Студент: Кирилл Яценко
Группа: Яндекс
Дата: 28 сентября 2023 г.

№1 Эквивалентны ли следующие утверждения?

1. $f(n) = \Theta(g(n))$
2. $\exists c, 0 < c < +\infty : \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

Решение:

1. Из утверждения №1 $\Rightarrow \exists c_1 > 0, c_2 > 0, N : \forall n > N \Rightarrow c_1 g(n) < f(n) < c_2 g(n)$
2. Отсюда для отношения $\frac{f(n)}{g(n)}$ получим оценку:

   $c_1 < \frac{f(n)}{g(n)} < c_2$
3. По условию утверждения №1 c_1, c_2 не обязанны быть равными, поэтому при переходе в пределе отношение $\frac{f(n)}{g(n)}$ не обязанно иметь конечный предел

№2 Дайте ответ для двух случаев $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$?

1. Если в определении O опустить условие про N (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли полученное определение эквивалентно исходному? Обозначим новое определение O^*
   - Нет, поскольку для $f(n) = 100n, g(n) = n^2 \to \forall n < 100, O^*$ не будет выполнятся, но будет верно условие O
2. Тот же вопрос про o.
   - Нет, поскольку для $f(n) = n, 2, g(n) = n; 100 \to \forall n < 100, o^*$ не будет выполнятся, но будет верно условие o

№3 Продолжим отношение '$\preceq$' на функциях до отношения на классах эквивалентности по отношению эквивалентности '$\sim$', введённому на практике. Правда ли, что получится отношение *линейного порядка* (то есть $\forall f, g : (f \preceq g) \vee (g \preceq f)$)?

№4 Докажите, или приведите контрпример

1. Докажите, или приведите контрпример:
   (a) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) = \Theta(f(n))$
   (b) $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = o(g(n)) \vee f(n) = \Theta(g(n))$

1. Для доказательства а вспомним определения:
   $g(n) \in o(f(n)) \equiv \forall c > 0 : \exists N : \forall n \geq N : g(n) < c \cdot f(n)$
   $f(n) + g(n) \in \Theta(f(n)) \equiv \exists N, c_1 > 0, c_2 > 0 : \forall n \geq N : c_1 \cdot f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$
   Из них видно что:
   $\forall c_* > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) + g(n) <= f(n) + c_* f(n) = (1 + c_*)f(n) = c_2 f(n)$
   А также:
   $f(n) + g(n) >= f(n) = 1f(n) = c_1 f(n)$
   Следовательно мы доказали оба неравенства из отределения Θ

2. Докажем в обе стороны
   (a) $\Rightarrow$
   $f(n) \in O(g(n)) \equiv \exists N, c > 0 : \forall n \geq N : f(n) \leq c \cdot g(n)$
   $f(n) \in o(g(n)) \equiv \forall c > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) < c \cdot g(n)$
   $f(n) \in \Theta(g(n)) \equiv \exists N, c_1 > 0, c_2 > 0 : \forall n \geq N : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$

№5 Решите рекурренту (найдите точную оценку асимптотики и докажите)

$T(n) = 3T(\sqrt{n}) + \log_2(2)n$ Здесь можно считать, что $T(n \leq 1) = 1$.
Предположим $n = 2^m <=> m = \log_2(n)$
$T(n) = T(2^m) = 3T(2^(m/2)) + m$
$S(m) = 3S(m/2) + m$
Допустим $S(m) = O(m * \log_2(3))$
$S(m) = 3S(m/2) + m <= 3c(m/2)^{\log_2(3)} + m = cm^{\log_2(3)} + m <= (c+1)m^{\log_2(3)}$
Следовательно $T(n) = O(m^(\log 2(3))) = O(\log 2(n)^{log2(3)})$

№6 Заполните табличку и поясните

A	B	$\emptyset$	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\log^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
$\log(n!)$	$\log(n^n)$	$+$	$-$		$-$	$+$

7) $n!$ растет медленнее чем n^n поэтому