厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2020.11.22

得　分	
评阅人	

一、求下列函数极限（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2+x}\right)(\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x})$；

2. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$；

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$。

二、求下列函数的导数或微分（每小题 8 分，共 16 分）：

得　分	
评阅人	

1. 求 $y=\arctan\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$ 的一阶导数；

2. 设方程 $2^{xy}=x^2+y$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\mathrm{d}y\,|_{x=0}$ 。

三、（8 分）设 $f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\frac{x}{2}$, 求 $f^{(10)}(0)$ 。

得　分	
评阅人	

得　分	
评阅人	

四、（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}} & x>0\\ b & x=0\\ c+\sin x & x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，试求常数 a,b,c 。

得　分	
评阅人	

五、（10 分）设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t-1\\ te^y+y+1=0\end{cases}$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-1}$ 及 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=-1}$ 。

得　分	
评阅人	

六、（8 分）求函数 $y=\dfrac{|x^2+x|}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点，并判别其间断点类型。

得　分	
评阅人	

七、（8 分）证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ 存在，且极限值大于 1 但不超过 2。

八、（8 分）试确定常数 a, b，使得 $1-\sqrt[3]{\cos 3x}$ 和 $a\ln(1+x)+bx$ 为 $x\to 0$ 时的等价无穷小。

得　分	
评阅人	

九、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)+f(2)=0$。证明存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

得　分	
评阅人	

十、（8 分）(1) 设 $a>b>0$，证明：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$；

得　分	
评阅人	

(2) 证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$。