厦门大学《离散数学》课程试卷

数学科学学院 2007 年级

主考教师：金贤安 试卷类型：（A 卷）

一、 选择题（共 15 题，每题 2 分，共 30 分）

1．下列语句不是命题的有（ ）。

A．x=13。
B．离散数学是计算机系的一门必修课。
C．鸡有三只脚。
D．太阳系以外的星球上有生物。

2．设 p：天下大雨，q：小王乘公共汽车上班，命题“只有天下大雨，小王才乘公共汽车上班”的符号化形式为（ ）。

A．$p\to q$ B．$q\to p$ C．$p\to \neg q$ D．$\neg p\to q$

3．谓词公式 $\exists x(P(x)\vee \forall yR(y))\to Q(x)$ 中的 x（ ）。

A．只是约束变元。
B．只是自由变元。
C．既非约束变元又非自由变元。
D．既是约束变元又是自由变元。

4．下面式子中，（ ）是不正确的。

A. $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge \forall xB(x)$

B. $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow \exists xA(x)\vee \exists xB(x)$

C. $\exists x(A(x)\to B)\Leftrightarrow \exists xA(x)\to B$

D. $\forall x(A\to B(x))\Leftrightarrow A\to \forall xB(x)$

5．设个体域为整数集合，则下列公式中真值为 1 的是（ ）。

A．$\forall x\forall y(x+y=1)$。 B．$\forall x\exists y(x+y=1)$。
C．$\exists x\forall y(x+y=1)$。 D．$\neg\exists x\exists y(x+y=1)$。

6．下列命题为假的是（ ）。

A. $\{\varnothing\} \in P(\varnothing)$　B. $\varnothing \subseteq P(\{\varnothing\})$　C. $\{\varnothing\} \supseteq P(\varnothing)$　D. $P(\varnothing) \in P(\{\varnothing\})$

7．下列关于集合的势的叙述中，（ ）是错误的。

A. 实数集比自然数集优势。
B. 任一无限集合都存在与自己等势的真子集。
C. 集合类上的优势关系是偏序关系。
D. 有理数集比整数集优势。

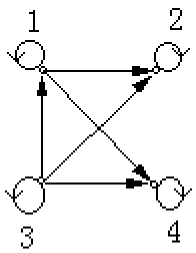
8．设 A, B, C 是集合，F 是关系，则下列式子中不正确的是（ ）。

A. $A - B = \phi \Leftrightarrow A \cup B = B$　　B. $(A \oplus B) = (A \oplus C) \Leftrightarrow B = C$
C. $F[A \cap B] = F[A] \cap F[B]$　　D. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

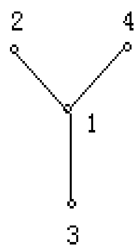
9．设 A={1,2,3, ⋯,100}，R 是 A 上相等关系 “=”，由 R 产生等价类有（　　）。

A. 10 个　　B. 50 个　　C. 100 个　　D. 1 个

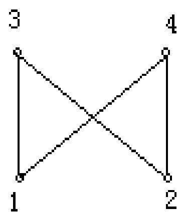
10．集合 A={1，2，3，4}上的偏序关系 R 的关系图为



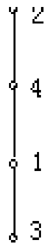
则它的哈斯图为（　　　　　）。



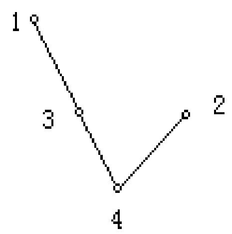
A



B



C



D

11．下列关系中能构成函数的是（　　）。

A. $\{<x, y> | (x, y \in N) \wedge (x + y < 10)\}$　　B. $\{<x, y> | (x, y \in R) \wedge (y = x^2)\}$

C. $\{<x, y> | (x, y \in R) \wedge (y^2 = x)\}$　　D. $\{<x, y> | (x, y \in Z) \wedge (x \equiv y \bmod 3)\}$

12．N 是自然数集，定义 $f : N \to N$，$f(x) = (x) \bmod 3$（即 x 除以 3 的余数），则 f 是（　　）。

A．满射不是单射　B．单射不是满射　C．双射　D．不是单射也不是满射

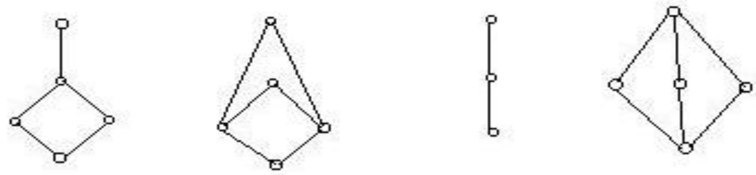
13．设 R 为实数集，定义*运算如下：a*b=|a+b+ab|，则*运算满足（　　）。

A．结合律　B．交换律　C．有幺元　D．幂等律

14．数的乘法在下列集合中不封闭的有（　　）。

A．$\{0,1\}$　B．$\{x|x为素数\}$　C. $\{a\sqrt{2}+b|a,b\in Z\}$　D．$\{x|x\in C且|x|=1\}$

15．下图所示的哈斯图所表示的偏序集中不是格的是（　　）。



A　B　C　D

二、填空题（共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

1．命题 $\varnothing\subseteq\{\{a\}\}\subseteq\{\{a\},3,4,1\}$ 的真值 =____。
2．已知集合 A={∅,1,2}，则 A 的幂集 P(A) =________。
3．含 n 个命题变项的重言式的主合取范式为___________。
4．设集合 A={a,b,c,d }，则 A 上的不同的等价关系共有_____个，A 上有_________个不同的双射函数。
5．设 B 为布尔代数，a,b,c∈B，则((a∧b)∧(a∨c))∨a 的化简式为___________。
6．设 F(x):x 是人，H(x,y):x 与 y 一样高，在一阶逻辑中，命题“人都不一样高”的符号化形式为________。
7．公式 $\forall x(P(x)\to Q(x,y))\vee\exists z(R(y,z)\to S(x))$ 的自由变元是_____，约束变元是________　。
8．设 $A=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>\}$，$B=\{<1,3>,<2,4>,<4,2>\}$,则 $A\circ B=$　_______________　。

三、计算题（每题 5 分，共 15 分）

1．（5 分）求命题公式 $(\neg p\to(p\vee r))\wedge(p\leftrightarrow q)$ 的主析取范式。

2.（5 分）设集合 A={a，b，c，d}，A 上的关系 R={<a，a>,<a，b>,<b，a>,<c，d>,<b，c>} 求：
（1）画出 R 的关系图。(1 分)
（2）R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包的关系图。(1 分，1 分和 2 分)

3.（5 分）设<A,R>为一偏序集，其中 A={1，2，3，4，6，8，12，24}，R 是 A 上的整除关系。
（1）画出偏序集<A,R>的哈斯图。（3 分）

（2）求 A 的极大元和极小元。（1 分）
（3）求 B={2, 3, 6}的最小上界和最大下界。（1 分）

四、简答题（共 10 分）

1.（4 分）设解释 R 如下：D_R 是实数集，D_R 中特定元素 a=0，D_R 中特定函数 $f(x,y)=x-y$，特定谓词 $F(x,y):x<y$，问公式 $A=\forall x\forall y\forall z(F(x,y)\rightarrow F(f(x,z),f(y,z)))$ 的涵义如何？（2 分）真值如何？（2 分）

2.（6 分）判断下列公式是否是永真式？并说明理由。

(1) $(\exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x))\rightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$。（3 分）

(2) $(\forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x))\rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x)))$。（3 分）

五、证明题（共 25 分）

1.（10 分）
（1）（5 分）在命题逻辑的自然推理系统中构造下面推理的证明。
前提：$\neg(P\wedge\neg Q)$，$\neg Q\vee R$，$\neg R$

结论：$\neg P$
（2）（5 分）在谓词逻辑的自然推理系统中构造下面推理的证明。
前提：$\forall x(\neg A(x)\rightarrow B(x))$，$\forall x\neg B(x)$

结论：$\exists x A(x)$

2.（5 分）叙述并证明容斥原理。（2 分和 3 分）

3.（5 分）设 R 是集合 A 上的一个具有传递和自反性质的关系，T 是 A 上的关系，使得 $<a,b>\in T\Leftrightarrow<a,b>\in R$ 且 $<b,a>\in R$，证明 T 是一个等价关系。

4.（5 分）设 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$ 是布尔代数，$a,b\in B$，试证 $a=b$ 当且仅当 $(a\wedge b')\vee(a'\wedge b)=0$。

六 应用题（该题为附加题，8 分）

甲、乙、丙、丁 4 个人有且仅有 2 个人参加围棋优胜比赛。关于谁参加竞赛，下列 4 种判断都是正确的：

(1)甲和乙只有一人参加；

(2)丙参加，丁必参加；

(3)乙或丁至多参加一人；

(4)丁不参加，甲也不会参加。

请推出哪两个人参加了围棋比赛。

答案：

四：2 解 (1)$(\exists xA(x)\to\exists xB(x))\to\exists x(A(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow(\neg\exists xA(x)\vee\exists xB(x))\to\exists x(A(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg\exists xA(x)\vee\exists xB(x))\vee\exists x(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow(\exists xA(x)\wedge\neg\exists xB(x))\vee\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow(\exists xA(x)\vee\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x))\wedge(\neg\exists xB(x)\vee\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(A(x)\vee\neg A(x))\vee\exists xB(x)$

$\Leftrightarrow$T

所以，$(\exists xA(x)\to\exists xB(x))\to\exists x(A(x)\to B(x))$为永真式。

(2)设论域为{1，2}，令 $A(1)$＝T；$A(2)$＝F；$B(1)$＝F；$B(2)$＝T。

则$\forall xA(x)$为假，$\forall xB(x)$也为假，从而$\forall xA(x)\to\forall xB(x)$为真；而由于 $A(1)\to B(1)$为假，所以$\forall x(A(x)\to B(x))$也为假，因此公式$(\forall xA(x)\to\forall xB(x))\to\forall x(A(x)\to B(x))$为假。该公式不是永真式。

五：3 证明 因 R 自反，任意 $a\in A$，有$<a，a>\in R$，由 T 的定义，有$<a，a>\in T$，故 T 自反。

若$<a，b>\in T$，即$<a，b>\in R$ 且$<b，a>\in R$，也就是$<b，a>\in R$ 且$<a，b>\in R$，从而$<b，a>\in T$，故 T 对称。

若$<a，b>\in T$，$<b，c>\in T$，即$<a，b>\in R$ 且$<b，a>\in R$，$<b，c>\in R$ 且$<c，b>\in R$，因 R 传递，由$<a，b>\in R$ 和$<b，c>\in R$ 可得$<a，c>\in R$，由$<b，a>\in R$ 和$<c，b>\in R$ 可得$<c，a>\in R$，由$<a，c>\in R$ 和$<c，a>\in R$ 可得$<a，c>\in T$，故 T 传递。

所以，T 是 A 上的等价关系。