厦门大学《线性代数》课程期中试题 A · 答案

考试日期：2013.11　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一．　计算题（共 50 分）

1．（6 分）设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&1&1\\3&-1&3\end{bmatrix}$, 计算（1）$AA^T$，（2）$A^TA$.

解（1）$AA^T=\begin{bmatrix}4&-2&6\\-4&2&-2\\8&-2&10\end{bmatrix}$，（2）$A^TA=\begin{bmatrix}14&-4&8\\-4&2&-2\\8&-2&10\end{bmatrix}$。

2.　（6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}x&1&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&0\\5&4&3&x+2\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix}x&1&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&0\\5&4&3&x+2\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}x&1&0\\0&x&1\\4&3&x+2\end{vmatrix}-5=x\left[x\begin{vmatrix}x&1\\3&x+2\end{vmatrix}+4\right]-5$$

$$=x^4+2x^3-3x^2+4x-5.$$

3.　（6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2&2\\2&2&2&\cdots&2&2\\2&2&3&\cdots&2&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2&2\\2&2&2&\cdots&2&2\\2&2&3&\cdots&2&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n-1&2\\2&2&2&\cdots&2&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2&2\\1&0&0&\cdots&0&0\\1&0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&n-3&0\\1&0&0&\cdots&0&n-2\end{vmatrix}$$

$$=1(-1)^3\begin{vmatrix}2&2&2&\cdots&2&2\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-3&0\\0&0&0&\cdots&0&n-2\end{vmatrix}=-2(n-2)!$$

$$=\left(2-\frac{n(n+1)}{2}\right)n!$$

4. （6 分）设$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&-1&k&2\\0&1&1&3\\1&-1&0&4\\2&0&2&5\end{bmatrix}$， $R(A)=3$，求k.

解 $$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&-1&k&2\\0&1&1&3\\1&-1&0&4\\2&0&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&-5&k-6&0\\0&1&1&3\\0&-3&-3&3\\0&-4&-4&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&3\\0&0&k-1&15\\0&0&0&12\\0&0&0&15\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&3\\0&0&k-1&15\\0&0&0&12\\0&0&0&15\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&3\\0&0&k-1&15\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

如果$R(A)=3$，则$k=1$，此时

$$A\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&1&3\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

5. （6 分）设$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$都是 4 维列向量，矩阵$|A|=|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=5$,矩阵$|B|=|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=-2$，求$|A+2B|$.

解 $$|A+2B|=|\alpha+2\beta,3\gamma_1,3\gamma_2,3\gamma_3|=|\alpha,3\gamma_1,3\gamma_2,3\gamma_3|+|2\beta,3\gamma_1,3\gamma_2,3\gamma_3|$$

$$=3^3|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+2\times3^3|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=3^3\times5-2\times3^3\times2=27$$

6. （10 分）设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，A 是可逆

矩阵．如果分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

（1）计算 PQR,（2）证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是$D-CA^{-1}B$是可逆的.

解 （1）$PQR=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

（2）显然$|P|=|R|=1$，故

$$|Q|=|PQR|=\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|,$$

因为矩阵 A 是可逆矩阵，故$|A|\neq 0$，因此$|Q|\neq 0$的充分必要条件为$|D-CA^{-1}B|\neq 0$，即矩阵 Q 可逆的充分必要条件是$D-CA^{-1}B$是可逆的.

7（10 分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$与矩阵$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ a-1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$等价，确定常数$a$的取值范围.

解 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ a-1 & 5 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

因为矩阵A与矩阵B等价，故矩阵它们的秩相同，因此$R(A)=R(B)=3$． 因此常数a满足的条件是$a\neq 1$.

二．（10 分）证明$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

证明 用归纳法证明. 当 n=1 时，结论显然成立，假设结论对 n−1 阶行列式成立，

即 $D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha$. 对 n 阶行列式按最后一行展开可得

$$D_n=2\cos\alpha D_{n-1}+1\times(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & & \\ & \text{O} & \text{O} & \text{O} & & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \\ & & & 1 & 2\cos\alpha & \\ & & & & 1 & 1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}$，

将 $D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha, D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha$ 代入上关系式整理可得

$$D_n=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha$$

$$=\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha-\cos(n-2)\alpha=\cos n\alpha\text{，}$$

根据归纳法原理可知结论成立.

三.（15 分）设 A, B, C 为 4 阶矩阵，满足 $3A^{-1}+2BC^TA^{-1}=B$，其中

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

求 A.

解　由 $|B|=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{vmatrix}=-1$ 可知矩阵 B 是可逆矩阵. 由已知有 $3A^{-1}+2BC^TA^{-1}=B$，

故

$$A=B^{-1}(3E+2BC^{-1})=3B^{-1}+2C^T.$$

由

$$[B,E]=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

可知

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

因此

$$A=3B^{-1}+2C^{T}=\begin{bmatrix}2&2&2&3\\3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\end{bmatrix}.$$

四．（20 分）设$\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\gamma=\begin{bmatrix}1\\2\\a\end{bmatrix}$，若$A=\alpha\beta^{T},B=\beta\alpha^{T}$，求解方程$A^2x=2Bx+\gamma$．

解 因为

$$A=\alpha\beta^{T}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}[0,2,1]=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&4&2\\0&-2&-1\end{bmatrix},$$

$$B=\beta\alpha^{T}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}[1,2,-1]=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&4&-2\\1&2&-1\end{bmatrix},$$

又$A^2=\alpha\left(\beta^{T}\alpha\right)\beta^{T}=3\alpha\beta^{T}=\begin{bmatrix}0&6&3\\0&12&6\\0&-6&-3\end{bmatrix}$，所以方程组$A^2x=2Bx+\gamma$，即

$$\begin{bmatrix}0&6&3\\0&12&6\\0&-6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\a\end{bmatrix}.$$

把η代入$Ax=b$可得$a=c$．化增广矩阵(A,b)为阶梯形

$$\begin{bmatrix}0&6&3&1\\-4&4&10&2\\-2&-10&-1&a\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}-2&2&5&1\\0&6&3&1\\0&-12&-6&a-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}-2&2&5&1\\0&6&3&1\\0&0&0&a+1\end{bmatrix}$$

当$a \neq -1$时， $R\left(A,b\right)=3, R(A)=2$，方程组无解；

当$a=-1$时， $R\left(A,b\right)=R(A)=2$，方程组有无穷多解，其通解是

$$x=k\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}，\text{其中}k\in R.$$

五.（5 分）设 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right]$是 n 阶矩阵，满足$A^T A=E$且$|A|=1$，又$\beta=\left[c_1,c_2,\cdots,c_n\right]^T$满足$\beta^T\alpha_n=1$，证明$B=\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta\right]$可逆，并求$|B|$.

证明　利用矩阵分块乘法的法则可得

$$A^T A=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{bmatrix}\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right]=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_1\end{bmatrix},$$

条件$A^T A=E$即为$\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}0, & i\neq j,\\1, & i=j.\end{cases}$

$$A^T B=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{bmatrix}\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\beta\right]=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\beta\\\alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\beta\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^T\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & \alpha_1^T\beta\\0 & 1 & \cdots & \alpha_2^T\beta\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

两边取行列式得$\left|A^T\right||B|=1$，因此矩阵 B 是可逆的，再由$|A|=1$可知$|B|=1$.