厦门大学《微积分I-1》期中试卷参考答案

1. 求下列极限：（每小题5分，总10分）

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x^{\frac{2}{3}}\right)\left(e^{\frac{2}{x^2}}-e^{\frac{1}{x^2+x+1}}\right)$；

解一：应用Lagrange中值定理，

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)e^{\xi}=1$。 $\xi\in\left(\frac{1}{x^2+x+1},\frac{2}{x^2}\right)$

解二：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x^{\frac{2}{3}}\right)e^{\frac{1}{x^2+x+1}}\left(e^{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1}}-1\right)$。

利用等价无穷小，可得

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)=1$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$。

解：由夹逼准则，

$$\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}\le\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=2,$$

所以，原式=2。

2. 求下列极限：（每小题5分，总20分）

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$；

解：原式$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4}}:=e^I$，其中

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2^x+3^x+4^x+5^x}\left(2^x\ln2+3^x\ln3+4^x\ln4+5^x\ln5\right)}{1}\\&=\frac{1}{4}(\ln2+\ln3+\ln4+\ln5)=\frac{1}{4}\ln120.\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{2^x-1+3^x-1+4^x-1+5^x-1}{4}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\frac{2^x-1+3^x-1+4^x-1+5^x-1}{4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{4x}(x\ln2+x\ln3+x\ln4+x\ln5)=\frac{1}{4}\ln120.\end{aligned}$$

所以，原式$=\sqrt[4]{120}$。

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

解一：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} x\frac{1-x^x(\ln x+1)}{1-x} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x\frac{1}{x}}{-1} = 2.
\end{aligned}$$

解二：

$$\text{原式} = \lim_{x\to 1} x\frac{1-x^{x-1}}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-e^{(x-1)\ln x}}{1-x+\ln x}.$$

利用等价无穷小，得

$$\text{原式} = -\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln x}{1-x+\ln x} = -\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{1-x+\ln x}.$$

利用洛必达法则，得

$$\text{原式} = -\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{-1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} 2x = 2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)(x^2+\ln(1-x^2))}{x^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\right)}$；

解一：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x)(x^2+(-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)))}{x^3(1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+o(x^4)-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)))} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3\cdot(-\frac{x^4}{2})}{x^3\cdot\frac{1}{12}x^4} = 1
\end{aligned}$$

解二：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+(-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4))}{1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+o(x^4)-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4))} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)} = 1
\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)-\sqrt{1+x^4}\right]$。

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{t\to 0}\left[e^t\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1\right)-\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left[e^t(1-t+t^2)-\sqrt{1+t^4}\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left[\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)(1-t+t^2)-(1+o(t^2))\right]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)-1-o(t^2)}{t^2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

3. （10分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^k\sin\frac{1}{x}, & x<0,\\ x^2+a, & x\geq 0,\end{cases}$ 要使 $f(x)$在$\mathbb{R}$上一阶导数连续，数 k, a应如何取值。

   解：可导必连续，知道 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，所以 $k>0, a=0$。先考虑函数在 $x=0$处的导数。由

$$
\begin{cases} f'_+(0)=0\\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^k\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x^{k-1}\sin\frac{1}{x}\\ f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0)\end{cases},
$$

   可得 $k>1$, $f'(0)=0$，所以

$$
f'(x)=\begin{cases} kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x}, & x<0,\\ 2x, & x\geq 0\end{cases}.
$$

   已知 $f(x)$在$\mathbb{R}$上一阶导数连续，所以

$$
0=f'(0^+)=f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\left(kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x}\right),
$$

   因此, $k\geq 2$。

4. （10分）证明数列 $x_1=2,\ x_{n+1}=\sqrt{3x_n},\ n=1,2,3,\ldots$ 极限存在，并求出极限。

   解一：归纳法证明数列有上界。若 $x_n\leq 3$，则 $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}\leq\sqrt{3\cdot 3}=3$，从而数列有上界3。又

$$
\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{3x_n}}{x_n}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x_n}}\geq\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1,
$$

   所以数列单调增。由数列单调有界必收敛，知 $\{x_n\}$收敛。

   记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，我们有 $a=\sqrt{3a}$，解得 $a=3$或者 $a=0$（舍去，因为 $x_n\geq x_1=2$）。

解二：由归纳假设，可得$x_n = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot 2^{\frac{1}{2^{n-1}}} = 3^{1-\frac{1}{2^n}} \cdot 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}$。

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3.$

解三：因为$\ln x_{n+1} = \frac{1}{2}\ln x_n + \frac{1}{2}\ln 3$，即

$$\ln x_{n+1} - \ln 3 = \frac{1}{2}(\ln x_n - \ln 3) = \frac{1}{2^n}(\ln x_1 - \ln 3).$$

令$n \to \infty$，则可得$\lim\limits_{n\to\infty}(\ln x_n - \ln 3) = 0$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3.$

5. （10分）求星形线$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ 在$\theta = \frac{\pi}{4}$处的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$的值。

解：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)} = -\tan\theta \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(-\tan\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\tan\theta)\frac{d\theta}{dx} \\ &= -\sec^2\theta\frac{1}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)}, \end{aligned}$$

所以，$\frac{d^2y}{dx^2}|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{(\sqrt{2})^5}{3a}$。

6. （10分）设函数$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，且$f(0)\cdot f(2) > 0$, $f(0)\cdot f(1) < 0$。证明存在$\xi \in (0,2)$，使得$f'(\xi) = 2f(\xi)$。

证明：已知$f \in C[0,1]$，$f(0)f(1) < 0$，由零点定理，知$\exists x_1 \in (0,1)$，使得$f(x_1) = 0$。又$f(0)f(2) > 0$，结合$f(0)f(1) < 0$，有$f(1)f(2) < 0$，已知$f \in C[1,2]$，再利用零点定理，知$\exists x_2 \in (1,2)$，使得$f(x_2) = 0$。记$F(x) = e^{-2x}f(x)$，$F(x)$在(x_1,x_2)上满足Rolle定理的条件，从而$\exists\xi \in (x_1,x_2) \subset (0,2)$，使得$F'(\xi) = 0$，进而$f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$。

7. （10分）设函数$f(x)$在$[0,n]$上连续（n为自然数，$n \geq 2$），$f(0) = f(n)$。证明存在$\xi, \xi+1 \in [0,n]$，使得$f(\xi) = f(\xi+1)$。

证明：记$F(x) = f(x) - f(x+1)$。显然$F(x) \in C[0,n-1]$，从而达到最大值M和最小值m。因为

$$m \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x) - f(x+1)) = f(0) - f(n) = 0 \leq M,$$

由介值定理，知$\exists\xi \in [0,n-1]$，使得$F(\xi) = 0$，即$f(\xi) = f(\xi+1)$。

8. （10分）已知函数$f(x) = \arctan x + \sin x$，求$f^{(11)}(0)$。

解：记$u(x) = \arctan x$，$v(x) = \sin x$，则$f^{(11)}(x) = u^{(11)}(x) + v^{(11)}(x)$。$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$，$u''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，代入$x = 0$，得$u'(0) = 1$，$u''(0) = 0$。由$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$，我们有

$$u'(x)(1+x^2) = 1.$$

上式左右两边同时对x求n次导数，得

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)}(x)(1+x^2)^{(k)} = 0,$$

考虑到$(1+x^2)^{(k)} = 0,\ k \geq 3$，有

$$u^{(n+1)}(x)(1+x^2) + nu^{(n)}(x)(2x) + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-1)}(x)\cdot 2 = 0.$$

上式代入$x=0$，得到递推式

$$u^{(n+1)}(0) = -n(n-1)u^{(n-1)}(0).$$

结合$u'(0)=1$，$u''(0)=0$，我们有

$$u^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & \text{n为奇数} \\ 0, & \text{n为偶数} \end{cases}.$$

又$v^{(n)}(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2}n)$，有$v^{(11)}(0) = -1$。所以

$$f^{(11)}(0) = u^{(11)}(0) + v^{(11)}(0) = -10! - 1.$$

9. （10分）设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上三阶可导，并且满足$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1, |f'''(x)| \leq 1$。证明：$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)|^3 \leq \frac{9}{8}$。

证明：已知$f(x)$在$\mathbb{R}$上三阶可导，$\forall h > 0$，我们有Taylor展式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_1)h^3$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_2)h^3.$$

两式相减，结合条件$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1, |f'''(x)| \leq 1$，得

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2h}|f(x+h) - f(x-h)| + \frac{1}{12}h^2|f'''(x_1) - f'''(x_2)| \leq \frac{1}{h} + \frac{1}{6}h^2.$$

令$\frac{1}{2h} = \frac{1}{6}h^2$，（或者求$\frac{1}{h} + \frac{1}{6}h^2$的驻点），有$h = \sqrt[3]{3}$，代入上式即得结论。