厦门大学《线性代数》课程试卷

信息 学院________系 2020 年级________专业

学年学期：20211 主考教师：线性代数教学组 A 卷（√）B 卷

注：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，|A|表示方阵 A 的行列式，R(A)表示矩阵 A 的秩

一、单项选择题（每小题 2 分，共 14 分）

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} =$ （ D ）。

(A) 240　　(B) 480　　(C) -240　　(D) -480

2. 设 A, B 为二阶方阵，A^*, B^*分别为 A 和 B 的伴随矩阵，如果 $|A| = 3$，$|B| = 4$，

则分块矩阵 $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（ B ）。

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 4B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 4A^* & 0 \end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix} 0 & 4A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 4B^* & 0 \end{pmatrix}$

3. 已知 A 是三阶矩阵且 $(A-E)^{-1} = A^2 + A + E$，则 $|A| =$（B ）。

(A) 0　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 8

4. 设 A 为 n 阶矩阵，且有 $A^2 = A$，则结论正确的是（ D ）。

(A) $A = 0$　　(B) $A = E$

(C) 若A不可逆，则$A = 0$　　(D) 若A可逆，则$A^2 = E$

5. 若 $A = E^2(1,2)E\big(23(1)\big)$，其中 $E(1,2)$，$E\big(23(1)\big)$ 为 4 阶初等矩阵，

则 $A^{-1} =$（ B ）。

(A) $E\big(23(1)\big)$　　(B) $E\big(23(-1)\big)$　　(C) $E(1,2)$　　(D) E

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$，若 $R(A^*) = 1$，则 $a =$（ C ）。

(A) 1　　(B) 3　　(C) 1 或 3　　(D) 无法确定

7. 已知线性方程组

$$\begin{cases} bx_1 - ax_2 = -2ab \ , \\ -2cx_2 + 3bx_3 = bc \ , \\ cx_1 + ax_3 = 0 \ , \end{cases}$$

则 (A)。

(A) 当 a,b,c 为任意实数时，方程组均有解

(B) 当 $a = 0$ 时，方程组无解

(C) 当 $b = 0$ 时，方程组无解

(D) 当 $c = 0$ 时，方程组无解

二、 填空题（每空格 3 分，共 18 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 的值 ____84_______。

2. 设 n 阶矩阵A、B、C，且 $AB = BC = CA = E$，则 $A^2 + B^2 + C^2 =$ ___________。

由于$\boldsymbol{AB = BC = CA = E}$，故$\mathrm{E} = \boldsymbol{ABCA = A(BC)A = A^2}$，

$\boldsymbol{E = BCAB = B^2}$，$\boldsymbol{E = CABC = C^2}$，所以$\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2 = 3E}$

3. 设矩阵 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a =$ __2_________。

4. 已知帕斯卡矩阵 P_n 具有性质 $|P_n| = 1$，则若将 $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ 中的元素 20 改为 19，则 $|P_4|$ 的值变为 ______0_____。

5. 已知线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解，则 $a =$ ___-1________。

6. 设 A 为可逆矩阵，且 $AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$，则 $\mathrm{R}(B)=$_____1______。

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$ 的值。

解：$=\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&x+1&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}$

$=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\0&0&0&-x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}0&x&-x\\x&0&-x\\0&0&-x\end{vmatrix}=x^4$

2. 设 3 阶矩阵 A,B,C 满足方程 $C(2A-B)=A$，试求矩阵 A，其中：

$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$。

解：因为 $(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}=(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B})$，

$(2\boldsymbol{C}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&4&8\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-4&8\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&11\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. 已知抛物线 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 过三点 $M_1(1,0)$，$M_2(2,-1)$，$M_3(3,0)$，求抛物线方程。

解 由题意，有

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2=0, \\ a_0+2a_1+4a_2=-1, \\ a_0+3a_1+9a_2=0. \end{cases}$$

解以 a_0, a_1, a_2 为未知量的方程组(＊)．由克拉默法则，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}=2,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix}=6, D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 9 \end{vmatrix}=-8, D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=2,$$

a0 = 3, a1 =-4, a2 = 1

4. 已知 $AB=A+B$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $(A-E)^{-1}$。

解：由于$AB=A+B$　　　有$\mathrm{AB}-\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{E}=\mathrm{E}$

$\mathrm{A(B-E)-(B-E)=(A-E)(B-E)=E}$　　所以　$(A-E)^{-1}=(B-E)$

5. 已知

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=1\ , \\ x_1-x_2+5x_4+ax_5=b\ , \\ 2x_1+4x_2-3x_3+x_4-4x_5=1\ , \\ x_1+3x_2-x_3-x_4=-1\ , \\ 2x_1-x_3+ax_4-4x_5=-1, \end{cases}$$

(1) a, b 为何值时，方程组有唯一解；

(2) a, b 为何值时，方程组无解；

(3) a, b 为何值时，方程组有无穷多解，并求其通解。

5. 【解析】对增广矩阵作初等行变换，有

$$[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&2&-1&1\\1&-1&0&5&a&b\\2&4&-3&1&-4&1\\1&3&-1&-1&0&-1\\2&0&-1&a&-4&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&2&-1&1\\0&-2&1&3&a+1&b-1\\0&2&-1&-3&-2&-1\\0&2&0&-3&1&-2\\0&-2&1&a-4&-2&-3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&2&-1&1\\0&-2&1&3&a+1&b-1\\0&0&0&0&a-1&b-2\\0&0&1&0&a+2&b-3\\0&0&0&a-7&-a-3&-b-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&2&-1&1\\0&-2&1&3&a+1&b-1\\0&0&1&0&a+2&b-3\\0&0&0&a-7&-a-3&-b-2\\0&0&0&0&a-1&b-2\end{array}\right].$$

(1) 当 $r(A)=r([A \mid b])=5$ 即 $a-7\neq 0, a-1\neq 0$，即 $a\neq 1$ 且 $a\neq 7$ 时方程组有唯一解.

(2) 当 $a=1, b\neq 2$ 时或 $a=7, b\neq 8$ 时均有 $r(A)=4\neq r([A \mid b])=5$，方程组无解.

(3) 当 $a=1, b=2$ 时有 $r(A)=r([A \mid b])=4<5$，方程组有无穷多解.

$$[A \mid b]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&2&-1&1\\0&-2&1&3&2&1\\0&0&1&0&3&-1\\0&0&0&3&2&2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]，方程组通解为 k_1\begin{bmatrix}5\\-9\\-18\\-4\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\-4\\0\\1\end{bmatrix}，k_1 为任意常数.$$

当 $a=7, b=8$ 时 $r(A)=r([A \mid b])=4<5$，方程组有无穷多解.

$$[A \mid b]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&2&-1&1\\0&-2&1&3&8&7\\0&0&1&0&9&5\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]，方程组通解为 k_2\begin{bmatrix}-7\\3\\0\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\-4\\0\\1\end{bmatrix}，k_2 为任意常数.$$

四、证明题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 证明：若行列式的某行元素全为 k $(k\neq 0)$，则这个行列式的全部代数余子式之和为该行的 $\frac{1}{k}$ 倍，即 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\frac{1}{k}|A|$ 。

证明：

不失一般性设：

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} k & k & \cdots & k \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{m} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{m} \end{vmatrix}$$

$$= k \sum_{j=1}^{n} A_{1j}$$

$$且 \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 0, i = 2,3,\cdots,n. 故 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \frac{1}{k}|A|$$

2. 设 A 是 5 阶非零矩阵，且 $A^2 = O$，证明：$R(A^*) = 0$。

证明：

因为 $A^2 = AA = O, r(A) = r(A) <= 5, r(A) <= 2$,或者通过 r(A)+r(A)<=5=>r(A)<=2

则$A^* = O, r(A^*) = 0$

3. 已知$a^2 \neq b^2$，证明：方程组 $\begin{cases} ax_1 + bx_4 = 1 \\ ax_2 + bx_3 = 1 \\ bx_2 + ax_3 = 1 \\ bx_1 + ax_4 = 1 \end{cases}$ 有唯一解，并求其解。

2.9 证明 由克拉默法则，得

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^2\neq 0,$$

故方程组有唯一解，且

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & a & b & 0 \\ 1 & b & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & -b \\ 0 & b & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a-b)(a^2-b^2),$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ b & 1 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=(a-b)(a^2-b^2),$$

同理，
$$D_3=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & b \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-b)(a^2-b^2)=D_4.$$

得方程组的唯一解为 $x_1=x_2=x_3=x_4=\dfrac{1}{a+b}$，即 $\boldsymbol{x}=\left[\dfrac{1}{a+b},\dfrac{1}{a+b},\dfrac{1}{a+b},\dfrac{1}{a+b}\right]^{\mathrm{T}}$.