《线性代数》期末考试试题（二）

一、填空题

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$，则 AA^{T} 的主对角线上元素之和为______.

2. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}9 & 3 & 0\\5 & 5 & 5\\6 & 5 & 7\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$______.

3. 设向量 $\alpha_1=(1,-1,3)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-2,3,-7)^{\mathrm{T}}$，则与 α_1,α_2 都正交的一个向量为______________.

4. 平面曲线 $C:\begin{cases}z=y^2\\x=0\end{cases}$ 绕 oz 轴旋转所形成的旋转曲面的方程为______________.

5. 设方阵 A 满足 $A^2+A-3E=0$，E 为单位阵，则 $(A-2E)^{-1}=$______________.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为非零向量，若

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2,\ r(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=1,$$

则 $r(\alpha_1,\alpha_2)=$______.

7. 设 A 为 n 阶矩阵 $(n\geq 2)$，A^* 是 A 的伴随矩阵，且 $r(A^*)=1$，则方程组 $AX=0$ 的解空间的维数为______.

8. 设三阶方阵 A 的三个特征值为 1,1,2，且 A 与 B 相似，则 $|B^2+B+E|=$______.

9. 设 α_1,α_2 均为非零向量，二阶方阵 A 满足 $A\alpha_1=3\alpha_1$，$A\alpha_2=-3\alpha_2$，则 $A^{100}=$______________.

10. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2-8x_1x_2+8x_2x_3$ 为正定二次型，则 a 满足______.

二、选择题

1. 设 A,B 均为 n 阶方阵 $(n \geq 2)$，则有________.

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　(B) $|A-B|=|A|-|B|$

(C) $|AB|=|A|\cdot|B|$　　(D) $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=-|A|\cdot|B|$

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵，下列命题中错误的是________.

(A) 若 A 经列初等变换化成 B，则 $r(A)=r(B)$

(B) 若 A 经行等变换化成 B，则 $A^{-1}=B^{-1}$

(C) 若 A 经列初等变换化成 B，则 A 的列向量组与 B 的列向量组等价

(D) 若 A 经行初等变换化成 B，则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解

3. 设 A 为 3×4 矩阵，且 A 的行向量组线性无关，则下列命题正确的是________.

(A) 齐次线性方程组 $AX=0$ 仅有零解

(B) 齐次线性方程组 $A^{\mathrm{T}}X=0$ 有非零解

(C) 非齐次线性方程组 $AX=b$ 有无穷多组解

(D) 非齐次线性方程组 $A^{\mathrm{T}}X=b$ 有唯一解

4. 设有两个平面方程 $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，如果 $r\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}=2$，则一定有________.

(A) π_1 与 π_2 平行　　(B) π_1 与 π_2 垂直

(C) π_1 与 π_2 重合　　(D) π_1 与 π_2 相交

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性无关，则________.

(A) β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示

(B) α_1 能由向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示

(C) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

(D) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

三、计算题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $2X=AX+B$，求矩阵 X.

3. 求向量组 $\alpha_1=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,0,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(-1,1,1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_5=(3,-1,-2,4)^{\mathrm{T}}$ 的秩和极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

4. 已知 A 为 3 阶非零矩阵，矩阵 $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ 且 $AB=O$，求 a 及齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解.

5. 已知平面 $\pi_1: x-y-2z=2$，$\pi_2: x+2y+z=8$，$\pi_3: x+y+z=0$，求过 π_1 与 π_2 的交线且与平面 π_3 垂直的平面方程.

四、已知二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\,(a>0)$，

可通过正交变换 $X=PY$ 化为标准形

$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，

求：(1) 参数 a 及正交阵 P；

(2) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 在几何上表示什么图形.

五、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，设

$$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s,$$

如果对于某个 $i\ (1\le i\le s)$，$b_i\neq 0$，证明：用 β 替换 α_i 以后得到的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 也线性无关.

六、若 A 是 n 阶实对称矩阵，且 $A^2=O$，证明：$A=O$.

线性代数期末试题（二）参考答案

一、填空题

1. 6　　2. 0　　3. $(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$　　4. $z=x^2+y^2$

5. $-\dfrac{1}{3}(A+3E)$　　6. 2　　7. 1　　8. 63

9. $3^{100}E$　　10. $a>32$

二、单项选择题

1. C　　2. B　　3. C　　4. D　　5. B

三、计算题

1. 【参考解答】：$D=\begin{vmatrix}1&3&-1&0\\2&0&1&2\\-1&1&2&5\\3&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&-1&0\\0&-6&3&2\\0&4&1&5\\0&-9&4&2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&3&-1&0\\0&-6&3&2\\0&4&1&5\\0&-1&6&12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&3&2\\4&1&5\\-1&6&12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&6&12\\0&-33&-70\\0&25&53\end{vmatrix}=-1$$

2. 【参考解答】：由 $2X=AX+B$，则 $(2E-A)X=B$，由于

$$(2E-A)=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix},\ |2E-A|=5,$$

则 $2E-A$ 可逆，所以 $X=(2E-A)^{-1}B$；由于

$$[2E-A\,|\,E]=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\-1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&1&3\end{bmatrix},$$

可得：$(2E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，则

$$X=[(2E-A)^{-1}]B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\\0&-1\end{bmatrix}.$$

3. **【参考解答】**：由题意可知

$$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5]=\begin{bmatrix}1&2&0&-1&3\\1&0&2&1&-1\\0&-1&1&1&-2\\2&3&1&-2&4\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&0&-1\\0&1&-1&0&2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\ \alpha_5)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是一个极大无关组，其中$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_5=-\alpha_1+2\alpha_2$．或$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$是一个极大无关组，其中$\alpha_2=2\alpha_1-\alpha_3$，$\alpha_5=3\alpha_1-2\alpha_3$．或$\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5$是一个极大无关组，其中$\alpha_2=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_5$，$\alpha_3=\frac{3}{2}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_5$．

4. **【参考解答】**：将矩阵B列分块$B=(B_1,B_2,B_3)$，由已知得

$$AB=A(B_1,B_2,B_3)=(0,0,0)$$

即B的各列B_i为齐次方程组$AX=0$的非零解．由题可知B_1,B_2线性无关，且B_1,B_2为齐次方程组$AX=0$的解向量．因此B_1,B_2是齐次方程组$AX=0$基础解系中的向量．由$A\neq O$非零阵，$r(A)\geq 1$，因此$AX=0$的基础解系中所含向量个数

$3-r(A)\le 2$，小于等于 2.

综上，可判定齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系中恰含 2 个向量，可选 B_1,B_2 为基础解系中的向量．因此齐次方程组 $AX=0$ 的通解为

$$k_1B_1+k_2B_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$$

由 B 的各列 B_1,B_2,B_3 为齐次方程组 $AX=0$ 的非零解，B_1,B_2 为基础解系，因此 B_1,B_2,B_3 线性相关．即

$$|B|=\begin{vmatrix}1&-2&-1\\-1&2&a\\2&3&5\end{vmatrix}=0,$$

得到 $a=1$.

5. **【参考解答】**：设平面束方程：

$$x-y-2z-2+\lambda(x+2y+z-8)=0,$$

其法向量 $\{1+\lambda,-1+2\lambda,-2+\lambda\}$；由该平面与平面 $\Pi:x+y+z=0$ 垂直，可知

$$1(1+\lambda)+1(-1+2\lambda)+1(-2+\lambda)=0,$$

得到 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，因此所求平面为 $x-z-4=0$.

四、【参考解答】：(1) 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix}$，已知二次型正交标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，所以矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，则

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=10=18-2a^2,\quad a=\pm 2,$$

由$a>0$，则$a=2$．二次型f的矩阵为$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$，

当特征值$\lambda_1=1$，可得对应的特征向量$p_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$；

当特征值$\lambda_2=2$，可得对应的特征向量$p_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$；

当特征值$\lambda_3=5$，可得对应的特征向量$p_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，

由单位化，则正交阵为

$$P=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{\sqrt{5}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

（2）方程$f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2=1$表示椭球面.

五、【参考解答】：由线性无关的定义，设若有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k\beta+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\ldots+k_s\alpha_s=0$$

则只需证明$k_j=0,k=0$，　其中$j=1,2,..i-1,i+1,\ldots,s$

其题意$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_s\alpha_s$，得到

$$(k_1+k)\alpha_1+(k_2+k)\alpha_2+\ldots+(k_{i-1}+k)\alpha_{i-1}$$
$$+k\alpha_i+\ldots+(k_s+k)\alpha_s=0$$

由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，即

$$(k_j+k)=0,k=0,j=1,2,..i-1,i+1,..s$$

从而$k_j=0,k=0$，　其中$j=1,2,..i-1,i+1,\ldots,s$.

六、【参考解答】：因为$A^2=O$，所以A的所有特征值全为0.

又A为实对称阵，则一定可以对角化，即存在可逆阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵．因此$P^{-1}AP=O$，得$A=O$.