厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2021.4.17

一、求下列各题（每小题 7 分，共 21 分）：

1. 设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ 平行，并满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=28$，求 $\vec{a}$；

解：由向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ 平行，有 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$。

再由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=28$，知 $\lambda\left|\vec{b}\right|^2=28$，

又 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$，得到 $\lambda=2$。

于是 $\vec{a}=2\vec{b}=(4,-2,6)$。

2. 已知三角形顶点为 $A(1,1,1)$、$B(2,3,4)$、$C(4,3,2)$，求此三角形 ΔABC 的面积；

解：$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&3\\3&2&1\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left|(-4,8,-4)\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|(-4,8,-4)\right|=2\left|(-1,2,-1)\right|=2\sqrt{6}$

3. 求通过直线 $L:\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 且平行于直线 $x=y=z$ 的平面。

解一：通过直线 $L:\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 的平面束方程为 $x+y+\lambda(x-y+z)=0$，

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+\lambda z=0$

选择 λ 使得此平面平行于已知直线 $x=y=z$，则 $(1+\lambda)+(1-\lambda)+\lambda=0$

解得 $\lambda=-2$，所求平面为 $x-3y+2z=0$

解二：求直线 $L:\begin{cases}x+y=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 上一点，令 $x=0$，得到 $y=0,z=0$。此直线的方向向量为

$\vec{s}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=(1,-1,-2)$，直线 $x=y=z$ 的方向向量为 $\vec{s}_2=(1,1,1)$

所求平面的法向量为$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-3,2)$

所求平面为$x-3y+2z=0$

二、求下列各题（每小题 8 分，共 24 分）：

1. $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 2x\}$；

解：$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{10}{9}\sqrt{2}$

2. $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$；

解：$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x$

$=\int_1^2(-\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2y})\Big|_y^{y^2}\ \mathrm{d}y=\int_1^2\frac{2y}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}y)\mathrm{d}y$

$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos(\frac{\pi}{2}y)\,\mathrm{d}y\overset{t=\frac{\pi}{2}y}{=}-\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\cos t\,\mathrm{d}t=-\frac{8}{\pi^3}(t\sin t+\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{8}{\pi^3}+\frac{4}{\pi^2}$

3. 求函数$u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点$P(1,1,1)$处沿$\vec{n}=(2,3,1)$的方向导数。

解：$\vec{n}=(2,3,1)$方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1)$

函数$u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点$P(1,1,1)$处的梯度为

$$(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})=(\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2})\Bigg|_{(1,1,1)}=\sqrt{14}(\frac{3}{7},\frac{4}{7},-1)$$

所求的方向导数为$\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{14}=\frac{6}{7}+\frac{12}{7}-1=\frac{11}{7}$。

三、（8 分）求由曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周得到的曲面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的切平面方程和法线方程。

解：曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$绕 y 轴旋转一周得到的曲面方程为$3(x^2+z^2)+2y^2=12$

此曲面在$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的法向量为$\vec{n}=(6x,4y,6z)\big|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=2(0,2\sqrt{3},3\sqrt{2})$

曲面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的切平面方程为$2\sqrt{3}(y-\sqrt{3})+3\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0$

即$2\sqrt{3}y+3\sqrt{2}z-12=0$。

所求的法线方程为$\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$，即$\begin{cases}3\sqrt{2}y-2\sqrt{3}z-\sqrt{6}=0\\ x=0\end{cases}$。

四、（10 分）设$u=y,v=\dfrac{y}{x}$，试将方程$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$变换成以$u,v$为自变量的方程，其中二元函数$z$具有连续的一阶偏导数。

解法一：z 函数可看为复合函数$z=z(u,v)=z(u(y),v(x,y))$，则由链式法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}\quad,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}\quad,$$

由$u=y,v=\dfrac{y}{x}$，有$y=u,x=\dfrac{u}{v}$，

于是$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{v^2}{u}\dfrac{\partial z}{\partial v}$，$\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial z}{\partial v}$

则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{u}{v}\left(-\dfrac{v^2}{u}\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)+u\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)=u\dfrac{\partial z}{\partial u}$，即$\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$

解法二：z 函数可看为复合函数$z=z(u,v)=z(u(y),v(x,y))$，则由链式法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial v}\quad,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial v}\quad,$$

则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x(-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial z}{\partial v})+y(\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial v})=y\dfrac{\partial z}{\partial u}=u\dfrac{\partial z}{\partial u}$，因此有$\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$

五、（10 分）设方程组$\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}\\ \mathrm{e}^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}=\dfrac{y}{\sqrt{2}}\end{cases}$确定了函数$u=u(x,y)$，$\quad v=v(x,y)$。求在点$x=1$，

$y=1$，$u=0$，$v=\dfrac{\pi}{4}$ 处的 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$。

解法一： 微分法。将 u,v,x,y 看成独立变量，对原方程组取全微分得到相应的方程：

$$\begin{cases}(\cos\dfrac{v}{y}e^{\frac{u}{x}}\dfrac{-u}{x^2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2})dx+e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}\dfrac{v}{y^2}dy+\cos\dfrac{v}{y}e^{\frac{u}{x}}\dfrac{1}{x}du+e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}\dfrac{-1}{y}dv=0\\ \sin\dfrac{v}{y}e^{\frac{u}{x}}\dfrac{-u}{x^2}dx+(e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}\cdot\dfrac{-v}{y^2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2})dy+\sin\dfrac{v}{y}e^{\frac{u}{x}}\dfrac{1}{x}du+e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}\dfrac{v}{y}\dfrac{1}{y}dv=0\end{cases}$$

代入 $x=1$，$y=1$，$u=0$，$v=\dfrac{\pi}{4}$，得 $\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}dx+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\pi}{4}dy+\dfrac{\sqrt{2}}{2}du-\dfrac{\sqrt{2}}{2}dv=0\\ (\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{-\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2})dy+\dfrac{\sqrt{2}}{2}du+\dfrac{\sqrt{2}}{2}dv=0\end{cases}$

解得 $du=\dfrac{1}{2}(dx+dy)$，$dv=-\dfrac{1}{2}dx+(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2})dy$。

解法二： 通过求偏导数来得到微分。

设 $\begin{cases}\mathrm{F}(x,y,u,v)=\mathrm{e}^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\\ \mathrm{G}(x,y,u,v)=\mathrm{e}^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}\end{cases}$，在点 $x=1$，$y=1$，$u=0$，$v=\dfrac{\pi}{4}$ 处：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{8}\pi & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}=-\frac{1}{2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{8}\pi\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

从而 $du=\dfrac{1}{2}(dx+dy)$，$dv=-\dfrac{1}{2}dx+(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2})dy$。

六、（12 分）求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域 D 上的极值与最值。

解：先求区域 D 内部的极值

令 $\begin{cases} f_x=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$，解得唯一内部驻点 $(2,1)$。

$A=f_{xx}(2,1)=(8y-6xy-2y^2)|_{(2,1)}=-6,\ B=f_{xy}(2,1)=(8x-3x^2-4xy)|_{(2.1)}=-4,$

$C=f_{yy}(2,1)=-2x^2|_{(2.1)}=-8$，知 $A<0,\ AC-B^2>0$，因此 $f(x,y)$ 在 $(2,1)$ 取得极大值 4。

当 $x=0(0\le y\le 6)$ 和 $y=0(0\le x\le 6)$ 上 $f(x,y)=0$。由边界方程 $x+y=6$ 解出 $y=6-x$，代入 $f(x,y)$ 中得 $z=2x^3-12x^2(0\le x\le 6)$，令 $\frac{dz}{dx}=6x^2-24x=0$，解得 $x=4$，即 D 边界上点 $(4,2)$.

比较下列函数值 $(0\le x\le 6,\ 0\le y\le 6)$：

$f(2,1)=4$，$f(x,0)=0,\ f(0,y)=0,\ f(4,2)=-64,$

由此知 $f(x,y)$ 在 D 上最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64.$

七、（10 分）试问函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\frac{1}{xy}, & x\cdot y\neq 0 \\ 0, & x\cdot y=0 \end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处是否可微？请说明理由。

解： $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，同理 $f_y(0,0)=0$。，故在点 $O(0,0)$ 处一阶偏导数存在。

又由于 $\left|\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|=\left|\frac{\Delta x\Delta y\sin\frac{1}{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|$

$\le\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{2\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=2\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)$ 因此在点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 可微。

八、（5 分）设 $f(x)$、$g(x)$为$[a,b]$上的连续函数。利用二重积分证明以下的 Cauchy-Schwartz 不等式：$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$。

证明：设 $\mathrm{D}=[a,b]\times[a,b]$, 则

$$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y = \iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y = \iint_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \iint_D f^2(y)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

又因为

$$2\int_a^b\iint_D f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_D[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以有$(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$，得证。