

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра систем штучного інтелекту



Лабораторна робота №3  
з курсу “Дискретна математика ”

Виконав:  
ст. гр. КН-110  
Петров Кирил

Викладач:  
Мельникова Н.І.

Львів – 2018

**Тема:** Побудова матриці бінарного відношення

**Мета роботи:** набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

## ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

**Декартів добуток** множин  $A$  і  $B$  (позначається  $A \times B$ ) – це множина всіх упорядкованих пар

елементів  $(a, b)$ , де  $a \in A$ ,  $b \in B$ . При цьому вважається, що  $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$  тоді і тільки тоді, коли  $a_1 = a_2$ ,  
 $b_1 = b_2$ .

Потужність декартова добутку дорівнює  $A \times B = A \times B$ .

Приклад. Довести тотожність  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

Розв'язання.

Нехай  $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Leftrightarrow$

$(x, y) \in (A \times B) \& (x, y) \in (C \times D) \Leftrightarrow$

$(x \in A \& y \in B) \& (x \in C \& y \in D) \Leftrightarrow$

$(x \in A \& x \in C) \& (y \in B \& y \in D) \Leftrightarrow$

$(x \in A \cap C) \& (y \in B \cap D) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

**Бінарним відношенням**  $R$  називається підмножина декартового добутку  $A \times B$  (тобто  $R \subset A \times B$ ).

Якщо пара  $(a, b)$  належить відношенню  $R$ , то пишуть

$(a, b) \in R$ , або  $aRb$ .

**Областю визначення** бінарного відношення  $R \subset X \times Y$  називається множина  $\{x \in X \mid \exists y \in Y, (x, y) \in R\}$ .

**областю значень** – множина  $\{y \in Y \mid \exists x \in X, (x, y) \in R\}$  ( $\exists$  – існує).

Для скінчених множин бінарне відношення  $R \subset A \times B$  зручно задавати за допомогою **матриці**

**відношення**  $R_{m \times n} = (r_{ij})$ , де  $m = |A|$ , а  $n = |B|$ .

Види бінарних відношень.

Нехай задано бінарне відношення  $R$  на множині  $A$ :  $R \subseteq A \times A = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A\}$ .

1. Бінарне відношення  $R$  на множині  $A$  називається **рефлексивним**, якщо для будь якого  $a \in A$

виконується  $aRa$ , тобто  $(a, a) \in R$ . Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається

з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у кожній вершині.

2. Бінарне відношення  $R$  на множині  $A$  називається **антирефлексивним**, якщо для будь якого  $a$

$\in A$  не виконується  $aRa$ , тобто  $(a,a) \notin R$ . Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення

складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.

3. Бінарне відношення  $R$  на множині  $A$  називається **симетричним**, якщо для будь яких  $a,b \in A$  з

$aRb$  слідує  $bRa$ , тобто якщо  $(a,b) \in R$  то і  $(b,a) \in R$ . Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.

4. Бінарне відношення  $R$  на множині  $A$  називається **антисиметричним**, якщо для будь яких

$a,b \in A$  з  $aRb$  та  $bRa$  слідує що  $a = b$ . Тобто якщо  $(a,b) \in R$  і  $(b,a) \in R$ , то  $a = b$ . Матриця

антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях

по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються

тільки однією напрямною дугою.

3

5. Бінарне відношення  $R$  на множині  $A$  називається **транзитивним**, якщо для будь яких  $a, b, c \in$

$A$  з  $aRb$  та  $bRc$  слідує, що  $aRc$ . Тобто якщо  $(a,b) \in R$  і  $(b,c) \in R$ , то  $(a,c) \in R$ .

Матриця транзитивного

відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці  $\sigma_{ij} = 1$  та  $\sigma_{jm} = 1$ , то обов'язково  $\sigma_{im} = 1$ .

Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення  $R$  на множині  $A$  називається **антитранзитивним**, якщо для будь яких  $a,$

$b, c \in A$  з  $aRb$  та  $bRc$  слідує що не виконується  $aRc$ . Тобто якщо  $(a, b) \in R$  і  $(b, c) \in R$ , то  $(a, c) \notin R$ .

Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці  $\sigma_{ij} = 1$  та

$\sigma_{jm} = 1$ , то обов'язково  $\sigma_{im} = 0$ . Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами,

наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

#### Варіант 4

1. Чи є вірною рівність:  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$  ?

Нехай  $(x,y) \in (A \cap B) \times C \rightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$  закон дистрибутивності

Нехай  $(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \rightarrow (x,y) \in (A \cap B) \times C$  зворотній закон дистрибутивності

Отже  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

2. Знайти матрицю відношення  $R \subset M \times 2^M$ :

$R = \{ (x, y) \mid x \in M \text{ \& } y \subset M \text{ \& } |y| = |x| \}$ , де  $M = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ \& } |x| \leq 1\}$ ,  
 $\mathbb{Z}$  - множина цілих чисел.

$x \in M = \{-1, 0, 1\}$

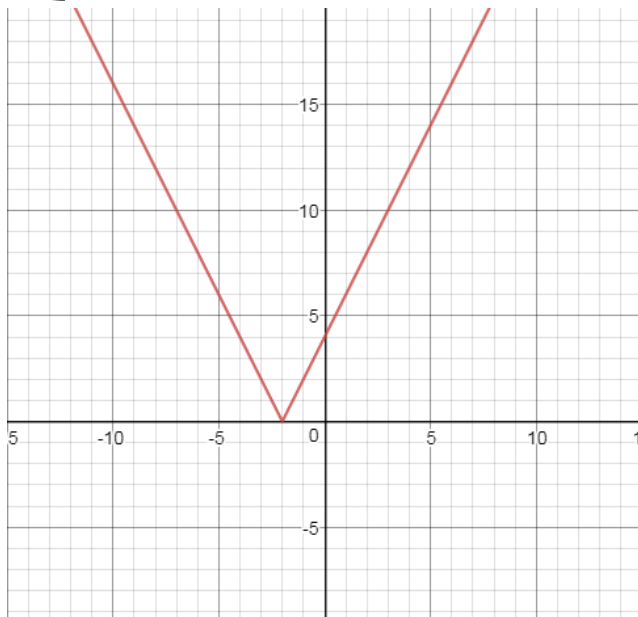
x,y	$\emptyset$	-1	0	1	$\{-1,0\}$	$\{0,1\}$	$\{-1,1\}$	$\{-1,0,1\}$
1	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
-1	0	1	1	1	0	0	0	0

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Зобразити відношення графічно:

3.  $\alpha \{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ \& } |4 + 2x| = y \}$ , де  $\mathbb{R}$  – множина дійсних чисел.

$$\begin{cases} y=4+2x, & 4+2x \geq 0, & x \geq -2 \\ y=-4-2x, & 4+2x < 0, & x < -2 \end{cases}$$



$$D(\alpha) = (-\infty; +\infty) \quad E(\alpha) = [0; +\infty)$$

4. Маємо бінарне відношення  $R \subset A \times A$ , де  $A = \{a, b, c, d, e\}$ , яке задане своєю матрицею:

$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Перевірити чи є дане відношення}$$

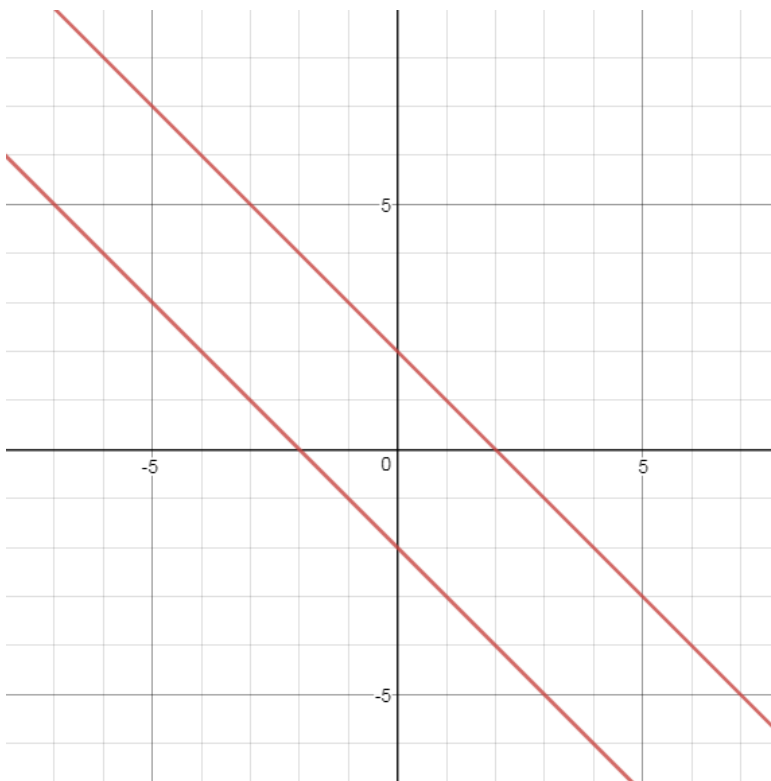
рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

- 1) Не рефлексивне, не антирефлексивне, головна діагональ не складається не з одиниць, не з нулів.
- 2) Не симетричне, так наприклад:  $a_{24} \neq a_{42}$  або  $a_{45} \neq a_{54}$ .
- 3) Транзитивне  $a_{45} = a_{55} = 1$ , то  $a_{45} = 1$ .
- 4) Не антисиметричне так як  $a_{12} = a_{21}$ .

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \& \ (x+y)^2 = 4\}$$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-2 \end{cases} \begin{cases} y=2-x, \ x+y \geq 0 \\ y=-2-x, \ x+y < 0 \end{cases}$$



Функціональне на проміжку  $(\emptyset)$ , а бієктивне  $(\emptyset)$ .

**Завдання №2.** Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення  $\rho \subset A \times B$ ,

заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці відношення. Перевірити програмно якого типу є задане відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів.

$\rho = \{(a, b) \mid a \in A \& b \in B \& (2a + 1) < b\}$ ;

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <cs50.h>
3 #include <math.h>
4 int sum(n)
5 {
6     int g=n;
7     int sum=0;
8     int b=n;
9     for(int i=0;i<g-1;i++)
10 {
11
12     b--;
13     sum+=b;
14 }
15 return sum;
16 }
17
18 int main()
19 {
20     //zapros i vvod 2 mnozhin
21     printf("Put the amount of array's a elements: ");
22     int n = GetInt();
23     int a[n];
24     printf("Put the amount of array's b elements: ");
25     int x = GetInt();
26     int b[x];
27     for(int i=0;i<n;i++)
28     {
29         printf("a[%d]=",i);
30         scanf("%d", &a[i]);
31     }
32
33
34     for(int i=0;i<x;i++)
35     {
36         printf("b[%d]=",i);
37         scanf("%d", &b[i]);
38     }
```

```

39 //matryx
40 int A[n][x];
41 for(int i=0; i<n; i++)
42 {
43     for(int j=0; j<x; j++)
44     {
45         if((2*a[i]+1)<b[j])
46         {
47             A[i][j]=1;
48         }
49         else
50         {
51             A[i][j]=0;
52         }
53     }
54 }
55 }
56 //vivodimo matrix(massiv A)
57 for(int i=0; i<n; i++)
58 {
59     for(int j=0; j<x; j++)
60     {
61         printf("%d ", A[i][j]);
62     }
63     printf("\n");
64 }
65 //type of matrix
66 //reflex
67 int m=0;
68 for(int i=0; i<n; i++){
69     if(A[i][i]==1){
70         m++;
71     }
72 }
73 if(m==n){
74     printf("Reflex\n");
75 }
76
77 //antireflex
78
79 int c=0;
80 for(int i=0; i<n; i++){
81     if(A[i][i]==0){
82         c++;
83     }
84 }
85 if(c==n){
86     printf("ANTIreflex\n");
87 }
88

```

```

89 //Symetry
90
91 int z=0;
92 for(int i=0;i<n;i++)
93 {
94     for(int j=1;j<x;j++)
95     {
96         if(A[i][j]==A[j][i])
97         {
98             z++;
99         }
100     j++;
101 }
102 }
103 if(z==sum(n))
104 {
105 printf("Symetry\n");
106 else
107 printf("ANTIsymetry\n");
108 }
109
110 //transitivity
111 int amount_of_tranz = 0;
112 for(int i=0; i<n-1;i++)
113 {
114     for(int j=0;j<x;j++)
115     {
116         if(A[i][j]==1)
117         {
118             for(int k=0;k<x;k++)
119             {
120
121                 if(A[j][k]==1 && A[i][k]==1)
122                 {
123                     amount_of_tranz++;
124                 }
125
126
127
128             }
129         }
130     }
131 }
132
133 if (amount_of_tranz >=1)
134 printf("Transitivity\n");

```



```

136 //ANTItransitivity
137
138 int amount_of_antitransz = 0;
139 for(int i=0; i<n-1;i++)
140 {
141     for(int j=0;j<x;j++)
142     {
143         if(A[i][j]==1)
144         {
145             for(int k=0;k<x;k++)
146             {
147
148                 if(A[j][k]==1 && A[i][k]==1)
149                 {
150                     amount_of_antitransz++;
151                 }
152
153
154
155             }
156         }
157     }
158 }
159
160 if (amount_of_antitransz >=1)
161 printf("ANTItransitivity\n");
162
163 return 0;
164 }
165

```

```

Put the amount of array's a elements: 5
Put the amount of array's b elements: 5
a[0]=1
a[1]=2
a[2]=3
a[3]=4
a[4]=5
b[0]=2
b[1]=3
b[2]=4
b[3]=5
b[4]=6
0 0 1 1 1
0 0 0 0 1
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
ANTIreflex
ANTIsymetry

```

```
Put the amount of array's a elements: 3
Put the amount of array's b elements: 3
a[0]=2
a[1]=3
a[2]=6
b[0]=4
b[1]=7
b[2]=8
0 1 1
0 0 1
0 0 0
ANTIreflex
ANTIsymetry
Transitivity
```

```
Put the amount of array's a elements: 6
Put the amount of array's b elements: 6
a[0]=2
a[1]=5
a[2]=73
a[3]=8
a[4]=5
a[5]=0
b[0]=2
b[1]=7
b[2]=0
b[3]=
6
b[4]=5
b[5]=4
0 1 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
1 1 0 1 1 1
ANTIsymetry
```

Висновок: ми набули практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.