



厦门大学《线性代数》期末试题

考试日期：2017.1 信息学院自律督导部整理



一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 A, B 均为二阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A|=2$, $|B|=3$, 则分块矩阵

$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & A \\ B & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ()。

A. $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 3B^* \\ 2A^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2B^* \\ 3A^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 3A^* \\ 2B^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2A^* \\ 3B^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

2. 设 A 为 n 阶矩阵, 则对于齐次线性方程组 ① $AX=0$ 和 ② $A^TAX=0$, 必有 ()。

A. ①的解是②的解, 但②的解不是①的解;

D. ②的解是①的解, ①的解也是②的解。

3. 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的三个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax=\beta$ 的通解为 ()。

A. $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$

B. $\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_3-\eta_1)$

C. $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

D. $\frac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

4. 设 $\alpha_1=(a,a,a)^T, \alpha_2=(a-1,a,a-1)^T, \alpha_3=(1,1,a-1)^T, \beta=(1,2,1)^T$. 若 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示, 则 a 的值为 ()。

A. $a=0$

B. $a=2$

C. $a \neq 0$ 且 $a \neq 2$

D. $a=0$ 或 $a=2$

5. A, B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 ()。

A. A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;

B. A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关;

C. A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关;

D. A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

6. 设不含零向量的 n 元向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是正交向量组, 则必有 ()。

- A. $m \leq n$ B. $m \geq n$ C. $m < n$ D. $m > n$

7. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, P 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量的是 ()。

- A. $P^{-1}\alpha$ B. $P^T\alpha$ C. $P\alpha$ D. $(P^{-1})^T\alpha$

8. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 与 B 相似, E 为 n 阶单位矩阵, 则必有 ()。

- A. $\lambda E - A = \lambda E - B$;
B. A 与 B 有相同的特征值和特征向量;
C. A 与 B 都相似于一个对角矩阵;
D. 对于任意常数 t , $tE - A$ 与 $E - B$ 相似.

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ()。

- A. 合同且相似 B. 合同但不相似
C. 不合同但相似 D. 既不合同也不相似

10. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 且 $x^T Ax = x^T Bx$, 则当 () 时,

$A = B$ 。

- A. $r(A) = r(B)$ B. A 与 B 合同
C. A 与 B 相似 D. $A^T = A$ 且 $B^T = B$

二、 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为 3 阶可逆矩阵, 则

$B^{2020} - 2A^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 则 $a+b =$ _____。

3. 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$, 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则

$k =$ _____。

4. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为_____。

5. 实对称矩阵 A 的秩等于 r , 它有 t 个正特征值, 则它正负惯性指数之差为_____。

三、 计算题 (50 分):

1. (10 分) 求下列非齐次线性方程组的通解。

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

2. (10 分) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$, 问

(1) 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;

(2) 当 t 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(3) 当向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 将 α_3 表示为 α_1, α_2 的线性组合。

3. (10 分) 设三阶方阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, 对应特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, 求 A^{-1} .

4. (10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 6 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ 相似, 求 a, b 的值, 并求可逆矩阵 P , 使

$$P^{-1}AP = B。$$

5. (10 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

- (1) 写出二次型 f 的矩阵表达式;
- (2) 判断此二次型是否正定。

四、 证明题 (15 分):

1. (5 分) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{L} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \text{L} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{L L L L L L L} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \text{L} + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的秩 $R(A)$ 等于矩阵

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \text{L} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \text{L} & a_{2n} & b_2 \\ \text{M} & \text{M} & \text{L} & \text{M} & \text{M} \\ a_{n1} & a_{n2} & \text{L} & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \text{L} & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩 $R(C)$ ，即 $R(A) = R(C)$ 。那么该线性方程组有解。

2. (5 分) 设向量 β 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}, \alpha_t$ 线性表示, 但向量 β 不可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}$ 线性表示, 证明向量 α_t 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}, \beta$ 线性表示。

3. (5 分) 证明: 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的全部特征值为 $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$, 则

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} a_{ji}$$