厦门大学《 线性代数 》课程试卷

信息 学院______________系 2020 年级 计算机类 专业

学年学期：20211 主考教师：线性代数教研组 A 卷（√）B 卷（）

注：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$R(A)$表示矩阵 A 的秩

一、 单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 令 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。下列选项中，（　　）是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交规范化后的向量组。

A. $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$　　B. $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

C. $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$　　D. $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

2. 设 $Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组，则（　　）。

A. $Ax=0$ 只有零解时，$Ax=b$ 有一解

B. $Ax=0$ 有非零解时，$Ax=b$ 有无穷多解

C. $Ax=0$ 有非零解时，$A^Tx=0$ 也有非零解

D. 当 ξ 是$Ax=0$的通解，η 是 $Ax=b$ 的特解，$\xi+\eta$ 是$Ax=b$ 的通解

3. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是（　　）。

A. $a=0$，$b=2$　　B. $a=0$，b 为任意常数

C. $a=2$，$b=0$　　D. $a=2$，b 为任意常数

4. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是（　　）。

A. $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$

5. 已知 3 阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，则 $2A^*$ 的特征值是（　　）。

A. 1，2，3　　B. 4，6，12　　C. 2，4，6　　D. 8，16，24

6. 已知 $\alpha=(1,-2,3)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\a&-2&2\\3&b&-1\end{pmatrix}$ 的特征向量，则（　　）。

A. $a=-2$，$b=6$　　B. $a=2$，$b=-6$

C. $a=2$，$b=6$　　D. $a=-2$，$b=-6$

7. 已知 A 是 n 阶可逆矩阵，那么与 A 有相同特征值的矩阵是（　　）。

A. A^T　　B. A^2　　C. A^{-1}　　D. $A-E$

8. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\t\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则 t 必为（　　）。

A. 2　　B. 5　　C. -14　　D. 任意常数

9. 设 A 是 4×3 矩阵，B 是 3×4 非零矩阵，满足 $AB=O$，其中 $A=\begin{pmatrix}t&1&1\\9&t&3\\7t-18&7-2t&1\\9+t&1+t&4\end{pmatrix}$，则必有（　　）。

A. 当 $t=3$ 时，$R(B)=1$　　B. 当 $t\neq3$ 时，$R(B)=1$

C. 当 $t=3$ 时，$R(B)=2$　　D. 当 $t\neq3$ 时，$R(B)=2$

10. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 3 维非零列向量，则以下结论：

① 如果 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

② 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 也线性相关；

③ 如果 $R(\alpha_1，\alpha_1+\alpha_2，\alpha_2+\alpha_3)=R(\alpha_4，\alpha_1+\alpha_4，\alpha_2+\alpha_4，\alpha_3+\alpha_4)$，

则 α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

其中正确的个数为（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、 填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 $a_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$a_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$a_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$，若由 a_1，a_2，a_3 生成的向量空间维数是 2，则 $a=$ ___________。

2. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的特征值，则 $(A^{-1})^2+E$ 必有特征值 ___________。

3. 若二次型 $f=x_1^2+2tx_1x_2+x_2^2-2x_1x_3+2x_2x_3+2x_3^2$ 是正定的，则 t 的取值范围是 ___________。

4. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，$\alpha=(a,1,1)^T$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $\alpha=$ ___________。

5. 设 A 是 4×6 矩阵，$R(A)=2$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中所含向量的个数是 ___________。

三、 计算题（共 50 分）

1. （6 分）设 A 是 3 阶实对称矩阵，将矩阵 A 的 1、2 两行互换后再将 1、2 两列互换得到的矩阵是 B，试判断 A 与 B 是否等价、相似、合同？

2. （15 分）已知 $\alpha_1=(1,2,-3,1)^T$，$\alpha_2=(5,-5,\mathrm{a},11)^T$，$\alpha_3=(1,-3,6,3)^T$，$\alpha_4=(2,-1,3,a)^T$。问：

(1) 当 a 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

(2) 当 a 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关；

(3) 当 a 为何值时，α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，并写出它的表达式。

3. （13 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$。

4. （10 分）求出二次型 $f=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$ 的标准形及相应的可逆线性变换。

5. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的两个解，求 A 的特征值和对应的特征向量。（6 分）

四、 证明题（每题 5 分，共 15 分）

1. 设有两个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\alpha\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，证明：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$。

2. 已知 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\xi_1}$，$\boldsymbol{\xi_2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi_{n-r}}$ 是对应的齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，证明：方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解均可由 $\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi_1}$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi_2}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi_{n-r}}$ 线性表出。

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，证明：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵。