厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷答案

______学院______系______年级______专业

试卷类型:(理工类 A 卷)　　　　考试时间:2021.11.7

一、填空题:(每小题 4 分，共 24 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n-1}{2n})^{4n}=\underline{e^{-2}}$ 。

2. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\underline{\quad 0 \quad}$。

3. 设 $y=\ln|\csc x-\cot x|$，则 $\mathrm{d}y=\underline{\csc x\,\mathrm{d}x}$。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(1)=f(1)=2$， $f'(2)=3$，则 $y=f(f(x))$ 在 $x=1$ 处的导数为$\underline{\quad 6 \quad}$。

5. 设 $y=x\cdot\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$， 则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{x=0}=\underline{-\frac{11}{72}\sqrt{6}}$。

6. 设 $f(x)=(x-1)^3(x-2)(x-3)$，则方程 $f'(x)=0$ 有$\underline{\quad 3 \quad}$个不相等的实数根。

二、求下列函数极限(每小题 8 分，共 24 分):

1. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$;

解: $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$ (**2 分**)

$=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ (**2 分**) $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ (**2 分**)

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$ (**2 分**)

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$;

解法一: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(e^{(x-1)\ln x}-1)}{1-x+\ln x}$ (**1 分**) $=\lim\limits_{x\to 1}x\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$ (**2 分**)

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln(1+x-1)}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{1-x+\ln x}$ (**2 分**) $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{-1+1/x}$ (**2 分**) $=\lim\limits_{x\to 1}(-2x)=-2$ (**1 分**)

解法二: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{-1+1/x}$ (**2 分**) $=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{x-1}$ (**2 分**)

$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{1}$ （**2 分**） $=-2$ （**2 分**）

3. $\lim\limits_{x\to 0}x[\dfrac{1}{x}]$。

解：注意到当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{1}{x}-1<[\dfrac{1}{x}]\leq\dfrac{1}{x}$。（**2 分**）

因此，当 $x>0$ 时，$1-x<x[\dfrac{1}{x}]\leq 1$；当 $x<0$ 时，$1-x>x[\dfrac{1}{x}]\geq 1$。（**2 分**）

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$，（**1 分**）所以由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to 0^+}x[\dfrac{1}{x}]=1=\lim\limits_{x\to 0^-}x[\dfrac{1}{x}]$。（**2 分**）

故 $\lim\limits_{x\to 0}x[\dfrac{1}{x}]=1$。（**1 分**）

三、（本题 8 分）设方程 $y-x-\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求此隐函数的一阶导数和二阶导数。

解：方程 $y-x-\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 两边对 x 求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1-\dfrac{1}{2}\cos y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，（**2 分**）解得

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2}{2-\cos y}$，（**2 分**）继续两边对对 x 求导, 得

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\dfrac{2}{2-\cos y})\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ （**2 分**） $=\dfrac{-2\sin y}{(2-\cos y)^2}\cdot\dfrac{2}{2-\cos y}=\dfrac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}$。（**2 分**）

四、（本题 10 分）已知笛卡尔叶形线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}\text{，其中 } a>0 \text{ 为常数。}$$

求由此参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 在 $t=1$ 处的一阶导数和二阶导数。

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{6at(1+t^3)-3at^2\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1+t^3)-3at\cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}=\dfrac{2t-t^4}{1-2t^3}$。（**3 分**）

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{2t-t^4}{1-2t^3})\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{(2-4t^3)(1-2t^3)-(2t-t^4)(-6t^2)}{(1-2t^3)^2}\cdot\frac{(1+t^3)^2}{3a(1+t^3)-3at\cdot 3t^2}$$

$=\dfrac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}$。（**3 分**）

$\therefore \frac{dy}{dx}|_{t=1}=\frac{2-1}{1-2}=-1$，（**2 分**）$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}=\frac{2\cdot 2^4}{3a(1-2)^3}=-\frac{32}{3a}$。（**2 分**）

五、（本题 10 分）设数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$。证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值。

证: 根据题意，有$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n=-(x_n-1)^2+1$。由归纳假设得$0<x_n<1$。（**2 分**）

又$x_{n+1}-x_n=x_n-x_n^2=x_n(1-x_n)>0,$ 因此$\{x_n\}$为单调增加数列，且$\frac{1}{2}\le x_n\le 1$（单调性也可由以下给出：令$f(x)=-x^2+2x$，$x\in(0,1)$，则$f(x)$在$(0,1)$为单调增加函数，又因为$x_2=\frac{3}{4}>\frac{1}{2}=x_1$，故$\{x_n\}$为单调增加数列）。（**3 分**）

由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。（**1 分**）令$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则由极限的保号性，知$\frac{1}{2}\le a\le 1$。（**2 分**）由$x_{n+1}=2x_n-x_n^2$两边取极限，有$a=-a^2+2a$，解得$a=0$（舍去），$a=1$。因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。（**2 分**）

六、（本题 8 分）已知函数$f(x)$在$x=0$处连续，且满足$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2})=2$，

证明: $f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$。

证： 因为$f(x)$在$x=0$处连续，所以$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。（**1 分**）

又由$2=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}}{x}$，得

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-1-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x})=\lim_{x\to 0}[(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2})\cdot x]=\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2})\cdot\lim_{x\to 0}x$$

$=2\cdot 0=0$。（**1 分**）

因此，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-1-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}+(1+\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x})]$

$$=\lim_{x\to 0}(f(x)-1-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x})+1+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=0+1+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{x}=2$$ （**2 分**）。

进一步有，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}+(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}-\frac{2}{x})]$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2}\right)+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}=2+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot2-1}{2x}$$

$$=2+\lim_{x\to0}\frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}}-1}{2x}=2+\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot2x}{2x}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$ 。（**3 分**）

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=\frac{3}{2}$。（**1 分**）

七、（本题 8 分）设函数 $f(x)=(x^2+x+1)\cos 2x$，求 $f^{(8)}(0)$ 。

解：首先有，$(\cos 2x)^{(n)}=2^n\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)$。（2 分）

由莱布尼茨公式，

$$f^{(8)}(x)=C_8^0(\cos 2x)^{(8)}(x^2+x+1)+C_8^1(\cos 2x)^{(7)}(x^2+x+1)'+C_8^2(\cos 2x)^{(6)}(x^2+x+1)''$$

$$=2^8\cos(2x+4\pi)\cdot(x^2+x+1)+8\cdot2^7\cos(2x+\frac{7}{2}\pi)\cdot(2x+1)+\frac{8\cdot7}{2}\cdot2^6\cos(2x+3\pi)\cdot2$$（4 分）

$$=2^8[(x^2+x+1)\cos 2x+4(2x+1)\sin 2x-14\cos 2x]$$（1 分）

所以 $f^{(8)}(0)=2^8(1+0-14)=-13\cdot2^8=-3328$。（1 分）

八、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且有 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=-1$。证明：至少存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$。

证：因为 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $f(1)=1>0$， $f(2)=-1<0$，所以由零点存在定理，存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(\eta)=0$。（2 分）

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，（2 分）知 $\varphi(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且 $\varphi(0)=f(0)=0$， $\varphi(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}f(\eta)=0$。（2 分）由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,2)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即有 $f'(\xi)=f(\xi)$。（2 分）