厦门大学《线性代数》期末试题

考试日期：2010.1　信息学院自律督导部整理

一．填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．令 $A=(1,0,3,5)^T, B=(-2,8,6,9)^T$，则 $A^TB=$________，

$AB^T=$________________.

2．若三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2，β_1,β_2,β_3 是它的三个解向量，且 $\beta_1+\beta_2=(2,-6,3)^T$，$\beta_2+\beta_3=(-6,8,5)^T$，则该线性方程组的通解是___________.

3．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&t\\t&-3&6\\-2&t&5\end{pmatrix}$ 的行向量线性相关，则实数 t 满足的条件是__________.

4．令 A_{ii} 是三阶矩阵 A 的元素 a_{ii} 的代数余子式（i=1，2，3），若 A 的特征值为 3，4，5，则 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$___________.

5．若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&c+2&0\\1&0&c-5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 c 的取值范围为____________.

二．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A、B 均为 n 阶正交矩阵，则_____________.

（1）A+B 为正交矩阵　　（2）A-B 为正交矩阵

（3）BAB 为正交矩阵　　（4）kAB 为正交矩阵(k>0 为实数)

2．设 A 为 m 阶可逆矩阵，B 为 n 阶可逆矩阵，则可逆分块矩阵 $D=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的逆矩阵是_____________.

（1）$\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$

（3） $\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}$ （4） $\begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$

3．设α与β是线性无关的单位向量，则α与β的内积必

____________.

（1） >0 （2）<0 （3）>1 （4）<1

4．设 A 为n阶可逆矩阵，A^T, A^{-1}, A^*分别是 A 的转置矩阵，逆矩阵和伴随矩阵，若ξ是 A 的特征向量，则下列命题中的不正确的是________.

（1） ξ是A^T的特征向量

（2）2ξ是A^{-1}的特征向量

（3）3ξ是A^*的特征向量

（4）4ξ是kA的特征向量（k为常数）

5．设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则________.

（1） A与B是相似的且是合同的

（2） A与B是相似的但不是合同的

（3） A与B不是相似的但是合同的

（4） A与B不是相似的也不是合同的

三.（15 分）试求五元齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3+x_4+x_5=0, \\ -x_1+x_2+x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$$

的解空间 V（作为R^5的子空间）的一组规范（标准）正交基。

四．（12 分）求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量，并计算 A^9 的特征值。

五．（16 分）令 $\alpha_1=(1,k,1)^T,\alpha_2=(k,1,1)^T,\alpha_3=(-1,k-2,-1)^T$ ，$\beta=(-1,k-2,-1)^T$，

问 k 为何值时

（1） 向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（2） 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一；

（3） 向量 β 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法不唯一，并求其一般表达式

六. (12 分) 设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3$, 试求一个可逆线性变换 $x=Py$ 的将此二次型化为规范型.

七. (10 分) 令 A 为 n 阶正定矩阵，证明：（1）存在 n 阶实可逆矩阵 P, 使得 $A=P^TP$; 为（2）对任意 n 阶实可逆矩阵 B, 存在 n 阶实可逆矩阵 Q 使得 Q^TAQ 与 Q^TBQ 均为对角矩阵.