历届试题选（曲面积分）

一、设Σ是椭球面$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{1}=1$上半部分之外侧，则$\iint\limits_{\Sigma} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____。

（A）$\dfrac{1}{3}\sqrt{2}\pi$；（B）$\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\pi$；（C）$\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\pi$；（D）$\dfrac{1}{6}\sqrt{2}\pi$。

(2005—2006)

解：作辅助面Σ_1：$z=0$，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}\le 1$，下侧.

$$\iint\limits_{\Sigma} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

记Σ与Σ_1所围成的区域为Ω，由高斯公式，得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(4x^3+2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{（由高斯公式）}$$

因为Ω关于yoz面和zox面对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\ ,\quad \iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\ .$$

所以，$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi\ ,$$

其中$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\Omega$的体积.

又 $$\iint\limits_{\Sigma_1} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\ ,$$

故 $$\iint\limits_{\Sigma} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi\ .$$

答案：C.

二、设Σ是整个球面$x^2+y^2+z^2=9$，取外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的值是 ________。 (2005—2006)

解：记Ω为球体$x^2+y^2+z^2\le 9$.

由高斯公式，$\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3^3 = 36\pi$.

三、设Σ是平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$在第一卦限的部分，则$\iint_{\Sigma}(2x+\frac{4}{3}y+z)\,\mathrm{d}S=$________________。

(2008—2009)

解：$\iint_{\Sigma}(2x+\frac{4}{3}y+z)\,\mathrm{d}S = 4\iint_{\Sigma}(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4})\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$.

记D为Σ在xoy面上的投影，则$D=\{(x,y)|\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$，于是$D$的面积为$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3$.

由于$z=4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3})$，则

$$\iint_{\Sigma}(2x+\frac{4}{3}y+z)\,\mathrm{d}S = 4\iint\limits_{D}\sqrt{1+(-2)^2+(-\frac{4}{3})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{61}\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\sqrt{61}.$$

四、计算$I=\oiint\limits_{\Sigma}[(x+y)^2+z^2+2yz]\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=2x+2z$ 。 (2008—2009)

解：$I=\oiint\limits_{\Sigma}[(x+y)^2+z^2+2yz]\,\mathrm{d}S = \oiint\limits_{\Sigma}[x^2+y^2+z^2+2xy+2yz]\,\mathrm{d}S$.

因为Σ关于zox面对称，$f(x,y,z)=2y(x+z)$满足$f(x,-y,z)=-2y(x+z)=-f(x,y,z)$，

则 $\oiint\limits_{\Sigma}(2xy+2yz)\,\mathrm{d}S = \oiint\limits_{\Sigma}y(2x+2z)\,\mathrm{d}S = 0$.

于是， $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S = 2\oiint\limits_{\Sigma}(x+z)\,\mathrm{d}S$.

因为$x^2+y^2+z^2=2x+2z$可改写成$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2$，因此，Σ的形心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(1,0,1)$，

Σ的半径为$R=\sqrt{2}$，面积为$A=4\pi(\sqrt{2})^2=8\pi$.

由形心坐标公式，$\bar{x}=\frac{1}{A}\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S$，$\bar{z}=\frac{1}{A}\oiint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，因此，

$$I=2\oiint\limits_{\Sigma}(x+z)\,\mathrm{d}S = 2(\bar{x}+\bar{z})A = 2\cdot(1+1)\cdot 8\pi = 32\pi.$$

五、计算$I=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界曲面。

(2008—2009)

解：联立方程$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1 \end{cases}$，消去$z$，得$x^2+y^2=1$. 因此，$\Sigma$围成的区域在$xoy$面上的投影区域为

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

设$\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}, (x,y)\in D$，$\Sigma_2: z=1, (x,y)\in D$，则

$$I=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{1+(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D(x^2+y^2)\sqrt{1+0^2+0^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(\sqrt{2}+1)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=(\sqrt{2}+1)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2}).$$

六、计算$\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是抛物面$z=4-x^2-y^2$在$z\ge 0$部分，方向取下侧。

(2010—2011)

解：易知抛物面$z=4-x^2-y^2$在xoy面上的投影区域为$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\}$.

作辅助面$\Sigma_1: z=0, (x,y)\in D$，取上侧，于是，

$$\iint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到$\Sigma+\Sigma_1$取的是内侧，记$\Sigma+\Sigma_1$所围成的区域为Ω，则由高斯公式，有

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega}(z+0+0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

利用截面法，得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^4\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le 4-z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^4 z\cdot\pi(4-z)\mathrm{d}z=-\pi(2z^2-\frac{1}{3}z^3)\Big|_0^4=-\frac{32}{3}\pi.$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\cdot\pi\cdot4=16\pi$,

故 $$\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{32}{3}\pi-16\pi=-\frac{80}{3}\pi.$$

七、计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 是抛物面 $z=2-x^2-y^2\ (1\le z\le 2)$ 的上侧。 (2010—2011)

解：易知抛物面 Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

添加辅助面 $\Sigma_1: z=1,\ (x,y)\in D$，方向为下侧，则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

设 Ω 为 Σ 和 Σ_1 围成的立体，则由高斯公式，得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2z+1-x^2z-2x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_1^2(2-z)\mathrm{d}z=\pi(2z-\frac{1}{2}z^2)\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{\Sigma_1} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-(-\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

故 $\quad I=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$

八、计算 $I=\iint_\Sigma (y^2-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z^2-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$ 的下侧。 (2010—2011)

解：锥面 Σ 在 xoy 面上的投影为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

作辅助面 $\Sigma_1: z=1,\ (x,y)\in D$，方向上侧.

于是， $\quad I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z^2-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$-\iint_{\Sigma_1}(y^2-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z^2-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

记 Σ 和 Σ_1 所围成的立体区域为 Ω，由高斯公式，得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z^2-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega[\frac{\partial}{\partial x}(y^2-z)+\frac{\partial}{\partial y}(z^2-x)+\frac{\partial}{\partial z}(x^2-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

又 $\quad \iint_{\Sigma_1}(y^2-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z^2-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 D 关于 x 轴对称，则 $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

由于 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是，

$$\iint_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.$$

故 $\qquad I=0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}.$

九、计算 $I=\iint_\Sigma \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数。（2011—2012）

解：因为 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则 $x^2+y^2+z^2=a^2$，于是，

$$I=\iint_\Sigma \frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\iint_\Sigma ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Σ 在 xoy 面上的投影为 $D=\{(x,y)\big|\,x^2+y^2\le a^2\}$.

作辅助面 $\Sigma_1: z=0$，$(x,y)\in D$，取下侧.

$$I=\frac{1}{a}\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{a}\iint_{\Sigma_1} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

记 Σ 和 Σ_1 围成的立体区域为 Ω，则由高斯公式，有

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &=-\iiint_\Omega [\frac{\partial}{\partial x}(ax)+\frac{\partial}{\partial z}((z+a)^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=-\iiint_\Omega (a+2(z+a))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=-\iiint_\Omega (2z+3a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=-\int_{-a}^0\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le a^2-z^2}(2z+3a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\int_{-a}^0(2z+3a)\cdot\pi(a^2-z^2)\mathrm{d}z\\
&=-\pi\int_{-a}^0(2a^2z-2z^3+3a^3-3az^2)\mathrm{d}z\\
&=-\pi(a^2z^2-\frac{1}{2}z^4+3a^3z-az^3)\Big|_{-a}^0\end{aligned}$$

$$=\pi(a^4-\frac{1}{2}a^4-3a^4+a^4)$$

$$=-\frac{3}{2}\pi a^4.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-a^2\cdot\pi a^2=-\pi a^4.$$

故 $I=-\frac{3}{2}\pi a^3-(-\pi a^3)=-\frac{1}{2}\pi a^3.$

十、计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是平面$z=x+1$被圆柱面$x^2+y^2=1$所截的部分. （2014—2015）

解：设$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_D(x+x+1)\sqrt{1+1^2+0^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_D(2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为D关于y轴对称，则$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，于是，

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 1^2=\sqrt{2}\pi.$$

十一、计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是曲面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$在$z\ge 0$的部分. (2016—2017)

解：由$x^2+y^2+z^2=a^2$可得$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，Σ在xoy面上的投影为$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le a^2\}$.

因为Σ关于zox面对称，则$\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S=0$，同理$\Sigma$关于$yoz$面对称，则$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=0$.

于是， $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$

$$=\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2+(\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\cdot\pi a^2=\pi a^3.$$

十二、计算$\oiint\limits_{\Sigma}y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是正方体$\Omega:0\le x\le a,$ $0\le y\le a, 0\le z\le a$的表面，取外侧. (2016—2017)

解：设Ω为Σ围成的立体区域，则由高斯公式，得

$$\oiint\limits_{\Sigma}y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(yx-yz)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(y^2+xz)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} (y + 0 + x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a (x + y)\mathrm{d}z$$

$$= a\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a (x + y)\mathrm{d}y$$

$$= a\int_0^a (ax + \frac{1}{2}a^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}a^4 = a^4.$$

十三、计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (xy - y + y^2 + z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 在第一卦限中的部分.

（2017—2018）

解：$I = \iint_{\Sigma} (xy - y + y^2 + z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} ((x - 1 + y)y + z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} (1 - y)z\mathrm{d}S$

Σ 在 yoz 面的投影为三角形区域 $D = \{(y, z) | y + z \le 1, y \ge 0, z \ge 0\}$.

于是，$I = \iint_{D} (1 - y)z\sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} (1 - y)z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 (1 - y)^3\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

十四、计算 $I = \iint_{\Sigma} [(x + y + z)^2 - 2xz]\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = x + z$.　（2017—2018）

解：$I = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz)\mathrm{d}S$.

因为 Σ 关于 zox 面对称，且函数 $f(x, y, z) = 2xy + 2yz$ 满足 $f(x, -y, z) = -2xy - 2yz = -f(x, y, z)$，故

$$\iint_{\Sigma} (2xy + 2yz)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} y(2x + 2z)\mathrm{d}S = 0.$$

方程 $x^2 + y^2 + z^2 = x + z$ 可改写成 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$，因此，

Σ 的形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$，半径为 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$，面积为 $A = 4\pi(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 2\pi$.

由形心坐标公式，有 $\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S$，$\bar{z} = \frac{1}{A}\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S$，故 $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}S = \bar{x}A$，$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = \bar{z}A$.

$$I = \iint_{\Sigma} (x + z)\mathrm{d}S = (\bar{x} + \bar{z})A = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \cdot 2\pi = 2\pi.,$$

十五、利用 Gauss 公式计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为椭圆抛物面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}$（$0\le z\le 1$）的上侧. (2017—2018)

解：Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\big|\, x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\}$.

作辅助面 $\Sigma_1: z=0,(x,y)\in D$，取下侧，设 Σ 和 Σ_1 围成的立体区域为 Ω.

于是， $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由高斯公式，有

$$\begin{aligned}
&\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(xz)+\frac{\partial}{\partial y}(2zy)+\frac{\partial}{\partial z}(3xy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=3\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=3\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad\text{（由对称性）}\\
&=3\int_0^1 z\cdot\pi\cdot\sqrt{1-z}\cdot 2\sqrt{1-z}\mathrm{d}z\\
&=6\pi\int_0^1 z(1-z)\mathrm{d}z=\pi.
\end{aligned}$$

又因为 $\iint\limits_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

因为 D 关于 x 轴对称， $f(x,y)=3xy$ 满足 $f(x,-y)=-3xy=-f(x,y)$，则 $\iint\limits_{D}3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，因此，

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

故 $I=\pi-0=\pi.$

十六、计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ $(z\ge 0)$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx$（$0<r<R$）所截的部分，方向取上侧. (2017—2018)

解：曲面$\Sigma: z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$在$xoy$平面投影区域为$D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le 2rx\}$.

由$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2Rx=0$可得

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x-R}{z},\ z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y}{z}.$$

则
$$I=\iint_\Sigma[(y-z)(-z_x)+(z-x)(-z_y)+(x-y)\cdot 1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Sigma[(y-z)\frac{x-R}{z}+(z-x)\frac{y}{z}+(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Sigma[R-\frac{Ry}{z}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D[R-\frac{Ry}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为Σ关于zox面对称，$f(x,y,z)=\dfrac{Ry}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}$满足$f(x,-y,z)=\dfrac{-Ry}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}=-f(x,y,z)$，

故
$$\iint_D\frac{Ry}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因此，$I=R\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\cdot\pi r^2=\pi Rr^2$.

十七、设曲面Σ为上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧，试将第二类曲面积分$I=\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$转化成第一类曲面积分，并计算其值. (2018—2019)

解：$z_x=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=-\dfrac{x}{z}$，$z_y=\dfrac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=-\dfrac{y}{z}$.

因此，Σ的法向量为$\vec{n}=(-z_x,-z_y,1)=(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z},1)$，单位法向量为

$$\vec{n}^0=\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+1}}(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1)=(x,y,z).$$

因此，法向量的方向余弦为$\cos\alpha=x$，$\cos\beta=y$，$\cos\gamma=z$.

于是，$I=\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_{\Sigma}(1\cdot\cos\alpha+1\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(x+y+z^2)\mathrm{d}S.$$

因为Σ关于yoz面对称，且$f(x,y,z)=x$满足$f(-x,y,z)=-x=-f(x,y,z)$，则$\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}S=0$.

同理，Σ关于zox面对称，且$f(x,y,z)=y$满足$f(x,-y,z)=-y=-f(x,y,z)$，则$\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}S=0$.

故 $$I=\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S=\iint_{D}(1-x^2-y^2)\sqrt{1+(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2+(\frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$为$\Sigma$在$xoy$面上的投影区域.

利用极坐标变换，得

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}r\mathrm{d}r=2\pi(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}})\Big|_0^1=\frac{2}{3}\pi.$$

十八、计算第二类曲面积分$I=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是由三个坐标面和平面$x+y+z=1$所围成的空间有界区域的整个边界曲面，取外侧. (2018—2019)

解：设Ω是由三个坐标面和平面$x+y+z=1$所围成的空间有界区域.

由高斯公式，

$$I=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial x}(z^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 这里$D_z=\{(x,y)\big|x+y\le 1-z,x\ge 0,y\ge 0\}$.

$$=2\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1(z-2z^2+z^3)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

十九、计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}S$，其中 Σ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分.

(2019—2020)

解：Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\big|x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}x(1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\iint\limits_{D}x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1 x[(1-x)^2-\frac{1}{2}(1-x)^2]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4})=\frac{\sqrt{3}}{24}.$$

二十、设曲面 Σ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算第二类曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$.

(2019—2020)

解：$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

记 Ω 为 Σ 围成的球体：$x^2+y^2+z^2\le 1$，则由高斯公式，得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

利用球坐标变换，有

$$I=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$=3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}=\frac{12}{5}\pi.$$

二十一、计算第一类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(xz+yz+z^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分.

(2020—2021)

解：$I=\iint\limits_{\Sigma}(xz+yz+z^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$.

记 $D=\{(y,z)\,|\,y+z\le 1,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ 为 Σ 在 yoz 面的投影，于是，

$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{D}z\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\sqrt{3}\iint\limits_{D}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\sqrt{3}\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}y\\
&=\sqrt{3}\int_0^1 z(1-z)\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}
$$

二十二、计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，

其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 的上侧. (2020—2021)

解：Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

作辅助面 $\Sigma_1: z=1,\ (x,y)\in D$ ，取下侧. 记 Ω 为 Σ 和 Σ_1 围成的区域.

于是，
$$
\begin{aligned}
I=&\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2+z^2)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&-\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2+z^2)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y .
\end{aligned}
$$

由高斯公式，得

$$
\begin{aligned}
&\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2+z^2)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}((y^2+z^2)x)+\frac{\partial}{\partial y}((x^2+z^2)y)+\frac{\partial}{\partial z}((x^2+y^2)z)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{（注：内侧）}\\
&=-2\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_r^1(r^2+z^2)r\mathrm{d}z \qquad \text{（用柱坐标）}\\
&=-2\cdot 2\pi\cdot\int_0^1\left[r^3(1-r)+\frac{r}{3}(1-r^3)\right]\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

$$=-2\cdot 2\pi\cdot(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15})=-\frac{3}{5}\pi.$$

又 $$\iint_{\Sigma_1}(y^2+z^2)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=-2\pi\cdot\frac{1}{4}=-\frac{\pi}{2}.$$

故 $$I=-\frac{3}{5}\pi-(-\frac{1}{2}\pi)=-\frac{\pi}{10}.$$

二十三、设 Σ 是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分取下侧，则第二类曲面积分 $\iint_{\Sigma}(6x+4y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________________. (2021—2022)

解：$\iint_{\Sigma}(6x+4y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\iint_{\Sigma}(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

记 $D=\{(x,y)|\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$ 为 Σ 在 xoy 面上的投影.

于是，$\iint_{\Sigma}(6x+4y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-12\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-12\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=-36$.

二十四、计算第一类曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为旋转抛物面 $2z=x^2+y^2$ 在 $0\le z\le 2$ 的部分. (2021—2022)

解：Σ 在 xoy 面上拱到投影区域为 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}$，于是，

$$I=\iint_{D}\sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D}(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(1+r^2)\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot(\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4})\Big|_0^2=2\pi\cdot(2+4)=12\pi.$$

二十五、计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成空间区域的整个边界曲面的外侧. (2021—2022)

解：记 Ω 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的空间区域.

由高斯公式，得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}[\frac{\partial}{\partial x}(x^3)+\frac{\partial}{\partial y}(y^3)+\frac{\partial}{\partial z}(z^3+x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$=3\cdot2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}(2-\sqrt{2})\pi.$$