходности показывает наилучший кумулятивный результат и коэффициент Шарпа, он все же является достаточно рискованным по сравнению с другими стратегиями, что будет также подтверждено погрешностью отслеживания.

Индекс Херфиндаля-Хиршмана

Для оценки диверсифицированности получившихся портфелей был посчитан индекс Херфиндаля-Хиршмана. Наиболее диверсифицированным, ожидаемо оказался портфель с равными весами, в то время как классический портфель Марковица оказался наиболее концентрированным, (помимо консенсус—портфеля) что совпадает с результатами исследований, выделявших слабую диверсифицированность как одну и проблем модели Марковица.

Погрешность отслеживания

Последняя метрика отражает предсказуемость поведения портфеля относительно бенчмарков — портфеля с равными весами и индексного портфеля. Как уже было отмечено выше, Портфель Марковица с экспоненциальной оценкой доходности хотя и показывает высокий результат, является “непредсказуемым” для инвестора и может значительно отклоняться от направления движения индекса. Об этом говорит как высокая погрешность отслеживания, так и коэффициент максимального падения стоимости. Высокая погрешность отслеживания также объясняет непопулярность модели Марковица у инвесторов в реальном секторе.

Итак, оценив все метрики эффективности инвестиционных стратегий, присвоим каждому портфелю ранг по каждой из метрик, а затем получим суммарный рейтинг портфелей по совокупности исследуемых качеств. Результаты агрегации представлены в таблице 6.2.

Во-первых, по совокупности оцениваемых параметров оказывается, что наиболее эффективной стратегий до учета трансакционный издержек в доходности является портфель наивной диверсификации, где веса всех активов равны. Этот портфель не только показывает достаточно хорошие в сравнении с другими стратегиями финансовые показатели, но и является диверсифицированным, не подверженным сильной ребалансировке и “предсказуемым” для инвестор.

Во-вторых, наихудшие результаты, как и ожидалось из предшествующих работ, показывает классический портфель Марковица, который показывает средние финансовые результаты, но является концентрированным, непредсказуемым и сопряженным с высокими трансакционными издержками.

В-третьих, как и отмечалось в теоретической части, портфель наименьшей дисперсии не так сильно подвержен проблеме погрешности оценки, как классический портфель Марковица и по совокупности факторов показывает высокий результат, хотя его доходность уступает другим стратегиям.

Таким образом, две модификации модели Марковица: портфель Марковица с экспоненциальной оценкой ожидаемой доходности и модель Блэка—Литтермана превосходят классический портфель Марковица, но уступают портфелю с наименьшей диверсификацией и портфелю наименьшего риска. Следует отметить, что портфель Блэка—литтермана при этом является более устойчивым и предсказуемым, чем портфель Марковица с экспоненциальной оценкой, поскольку половина оценки ожидаемой доходности приходится на рыночной равновесие, однако проигрывает ему в доходности. Оба эти портфеля, однако, наиболее чувствительны к трансакционным издержкам, поэтому необходимо провести оценку эффективности с учетом рыночного спреда.

Таблица 6.2
Результаты ранжирования портфелей по девяти метрикам до учета трансакционных издержек за период 2015-2017

	Cumulative return	Sharpe ratio	Sortino ratio	Turnover	SEQ	Max Drawdown	HHIndex	Tracking error(Mrkt)	Tracking error(Equal)	Score	Rank
Equal	5	7	7	6	6	**8**	**8**	6	**8**	61	8.0
Min-Var	3	4	4	4	3	5	7	5	7	42	7.0
MV_250_exp	**8**	**8**	**8**	1	**8**	1	4	2	1	41	5.5
BL	6	6	6	2	7	4	3	3	4	41	5.5
Mrkt	2	2	2	**8**	2	2	5	**8**	5	36	3.5
Buy	7	3	3	5	4	6	1	4	3	36	3.5
MV_250	4	5	5	3	5	7	2	1	2	34	2.0
MV_pi	1	1	1	7	1	3	6	7	6	33	1.0

Данная таблица показывает ранг каждого портфеля по девяти метрикам эффективности, а также общий рейтинг на их основе. Оценка параметров получена за весь период тестирования до учета трансакционных издержек

6.2 Статистический анализ коэффициента Шарпа

Как было описано в главе 5, статистические тесты, предложенные Opdyke (2008), для сравнения коэффициентов Шарпа получены в предположении о стационарности рядов доходности. Поэтому, прежде чем приступить к анализу коэффициентов, проверим девять полученных рядов доходности на стационарность.

Сперва проведем визуальный анализ рядов. Как видно из рисунка 6.3, все ряды имеют постоянное среднее равное 0, однако вывод о стабильности дисперсии сделать сложно: на одни рядах дисперсия достаточно постоянно, в то время как на других она меняется во времени. В целом можно сказать, что с визуальной точки зрения все ряды похожи на белый шум и выглядят стационарными.

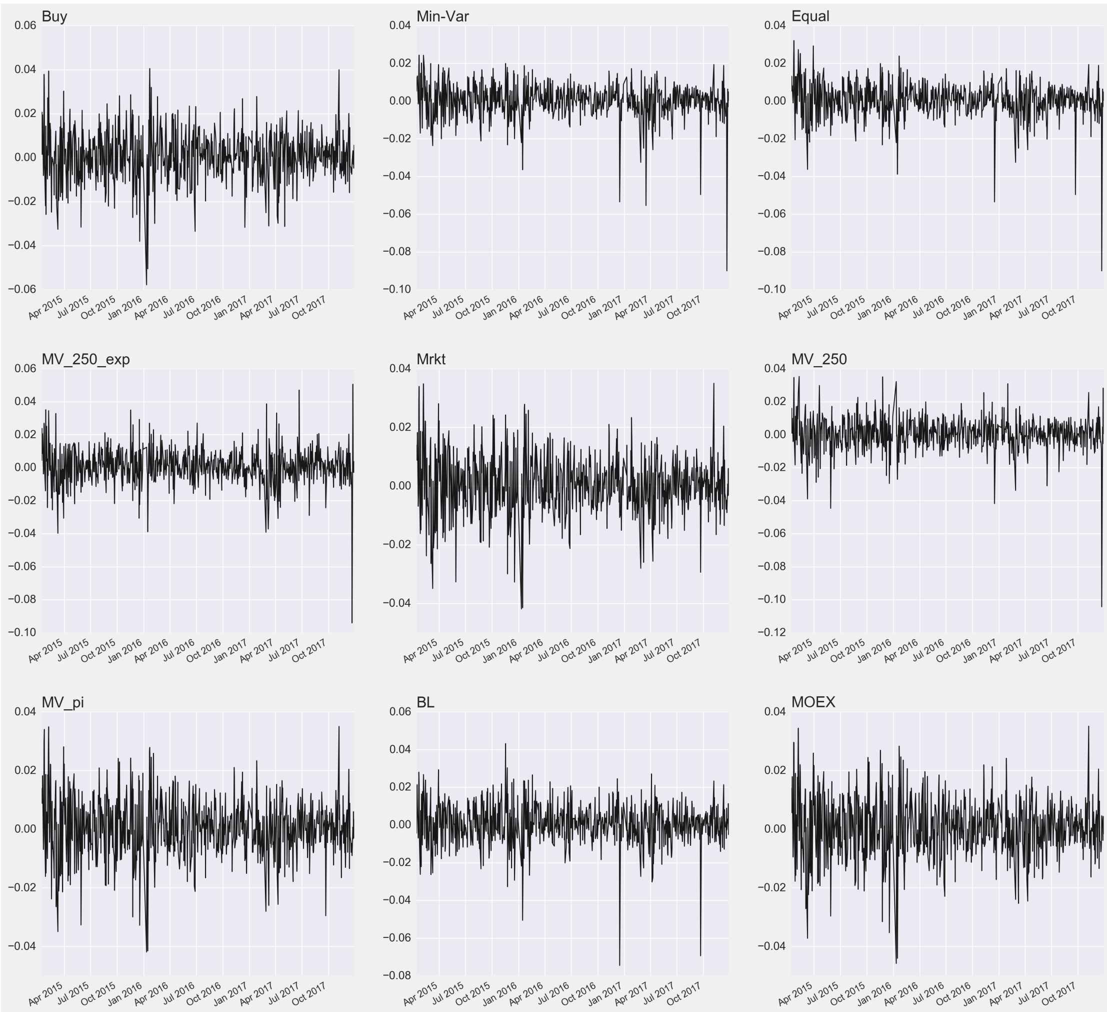

Рис. 6.3: Дневная логарифмическая доходность тестируемых портфелей за период 2015–2017

Для того, чтобы проверить этот вывод, проведем формальные тест Дики — Фуллера на наличие единичного корня. Тест был проведен в программном пакете R —

urca, поскольку среднее всех рядов равно единице, была выбрана спецификация без константы и без тренда, для выбора оптимального количества лагов был использована опция подбора по критерию AIC. Нулевой гипотезой в тесте Дики — Фуллера является наличие единичного корня во временном ряде.

Результаты теста для всех рядов показали p-value равное 0 и расчетную статистику не входящую в область не отвержения нулевой гипотезы ни на каком разумном уровне значимости. С подробными результатами тестов можно ознакомиться в приложении.

Итак, по результатам проведения тестов на стационарность, можно считать, что полученные ряды доходности являются стационарными, а значит для статистического анализа коэффициентов Шарпа можно применять асимптотические распределения (5.5) и (5.8). Заметим, что в приведенном варианте теста не требуется, чтобы доходность имела нормальное распределение, поэтому мы не тестируем это предположение, с распределениями доходности портфелей, однако, можно ознакомиться в приложении.

Для того, чтобы статистически сравнить все пары коэффициентов Шарпа между собой, построим следующую таблицу: по диагонали будут отображены p-value теста на сравнение коэффициента Шарпа соответствующего портфеля с нулем ($H0 : SR = 0$; $H1 : SR \neq 0$); вне диагонали будут располагаться элементы, показывающие p-value для теста на сравнение коэффициентов Шарпа двух портфелей: ($H0 : SR_a - SR_b = 0$; $H1 : SR_a - SR_b \neq 0$). Построим таблицу для всего промежутка тестирования, числа выделенные звездочкой означают значимость на уровне 10%.

Таблица 6.3
Результаты статистического тестирования коэффициента Шарпа для всех пар портфелей за период 2015-2017

	Buy	Min-Var	Equal	MV_250_exp	Mrkt	MV_250	MV_pi	BL	MOEX
Buy	**0.22**	0.95	0.65	0.75	0.12	0.88	0.12	0.81	0.04*
Min-Var	0.95	**0.20**	0.38	0.73	0.13	0.90	0.13	0.85	0.09*
Equal	0.65	0.38	**0.14**	0.96	0.02*	0.88	0.02*	0.84	0.02*
MV_250_exp	0.75	0.73	0.96	**0.12**	0.27	0.86	0.27	0.86	0.21
Mrkt	0.12	0.13	0.02*	0.27	**0.55**	0.39	0.98	0.18	0.36
MV_250	0.88	0.90	0.88	0.86	0.39	**0.17**	0.39	0.99	0.32
MV_pi	0.12	0.13	0.02*	0.27	0.98	0.39	**0.55**	0.18	0.36
BL	0.81	0.85	0.84	0.86	0.18	0.99	0.18	**0.17**	0.12
MOEX	0.04*	0.09*	0.02*	0.21	0.36	0.32	0.36	0.12	**0.65**

Данная таблица показывает p-value для тестов на отличие коэффициентов Шарпа от нуля (по диагонали) и друг от друга (вне диагонали) за весь период тестирования. * означает значимость на 10%

Во-первых, из таблицы 6.3 видно, что на всем тестируемом промежутке ни одна стратегия не показывает индекс Шарпа, значимо отличающийся от 0. С одной стороны это значит, что ни одна стратегия не генерирует отрицательный коэффициент Шарпа, то есть реализованная доходность как минимум в среднем равная безрисковой ставке, с другой — это означает, что ни одна из стратегий не генерирует коэффициент Шарпа статистически значимо отличающийся от 0, то есть доходность выше безрисковой ставки.

Во-вторых, оценка пар коэффициентов Шарпа выявила, что статистически значимо (на уровне 10% и 5%) отличаются коэффициенты портфеля равных весов и индексного портфеля, а также портфеля равных весов и портфеля Марковица с оценкой доходности, полученной из рыночного равновесия. Из этого можно сделать вывод, что только наивно диверсифицированный портфель показывает доходность, статистически значимо превышающую рынок в терминах коэффициента Шарпа.

Поскольку можно сделать вывод, что все портфели показывают одинаковую доходность, исключим из сравнения метрики, отвечающие за доходность и посмотрим, как изменится рейтинг инвестиционных стратегий.

Следует отметить, что поскольку портфель Equal и так превосходит портфели Mrkt и MV_pi, исключение метрик, отвечающих за доходность не влияет на их расположение друг относительно друга. Также надо отметить, что исключение произведено на основе индекса Шарпа, и экстраполяция вывода на индекс Сортино не обязательно будет верна, но, поскольку ранжирование осуществляется не на основе статистических сравнений всех метрик, а на основе простого сравнения, это предположение не будет критичным для вывода.

В таблице 6.4 показаны результаты ранжирования инвестиционных стратегий с учетом, того, что генерируемую доходность можно считать одинаковой. Из таблицы видно, что по оставшимся критериям наименее эффективными оказываются портфели Марковица, оцененные по историческим данным, причем экспоненциальное взвешивание делает портфель более неустойчивым и увеличивает коэффициент оборачиваемости. Из этой таблицы наглядно видно, почему модель Марковица не снискала популярности среди инвесторов: портфели Марковица из-за погрешности оценки имеют наименьший рейтинг почти по всем критериям.

При этом портфель равных весов также оказывается наиболее эффективным. Если же сравнить модель Блэка—Литтермана и модель Марковица с оценкой ожидаемой доходности по историческим данным, то оказывается, что модель Блэка—Литтермана генерирует более устойчивый и предсказуемый портфель.

Стоит заметить, что здесь используется базовая спецификация модели Блэка—Литтермана, где в получении ожидаемой доходности одинаковый вес имеет как рыночное равновесие, так и взгляды инвесторов. Если сравнить базовую модель с портфеле Марковица, где ожидаемая доходность была оценена из рыночного равновесия, то есть портфель эквивалентный модели Блэка–Литтермана в отсутствии взглядов инвесторов, можно сделать вывод, что в отсутствии взглядов модель показывает лучший результат, чем индексный портфель и превосходит модель со взглядами. Причины неэффективности рекомендаций аналитиков для генерации взглядов будут описаны позже.

Таблица 6.4
Результаты ранжирования портфелей до учета трансакционных издержек в предположении о статистически незначимой разнице в доходности

	Turnover	SEQ	Max Drawdown	HHIndex	Tracking error(Mrkt)	Tracking error(Equal)	Score	Rank
Equal	6	6	**8**	**8**	6	**8**	61	8.0
Min-Var	4	3	5	7	5	7	42	7.0
MV_pi	7	1	3	6	7	6	33	1.0
Mrkt	**8**	2	2	5	**8**	5	36	3.5
BL	2	7	4	3	3	4	41	5.5
Buy	5	4	6	1	4	3	36	3.5
MV_250	3	5	7	2	1	2	34	2.0
MV_250_exp	1	**8**	1	4	2	1	41	5.5

Данная таблица показывает рейтинг инвестиционный стратегий после учета результатов статистического равнения коэффициентов Шарпа. Поскольку разница в коэффициентах Шарпа незначима, метрики, отвечающие за доходность были исключены.

Подведем предварительный итог анализа до учета трансакционных издержек.

1. По совокупности всех метрик портфель наивной диверсификации оказывается наиболее эффективным.

2. Классический портфель Марковица оказывается одним из наименее эффективных, оказываясь хуже индексного портфеля. Использование экспоненциального взвешивания для оценки входных параметров позволяте существенно улучшить доходность портфеля Блэка—Литтермана, но делает его еще более неустойчивым.

3. Базовая модель Блэка—Литтермана превосходит результаты классического портфеля Марковица и рыночного портфеля, однако уступает портфелю 1/N.

4. Если учесть, что статистической разницы между доходностью портфелей нет, то по совокупности остальных факторов, характеризующих стабильность, диверсифицированность и “предсказуемость” стратегий, портфель наивной диверсификации оказывается наилучшим, а портфели Марковица с оценкой по историческим данным - наименее эффективными. Хотя базовая модель Блэка—Литтермана при этом превосходит портфели Марковица, она оказывается менее эффективной, чем индексный портфель и чем её аналог в отсутствии взглядов инвесторов, что говорит о неэффективности рекомендаций аналитиков.

6.3 Трансакционные издержки

Как уже было сказано выше, реализация части тестируемых стратегий сопряжена с высокими трансакционынми издержками. Поэтому в этой части будет оценена доходность стратегий с поправкой на трансакционные издержки, как описано в главе 5.

Кумулятивная доходность

Посмотрим как изменилась кумулятивная доходность после учета BID-ASK спреда. Рисунки 6.4 и 6.5 показывают кумулятивную доходность портфелей после учета издержек.

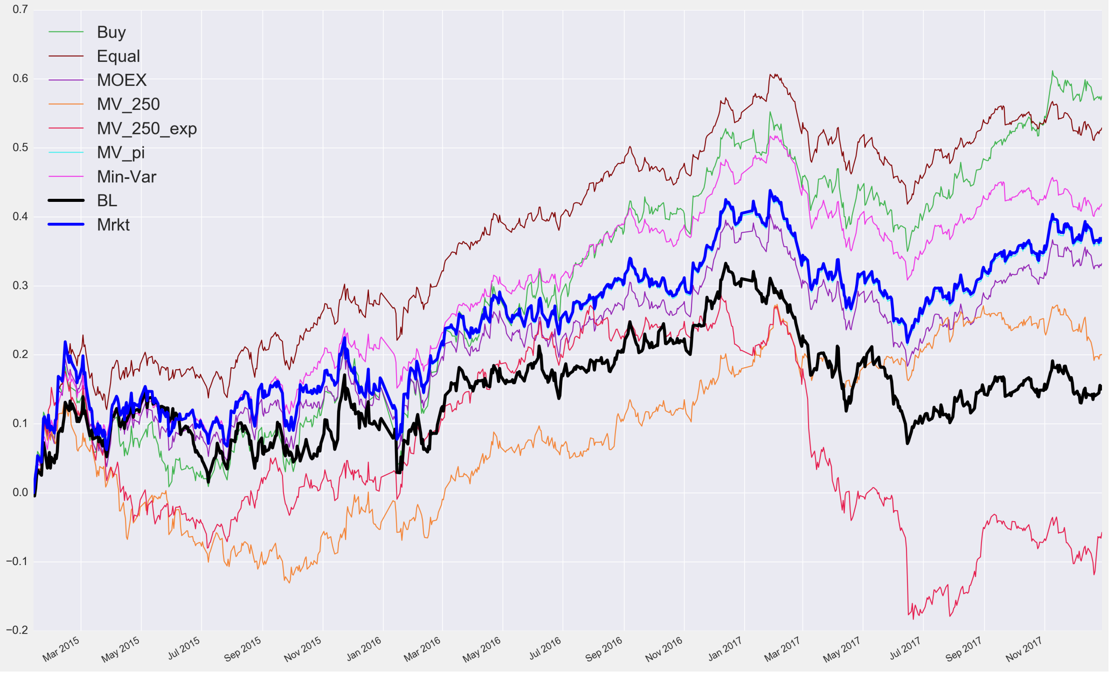

Рис. 6.4: Чистая кумулятивная логарифмическая доходность тестируемых портфелей за период 2015–2017

Можно заметить, что доходность изменилась пропорционально величине коэффициента оборачиваемости: портфели, чья реализация сопряжена с наибольшим средним количеством сделок, то есть портфель Марковица с экспоненциальной оценкой ожидаемой доходности и базовый портфель Блэка—Литтермана, наиболее сильно потеряли в стоимости.

Ожидаемо лучше всего себя показали портфели с маленькими коэффициентами оборачиваемости: портфель наивной диверсификации, портфель наименьшего риска и консенсус–портфель. Аналитики не так часто изменяют свои рекомендации, тем более на акции крупных компаний, поэтому большую часть времени этот портфель будет сопоставим по издержкам с индексным портфелем.

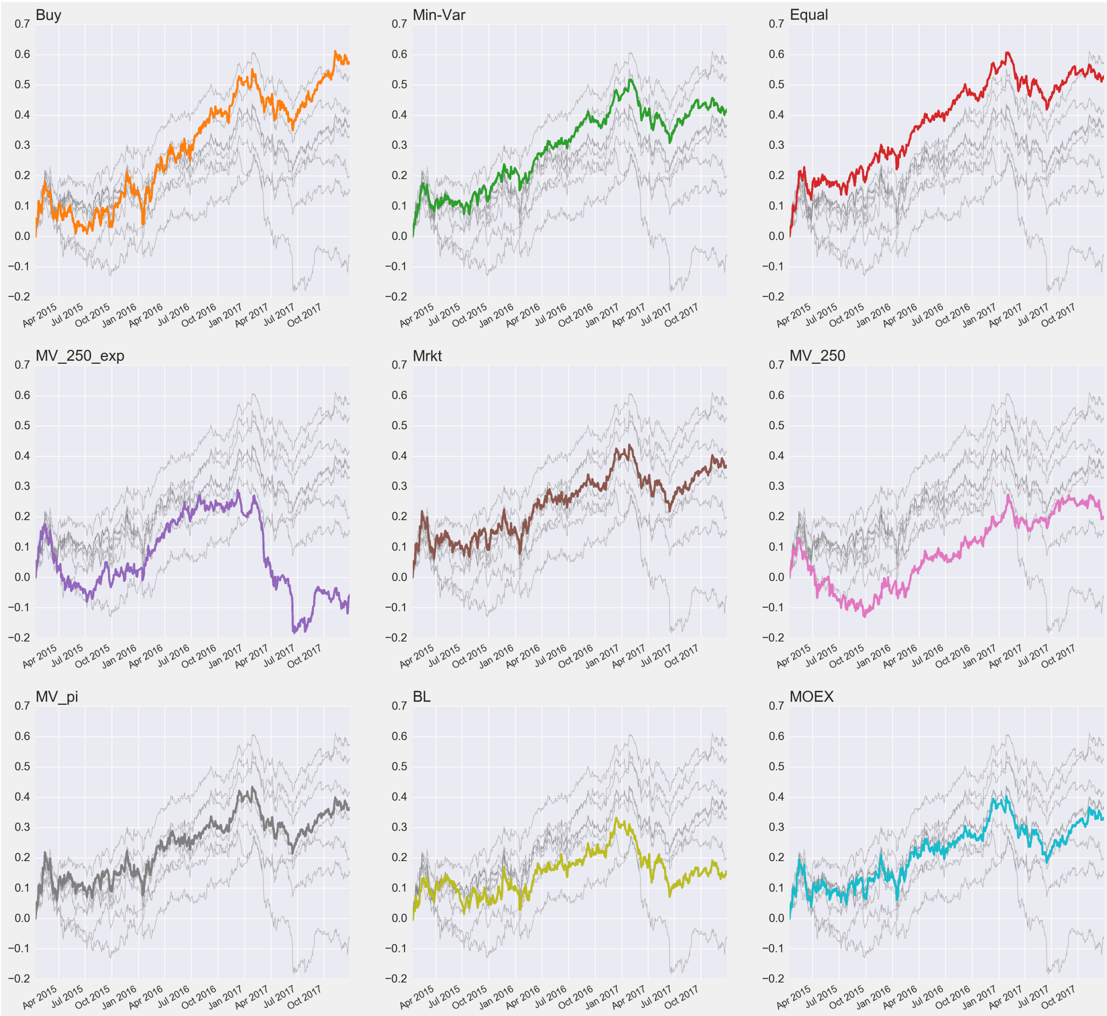

Рис. 6.5: Чистая кумулятивная логарифмическая доходность тестируемых портфелей за период 2015–2017 в разбивке.

При этом портфель, показывавший наибольшую доходность до учета издержек, MV_250_exp, теперь имеет отрицательную кумулятивную доходность. Как портфели Марковица, так и портфель Блэка—Литтермана после учета трансакционных издержек уже не превосходят доходность индекса, как это было до учета издержек от ребалансировки.

Оценим метрики эффективности по скорректированным рядам доходности. В таблице 6.5 показаны результаты оценки эффективности стратегий после учета издержек.

Таблица 6.5
Результаты оценки метрик эффективности портфелей после учета трансакционных издержек за период 2015-2017

	Cumulative return, %	Sharpe ratio, %	Sortino ratio, %	Turnover	SEQ, %	Max Drawdown, %	HHIndex	Tracking error(Mrkt), %	Tracking error(Equal), %
Min-Var	42	3.6	5.1	0.04	0.02	-19	0.03	0.45	0.19
Equal	53	**5.3**	**7.5**	0.01	0.03	-17	0.02	0.39	0.00
MV_pi	36	2.1	3.1	0.01	0.01	-20	0.06	0.00	0.39
MV_250_exp	-6	-3.3	-4.5	**0.49**	-0.05	**-38**	0.13	**0.88**	**0.75**
MV_250	20	-0.1	-0.1	0.24	-0.01	-23	0.17	**0.88**	0.72
BL	15	-0.7	-0.9	0.38	-0.02	-23	0.16	0.6	0.57
Mrkt	37	2.2	3.1	0.00	0.01	-20	0.06	0.00	0.39
Buy	**58**	4.4	6.3	0.03	0.03	-18	**0.19**	0.45	0.64

Данная таблица показывает метрики эффективности для каждого портфеля. Оценка параметров получена за весь период тестирования после учета трансакционных издержек

Коэффициент Шарпа

В терминах коэффициента Шарпа, самую высокую доходность показывает портфель наивной диверсификации. После учета транзакционных издержек портфели Марковица с оценкой по историческим данными и порфтель Блэка—Литтермана показывают отрицательный коэффициент Шарпа, то есть дают доходность ниже безрисковой и сильно уступают доходности рыночного портфеля. При этом теперь коэффициенты уже сильно разнятся между собой и нельзя сказать, что доходность всех портфелей примерно одинакова.

Коэффициент Сортино

Поскольку коэффициент Сортино штрафует за доходность ниже доходности бенчмарка, разница в коэффициентах между портфелем с равными весами (наибольшим значением) и портфелем Марковица (наименьшим значением) еще более существенная, чем разница в коэффициентах Шарпа.

CEQ

Анализ гарантированной эквивалентной доходности говорит о том, что инвестор с коэффициентом несклонности к риску 2.6 будет готов в среднем терпеть убыток около 0.01%—0.05% ежедневно без риска, нежели инвестировать в портфели Марковица и Блэка—Литтермана. Следовательно, эти стратегии являются совершенно непривлекательными в сравнении с рыночным портфелем, портфелем равных весов и портфелем наименьшей дисперсии.

Коэффициенты максимального падения стоимости и погрешности отслеживания, также как и в случае до учета трансакционных издержек, говорят о нестабильности и непредсказуемости портфелей Марковица.

Статистический анализ коэффициентов Шарпа

Приведем таблицу со значениями p-value для сравнения коэффициентов Шарпа после корректировки доходности на трансакционные издержки.

Во-первых, из таблицы 6.6 видно, что на всем тестируемом промежутке ни одна стратегия не показывает индекс Шарпа, значимо отличающийся от 0. Из этого следует, что хотя посчитанный в таблице 6.5 коэффициент Шарпа для портфелей Марковица и Блэка—Литтермана меньше нуля, можно утверждать, что статистически в среднем на протяжении период тестирования он не отличается от нуля.

Во-вторых, оценка пар коэффициентов Шарпа выявила, что коэффициент Шарпа портфеля наивной диверсификации 1/N статистически значимо превосходит значения коэффициентов Шарпа всех остальных портфелей кроме консенсус—портфеля. Из этого можно сделать вывод, что только наивно диверсифицированный портфель показывает доходность, статистически значимо превышающую рыночную.

Кроме того, коэффициенты Шарпа портфелей Марковица, где оценка ожидаемой доходности получена по историческим данным, статистически не отличаются от коэффициента Шарпа модели Блэка—Литтермана. Однако при этом также можно сказать, что доходность портфеля Блэка–Литтермана статистически не отличается от доходности рыночного портфеля.

Таблица 6.6
Результаты статистического тестирования коэффициента Шарпа для всех пар портфелей за период 2015-2017 после учета трансакционных издержек

	Buy	Min-Var	Equal	MV_250_exp	Mrkt	MV_250	MV_pi	BL	MOEX
Buy	**0.24**	0.75	0.67	0.03*	0.16	0.22	0.14	0.02*	0.06*
Min-Var	0.75	**0.33**	0.08*	0.01*	0.38	0.22	0.36	0.05*	0.27
Equal	0.67	0.08*	**0.16**	0.00*	0.04*	0.08*	0.03*	0.01*	0.03*
MV_250_exp	0.03*	0.01*	0.00*	**0.37**	0.08*	0.31	0.08*	0.42	0.12
Mrkt	0.16	0.38	0.04*	0.08*	**0.55**	0.50	0.80	0.19	0.38
MV_250	0.22	0.22	0.08*	0.31	0.50	**0.99**	0.51	0.86	0.61
MV_pi	0.14	0.36	0.03*	0.08*	0.80	0.51	**0.56**	0.20	0.44
BL	0.02*	0.05*	0.01*	0.42	0.19	0.86	0.20	**0.85**	0.28
MOEX	0.06*	0.27	0.03*	0.12	0.38	0.61	0.44	0.28	**0.65**

Данная таблица показывает p-value для тестов на отличие коэффициентов Шарпа от нуля (по диагонали) и друг от друга (вне диагонали) за весь период тестирования после учета трансакционных издержек. * означает значимость на 10%

В таблице 6.7 показаны результаты показаны результаты ранжирования инвестиционных стратегий с учетом трансакционных издержек.

После того, как доходность портфелей была скорректирована на издержки, которые инвесторы несут от торговых операций для ребалансировки и реализации конкретной стратегии, можно сделать следующие выводы:

1. Портфели Марковица, где оценка ожидаемой доходности получена по историческим данным, показывают наихудшие результаты по совокупности метрик эффективности и проигрывают как рыночному бенчмарку, так и стратегии наивной диверсификации. Этот результат совпадает с результатами работ DeMiguel et al. (2009), Kirby and Ostdiek (2012) и Bessler et al. (2014), демонстрирующими, как проблема погрешности оценки сказывается на эффективности модели Марковица.

2. Базовая модель Блэка—Литтермана после учета трансакционных издержек по совокупности метрик проигрывает бенчмаркам. Хотя статистически коэффициент Шарпа портфеля Блэка—Литтермана не отличается от коэффициента

Шарпа индексного портфеля, он также не отличается от значений коэффициентов портелей Марковица. В совокупности это говорит о том, что использование базовой модели Блэка—Литтермана не позволяет значимо улучшить результаты модели Марковица в связи с большими трансакционными издержками. Это совпадает с результатом работы He et al. (2013), где после учета трансакционных издержек модель Блэка—Литтермана генерировала доходность, статистически значимо не отличающуюся от рыночной и от доходности модели Марковица.

3. Портфель наивной диверсификации оказывается самой эффективной стратегией как до учета трансакционных издержек, так и после, и характеризуется коэффициентом Шарпа, статистически значимо превосходящим другие стратегии.

Таблица 6.7
Результаты ранжирования портфелей по девяти метрикам после учета трансакционных издержек за период 2015-2017

	Cumulative return	Sharpe ratio	Sortino ratio	Turnover	SEQ	Max Drawdown	HHIndex	Tracking error(Mrkt)	Tracking error(Equal)	Score	Rank
Equal	7	**8**	**8**	6	**8**	**8**	**8**	6	**8**	67	8.0
Min-Var	6	6	6	4	6	6	7	5	7	53	7.0
Mrkt	5	5	5	**8**	5	5	5	**8**	5	51	6.0
Buy	**8**	7	7	5	7	7	1	4	3	49	5.0
MV_pi	4	4	4	7	4	4	6	7	6	46	4.0
MV_250	3	3	3	3	3	2	2	2	2	23	2.5
BL	2	2	2	2	2	3	3	3	4	23	2.5
MMV_250_exp	1	1	1	1	1	1	4	1	1	12	1.0

Данная таблица показывает ранг каждого портфеля по девяти метрикам эффективности, а также общий рейтинг на их основе. Оценка параметров получена за весь период тестирования после учета трансакционных издержек

Глава 7

Заключение

В данной работе был представлен подробный анализ модели Блэка—Литтермана как с теоретической, так и с практической точки зрения. Целью исследования была демонстрация возможности успешного применения модели Блэка—Литтермана на российском фондовом рынке. Для этого, с одной стороны, было необходимо проанализировать и описать методологию спецификации параметров модели, а с другой — протестировать полученную модель на рынке с помощью инвестиционной симуляции и выяснить, позволяет ли самая стандартная спецификация превзойти модель Марковица.

В рамках теоретической части работы было подробно рассмотрено, почему модель Марковица не стала привычным инструментом портфельной оптимизации для инвесторов. Затем было показано, как модель Блэка—Литтермана борется с проблемами подхода Марковица, и в чем состоят её теоретические преимущества. В частности, среди основных преимуществ были выделены наличие априорной стартовой точки — рыночного равновесия, а также возможность включить прогнозы инвесторов относительно будущей доходности активов в оптимизационную процедуру.

В первой половине теоретической части была подробно описана и изучена сама модель Блэка—Литтермана, её предпосылки, общий принцип и механизм её работы. Модель была представлена не только строго математически, но также была описана её концепция и "интуиция" основных формул и параметров модели. Во второй половине теоретической части каждый из параметров модели был подробно рассмотрен, были разобраны методики спецификации каждого параметра, а также описано влияние параметров и их спецификации на финальный результат. Так, было выяснено, что в базовой спецификации модель Блэка–Литтермана сводится к простому среднему между априорным рыночным распределением ожидаемой доходности и условным распределением, полученным из взглядов инвесторов.

Для того, чтобы продемонстрировать, как потенциальный инвестор может специфицировать все параметры модели на практике, были выбраны наиболее распространенные в литературе методы спецификации параметров модели и такая “базовая” модель Блэка—Литтермана была специфицирована для использования на российском фондовом рынке. Спецификация каждого из параметров была подробно описана и обоснована. В результате было получено подробное и последовательное описание процедуры спецификации всех параметров модели Блэка—Литтермана, которое потенциальные инвесторы могут использовать для создания своей спецификации модели.

Затем специфицированная модель была протестирована на акциях, входящих в расчет индекса МосБиржи. Для тестирования была разработана программа, симулирующая поведение специфицированной модели на трех тестовых годах: 2015—2017. Для того, чтобы оценить эффективность модели, получившаяся в результате инвестиционной симуляции доходность сравнивалась с портфелями Марковица и портфелями—бенчмарками в терминах финансовой эффективности, стабильности и диверсифицированности.

7.1 Результаты тестирования

В эмпирической части работы была проведена инвестиционная симуляция, в результате которой модель Блэка—Литтермана с рекомендациями аналитиков, собранными в Bloomberg, в качестве взглядов инвестора сравнивалась с портфелями модели Марковица и портфелями—бенчмарками. В качестве портфелей модели Марковица были использованы различные способы генерации ожидаемой доходности: оценка по 250-и историческим реализациям доходности, оценка по историческим данным с экспоненциальным взвешиванием и вмененная рыночная равновесная доходность. В качестве портфелей—бенчмарков был использован индексный портфель с весами, соответствующими рыночной капитализации, и портфель “наивной” диверсификации — с равными весами активов. В результате анализа были получены следующие результаты.

Во-первых, продолжая серию работ по эмпирическому сравнению инвестиционных стратегий (DeMiguel et al., 2009; Kirby and Ostdiek, 2012; Bessler et al., 2014), в данной работе было установлено, что простейшая инвестиционная стратегия 1/N, то есть портфель с равными весами, по совокупности факторов является наиболее эффективной инвестиционной стратегией в силу стабильности и низких трансакционных издержек. Было показано, что с учетом трансакционных издержек, возникающих при ребалансировке других портфелей, коэффициент Шарпа портфеля с равными весами статистически значимо превосходит все остальные портфели, включая рыночный портфель. Кроме того, как и в других работах на данную тему, классический портфель Марковица оказался одним из наименее эффективных, оказываясь хуже индексного портфеля.

Во-вторых, в соответствии с результатами He et al. (2013), Bessler et al. (2014), Chen et al. (2015) и Nannar (2016), было получено, что до учета трансакционных издержек базовая модель Блэка—Литтермана превосходит результаты классического портфеля Марковица и рыночного портфеля, однако уступает "наивно" диверсифицированному портфелю 1/N.

При этом тест коэффициентов Шарпа показал, что статистически значимой разницы между доходностью портфелей нет, поэтому по совокупности остальных факторов, характеризующих стабильность, диверсифицированность и "предсказуемость" стратегий, портфель Блэка—Литтермана превосходит портфели Марковица, но уступает индексному портфелю и аналогу модели Блэка—Литтермана в отсутствии взглядов инвесторов, что говорит о неэффективности рекомендаций аналитиков как метода генерации взглядов.

В-третьих, поскольку для тестирования модели была выбрана спецификация с ежедневной ребалансировкой портфеля, результаты инвестиционной симуляции критично зависят от оборачиваемости портфеля, то есть от того, какой объем торговых операций необходим для ребалансировки конкретного портфеля. Поэтому, для правильной оценки эффективности модели Блэка—Литтермана, была сделана корректировка доходности тестируемых портфелей на трансакционные издержки.

Результаты тестирования портфелей с учетом трансакционных издержек совпали с таковыми в работах Arestad and Rahmqvist (2012), He et al. (2013) и Gertzell (2013). Из-за высокой оборачиваемости как портфели Марковица, так и портфель Блэка—Литтермана показывают наихудшие результаты, при этом превосходство базовой модели Блэка—Литтермана над моделью Марковица теряется, а разница в доходности является статистически незначимой. Кроме того, после учета издержек портфели Мароквица и Блэка—Литтермана генерируют коэффициент Шарпа, статистически значимо меньший, чем портфель с равными весами.

В результате тестирования инвестиционных стратегий было выяснено, что проблема погрешности оценки действительно делает классический портфель Марковица неэффективным. При этом базовая модель Блэка–Литтермана превосходит модель Марковица только до учета трансакционных издержек, поскольку высокая оборачиваемость полученного портфеля делает разницу между портфелями статистически незначимой. Таким образом, можно сказать, что использование базовой модели

Блэка—Литтермана не позволяет значимо улучшить результаты модели Марковица в связи с большими трансакционными издержками. А портфель наивной диверсификации оказывается самой эффективной стратегией как до учета трансакционных издержек, так и после.

В качестве причин низкой эффективности базовой модели Блэка—Литтермана с рекомендациями аналитиков можно выделить несколько факторов.

Во-первых, очевидным образом на доходность будет влиять частота ребалансировки: вместе со снижением частоты будут снижаться и трансакционные издержки. Однако, как отмечает He et al. (2013), при этом снижается и доходность портфеля Блэка—Литтермана.

Во-вторых, пожалуй основной причиной является используемый метод генерации взглядов. Прежде всего стоит сказать, что поскольку в нашем распоряжении не было реальных взглядов порфтельных управляющих на российском рынке, для иллюстрации модели Блэка—Литтермана был выбран наиболее широко распространенный метод генерации взглядов — преобразование публичных рекомендаций аналитиков. Как уже было отмечено в работе, наличие инвестиционных сигналов в таких рекомендациях само по себе является предметом множества исследований, часть из которых (Barber et al., 2001; Brav and Lehavy, 2003) говорят о том, что использованный в этой работе подход не позволяет строить прибыльные стратегии.

Стоить отменить, что в работах, чьи результаты совпадают с результатами данного исследования, и на методологию которых опирается эта работа, используется один и тот же способ генерации взглядов. При этом последующие работы (Chen et al., 2015; Nannar, 2016) использовали более совершенный способ генерации взглядов из рекомендаций аналитиков, в результате чего модель Блэка—Литтермана показывала высокие результаты даже с учетом трансакционных издержек.

7.2 Теоретическая и практическая значимость

С точки зрения теоретической значимости данная работа привносит вклад в немногочисленную литературу, посвящённую эмпирическому тестированию модели Блэка—Литтермана. Также данная работа продолжает исследования, посвященные сравнению инвестиционных стратегий, а именно модели Марковица и порфтелей—бенчмарков. Подобные исследования не проводились на российском рынке, и данная работа представляет собой первое подробное описание спецификации модели и её тестирование в реалиях российского фондового рынка. Помимо интереса со стороны российского научного сообщества, эта работа может быть интересна и глобальному научному сообществу как исследование, посвященное тестированию базовой модели Блэка—Литтермана с использованием рекомендаций аналитиков на развивающемся рынке, характеризующимся низкой ликвидностью, высокими трансакционными издержками и потенциальной неэффективностью рекомендаций.

С точки зрения практической значимости следует отметить, что низкие результаты модели в ходе инвестиционной симуляции не говорят о неприменимости модели. Наоборот, данная работа показывает, что все параметры модели могут быть разумно специфицированы, а сама модель предлагает инвестору достаточно уникальный механизм учета прогнозов будущей доходности активов в оптимизационной процедуре. Полученные результаты говорят о том, что эффективность модели критически зависит от спецификации параметров модели, в частности от того, насколько сами взгляды инвестора являются эффективными.

Поскольку потенциальный инвестор скорее всего не будет использовать рекомендации аналитиков в качестве своих взглядов, представленный способ спецификации модели Блэка–Литтермана и взглядов инвесторов служит скорее иллюстрацией возможности применения модели инвесторами в реальном секторе. Поэтому, с точки зрения практической значимости, наиболее важной частью работы является даже не тестирование модели, а подробное описание её концепции, методов спецификации параметров и влияния того или иного способа спецификации на конечный результат. Таким образом, данная работа может служить для инвесторов начальной инструкций или введением в практическое использование и спецификацию базовой модели Блэка—Литтермана.

Приложения

Результаты тестов на стационарность

```
###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

[1] "Buy"
Residual standard error: 0.01144 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4764,Adjusted R-squared:  0.475
F-statistic:   334 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -20.345
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

[1] "Min.Var"
Residual standard error: 0.007949 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4594,Adjusted R-squared:  0.4579
F-statistic: 311.9 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -19.2791
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

[1] "Equal"
Residual standard error: 0.008312 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4583,Adjusted R-squared:  0.4568
F-statistic: 310.5 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -19.295
```

```
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

[1] "MV_250_exp"
Residual standard error: 0.01038 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4771,Adjusted R-squared:  0.4757
F-statistic: 334.9 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -18.6739
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

[1] "Mrkt"
Residual standard error: 0.01003 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4647,Adjusted R-squared:  0.4633
F-statistic: 318.6 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -20.0292
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

[1] "MV_250"
Residual standard error: 0.008977 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4755,Adjusted R-squared:  0.4741
F-statistic: 332.8 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -19.7833
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

[1] "MV_pi"
Residual standard error: 0.01003 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4647,Adjusted R-squared:  0.4633
F-statistic: 318.6 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -20.0275
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

```
[1] "BL"
Residual standard error: 0.01021 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4976,Adjusted R-squared:  0.4962
F-statistic: 363.5 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -20.4545
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62

[1] "MOEX"
Residual standard error: 0.01014 on 734 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4723,Adjusted R-squared:  0.4709
F-statistic: 328.5 on 2 and 734 DF,  p-value: < 2.2e-16
Value of test-statistic is: -20.1493
Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau1 -2.58 -1.95 -1.62
```

Список компаний, входивших в расчет индекса

Номер	Код	Название компании
1	AFKS	ПАО АФК Система, ао
2	AFLT	ПАО Аэрофлот, ао
3	AKRN	ПАО Акрон, ао
4	ALRS	АК АЛРОСА (ПАО), ао
5	BSPB	ОАО Банк Санкт-Петербург, ао
6	CHMF	ПАО Северсталь, ао
7	DIXY	ПАО ДИКСИ Групп, ао
8	DSKY	ПАО Детский мир, ао
9	UPRO	ПАО Юнипро, ао
10	FEES	ПАО ФСК ЕЭС, ао
11	GAZP	ПАО Газпром, ао
12	GMKN	ПАО ГМК Норильский никель, ао
13	HYDR	ПАО РусГидро, ао
14	IRAO	ПАО Интер РАО, ао
15	LKOH	ПАО ЛУКОЙЛ, ао
16	LSRG	ПАО Группа ЛСР, ао
17	MAGN	ПАО ММК, ао
18	MFON	ПАО МегаФон, ао
19	MGNT	ПАО Магнит, ао
20	MOEX	ПАО Московская Биржа, ао
21	RSTI	ПАО Россети, ао
22	MSNG	ПАО Мосэнерго, ао
23	MTLR	ПАО Мечел, ао
24	MTSS	ПАО МТС, ао
25	MVID	ПАО М.видео, ао
26	NLMK	ПАО НЛМК, ао
27	NVTK	ПАО НОВАТЭК, ао
28	PHOR	ПАО ФосАгро, ао
29	POLY	Полиметалл Интернэшнл плс, акции иностранного эмитента
30	ROSN	ПАО НК Роснефть, ао
31	RTKM	ПАО Ростелеком, ао
32	RUAL	Юнайтед Компани РУСАЛ Плс, акции иностранного эмитента
33	SBER	ПАО Сбербанк, ао
34	SNGS	ОАО Сургутнефтегаз, ао

35	SVAV	ОАО СОЛЛЕРС, ао
36	TATN	ПАО Татнефть им. В.Д. Шашина, ао
37	TRMK	ПАО ТМК, ао
38	TRNFP	ПАО Транснефть, ап
39	URKA	ОАО Уралкалий, ао
40	VTBR	Банк ВТБ (ПАО), ао
41	YNDX	Яндекс Н.В., акции иностранного эмитента
42	TATNP	ПАО Татнефть им. В.Д. Шашина, ап
43	SNGSP	ОАО Сургутнефтегаз, ап
44	SBERP	ПАО Сбербанк, ап
45	RTKMP	ОАО Ростелеком, ап
46	PLZL	ПАО Полюс, ао
47	PIKK	ПАО Группа Компаний ПИК, ао
48	NKNC	ПАО Нижнекамскнефтехим, ао
49	BANEP	ПАО АНК Башнефть, ап
50	BANE	ПАО АНК Башнефть, ао
51	LNTA	Лента Лтд., ДР иностранного эмитента на акции
52	RNFT	ПАО НК РуссНефть, ао

Распределение дневной лог—доходности

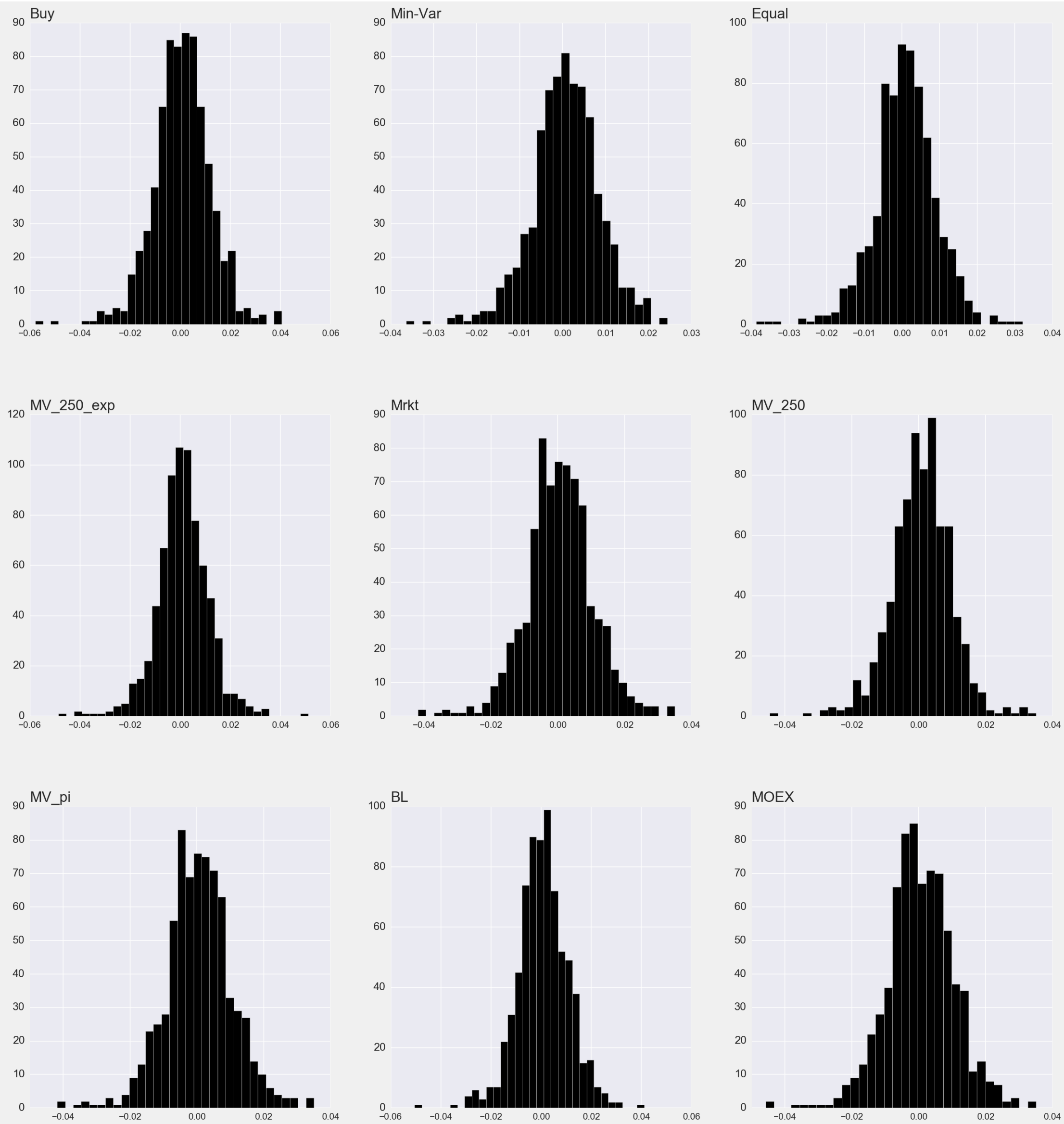

Рис. 7.1: Распределения дневной логарифмической доходности тестируемых портфелей за период 2015–2017

Литература

Arestad, C. J. and Rahmqvist, J. (2012). *Applying the Black-Litterman Model on the Swedish Stock Market*. PhD thesis, Lund University School of Economics and Management.

Barber, B., Lehavy, R., McNichols, M., and Trueman, B. (2001). Can investors profit from the prophets? security analyst recommendations and stock returns. *Journal of Finance*, 56:531–563.

Beach, S. L. and Orlov, A. G. (2007). An application of the black–litterman model with egarch-m-derived views for international portfolio management. *Financial Markets and Portfolio Management*, 21(2):147–166.

Becker, F. and Gürtler, M. (2008). Quantitative forecast model for the application of the black-litterman approach. Working papers // Institut für Finanzwirtschaft, Technische Universität Braunschweig IF27V2, Braunschweig.

Bertsimas, D., Gupta, V., and Paschalidis, I. C. (2012). Inverse optimization: A new perspective on the black-litterman model. *Oper. Res.*, 60(6):1389–1403.

Bessler, W., Opfer, H., and Wolff, D. (2014). Multi-asset portfolio optimization and out-of-sample performance: An evaluation of black-litterman, mean variance and naïve diversification approaches. *European Journal of Finance*.

Best, M. J. and Grauer, R. R. (1991). On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results. *The Review of Financial Studies*, 4(2):315.

Bevan, A., Bevan, A., and Winkelmann, K. (1998). Using the black-litterman global asset allocation model: Three years of practical experience. In *Fixed Income Research, Goldman, Sachs & Company*.

Black, F. and Litterman, R. (1991a). Global asset allocation with equities, bonds, and currencies. *Fixed Income Research, Goldman, Sachs & Company*.

Black, F. and Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48:28–43.

Black, F. and Litterman, R. B. (1991b). Asset allocation: Combining investor views with market equilibrium. *The Journal of Fixed Income*, 1(2):7–18.

Boni, L. and Womack, K. (2006). Analysts, industries, and price momentum. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 41(85–109).

Brav, A. and Lehavy, R. (2003). An empirical analysis of analysts' target prices: short-term informativeness and long- term dynamics. *Journal of Finance*, 58:1933–1968.

Chen, L., Da, Z., and Schaumburg, E. (2015). Implementing black-litterman using an equivalent formula and equity analyst target prices. *The Journal of Investing*, 24(1):34–47.

Cheung, W. (2010). The black–litterman model explained. *Journal of Asset Management*, 11(4):229–243.

Chiarawongse, A., Kiatsupaibul, S., Tirapat, S., and Roy, B. V. (2012). Portfolio selection with qualitative input. *Journal of Banking & Finance*, 36(2):489–496.

Da, Z. and Schaumburg, E. (2011). Relative valuation and analyst target price forecasts. *Journal of Financial Markets*, 14(1):161 – 192.

DeMiguel, V., Garlappi, L., and Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5):1915.

Drobetz, W. (2001). How to avoid the pitfalls in portfolio optimization? putting the black-litterman approach at work. *Financial Markets and Portfolio Management*, 15(1):59–75.

Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., and Kolm, P. N. (2006). Incorporating trading strategies in the black-litterman framework. *Journal of Trading*, pages 28–36.

Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1):34–105.

Fernandes, B., Ornelas, J., and Cusicaqui, O. (2012). Combining equilibrium, resampling and analyst's view in portfolio optimization. *Journal of Banking & Finance*, 36:1354–1361.

Gertzell, F. (2013). The black-litterman model applied on omxs30. Master's thesis, Lund University School of Economics and Management.

Green, R. C. and Hollifield, B. (1992). When will mean-variance efficient portfolios be well diversified? *The Journal of Finance*, 47(5):1785–1809.

He, G. and Litterman, R. (1999). The intuition behind black-litterman model portfolios. *Goldman Sachs Asset Management Working paper*.

He, P. W., Grant, A., and Fabre, J. (2013). Economic value of analyst recommendations in australia: an application of the black–litterman asset allocation model. *Accounting and Finance*, 53(2):441–470.

Herold, U. (2003). Portfolio construction with qualitative forecasts. *The Journal of Portfolio Management*, 30(1):61–72.

Idzorek, T. (2004). A step-by-step guide to the black-litterman model. *Zephyr Associates Publications*.

Idzorek, T. (2007). 2 - a step-by-step guide to the black-litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. In Satchell, S., editor, *Forecasting Expected Returns in the Financial Markets*, pages 17 – 38. Academic Press, Oxford.

Idzorek, T. M. (2005). A step-by-step guide to the black-litterman model, incorporating user-specified confidence levels.

Jobson, J.D., a. B. K. (1981). Putting markowitz theory to work. *Journal of Portfolio Management*, 7:70–74.

Jobson, J. and Korkie, B. (1981). Performance hypothesis testing with the sharpe and treynor measures. *Journal of Finance*, 36:889–908.

Jones, R. C., Lim, T., and Zangari, P. J. (2007). The black-litterman model for structured equity portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 33(2):24.

J.P.Morgan and Reuters (1996). Riskmetrics. Technical report.

Kirby, C. and Ostdiek, B. (2012). It's all in the timing: Simple active portfolio strategies that outperform naïve diversification. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 47(2):437–467.

Kolm, P. N., Tütüncü, R., and Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2):356 – 371. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research.

Litterman, R. (2004). The active risk puzzle: Implications for the asset management industry. Technical report, Goldman Sachs.

Litterman, R. and Winkelmann, K. (1998). *Estimating Covariance Matrices*. Goldman Sachs.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. New York: John Wiley & Sons.

Meucci, A. (2005). Beyond black-litterman: Views on non-normal markets.

Meucci, A. (2009). Enhancing the black-litterman and related approaches: Views and stress test on risk factors. *Journal of Asset Management*, 10(2):89–96.

Meucci, A. (2010). The black-litterman approach: Original model and extensions. *The Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley*.

Michaud, R. O. (1989). The markowitz optimization enigma: Is 'optimized' optimal? *SSRN Electronic Journal*, 45(1):31–42.

Nannar, M. B. (2016). Implementing black-litterman using equity analyst consensus: Evidence from set50. Master's thesis, Thammasat University, Faculty of Commerce and Accountancy.

Opdyke, J. (2008). Comparing sharpe ratios: So where are the p-values? *Journal of Asset Management*, 8(5):308–336.

Ramírez, S. L. and Jaramillo, M. T. (2015). Aplicación del modelo black-litterman al mercado de renta variable colombiano. Master's thesis, Universidad EAFIT, Escuela de Economía y Finanzas.

Satchell, S. and Scowcroft, A. (2000). A demystification of the black–litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 1(2):138–150.

Sharpe, F. (1967). A linear programming algorithm for mutual fund portfolio selection. *Management Science*, 13:499–510.

Walters, J. (2008). The black-litterman model: A detailed exploration. *blacklitterman.org*.

Walters, J. (2014). The black-litterman model in detail. *SSRN Electronic Journal*.