

№1 Эквивалентны ли следующие утверждения?

1. $f(n) = \Theta(g(n))$
2. $\exists c, 0 < c < +\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$

Решение:

1. Из утверждения №1 $\Rightarrow \exists c_1 > 0, c_2 > 0, N : \forall n > N \Rightarrow c_1 g(n) < f(n) < c_2 g(n)$
2. Отсюда для отношения $\frac{f(n)}{g(n)}$ получим оценку:
$$c_1 < \frac{f(n)}{g(n)} < c_2$$
3. По условию утверждения №1 c_1, c_2 не обязаны быть равными, поэтому при переходе в пределе отношение $\frac{f(n)}{g(n)}$ не обязательно имеет конечный предел

№2 Дайте ответ для двух случаев $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$?

1. Если в определении O опустить условие про N (т.е. оставить просто $\forall n$), будет ли полученное определение эквивалентно исходному? Обозначим новое определение O^*
 - Нет, поскольку для $f(n) = 100n, g(n) = n^2 \rightarrow \forall n < 100, O^*$ не будет выполняться, но будет верно условие O
2. Тот же вопрос про o .
 - Нет, поскольку для $f(n) = n, 2, g(n) = n; 100 \rightarrow \forall n < 100, o^*$ не будет выполняться, но будет верно условие o

№3 Продолжим отношение ' \preceq ' на функциях до отношения на классах эквивалентности по отношению эквивалентности ' \sim ', введённого на практике. Правда ли, что получится отношение *линейного порядка* (то есть $\forall f, g : (f \preceq g) \vee (g \preceq f)$)?

№4 Докажите, или приведите контрпример

1. Докажите, или приведите контрпример:
 - (a) $g(n) = o(f(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) = \Theta(f(n))$
 - (b) $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = o(g(n)) \vee f(n) = \Theta(g(n))$

1. Для доказательства а вспомним определения:

$$g(n) \in o(f(n)) \equiv \forall c > 0 : \exists N : \forall n \geq N : g(n) < c \cdot f(n)$$

$$f(n) + g(n) \in \Theta(f(n)) \equiv \exists N, c_1 > 0, c_2 > 0 : \forall n \geq N : c_1 \cdot f(n) \leq f(n) + g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$$

Из них видно что:

$$\forall c_* > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) + g(n) \leq f(n) + c_* f(n) = (1 + c_*)f(n) = c_2 f(n)$$

А также:

$$f(n) + g(n) \geq f(n) = 1f(n) = c_1 f(n)$$

Следовательно мы доказали оба неравенства из определения Θ

2. Докажем в обе стороны

(а) \Rightarrow

$$f(n) \in O(g(n)) \equiv \exists N, c > 0 : \forall n \geq N : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$f(n) \in o(g(n)) \equiv \forall c > 0 : \exists N : \forall n \geq N : f(n) < c \cdot g(n)$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \equiv \exists N, c_1 > 0, c_2 > 0 : \forall n \geq N : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

№5 Решите рекурренту (найдите точную оценку асимптотики и докажите)

$$T(n) = 3T(\sqrt{n}) + \log_2(2)n \text{ Здесь можно считать, что } T(n \leq 1) = 1.$$

$$\text{Предположим } n = 2^m \Leftrightarrow m = \log_2(n)$$

$$T(n) = T(2^m) = 3T(2^{m/2}) + m$$

$$S(m) = 3S(m/2) + m$$

$$\text{Допустим } S(m) = O(m * \log_2(3))$$

$$S(m) = 3S(m/2) + m \leq 3c(m/2)^{\log_2(3)} + m = cm^{\log_2(3)} + m \leq (c+1)m^{\log_2(3)}$$

$$\text{Следовательно } T(n) = O(m^{\log_2(3)}) = O(\log_2(n)^{\log_2(3)})$$

№6 Заполните табличку и поясните

A	B	\emptyset	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	+	+	—	—	—
$\log^k n$	n^ϵ					
n^k	c^n					
\sqrt{n}	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
$\log(n!)$	$\log(n^n)$					