



厦门大学《概率统计 I》试卷

_____学院_____系_____年级_____专业

主考教师：_____ 试卷类型：(A 卷)

解题过程可能用到如下数据： $\Phi(1.36) = 0.9131$, $\Phi(1.65) = 0.9500$, $\Phi(1.96) = 0.9750$,

$\Phi(2.326) = 0.99$, $\chi^2_{0.05}(1) = 3.843$, $\chi^2_{0.025}(1) = 5.025$, $\chi^2_{0.05}(2) = 5.992$, $\chi^2_{0.025}(2) = 7.378$, $\chi^2_{0.05}(3) = 7.815$,

$\chi^2_{0.025}(3) = 9.348$, $\chi^2_{0.025}(10) = 20.483$, $\chi^2_{0.975}(10) = 3.247$, $\chi^2_{0.025}(9) = 19.022$, $\chi^2_{0.975}(9) = 2.7$,

$\chi^2_{0.05}(10) = 18.307$, $\chi^2_{0.05}(9) = 16.919$, $t_{0.025}(10) = 2.2281$, $t_{0.05}(10) = 1.8125$, $t_{0.025}(9) = 2.2622$,

$t_{0.05}(9) = 1.8331$, $t_{0.025}(8) = 2.3060$, $t_{0.05}(8) = 1.8595$, $F_{0.05}(9,3) = 8.81$, $F_{0.025}(9,3) = 14.5$,

$F_{0.05}(3,9) = 3.86$, $F_{0.025}(3,9) = 5.08$

分数	阅卷人

1、(12分) 设某电子元件的寿命服从均值为100小时的指数分布，寿命超过200小时的电子元件属于一等品。从大批该电子元件中任取1000件，问其中一等品超过150件的概率是多少？（利用中心极限定理计算）

解：电子元件为一等品的概率为： $e^{-2} \approx 0.1353$

设1000件中该电子元件的一等品数为 X ，则

$$X \sim b(1000, 0.1353)$$

由中心极限定理，
$$\frac{X - 1000 \times 0.1353}{\sqrt{1000 \times 0.1353 \times 0.8647}} \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} & P\{X > 150\} \\ & \approx P\left\{ \frac{X - 1000 \times 0.1353}{\sqrt{1000 \times 0.1353 \times 0.8647}} > 1.36 \right\} \\ & \approx 1 - \Phi(1.36) \\ & = 0.0869 \end{aligned}$$

分数	阅卷人

2、 (15分) 设随机变量 $X \sim U(-3, 3)$, 随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^{-4}, & y > 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

而且 X 与 Y 相互独立。记 $Z_1 = X/Y$, $Z_2 = XY$, 试求 Z_1 与 Z_2 的相关系数 ρ .

$$\text{解: } E Z_1 = E(X) \cdot E\left(\frac{1}{Y}\right) = 0$$

$$E Z_2 = E(X) \cdot E(Y) = 0$$

$$E(Z_1^2) = E(X^2) = D(X) + (E X)^2 = 3 + 0^2 = 3$$

$$\text{cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E Z_1 \cdot E Z_2 =$$

$$E\left(\frac{1}{Y^2}\right) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \cdot 3x^{-4} dx = \int_1^{\infty} 3x^{-6} dx = \frac{3}{5}$$

$$E(Z_1^2) = E(X^2) \cdot E\left(\frac{1}{Y^2}\right) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

$$E(Y^2) = \int_1^{\infty} x^2 \cdot 3x^{-4} dx = \int_1^{\infty} 3x^{-2} dx = 3$$

$$E(Z_2^2) = E(X^2) \cdot E(Y^2) = 3 \times 3 = 9$$

$$D(Z_1) = E(Z_1^2) - (E Z_1)^2 = \frac{9}{5} - 0^2 = \frac{9}{5}$$

$$D(Z_2) = E(Z_2^2) - (E Z_2)^2 = 9$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1) \cdot D(Z_2)}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{5} \times 9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

分数	阅卷人

3、(12分) 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x\theta^{-1} \exp\{-x^2\theta^{-1}\}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

其中 $\theta(\theta > 0)$ 为未知参数。设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本。

解: (1) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本观测值, 则

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n (2x_i \theta^{-1} \exp\{-x_i^2 \theta^{-1}\}) \\ &= 2^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \theta^{-n} \exp\left\{-\theta^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\} \end{aligned}$$

$$\ln L(\theta) = \left(n \ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) - n \ln \theta - \theta^{-1} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\text{令 } (\ln L(\theta))' = -\frac{n}{\theta} + \theta^{-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, \text{ 解得}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

$$\text{故 } \theta \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}.$$

$$(2) E(X^2) = \int_0^{\infty} 2x^3 \cdot \theta^{-1} \exp\{-x^2\theta^{-1}\} dx.$$

$$\xrightarrow{y=x\cdot\theta^{-\frac{1}{2}}} 2\theta \int_0^{\infty} y^3 \exp\{-y^2\} dy.$$

$$\xrightarrow{t=y^2} \theta \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = \theta$$

$$\text{故 } E\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i^2)}{n} = \frac{\theta}{1} = \theta.$$

即 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

分数	阅卷人

4、(12分) 某种内服药有使病人血压增高的副作用，已知血压的增高服从正态分布。现测得 10 名服用此药的病人的血压，记录血压增高的数据如下：

18, 27, 23, 15, 18, 15, 18, 20, 17, 19

试分别求药物导致血压增高的均值和标准差的置信水平 95% 的置信区间。

解: $\bar{x} = 19, \quad S^2 = \frac{40}{3} \approx 13.3333$

$S = 3.65, \quad n = 10, \quad \alpha = 0.05.$

血压增高均值的 95% 置信区间为

$$\begin{aligned} & \left(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}^{(n-1)}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}^{(n-1)} \right) \\ &= \left(19 - \frac{3.65}{\sqrt{10}} \times 2.2622, 19 + \frac{3.65}{\sqrt{10}} \times 2.2622 \right) \\ &= (16.39, 21.61). \end{aligned}$$

血压增高^{标准差}~~均值~~的 95% 置信区间为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{n-1} S}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1} S}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{9} \times 3.65}{\sqrt{19.022}}, \frac{\sqrt{9} \times 3.65}{\sqrt{2.7}} \right) \\ &= (2.51, 6.66). \end{aligned}$$

分数	阅卷人

5、(10 分) 为比较两种农药残留时间（单位：天）的长短，现分别取 6 块地施甲种农药，4 块地施乙种农药，经一段时间后，分别测得结果为：

$$\text{甲: } \bar{x} = 12.35, s_1^2 = 3.52; \quad \text{乙: } \bar{y} = 10.75, s_2^2 = 2.88$$

假设两药的残留时间均服从正态分布且方差相等，试问两种农药的残留时间有无显著差异？
($\alpha = 0.05$)?

$$X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$$

解：检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

检验统计量：

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad \text{其中 } S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

拒绝域：

$$t < -t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2), \quad \text{或} \quad t > t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2).$$

$$\alpha = 0.05, \quad n_1 = 6, \quad n_2 = 4,$$

$$t_{0.025}(8) = 2.3060$$

$$s_w^2 = 3.28, \quad S_w = \sqrt{3.28} = 1.81,$$

$$t = 1.37 \in (-2.3060, 2.3060)$$

未落入拒绝域，故两种农药残留时间无显著差异。

分数	阅卷人

6、(12分) 从同类产品, 任取200批, 经质检结果如下表, 其中 x_i 表示各批产品中次品数, f_i 表示有 x_i 件次品的批数, 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 检验次品件数 X 是否服从泊松分布?

x_i	0	1	2	3	4	≥ 5
f_i	116	56	22	4	2	0

解: $H_0: P\{X=k\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, k=0, 1, 2, \dots$

$\hat{\lambda} = \bar{x} = 0.6, n=200$

x_i	f_i	\hat{p}_i	$n\hat{p}_i$
0	116	0.5488	109.76
1	56	0.3293	65.76
2	22	0.0988	19.76
3	4	0.0198	3.96
4	2	0.003	0.6
≥ 5	0	0.0003	0.06

合并后组数为 $K=3$,

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^2 \frac{f_i^2}{n\hat{p}_i} - n = 2.37 < 3.843 = \chi_{0.05}^2(1)$$

无法拒绝原假设, 故认为次品件数服从泊松分布.

分数	阅卷人

7、(15 分) 某建材实验室做混凝土试验时，考察一定体积混凝土的水泥用量 x (kg) 对混凝土抗压强度 y (kg/cm²) 的影响，测得下列数据：

水泥用量 x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
抗压强度 y	57	58	64	65	63	72	70	72	82	83

计算得 $n=10$, $\sum_{i=1}^{10} x_i = 195$, $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 3885$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 686$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 47784$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 13610$

(1) 求 y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$; (2) 检验一元线性回归的显著性 ($\alpha = 0.05$)。

解: (1) $\bar{x} = 19.5$, $\bar{y} = 68.6$, $n = 10$.

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = 82.5$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 233$$

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 2.8242$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx 13.53$$

$$\hat{y} = 13.53 + 2.8242x$$

(2) $H_0: b=0$, $H_1: b \neq 0$.

$$\text{检验统计量: } t = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{xx}},$$

$$\text{其中 } \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{Q_e}{n-2}}, \quad Q_e = S_{yy} - \hat{b} S_{xy}$$

拒绝域 $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$.

$$\text{计算得 } S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = 724.4$$

$$Q_e = 66.3614, \quad \hat{\sigma} = 2.88,$$

$$|t| = 8.907 > 2.3060 = t_{0.025}^{(8)}$$

落入拒绝域，故回归效果显著。

分数	阅卷人

8、(12 分) 粮食加工厂用 4 种不同的方法贮藏粮食，贮藏一段时间后，分别抽样化验，得到粮食含水率的数据如下：

贮藏方法	测量值数据				
I	7.3	8.3	7.7	8.4	8.3
II	5.8	7.4	7.2		
III	8.1	6.5	7.0		
IV	7.9	9.1			

试检验这 4 种不同的贮藏方法对粮食的含水率是否有显著的影响？($\alpha=0.05$)

解： $\bar{y}_1=8, \bar{y}_2=6.8, \bar{y}_3=7.2, \bar{y}_4=8.5$

$\bar{y}=7.6154$

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素	4.8139	3	1.6	3.2
误差	2.5	9	0.5	
总和	9.3139	12		

$F=3.2 < 3.86 = F_{0.05}(3,9)$

未落入拒绝域，故认为无显著影响。