



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷答案

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2021.01.05

一、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int \frac{x^2}{1-x^6} dx$;

解：
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1-x^6} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{1-x^6} \\&= \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{x^3-1} \right) dx^3 = \frac{1}{6} \left(\int \frac{d(x^3+1)}{x^3+1} - \int \frac{d(x^3-1)}{x^3-1} \right) \\&= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^3+1}{x^3-1} \right| + C\end{aligned}$$

2. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$;

解法一：令 $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ ，代入

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} d(\sin t) = \int \cot^2 t dt = \int \csc^2 t - 1 dt = -\cot t - t + C \\&= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C\end{aligned}$$

解法二：
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx &= -\int \sqrt{1-x^2} d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \int \frac{1}{x} d(\sqrt{1-x^2}) \\&= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C\end{aligned}$$

3. $\int x \cdot \arctan x dx$ 。

解：
$$\begin{aligned}\int x \cdot \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x d(x^2) = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C\end{aligned}$$

二、求下列的定积分（每小题 7 分，共 14 分）：

1. $\int_{-2}^2 \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}} dx;$

解: $\int_{-2}^2 \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}} dx = \frac{1}{8} \int_{-2}^2 (4x^2+9)^{-\frac{1}{2}} d(4x^2+9) + \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{(2x)^2+3^2}} d(2x)$

$$= \frac{1}{4} (4x^2+9)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-2}^2 + \frac{1}{2} \ln(2x+\sqrt{4x^2+9}) \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{4} (5-5) + \frac{1}{2} (\ln 9 - \ln 1) = \ln 3$$

或者 $\int_{-2}^2 \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}} dx = \int_{-2}^2 \frac{x}{\sqrt{4x^2+9}} dx + \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}} dx = 0 + 2 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4x^2+9}} dx$

$$= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{(2x)^2+9}} d(2x) = \ln(2x+\sqrt{4x^2+9}) \Big|_0^2 = \ln 9 - \ln 3 = \ln 3$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx.$

解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx$

$$\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d(\sin 2x) = \frac{1}{2} e^x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} e^x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d(\cos 2x)$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^x \sin 2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = \left(\frac{2}{5} e^x \sin 2x + \frac{1}{5} e^x \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx = \left(\frac{1}{2} e^x - \frac{1}{5} e^x \sin 2x - \frac{1}{10} e^x \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} - 0 + \frac{1}{10} e^{\frac{\pi}{2}} \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{10} \right) = \frac{3}{5} e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5}$$

三、(8分) 求反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}} dx$ 。

$$\text{解法一: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}} dx \stackrel{t=\sqrt[3]{x-1}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^3+1)t} d(t^3+1) = \int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^3+1} dt$$

$$\begin{aligned} \because \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt & \stackrel{u=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u} \cdot u^3}{u^3+1} \cdot \left(\frac{-1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^3+1} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt \\ \therefore \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt & = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} + \frac{1}{t^3+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1} dt \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\left(t-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

$$\text{因此, } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} dx = 3 \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi。$$

$$\text{解法二: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}} dx \stackrel{t=\sqrt[3]{x-1}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^3+1)t} d(t^3+1) = \int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^3+1} dt$$

$$\begin{aligned} & = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1} dt \\ & = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{t^2-t+1} dt \\ & = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} + \sqrt{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi。 \end{aligned}$$

四、(8分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_1^{y^3} e^{-t^2} dt + \int_x^0 \cos^6(x-t) dt = 0$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ 。

$$\text{解: } \int_x^0 \cos^6(x-t) dt \stackrel{u=x-t}{=} \int_0^x \cos^6 u d(x-u) = -\int_0^x \cos^6 u du, \text{ 因此方程变为}$$

$$\int_1^{y^3} e^{-t^2} dt - \int_0^x \cos^6 t dt = 0。$$

方程两边对 x 求导, 得 $e^{-y^6} 3y^2 y' - \cos^6 x = 0$, 解得 $y' = \frac{e^{y^6} \cos^6 x}{3y^2}$ 。又注意到 $y(0)=1$, 所以

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{e}{3}。$$

五、(12分) 已知标准正态分布密度函数为 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,

(1) 求该函数的单调区间、极值、最值; (2) 判定该函数图形的凹凸性, 并求其拐点。

解: $y' = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y'' = \frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 。

(1) 令 $y' = 0$, 得 $x = 0$ 为唯一的可疑极值点。当 $x < 0$ 时, $y' > 0$, 该函数单调增加; 当 $x > 0$ 时, $y' < 0$, 该函数单调减少。又 $y''(0) < 0$, 因此 $x = 0$ 为极大值点, 同时也是最大值点。又

因为 $y > 0$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, 所以该函数没有最小值。综上所述, 该函数的单调增加区间

为 $(-\infty, 0)$, 单调减少区间为 $(0, +\infty)$, 极大值和最大值为 $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, 没有极小值和最小值。

(2) 令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm 1$ 。注意到当 $x < -1$ 或者 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 因此 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在区间

$(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 的图形是向上凹的; 注意到当 $-1 < x < 1$ 时, $y'' < 0$, 因此 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在

区间 $(-1, 1)$ 的图形是向上凸的。其拐点为 $(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}})$ 。

六、(8分) 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 的全长 s 。

解法一: 把星形线写成参数方程形式表示: $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ 。

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \sqrt{(-3\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt \\ &= 3\sqrt{\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t} dt = 3 \cdot |\cos t| \cdot |\sin t| dt = \frac{3}{2} \cdot |\sin 2t| dt \end{aligned}$$

由对称性, 其弧长 $s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \cdot |\sin 2t| dt = 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2t\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$ 。

解法二: 在 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 两边对 x 求导, 解得 $y' = -x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ 。

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}} dx = |x|^{\frac{1}{3}} dx。$$

由对称性, 其弧长 $s = 4 \int_0^1 |x|^{\frac{1}{3}} dx = 4 \int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = 6x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^1 = 6$ 。

七、(8分) 求心形线 $\rho=1+\cos\theta$ 所围成的平面图形与圆 $\rho=1$ 所围成平面图形之间重叠部分的面积 A 。

$$\begin{aligned}\text{解: } A &= \frac{\pi}{2} + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi + (2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}\pi + [0 + 0 - (2 + 0)] = \frac{5}{4}\pi - 2\end{aligned}$$

八、(8分) 求由圆 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 所围成的平面图形绕 x 轴一周所形成的旋转体的体积 V 。

$$\begin{aligned}\text{解: } V &= \pi \int_{-2}^2 (3 + \sqrt{4-x^2})^2 dx - \pi \int_{-2}^2 (3 - \sqrt{4-x^2})^2 dx \\ &= 12\pi \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &\stackrel{\text{几何意义}}{=} 12\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 24\pi^2\end{aligned}$$

九、(8分) 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 证明 Cauchy-Schwartz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx .$$

证明: 作辅助函数 $\varphi(x) = \int_a^x f^2(t) dt \cdot \int_a^x g^2(t) dt - \left(\int_a^x f(t) \cdot g(t) dt \right)^2$, $x \in [a, b]$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, 且注意到

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f^2(x) \cdot \int_a^x g^2(t) dt + g^2(x) \int_a^x f^2(t) dt - 2f(x) \cdot g(x) \cdot \int_a^x f(t) \cdot g(t) dt \\ &= \int_a^x f^2(x) \cdot g^2(t) + g^2(x) \cdot f^2(t) - 2f(x) \cdot g(x) \cdot f(t) \cdot g(t) dt \\ &= \int_a^x [f(x) \cdot g(t) - g(x) \cdot f(t)]^2 dt \geq 0\end{aligned}$$

故 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 非减, 因此 $\varphi(b) \geq \varphi(a) = 0$, 得证。

十、(8分) 已知对于任意的 $t > 0$, 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ 都是收敛的。现设 $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$, $t > 0$, 称之为 Gamma 函数。

(1) 证明对任意的 $t > 0$, 成立递推公式: $\Gamma(t+1) = t \Gamma(t)$;

(2) 计算反常积分 $\int_0^1 x^2 (\ln x)^{10} dx$ 。

$$(1) \text{ 证: } \Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx = - \int_0^{+\infty} x^t de^{-x} = - \frac{x^t}{e^x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx^t$$

$$= 0 + 0 + t \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = t \Gamma(t)$$

$$(2) \int_0^1 x^2 (\ln x)^{10} dx \stackrel{t=-\ln x}{=} \int_{+\infty}^0 e^{-2t} t^{10} de^{-t} = \int_0^{+\infty} e^{-3t} t^{10} dt$$

$$= \frac{1}{3^{11}} \int_0^{+\infty} e^{-3t} (3t)^{10} d(3t) \stackrel{u=3t}{=} \frac{1}{3^{11}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{10} du = \frac{1}{3^{11}} \Gamma(11)$$

$$= \frac{10!}{3^{11}} \Gamma(1) = \frac{10!}{3^{11}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{10!}{3^{11}} \cdot (-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \frac{10!}{3^{11}} \circ$$