厦门大学《 线性代数 》课程试卷

信息 学院 系 2018 年级 大类 专业

学年学期：181901 主考教师：线性代数教研组 A卷(√)B卷()

注：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，|A|表示方阵 A 的行列式，r(A)表示矩阵 A 的秩

一、 单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1．二次型$f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 的规范形是（ ）B 【二次型】

（A）$z_1^2+z_2^2+z_3^2$ （B）$z_1^2-z_2^2-z_3^2$

（C）$z_1^2+z_2^2-z_3^2$ （D）$z_1^2-z_2^2$

2．设向量组$\alpha=(a,1,1)$，$\beta=(1,a,1)$，$\gamma=(1,1,a)$，则向量组（ ）C

（A）$a\neq1$时，线性无关 （B）线性无关。

（C）$a\neq1$，且$a\neq-2$时，线性无关 （D）线性相关。

3．A, B 均是 n 阶正交阵, 若|A|+|B|=0，则 A+B 必为（ ）

（A） 初等阵 （B）正交阵；

（C） 对称阵 （D）奇异阵

4．设二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，其中$A^T=A$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则$f$为正定二次型的充分必要条件是（ ） D【正定二次型】

（A）f的负惯性指数是 0 （B）存在正交矩阵Q，使得$Q^TAQ=E$

（C）f的秩为n （D） 存在可逆矩阵C，使得$A=C^TC$

5．设AX=λX（X 为非零向量），P 为可逆矩阵，则（ ）D

（A） $P^{-1}AP$的特征值为$\frac{1}{\lambda}$，其对应特征向量为PX

（B）$P^{-1}AP$的特征值为λ，其对应特征向量为PX

（C）$P^{-1}AP$的特征值为$\frac{1}{\lambda}$，其对应特征向量为$P^{-1}X$

（D）$P^{-1}AP$的特征值为λ，其对应特征向量为$P^{-1}X$

6．已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则向量组（ ）C

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性无关

（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关

（C） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

（D） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

7. 设方阵 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中（　　　　　　）（C）

（A）必有一列元素为 0。

（B）必有两列对应成比例。

（C）必有一列向量是其余向量的线性组合。

（D）任一列向量是其余列向量的线性组合。

8. 设 A 为 n 阶方阵，且秩 $r(A)=n-1$，α_1,α_2 是 $Ax=0$ 的两个不同的解，则 $Ax=0$ 的通解为（　　　　　）A

（A） $k\alpha_1$

（B） $k\alpha_2+a_1$

（C） $k(\alpha_1-\alpha_2)$

（D） $k(\alpha_1+\alpha_2)$

9. 如果（　　　　　），则 n 阶矩阵 A 与矩阵 B 相似。C

（A） $|A|=|B|$

（B） $r(A)=r(B)$

（C）A 与 B 有相同的特征值，且 n 个特征值各不相同

（D）A 与 B 有相同的特征多项式

10. 下列向量集合按向量的加法和数乘运算构成 R 上一个向量空间的是（　　　　　）A

（A）R^n 中，分量满足 $x_1+x_2+....x_n=0$ 的所有向量

（B）R^n 中，分量是整数的所有向量

（C）R^n 中，分量满足 $x_1+x_2+....x_n=1$ 的所有向量

（D）R^n 中，分量满足 $x_1=1,x_2,x_3....,x_n$ 可取任意实数的所有向量

二 填空题（15 分）：

1. 已知 a_1,a_2 线性无关，$R(a_1,a_2,a_3)=2$，则 $R(a_2,a_3)=$___1 或 2___.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，$|A|\neq 0$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值____________. $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$

3．设 R^4 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，令 $\beta_1=a_1+a_2,\beta_2=a_2+a_3,\beta_3=a_3+a_4,\beta_4=a_1+a_4$，则子空间 $W=\{k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4\mid k_i\in F,i=1,2,3,4\}$ 的维数为________. 3

4. 设线性方程组 $\begin{cases}x_2+ax_3+bx_4=0,\\-x_1+cx_3+dx_4=0,\\ax_1+cx_2-ex_4=0,\\bx_1+dx_2+ex_3=0,\end{cases}$ 有非零解，则参数 a,b,c,d,e 应满足条件________________.

$ad-bc-e=0$

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是________________． $t>\frac{3}{5}$

三 计算题（50 分）：

1、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2（15 分）

（1）求 a 的值

（2）求正交变换 $x=Qy$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形

（3）求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解

二次型的矩阵 A 为：$A=\begin{bmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$|A|=\begin{vmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{vmatrix}=0$ 得 a=0

这里 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，可求出其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$

解 $(2E-A)x=0$，得特征向量为：$\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(0,0,1)$

解 $(0E-A)x=0$，得特征向量为：$\alpha_3=(1,-1,0)$

由于 α_1,α_2 α_3 已经正交，直接将 α_1,α_2，α_3 单位化，得：

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\eta_2=(0,0,1),\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

令 $Q=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3]$，即为所求的正交变换矩阵，由 x=Qy，

可化原二次型为标准形：$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2$.

（III）由 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2=0$，得 $y_1=0,y_2=0,y_3=k$（k 为任意常数）.

从而所求解为：x=Qy=$[\eta_1\quad\eta_2\quad\eta_3]\begin{bmatrix}0\\0\\k\end{bmatrix}=k\eta_3=\begin{bmatrix}c\\-c\\0\end{bmatrix}$，其中 c 为任意常数。

2、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$ [相似对角化]

（1）求 a, b 的值；

（2）求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵

答案：

(I) $A\sim B\Rightarrow \sum a_{ii}=\sum b_{ii},|A|=|B|$

$$\begin{cases}0+3+a=1+b+1\\ 2a-3=b\end{cases}$$

解出 $a=4,b=5$

(II) 因为 $A\sim B$,易见 B 的特征值：1，1，5

而得 A 的特征值: 1, 1, 5

而 $\lambda=1$ ，由 $(E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系：$\alpha_1=(2,1,0)^T,\alpha_2=(-3,0,1)^T$

对 $\lambda=5$ ，由 $(5E-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}5 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得基础解系：$\alpha_3=(-1,-1,1)^T$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ ，有 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 5\end{bmatrix}$

3、已知线性方程组（15 分）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2, \end{cases}$

(1) a,b为何值时，方程组有解；

(2)方程组有解时，求出方程组的导出组的基础解系；

(3)方程组有解时，求出方程组的全部解.

89.【解】$[A|b]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2a \end{array}\right]$.

(1)$a=1,b=3$ 时，$r(A)=r([A|b])$，方程组有解.

(2)导出组基础解系为：$\xi_1=[1,-2,1,0,0]^T$，$\xi_2=[1,-2,0,1,0]^T$，$\xi_3=[5,-6,0,0,1]^T$.

(3)方程组通解：非齐次特解为 $\eta=[-2,3,0,0,0]^T$，故通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3+\eta$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数.

4、已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，判断 A 是否正定，并求正定矩阵 B，使得$A=B^2$。（10 分）

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$，因为 A 的特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$全大于 0，故 A 是正定矩阵。

求出 A 的特征向量，依次为$X_1=(-1,1,0)^T$，$X_2=(-1,0,1)^T$，$X_3=(1,1,1)^T$

经施密特正交化，得$\gamma_1=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$，$\gamma_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，$\gamma_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

令$C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则 C 是正交矩阵，且$C^TAC=C^{-1}AC=\Lambda=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$，

则$A=C\Lambda C^T=C\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}C^TC\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}C^T$。

令$B=C\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}C^T$，则 B 对称且与$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$合同，故 B 是正定矩阵（或由 B 的特征值全大于 0，得 B 正定），并满足$A=B^2$，其中$B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$为所求。

四 证明题（15 分）：

1．（5 分）已知$\boldsymbol{\eta}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个特解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系。证明：$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的$n-r+1$个线性无关解向量；

24.【证】(1)$A(\eta+\xi_i)=A\eta=b$，$i=0,1,2,\cdots,n-r$（其中$\xi_0=0$），故$\eta+\xi_i$，$i=0,1,2,\cdots,n-r$均是$Ax=b$的解向量.

设存在数$k_0,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$，使得

$$k_0\eta+k_1(\eta+\xi_1)+k_2(\eta+\xi_2)+\cdots+k_{n-r}(\eta+\xi_{n-r})=0. \quad (*)$$

(*)式两端左边乘A，得 $k_0A\eta+k_1A(\eta+\xi_1)+k_2A(\eta+\xi_2)+\cdots+k_{n-r}A(\eta+\xi_{n-r})=0$，

整理得$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})b=0$，其中$b\neq 0$. 故

$$k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0, \quad (**)$$

代入(*)式，得
$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0.$$

因$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是对应齐次方程组的基础解系，故线性无关，得$k_i=0$，$i=1,2,\cdots,n-r$.

代入(**)式，得$k_0=0$. 从而有$\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$是$Ax=b$的$n-r+1$个线性无关解向量.

(2)设η^*为$Ax=b$的任一解，则

$$\eta^*=\eta+\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r},$$

且
$$\begin{aligned}\eta^*&=\eta+\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}\\&=\eta+\lambda_1(\xi_1+\eta-\eta)+\lambda_2(\xi_2+\eta-\eta)+\cdots+\lambda_{n-r}(\xi_{n-r}+\eta-\eta)\\&=(1-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_{n-r})\eta+\lambda_1(\xi_1+\eta)+\lambda_2(\xi_2+\eta)+\cdots+\lambda_{n-r}(\xi_{n-r}+\eta),\end{aligned}$$

故$Ax=b$的任一个解η^*均可由向量组$\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$线性表出.

2．（5 分）设A为对称矩阵，证明当t充分大时，$tE+A$是正定矩阵。

证明：因为A为对称矩阵，A可对角化，存在可逆矩阵P，使得

$$tE+A=tE+P^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P=P^{-1}tEP+P^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P=P^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1+t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+t\end{bmatrix}P$$，所以tE + A的特征值为λ_1+t，λ_2+t，…，λ_n+t，当t充分大时，它们全大于零，所以$tE+A$是正定矩阵。

3.（5 分）设α，β为 3 维列向量，β^T为β的转置，若矩阵$\alpha\beta^T$相似于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，证明$\beta^T\alpha=2$

证明 1：因为 $\alpha\beta^T$相似于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到$\alpha\beta^T$的特征值为 2，0，0，

而$\beta^T\alpha$是一个常数，是矩阵$\alpha\beta^T$的对角元素之和，则$\beta^T\alpha=2+0+0=2$

证明 2：因为 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，根据相似矩阵有相同的特征值，得到 $\alpha\beta^T$ 的特征值为 2，0，0

又由于 $\left(\alpha\beta^T\right)\alpha = \alpha\left(\beta^T\alpha\right) = \left(\beta^T\alpha\right)\alpha$ ， $\beta^T\alpha$ 为矩阵的非零特征值，即 $\beta^T\alpha = 2$