# Модели ценообразования опционов на основе стохастических дифференциальных уравнений

Кирилл Захаров
Научный руководитель: доцент, к.ф-м.н., Лебедева Л.Н.

СПбГЭУ

2022

# Постановка задачи

| Авторы | Работы |
|---|---|
| S. Heston (1993) | Стохастическая волатильность |
| L. Grzelak, C. Osterlee (2011) | Стохастическая волатильность + стохастическая процентная ставка |
| L. Teng, M. Gunter, M. Ehrhardt (2015) | Стохастическая корреляция |

**Цель:** Обобщить модель Бейтса со стохастической волатильностью на случай стохастических процентной ставки и корреляции. Найти аналитическое выражение для характеристической функции системы СДУ, применить COS метод для ценообразования. Сделать замену меры для симуляции почти-точного решения.

# Обозначения

Рассмотрим классический вариант европейского опциона

- $S(t)$ - цена базового актива ($x = \log S(t)$)
- $V(t, S)$ - цена опциона в момент времени $t$ на базовый актив $S$
- $K$ - страйк-цена (цена исполнения контракта)
- $T$ - момент экспирации (время исполнения контракта)
- $H(t, S)$ - функция выплаты

$$H(T, S) = \max\{S(T) - K, 0\} \tag{1}$$

- $\tau = T - t$ - длительность до экспирации опциона
- $v(t)$ - стохастическая волатильность
- $\rho(t)$ - стохастическая корреляция между $v(t)$ и $S(t)$
- $r(t)$ - стохастическая процентная ставка

# Обобщение модели

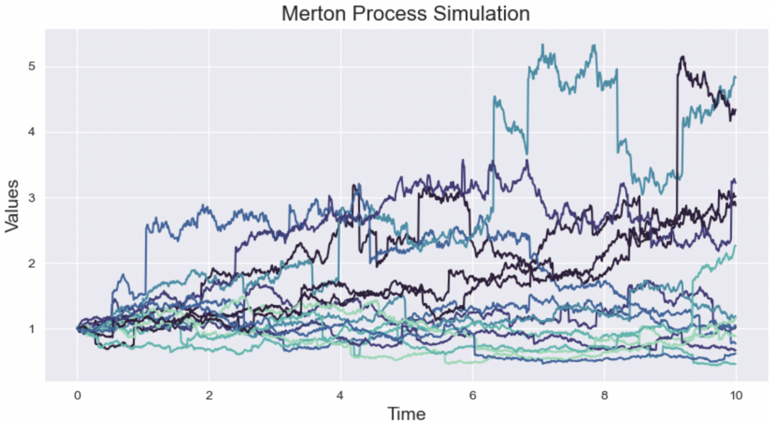
Пусть задано $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$
Процессы $v, r, \rho$ определяются системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dv(t) = k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t) \\ d\rho(t) = k_\rho(\mu_\rho - \rho(t))dt + \sigma_\rho dW_\rho^{\mathbb{Q}}(t) \\ dr(t) = k_r(\mu_r - r(t))dt + \gamma_r\sqrt{r(t)}dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ dx(t) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\right)dt + \sqrt{v(t)}dW_x^{\mathbb{Q}}(t) + JdX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t) \end{cases} \tag{2}$$

$W^{\mathbb{Q}}(t)$ - винеровский процесс по мере $\mathbb{Q}$
$X_{\mathcal{P}}$ - пуассоновский процесс по мере $\mathbb{Q}$
$J \sim \mathcal{N}(\mu_J, \sigma_J)$ - величина скачка

$$\begin{aligned} dW_v dW_\rho &= \rho_{v\rho}dt = 0 \\ dW_v dW_r &= \rho_{vr}dt = 0 \\ dW_\rho dW_r &= \rho_{\rho r}dt = 0 \\ dW_\rho dW_x &= \rho_{\rho x}dt = \rho_4 \\ dW_r dW_x &= \rho_{rx}dt = \rho_5 \\ dW_v dW_x &= \rho(t)dt \end{aligned}$$

# Процесс Мертона



# Ковариационная матрицы

Разложение Холецкого $(4 \times 4)$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \rho(t) & \rho_4 & \rho_5 & \sqrt{1 - \rho^2(t) - \rho_4^2 - \rho_5^2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ковариационная матрица

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}^T = \begin{pmatrix} \gamma^2 v(t) & 0 & 0 & \gamma v(t)\rho(t) \\ 0 & \sigma_\rho^2 & 0 & \sigma_\rho \rho_4 \sqrt{v(t)} \\ 0 & 0 & \gamma_r^2 r(t) & \gamma_r \rho_5 \sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)} \\ \gamma v(t)\rho(t) & \sigma_\rho \rho_4 \sqrt{v(t)} & \gamma_r \rho_5 \sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)} & v(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Необходимо получить $X(t) = (v(t), \rho(t), r(t), x(t))$ в аффинной форме.

Воспользуемся следующей аппроксимацией для аффинизации

$$\gamma v(t) r(t) \approx \gamma \mathbb{E}[v(t)]\rho(t) \tag{5}$$

$$\sigma_\rho \rho_4 \sqrt{v(t)} \approx \sigma_\rho \rho_4 \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}] \tag{6}$$

$$\gamma_r \rho_5 \sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)} \approx \gamma_r \rho_5 \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]\mathbb{E}[\sqrt{r(t)}] \tag{7}$$

**Аппроксимация $\mathbb{E}\sqrt{v(t)}$**

$$\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}] \approx a + be^{-ct}$$

Пусть $V(t, X) \in C^2$; $V(t, X(t)) \equiv \varphi(u, X(t); t, T)$
Тогда (Duffie&Pan&Singleton 2000)

$$\varphi(u, X(t); t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\int_t^T r(z)dz + iuX(T)} \middle| \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= e^{A(u,\tau)+B(u,\tau)x(t)+C(u,\tau)r(t)+D(u,\tau)\rho(t)+E(u,\tau)v(t)} \tag{8}$$

### Многомерная лемма Ито

Рассмотрим $X(t) = \big(X_1(t), ..., X_n(t)\big)^T$
Пусть $g(t, X(t))$ дифференцируема на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
Тогда

$$dg(t, X(t)) = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial X_j} dX_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} dX_i(t) dX_j(t)$$

Применим к системе СДУ многомерную лемму Ито со следующими дифференциалами

$$(dv)^2 = \gamma^2 v(t)dt \qquad (d\rho^2) = \sigma_\rho^2 dt$$

$$(dr)^2 = \gamma_r^2 r(t)dt \qquad (dx^2) = v(t)dt + J^2 dX_{\mathcal{P}}(t)$$

$$dvd\rho = \gamma\sigma_\rho\sqrt{v(t)}\rho_{v\rho}dt = 0 \qquad dvdr = \gamma\gamma_r\sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)}\rho_{vr}dt = 0$$

$$dvdx = \gamma v(t)\rho(t)dt \qquad d\rho dr = \sigma_\rho\gamma_r\sqrt{r(t)}\rho_{\rho r}dt = 0$$

$$d\rho dx = \sigma_\rho\sqrt{v(t)}\rho_4 dt \qquad drdx = \gamma_r\sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)}\rho_5 dt$$

Тогда получим следующее выражение.

$$
\begin{aligned}
dV(t,X) = {} & \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial v}(k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v(t)) + \\
& + \frac{\partial V}{\partial \rho}(k_\rho(\mu_\rho - \rho(t))dt + \sigma_\rho dW_\rho(t)) + \\
& + \frac{\partial V}{\partial r}(k_r(\mu_r - r(t))dt + \gamma_r\sqrt{r(t)}dW_r(t)) + \\
& + \frac{\partial V}{\partial x}\Big(\big(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\big)dt + \sqrt{v(t)}dW_x(t) + JdX_{\mathcal{P}}(t)\Big) + \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\gamma^2 v(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\sigma_\rho^2 dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\gamma_r^2 r(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}v(t)dt + \\
& + \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial x}\gamma v(t)\rho(t)dt + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial x}\sigma_\rho\sqrt{v(t)}\rho_4 dt + \\
& + \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial x}\gamma_r\rho_5\sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}J^2 dX_{\mathcal{P}}(t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

# Обратное уравнение Колмогорова

Так как дисконтированная цена $\frac{V}{M}$ мартингал по мере $\mathbb{Q}$, то раскладывая дифференциал $d\frac{V}{M}$ по лемме Ито получим

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[d\frac{V}{M}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{dV}{M} - r\frac{V}{M}\right] = 0 \tag{10}$$

Обратное уравнение Колмогорова:

$$\begin{aligned} dV(t,X) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial v}(k(\bar{v} - v(t)) + \frac{\partial V}{\partial \rho}(k_\rho(\mu_\rho - \rho(t)) + \frac{\partial V}{\partial r}(k_r(\mu_r - r(t))+ \\ &+ \frac{\partial V}{\partial x}\left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\gamma^2 v(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}\sigma_\rho^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\gamma_r^2 r(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}v(t) + \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial x}\gamma\mathbb{E}[v(t)]\rho(t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial x}\sigma_\rho\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]\rho_4 + \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial x}\gamma_r\rho_5\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]\mathbb{E}[\sqrt{r(t)}] - r(t)V(t,X) + \\ &+ \xi_p\mathbb{E}[V(t,X+J)] - \xi_p V(t,X) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

# Решение обратного уравнения Колмогорова

**Лемма**

Пусть $\forall \tau \geq 0; \forall u \in \mathbb{R}$ задано уравнение Колмогорова (11). Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dB}{d\tau} = 0 \\[2ex] \dfrac{dC}{d\tau} = -k_r C + B + \dfrac{1}{2}\gamma_r^2 C^2 - 1 \\[2ex] \dfrac{dD}{d\tau} = -k_\rho D + \gamma \mathbb{E}[v(t)]BE \\[2ex] \dfrac{dE}{d\tau} = -kE - \dfrac{1}{2}B + \dfrac{1}{2}\gamma^2 E^2 + \dfrac{1}{2}B^2 \\[2ex] \dfrac{dA}{d\tau} = k\bar{v}E + k_\rho \mu_\rho D + k_r \mu_r C - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]B + \dfrac{1}{2}\sigma_\rho^2 D^2 + \\ \quad + \sigma_\rho \rho_4 \mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]BD + \gamma_r \rho_5 \mathbb{E}[\sqrt{r(t)}]\mathbb{E}[\sqrt{v(t)}]BC + \xi_p \mathbb{E}[e^{JB} - 1] \\ B(u,0) = iu;\ C(u,0) = 0;\ D(u,0) = 0;\ E(u,0) = 0;\ A(u,0) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

# Решение обратного уравнения Колмогорова

## Лемма. Продолжение

И Решение задается

$$
\begin{cases}
B(u,\tau) = iu \\
E(u,\tau) = \frac{k-E_1}{\gamma^2}\frac{1-e^{-E_1\tau}}{1-E_2e^{-E_1\tau}} \\
D(u,\tau) = \gamma D_1\Bigg[\frac{(v_0-\bar{v})}{k_\rho+k}e^{k\tau-kT} + \frac{\bar{v}}{k_\rho} + \frac{(\bar{v}-v_0)}{k_\rho+k-l_1}e^{-kT+k\tau-l_1\tau} - \\
\qquad -\frac{\bar{v}}{k_\rho-l_1}e^{-l_1\tau} + e^{-k_\rho\tau}\Big(-\frac{e^{-kT}(v_0-\bar{v})}{k+k_\rho} - \frac{\bar{v}}{k_\rho} + \frac{\bar{v}}{k_\rho-l_1} - \frac{\bar{v}-v_0}{k+k_\rho-l_1}e^{-kT}\Big)\Bigg] \\
C(u,\tau) = \dfrac{k_r + C_1\tan(\frac{1}{2}C_1\tau - \arctan(\frac{k_r}{C_1}))}{\gamma_r^2} \\
A(u,\tau) = -\xi_p\big(e^{\mu_J+\frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1\big)iu\tau + \xi_p\big(e^{\mu_J iu-\frac{1}{2}\sigma_J^2u^2} - 1\big)\tau + k\bar{v}\frac{k-E_1}{\gamma^2}I_1 + \\
\qquad +(k_\rho\mu_\rho + iu\sigma_\rho\rho_4a)I_{21} + iu\sigma_\rho\rho_4bI_{22} + \frac{1}{2}\sigma_\rho^2I_{23} + \\
\qquad +iu\gamma_r\rho_5\Big[maI_{31} + mbI_{32} + naI_{33} + nbI_{34}\Big]
\end{cases}
\tag{13}
$$

# Решение обратного уравнения Колмогорова

## Лемма. Продолжение

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^{\tau}(1 - e^{-l_1 s})ds \\ I_{21} = \int_0^{\tau} D(u,s)ds \\ I_{22} = \int_0^{\tau} e^{-c(T-s)}D(u,s)ds \\ I_{23} = \int_0^{\tau} D^2(u,s)ds \\ I_{31} = \int_0^{\tau} C(u,s)ds \\ I_{32} = \int_0^{\tau} e^{-c(T-s)}C(u,s)ds \\ I_{33} = \int_0^{\tau} e^{-o(T-s)}C(u,s)ds \\ I_{34} = \int_0^{\tau} e^{(-o-c)(T-s)}C(u,s)ds \\ E_1 = \sqrt{k^2 + \gamma^2(u^2 + iu)} \\ E_2 = \frac{k-E_1}{k+E_1} \\ C_1 = \sqrt{-k_r^2 - 2\gamma_r^2 + 2iu\gamma_r^2} \end{cases} \tag{14}$$

# Почти-точное решение ситемы СДУ

$$\begin{cases} dv(t) = k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_v^{\mathbb{Q}}(t) \\ d\rho(t) = k_\rho(\mu_\rho - \rho(t))dt + \sigma_\rho d\tilde{W}_\rho^{\mathbb{Q}}(t) \\ dr(t) = k_r(\mu_r - r(t))dt + \gamma_r\sqrt{r(t)}d\tilde{W}_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ dx(t) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\right)dt + (\rho(t)\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_v^{\mathbb{Q}}(t) + \\ \qquad +\rho_4\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_\rho^{\mathbb{Q}}(t) + \rho_5\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_r^{\mathbb{Q}}(t) + \\ \qquad +\sqrt{v(t)}\sqrt{1 - \rho^2(t) - \rho_4^2 - \rho_5^2}d\tilde{W}_x^{\mathbb{Q}}(t)) + JdX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t) \end{cases} \tag{15}$$

Применим дискретизацию по Эйлеру

$$v_{i+1} = v_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}d\tilde{W}_v(t)$$

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_\rho(\mu_\rho - \rho(t))dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma_\rho d\tilde{W}_\rho(t)$$

$$r_{i+1} = r_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_r(\mu_r - r(t))dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_r\sqrt{r(t)}d\tilde{W}_r(t)$$

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\right)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \rho(t)\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_v(t) +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \rho_4\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_\rho(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \rho_5\sqrt{v(t)}d\tilde{W}_r(t) +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{v(t)}\sqrt{1 - \rho^2(t) - \rho_4^2 - \rho_5^2}d\tilde{W}_x(t) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} JdX_{\mathcal{P}}(t) \tag{16}$$

# Почти-точное решение ситемы СДУ

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} = x_i + \Big(r_i - \frac{1}{2}v_i - \xi_p \mathbb{E}[e^J - 1]\Big)\Delta t + \frac{\rho_i}{\gamma}\big(v_{i+1} - v_i - k(\bar{v} - v_i)\Delta t\big) + \\
+ \rho_4 \sqrt{v_i}\frac{1}{\sigma_\rho}\big(\rho_{i+1} - \rho_i - k_\rho(\mu_\rho - \rho_i)\Delta t\big) + \rho_5\sqrt{v_i}\frac{1}{\gamma_r\sqrt{r_i}}\big(r_{i+1} - r_i - \\
- k_r(\mu_r - r_i)\Delta t\big) + \sqrt{v_i}\sqrt{1 - \rho_i^2 - \rho_4^2 - \rho_5^2}\sqrt{\Delta t}Z_x + JZ_{\mathcal{P}}(\xi_p \Delta t)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
v_{i+1} = \alpha(t_{i+1}, t_i)\chi^2(\delta, \beta(t_{i+1}, t_i)) \tag{18}
$$

$$
\alpha(t_{i+1}, t_i) = \frac{\gamma}{4k}\big(1 - e^{-k(t_{i+1} - t_i)}\big); \delta = \frac{4k\bar{v}}{\gamma^2} \tag{19}
$$

$$
\beta(t_{i+1}, t_i) = \frac{4ke^{-k(t_{i+1} - t_i)}}{\gamma^2(1 - e^{-k(t_{i+1}, t_i)})}v_i \tag{20}
$$

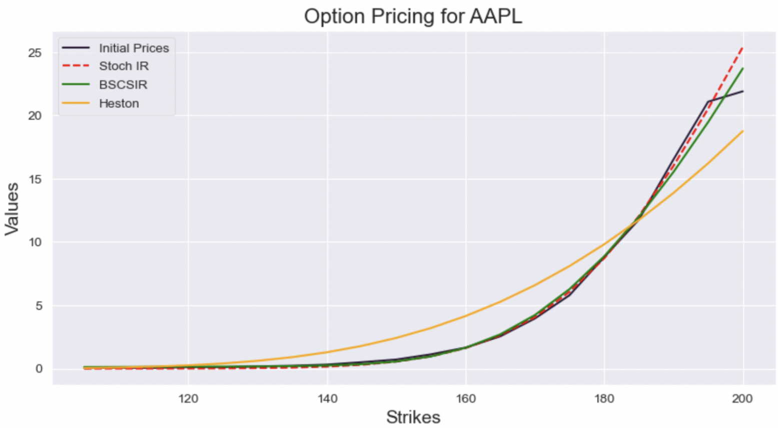
$$
r_{i+1} = \alpha_r(t_{i+1}, t_i)\chi^2(\delta_r, \beta_r(t_{i+1}, t_i)) \tag{21}
$$

$$
\rho_{i+1} = \rho_i e^{-k_\rho \Delta t} + \mu_\rho(1 - e^{-k_\rho}\Delta t) + \sigma_\rho\sqrt{\frac{1 - e^{-2k_\rho}\Delta t}{2k_\rho}}Z_\rho \tag{22}
$$

$$
\tilde{W}(t_{i+1}) - \tilde{W}(t_i) \overset{d}{=} \sqrt{\Delta t}Z_x
$$

$$
X_{\mathcal{P}}(t_{i+1}) - X_{\mathcal{P}}(t_i) \overset{d}{=} Poiss(\xi_p \Delta t)
$$

# Калибровка модели




| | Heston | HSIR | BSCSIR |
|---|---|---|---|
| $MSE$ | 3.9 | 0.65 | 0.34 |

# Преобразование меры

$$V(t_0, X) = \int_\Omega \frac{H(T,X)}{M(T)} d\mathbb{Q} = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{M(T)} H(T,X) | \mathcal{F}(t_0)\right] \tag{23}$$

$P(t,T)$ - цена облигации с нулевым купоном в момент времени $t$ и длительностью $T$

Для CIR процесса

$$P(t,T) = e^{\tilde{A} - \tilde{B} r(t)} \tag{24}$$

$$\tilde{B} = \frac{2(e^{p\tau} - 1)}{2p + (e^{p\tau} - 1)(p + k_r)} \tag{25}$$

$$\tilde{A} = \frac{2k_r\mu_r}{\gamma_r^2} \log\left(\frac{2pe^{(p+k_r)\tau/2}}{2p + (e^{p\tau} - 1)(p + k_r)}\right) \tag{26}$$

$$p = \sqrt{k_r^2 + 2\gamma_r^2}$$

# Преобразование меры

Производная Радона-Никодима

$$\lambda_{\mathbb{Q}}^{T}(t) = \left.\frac{d\mathbb{Q}^{T}}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}(t)} = \frac{P(t,T)M(t_0)}{P(t_0,T)M(t)} \tag{27}$$

$$d\lambda_{\mathbb{Q}}^{T}(t) = \frac{M(t_0)}{P(t_0,T)}\left[\frac{dP(t,T)}{M(t)} - \frac{P(t,T)}{M^2(t)}dM(t)\right] \tag{28}$$

Динамика $P(t,T)$

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= r(t)P(t,T)dt - P(t,T)\left(\int_t^T \eta(z)dz\right)dW^{\mathbb{Q}}(t) = \\ &= r(t)P(t,T)dt + \gamma_r \tilde{B}(t,T)\sqrt{r(t)}P(t,T)dW^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\int_t^T \eta(z)dz = -\gamma_r \tilde{B}(t,T)\sqrt{r(t)} \tag{30}$$

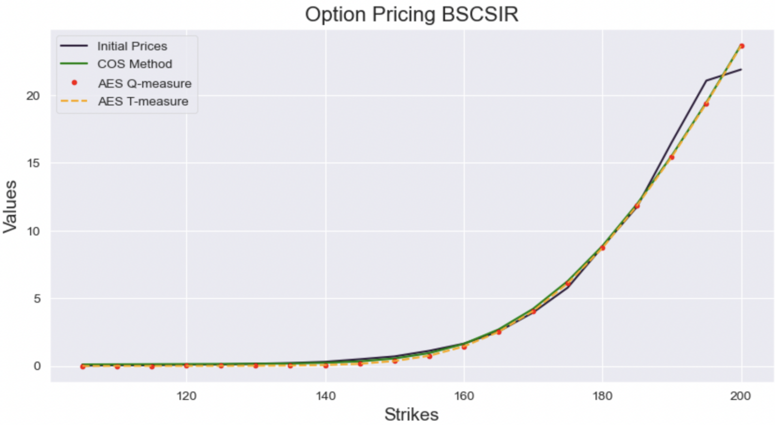
# Ценообразование по мере $T$

$$\frac{d\lambda_{\mathbb{Q}}^{T}(t)}{\lambda_{\mathbb{Q}}^{T}(t)} = -\left(\int_t^T \eta(z)dz\right)dW^{\mathbb{Q}}(t) \tag{31}$$

Тогда преобразование меры определяется

$$dW^T(t) = \left(\int_t^T \eta(z)dz\right)dt + dW^{\mathbb{Q}}(t) \tag{32}$$

$$\begin{aligned} V(t_0, X) = \int_\Omega \frac{H(T,X)}{M(T)} P(t_0,T) M(T) d\mathbb{Q}^T = \\ = P(t_0,T) E^T[H(T,X)|\mathcal{F}(t_0)] \end{aligned} \tag{33}$$




| $1/M(T)$ | $P(t_0, T)$ |
|---|---|
| 0.979067 | 0.979068 |

$$\begin{cases} dv(t) = k(\bar{v} - v(t))dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v^{\mathbb{Q}}(t) \\ d\rho(t) = -\frac{1}{\theta}\rho(t)dt + \sqrt{\frac{1-\rho(t)^2}{\theta(\delta+1)}}dW_\rho^{\mathbb{Q}}(t) \\ dr(t) = k_r(\mu_r - r(t))dt + \gamma_r\sqrt{r(t)}dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ dx(t) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v(t) - \xi_p\mathbb{E}[e^J - 1]\right)dt + \sqrt{v(t)}dW_x^{\mathbb{Q}}(t) + JdX_{\mathcal{P}}^{\mathbb{Q}}(t) \end{cases} \tag{34}$$

### Аппроксимация $\mathbb{E}\sqrt{1-\rho(t)^2}$

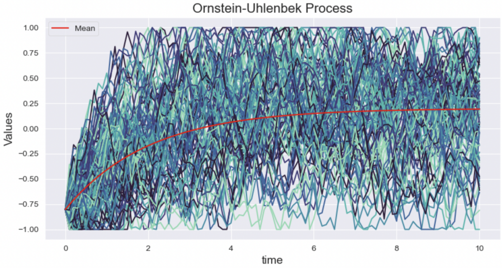
$$\mathbb{E}[\sqrt{1-\rho(t)^2}] \approx ae^{-bt} + c$$

$$c = \sqrt{1 - \frac{1}{2(\delta+1)+1}} \qquad b = -\log\frac{\Lambda_3(1) - c}{a}$$

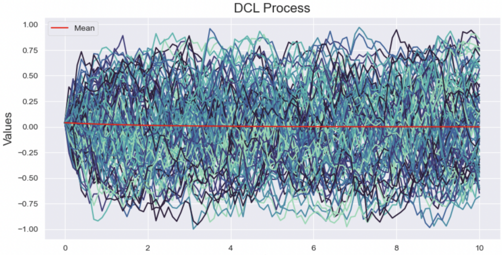
$$a = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{2(\delta+1)+1} + (\rho_0 - \frac{1}{2(\delta+1)+1}) - \rho_0^4}{1-\rho_0^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2(\delta+1)+1}}$$

# Сравнение корреляционных процессов

Процесс Орнштейна-Уленбека




Процесс DCL



Дельта-метод

$$f(X) \approx f(\mathbb{E}[X]) + (X - \mathbb{E}[X])\frac{\partial f}{\partial X}(\mathbb{E}[X]) \tag{35}$$

Точное выражение

$$\mathbb{E}[\sqrt{1-\rho(t)^2}] = \sqrt{1 - \frac{\mathbb{E}[\rho(t)^2] - \mathbb{E}[\rho(t)]^2}{1 - \mathbb{E}[\rho(t)]^2}} \tag{36}$$

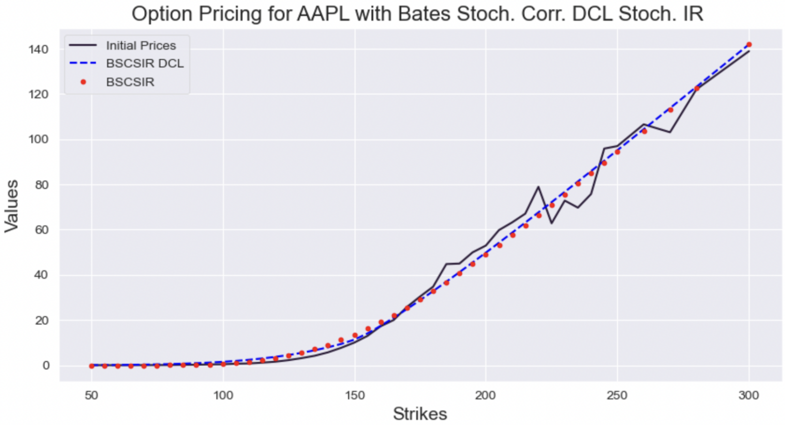
Система для поиска $\mathbb{E}[\rho(t)^2]$

$$\begin{aligned} m_i^{'}(t) &= -\left(\frac{i}{\theta} + \frac{i(i-1)}{2\theta(\delta+1)}\right)m_i(t) + \frac{i(i-1)}{2\theta(\delta+1)}m_{i-2}(t) \\ m_1(t) &= e^{-t/\theta}\rho_0 \\ m_0(t) &= 1 \end{aligned} \tag{37}$$

# Решение системы

$$I_2 = \frac{1}{2\theta(\delta+1)}\Bigg[\Big(1 - \frac{1}{2(\delta+1)+1}\Big)\int_0^\tau D^2(u,s)ds + \\
+ e^{-2/\theta}\Big(\frac{1}{2(\delta+1)+1} - \rho_0\Big)\int_0^\tau e^{-\frac{1}{\theta(\delta+1)}(T-s)} D^2(u,s)ds\Bigg] + \\
+ \rho_4 iu \frac{1}{\sqrt{\theta(\delta+1)}}\Bigg[a a_\rho \int_0^\tau e^{-b_\rho (T-s)} D(u,s)ds + a c_\rho \int_0^\tau D(u,s)ds + \\
+ b a_\rho \int_0^\tau e^{(-c-b_\rho)(T-s)} D(u,s)ds + b c_\rho \int_0^\tau e^{c(T-s)} D(u,s)ds\Bigg] \tag{38}$$


| | Heston | HSIR | BSCSIR | BSCSIR DCL |
|---|---|---|---|---|
| $MSE$ | 21.349 | 46.761 | 20.129 | 18.899 |




| | Heston | HSIR | BSCSIR | BSCSIR DCL |
|---|---|---|---|---|
| $MSE$ | 21.349 | 46.761 | 20.129 | 18.899 |

# Выводы

1. Найдено аналитическое выражение для характеристической функции системы СДУ (2)
2. Найдено выражение для цены опциона через COS метод системы (2)
3. Найдено почти-точное решение системы СДУ (2) по мере $\mathbb{Q}$
4. Произведена замена меры в системе СДУ (2) и найдено почти-точное решение по мере $\mathbb{Q}^T$
5. Найдено решение системы (2) с корреляционным процессом DCL
6. Выполнена калибровка моделей и анализ результатов

# Список использованных источников


1. S. Watanabe, N. Ikeda. Stochastic Differential Equations
2. А.Н. Ширяев. Случайные процессы
3. А.Н. Ширяев, Р.Ш. Липцер. Теория мартингалов
4. Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения
5. L. Grzelak, C. Oosterlee. Computational Finance
6. L. Grzelak, C. Oosterlee. On the Heston Model with Stochastic Interest Rates
7. L. Teng, M. Gunter, M. Ehrhardt. On the Heston Model with Stochastic Correlation