《线性代数》期末考试试题

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 为 n 阶方阵，则下列选项成立的是______.

(A) $|AB|=|BA|$　　(B) $AB=BA$

(C) $|A+B|=|A|+|B|$　　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

2. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{bmatrix}$，

$P_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则有______.

(A) $AP_1P_2=B$　　(B) $AP_2P_1=B$

(C) $P_1P_2A=B$　　(D) $P_2P_1A=B$

3. 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．若 $A^3=O$，则下列说法正确的是______.

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆

(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆

(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$，则______.

(A) $a=3,b=4$　　(B) $a=4,b=5$

(C) $a=1,b=2$　　(D) $a=0,b=1$

5. 设 α_0 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是其导出组 $AX=0$ 的基础解系，则下列说法正确的是_____.

(A) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

(B) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关

(C) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的任意线性组合都是 $AX=b$ 的解

(D) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的任意线性组合都是 $AX=0$ 的解

二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=1$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________.

2. 设四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & b & a & c \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \end{vmatrix}$，则

$A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}=$__________.

3. 曲线 $L:\begin{cases} y=0 \\ z=3x \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面方程为______.

4. 设矩阵 $B=\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{bmatrix}$，其中 a_1,a_2,a_3 互不相等，则

$r(B)$ 为__________.

5. 已知三条直线 $a_1x+b_1y=c_1$，$a_2x+b_2y=c_2$，$a_3x+b_3y=c_3$

交于一点，则 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$__________.

6. 设 $A=(1,2,3)$，$B=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$，则 $(BA)^n=$__________.

7. 设三阶方阵 A 的行列式为 2，则 $|5A^{-1}-3A^*|=$__________.

8. 设 A 为三阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 A 的三个列向量．已知 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，A^* 为 A 的伴随矩阵，则方程组 $A^*X=O$ 的通解为__________.

9. 设三阶方阵 A 满足 $|A+E|=|A+2E|=|A+3E|=0$，则 $|A+4E|=$__________.

10. 已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_2x_3$$

正定，则常数 a 的取值范围为__________.

三、计算题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$.

2. 求过点 $A(1,4,2)$ 且和直线 $L:\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ 2x+3y-z-2=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程.

3. 讨论当参数 a,b 取何值时，下面的方程组无解？有唯一解？有无穷多个解？并在有无穷多个解时，写出方程组的通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}.$$

4. 求向量组 $\alpha_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,2,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(2,-1,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_4=(5,3,6,7)^{\mathrm{T}}$ 的秩和一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

5. 设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=2\alpha_2$，$A\alpha_3=3\alpha_3$，其中 $\alpha_1=(3,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 A.

四、应用题（12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$,

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型 f 化为标准型;

(2) 说明方程 $f=1$ 代表三维几何空间中的何种曲面.

五、证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，令 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 也是 $AX=0$ 的一个基础解系.

2. 已知 $a^2+b^2+c^2=1$，求证：矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{bmatrix}$ 的秩为 2.

《线性代数》期末考试试题（一）参考答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

ACCBA

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. $-\dfrac{1}{2}$；　　2. 0；　　3. $z^2=9(x^2+y^2)$或$z=\pm 3\sqrt{x^2+y^2}$；

4. 3；　　5. 0；　　6. $10^{n-1}\begin{bmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{bmatrix}$；　7. $-\dfrac{1}{2}$；

8. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$；　9. 6；　10. $-\dfrac{\sqrt{14}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{14}}{2}$或 $a^2<\dfrac{7}{2}$.

三、计算题 I（每小题 7 分，共 35 分）

1. 解答：$D=\begin{vmatrix}1&3&1&2\\1&5&3&-4\\0&4&1&-1\\-5&1&3&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&1&2\\0&2&2&-6\\0&4&1&-1\\0&16&8&4\end{vmatrix}$

$$=8\begin{vmatrix}1&3&1&2\\0&1&1&-3\\0&4&1&-1\\0&4&2&1\end{vmatrix}$$

$$=8\begin{vmatrix}1&3&1&2\\0&1&1&-3\\0&0&-3&11\\0&0&1&2\end{vmatrix}=-8\begin{vmatrix}1&3&1&2\\0&1&1&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&17\end{vmatrix}=-136$$

2. 解答：设所求平面的法向量为$\vec{n}$，由该平面与直线L垂直，有

$$\vec{n}=(1,-2,1)\times(2,3,-1)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=(-1,3,7)$$

因此，平面方程为 $-(x-1)+3(y-4)+7(z-2)=0$

整理得: $x-3y-7z+25=0$

3. 解答：对方程组增广矩阵进行初等行变换得

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&-1&-2&a-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}$$

当$a=1,b\neq-1$时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解；

当$a\neq1$，b任意时，$r(A)=r(\overline{A})=4$，方程组有唯一解；

当$a=1,b=-1$时，$r(A)=r(\overline{A})=2$，方程组有无穷多个解.

此时

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则通解为：$X=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$ (c_1,c_2为任意常数).

4. 解答：由题意可知

$$A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&2&5\\1&2&-1&3\\1&1&3&6\\1&1&4&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&5\\0&1&-3&-2\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大无关组，且

$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

5. 解答：由题意知A有特征值$1,2,3$，其对应的特征向量为

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,有$A[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

因此$A=[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

四、计算题 II（12 分）

解答：(1) 二次型f的矩阵为$A=\begin{bmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$

令特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-1\\-1&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$$

得特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$；$f=y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$

当特征值 $\lambda_1=1$，可得对应的特征向量 $p_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

当特征值 $\lambda_2=2$，可得对应的特征向量 $p_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$；

当特征值 $\lambda_3=4$，可得对应的特征向量 $p_3=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$.

由单位化，则正交阵 $P=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

(2) 方程 $f=y_1^{\ 2}+2y_2^{\ 2}+4y_3^{\ 2}=1$ 表示椭球面.

五、证明题（每小题 4 分，共 8 分）

1.证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 要证 β_1,β_2,β_3 也是 $AX=0$ 的一个基础解系,只需证明 β_1,β_2,β_3 线性无关.

方法一：若有 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$,即

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=0,$$

则 $(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$.由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $k_1+k_2+k_3=0$，$k_2+k_3=0$，$k_3=0$,解得 $k_1=k_2=k_3=0$.

由线性无关定义知 β_1,β_2,β_3 线性无关，从而 β_1,β_2,β_3 也是 $AX=0$ 的一个基础解系.

方法二：$[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]=[\alpha_1\quad \alpha_1+\alpha_2\quad \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]$

$$=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

显然 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 可逆，因此 $r[\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3]=r[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]=3$，

所以 β_1,β_2,β_3 线性无关,从而 β_1,β_2,β_3 也是 $AX=0$ 的一个基础解系.

2．证明：方法一：　已知 $a^2+b^2+c^2=1\neq 0$, 不妨设 $a\neq 0$,

令 $\alpha=(a,b,c)^T\neq 0, B=\alpha\alpha^T\neq O$,则$A=E-B$.

由性质$r(B)=r(\alpha\alpha^T)\le r(\alpha)=1$,因$B\neq O$,所以$r(B)=1$.

由$3=r(E_3)=r(A+B)\le r(A)+r(B)=r(A)+1$,则$r(A)\ge 2$.

已知$a^2+b^2+c^2=1\neq 0$,不放设$a\neq 0$,

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\ -ab & 1-b^2 & -bc\\ -ac & -bc & 1-c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}a(b^2+c^2) & -a^2b & -a^2c\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{vmatrix}$$

将第二行的b倍加到第一行,将第三行的c倍加到第一行.

则$|A|=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{vmatrix}=0$,因此$r(A)=2$.

方法二: 由于

$$B\alpha=(\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha(\alpha^T\alpha)=(a^2+b^2+c^2)\alpha=\alpha,$$

所以$B\alpha=\alpha, \alpha\neq 0$,即$B$有特征值 $\lambda_1=1$,

由$r(B)=1$,知$|B|=0$,则B有特征值$\lambda_2=0$,.

当$\lambda_2=0$时,对应特征向量个数为$3-r(A)=2$个.所以,特征值0为二重根.

即$\lambda_2=\lambda_3=0$,同时得到矩阵B有3个线性无关的特征向量,B

可对角化即$B\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,则$E-B\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.所以

$$r(A)=r(E-B)=2.$$