厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　　考试日期：2016.11.12

1.

分数	阅卷人

(10分) 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x^{\frac{2}{3}}\right)\left(e^{\frac{2}{x^2}}-e^{\frac{1}{x^2+x+1}}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$。

2.

分数	阅卷人

(20分) 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)(x^2+\ln(1-x^2))}{x^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\right)}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)-\sqrt{1+x^4}\right]$。

3.

分数	阅卷人

(10分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^k\sin\frac{1}{x}, & x<0, \\ x^2+a, & x\geq 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一阶导数连续，数 k,a 应如何取值。

4.

分数	阅卷人

(10分) 证明数列 $x_1=2, x_{n+1}=\sqrt{3x_n}, n=1,2,3,\dots$ 极限存在，并求出极限。

5.

分数	阅卷人

(10分) 求星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的值。

6.

分数	阅卷人

(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)\cdot f(2) > 0, f(0)\cdot f(1) < 0$。证明存在 $\xi \in (0,2)$，使得 $f'(\xi) = 2f(\xi)$。

7.

分数	阅卷人

(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续（n 为自然数，$n \geq 2$），$f(0)=f(n)$。证明存在 $\xi, \xi+1 \in [0,n]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+1)$。

8.

分数	阅卷人

(10分) 已知函数 $f(x)=\arctan x+\sin x$，求 $f^{(11)}(0)$。

9.

分数	阅卷人

(10分) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上三阶可导，并且满足 $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \le 1, |f'''(x)| \le 1$。证明：$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)|^3 \le \frac{9}{8}$。