厦门大学《线性代数》期末试题·答案

考试日期：2011.1　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 如果行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$，则$\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix} =$ ____−16____。

2. 设$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，则 $A_{12} + A_{22} + A_{32} + A_{42} =$ ____0____。

3. 设$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，且有$ABC = E$，则$A^{-1} =$ __$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$__。

4. 设齐次线性方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的基础解系含有 2 个解向量，则 $a =$ ____1____。

5. A、B 均为 5 阶矩阵，$|A| = \frac{1}{2}, |B| = 2$，则$\left|-B^T A^{-1}\right| =$ ____−4____。

6. 设$\alpha = (1,-2,1)^T$，设 $A = \alpha\alpha^T$，则 $A^6 =$ __$6^5 A = 6^5\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$__。

7. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 λ 是矩阵 A 的一个特征值，则 A^* 的一个特征值可表示为__$|A|\frac{1}{\lambda}$__。

8. 若 $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3$ 为正定二次型，则 t 的范围是__$-\sqrt{\frac{5}{3}} < t < \sqrt{\frac{5}{3}}$__。

9. 设向量$\alpha = (2,1,3,2)^T, \beta = (1,2,-2,1)^T$，则 α 与 β 的夹角 $\theta =$ __$\frac{\pi}{2}$__。

10. 若 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 1，2，3，则$|A+E| =$ ____24____。

二、单项选择（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0\end{cases}$有非零解, 则$\lambda =$（ C ）

A. 1 或 2　　　B. －1 或－2　　　C. 1 或－2　　　D. －1 或 2.

2. 已知 4 阶矩阵 A 的第三列的元素依次为$1,3,-2,2$，它们的余子式的值分别为$3,-2,1,1$，则$|A| =$

（ A ）

A. 5　　　B. -5　　　C. -3　　　D. 3

3. 设 A、B 均为 n 阶矩阵，满足 $AB = O$，则必有（ D ）

A. $|A| + |B| = 0$　　　B. $r(A) = r(B)$

C. $A = O$ 或 $B = O$　　　D. $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$

4. 设β_1, β_2是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的两个解向量，则下列向量中仍为该方程组解的是（ B ）

A. $\beta_1 + \beta_2$　　　B. $\frac{1}{5}(3\beta_1 + 2\beta_2)$　　　C. $\frac{1}{2}(\beta_1 + 2\beta_2)$　　　D. $\beta_1 - \beta_2$

5. 若二次型 $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + kx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2，则 $k =$（ C ）

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

三、计算题（每题 9 分，共 63 分）

1. 计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \Lambda & b \\ b & a & \Lambda & b \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b & b & \Lambda & a \end{vmatrix}$

解　$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \Lambda & b \\ b & a & \Lambda & b \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b & b & \Lambda & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \Lambda & b \\ 1 & a & \Lambda & b \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & b & \Lambda & a \end{vmatrix}$　　　4 分

$= [a + (n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & \Lambda & b \\ 0 & a-b & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 & \Lambda & a-b \end{vmatrix} [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$　　　9 分

2. 设 A,B 均为 3 阶矩阵，且满足 $AB+E=A^2+B$，若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B。

解 $AB+E=A^2+B\Rightarrow AB-B=A^2-E$

$\Rightarrow(A-E)B=(A-E)(A+E)$　　3 分

因为 $A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ 显然可逆　　6 分

则 $B=A+E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$　　9 分

3. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$；已知 β_3 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 具有相同的秩，求 a，b 的值。

解 $\begin{pmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&5/3-b/3\end{pmatrix}$,　　3 分

即 $b=5$，且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$　　5 分

那么 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，则　　6 分

$\begin{pmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&a&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\0&a-15&0\end{pmatrix}$，即 $a=15$　　9 分

4. 已知向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\5\\4\\8\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$

（1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩以及它的一个极大线性无关组；

（2）将其余的向量用所求的极大线性无关组线性表示。

解 $\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\-1&3&-5&5&-2\\2&1&3&4&2\\4&2&6&8&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&1\\0&3&-3&6&-1\\0&1&-1&2&0\\0&2&-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&0\\0&1&-1&2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 4 分

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$ 5 分

其极大线性无关组可以取为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 7 分

且：$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_5$，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_5$ 9 分

5. 已知线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3\\x_1-5x_2-10x_3+9x_4=a\end{cases}$

（1）a为何值时方程组有解？（2）当方程组有解时求出它的全部解（用解的结构表示）.

解 $\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\1&3&6&1&3\\1&-5&-10&9&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&1\\0&2&4&-2&2\\0&-6&-12&6&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&4&0\\0&1&2&-1&1\\0&0&0&0&a+5\end{pmatrix}$

当$a=-5$时，线性方程组有解 4 分

即$\begin{cases}x_1=\quad\ \ -4x_4\\x_2=1-2x_3+x_4\end{cases}$，特解为$\gamma_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$， 6 分

其导出组的一般解为$\begin{cases}x_1=\quad\ \ -4x_4\\x_2=-2x_3+x_4\end{cases}$，基础解系为$\eta_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ 8 分

原线性方程组的通解为$\gamma_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$ （k_1,k_2为任意常数） 9 分

6. 设矩阵 $P=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,$D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 A 由关系式 $P^{-1}AP=D$ 确定，试求 A^5

解 由 $P^{-1}AP=D$，得 $A=PDP^{-1}$ 2 分

$A^5=PD^5P^{-1}$ 4 分

$=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}^5\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 32\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ 7 分

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -128\\ -1 & 32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43 & 44\\ -11 & -12\end{pmatrix}$ 9 分

7. 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形，并写出相应的可逆线性变换。

解 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$

$=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2+x_2^2+2x_2x_3$ 2 分

$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2$ 4 分

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=\quad x_2+x_3\\ y_3=\quad\quad x_3\end{cases}$ 6 分

即作线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\ x_2=\quad y_2-y_3\\ x_3=\quad\quad y_3\end{cases}$ 8 分

可将二次型化成标准形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 9 分

四、证明题（7 分）

已知 3 阶矩阵 $B \neq O$，且矩阵 B 的列向量都是下列齐次线性方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$，（1）求 λ 的值；（2）证明：$|B| = 0$

解

（1）因为 $B \neq O$，所以齐次线性方程组有非零解，故其方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\lambda = 0$$，所以 $\lambda = 0$　　　　3 分

（2）$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(A) = 2$，因此齐次线性方程组的基础解系所含解的个数为 3−2=1，故 $r(B) \le 1$，因而 $|B| = 0$。　　　　7 分