Derivatives Modelling

Kirill Zakharov

SPbSUE

2022

Литература

1. S.Watanabe, N.Ikeda. Stochastic Differential Equations
2. А.Н. Ширяев. Случайные процессы
3. А.Н. Ширяев, Р.Ш. Липцер. Теория мартингалов
4. Б. Оксендаль. Стохастические дифференциальные уравнения
5. L.Grzelak, C. Oosterlee. Computational Finance

Виды деривативов

1. Фьючерсы и форварды (в контанго, в бэквардации)
2. Опционы Call&Put (европейские, американские, валютные)
3. Экзотические опционы (азиатские, русские, барьерные, баскет, бинарные, свопционы)
4. Свопы (процентный своп)

Виды деривативов

1. Фьючерсы и форварды (в контанго, в бэквардации)
2. Опционы Call&Put (европейские, американские, валютные)
3. Экзотические опционы (азиатские, русские, барьерные, баскет, бинарные, свопционы)
4. Свопы (процентный своп)

Опционы:
K - страйк цена
T - дата экспирации
r - безрисковая процентная ставка
$V(t, S)$ - цена опциона
$H(t, S)$ - функция выплаты

Основные подходы к ценообразованию опционов

1. Точные методы
2. Дискретизации на основе разложения в ряд Ито-Тейлора
3. Почти-точные решения

Модель Блэка-Шоулза

Разработана в 1973 г.
Предпоссылки:

1. Отсутсвие арбитража
2. По базовому активу не выплачиваются дивиденды
3. Известна краткосрочная постоянная процентная ставка
4. Каждый участник рынка может получать суду по постоянной процентной ставке r
5. Базовый актив торгуется непрерывно и подчиняется GBM
6. Нет затрат связанных с продажей и покупкой активов
7. Отсутсвуют ограничения на короткие позиции

Геометрическое броуновское движение с $S(t_0) = S_0$

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW^{\mathbb{P}}(t) \tag{1}$$

Пусть $V(t, S) \in C^2$ - цена опциона
По лемме Ито:

$$dV(t,S) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 = \tag{2}$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW^{\mathbb{P}}(t) \tag{3}$$

Точное решение модели Блэка-Шоулза

Геометрическое броуновское движение с $S(t_0) = S_0$

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW^{\mathbb{P}}(t) \tag{1}$$

Пусть $V(t, S) \in C^2$ - цена опциона
По лемме Ито:

$$dV(t,S) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 = \tag{2}$$

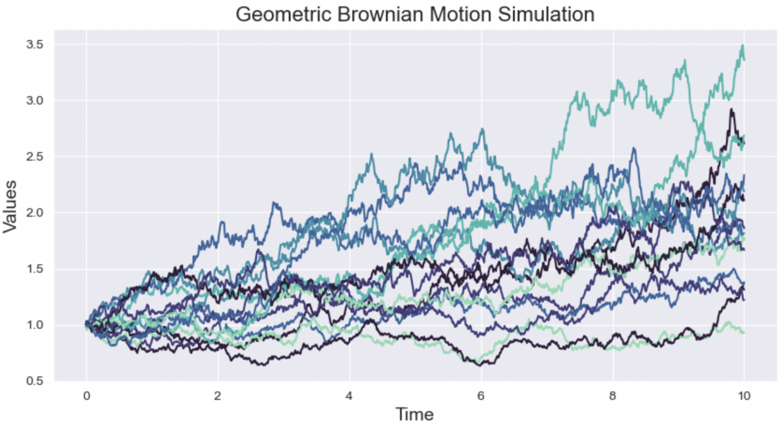
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW^{\mathbb{P}}(t) \tag{3}$$

Далее сформируем дельта-нейтральный портфель:

$$\Pi(t, S(t)) = V(t, S(t)) - \Delta S(t) \tag{4}$$

Пусть $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$

$$d\Pi = dV - \Delta dS = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \tag{5}$$


Geometric Brownian Motion Simulation
Values
Time
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
2
4
6
8
10

Точное решение модели Блэка-Шоулза

В среднем портфель должен расти, не меньше чем вклад

$$d\Pi = r\Pi dt \Rightarrow d\Pi = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt \tag{6}$$

Тогда получим обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma^2 S^2 \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \tag{7}$$

Точное решение модели Блэка-Шоулза

По свойству мартингалов

$$\frac{\partial V(t_0, S)}{M(t_0)} = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\partial V(T, S)}{M(T)} \;\middle|\mathcal{F}(t_0)\right] \tag{8}$$

$$M(t_0) = 1$$

Для этого

$$d\left(\frac{V}{M}\right) = \frac{1}{M}dV - r\frac{V}{M}dt \tag{9}$$

Результат теоремы Феймана-Каца ($\tau = T - t$)

$$V(t, S) = e^{-r\tau}E^{\mathbb{Q}}\left[H(T, S) \;\middle|\mathcal{F}(t_0)\right] \tag{10}$$

$H(T, S)$ - функция выплаты в момент экспирации опциона

Калибровка

Option Pricing
Black-Scholes
COS Method
Values
55
50
45
40
35
30
25
20
80
100
120
140
160
180
200
Strikes

Обобщения моделей

1. Модели стохастической волатильности (Хестон 1993, Холл-Уайт 1985)
2. Модели стохастической волатильности и стохастической процентной ставкой (Lech Grzelak & Cornelis Oosterlee 2011)
3. Модели стохастической волатильности и стохастической корреляции (Long Teng & Matthias Ehrhardt & Michael Gunther 2015)