一、单项选择题

BBBBA BACDA

二、填空题

1. 2，-2,3

2. 1/9

3. 1

4. 32

5. 2

三、计算题

1.

（1）

由$|A|=\begin{vmatrix}2&2&2\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a$可得：$2A_{11}+2A_{12}+2A_{13}=a$,即$A_{11}+A_{12}+A_{13}=a/2$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}=(A_{11}+A_{12}+A_{13})+(A_{21}+A_{22}+A_{23})+(A_{31}+A_{32}+A_{33})$$

（2）$=\dfrac{a}{2}+\begin{vmatrix}2&2&2\\1&1&1\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&2&2\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\1&1&1\end{vmatrix}$

$$=\frac{a}{2}+0+0$$

$$=\frac{a}{2}$$

2.

解： A 经过初等行变换

A=$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&2&x-1&2\\0&-2&1&-2\\0&2&y-3&2\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&-2&1&-2\\0&0&x&0\\0&0&y-2&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=0,y=2$

3.

解：计算得$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$.

关系式$A^{*}X=A^{-1}+2X$左乘 A 可得$4X=E+2AX$，

整理为 $(4E-2A)X=E$，故$X=(4E-2A)^{-1}$.

由$(4E-2A,E)=\begin{pmatrix}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

可得

$$X=\left(4E-2A\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4.

【解答】因为

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1+\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2(\lambda+2)$$

所以当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，由克拉默法则可知，方程组有惟一解

当$\lambda=-2$时，原方程组成为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=-5 \\ x_1-2x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2-2x_3=-2 \end{cases}$$

对增广矩阵施行初等行变换

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+2r_3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

由此可知$R\left(A\right)=2$，$R\left(B\right)=3$，所以当$\lambda\neq-2$时方程组无解

当$\lambda=1$时，方程组成为$x_1+x_2+x_3=-2$

此时方程组有无穷多组解，若选x_1为非自由未知量，则有

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - 2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

故方程组的通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中$x_2$，$x_3$为任意常数

5.

解：因$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{C}| \neq 0$，故$\boldsymbol{A}$可逆。设$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}$，由定义，有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{BX} & \boldsymbol{BY} \\ \boldsymbol{DX}+\boldsymbol{CZ} & \boldsymbol{DY}+\boldsymbol{CW} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix},$$

得

$$\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1}\text{，}\boldsymbol{BY} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{O}\text{（}\boldsymbol{B}\text{可逆），}$$

$$\boldsymbol{DX}+\boldsymbol{CZ} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\text{（}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{-1}\text{），}\boldsymbol{DY}+\boldsymbol{CW} = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{W} = \boldsymbol{C}^{-1}\text{（}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{O}\text{），}$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix}.$$

四、证明题

1.

证：$\because \max\{r(A), R(AB)\} \leq R(A \vdots AB)$

$\therefore R(A) \leq R(A \vdots AB)$

又$\because R(A \vdots AB) = R\big(A(E \vdots B)\big) \leq \min\{R(A), R(E \vdots B)\}$

$\Rightarrow R(A \vdots AB) \leq R(A)$

$\therefore R(A \vdots AB) = R(A)$ 得证

2.

【证明】

证$A^T A$是$n \times n$矩阵，

由于$R(A) = R(A^T) \leq m, R(A^T A) \leq \min\left(R(A), R(A^T)\right) \leq m < n$，

根据齐次线性方程组解的理论，

以n阶矩阵$A^T A$为系数矩阵的齐次线性方程组$(A^T A)x = 0$有非零解的充要条件为

$R(A^T A) < n$

3.

证明：条件 A 的每一个元素 a_{ij} 等于它的代数余子式，

即 $a_{ij}=A_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$ 意味着 $A^{*}=A^{T}$.

利用伴随矩阵的性质有 $A^{*}A=|A|E$，因此 $A^{T}A=|A|E$.

下面证明 $|A|\neq 0$. 若 $|A|=0$ ，则上式意味着 $A^{T}A=0$，

因此 A=0, 这与 A 是非零矩阵是矛盾的，因此 $|A|\neq 0$，即 A 可逆.