厦门大学《线性代数》课程期中试卷

__信息__学院________系__2017__年级________专业

学年学期：171801 主考教师：线性代数教学组 A 卷（√）B 卷

一、单项选择题（每小题 2 分，共 14 分）

1. 已知 $2n$ 阶行列式 D 的某一列元素及其余子式都等于 a，则 D=（　　　　）。

（A）0　　（B）a^2　　（C）$-a^2$　　（D）na^2

2. 若 $R(A)=R(B)=r$，则必有（　　　　）。

（A）A 与 B 等价

（B）A 与 B 的标准型矩阵相同

（C）A 与 B 的行阶梯型矩阵的非零行数相同

（D）A 与 B 的所有 $r-1$ 阶子式都不为零

3. 已知矩阵 A 和 B 均为对称矩阵，则以下为对称矩阵，除了（　　　　）。

（A）$A-B$　　（B）AB　　（C）$2A^2+3A+4E$　　（D）A^*+B^*

4. 设 A 是可逆矩阵，将 A 的第 2 行的 3 倍加到第 1 行得 B，则（　　　　）。

（A）将 A^* 的第 2 列的 3 倍加到第 1 列得到 B^*

（B）将 A^* 的第 2 列的（−3）倍加到第 1 列得到 B^*

（C）将 A^* 的第 1 列的 3 倍加到第 2 列得到 B^*

（D）将 A^* 的第 1 列的（−3）倍加到第 2 列得到 B^*

5. 下列叙述一定正确，除了（　　　　）。

（A）若 $AB=E$，则 $|A|\neq 0$

（B）若 A、B、C 均为 n 阶矩阵，$ABC=E$，则 $A^{-1}C^{-1}B^{-1}=E$

（C）若 A、B 均为 n 阶不可逆矩阵，则 AB 必不可逆

（D）若 $A\neq 0$，则 $R(A)\geq 1$

6. 若 A 为 n 阶可逆矩阵（n≥2），则 $(A^{-1})^* =$（　　　　）。

（A）$|A|A^{-1}$　　　（B）$|A|A$　　　（C）$|A^{-1}|A^{-1}$　　　（D）$|A^{-1}|A$

7. 以下是方阵 A 可逆的等价命题，除了（　　　　）。

（A）A 行满秩　　　（B）A 的伴随矩阵 A^* 存在

（C）A 与 E 等价　　　（D）存在矩阵 B，使 AB=E $AB = E$

二、填空题（每空格 3 分，共 18 分）

1. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$__________________________.

2. 设 $\alpha = (1,2,3)^T$， $\beta = (1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$， $A = \alpha\beta^T$， 则 $A^n =$__________________________.

3. 设分块矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -E_{n-1} \\ -1 & 0^T \end{pmatrix}$，则 $\det A =$__________________________.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = AB^{-1}$，则矩阵 C^{-1} 中，第 3 行第 2 列的元素是________.

5. 设四阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1} =$__________________________.

三、计算题（共 50 分）

1. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$， $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$， 求 $\mathbf{B}^{2010} - 2\mathbf{A}^2$ 。

2. 计算下列行列式：

（1）$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

（2）$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

3. 设 A、B、C 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=\mathbf{1}$，$|\boldsymbol{B}|=2$，计算$\left|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{T}(\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{2E})^{T}-[(\mathbf{C}^{-1})^{T}\mathbf{A}]^{-1}\right|$。

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3/2\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$，求 X 使 $X(3E+A)=2B$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \boldsymbol{a} & \mathbf{20} \\ \mathbf{5} & \mathbf{12} & \mathbf{3}\boldsymbol{a}+\mathbf{5} & \mathbf{44}-\mathbf{2}\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$，求 $R(A)$。

四、证明题（**每小题 6 分，共 18 分**）

1. 设 A，B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明 $A\sim B$ 的充要条件是 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为 n 阶可逆矩阵，并且每行的元素之和均为常数 C，证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和均为 $\dfrac{1}{\boldsymbol{C}}$.

3. 设 n 阶方阵 A 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{n}$.