Homework #1

Due: 2024-4-16 00:00 | 7 Questions, 100 Pts

Name: XXX

Question 1 (16') (向量空间).

格拉斯曼定律是整个色度学中最核心的内容，其做出了如下假设:

i 人眼能且仅能感知颜色的三种特征，即：色相（hue）、饱和度（saturation）和亮度（luminance）。

ii 两种色光，若它们对人眼的色觉刺激相同，则它们在色光混合实验中的表现就完全相同，无论这两种色光的光谱组成如何。

iii 无论两种色光的功率谱如何，只要它们具有相同的色相和饱和度，混合时就会产生另一种具有相同色相和饱和度的色光。

iv **（Abney 定律）**混合色光的亮度等于各组分色光的亮度之和。

根据格拉斯曼定律 ii，我们可以对于不同的色光 C，定义一个等价关系 $\sim$，若 $C_1 \sim C_2$，则 C_1 和 C_2 在人眼看来是相同的。

于是我们可以使用 $[C]$ 来表示色光 C 对人眼的刺激（即色光 C 的颜色），则 $[C]$ 可以视为色光 C 关于 $\sim$ 的等价类，且根据格拉斯曼定律 i, $[C]$ 将仅包含三个参数。

定义加法 $C_1 \oplus C_2$ 为 C_1 与 C_2 混合后得到的色光，则在 $\{[C]\}$ 上定义加法运算为

$$[C_1] + [C_2] = [C_1 \oplus C_2].$$

a (4') 请证明以上加法是良定义的，即 $\forall c_1 \in [C_1], c_2 \in [C_2], c_1 \oplus c_2 \in [C_1 \oplus C_2]$。

对于色光 C，若其功率谱为 $P(\lambda)$，那么定义 $\alpha \odot C$（$\alpha \in \mathbb{R}$）为：将 C 的功率谱变为 $\alpha P(\lambda)$ 而不改变 C 的其他特征所得到的色光。于是可以在 $\{[C]\}$ 上定义数乘运算为

$$\alpha \cdot [C] = [\alpha \odot C].$$

b (4') 请证明以上数乘是良定义的，即 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, c \in [C], \alpha \odot c \in [\alpha \odot C]$。

c (4') 请证明配置了如上加法运算与数乘运算的空间 $\{[C]\}$ 为线性空间。

对于 $[C]$ 定义其上亮度为 $L_V([C])$。

d (4') 请根据格拉斯曼定律证明以上运算为线性算子。

◀

Question 2 (20') (矩阵特征值).

对于矩阵 $\mathbf{A}$ 定义其上多项式为

$$f(\mathbf{A}) = c_k \mathbf{A}^k + c_{k-1} \mathbf{A}^{k-1} + \cdots + c_1 \mathbf{A} + c_0 \mathbf{I},$$

其中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。

a (4') 证明若 λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)$ 为 $f(\mathbf{A})$ 的特征值。

b (4') 若 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$，则 $f(\mathbf{A})$ 的全部特征值为 $\{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\}$。

有了这些工具，我们便可以定义矩阵上的指数运算 $e^{\mathbf{A}}$ 为

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k = \lim_{k\to\infty}\left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{k}\right)^k.$$

c (4') 证明 $e^{\mathbf{X}^{\mathbf{T}}} = \left(e^{\mathbf{X}}\right)^{\mathbf{T}}$。

*d (2') (Jacobi's formula) 证明对于任意方阵 $\mathbf{B}$，满足 $\det\left(e^{\mathbf{B}}\right) = e^{\operatorname{Tr}(\mathbf{B})}$。

这一性质将为常微分方程求解提供重要的性质保证。

对于由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 定义的平面，其上有一个生成子

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathbf{T}}$$

与投影算符

$$\mathbf{P} = -\mathbf{G}^2.$$

e (4') 请给出 $\mathbf{P}$ 关于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的表达式。

*f (2') 请给出 $\mathbf{R}(\theta) = e^{\mathbf{G}\theta}$ 的表达式，并验证其为 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ 平面上的旋转矩阵。

◀

Question 3 (11') (矩阵范数).

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的向量 $\boldsymbol{x}$ 定义运算 $\|\cdot\|_p \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p},$$

其中 x_i 为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量。

a (4') 请证明运算 $\|\cdot\|_p$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 上的一个范数，即 L_p 范数。

此后我们便可以在矩阵上定义范数。

b (3') 诱导范数

对于 $\mathbb{R}^{m,n}$ 上的矩阵 $\mathbf{A}$ 定义运算 $\|\cdot\|_{ip} \in \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}$ 为

$$\|\mathbf{A}\|_{ip} = \max \frac{\|\mathbf{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}, \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

i 请分别给出 $p = 1, 2, \infty$ 时 $\|\mathbf{A}\|_{ip}$ 的表达式。

ii 请证明该运算构成 $\mathbb{R}^{m,n}$ 上的一个范数.

我们还可以通过矩阵的元素与其奇异值定义范数。

定义逐元素范数 $\|\cdot\|_{ep} \in \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}$ 为

$$\|\mathbf{A}\|_{ep} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{p}\right)^{1/p}.$$

对于矩阵 $\mathbf{A}$ 的全体特征值 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}, k = \min\{m, n\}$ 定义 Schatten 范数为

$$\|\mathbf{A}\|_{sp} = \left(\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{p}\right)^{1/p}.$$

*c (2') 在不使用特征值的情况下，仅利用对于矩阵 $\mathbf{A}$ 的运算写出 $p = 1, 2$ 时 Scatten 范数的表达式。

*d (2') 证明 $p = 2$ 的情况下，Scatten 范数与逐元素范数等价。

◀

Question 4 (16') (度量张量).

为了在任意曲线坐标系中进行矢量微积分，我们定义任意局部坐标点 (x^1, x^2, x^3) 处当局部坐标有微小的增量时，矢径 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与坐标的微分 $\mathrm{d}x^i(i = 1, 2, 3)$ 之间的关系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_i \mathrm{d}x^i,$$

中的

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial x}{\partial x^i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\boldsymbol{k} \quad (i = 1, 2, 3)$$

为协变基或者自然局部基矢量，其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为笛卡尔坐标。

以球坐标为例，$(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$，对应于笛卡尔坐标

$$(x, y, z) = (x^1 \sin x^2 \cos x^3, x^1 \sin x^2 \sin x^3, x^1 \cos x^2).$$

a (4') 请给出球坐标下的协变基相对于笛卡尔坐标系的表达式。

定义一组 3 个与协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 互为对偶的逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$，满足对偶条件

$$\boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{g}_i = \delta_i^j,$$

其中 δ_i^j 为克罗内克张量，定义为

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

b (4') 请给出球坐标下的逆变基相对于笛卡尔坐标系的表达式。

c (4') 请给出矢径发生微小变化时长度的变化，即 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r^i \mathrm{d}r_i$。

d (4') 请给出两个矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 之间夹角的表达式，

$$\cos\psi = \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_1|}.$$

◀

Question 5 (10') (矩阵求导).
在弹性体仿真中，我们常常会遇到应变 ϵ_{ij}，其描述了材料中的一个区域变化后 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 相对于变化前 $\boldsymbol{r}$ 沿各个方向上的变动情况。

*a (2') 请根据定义 $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\epsilon_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 出发，证明 ϵ_{ij} 是对称二阶张量的分量。式中 $\mathrm{d}x^i$ 是介质的拉格朗日坐标的微分。

对于任意二阶张量 $\epsilon=\epsilon^i_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$ 定义其主不变量

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= \epsilon^i_{\cdot i},\\
\mathcal{J}_2 &= \frac{1}{2}\Big(\epsilon^i_{\cdot i}\epsilon^j_{\cdot j}-\epsilon^i_{\cdot j}\epsilon^j_{\cdot i}\Big),\\
\mathcal{J}_3 &= \det\epsilon,
\end{aligned}
$$

与前三阶矩

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_1^* &= \mathrm{Tr}(\epsilon),\\
\mathcal{J}_2^* &= \mathrm{Tr}(\epsilon\cdot\epsilon),\\
\mathcal{J}_3^* &= \mathrm{Tr}(\epsilon\cdot\epsilon\cdot\epsilon).
\end{aligned}
$$

*b (2') 请利用前三阶矩来表示主不变量。

*c (2') 请利用主不变量来表示前三阶矩。

对于具有应变能密度 ω 的弹性材料，其满足格林公式

$$\sigma=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\epsilon},$$

其上切线模量定义为

$$\mathbf{C}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\epsilon}.$$

**d (2') 设线弹性材料的应变能密度为

$$\omega(\epsilon)=\frac{1}{2}\Big[a_0(\mathcal{J}_1^*)^2+a_1\mathcal{J}_2^*\Big],$$

请求出 σ 和 $\mathbf{C}$ 的矢量表达式及协变分量表达式.

*e (2') 定义应力偏量 $\sigma'=\sigma-\frac{1}{3}\mathcal{J}_1(\sigma)\mathbf{I}$，等效应力 $\sigma_{\mathtt{eq}}=\left(\frac{2}{3}\sigma':\sigma'\right)^{1/2}$，请求出

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathtt{eq}}}{\mathrm{d}\sigma}.$$

◀

Question 6 (18') (矢量恒等式证明).
请利用 Levi-Civita 符号的性质完成如下四道证明:

a (4')

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

b (4')

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

c (3')

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\end{aligned}$$

d (3')

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

以下为两道有趣的张量性质

*e (2') 对于矢量 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}$，正交张量 $\mathbf{Q}$，有

$$(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{v})\times(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{w})=(\det\mathbf{Q})\mathbf{Q}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}).$$

*f (2') 对于矢量 $\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}$，正则（即行列式非零）的二阶张量 $\mathbf{B}$，有

$$(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{v})\times(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{w})=(\det\mathbf{B})\left(\mathbf{B}^{-1}\right)^{\mathbf{T}}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}).$$

◀

Question 7 (9') (矢量对偶张量).
对于叉乘，计算机实现中总是将矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 转换为与其对偶的二阶反对称张量 Ω，满足

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}\epsilon:\Omega,$$

其中 ϵ 为 Eddington 张量，其协变与逆变分量为

$$\epsilon_{ijk}=\sqrt{g}e_{ijk},\quad \epsilon^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk},$$

其中 $g=\det\{g_{ij}\}$。
请证明：

*a (3') 对于任一矢量 $\boldsymbol{u}$，将满足 $\Omega\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}$

*b (3')

$$\Omega=-\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\omega}=-\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\epsilon}$$

*c (3') 对于任意与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行的矢量 $\boldsymbol{v}$ 而言，有 $\Omega\cdot\boldsymbol{v}=0$

◀