厦门大学《线性代数》期末试题

考试日期：2016.1　信息学院自律督导部整理

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. n阶方阵A适合下列条件（　　）时$E-A$必是可逆阵。

(A)　$A^n=0$；　　(B)　A是可逆阵；

(C)　$|A|=0$；　　(D)　A的主对角线元素全为0。

2. 设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，且$AB=E$，则（　　）。

(A)　$R(A)=R(B)=m$；　　(B)　$R(A)=m, R(B)=n$；

(C)　$R(A)=n, R(B)=m$；　　(D)　$R(A)=R(B)=n$。

3. 设2×3矩阵A的秩$R(A)=2$，则下列命题错误的是（　　）。

(A) 方程组$A^Tx=0$只有零解；　　(B) 方程组$A^TAx=0$必有非零解；

(C) 对任意的 3 维向量b，方程组$A^Tx=b$必有唯一解；

(D) 对任意的 2 维向量b，方程组$Ax=b$必有无穷多解。

4. 设η^*是非齐次线性方程组$Ax=b$的一个解，$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组的一个基础解系，则下法说法错误的（　　）。

(A)　$Ax=b$的解集的秩为$n-r$；　　(B)　$\eta^*,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关；

(C)　$\eta^*,\eta^*+\xi_1,\cdots,\eta^*+\xi_{n-r}$线性无关；　　(D)　$\eta^*,\eta^*-\xi_1,\cdots,\eta^*-\xi_{n-r}$线性无关。

5. 已知向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_s$可由向量组$B:b_1,b_2,\cdots,b_t$线性表示，则下列命题正确的是（　　）。

(A) 若向量组A无关，则$s\le t$；　　(B) 若向量组A相关，则$s>t$；

(C) 若向量组B无关，则$s\le t$；　　(D) 若向量组B相关，则$s>t$。

6. 设b为实数，$V=\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1+2x_2+3x_3=b\}$，则（　　）。

(A) 对任意的b，V是向量空间；　　(B) 对任意的b，V不是向量空间；

(C) 只有当$b=0$时，V是向量空间；　　(D) 只有当$b\neq 0$时，V是向量空间。

7. 设 A 为 n 阶实对称可逆阵，则下列说法正确的是（　　）.

(A) 必存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=E$；　　(B) 必存在正交阵 C，使得 $C^TAC=E$；

(C) 必存在可逆阵 C，使得 $C^TAC=E$；　　(D) 必存在正整数 t，使得 $A+tE$ 为正定阵。

8. 设 J 为元素全为 1 的 5 阶方阵，则 0 是 J 的（　　）重特征值。

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) 3；　　(D) 4。

9. 设 A 为 n 阶实方阵，以下命题（　　）不是 A 可以对角化的充分条件。

(A) A 对称；　　(B) A 可逆；

(C) A 有 n 个正交的特征向量；　　(D) A 正定。

10. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成已知标准型 $f(y)=6y_1^2$，则 $a=$（　　）。

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) 6；　　(D) 0。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A 为 3 阶方阵，E 为 3 阶单位阵. 若 $A^2-2A-3E=O$，则 $R(A+E)+R(A-3E)=$ ________。

2. $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^{12}=$ ________。

3. 设 A 为 3 阶方阵，$|A|=7$，1 为 A 的 2 重特征值；P 为一 3 阶可逆阵，E 为 3 阶单位阵. 则 $B=P^{-1}A^*P+2E$ 的 3 个特征值________，________，________。

4. 设 2 阶实对称阵 A 的一个特征向量为 $\alpha=(1,-1)^T$，则 A 与 α 线性无关的单位特征向量为________。

5. 若 A 是正定阵，则 A 的伴随矩阵 A^* ________是正定阵（填“一定”或“不一定”）。

三、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

1. （10 分）已知下列非齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5 \\ nx_2-x_3-2x_4=-11 \\ x_3-2x_4=-t+1 \end{cases}$$

（1）求解方程组(I)的通解;

（2）当方程组(II)中的参数 m, n, t 为何值时，方程组(I)与(II)同解？

2. （10 分）已知一个四维向量组 $\alpha_1=(2,1,3,-1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_3=(1,3,4,-2)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_4=(4,-3,1,1)^{\mathrm{T}}$.

（1）求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个最大无关组;

（2）把其余向量用这个最大无关组来线性表示.

3. （10 分）请将向量组$\alpha_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2=(2,-1,0)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_3=(0,1,4)^{\mathrm{T}}$标准正交化。

4. （10 分）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)$=$2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2\mathrm{a}x_2x_3$（a>0），可通过正交变换可 x=Py 将其化为标准形$f(x_1,x_2,x_3)$=$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及正交变换矩阵 P.

5. （10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$=$x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$，求满秩变换矩阵 P 将其化为规范形，并分别求出该二次型的秩、正惯性指数、负惯性指数.

四、证明题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 设有向量组 α_1、α_2、$\cdots$、α_s，其中 $s\geq 2$，试证明：向量组 α_1、α_2、$\cdots$、α_s 线性相关的充分必要条件是向量组 α_1、α_2、$\cdots$、α_s 中至少有一个向量可由其它向量线性表出。

2. 设A是n阶方阵，ξ_1、ξ_2、…、ξ_t是线性方程组$AX=0$ 的基础解系，若存在η_i，使$A\eta_i=\xi_i$，$i=1,2$、…、t。证明：

向量组ξ_1、ξ_2、…、ξ_t、η_1、η_2、…、η_t线性无关。

3. 设A、B均是n阶方阵，A有n个不同的特征值，试证明：如果A的特征向量都是B的特征向量，则$AB=BA$。