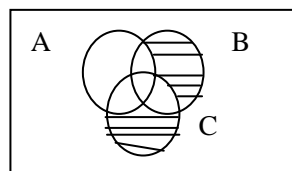


# 一、填空 20% （每小题 2 分）

1. 设  $A = \{x | (x \in \mathbb{N}) \text{ 且 } (x < 5)\}$ ,  $B = \{x | x \in E^+ \text{ 且 } x < 7\}$  ( $\mathbb{N}$ : 自然数集,  $E^+$  正偶数) 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_。

2. A, B, C 表示三个集合, 文图中阴影部分的集合表达式为

\_\_\_\_\_。



3. 设 P, Q 的真值为 0, R, S 的真值为 1, 则

$\neg(P \vee (Q \rightarrow (R \wedge \neg P))) \rightarrow (R \vee \neg S)$  的真值= \_\_\_\_\_。

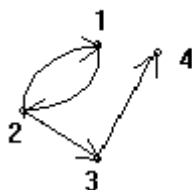
4. 公式  $(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$  的主合取范式为

\_\_\_\_\_。

5. 若解释 I 的论域 D 仅包含一个元素, 则  $\exists xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$  在 I 下真值为

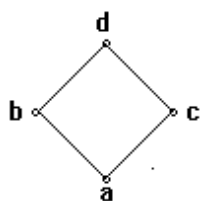
\_\_\_\_\_。

6. 设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , A 上关系图为

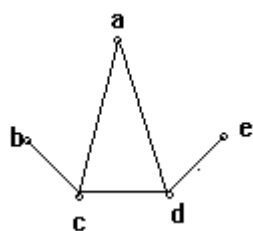


则  $R^2 =$  \_\_\_\_\_。

7. 设  $A = \{a, b, c, d\}$ , 其上偏序关系 R 的哈斯图为



则  $R =$  \_\_\_\_\_。



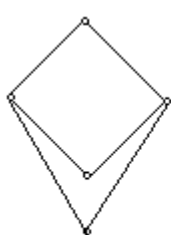
8. 图 \_\_\_\_\_ 的补图为 \_\_\_\_\_。

9. 设  $A = \{a, b, c, d\}$ , A 上二元运算如下:

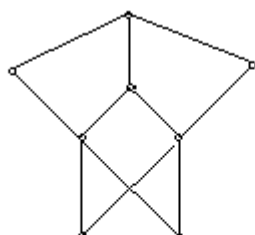
*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

那么代数系统 $\langle A, * \rangle$ 的幺元是 \_\_\_\_\_，有逆元的元素为 \_\_\_\_\_，它们的逆元分别为 \_\_\_\_\_。

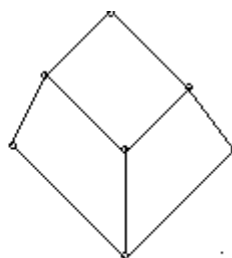
10. 下图所示的偏序集中，是格的为 \_\_\_\_\_。



[a]



[b]



[c]

## 二、选择 20% （每小题 2 分）

1、下列是真命题的有（ ）

- A.  $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ ; B.  $\{\{\Phi\}\} \in \{\Phi, \{\Phi\}\}$ ;  
C.  $\Phi \in \{\{\Phi\}, \Phi\}$ ; D.  $\{\Phi\} \in \{\{\Phi\}\}$ 。

2、下列集合中相等的有（ ）

- A.  $\{4, 3\} \cup \Phi$ ; B.  $\{\Phi, 3, 4\}$ ; C.  $\{4, \Phi, 3, 3\}$ ; D.  $\{3, 4\}$ 。

3、设  $A = \{1, 2, 3\}$ ，则  $A$  上的二元关系有（ ）个。

- A.  $2^3$ ; B.  $3^2$ ; C.  $2^{3 \times 3}$ ; D.  $3^{2 \times 2}$ 。

4、设  $R, S$  是集合  $A$  上的关系，则下列说法正确的是（ ）

- A. 若  $R, S$  是自反的，则  $R \circ S$  是自反的;  
B. 若  $R, S$  是反自反的，则  $R \circ S$  是反自反的;  
C. 若  $R, S$  是对称的，则  $R \circ S$  是对称的;  
D. 若  $R, S$  是传递的，则  $R \circ S$  是传递的。

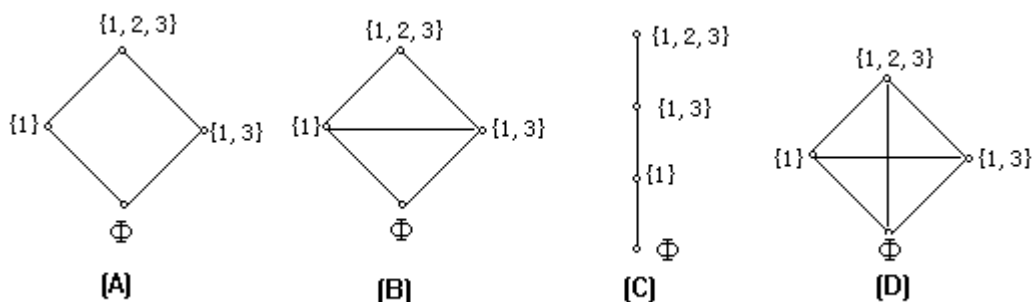
5、设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $P(A)$  ( $A$  的幂集) 上规定二元系如下

$$R = \{ \langle s, t \rangle \mid s, t \in P(A) \wedge (|s| = |t|) \} \text{ 则 } P(A) / R = ( )$$

A.  $A$  ; B.  $P(A)$  ; C.  $\{\{1\}\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ ;

D.  $\{\emptyset\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{A\}$

6、设  $A = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  则  $A$  上包含关系 “ $\subseteq$ ” 的哈斯图为 ( )



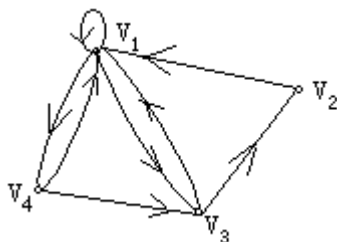
7、下列函数是双射的为 ( )

A.  $f: I \rightarrow E, f(x) = 2x$  ; B.  $f: N \rightarrow N \times N, f(n) = \langle n, n+1 \rangle$  ;

C.  $f: R \rightarrow I, f(x) = [x]$  ; D.  $f: I \rightarrow N, f(x) = |x|$  。

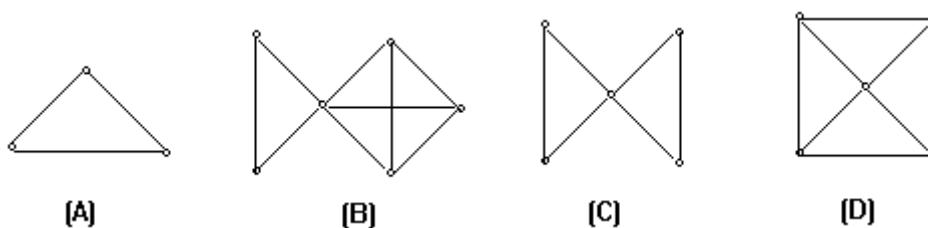
(注:  $I$ —整数集,  $E$ —偶数集,  $N$ —自然数集,  $R$ —实数集)

8、图 中 从  $v_1$  到  $v_3$  长度为 3 的通路有 ( ) 条。



A. 0; B. 1; C. 2; D. 3。

9、下图中既不是 Euler 图, 也不是 Hamilton 图的图是 ( )



10、在一棵树中有 7 片树叶, 3 个 3 度结点, 其余都是 4 度结点则该树有 ( ) 个 4 度结点。

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4 。

### 三、证明 26%

1、 $R$  是集合  $X$  上的一个自反关系, 求证:  $R$  是对称和传递的, 当且仅当

$\langle a, b \rangle$  和  $\langle a, c \rangle$  在  $R$  中有  $\langle b, c \rangle$  在  $R$  中。(8 分)

- 2、 $f$  和  $g$  都是群  $\langle G_1, \star \rangle$  到  $\langle G_2, * \rangle$  的同态映射, 证明  $\langle C, \star \rangle$  是  $\langle G_1, \star \rangle$  的一个子群。其中  $C = \{x \mid x \in G_1 \text{ 且 } f(x) = g(x)\}$  (8 分)
- 3、 $G = \langle V, E \rangle$  ( $|V| = v, |E| = e$ ) 是每一个面至少由  $k$  ( $k \geq 3$ ) 条边围成的连通平面图, 则  $e \leq \frac{k(v-2)}{k-2}$ , 由此证明彼得森图 (Peterson) 图是非平面图。(11 分)

## 四、逻辑推演 16%

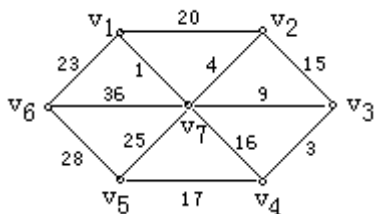
用 CP 规则证明下题 (每小题 8 分)

- 1、 $A \vee B \rightarrow C \wedge D, D \vee E \rightarrow F \Rightarrow A \rightarrow F$
- 2、 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$

## 五、计算 18%

1、设集合  $A = \{a, b, c, d\}$  上的关系  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle\}$  用矩阵运算求出  $R$  的传递闭包  $t(R)$ 。(9 分)

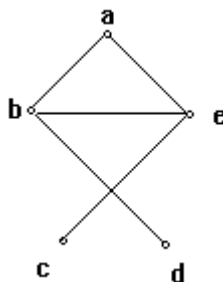
2、如下图所示的赋权图表示某七个城市  $v_1, v_2, \dots, v_7$  及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价, 试给出一个设计方案, 使得各城市之间能够通信而且总造价最小。(9 分)



试卷一答案:

一、填空 20% (每小题 2 分)

- 1、 $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ ; 2、 $(B \oplus C) - A$ ; 3、1; 4、 $(\neg P \vee S \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg S \vee R)$ ;
- 5、1; 6、 $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$ ; 7、 $\{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle\} \cup I_A$ ; 8、



- 9、 $a$ ;  $a, b, c, d$ ;  $a, d, c, d$ ; 10、 $c$ ;

## 二、选择 20% （每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C D	B、C	C	A	D	C	A	D	B	A

## 三、证明 26%

1、证：

“ $\Rightarrow$ ”  $\forall a, b, c \in X$  若  $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in R$  由  $R$  对称性知  $\langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle \in R$ ，由  $R$  传递性得  $\langle b, c \rangle \in R$

“ $\Leftarrow$ ” 若  $\langle a, b \rangle \in R$ ， $\langle a, c \rangle \in R$  有  $\langle b, c \rangle \in R$  任意  $a, b \in X$ ，因  $\langle a, a \rangle \in R$  若  $\langle a, b \rangle \in R \therefore \langle b, a \rangle \in R$  所以  $R$  是对称的。

若  $\langle a, b \rangle \in R$ ， $\langle b, c \rangle \in R$  则  $\langle b, a \rangle \in R \wedge \langle b, c \rangle \in R \therefore \langle a, c \rangle \in R$  即  $R$  是传递的。

2、证  $\forall a, b \in C$ ，有  $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ ，又

$$f(b^{-1}) = f^{-1}(b), g(b^{-1}) = g^{-1}(b) \therefore f(b^{-1}) = f^{-1}(b) = g^{-1}(b) = g(b^{-1})$$

$$\therefore f(a \star b^{-1}) = f(a) * f^{-1}(b) = g(a) * g^{-1}(b) = g(a \star b^{-1})$$

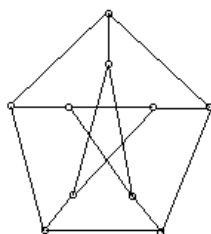
$$\therefore a \star b^{-1} \in C \quad \therefore \langle C, \star \rangle \text{ 是 } \langle G_1, \star \rangle \text{ 的子群。}$$

3、证：

① 设  $G$  有  $r$  个面，则  $2e = \sum_{i=1}^r d(F_i) \geq rk$ ，即  $r \leq \frac{2e}{k}$ 。而  $v - e + r = 2$  故

$$2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2e}{k} \quad \text{即得} \quad e \leq \frac{k(v-2)}{k-2} \quad \text{。 (8 分)}$$

② 彼得森图  $k=5, e=15, v=10$ ，这样  $e \leq \frac{k(v-2)}{k-2}$  不成立，



所以彼得森图非平面图。(3 分)

## 二、逻辑推演 16%

1、证明：

① $A$	P (附加前提)
② $A \vee B$	T①I
③ $A \vee B \rightarrow C \wedge D$	P
④ $C \wedge D$	T②③I
⑤ $D$	T④I
⑥ $D \vee E$	T⑤I
⑦ $D \vee E \rightarrow F$	P
⑧ $F$	T⑥⑦I
⑨ $A \rightarrow F$	CP

2、证明

① $\forall xP(x)$	P (附加前提)
② $P(c)$	US①
③ $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	P
④ $P(c) \rightarrow Q(c)$	US③
⑤ $Q(c)$	T②④I
⑥ $\forall xQ(x)$	UG⑤
⑦ $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$	CP

### 三、计算 18%

1、解：

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

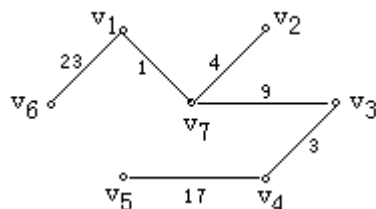
$$M_{R^3} = M_{R^2} \circ M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{R^4} = M_{R^3} \circ M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{t(R)} = M_R + M_{R^2} + M_{R^3} + M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore t(R) = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle \}$$

2、解： 用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法略。结果如图：



树权  $C(T) = 23 + 1 + 4 + 9 + 3 + 17 = 57$  即为总造价。

## 试卷二试题与答案

### 一、填空 20% （每小题 2 分）

1、P：你努力，Q：你失败。“除非你努力，否则你将失败”的翻译为 \_\_\_\_\_；“虽然你努力了，但还是失败了”的翻译为 \_\_\_\_\_。

2、论域  $D = \{1, 2\}$ ，指定谓词 P

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
T	T	F	F

则公式  $\forall x \exists y P(y, x)$  真值为 \_\_\_\_\_。

2、设  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ ， $B_i$  是  $S$  的子集，则由  $B_{31}$  所表达的子集是 \_\_\_\_\_。

3、设  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  上的二元关系  $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x < y \vee x \text{ 是质数} \}$ ，则  $R =$  \_\_\_\_\_（列举法）。

$R$  的关系矩阵  $M_R =$  \_\_\_\_\_。

5、设  $A = \{1, 2, 3\}$ ，则  $A$  上既不是对称的又不是反对称的关系

$R =$  \_\_\_\_\_； $A$  上既是对称的又是反对称的关系

$R =$  \_\_\_\_\_。

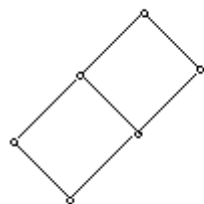
6、设代数系统 $\langle A, * \rangle$ , 其中  $A=\{a, b, c\}$ ,

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

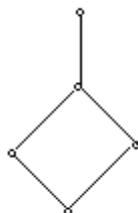
则幺元是 \_\_\_\_\_ ； 是否有幂等性 \_\_\_\_\_ ； 是否有对称性 \_\_\_\_\_ 。

7、4 阶群必是 \_\_\_\_\_ 群或 \_\_\_\_\_ 群。

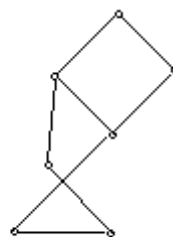
8、下面偏序格是分配格的是 \_\_\_\_\_ 。



(A)



(B)



(C)

9、n 个结点的无向完全图  $K_n$  的边数为 \_\_\_\_\_ ，欧拉图的充要条件是 \_\_\_\_\_ 。

10、公式  $(P \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge ((\neg P \vee Q) \wedge \neg R)$  的根树表示为

\_\_\_\_\_ 。

## 二、选择 20% （每小题 2 分）

1、在下述公式中是重言式为（ ）

A.  $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$  ; B.  $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$  ;

C.  $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$  ; D.  $P \rightarrow (P \vee Q)$  。

2、命题公式  $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$  中极小项的个数为（ ），成真赋值的个数为（ ）。

A. 0; B. 1; C. 2; D. 3 。

3、设  $S = \{\Phi, \{1\}, \{1, 2\}\}$  , 则  $2^S$  有（ ）个元素。

A. 3; B. 6; C. 7; D. 8 。

4、设  $S = \{1, 2, 3\}$  , 定义  $S \times S$  上的等价关系

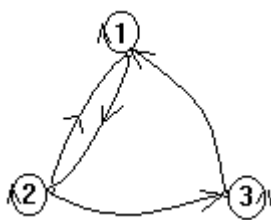
$R = \{ \langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \mid \langle a, b \rangle \in S \times S, \langle c, d \rangle \in S \times S, a + d = b + c \}$  则由  $R$  产生

的  $S \times S$  上一个划分共有（ ）个分块。



A. 4;      B. 5;      C. 6;      D. 9。

5、设  $S = \{1, 2, 3\}$ ,  $S$  上关系  $R$  的关系图为



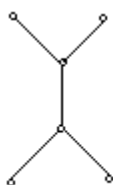
则  $R$  具有 ( ) 性质。

- A. 自反性、对称性、传递性;      B. 反自反性、反对称性;  
C. 反自反性、反对称性、传递性;      D. 自反性。

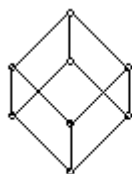
6、设  $+, \circ$  为普通加法和乘法, 则 ( )  $\langle S, +, \circ \rangle$  是域。

- A.  $S = \{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}\}$       B.  $S = \{x \mid x = 2n, a, b \in \mathbb{Z}\}$   
C.  $S = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$       D.  $S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{N}$ 。

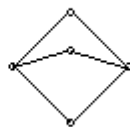
7、下面偏序集 ( ) 能构成格。



[A]



[B]

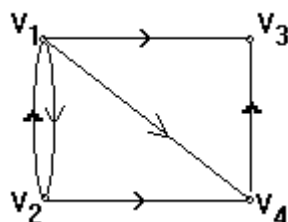


[C]



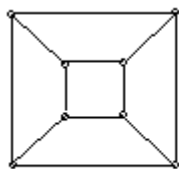
[D]

8、在如下的有向图中, 从  $v_1$  到  $v_4$  长度为 3 的道路有 ( ) 条。

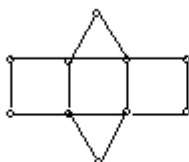


A. 1;      B. 2;      C. 3;      D. 4。

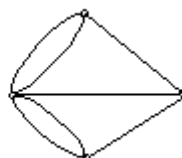
9、在如下各图中 ( ) 欧拉图。



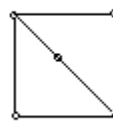
[A]



[B]



[C]



[D]

10、

设  $R$  是实数集合, “ $\times$ ” 为普通乘法, 则代数系统  $\langle R, \times \rangle$  是 ( )。

- A. 群;      B. 独异点;      C. 半群。

### 三、证明 46%

1、设  $R$  是  $A$  上一个二元关系,

$S = \{ \langle a, b \rangle \mid (a, b \in A) \wedge (\text{对于某一个 } c \in A, \text{ 有 } \langle a, c \rangle \in R \text{ 且 } \langle c, b \rangle \in R) \}$  试证明若  $R$  是  $A$  上一个等价关系, 则  $S$  也是  $A$  上的一个等价关系。(9 分)

2、用逻辑推理证明:

所有的舞蹈者都很有风度, 王华是个学生且是个舞蹈者。因此有些学生很有风度。

(11 分)

3、若  $f: A \rightarrow B$  是从  $A$  到  $B$  的函数, 定义一个函数  $g: B \rightarrow 2^A$  对任意  $b \in B$  有  $g(b) = \{x \mid (x \in A) \wedge (f(x) = b)\}$ , 证明: 若  $f$  是  $A$  到  $B$  的满射, 则  $g$  是从  $B$  到  $2^A$  的单射。(10 分)

4、若无向图  $G$  中只有两个奇数度结点, 则这两个结点一定连通。(8 分)

5、设  $G$  是具有  $n$  个结点的无向简单图, 其边数  $m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$ , 则  $G$  是 Hamilton 图 (8 分)

### 四、计算 14%

1、设  $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$  是一个群, 这里  $+_6$  是模 6 加法,  $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ , 试求出  $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$  的所有子群及其相应左陪集。(7 分)

2、权数 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 构造一棵最优二叉树。(7 分)

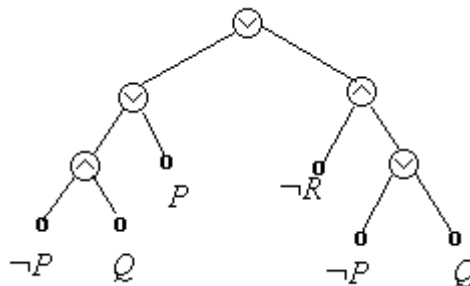
试卷二答案:

#### 一、填空 20% (每小题 2 分)

1、 $\neg P \rightarrow Q$ ;  $P \wedge Q$  2、 $T$  3、 $B_{31} = B_{00011111} = \{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$  4、 $R = \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 6 \rangle \}$ ;

$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$  5、 $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$ ;  
6、 $a$ ; 否; 有 7、Klein 四元群; 循环群 8、 $B$  9、

$\frac{1}{2}n(n-1)$  ; 图中无奇度结点且连通 10 、



## 二、 选择 20% (每小题 2 分)

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B、D	D; D	D	B	D	A	B	B	B	B、C

## 三、 证明 46%

1、(9 分)

(1) S 自反的

$\forall a \in A$ , 由 R 自反,  $\therefore (<a, a> \in R) \wedge (<a, a> \in R)$ ,  $\therefore <a, a> \in S$

(2) S 对称的

$\forall a, b \in A$

$<a, b> \in S \Rightarrow (<a, c> \in R) \wedge (<c, b> \in R)$  ...S 定义

$\Rightarrow (<a, c> \in R) \wedge (<c, b> \in R)$  ...R 对称

$\Rightarrow <b, a> \in S$  ...R 传递

(3) S 传递的

$\forall a, b, c \in A$

$<a, b> \in S \wedge <b, c> \in S$

$\Rightarrow (<a, d> \in R) \wedge (<d, b> \in R) \wedge (<b, e> \in R) \wedge (<e, c> \in R)$

$\Rightarrow (<a, b> \in R) \wedge (<b, c> \in R)$  ...R 传递

$\Rightarrow <a, c> \in S$  ...S 定义

由 (1)、(2)、(3) 得: S 是等价关系。

2、11 分

证明: 设  $P(x)$ : x 是个舞蹈者;  $Q(x)$ : x 很有风度;  $S(x)$ : x 是个学生; a: 王华  
上述句子符号化为:

前提:  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 、 $S(a) \wedge P(a)$  结论:  $\exists x(S(x) \wedge Q(x))$  .....3 分

①  $S(a) \wedge P(a)$  P

②  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  P

③  $P(a) \rightarrow Q(a)$  US②

④  $P(a)$  T①I

⑤  $Q(a)$  T③④I

⑥  $S(a)$  T①I

⑦  $S(a) \wedge Q(a)$  T⑤⑥I

⑧  $\exists x(S(x) \wedge Q(x))$  EG⑦

.....11 分

3、10 分

证明：  $\forall b_1, b_2 \in B, (b_1 \neq b_2) \because f$  满射  $\therefore \exists a_1, a_2 \in A$

使  $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$ , 且  $f(a_1) \neq f(a_2)$ , 由于  $f$  是函数,  $\therefore a_1 \neq a_2$

又  $g(b_1) = \{x | (x \in A) \wedge (f(x) = b_1)\}$ ,  $g(b_2) = \{x | (x \in A) \wedge (f(x) = b_2)\}$

$\therefore a_1 \in g(b_1), a_2 \in g(b_2)$  但  $a_1 \notin g(b_2), a_2 \notin g(b_1) \therefore g(b_1) \neq g(b_2)$

由  $b_1, b_2$  任意性知,  $g$  为单射。

4、8 分

证明：设  $G$  中两奇数度结点分别为  $u$  和  $v$ , 若  $u, v$  不连通, 则  $G$  至少有两个连通分支  $G_1, G_2$ , 使得  $u$  和  $v$  分别属于  $G_1$  和  $G_2$ , 于是  $G_1$  和  $G_2$  中各含有 1 个奇数度结点, 这与图论基本定理矛盾, 因而  $u, v$  一定连通。

5、8 分

证明：证  $G$  中任何两结点之和不少于  $n$ 。

反证法：若存在两结点  $u, v$  不相邻且  $d(u) + d(v) \leq n-1$ , 令  $V_1 = \{u, v\}$ , 则  $G-V_1$

是具有  $n-2$  个结点的简单图, 它的边数  $m' \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2 - (n-1)$ , 可得

$m' \geq \frac{1}{2}(n-2)(n-3) + 1$

, 这与  $G_1 = G - V_1$  为  $n-2$  个结点为简单图的题设矛盾, 因而  $G$  中任何两个相邻的结点度数和不少于  $n$ 。

所以  $G$  为 Hamilton 图。

#### 四、 计算 14%

1、7 分

解：子群有  $\langle \{[0]\}, +_6 \rangle$ ;  $\langle \{[0], [3]\}, +_6 \rangle$ ;  $\langle \{[0], [2], [4]\}, +_6 \rangle$ ;  $\langle \{Z_6\}, +_6 \rangle$

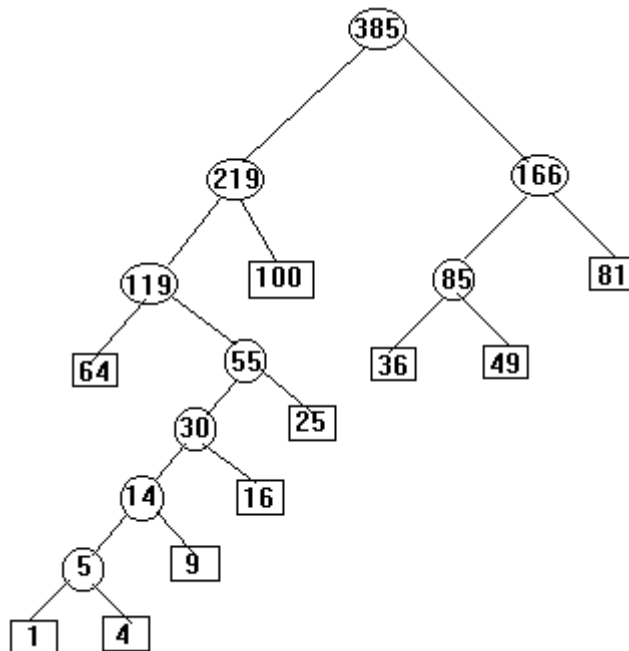
$\{[0]\}$  的左陪集:  $\{[0]\}, \{[1]\}, \{[2]\}, \{[3]\}, \{[4]\}, \{[5]\}$

$\{[0], [3]\}$  的左陪集:  $\{[0], [3]\}, \{[1], [4]\}, \{[2], [5]\}$

$\{[0], [2], [4]\}$  的左陪集:  $\{[0], [2], [4]\}, \{[1], [3], [5]\}$

$Z_6$  的左陪集:  $Z_6$ 。

2、7 分



## 一、 填空 20% （每空 2 分）

- 1、 设  $f, g$  是自然数集  $N$  上的函数  $\forall x \in N, f(x) = x+1, g(x) = 2x$ ,  
则  $f \circ g(x) =$  \_\_\_\_\_。
- 2、 设  $A = \{a, b, c\}$ ,  $A$  上二元关系  $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, c \rangle \}$ ,  
则  $s(R) =$  \_\_\_\_\_。
- 3、  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A$  上二元关系  $T = \{ \langle x, y \rangle \mid x \div y \text{ 是素数} \}$ , 则用列举法  
 $T =$  \_\_\_\_\_ ;  
 $T$  的关系图为  
\_\_\_\_\_  
 $T$  具有 \_\_\_\_\_ 性质。
- 4、 集 合  $A = \{ \{\Phi, 2\}, \{2\} \}$  的 幂 集  
 $2^A =$  \_\_\_\_\_。
- 5、  $P, Q$  真值为 0 ;  $R, S$  真值为 1。则  $wff (P \wedge (R \vee S)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (R \wedge S))$  的  
真值为 \_\_\_\_\_。
- 6、  $wff \neg((P \wedge Q) \vee R) \rightarrow R$  的 主 合 取 范 式  
为 \_\_\_\_\_。
- 7、 设  $P(x)$ :  $x$  是素数,  $E(x)$ :  $x$  是偶数,  $O(x)$ :  $x$  是奇数  $N(x, y)$ :  $x$  可以整数  $y$ 。  
则谓词  $wff \forall x(P(x) \rightarrow \exists y(O(y) \wedge N(y, x)))$  的自然语言是  
\_\_\_\_\_。
- 8、 谓词  $wff \forall x \forall y (\exists z (P(x, z) \wedge P(y, z)) \rightarrow \exists u Q(x, y, u))$  的前束范式为  
\_\_\_\_\_。

## 二、 选择 20% （每小题 2 分）

- 1、 下述命题公式中, 是重言式的为 ( )。  
A、  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ ; B、  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ ;  
C、  $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ ; D、  $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow q$ 。
- 2、  $wff \neg(p \wedge q) \rightarrow r$  的主析取范式中含极小项的个数为 ( )。  
A、 2; B、 3; C、 5; D、 0; E、 8。
- 3、 给定推理

- ①  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$  P  
 ②  $F(y) \rightarrow G(y)$  US①  
 ③  $\exists xF(x)$  P  
 ④  $F(y)$  ES③  
 ⑤  $G(y)$  T②④I  
 ⑥  $\forall xG(x)$  UG⑤

$$\therefore \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \Rightarrow \forall xG(x)$$

推理过程中错在 ( )。

A、① $\rightarrow$ ②； B、② $\rightarrow$ ③； C、③ $\rightarrow$ ④； D、④ $\rightarrow$ ⑤； E、⑤ $\rightarrow$ ⑥

4、设  $S_1=\{1, 2, \dots, 8, 9\}$ ,  $S_2=\{2, 4, 6, 8\}$ ,  $S_3=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $S_4=\{3, 4, 5\}$ ,

$S_5=\{3, 5\}$ , 在条件  $X \subseteq S_1$  且  $X \not\subseteq S_3$  下  $X$  与 ( ) 集合相等。

A、 $X=S_2$  或  $S_5$ ； B、 $X=S_4$  或  $S_5$ ；

C、 $X=S_1$ ,  $S_2$  或  $S_4$ ； D、 $X$  与  $S_1, \dots, S_5$  中任何集合都不等。

5、设  $R$  和  $S$  是  $P$  上的关系,  $P$  是所有人的集合,  
 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P \wedge x \text{ 是 } y \text{ 的父亲} \}$ ,  $S = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P \wedge x \text{ 是 } y \text{ 的母亲} \}$

则  $S^{-1} \circ R$  表示关系 ( )。

A、 $\{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P \wedge x \text{ 是 } y \text{ 的丈夫} \}$ ;

B、 $\{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P \wedge x \text{ 是 } y \text{ 的孙子或孙女} \}$ ;

C、 $\Phi$ ; D、 $\{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in P \wedge x \text{ 是 } y \text{ 的祖父或祖母} \}$ 。

6、下面函数 ( ) 是单射而非满射。

A、 $f: R \rightarrow R, f(x) = -x^2 + 2x - 1$ ;

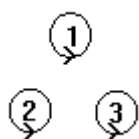
B、 $f: Z^+ \rightarrow R, f(x) = \ln x$ ;

C、 $f: R \rightarrow Z, f(x) = [x], [x]$  表示不大于  $x$  的最大整数;

D、 $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x + 1$ 。

其中  $R$  为实数集,  $Z$  为整数集,  $R^+$ ,  $Z^+$  分别表示正实数与正整数集。

7、设  $S=\{1, 2, 3\}$ ,  $R$  为  $S$  上的关系, 其关系图为



则  $R$  具有 ( ) 的性质。

- A、自反、对称、传递；                      B、什么性质也没有；  
C、反自反、反对称、传递；                  D、自反、对称、反对称、传递。

8、设  $S = \{\Phi, \{1\}, \{1, 2\}\}$ ，则有 (        )  $\subseteq S$ 。

- A、 $\{\{1, 2\}\}$ ； B、 $\{1, 2\}$ ； C、 $\{1\}$ ； D、 $\{2\}$ 。

9、设  $A = \{1, 2, 3\}$ ，则  $A$  上有 (        ) 个二元关系。

- A、 $2^3$ ； B、 $3^2$ ； C、 $2^{2^3}$ ； D、 $2^{3^2}$ 。

10、全体小项合取式为 (        )。

- A、可满足式； B、矛盾式； C、永真式； D、A, B, C 都有可能。

### 三、 用 CP 规则证明 16% (每小题 8 分)

1、 $A \vee B \rightarrow C \wedge D, D \vee E \rightarrow F \Rightarrow A \rightarrow F$

2、 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \vee \exists xQ(x)$

### 四、(14%)

集合  $X = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \dots \}$ ， $R = \{ \langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \mid x_1 + y_2 = x_2 + y_1 \}$ 。

1、证明  $R$  是  $X$  上的等价关系。(10 分)

2、求出  $X$  关于  $R$  的商集。(4 分)

### 五、(10%)

设集合  $A = \{a, b, c, d\}$  上关系  $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$

要求 1、写出  $R$  的关系矩阵和关系图。(4 分)

2、用矩阵运算求出  $R$  的传递闭包。(6 分)

### 六、(20%)

1、(10 分) 设  $f$  和  $g$  是函数，证明  $f \cap g$  也是函数。

2、(10 分) 设函数  $g: S \rightarrow T$   $f: T \rightarrow S$ ，证明  $f: T \rightarrow S$  有一左逆函数当且仅当  $f$  是入射函数。

答案：

#### 五、 填空 20% (每空 2 分)

1、 $2(x+1)$ ； 2、 $\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, a \rangle \}$ ； 3、

$\{ \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 6, 2 \rangle, \langle 6, 3 \rangle \}$ ；

4、



反对称性、反自反性；4、 $\{\Phi, \{\{\Phi, 2\}\}, \{\{2\}\}, \{\{\Phi, 2\}, \{2\}\}\}$ ；5、1；

6、 $(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$ ；7、任意  $x$ ，如果  $x$  是素数则存在一个  $y$ ， $y$  是奇数且  $y$  整除  $x$ ；8、 $\forall x \forall y \forall z \exists u (\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, y, u))$ 。

#### 六、选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	C	C	A	B	D	A	D	C

#### 七、证明 16%(每小题 8 分)

1、

- |                                     |         |
|-------------------------------------|---------|
| ① $A$                               | P（附加前提） |
| ② $A \vee B$                        | T①I     |
| ③ $A \vee B \rightarrow C \wedge D$ | P       |
| ④ $C \wedge D$                      | T②③I    |
| ⑤ $D$                               | T④I     |
| ⑥ $D \vee E$                        | T⑤I     |
| ⑦ $D \vee E \rightarrow F$          | P       |
| ⑧ $F$                               | T⑥⑦I    |
| ⑨ $A \rightarrow F$                 | CP      |

2、

$$\therefore \forall x P(x) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$$

本题可证  $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$

- |                               |         |
|-------------------------------|---------|
| ① $\neg(\forall x P(x))$      | P（附加前提） |
| ② $\exists x(\neg P(x))$      | T①E     |
| ③ $\neg P(a)$                 | ES②     |
| ④ $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ | P       |
| ⑤ $P(a) \vee Q(a)$            | US④     |
| ⑥ $Q(a)$                      | T③⑤I    |
| ⑦ $\exists x Q(x)$            | EG⑥     |



$$\textcircled{8} \neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \quad \text{CP}$$

八、14%

(1) 证明:

1、 自反性:  $\forall \langle x, y \rangle \in X$ , 由于  $x + y = x + y$

$\therefore \langle \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R \quad \dots R$  自反

2、 对称性:  $\forall \langle x_1, y_1 \rangle \in X, \forall \langle x_2, y_2 \rangle \in X$

当  $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \in R$  时 即  $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$  也即  $x_2 + y_1 = x_1 + y_2$

故  $\langle \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_1, y_1 \rangle \rangle \in R \quad \dots R$  有对称性

3、 传递性:  $\forall \langle x_1, y_1 \rangle \in X, \forall \langle x_2, y_2 \rangle \in X \quad \forall \langle x_3, y_3 \rangle \in X$

当  $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \rangle \in R$  且  $\langle \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_3, y_3 \rangle \rangle \in R$  时

$$\text{即} \begin{cases} x_1 + y_2 = x_2 + y_1 & (1) \\ x_2 + y_3 = x_3 + y_2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \quad x_1 + y_2 + x_2 + y_3 = x_2 + y_1 + x_3 + y_2$$

$$\text{即 } x_1 + y_3 = x_3 + y_1$$

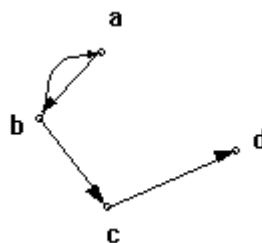
故  $\langle \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_3, y_3 \rangle \rangle \in R \quad \dots R$  有传递性

由 (1) (2) (3) 知:  $R$  是  $X$  上的先等价关系。

$$2、X/R = \{[\langle 1, 2 \rangle]_R\}$$

九、10%

$$1、M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{关系图}$$



$$2、M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2} \circ M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^4} = M_{R^3} \circ M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{R^2} \quad M_{R^5} = M_{R^3}, M_{R^6} = M_{R^4}, \dots$$

$$M_{t(R)} = M_R + M_{R^2} + M_{R^3} + M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore t(R) = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle \}$ 。

## 六、 20%

$$f \cap g = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \text{dom} f \wedge x \in \text{dom} g \wedge y = f(x) \wedge y = g(x) \}$$

$$1、(1) \quad = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g \wedge y = f(x) = g(x) \}$$

$$\text{令 } h = f \cap g$$

$$\therefore \text{dom} f \cap g = \text{dom} h = \{ x \mid x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g, f(x) = g(x) \}$$

$$(2) \quad h = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g \wedge y = h(x) = f(x) = g(x) \}$$

对  $x \in \text{dom} h$  若有  $y_1, y_2$  使得

$$y_1 = h(x) = f(x) = g(x), \quad y_2 = h(x) = f(x) = g(x)$$

由于  $f$  (或  $g$ ) 是函数, 有  $y_1 = y_2$  即  $\forall x \in \text{dom} h$  有唯一  $y$  使得  $y = h(x)$

$\therefore f \cap g$  也是函数。

2、证明:

" $\Rightarrow$ " 若  $f$  有一左逆  $g$ , 则对  $\forall t \in T \quad g \circ f(t) = t$

故  $g \circ f$  是入射, 所以  $f$  是入射。

" $\Leftarrow$ "  $f$  是入射,  $f: T \rightarrow S$  定义如下:

$\forall s \in f(T)$ , 由  $f$  入射,  $\exists t \in T$ , 使  $f(t) = s$

此时令  $g(s) = t$ , 若  $s \notin f(T)$  令  $g(s) = c \in T$

则对  $\forall s \in S$ ,  $g(s)$  只有一个值  $t$  或  $c$  且若  $f(t) = s$

则  $g \circ f(t) = g(s) = t$ , 故  $g$  是  $f$  的左逆元

即若  $f$  入射, 必能构造函数  $g$ , 使  $g$  为  $f$  左逆函数。

试卷四试题与答案

## 一、 填空 10% (每小题 2 分)

1、若  $P, Q$ , 为二命题,  $P \rightarrow Q$  真值为 0 当且仅当 \_\_\_\_\_。

- 2、命题“对于任意给定的正实数，都存在比它大的实数”令  $F(x): x$  为实数，  
 $L(x, y): x > y$  则命题的逻辑谓词公式  
 为 \_\_\_\_\_。
- 3、谓词合式公式  $\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$  的前束范式  
 为 \_\_\_\_\_。
- 4、将量词辖域中出现的 \_\_\_\_\_ 和指导变元交换为另一变元符号，公式其余  
 的部分不变，这种方法称为换名规则。
- 5、设  $x$  是谓词合式公式  $A$  的一个客体变元， $A$  的论域为  $D$ ， $A(x)$  关于  $y$  是自由的，则  
 \_\_\_\_\_ 被称为存在量词消去规则，记为  
 ES。

## 二、 选择 25% （每小题 2.5 分）

- 1、下列语句是命题的有（ ）。
- A、明年中秋节的晚上是晴天； B、 $x + y > 0$ ；  
 C、 $xy > 0$  当且仅当  $x$  和  $y$  都大于 0； D、我正在说谎。
- 2、下列各命题中真值为真的命题有（ ）。
- A、 $2+2=4$  当且仅当 3 是奇数； B、 $2+2=4$  当且仅当 3 不是奇数；  
 C、 $2+2 \neq 4$  当且仅当 3 是奇数； D、 $2+2 \neq 4$  当且仅当 3 不是奇数；
- 3、下列符号串是合式公式的有（ ）
- A、 $P \Leftrightarrow Q$ ； B、 $P \Rightarrow P \vee Q$ ； C、 $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$ ； D、 $\neg(P \leftrightarrow Q)$ 。
- 4、下列等价式成立的有（ ）。
- A、 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ ； B、 $P \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow R$ ；  
 C、 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow Q$ ； D、 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$ 。
- 5、若  $A_1, A_2 \cdots A_n$  和  $B$  为 wff，且  $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$  则（ ）。
- A、称  $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$  为  $B$  的前件； B、称  $B$  为  $A_1, A_2 \cdots A_n$  的有效结论  
 C、当且仅当  $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge B \Leftrightarrow F$ ； D、当且仅当  
 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B \Leftrightarrow F$ 。
- 6、 $A, B$  为二合式公式，且  $A \Leftrightarrow B$ ，则（ ）。
- A、 $A \rightarrow B$  为重言式； B、 $A^* \Rightarrow B^*$ ；  
 C、 $A \Rightarrow B$ ； D、 $A^* \Leftrightarrow B^*$ ； E、 $A \leftrightarrow B$  为重言式。

7、“人总是要死的”谓词公式表示为（ ）。

(论域为全总个体域)  $M(x)$ :  $x$  是人;  $Mortal(x)$ :  $x$  是要死的。

A、 $M(x) \rightarrow Mortal(x)$ ; B、 $M(x) \wedge Mortal(x)$

C、 $\forall x(M(x) \rightarrow Mortal(x))$ ; D、 $\exists x(M(x) \wedge Mortal(x))$

8、公式  $A = \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$  的解释  $I$  为: 个体域  $D=\{2\}$ ,  $P(x)$ :  $x>3$ ,  $Q(x)$ :  $x=4$  则  $A$  的真值为（ ）。

A、1; B、0; C、可满足式; D、无法判定。

9、下列等价关系正确的是（ ）。

A、 $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ ;

B、 $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ ;

C、 $\forall x(P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow Q$ ;

D、 $\exists x(P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \rightarrow Q$ 。

10、下列推理步骤错在（ ）。

①  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$  P

②  $F(y) \rightarrow G(y)$  US①

③  $\exists xF(x)$  P

④  $F(y)$  ES③

⑤  $G(y)$  T②④I

⑥  $\exists xG(x)$  EG⑤

A、②; B、④; C、⑤; D、⑥

### 三、 逻辑判断 30%

1、用等值演算法和真值表法判断公式  $A = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$  的类型。(10 分)

2、下列问题，若成立请证明，若不成立请举出反例：(10 分)

(1) 已知  $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C$ ，问  $A \Leftrightarrow B$  成立吗？

(2) 已知  $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ ，问  $A \Leftrightarrow B$  成立吗？

3、如果厂方拒绝增加工资，那么罢工就不会停止，除非罢工超过一年并且工厂撤换了厂长。问：若厂方拒绝增加工资，面罢工刚开始，罢工是否能够停止。(10 分)

四、计算 10%

1、设命题  $A_1, A_2$  的真值为 1,  $A_3, A_4$  真值为 0, 求命题

$(A_1 \vee (A_2 \rightarrow (A_3 \wedge \neg A_1))) \leftrightarrow (A_2 \vee \neg A_4)$  的真值。(5 分)

2、利用主析取范式, 求公式  $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q \wedge R$  的类型。(5 分)

五、谓词逻辑推理 15%

符号化语句: “有些人喜欢所有的花, 但是人们不喜欢杂草, 那么花不是杂草”。并推证其结论。

六、证明: (10%)

设论域  $D=\{a, b, c\}$ , 求证:  $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$ 。

答案:

十、填空 10% (每小题 2 分)

1、P 真值为 1, Q 的真值为 0; 2、 $\forall x(F(x) \wedge L(x,0) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge L(y,x)))$ ; 3、 $\exists x(\neg P(x) \vee Q(x))$ ; 4、约束变元; 5、 $\exists xA(x) \Rightarrow A(y)$ , y 为 D 的某些元素。

十一、 选择 25% (每小题 2.5 分)

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A,C	A,D	C,D	A,D	B,C	A,B,C,D,E	C	A	B	(4)

十二、 逻辑判断 30%

1、(1) 等值演算法

$A = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow T$

(2) 真值表法

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$P \leftrightarrow Q$	A
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

所以 A 为重言式。

2、(1) 不成立。

若取  $C = T$  则  $A \vee T \Leftrightarrow T$   $B \vee T \Leftrightarrow T$  有  $A \vee C \Leftrightarrow B \vee C \Leftrightarrow T$   
但 A 与 B 不一定等价, 可为任意不等价的公式。

(2) 成立。

证明:  $\neg A \Leftrightarrow \neg B$  充要条件  $\neg A \Leftrightarrow \neg B \Leftrightarrow T$

$$T \Leftrightarrow (\neg A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A)$$

$$\text{即: } \Leftrightarrow (\neg B \vee A) \wedge (\neg A \vee B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$$

所以  $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$  故  $A \leftrightarrow B$ 。

3、解: 设 P: 厂方拒绝增加工资; Q: 罢工停止; R 罢工超过一年; R: 撤换厂长

前提:  $P \rightarrow (\neg(R \wedge S) \rightarrow \neg Q)$ ,  $P$ ,  $\neg R$  结论:  $\neg Q$

- |   |      |
|---|------|
| ① $P \rightarrow (\neg(R \wedge S) \rightarrow \neg Q)$ | P    |
| ② $P$   | P    |
| ③ $\neg(R \wedge S) \rightarrow \neg Q$                 | T①②I |
| ④ $\neg R$  | P    |
| ⑤ $\neg R \vee \neg S$                                  | T④I  |
| ⑥ $\neg(R \wedge S)$                                    | T⑤E  |
| ⑦ $\neg Q$  | T③⑥I |

罢工不会停止是有效结论。

#### 四、计算 10%

$$(1 \vee (1 \rightarrow 0 \wedge 0)) \Leftrightarrow (1 \vee 1) = (1 \vee (1 \rightarrow 0)) \Leftrightarrow 1$$

$$(1) \quad \text{解: } = (1 \vee 0) \Leftrightarrow 1 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

$$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge R)$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow F$$

它无成真赋值, 所以为矛盾式。

#### 五、谓词逻辑推理 15%

解:  $M(x): x$ 是人;  $F(x): x$ 是花;  $G(x): x$ 是杂草;  $H(x, y): x$ 喜欢 $y$

$$\exists x(M(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow H(x, y))) \quad \forall x(M(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow \neg H(x, y)))$$

$$\Rightarrow \forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$$

证明:

$$(1) \exists x(M(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow H(x, y))) \quad \text{P}$$

(2) $M(a) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow H(a, y))$	ES(1)
(3) $M(a)$	T(2)I
(4) $\forall y(F(y) \rightarrow H(a, y))$	T(2)I
(5) $\forall x(M(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow \neg H(x, y)))$	P
(6) $M(a) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow \neg H(a, y))$	US(5)
(7) $\forall y(G(y) \rightarrow \neg H(a, y))$	T(3)(6)I
(8) $\forall y(H(a, y) \rightarrow \neg G(y))$	T(7)E
(9) $F(z) \rightarrow H(a, z)$	US(4)
(10) $H(a, z) \rightarrow \neg G(z)$	US(8)
(11) $F(z) \rightarrow \neg G(z)$	T(9)(10)I
(12) $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$	UG(11)

十三、 证明 10%

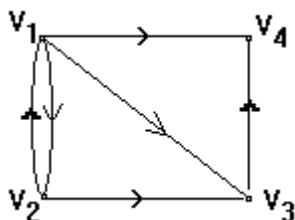
$$\begin{aligned}
 & \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Leftrightarrow (A(a) \wedge A(b) \wedge A(c) \vee (B(a) \wedge B(b) \wedge B(c)) \\
 & \Leftrightarrow (A(a) \vee B(a)) \wedge (A(a) \vee B(b)) \wedge (A(a) \vee B(c)) \\
 & \wedge (A(b) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b)) \wedge (A(b) \vee B(c)) \\
 & \wedge (A(c) \vee B(a)) \wedge (A(c) \vee B(b)) \wedge (A(c) \vee B(c)) \\
 & \Rightarrow (A(a) \vee B(a)) \wedge (A(b) \vee B(b)) \wedge (A(c) \vee B(c)) \\
 & \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))
 \end{aligned}$$

## 试卷五试题与答案

### 一、填空 15%（每空 3 分）

1、设  $G$  为 9 阶无向图，每个结点度数不是 5 就是 6，则  $G$  中至少有 \_\_\_\_\_ 个 5 度结点。

2、 $n$  阶完全图， $K_n$  的点数  $X(K_n) =$  \_\_\_\_\_ 。



3、有向图 \_\_\_\_\_ 中从  $v_1$  到  $v_2$  长度为 2 的通路有 \_\_\_\_\_ 条。

4、设  $[R, +, \cdot]$  是代数系统，如果①  $[R, +]$  是交换群 ②  $[R, \cdot]$  是半群

③ \_\_\_\_\_ 则称 $[R, +, \cdot]$ 为环。

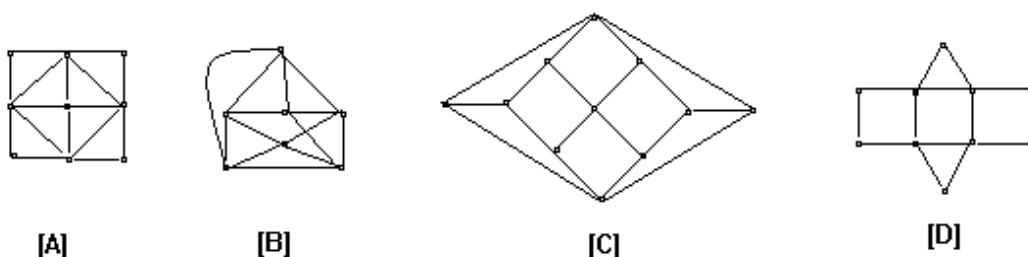
5、设 $[L, \otimes, \oplus]$ 是代数系统, 则 $[L, \otimes, \oplus]$ 满足幂等律, 即对 $\forall a \in L$ 有 \_\_\_\_\_。

## 二、选择 15% (每小题 3 分)

1、下面四组数能构成无向简单图的度数列的有 ( )。

- A、(2, 2, 2, 2, 2);                      B、(1, 1, 2, 2, 3);  
C、(1, 1, 2, 2, 2);                      D、(0, 1, 3, 3, 3)。

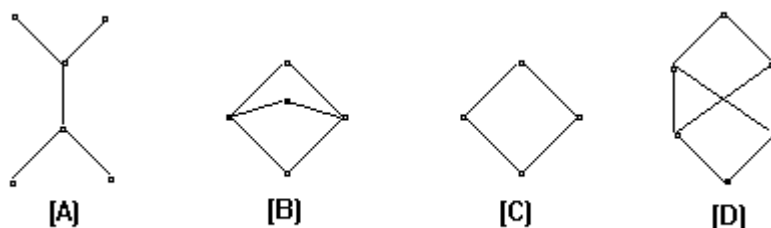
2、下图中是哈密顿图的为 ( )。



3、如果一个有向图 D 是强连通图, 则 D 是欧拉图, 这个命题的真值为 ( )

- A、真;              B、假。

4、下列偏序集 ( ) 能构成格。



5、设  $s = \{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4\}$ , \* 为普通乘法, 则 $[S, *]$ 是 ( )。

- A、代数系统;    B、半群;    C、群;    D、都不是。

## 三、证明 48%

1、(10%) 在至少有 2 个人的人群中, 至少有 2 个人, 他们有相同的朋友数。

2、(8%) 若图 G 中恰有两个奇数度顶点, 则这两个顶点是连通的。

3、(8%) 证明在 6 个结点 12 条边的连通平面简单图中, 每个面的面数都是 3。

4、(10%) 证明循环群的同态像必是循环群。

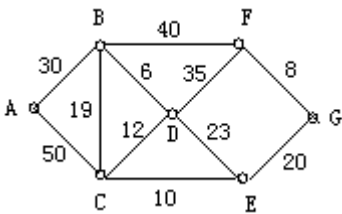
5、(12%) 设 $[B, \times, +, ^-, 0, 1]$ 是布尔代数, 定义运算\*为 $a * b = (a \times \bar{b}) + (\bar{a} \times b)$ ,

求证 $[B, *]$ 是阿贝尔群。



四、计算 22%

- 1、在二叉树中
- 1) 求带权为 2, 3, 5, 7, 8 的最优二叉树 T。(5 分)
- 2) 求 T 对应的二元前缀码。(5 分)
- 2、下图所示带权图中最优投递路线并求出投递路线长度（邮局在 D 点）。



答案：

一、填空 (15%) 每空 3 分

- 1、 6; 2、 n; 3、 2; 4、 +对 • 分配且 • 对+分配均成立; 5、  $a \otimes a = a$  且  $a \oplus a = a$ 。

二、选择 (15%) 每小题 3 分

题目	1	2	3	4	5
答案	A,B	B,D	B	C	D

三、证明 (48%)

- 1、 (10 分) 证明：用  $n$  个顶点  $v_1, \dots, v_n$  表示  $n$  个人，构成顶点集  $V=\{v_1, \dots, v_n\}$ ，设

$$E = \{uv \mid u, v \in V, \text{且 } u, v \text{ 是朋友 } (u \neq v)\}, \text{ 无向图 } G = (V, E)$$

现证  $G$  中至少有两个结点度数相同。

事实上，(1) 若  $G$  中孤立点个数大于等于 2，结论成立。

(2) 若  $G$  中有一个孤立点，则  $G$  中的至少有 3 个顶点，既不考虑孤立点。设  $G$  中每个结点数均大于等于 1，又因为  $G$  为简单图，所以每个顶点度数都小于等于  $n-1$ ，由于  $G$  中  $n$  顶点其度数取值只能是 1, 2,  $\dots$ ,  $n-1$ ，由鸽巢原理，必然至少有两个结点度数是相同的。

2、 (8 分) 证：设  $G$  中两个奇数度结点分别为  $u, v$ 。若  $u, v$  不连通则至少有两个连通分支  $G_1, G_2$ ，使得  $u, v$  分别属于  $G_1$  和  $G_2$ 。于是  $G_1$  与  $G_2$  中各含有一个奇数度结点，与握手定理矛盾。因而  $u, v$  必连通。

3 (8 分) 证：  $n=6, m=12$  欧拉公式  $n-m+f=2$  知  $f=2-n+m=2-6+12=8$

由图论基本定理知:  $\sum \deg(F) = 2 \times m = 24$ , 而  $\deg(F_i) \geq 3$ , 所以必有  $\deg(F_i) = 3$ , 即每个面用 3 条边围成。

4 (10 分) 证: 设循环群  $[A, \cdot]$  的生成元为  $a$ , 同态映射为  $f$ , 同态像为  $[f(A), *]$ , 于是

$$\forall a^n, a^m \in A \text{ 都有 } f(a^n \cdot a^m) = f(a^n) * f(a^m)$$

$$\text{对 } n=1 \text{ 有 } f(a) = f(a)$$

$$n=2, \text{ 有 } f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) * f(a) = (f(a))^2$$

$$\text{若 } n=k-1 \text{ 时 有 } f(a^{k-1}) = (f(a))^{k-1}$$

$$\text{对 } n=k \text{ 时, } f(a^k) = f(a^{k-1} \cdot a) = f(a^{k-1}) * f(a) = (f(a))^{k-1} * f(a) = (f(a))^k$$

这表明,  $f(A)$  中每一个元素均可表示为  $(f(a))^n$ , 所以  $[f(A), *]$  为  $f(a)$  生成的循环群。

5、证:

$$(1) \text{ 交换律: } \forall a, b \in B \text{ 有 } a * b = (a \times \bar{b}) + (\bar{a} \times b) = (b \times \bar{a}) + (\bar{b} \times a) = b * a$$

$$(2) \text{ 结合律: } \forall a, b, c \in B \text{ 有}$$

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= ((a \times \bar{b}) + (\bar{a} \times b)) * c = (((a \times \bar{b}) + (\bar{a} \times b)) \times \bar{c}) + \overline{((a \times \bar{b}) + (\bar{a} \times b))} \times c \\ &= (a \times \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times b \times \bar{c}) + ((\bar{a} + b) \times (a + \bar{b})) \times c \\ &= a \times \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times b \times \bar{c} + (\bar{a} \times a + \bar{a} \times \bar{b} + b \times a + b \times \bar{b}) \times c \\ &= a \times \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times b \times \bar{c} + b \times a \times c + \bar{a} \times \bar{b} \times c \\ &= a \times b \times c + a \times \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times b \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{b} \times c \end{aligned}$$

而:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * ((b \times \bar{c}) + (\bar{b} \times c)) = (a \times \overline{(b \times \bar{c}) + (\bar{b} \times c)}) + ((\bar{a} \times (b \times \bar{c}) + (\bar{b} \times c)) \\ &= a \times (\bar{b} + c) \times (b + \bar{c}) + \bar{a} \times b \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{b} \times c \\ &= a \times b \times c + a \times \bar{b} \times \bar{c} + \bar{a} \times b \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{b} \times c \\ \therefore (a * b) * c &= a * (b * c) \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 幺: } \forall a \in B \text{ 有}$$

$$a * 0 = (a \times \bar{0}) + (\bar{a} \times 0) = a + 0 = a \quad 0 * a = (0 \times \bar{a}) + (\bar{0} \times a) = 0 + a = a$$

$\therefore 0$  是  $[B, *]$  幺元。

$$(4) \text{ 逆: } \forall a \in B \quad a * a = (a \times \bar{a}) + (\bar{a} \times a) = 0 + 0 = 0$$

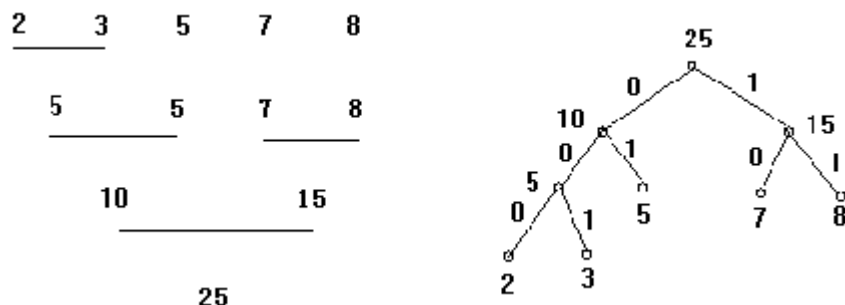
$\therefore a$  是  $a$  的逆元。

综上所述:  $[B, *]$  是阿贝尔群。

#### 四、计算 (22%)

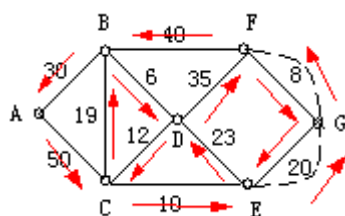
1、(10 分)

(1) (5 分) 由 Huffman 方法,得最佳二叉树为:



(2) (5 分) 最佳前缀码为: 000, 001, 01, 10, 11

2、(12 分)



图中奇数点为 E、F,  $d(E)=3, d(F)=3, d(E,F)=28$   $p=EGF$

复制道路 EG、GF, 得图  $G'$ , 则  $G'$  是欧拉图。

由 D 开始找一条欧拉回路: DEGFGEACBDCFD。

道路长度为:

$$35+8+20+20+8+40+30+50+19+6+12+10+23=281。$$

试卷六试题与答案

#### 一、 填空 15% (每小题 3 分)

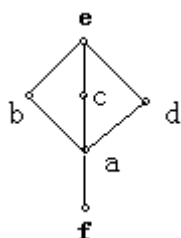
1、  $n$  阶完全图结点  $v$  的度数  $d(v) =$  \_\_\_\_\_。

2、 设  $n$  阶图  $G$  中有  $m$  条边, 每个结点的度数不是  $k$  的是  $k+1$ , 若  $G$  中有  $N_k$  个  $k$  度顶点,  $N_{k+1}$  个  $k+1$  度顶点, 则  $N_k =$  \_\_\_\_\_。

3、 算式  $((a + (b * c) * d) \div (e * f))$  的二叉树表示为

\_\_\_\_\_。

4、 如图



给出格  $L$ , 则 \_\_\_\_\_。

5、 一组学生, 用二二扳腕子比赛法来测定臂力的大小, 则么元是 \_\_\_\_\_。

## 二、选择 15% （每小题 3 分）

1、设  $S=\{0,1,2,3\}$ ,  $\leq$  为小于等于关系, 则  $\{S, \leq\}$  是 ( )。

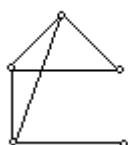
A、群; B、环; C、域; D、格。

2、设  $\{a, b, c\}$ ,  $*$  为代数系统,  $*$  运算如下:

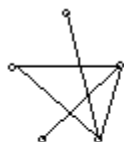
$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

则零元为 ( )。

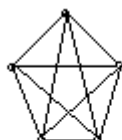
A、a; B、b; C、c; D、没有。



3、如右图 相对于完全图  $K_5$  的补图为 ( )。



[A]



[B]



[C]



[D]

4、一棵无向树  $T$  有 7 片树叶, 3 个 3 度顶点, 其余顶点均为 4 度。则  $T$  有 ( ) 4 度结点。

A、1; B、2; C、3; D、4。

5、设  $[A, +, \cdot]$  是代数系统, 其中  $+$ ,  $\cdot$  为普通加法和乘法, 则  $A = ( )$  时,  $[A, +, \cdot]$  是整环。

A、 $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$ ; B、 $\{x \mid x = 2n+1, n \in \mathbb{Z}\}$ ;

C、 $\{x \mid x \geq 0, \text{且 } x \in \mathbb{Z}\}$ ; D、 $\{x \mid x = a + b\sqrt[4]{5}, a, b \in \mathbb{R}\}$ 。

### 三、证明 50%

- 1、设  $G$  是  $(n,m)$  简单二部图，则  $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。(10 分)
- 2、设  $G$  为具有  $n$  个结点的简单图，且  $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ，则  $G$  是连通图。(10 分)
- 3、记“开”为 1，“关”为 0，反映电路规律的代数系统  $\{0, 1\}$ ， $+$ ， $\cdot$  的加法运算和乘法运算。如下：
 

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1
- 4、 $[L, \otimes, \oplus]$  是一代数格，“ $\leq$ ”为自然偏序，则  $[L, \leq]$  是偏序格。(16 分)

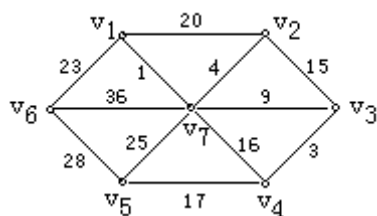
证明它是一个环，并且是一个域。(14 分)

### 四、10%

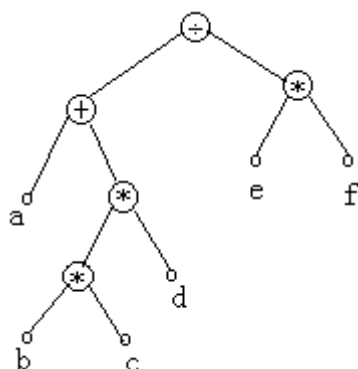
设  $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_3)$  是布尔代数  $\{0, 1\}$ ， $\vee$ ， $\wedge$ ， $-$  上的一个布尔表达式，试写出  $E(x_1, x_2, x_3)$  的析取范式和合取范式 (10 分)

### 五、10%

如下图所示的赋权图表示某七个城市  $v_1, v_2, \dots, v_7$  及预先算出它们之间的一些直接通信成路造价 (单位：万元)，试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信又使总造价最小。



答案：



### 一、填空 15% (每小题 3 分)

1、 $n-1$ ；2、 $n(k+1)-2m$ ；3、如右图；4、0；5、臂力小者

## 二、选择 15%（每小题 3 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	D	C	A	A	D

## 三、证明 50%

(1) 证：设  $G = (V, E)$   $V = X \cup Y$ ,  $|X| = n_1$ ,  $|Y| = n_2$ ,  $n_1 + n_2 = n$

对完全二部图有  $m = n_1 \cdot n_2 = n_1(n - n_1) = -n_1^2 + n_1n = -(n_1 - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4}$

当  $n_1 = \frac{n}{2}$  时，完全二部图  $(n, m)$  的边数  $m$  有最大值  $\frac{n^2}{4}$

故对任意简单二部图  $(n, m)$  有  $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。

(2) 证：反证法：若  $G$  不连通，不妨设  $G$  可分成两个连通分支  $G_1$ 、 $G_2$ ，假设  $G_1$

和  $G_2$  的顶点数分别为  $n_1$  和  $n_2$ ，显然  $n_1 + n_2 = n$

$\therefore n_1 \geq 1$   $n_2 \geq 1$   $\therefore n_1 \leq n-1$   $n_2 \leq n-1$

$\therefore m \leq \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

与假设矛盾。所以  $G$  连通。

(3) (1)  $\{0, 1\}$ ,  $+$ ,  $\cdot$  是环

①  $\{0, 1\}$ ,  $+$  是交换群

乘：由“+”运算表知其封闭性。由于运算表的对称性知： $+$ 运算可交换。

群： $(0+0)+0=0+(0+0)=0$ ； $(0+0)+1=0+(0+1)=1$ ；

$(0+1)+0=0+(1+0)=1$ ； $(0+1)+1=0+(1+1)=0$ ；

$(1+1)+1=1+(1+1)=0$  .....

结合律成立。

幺：幺元为 0。

逆：0, 1 逆元均为其本身。

②  $\{0, 1\}$ ,  $\cdot$  是半群

乘：由“ $\cdot$ ”运算表知封闭

群： $(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot (0 \cdot 0) = 0$ ； $(0 \cdot 0) \cdot 1 = 0 \cdot (0 \cdot 1) = 0$ ；

$(0 \cdot 1) \cdot 0 = 0 \cdot (1 \cdot 0) = 0$ ； $(0 \cdot 1) \cdot 1 = 0 \cdot (1 \cdot 1) = 0$ ；

$(1 \cdot 1) \cdot 1 = 1 \cdot (1 \cdot 1) = 0$ 。

③  $\cdot$  对  $+$  的分配律  $\forall x, y \in \{0, 1\}$

$$\text{I } 0 \cdot (x+y) = 0+0+0=(0 \cdot x)+(0 \cdot y);$$

$$\text{II } 1 \cdot (x+y)$$

当  $x=y$   $(x+y)=0$  则

$$1 \cdot (x+y) = 1 \cdot 0 = 0 = \begin{Bmatrix} 0+0 \\ 1+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) \\ (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \end{Bmatrix} = (1 \cdot x) + (1 \cdot y);$$

当  $x \neq y$   $(x+y=1)$  则

$$1 \cdot (x+y) = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{Bmatrix} 1+0 \\ 0+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) \\ (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) \end{Bmatrix} = (1 \cdot x) + (1 \cdot y)$$

所以  $\forall x, y, z \in \{0,1\}$  均有  $z \cdot (x+y) = (z \cdot x) + (z \cdot y)$

同理可证:  $(x+y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

所以  $\cdot$  对  $+$  是可分配的。

由①②③得,  $[\{0, 1\}, +, \cdot]$  是环。

(2)  $[\{0, 1\}, +, \cdot]$  是域

因为  $[\{0, 1\}, +, \cdot]$  是有限环, 故只需证明是整环即可。

①乘交环: 由乘法运算表的对称性知, 乘法可交换。

②含幺环: 乘法的幺元是 1

③无零因子:  $1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

因此  $[\{0, 1\}, +, \cdot]$  是整环, 故它是域。

4、证: (1) “ $\leq$ ” 是偏序关系,  $\leq$  自然偏序  $\forall a, b \in L \quad a \otimes b = a$

①反自反性: 由代数格幂等关系:  $a \otimes a = a \therefore a \leq a$ 。

②反对称性:  $\forall a, b \in L$  若  $a \leq b, b \leq a$  即:  $a \otimes b = a, b \otimes a = b$ ,

则  $a = a \otimes b = b \otimes a = b \quad b \leq a$

③传递性:  $a \leq b, b \leq c$  则:

$$\begin{aligned} a \otimes c &= (a \otimes b) \otimes c & a \leq b \text{ 即 } a \otimes b &= a \\ &= a \otimes (b \otimes c) & \text{结合律} \\ &= a \otimes b & b \leq c \text{ 即 } b \otimes c &= b \\ &= a & a \leq b \text{ 即 } a \otimes b &= a \end{aligned}$$

$$\therefore a \leq c$$

(2)  $\forall x, y \in L$  在  $L$  中存在  $\{x, y\}$  的下 (上) 确界

设  $x, y \in L$  则:  $x \otimes y = \inf\{x, y\}$

事实上:  $x \otimes (x \otimes y) = (x \otimes x) \otimes y = x \otimes y$

$\therefore x \otimes y \leq x$  同理可证:  $x \otimes y \leq y$

若 $\{x, y\}$ 有另一下界 $c$ , 则 $c \otimes (x \otimes y) = (c \otimes x) \otimes y = c \otimes y = c$

$\therefore c \leq x \otimes y \quad \therefore x \otimes y$ 是 $\{x, y\}$ 最大下界, 即 $x \otimes y = \inf\{x, y\}$

同理可证上确界情况。

#### 四、14%

解：函数表为：

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$E(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$E(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$$

析取范式：

$$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

合取范式： $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

#### 五、10%

解：用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法为：

$w(v_1, v_7) = 1$  选 $e_1 = v_1 v_7$

$w(v_7, v_2) = 4$  选 $e_2 = v_7 v_2$

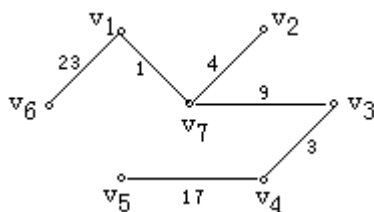
$w(v_7, v_3) = 9$  选 $e_3 = v_7 v_3$

$w(v_3, v_4) = 3$  选 $e = v_3 v_4$

$w(v_4, v_5) = 17$  选 $e = v_4 v_5$

$w(v_1, v_6) = 23$  选 $e = v_1 v_6$

结果如图：



树权  $C(T) = 23 + 1 + 4 + 9 + 3 + 17 = 57$ （万元）即为总造价



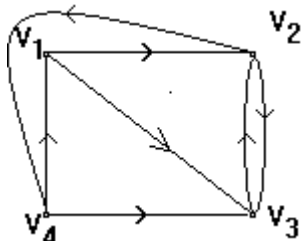
## 一、填空 15% （每小题 3 分）

1. 任何  $(n, m)$  图  $G = (V, E)$  , 边与顶点数的关系是 \_\_\_\_\_ 。
2. 当  $n$  为 \_\_\_\_\_ 时, 非平凡无向完全图  $K_n$  是欧拉图。
3. 已知一棵无向树  $T$  有三个 3 度顶点, 一个 2 度顶点, 其余的都是 1 度顶点, 则  $T$  中有 \_\_\_\_\_ 个 1 度顶点。
4.  $n$  阶完全图  $K_n$  的点色数  $\chi(K_n) =$  \_\_\_\_\_ 。
5. 一组学生, 用两两扳腕子比赛来测定臂力大小, 则么元是 \_\_\_\_\_ 。

## 二、 选择 15% （每小题 3 分）

1. 下面四组数能构成无向图的度数列的有 ( )。

- A、 2, 3, 4, 5, 6, 7;      B、 1, 2, 2, 3, 4;  
C、 2, 1, 1, 1, 2;      D、 3, 3, 5, 6, 0。

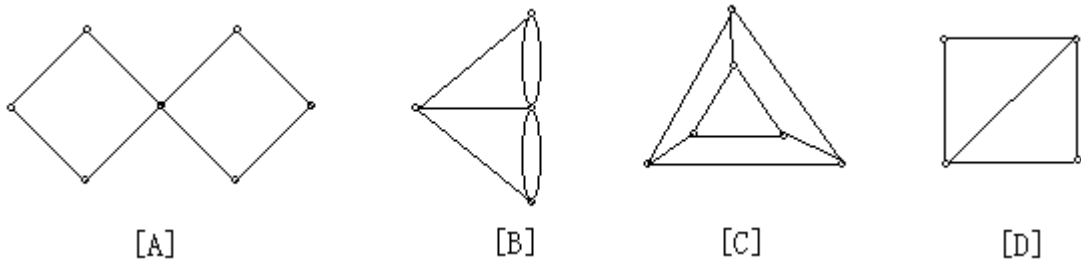
2. 图  的邻接矩阵为 ( )。

- A、  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; B、  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; C、  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; D、  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

3. 下列几个图是简单图的有 ( )。

- A.  $G_1 = (V_1, E_1)$ , 其中  $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $E_1 = \{ab, be, eb, ae, de\}$ ;  
B.  $G_2 = (V_2, E_2)$  其中  $V_2 = V_1$ ,  $E_2 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle a, d \rangle, \langle d, a \rangle, \langle d, e \rangle\}$ ;  
C.  $G = (V_3, E_3)$ , 其中  $V_3 = V_1$ ,  $E_3 = \{ab, be, ed, cc\}$ ;  
D.  $G = (V_4, E_4)$ , 其中  $V_4 = V_1$ ,  $E_4 = \{(a, a), (a, b), (b, c), (e, c), (e, d)\}$ 。

4. 下列图中是欧拉图的有 ( )。

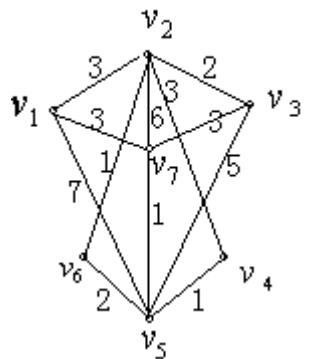


5、 $G = (2^S, \oplus)$ ，其中  $S = \{1,2,3\}$ ， $\oplus$  为集合对称差运算，  
 则方程  $\{1,2\} \oplus x = \{1,3\}$  的解为 ( )。  
 A、 $\{2,3\}$ ；      B、 $\{1,2,3\}$ ；      C、 $\{1,3\}$ ；      D、 $\Phi$ 。

三、 证明 34%

- 1、证明：在至少有 2 个人的人群中，至少有 2 个人，他的有相同的朋友数。（8 分）
- 2、若图  $G$  中恰有两个奇数顶点，则这两个顶点是连通的。（8 分）
- 3、证明：在 6 个结点 12 条边的连通平面简单图中，每个面的面度都是 3。（8 分）
- 4、证明循环群的同态像必是循环群。（10 分）

四、 中国邮递员问题 13%



求带权图  $G$  中的最优投递路线。邮局在  $v_1$  点。

五、 根树的应用 13%

在通讯中，八进制数字出现的频率如下：  
 0: 30%、1: 20%、2: 15%、3: 10%、4: 10%、5: 5%、6: 5%、7: 5%  
 求传输它们最佳前缀码（写出求解过程）。

六、 10%

设  $B_4 = \{e, a, b, ab\}$ ，运算\*如下表，

*	$e$	$a$	$b$	$ab$

$e$	$e$	$a$	$b$	$ab$
$a$	$a$	$e$	$ab$	$b$
$b$	$b$	$ab$	$e$	$a$
$ab$	$ab$	$b$	$a$	$e$

则  $\langle B_4, * \rangle$  是一个群（称作 Klein 四元群）

答案：

#### 十四、 填空 15%（每小题 3 分）

1、  $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$  ; 2、 奇数; 3、 5; 4、  $n$ ; 5、 臂力小者

#### 十五、 选择 15%（每小题 3 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	B	C	B	B	A

#### 十六、 证明 34%

1、（10 分）证明：用  $n$  个顶点  $v_1, \dots, v_n$  表示  $n$  个人，构成顶点集  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ，  
 设  $E = \{uv \mid u, v \in V, \text{且 } u, v \text{ 是朋友 } (u \neq v)\}$ ，无向图  $G = (V, E)$

现证  $G$  中至少有两个结点数相同。

事实上，（1）若  $G$  中孤立点个数大于等于 2，结论成立。

（2）若  $G$  中有一个孤立点，则  $G$  中的至少有 3 个顶点，现不考虑孤立点。设  $G$  中每个结点数均大于等于 1，又因为  $G$  为简单图，所以每个顶点度数都小于等于  $n-1$ ，由于  $G$  中顶点数取值只能是 1, 2,  $\dots$ ,  $n-1$  这  $n-1$  个数，因而取  $n-1$  个值的  $n$  个顶点的度数至少有两个结点数是相同的。

2、（8 分）证：设  $G$  中两个奇数度结点分别为  $u, v$ 。若  $u, v$  不连通，即它们中无任何通路，则至少有两个连通分支  $G_1, G_2$ ，使得  $u, v$  分别属于  $G_1$  和  $G_2$ 。于是  $G_1$  与  $G_2$  中各含有一个奇数度结点，与握手定理矛盾。因而  $u, v$  必连通。

3、（8 分）证：  $n=6, m=12$  欧拉公式  $n-m+f=2$  知  $f=2-n+m=2-6+12=8$

由图论基本定理知：  $\sum \deg(F) = 2 \times m = 24$ ，而  $\deg(F_i) \geq 3$ ，所以必有  $\deg(F_i) = 3$ ，即每个面用 3 条边围成。

4、（10 分）证：设循环群  $[A, \cdot]$  的生成元为  $a$ ，同态映射为  $f$ ，同态像为  $\langle f(A), *, \rangle$ ，于是  $\forall a^n, a^m \in A$  都有  $f(a^n \cdot a^m) = f(a^n) * f(a^m)$

对  $n=1$  有  $f(a) = f(a)$

$$n=2, \text{ 有 } f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) * f(a) = (f(a))^2$$

$$\text{若 } n=k-1 \text{ 时 有 } f(a^{k-1}) = (f(a))^{k-1}$$

$$\text{对 } n=k \text{ 时, } f(a^k) = f(a^{k-1} \cdot a) = f(a^{k-1}) * f(a) = (f(a))^{k-1} * f(a) = (f(a))^k$$

这表明,  $f(A)$  中每一个元素均可表示为  $(f(a))^n$ , 所以  $\langle f(A), * \rangle$  是以  $f(a)$  生成元的循环群。

### 十七、 中国邮递员问题 14%

解: 图中有 4 个奇数结点,  $d(v_1)=3, d(v_2)=5, d(v_3)=3, d(v_5)=5$

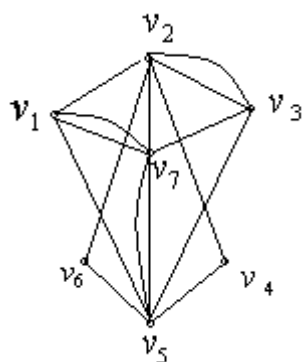
(1) 求  $v_1, v_2, v_3, v_5$  任两结点的最短路

$$d(v_1v_2)=3, d(v_2v_3)=5, d(v_1v_5)=4, d(v_2v_3)=2, d(v_2v_5)=3, d(v_3v_5)=4$$

$$P_1 = v_1v_2, P_2 = v_1v_2v_3, P_3 = v_1v_7v_5, P_4 = v_2v_3, P_5 = v_2v_6v_5, P_6 = v_3v_7v_5$$

再找两条道路使得它们没有相同的起点和终点, 且长度总

和最短:  $P_3 = v_1v_7v_5, P_4 = v_2v_3,$



(2) 在原图中复制出  $P_3, P_4$ , 设图  $G'$ , 则图  $G'$  中每个结点数均为偶数的图  $G'$  存在欧拉回路

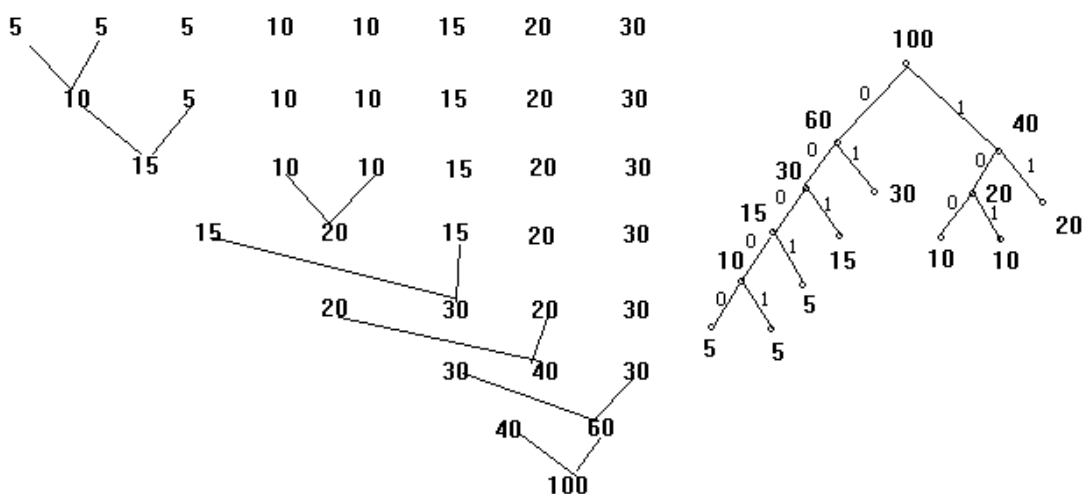
$C = v_1v_7v_3v_2v_4v_5v_6v_7v_5v_3v_2v_1v_7v_5v_1$ , 欧拉回路  $C$  权长为 43。

### 十八、 根树的应用 13%

解: 用 100 乘各频率并由小到大排列得权数

$$w_1 = 5, w_2 = 5, w_3 = 5, w_4 = 10, w_5 = 10, w_6 = 15, w_7 = 20, w_8 = 30$$

(1) 用 Huffman 算法求最优二叉树:



(2) 前缀码

用 00000 传送 5; 00001 传送 6; 0001 传送 7; 100 传送 3; 101 传送 4; 001 传送 2;  
11 传送 1; 01 传送 0 (频率越高传送的前缀码越短)。

## 十九、 10%

证明:

(1) 乘: 由运算表可知运算\*是封闭的。

(2) 群: 即要证明  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , 这里有  $4^3=64$  个等式需要验证

但: ① e 是幺元, 含 e 的等式一定成立。

②  $ab=ab=ba$ , 如果对含 a, b 的等式成立, 则对含 a、b、ab 的等式也都成立。

③剩下只需验证含 a、b 等式, 共有  $2^3=8$  个等式。即:

$$(a*b)*a=ab*a=b*a*(b*a)=a*ab=b; \quad (a*b)*b=ab*b=a*(b*b)=a*e=a;$$

$$(a*a)*a=e*a=a*(a*a)=a*e=a; \quad (a*a)*b=e*b=b=a*(a*b)=a*ab=b;$$

$$(b*b)*a=e*a=a*(b*b)=b*ab=a; \quad (b*b)*b=e*b=b=b*(b*b)=b*e=b;$$

$$(b*a)*a=ab*a=b*(a*a)=b*e=b; \quad (b*a)*b=ab*b=a*(a*b)=b*ab=a。$$

(3) 幺: e 为幺元

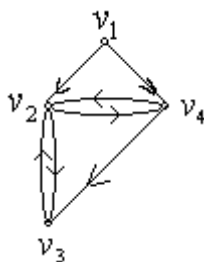
(4) 逆:  $e^{-1}=e$ ;  $a^{-1}=a$ ;  $b^{-1}=b$ ;  $(ab)^{-1}=ab$ 。

所以  $\langle B_4, * \rangle$  为群。

试卷八试题与答案

## 一、 填空 15% (每小题 3 分)

1、n 阶完全图  $K_n$  的边数为 \_\_\_\_\_。



2、右图 \_\_\_\_\_ 的邻接矩阵

$A=$  \_\_\_\_\_。



3、图 \_\_\_\_\_ 的对偶图  
为 \_\_\_\_\_。

4、完全二叉树中, 叶数为  $n_t$ , 则边数  $m=$  \_\_\_\_\_。

5、设  $\langle \{a,b,c\}, * \rangle$  为代数系统, \* 运算如下:

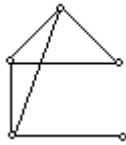
第3题

*	a	b	c
a	a	b	c

b	b	a	c
c	c	c	c

则它的么元为 \_\_\_\_\_ ； 零元为 \_\_\_\_\_ ；

a、b、c 的逆元分别为 \_\_\_\_\_ 。

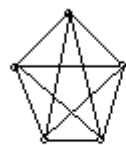


## 二、 选择 15% （每小题 3 分）

1、 图 \_\_\_\_\_ 相对于完全图的补图为（ \_\_\_\_\_ ）。



[A]



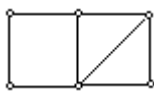
[B]



[C]



[D]



2、 对图 G

则

$k(G), \lambda(G), \delta(G)$  分别为（ \_\_\_\_\_ ）。

A、 2、 2、 2； B、 1、 1、 2； C、 2、 1、 2； D、 1、 2、 2 。

3、 一棵无向树 T 有 8 个顶点， 4 度、 3 度、 2 度的分枝点各 1 个， 其余顶点均为树叶， 则 T 中有（ \_\_\_\_\_ ）片树叶。

A、 3； B、 4； C、 5； D、 6

4、 设  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是代数系统， 其中  $+$ 、  $\cdot$  为普通的加法和乘法， 则  $A =$ （ \_\_\_\_\_ ）时  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是整环。

A、  $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}$ ； B、  $\{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ；

C、  $\{x \mid x \geq 0, \text{且} x \in \mathbb{Z}\}$ ； D、  $\{x \mid x = a + b\sqrt[4]{5}, a, b \in \mathbb{R}\}$ 。

5、设  $A=\{1, 2, \dots, 10\}$ ，则下面定义的运算 $*$ 关于  $A$  封闭的有（ ）。

- A、 $x*y=\max(x,y)$ ；      B、 $x*y$ =质数  $p$  的个数使得  $x \leq p \leq y$ ；  
 C、 $x*y=\gcd(x,y)$ ； ( $\gcd(x,y)$ 表示  $x$  和  $y$  的最大公约数)；  
 D、 $x*y=\text{lcm}(x,y)$  ( $\text{lcm}(x,y)$  表示  $x$  和  $y$  的最小公倍数)。

### 三、 证明 45%

1、设  $G$  是  $(n,m)$  简单二部图，则  $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。(8分)

2、设  $G$  为具有  $n$  个结点的简单图，且  $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  则  $G$  是连通图。(8分)

3、设  $G$  是阶数不小于 11 的简单图，则  $G$  或  $\overline{G}$  中至少有一个是非平面图。(14分)

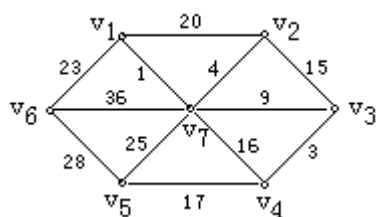
4、记“开”为 1，“关”为 0，反映电路规律的代数系统  $\{0, 1\}, +, \cdot$  的加法运算和乘法运算。如下：

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

证明它是一个环，并且是一个域。(15分)

### 四、 生成树及应用 10%



1、(10分) 如下图所示的赋权图表示某七个城市  $v_1, v_2, \dots, v_7$  及预先测算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信而且总造价最小。

2、(10分) 构造 H、A、P、N、E、W、R、对应的前缀码，并画出与该前缀码对应的二叉树，写出英文短语 HAPPY NEW YEAR 的编码信息。

### 五、 5%

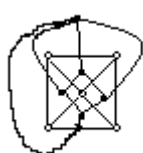
对于实数集合  $R$ ，在下表所列的二元远算是否具有左边一列中的性质，请在相应位上填写“Y”或“N”。

	Max	Min	+
--	-----	-----	---

可结合性			
可交换性			
存在幺元			
存在零元			

答案:

## 二十、 填空 15% (每小题 3 分)



$$1、\frac{1}{2}n(n-1); 2、\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; 3、; 4、2(n_t-1); 5、a, c, a、$$

b、没有

## 二十一、 选择 15% (每小题 3 分)

题目	1	2	3	4	5
答案	A	A	C	D	A, C

## 二十二、 证明 45%

1、 (8 分): 设  $G = (V, E)$ ,  $V = X \cup Y$ ,  $|X| = n_1$ ,  $|Y| = n_2$ , 则  $n_1 + n_2 = n$

对完全二部图有  $m = n_1 \cdot n_2 = n_1(n - n_1) = -n_1^2 + n_1n = -(n_1 - \frac{n}{2})^2 + \frac{n^2}{4}$

当  $n_1 = \frac{n}{2}$  时, 完全二部图  $(n, m)$  的边数  $m$  有最大值  $\frac{n^2}{4}$ 。

故对任意简单二部图  $(n, m)$  有  $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。

2、 (8 分) 反证法: 若  $G$  不连通, 不妨设  $G$  可分成两个连通分支  $G_1$ 、 $G_2$ , 假设

$G_1$  和  $G_2$  的顶点数分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 显然  $n_1 + n_2 = n$ 。

$$\because n_1 \geq 1 \quad n_2 \geq 1 \quad \therefore n_1 \leq n-1 \quad n_2 \leq n-1$$

$$\therefore m \leq \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n_1+n_2-2)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

与假设矛盾。所以  $G$  连通。

3、 (14 分) (1) 当  $n=11$  时,  $G \cup \overline{G} = K_{11}$   $K_{11}$  边数  $m' = \frac{11 \times 10}{2} = 55$  条, 因而必有  $G$

或  $\overline{G}$  的边数大于等于 28, 不妨设  $G$  的边数  $m \geq 28$ , 设  $G$  有  $k$  个连通分支, 则  $G$  中必



有回路。(否则  $G$  为  $k$  棵树构成的森林, 每棵树的顶点数为  $n_i$ , 边数  $m_i$ , 则

$$m_i = n_i - 1, i = 1 \cdots k, \sum_{i=1}^k n_i = n = 11, \sum_{i=1}^k m_i = m$$

$$\therefore 28 \leq m = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k = 11 - k \quad \text{矛盾})$$

下面用反证法证明  $G$  为非平面图。

假设  $G$  为平面图, 由于  $G$  中有回路且  $G$  为简单图, 因而回路长大于等于 3。于是  $G$

的每个面至少由  $g$  ( $g \geq 3$ ) 条边围成, 由点、边、面数的关系  $m \leq \frac{g}{g-2}(n-k-1)$ , 得:

$$28 \leq m \leq \frac{g}{g-2}(11-k-1) \leq \frac{3}{3-1}(11-(k+1)) \leq 3(11-(1+1)) = 3 \times 11 - 3 \times 2 = 27$$

而  $28 \leq 27$  矛盾, 所以  $G$  为非平面图。

(2) 当  $n > 11$  时, 考虑  $G$  的具有 11 个顶点的子图  $G'$ , 则  $G'$  或  $\overline{G}'$  必为非平面图。

如果  $G'$  为非平面图, 则  $G$  为非平面图。

如果  $\overline{G}'$  为非平面图, 则  $\overline{G}$  为非平面图。

4、(15 分)

1)  $\{0, 1\}, +, \cdot$  是环

①  $\{0, 1\}, +$  是交换群

乘: 由 “+” 运算表知其封闭性。由于运算表的对称性知: + 运算可交换。

群:  $(0+0)+0=0+(0+0)=0$ ;  $(0+0)+1=0+(0+1)=1$ ;

$(0+1)+0=0+(1+0)=1$ ;  $(0+1)+1=0+(1+1)=0$ ;

$(1+1)+1=1+(1+1)=0$  .....

结合律成立。

幺: 幺元为 0。

逆: 0, 1 逆元均为其本身。所以,  $\langle \{0, 1\}, + \rangle$  是 Abel 群。

②  $\langle \{0, 1\}, \cdot \rangle$  是半群

乘: 由 “ $\cdot$ ” 运算表知封闭

群:  $(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot (0 \cdot 0) = 0$ ;  $(0 \cdot 0) \cdot 1 = 0 \cdot (0 \cdot 1) = 1$ ;

$(0 \cdot 1) \cdot 0 = 0 \cdot (1 \cdot 0) = 1$ ;  $(0 \cdot 1) \cdot 1 = 0 \cdot (1 \cdot 1) = 0$ ;

$(1 \cdot 1) \cdot 1 = 1 \cdot (1 \cdot 1) = 0$ ; ...

③  $\cdot$  对 + 的分配律

对  $\forall x, y \in \{0, 1\}$

I  $0 \cdot (x+y) = 0 = 0+0 = (0 \cdot x) + (0 \cdot y)$

II  $1 \cdot (x+y)$

当  $x=y$  ( $x+y=0$ ) 则

$$1 \cdot (x + y) = 1 \cdot 0 = 0 = \begin{Bmatrix} 0+0 \\ 1+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) \\ (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) \end{Bmatrix} = (1 \cdot x) + (1 \cdot y)$$

当  $x \neq y$  ( $x + y = 1$ ) 则

$$1 \cdot (x + y) = 1 \cdot 1 = 1 = \begin{Bmatrix} 1+0 \\ 0+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) \\ (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) \end{Bmatrix} = (1 \cdot x) + (1 \cdot y)$$

所以  $\forall x, y, z \in \{0,1\}$  均有  $z \cdot (x + y) = (z \cdot x) + (z \cdot y)$

同理可证:  $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

所以  $\cdot$  对  $+$  是可分配的。

由①②③得,  $\langle \{0, 1\}, +, \cdot \rangle$  是环。

(2)  $\langle \{0, 1\}, +, \cdot \rangle$  是域

因为  $\langle \{0, 1\}, +, \cdot \rangle$  是有限环, 故只需证明是整环即可。

①乘交环: 由乘法运算表的对称性知, 乘法可交换。

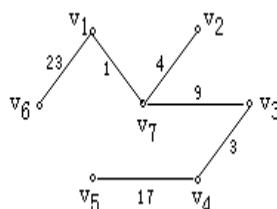
②含幺环: 乘法的幺元是 1

③无零因子:  $1 \cdot 1 = 1 \neq 0$

因此  $[\{0, 1\}, +, \cdot]$  是整环, 故它是域。

### 二十三、 树的应用 20%

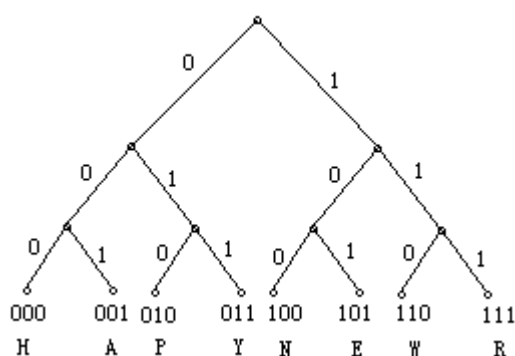
1、(10 分) 解: 用库斯克 (Kruskal) 算法求产生的最优树。算法略。结果如图:



树权  $C(T)=23+1+4+9+3+17=57$  即为总造价

### 五、(10 分)

由二叉树知



H、A、P、Y、N、E、W、R 对应的

编码分别为

000、001、010、011、100、101、110、111。

显然{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}为前缀码。

英文短语 HAPPY NEW YEAR 的编码信息为

000 001 010 010 011 100 101 001 001 101 001 111

六、5%

	Max	Min	+
可结合性	Y	Y	Y
可交换性	Y	Y	Y
存在幺元	N	N	Y
存在零元	N	N	N

试卷九试题与答案

一、 填空 30% （每空 3 分）

1、 选择合适的论域和谓词表达集合  $A = \text{“直角坐标系中，单位元（不包括单位圆周）的点集”}$  则  $A =$  \_\_\_\_\_。

2、 集合  $A = \{\Phi, \{\Phi\}\}$  的幂集  $\mathcal{P}(A) =$  \_\_\_\_\_。

3、 设  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A$  上二元关系  $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$  画出  $R$  的关系图

\_\_\_\_\_。

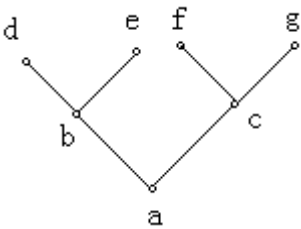
4、 设  $A = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$ ,  $B = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$ ,

则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_。

$A \circ B =$  \_\_\_\_\_。

5、 设  $|A| = 3$ , 则  $A$  上有 \_\_\_\_\_ 个二元关系。

6、  $A = \{1, 2, 3\}$  上关系  $R =$  \_\_\_\_\_ 时,  $R$  既是对称的又是反对称的。



7、 偏序集  $\langle A, R_{\leq} \rangle$  的哈斯图为 \_\_\_\_\_ ,

则

$R_{\leq} =$  \_\_\_\_\_。

8、设 $|X|=n$ ,  $|Y|=m$  则 (1) 从  $X$  到  $Y$  有 \_\_\_\_\_ 个不同的函数。

(2) 当  $n, m$  满足 \_\_\_\_\_ 时, 存在双射有 \_\_\_\_\_ 个不同的双射。

9、 $\sqrt{2}$  是有理数的真值为 \_\_\_\_\_。

10、  $Q$ : 我将去上海,  $R$ : 我有时间, 公式  $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$  的  
自 然 语 言  
为 \_\_\_\_\_。

11、 公式  $(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \wedge Q)$  的  
主 合 取 范 式  
是 \_\_\_\_\_。

12、 若  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  是集合  $A$  的一个分划,  
则 它 应 满  
足 \_\_\_\_\_。

## 二、 选择 20% (每小题 2 分)

1、 设全集为  $I$ , 下列相等的集合是 ( )。

A、  $A = \{x \mid x \text{ 是偶数或奇数} \}$ ; B、  $B = \{x \mid \exists y(y \in I \wedge x = 2y)\}$ ;  
C、  $C = \{x \mid \exists y(y \in I \wedge x = 2y + 1)\}$ ; D、  $D = \{x \mid 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$ 。

2、 设  $S = \{N, Q, R\}$ , 下列命题正确的是 ( )。

A、  $2 \in N, N \in S$  则  $2 \in S$ ; B、  $N \subset Q, Q \in S$  则  $N \subset S$ ;  
C、  $N \subset Q, Q \subset R$  则  $N \subset R$ ; D、  $\Phi \subset N, \Phi \subset S$  则  $\Phi \subset N \cap S$ 。

3、 设  $C = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ , 则  $\bigcup_{S \in C} S$  与  $\bigcap_{S \in C} S$  分别为 ( )。

A、  $C$  和  $\{a, b\}$ ; B、  $\{a, b\}$  与  $\Phi$ ; C、  $\{a, b\}$  与  $\{a, b\}$ ; D、  $C$  与  $C$

4、 下列语句不是命题的有 ( )。

A、  $x=13$ ; B、 离散数学是计算机系的一门必修课; C、 鸡有三只脚;  
D、 太阳系以外的星球上有生物; E、 你打算考硕士研究生吗?

5、  $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$  的合取范式为 ( )。

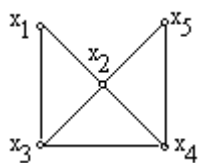
A、  $(P \wedge \neg Q) \vee R$  ; B、  $(P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$  ;

C、

$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

D、 $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$ 。

6、设 $|A|=n$ ，则A上有( )二元关系。



A、 $2^n$ ； B、 $n^2$ ； C、 $2^{n^2}$ ； D、 $n^n$ ； E、 $2^{n^n}$ 。

7、设 $r$ 为集合A上的相容关系，其简化关系图(如图)，

第7题 则 [I]  $r$ 产生的最大相容类为( )；

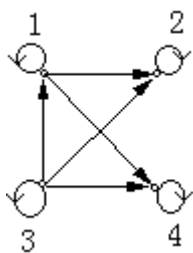
A、 $\{x_1, x_2\}$ ； B、 $\{x_1, x_2, x_3\}$ ； C、 $\{x_4, x_5\}$ ； D、 $\{x_2, x_4, x_5\}$

[II] A的完全覆盖为( )。

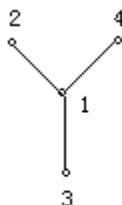
A、 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ； B、 $\{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}\}$ ；

C、 $\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_4, x_5\}\}$ ； D、 $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5\}\}$ 。

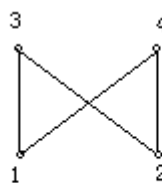
8、集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ 上的偏序关系图为



则它的哈斯图为( )。



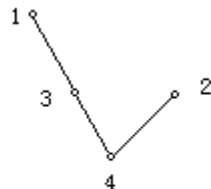
[A]



[B]



[C]



[D]

9、下列关系中能构成函数的是( )。

A、 $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in N) \wedge (x + y < 10) \}$ ； B、 $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in R) \wedge (y = x^2) \}$ ；

C、 $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in R) \wedge (y^2 = x) \}$ ； D、 $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in I) \wedge (x \equiv y \pmod{3}) \}$ 。

10、 $N$ 是自然数集，定义 $f: N \rightarrow N$ ， $f(x) = (x) \bmod 3$  (即 $x$ 除以3的余数)，

则 $f$ 是( )。

A、满射不是单射； B、单射不是满射； C、双射； D、不是单射也不是满射。

### 三、简答题 15%

1、(10分)设 $S=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ ，“ $\leq$ ”为 $S$ 上整除关系，问：(1)偏序集 $\langle S, \leq \rangle$

的 Hass 图如何？（2）偏序集  $\{S, \leq\}$  的极小元、最小元、极大元、最大元是什么？

2、（5 分）设解释  $R$  如下： $D_R$  是实数集， $D_R$  中特定元素  $a=0$ ， $D_R$  中特定函数  $f(x, y) = x - y$ ，特定谓词  $F(x, y): x < y$ ，问公式  $A = \forall x \forall y \forall z (F(x, y) \rightarrow F(f(x, z), f(y, z)))$  的涵义如何？真值如何？

## 四、 逻辑推理 10%

或者逻辑难学，或者有少数学生不喜欢它；如果数学容易学，那么逻辑并不难学。因此，如果许多学生喜欢逻辑，那么数学并不难学。

## 五、 10%

设  $X=\{1,2,3,4,5\}$ ， $X$  上的关系  $R=\{<1,1>, <1,2>, <2,4>, <3,5>, <4,2>\}$ ，用 Warshall 方法，求  $R$  的传递闭包  $t(R)$ 。

## 六、证明 15%

1、每一有限全序集必是良序集。（7 分）

2、设  $g \circ f$  是复合函数，如果  $g \circ f$  满射，则  $g$  也是满射。（8 分）

答案

### 二十四、 填空 20%（每小题 2 分）

1、\_\_\_\_\_；

2、\_\_\_\_\_；

3、见右图；

4、 $\{<1,2>, <2,4>, <3,3>, <1,3>, <2,4>, <4,2>\}$ 、 $\{<1,4>, <2,2>\}$ ；

5、 $2^9$ ； 6、 $\{<1,1>, <2,2>, <3,3>\}$ ；

7、 $\{<a,b>, <a,d>, <a,e>, <b,d>, <b,e>, <a,c>, <a,f>, <a,g>, <c,f>, <c,g>\}$ ；

8、 $m^n$ 、 $n=m$ 、 $n!$ ； 9、假； 10、我将去上海当且仅当我有空；

11、\_\_\_\_\_；

12、\_\_\_\_\_。

### 二十五、 选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A、D	C	B	A、E	B、D	C	B、D; C	A	B	D

## 二十六、简答题 15%

1、(10 分)

( 1 )  $\leq$   $=\{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 1,6 \rangle, \langle 1,8 \rangle, \langle 1,12 \rangle, \langle 1,24 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 2,8 \rangle, \langle 2,12 \rangle, \langle 2,24 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \langle 3,12 \rangle, \langle 3,24 \rangle, \langle 4,8 \rangle, \langle 4,12 \rangle, \langle 4,24 \rangle, \langle 6,12 \rangle, \langle 6,24 \rangle, \langle 8,24 \rangle, \langle 12,24 \rangle \}$

$\text{covS} = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \langle 4,8 \rangle, \langle 4,12 \rangle, \langle 6,12 \rangle, \langle 8,24 \rangle, \langle 12,24 \rangle \}$

Hass 图为

(2) 极小元、最小元是 1，极大元、最大元是 24。

2、(5 分)

解：公式 A 涵义为：对任意的实数  $x, y, z$ ，如果  $x < y$  则  $(x - z) < (y - z)$

A 的真值为：真 (T)。

## 二十七、逻辑推理 10%

解：设 P：逻辑难学；Q：有少数学生不喜欢逻辑学；R：数学容易学

符号化：

证：①	P
②	T①E
③	P
④	T②③I
⑤	T④E

## 二十八、(10 分)

解:

1 时,  $[1,1]=1, A =$

2 时,  $A[1,2]=A[4,2]=1$

$A =$

3 时,  $A$  的第三列全为 0, 故  $A$  不变

4 时  $A[1,4]=A[2,4]=A[4,4]=1$

$A =$

5 时,  $A$  的第五行全为 0, 故  $A$  不变。

所以  $t(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$ 。

## 二十九、证明 15%

1、(7 分)

证明: 设  $B$ ,  $A$  全序集。

若  $B$  不是良序集, 那么必有一子集  $B_0$ , 在  $B$  中不存在最小元素, 由于  $B$  是一有限集合, 故一定可找出两元素  $x, y$  是无关的, 由于  $A$  是全序集。

所以  $x, y$  必有关系, 矛盾。故  $B$  必是良序集。

2、(8 分)

证明: 设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ , 由于  $f$  是满射, 故必有  $x \in X$  使得  $f(x) = y$ , 由复合函数定义知, 存在  $z \in Z$  使得  $g(y) = z$ , 又因为  $g$  是函数, 必对任  $y \in Y$ , 必  $g(y) = z$  使  $z \in Z$ , 任每个  $z$  在  $g$  作用下都是  $Y$  中元素的一个映象, 由  $Z$  的任意性, 所以  $g$  是满射。



## 一、 填空 10% （每小题 2 分）

- 1、 若  $P, Q$  为二命题,  $P \leftrightarrow Q$  真值为 1, 当且仅当 \_\_\_\_\_。
- 2、 对公式  $(\forall yP(x, y) \wedge \exists zQ(x, z)) \vee \forall xR(x, y)$  中自由变元进行代入的公 \_\_\_\_\_ 式为 \_\_\_\_\_。
- 3、  $\forall xF(x) \wedge \neg(\exists xG(x))$  的 前 束 范 式 为 \_\_\_\_\_。
- 4、 设  $x$  是谓词合式公式  $A$  的一个客体变元,  $A$  的论域为  $D$ ,  $A(x)$  关于  $y$  的自由, 则 \_\_\_\_\_ 被称为全称量词消去规则, 记为 US。
- 5、 与非门的逻辑网络为 \_\_\_\_\_。

## 二、 选择 30% （每小题 3 分）

- 1、 下列各符号串, 不是合式公式的有 ( )。  
A、  $(P \wedge Q) \wedge \neg R$ ;    B、  $((P \rightarrow Q) \rightarrow (R \wedge S))$ ;  
C、  $P \vee Q \vee \wedge R$ ;    D、  $(\neg(P \vee Q) \wedge R) \vee S$ 。
- 2、 下列语句是命题的有 ( )。  
A、 2 是素数; B、  $x+5 > 6$ ; C、 地球外的星球上也有人; D、 这朵花多好看呀!。
- 3、 下列公式是重言式的有 ( )。  
A、  $\neg(P \leftrightarrow Q)$ ; B、  $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ ; C、  $\neg(Q \rightarrow P) \wedge P$ ; D、  $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow P$
- 4、 下列问题成立的有 ( )。  
A、 若  $A \vee C \leftrightarrow B \vee C$ , 则  $A \leftrightarrow B$ ;    B、 若  $A \wedge C \leftrightarrow B \wedge C$ , 则  $A \leftrightarrow B$ ;  
C、 若  $\neg A \leftrightarrow \neg B$ , 则  $A \leftrightarrow B$ ;    D、 若  $A \leftrightarrow B$ , 则  $\neg A \leftrightarrow \neg B$ 。
- 5、 命题逻辑演绎的 CP 规则为 ( )。  
A、 在推演过程中可随便使用前提;  
B、 在推演过程中可随便使用前面演绎出的某些公式的逻辑结果;  
C、 如果要演绎出的公式为  $B \rightarrow C$  形式, 那么将  $B$  作为前提, 设法演绎出  $C$ ;  
D、 设  $\Phi(A)$  是含公式  $A$  的命题公式,  $B \leftrightarrow A$ , 则可用  $B$  替换  $\Phi(A)$  中的  $A$ 。

6、命题“有的人喜欢所有的花”的逻辑符号化为（ ）。

设 D: 全总个体域,  $F(x)$ :  $x$  是花,  $M(x)$ :  $x$  是人,  $H(x,y)$ :  $x$  喜欢  $y$

A、 $\forall x(M(x) \rightarrow \forall y(F(y) \rightarrow H(x,y)))$ ; B、 $\forall x(M(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow H(x,y)))$ ;

C、 $\exists x(M(x) \rightarrow \forall y(F(y) \rightarrow H(x,y)))$ ; D、 $\exists x(M(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow H(x,y)))$ 。

7、公式  $\forall x \forall y (P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists x P(x,y)$  换名（ ）。

A、 $\forall x \forall u (P(x,u) \vee Q(u,z)) \wedge \exists x P(x,y)$ ; B、 $\forall x \forall y (P(x,u) \vee Q(u,z)) \wedge \exists x P(x,u)$ ;

C、 $\forall x \forall y (P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists x P(x,u)$ ; D、 $\forall u \forall y (P(u,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists u P(u,y)$ 。

8、给定公式  $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ , 当  $D=\{a,b\}$  时, 解释（ ）使该公式真值为 0。

A、 $P(a)=0, P(b)=0$ ; B、 $P(a)=0, P(b)=1$ ; C、 $P(a)=1, P(b)=0$ ; D、 $P(a)=1, P(b)=1$

9、下面蕴涵关系成立的是（ ）。

A、 $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$ ;

B、 $\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ ;

C、 $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ ;

D、 $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$ 。

10、下列推理步骤错在（ ）。

①  $\forall y \exists y F(x,y)$  P

②  $\exists y F(z,y)$  US①

③  $F(z,c)$  ES②

④  $\forall x F(x,c)$  UG③

⑤  $\exists y \forall x F(x,y)$  EG④

A、①→②; B、②→③; C、③→④; D、④→⑤。

### 三、 逻辑判断 28%

1、(8 分) 下列命题相容吗?  $A \rightarrow B, \neg(B \vee C), A$

2、(10 分) 用范式方法判断公式  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R), P \rightarrow Q \wedge R$  是否等价。

3、(10 分) 下列前提下结论是否有效?

今天或者天晴或者下雨。如果天晴, 我去看电影; 若我去看电影, 我就不看书。故我在看书时, 说明今天下雨。

四、 计算 12%

- 1、(5 分) 给定 3 个命题：P：北京比天津人口多；Q：2 大于 1；R：15 是素数。 求复合命题： $(Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \wedge \neg R)$  的真值。
- 2、(7 分) 给定解释 I:  $D=\{2, 3\}$ ,  $L(x,y)$  为  $L(2,2)=L(3,3)=1, L(2,3)=L(3,2)=0$ , 求谓词合式公式  $\exists y \forall x L(x,y)$  的真值。

五、 逻辑推理 20%

- 1、(10 分) 所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此某些实数是整数。
- 2、(10 分) 符号化语句：“有些病人相信所有的医生，但是病人都不相信骗子，所以医生都不是骗子”。并推证其结论。

答案

三十、 填空 15%（每小题 3 分）

- 1、P, Q 的真值相同；2、 $(\forall y P(u,y) \wedge \exists z Q(u,z)) \vee \forall x R(x,v)$ ；3、 $\forall x (F(x) \wedge \neg G(x))$ ；
- 4、 $\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$ ；5、 $\frac{P}{Q} \Rightarrow \frac{P \uparrow Q}{P \uparrow Q}$ 。

三十一、 选择 30%（每小题 3 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B、C	A、C	B	C、D	C	D	A	B、C	B、D	C

三十二、 逻辑判断 28%

- 1、(8 分)
- |                          |      |
|--------------------------|------|
| ① $A \rightarrow B$      | P    |
| ② A                      | P    |
| ③ B                      | T①②I |
| ④ $\neg(B \vee C)$       | P    |
| ⑤ $\neg B \wedge \neg C$ | T④E  |
| ⑥ $\neg B$               | T⑤I  |
| ⑦ F                      | T③⑥I |

所以  $A \rightarrow B, \neg(B \vee C), A$  不相容。

2、(10 分)

$$\begin{aligned}(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\&\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg R)) \wedge ((\neg P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q)) \\&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\&= M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110} \\P \rightarrow Q \wedge R &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\&\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg R)) \wedge ((\neg P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q)) \\&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\&\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\&= M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}\end{aligned}$$

所以两式等价。

3、设 P: 今天天晴, Q: 今天下雨, R: 我不看书, S: 我看电影

符号化为:  $P \vee Q, P \rightarrow S, S \rightarrow R \Rightarrow \neg R \rightarrow Q$

- |                               |      |
|-------------------------------|------|
| ① $P \rightarrow S$           | P    |
| ② $S \rightarrow R$           | P    |
| ③ $P \rightarrow R$           | T①②I |
| ④ $\neg R \rightarrow \neg P$ | T③I  |
| ⑤ $P \vee Q$                  | P    |
| ⑥ $\neg P \rightarrow Q$      | T⑤E  |
| ⑦ $\neg R \rightarrow Q$      | T④⑥I |

结论有效。

### 三十三、 计算 12%

1、(5 分) 解: P, Q 是真命题, R 是假命题。

$$(Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \wedge \neg R) = (1 \rightarrow 0) \leftrightarrow (1 \wedge 1) = 0 \leftrightarrow 1 = 0$$

2、(7 分)

$$\begin{aligned}\exists y \forall x L(x, y) &\Leftrightarrow \exists y (L(2, y) \wedge L(3, y)) \Leftrightarrow (L(2, 2) \wedge L(3, 2)) \vee (L(2, 3) \wedge L(3, 3)) \\&\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0 \vee 0 = 0\end{aligned}$$

### 三十四、 逻辑推理 20%

1、(10 分) 解: 设  $R(x)$ : x 是实数,  $Q(x)$ : x 是有理数,  $I(x)$ : x 是整数

符号化: 前提:  $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(Q(x) \wedge I(x))$  结论:  $\exists x(R(x) \wedge I(x))$

- ①  $\exists x(Q(x) \wedge I(x))$  P

② $Q(c) \wedge I(c)$	ES①
③ $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$	P
④ $Q(c) \rightarrow R(c)$	US③
⑤ $Q(c)$	T②I
⑥ $R(c)$	T④⑤I
⑦ $I(c)$	T②I
⑧ $R(c) \wedge I(c)$	T⑥⑦I
⑨ $\exists x(R(x) \wedge I(x))$	EG⑧

2、解：F(x): x 是病人, G(x): x 是医生, H(x): x 是骗子, L(x,y): x 相信 y

符号化：前提：  $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow L(x, y))) \quad \forall x(F(x) \rightarrow \forall y(H(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$

结论：  $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$

(1) $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow L(x, y)))$	P
(2) $F(a) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow L(a, y))$	ES(1)
(3) $F(a)$	T(2)I
(4) $\forall y(G(y) \rightarrow L(a, y))$	T(2)I
(5) $\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(H(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$	P
(6) $F(a) \rightarrow \forall y(H(y) \rightarrow \neg L(a, y))$	US(5)
(7) $\forall y(H(y) \rightarrow \neg L(a, y))$	T(3)(6)I
(8) $\forall y(L(a, y) \rightarrow \neg H(y))$	T(7)E
(9) $G(z) \rightarrow L(a, z)$	US(4)
(10) $L(a, z) \rightarrow \neg H(z)$	US(8)
(11) $G(z) \rightarrow H(z)$	T(9)(10)I
(12) $\forall x(G(x) \rightarrow \neg H(x))$	UG(11)

卷十一试题与答案

## 一、 填空 20% （每小题 2 分）

- 1、 \_\_\_\_\_ 称为命题。
- 2、命题  $P \rightarrow Q$  的真值为 0，当且仅当 \_\_\_\_\_ 。
- 3、一个命题含有 4 个原子命题，则对其所有可能赋值有 \_\_\_\_\_ 种。

4、所有小项的析取式为 \_\_\_\_\_。

5、令  $P(x)$ :  $x$  是质数,  $E(x)$ :  $x$  是偶数,  $Q(x)$ :  $x$  是奇数,  $D(x, y)$ :  $x$  除尽  $y$ . 则  $\forall x(E(x) \rightarrow \forall y(D(x, y) \rightarrow E(y)))$  的汉语翻译为 \_\_\_\_\_。

6、设  $S = \{a, b, c\}$  则  $S_6$  的集合表示为 \_\_\_\_\_。

7、 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Phi)) =$  \_\_\_\_\_。

8、 $A \oplus B =$  \_\_\_\_\_。

9、设  $R$  为集合  $A$  上的关系, 则  $t(R) =$  \_\_\_\_\_。

10、若  $R$  是集合  $A$  上的偏序关系, 则  $R$  满足 \_\_\_\_\_。

## 二、 选择 20% (每小题 2 分)

1、下列命题正确的有 ( )。

A、若  $g, f$  是满射, 则  $g \circ f$  是满射; B、若  $g \circ f$  是满射, 则  $g, f$  都是满射;

C、若  $g \circ f$  是单射, 则  $g, f$  都是单射; D、若  $g \circ f$  单射, 则  $f$  是单射。

2、设  $f, g$  是函数, 当 ( ) 时,  $f=g$ 。

A、 $\forall x \in \text{dom} f$  都有  $f(x) = g(x)$ ; B、 $\text{dom} g \subseteq \text{dom} f$  且  $f \subseteq g$ ;

C、 $f$  与  $g$  的表达式相同; D、 $\text{dom} g = \text{dom} f, \text{range} f = \text{range} g$ 。

3、下列关系, ( ) 能构成函数。

A、 $f = \{ \langle x_1, x_2 \rangle \mid x_1, x_2 \in N \text{ 且 } x_1 + x_2 = 10 \}$ ;

B、 $f = \{ \langle x_1, x_2 \rangle \mid x_1, x_2 \in R, x_1 = x_2^2 \}$ ;

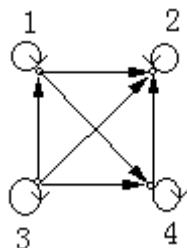
C、 $f = \{ \langle x_1, x_2 \rangle \mid x_1, x_2 \in N, x_2 \text{ 为小于 } x_1 \text{ 的素数的个数} \}$ ;

D、 $f = \{ \langle x, |x| \rangle \mid x \in R \}$ 。

4、下列函数 ( ) 满射; ( ) 单射; ( ) 双射 ( ) 一般函数 ( )。

A、 $f: N \rightarrow N, f(x) = x^2 + 2$ ; B、 $f: N \rightarrow N, f(x) = x \pmod{3}$  ( $x$  除以 3 的余数);

C、 $f: N \rightarrow \{0,1\}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \text{偶数集} \\ 0 & x \in \text{奇数集} \end{cases}$ ; D、 $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x - 5$ 。



5、集合  $A=\{1,2,3,4\}$  上的偏序关系为  $3 \leq 1, 3 \leq 2, 3 \leq 4$ ，则它的 Hass 图为( )。



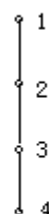
[A]



[B]

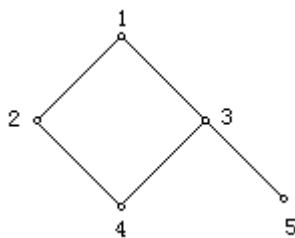


[C]



[D]

6、设集合  $A=\{1,2,3,4,5\}$  上偏序关系的 Hass 图为



则子集  $B=\{2,3,4\}$  的最大元( ); 最小元( ); 极大元( ); 极小元( ); 上界( ); 上确界( ); 下界( ); 下确界( )。

A、无, 4, 2, 3, 4, 1, 1, 4, 4; B、无, 4, 5, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 4, 4;

C、无, 4, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 4, 4; D、无, 4, 2, 3, 4, 1, 1, 4, 无。

7、设  $R, S$  是集合  $A$  上的关系, 则下列( )断言是正确的。

A、 $R, S$  自反的, 则  $R \circ S$  是自反的; B、若  $R, S$  对称的, 则  $R \circ S$  是对称的;

C、若  $R, S$  传递的, 则  $R \circ S$  是传递的; D、若  $R, S$  反对称的, 则  $R \circ S$  是反对称的

8、设  $X$  为集合,  $|X|=n$ , 在  $X$  上有( )种不同的关系。

A、 $n^2$ ; B、 $2^n$ ; C、 $2^{2^n}$ ; D、 $2^{n^2}$ 。

9、下列推导错在( )。

①  $\forall x \exists y (x > y)$

P

②  $\exists y (z > y)$

US①

$$\textcircled{3} (z > C_z) \quad \text{ES} \textcircled{2}$$

$$\textcircled{4} \forall x(x > x) \quad \text{UG} \textcircled{3}$$

A、 $\textcircled{2}$ ； B、 $\textcircled{3}$ ； C、 $\textcircled{4}$ ； D、无。

10、“没有不犯错误的人”的逻辑符号化为（ ）。

设  $H(x)$ :  $x$  是人,  $P(x)$ :  $x$  犯错误。

A、 $\exists x(H(x) \rightarrow P(x))$ ; B、 $\neg(\exists x(H(x) \wedge \neg P(x)))$ ;

C、 $\neg(\exists x(H(x) \rightarrow \neg P(x)))$ ; D、 $\forall x(H(x) \rightarrow P(x))$ 。

### 三、命题演绎 28%

1、(10 分) 用反证法证明  $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$ 。

2、(8 分) 用 CP 规则证明  $P \rightarrow (Q \rightarrow R), R \rightarrow (Q \rightarrow S) \Rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ 。

3、(10 分) 演绎推理：所有的有理数都是实数，所有的无理数也是实数，虚数不是实数。

因此，虚数既不是有理数，也不是无理数。

### 四、8%

将  $\text{wff } \exists x(\neg(\exists y P(x, y)) \rightarrow (\exists z Q(z) \rightarrow R(x)))$  化为与其等价的前束范式。

### 五、8%

$A=\{a,b,c,d\}$ ,  $R=\{<a,b>, <b,c>, <b,d>, <c,b>\}$  为  $A$  上的关系, 利用矩阵乘法求  $R$  的传递闭包, 并画出  $t(R)$  的关系图。

### 六、证明 16%

1、(8 分) 设  $A=\{1, 2, 3, 4\}$ , 在  $\mathcal{P}(A)$  上规定二元关系如下:

$$R = \{<s, t> \mid s, t \in \mathcal{P}(A) \wedge (|s| = |t|)\}$$

证明  $R$  是  $\mathcal{P}(A)$  上的等价关系并写出商集  $\mathcal{P}(A)/R$ 。

2、(8 分) 设  $f$  是  $A$  到  $A$  的满射, 且  $f \circ f = f$ , 证明  $f = I_A$ 。

答案

#### 一、填空 20% (每小题 2 分)

1、能够断真假的陈述句; 2、 $P$  的真值为 1,  $Q$  的真值为 0; 3、 $2^4=16$ ; 4、永真式;

5、任意两数  $x, y$ , 如果  $x$  是偶数且能除尽  $y$ , 则  $y$  一定是偶数; 6、 $S_{110}=\{a,b\}$ ;



- 7、  
 ; 8、  
 ; 9、  
 10、自反性、反对称性、传递性

## 二、选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A、D	B	C、D	C、D; A、D; D; B	C	A	A	D	C	B、D

## 三、命题演绎 28%

1、（10 分）证明：

- (1) P（附加前提）
- (2) T(1)E
- (3) P
- (4) T(3)E
- (5) P
- (6) T(4)(5)E
- (7) T(6)E
- (8) T(7)I
- (9) T(2)(8)I
- (10) P
- (11) T(10)E
- (12) T(11)E
- (13) T(9)(12)I

2、（8 分）

- ① P（附加前提）
- ② P
- ③ T①②I
- ④ P
- ⑤ T③④I
- ⑥ T⑤E
- ⑦ CP

3、证明：设  $Q(x)$ :  $x$  是有理数,  $R(x)$ :  $x$  是实数,  $N(x)$ :  $x$  是无理数,  $C(x)$ :  $x$  是虚数。

前提:

结论:

- |      |          |
|------|----------|
| (1)  | P        |
| (2)  | US(1)    |
| (3)  | P        |
| (4)  | US(3)    |
| (5)  | P        |
| (6)  | US(5)    |
| (7)  | T(6)E    |
| (8)  | T(2)(7)I |
| (9)  | T(4)(7)I |
| (10) | T(8)(9)I |
| (11) | T(10)E   |
| (12) | UG(11)   |

#### 四、 8%

解:

#### 五、 8%

解:

所以  $t(R) = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle c, d \rangle \}$

关系图为

## 六、证明 16%

1、(8分)

证明：(1)  $\mathcal{P}(A)$ ，由于  $\langle A, A \rangle \in R$ ，所以  $R$  自反的。

(2)  $\mathcal{P}(A)$ ，若  $\langle A, B \rangle \in R$ ，则  $\langle B, A \rangle \in R$ ， $R$  是对称的。

(3)  $\mathcal{P}(A)$ ，若： $\langle A, B \rangle \in R$ ， $\langle B, C \rangle \in R$ ，即：

所以  $R$  是传递的。

由(1)(2)(3)知， $R$  是等价关系。

$$\mathcal{P}(A)/R = \{ [A]_R, [\{1\}]_R, [\{1, 2\}]_R, [\{1, 2, 3\}]_R, [\{1, 2, 3, 4\}]_R \}$$

2、(8分)

证明：因为  $f$  是满射，所以  $\forall b \in B$ ，存在  $a \in A$  使得  $f(a) = b$ ，又因为  $f$  是函数，所以

即  $f(a) = b$  由

所以  $f(a) = b$ ，又  $f(a) = b$ ，所以  $f(a) = b$  由  $a$  的任意性知： $f = I_A$ 。

卷十二试题与答案

## 五、 填空 20% （每空 2 分）

- 1、 设集合  $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ，定义  $A$  上的二元关系 “ $\leq$ ” 为  $x \leq y = x|y$ ，则  $x \vee y =$  \_\_\_\_\_。
- 2、 设  $A = \{x | x = 2^n, n \in N\}$ ，定义  $A$  上的二元运算为普通乘法、除法和加法，则代数系统  $\langle A, * \rangle$  中运算  $*$  关于 \_\_\_\_\_ 运算具有封闭性。
- 3、 设集合  $S = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta\}$ ， $S$  上的运算  $*$  定义为

*	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\zeta$
$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\zeta$
$\beta$	$\beta$	$\delta$	$\alpha$	$\gamma$	$\delta$
$\gamma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$\delta$	$\delta$	$\alpha$	$\gamma$	$\delta$	$\gamma$
$\zeta$	$\zeta$	$\delta$	$\alpha$	$\gamma$	$\zeta$

- 则代数系统  $\langle S, * \rangle$  中幺元是 \_\_\_\_\_， $\beta$  左逆元是 \_\_\_\_\_，  
无左逆元的元素是 \_\_\_\_\_。
- 4、 在群坯、半群、独异点、群中 \_\_\_\_\_ 满足消去律。
  - 5、 设  $\langle G, * \rangle$  是由元素  $a \in G$  生成的循环群，且  $|G|=n$ ，  
则  $G =$  \_\_\_\_\_。
  - 6、 拉格朗日定理说明若  $\langle H, * \rangle$  是群  $\langle G, * \rangle$  的子群，则可建立  $G$  中的等价关系  $R =$  \_\_\_\_\_。  
若  $|G|=n, |H|=m$  则  $m$  和  $n$  关系为 \_\_\_\_\_。
  - 7、 设  $f$  是由群  $\langle G, \star \rangle$  到群  $\langle G', * \rangle$  的同态映射， $e'$  是  $G'$  中的幺元，  
则  $f$  的同态核  $\text{Ker}(f) =$  \_\_\_\_\_。

## 六、 选择 20% （每小题 2 分）

- 1、 设  $f$  是由群  $\langle G, \star \rangle$  到群  $\langle G', * \rangle$  的同态映射，则  $\text{ker}(f)$  是（\_\_\_\_\_）。  
A、 $G'$  的子群； B、 $G$  的子群； C、包含  $G'$ ； D、包含  $G$ 。
- 2、 设  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是环， $\forall a, b \in A$ ， $a \cdot b$  的关于 “ $+$ ” 的逆元是（\_\_\_\_\_）。  
A、 $(-a) \cdot (-b)$ ； B、 $(-a) \cdot b$ ； C、 $a \cdot (-b)$ ； D、 $a \cdot b$ 。
- 3、 设  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是一代数系统且  $\langle A, + \rangle$  是 Abel 群，如果还满足（\_\_\_\_\_）

$\langle A, +, \cdot \rangle$ 是域。

A、 $\langle A, \cdot \rangle$ 是独异点且 $\cdot$ 对 $+$ 可分配；

B、 $\langle A - \{0\}, \cdot \rangle$ 是独异点，无零因子且 $\cdot$ 对 $+$ 可分配；

C、 $\langle A - \{0\}, \cdot \rangle$ 是 Abel 群且无零因子；

D、 $\langle A - \{0\}, \cdot \rangle$ 是 Abel 且 $\cdot$ 对 $+$ 可分配。

4、设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是一代数系统， $+$ 、 $\cdot$ 为普通加法和乘法运算，当 A 为（ ）  
时， $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是域。

A、 $\{x \mid x = a + b\sqrt{5}, a, b \text{ 均为有理数} \}$ ； B、 $\{x \mid x = a + b\sqrt[3]{5}, a, b \text{ 均为有理数} \}$ ；

C、 $\{x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in I_+, \text{ 且 } a \neq kb\}$ ； D、 $\{x \mid x \geq 0, x \in I\}$ 。

5、设 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个格，由格诱导的代数系统为 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ ，则（ ）成立。

A、 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 满足 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律； B、 $\forall a, b \in A, a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ ；

C、 $\forall a, b, c \in A, \text{ 若 } a \vee b = a \vee c \text{ 则 } b = c$ ；

D、 $\forall a, b \in A, \text{ 有 } a \vee (a \wedge b) = b \text{ 且 } a \wedge (a \vee b) = b$ 。

6、设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集，“ $\leq$ ”定义为： $\forall a, b \in A, a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$ ，则当 A =（ ）  
时， $\langle A, \leq \rangle$ 是格。

A、 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ； B、 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14\}$ ； C、 $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ ； D、 $\{1, 2, 3, 4\}$ 。

7、设 $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ 是由格 $\langle A, \leq \rangle$ 诱导的代数系统，若对 $\forall a, b, c \in A$ ，当 $b \leq a$ 时，  
有（ ） $\langle A, \leq \rangle$ 是模格。

A、 $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$ ； B、 $c \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$ ；

C、 $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$ ； D、 $c \vee (a \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$ 。

8、在（ ）中，补元是唯一的。

A、有界格； B、有补格； C、分配格； D、有补分配格。

9、在布尔代数 $\langle A, \vee, \wedge, - \rangle$ 中， $b \wedge \bar{c} = 0$ 当且仅当（ ）。

A、 $b \leq \bar{c}$ ； B、 $\bar{c} \leq b$ ； C、 $b \leq c$ ； D、 $c \leq b$ 。

10、设 $\langle A, \vee, \wedge, - \rangle$ 是布尔代数， $f$ 是从 $A^n$ 到 $A$ 的函数，则（ ）。

A、 $f$ 是布尔代数； B、 $f$ 能表示成析取范式，也能表示成合取范式；

C、若 $A = \{0, 1\}$ ，则 $f$ 一定能表示成析取范式，也能表示成合取范式；

D、若 $f$ 是布尔函数，它一定能表示成析（合）取范式。

### 三、8%

设  $A=\{1, 2\}$ ,  $A$  上所有函数的集合记为  $A^A$ ,  $\circ$  是函数的复合运算, 试给出  $A^A$  上运算  $\circ$  的运算表, 并指出  $A^A$  中是否有幺元, 哪些元素有逆元。

### 四、证明 42%

1、设  $\langle R, * \rangle$  是一个代数系统,  $*$  是  $R$  上二元运算,  $\forall a, b \in R \quad a * b = a + b + a \cdot b$ , 则 0 是幺元且  $\langle R, * \rangle$  是独异点。(8 分)

2、设  $\langle G, * \rangle$  是  $n$  阶循环群,  $G=\langle a \rangle$ , 设  $b=a^k$ ,  $k \in I_+$  则元素  $b$  的阶为  $\frac{n}{d}$ , 这里  $d=\text{GCD}(n, k)$ 。(10 分)

3、证明如果  $f$  是由  $\langle A, \star \rangle$  到  $\langle B, * \rangle$  的同态映射,  $g$  是由  $\langle B, * \rangle$  到  $\langle C, \triangle \rangle$  的同态映射, 则  $g \circ f$  是由  $\langle A, \star \rangle$  到  $\langle C, \triangle \rangle$  的同态映射。(6 分)

4、设  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是一个含幺环, 且任意  $a \in A$  都有  $a \cdot a = a$ , 若  $|A| \geq 3$  则  $\langle A, +, \cdot \rangle$  不可能是整环。(8 分)

5、 $K=\{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$  是 110 的所有整因子的集合, 证明: 具有全上界 110

和全下界 1 的代数系统  $\langle K, \text{LCM}, \text{GCD}, ' \rangle$  是一个布尔代数。(  $\forall x \in K, x' = \frac{110}{x}$  )。  
(10 分)

### 五、布尔表达式 10%

设  $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_3)$  是布尔代数  $\langle \{0,1\}, \vee, \wedge, ' \rangle$  上的一个布尔表达式, 试写出其析取范式和合取范式。(10 分)

答案:

一、填空 20% (每空 2 分)

1、 $\text{LCM}(x, y)$ ; 2、乘法; 3、 $\alpha, \delta, \gamma, \zeta$ ; 4、群; 5、 $G = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n = e\}$ ;  
6、 $\{ \langle a, b \rangle \mid a \in G, b \in G, a^{-1} * b \in H \}$ ; 7、 $\{x \mid x \in G \text{ 且 } f(x) = e'\}$

二、选择 20% (每小题 2 分)

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B, C	D	A	B	A	A	D	C	C, D

三、8%

解: 因为  $|A|=2$ , 所以  $A$  上共有  $2^2=4$  个不同函数。令  $A^A = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ , 其中:

$$f_1(1)=1, f_1(2)=2; \quad f_2(1)=1, f_2(2)=1; \quad f_3(1)=2, f_3(2)=2; \quad f_4(1)=2, f_4(2)=1$$

$\circ$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_2$	$f_2$	$f_2$	$f_2$	$f_2$
$f_3$	$f_3$	$f_3$	$f_3$	$f_3$
$f_4$	$f_3$	$f_3$	$f_2$	$f_1$

$f_1$  为  $A^A$  中的么元,  $f_1$  和  $f_4$  有逆元。

#### 四、证明 42%

1、(8 分)

证明:

$$[\text{么}] \quad \forall a \in R, \quad 0 * a = 0 + a + 0 \cdot a = a, \quad a * 0 = a + 0 + a \cdot 0$$

$$\text{即 } 0 * a = a * 0 = a \quad \therefore 0 \text{ 为么元}$$

$$[\text{乘}] \quad \forall a, b \in R, \quad \text{由于 } +, \cdot \text{ 在 } R \text{ 封闭。所以 } a * b = a + b + a \cdot b \in R \text{ 即在 } R \text{ 上封闭。}$$

$$[\text{群}] \quad \forall a, b, c \in R$$

$$(a * b) * c = (a + b + a \cdot b) * c = a + b + a \cdot b + c + (a + b + a \cdot b) \cdot c$$

$$= a + b + c + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

$$a * (b * c) = a + b + c + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

$$\text{所以 } (a * b) * c = a * (b * c)$$

因此,  $\langle R, * \rangle$  是独异点。

2、(10 分)

$$\text{证明: (1)} \quad \because d = GCD(n, k), \text{ 设 } n = d \cdot n_1, k = d \cdot k_1$$

$$\therefore e = a^{nk_1} = a^{dn_1k_1} = a^{kn_1} = b^{n_1}$$

$$(2) \text{ 若 } b \text{ 的阶不为 } n_1, \text{ 则 } b \text{ 阶 } m < n_1, \text{ 且有 } n_1 = l \cdot m \quad (l > 1), \text{ 则有 } b^m = e, \text{ 即}$$

$$a^{km} = e, a^{\frac{dk_1n_1}{e}} = e, \text{ 即 } a^{\frac{dn_1k_1}{e}} = a^{\frac{nk_1}{e}} = e, \therefore k_1 \text{ 有因子 } l, \text{ 这与 } d = GCD(n, k) \text{ 矛盾。}$$

$$\frac{n}{d}$$

由 (1)、(2) 知, 元素  $b$  的阶为  $\frac{n}{d}$

3、(6 分)

$$\forall a, b \in A, g \circ f(a \star b) = g(f(a \star b)) = g(f(a) * f(b))$$

$$= g(f(a)) \triangle g(f(b)) = g \circ f(a) \triangle g \circ f(b)$$

所以  $g \circ f$  是由  $\langle A, \star \rangle$  到  $\langle C, \triangle \rangle$  的同态映射。

4、(8 分)

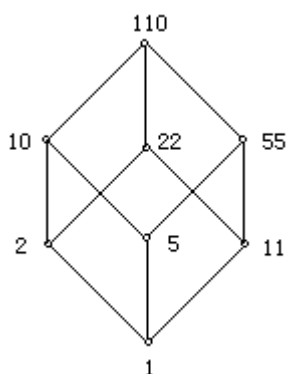
证明: 反证法: 如果  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是整环, 且  $|A| \geq 3$ , 则  $\exists a \in A, a \neq \theta, a \neq 1$  且  $a \cdot a = a$

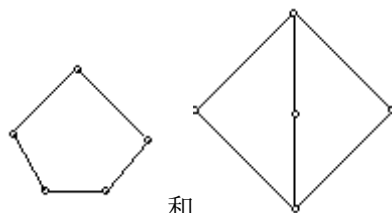
即有  $a \neq \theta, a - 1 \neq \theta$  且  $a \cdot (a - 1) = a \cdot a - a = a - a = \theta$ , 这与整环中无零因子矛盾。

所以  $\langle A, +, \cdot \rangle$  不可能是整环。

5、(10 分)

(1) 代数系统  $\langle K, LCM, GCD, ' \rangle$  是由格  $\langle K, | \rangle$  诱导的, 其 Hasst 图为





Hass 图中不存在与五元素格  
所以 $\langle K, | \rangle$ 格是分配格。

(2)  $\forall x \in K, \exists x' = 100/x$  使得:  $LCM(x, x') = 110, GCD(x, x') = 1$

如:  $22' = \frac{110}{22} = 5, LCM(22, 5) = 110, GCD(22, 5) = 1$

即任元素都有补元, 所以 $\langle K, | \rangle$ 有补格。

$\langle K, LCM, GCD, ' \rangle$ 是布尔代数。

## 五、布尔表达式 10%

解: 函数表为:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$E(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$E(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

$$\vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)$$

$$\text{合取范式: } E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

试卷十三试题与答案

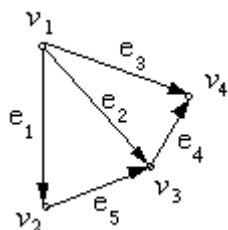
## 七、 填空 10% (每小题 2 分)

1、 $Z^+ = \{x | x \in Z \wedge x > 0\}$ , \*表示求两数的最小公倍数的运算 ( $Z$  表示整数集合), 对于\*  
运算的幺元是 \_\_\_\_\_, 零元是 \_\_\_\_\_。

2、代数系统 $\langle A, * \rangle$ 中,  $|A| > 1$ , 如果 $e$ 和 $\theta$ 分别为 $\langle A, * \rangle$ 的幺元和零元,  
则 $e$ 和 $\theta$ 的关系为 \_\_\_\_\_。

3、设  $\langle G, * \rangle$  是一个群,  $\langle G, * \rangle$  是阿贝尔群的充要条件是 \_\_\_\_\_。





4、图 的完全关联矩阵为 \_\_\_\_\_。

5、一个图是平面图的条件是 \_\_\_\_\_。

## 八、选择 10%（每小题 2 分）

1、下面各集合都是  $\mathbb{N}$  的子集，( ) 集合在普通加法运算下是封闭的。

- A、 $\{x \mid x \text{ 的幂可以被 } 16 \text{ 整除}\}$ ； B、 $\{x \mid x \text{ 与 } 5 \text{ 互质}\}$ ；  
C、 $\{x \mid x \text{ 是 } 30 \text{ 的因子}\}$ ； D、 $\{x \mid x \text{ 是 } 30 \text{ 的倍数}\}$ 。

2、设  $G_1 = \langle \{0,1,2\}, \circ \rangle$ ， $G_2 = \langle \{0,1\}, * \rangle$ ，其中  $\circ$  表示模 3 加法， $*$  表示模 2 乘法，

则积代数  $G_1 \times G_2$  的么元是 ( )。

- A、 $\langle 0,0 \rangle$ ； B、 $\langle 0,1 \rangle$ ； C、 $\langle 1,0 \rangle$ ； D、 $\langle 1,1 \rangle$ 。

3、设集合  $S = \{1,2,3,6\}$ ，“ $\leq$ ”为整除关系，则代数系统  $\langle S, \leq \rangle$  是 ( )。

- A、域； B、格，但不是布尔代数； C、布尔代数； D、不是代数系统。

4、设  $n$  阶图  $G$  有  $m$  条边，每个结点度数不是  $k$  就是  $k+1$ ，若  $G$  中有  $N_k$  个  $k$  度结点，则  $N_k =$  ( )。

- A、 $n \cdot k$ ； B、 $n(k+1)$ ； C、 $n(k+1)-m$ ； D、 $n(k+1)-2m$ 。

5、一棵树有 7 片树叶，3 个 3 度结点，其余全是 4 度结点，

则该树有 ( ) 个 4 度结点。

- A、1； B、2； C、3； D、4。

## 三、判断 10%（每小题 2 分）

1、( ) 设  $S = \{1,2\}$ ，则  $S$  在普通加法和乘法运算下都不封闭。

2、( ) 在布尔格  $\langle A, \leq \rangle$  中，对  $A$  中任意原子  $a$ ，和另一非零元  $b$ ，在  $a \leq b$  或  $a \leq \bar{b}$  中有且仅有一个成立。

3、( ) 设  $S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{N}$ ， $+$ ， $\cdot$  为普通加法和乘法，则  $\langle S, +, \cdot \rangle$  是域。

- 4、( ) 一条回路和任何一棵生成树至少有一条公共边。
- 5、( ) 设  $T$  是一棵  $m$  叉树，它有  $t$  片树叶， $i$  个分枝点，则  $(m-1)i = t-1$ 。

## 四、证明 38%

1、(8 分) 对代数系统  $\langle A, * \rangle$ ， $*$  是  $A$  上二元运算， $e$  为  $A$  中幺元，如果  $*$  是可结合的且每个元素都有右逆元，则 (1)  $\langle A, * \rangle$  中的每个元素在右逆元必定也是左逆元。

(2) 每个元素的逆元是唯一的。

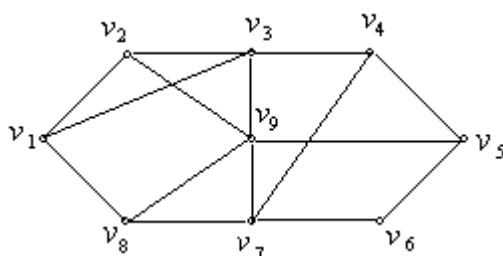
2、(12 分) 设  $\langle A, \vee, \wedge, - \rangle$  是一个布尔代数，如果在  $A$  上定义二元运算  $\star$ ，为  $a \star b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$ ，则  $\langle A, \star \rangle$  是一阿贝尔群。

3、(10 分) 证明任一环的同态象也是一环。

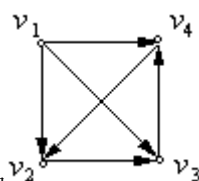
4、(8 分) 若  $G = \langle V, E \rangle$  ( $|V| = v$ ,  $|E| = e$ ) 是每一个面至少由  $k$  ( $k \geq 3$ ) 条边围成的连通

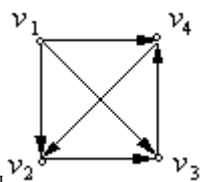
平面图，则 
$$e \leq \frac{k(v-2)}{k-2}。$$

## 五、应用 32%



- 1、(8 分) 某年级共有 9 门选修课程，期末考试前必须提前将这 9 门课程考完，每人每天只在下午考一门课，若以课程表示结点，有一人同时选两门课程，则这两点间有边（其图如右），问至少需几天？



- 2、用 washall 方法求图  的可达矩阵，并判断图的连通性。(8 分)
- 3、设有  $a, b, c, d, e, f, g$  七个人，他们分别会讲的语言如下： $a$ : 英， $b$ : 汉、英， $c$ : 英、西班牙、俄， $d$ : 日、汉， $e$ : 德、西班牙， $f$ : 法、日、俄， $g$ : 法、德，能否将这七个人的座位安排在圆桌旁，使得每个人均能与他旁边的人交谈？(8 分)
- 4、用 Huffman 算法求出带权为 2, 3, 5, 7, 8, 9 的最优二叉树  $T$ ，并求  $W(T)$ 。
- 若传递  $a, b, c, d, e, f$  的频率分别为 2%, 3%, 5%, 7%, 8%, 9% 求传输它的最佳前缀码。(8 分)

答案:

三十五、填空 10% (每小题 2 分)

- 1、1, 不存在; 2、 $e \neq \theta$ ; 3、 $\forall a, b \in G$  有  $(a * b) * (a * b) = (a * a) * (b * b)$ ;  
4、

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$
$v_1$	1	1	1	0	0
$v_2$	-1	0	0	0	1
$v_3$	0	-1	0	1	-1
$v_4$	0	0	-1	-1	0

- 5、它不包含与  $K_{3,3}$  或  $K_5$  在 2 度结点内同构的子图。

三十六、选择 10% (每小题 2 分)

题目	1	2	3	4	5
答案	A, D	B	C	D	A

三十七、判断 10%

题目	1	2	3	4	5
答案	Y	Y	N	N	N

三十八、证明 38%

- 1、(8 分) 证明:

(1) 设  $a, b, c \in A$ ,  $b$  是  $a$  的右逆元,  $c$  是  $b$  的右逆元, 由于  $b * (a * b) = b * e = b$ ,  
 $e = b * c = b * (a * b) * c = (b * a) * (b * c) = (b * a) * e = b * a$   
所以  $b$  是  $a$  的左逆元。

- (2) 设元素  $a$  有两个逆元  $b$ 、 $c$ , 那么

$$b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$$

$a$  的逆元是唯一的。

- 2、(12 分) 证明:

[乘]  $\because \vee, \wedge, -$  在  $A$  上封闭,  $\therefore$  运算  $\star$  在  $A$  上也封闭。

[群]  $\forall a, b, c \in A$

$$\begin{aligned}
(a \star b) \star c &= ((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \star c \\
&= (((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge \bar{c}) \vee (((a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)) \wedge c) \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee ((\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b) \wedge c) \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (((a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})) \wedge c) \\
&= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \\
\text{同理可得: } a \star (b \star c) &= (a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) \\
\therefore (a \star b) \star c &= a \star (b \star c) \quad \text{即 } \star \text{ 满足结合性。}
\end{aligned}$$

$$[\text{幺}] \quad \forall a \in A, a \star 0 = 0 \star a = (0 \wedge \bar{a}) \vee (\bar{0} \wedge a) = 0 \vee (1 \wedge a) = 0 \vee a = a$$

故全下界 0 是 A 中关于运算  $\star$  的幺元。

$$[\text{逆}] \quad \forall a \in A, (a \star a) = (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{a} \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$$

即 A 中的每一个元素以其自身为逆元。

$$[\text{交}] \quad a \star b = (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) = (b \wedge \bar{a}) \vee (\bar{b} \wedge a) = b \star a$$

即运算  $\star$  具有可交换性。

所以  $\langle A, \star \rangle$  是 Abel 群。

3、(10 分) 证明:

设  $\langle A, +, \bullet \rangle$  是一环, 且  $\langle f(A), \oplus, \otimes \rangle$  是关于同态映射  $f$  的同态象。

由  $\langle A, + \rangle$  是 Abel 群, 易证  $\langle f(A), \oplus \rangle$  也是 Abel 群。

$\langle A, \bullet \rangle$  是半群, 易证  $\langle f(A), \otimes \rangle$  也是半群。

现只需证:  $\otimes$  对  $\oplus$  是可分配的。

$\forall b_1, b_2, b_3 \in f(A)$ , 则必有相应的  $a_1, a_2, a_3$  使得:  $f(a_i) = b_i, i = 1, 2, 3$  于是

$$\begin{aligned}
b_1 \otimes (b_2 \oplus b_3) &= f(a_1) \otimes (f(a_2) \oplus f(a_3)) = f(a_1) \otimes (f(a_2 + a_3)) \\
&= f(a_1 \cdot (a_2 + a_3)) = f((a_1 \cdot a_2) + (a_1 \cdot a_3)) = f(a_1 \cdot a_2) \oplus f(a_1 \cdot a_3) \\
&= (f(a_1) \otimes f(a_2)) \oplus (f(a_1) \otimes f(a_3)) \\
&= (b_1 \otimes b_2) \oplus (b_1 \otimes b_3)
\end{aligned}$$

$$\text{同理可证 } (b_2 \oplus b_3) \otimes b_1 = (b_2 \otimes b_1) \oplus (b_3 \otimes b_1)$$

因此  $\langle f(A), \oplus, \otimes \rangle$  也是环。

5、(8 分) 证明:

设 G 有 r 个面,

$$\therefore \sum_{i=1}^r \deg(r_i) = 2e, \quad \text{而 } \deg(r_i) \geq k \quad (1 \leq i \leq r) \quad \therefore 2e \geq kr \quad \text{即 } r \leq \frac{2e}{k}$$

$$\text{而 } v - e + r = 2, \quad \text{故 } v - e + \frac{2r}{k} \geq 2 \quad \text{即 } e \leq \frac{k(v-2)}{k-2}.$$

### 三十九、应用 32%

#### 1、(8分)

解： $\chi(G)$ 即为最少考试天数。

用 Welch-Powell 方法对  $G$  着色：  $v_9v_3v_7v_1v_2v_4v_5v_8v_6$

第一种颜色的点  $v_9v_1v_4v_6$ ，剩余点  $v_3v_7v_2v_5v_8$

第二种颜色的点  $v_3v_7v_5$ ，剩余点  $v_2v_8$

第三种颜色的点  $v_2v_8$

所以  $\chi(G) \leq 3$

任  $v_2v_3v_9$  构成一圈，所以  $\chi(G) \geq 3$

故  $\chi(G) = 3$

所以三天下午即可考完全部九门课程。

#### 2、(8分)

解：

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

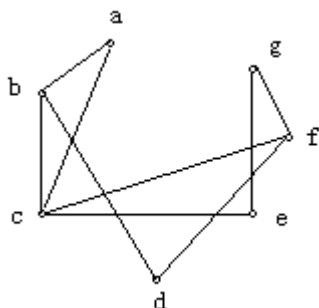
$$i = 1: A[2, 1] = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad i = 2: A[4, 2] = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i = 3: A[1, 3] = A[2, 3] = A[4, 3] = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i = 4: A[k, 4] = 1, k = 1, 2, 3, 4, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$p$  中的各元素全为 1，所以  $G$  是强连通图，当然是单向连通和弱连通。

#### 3、(8分)

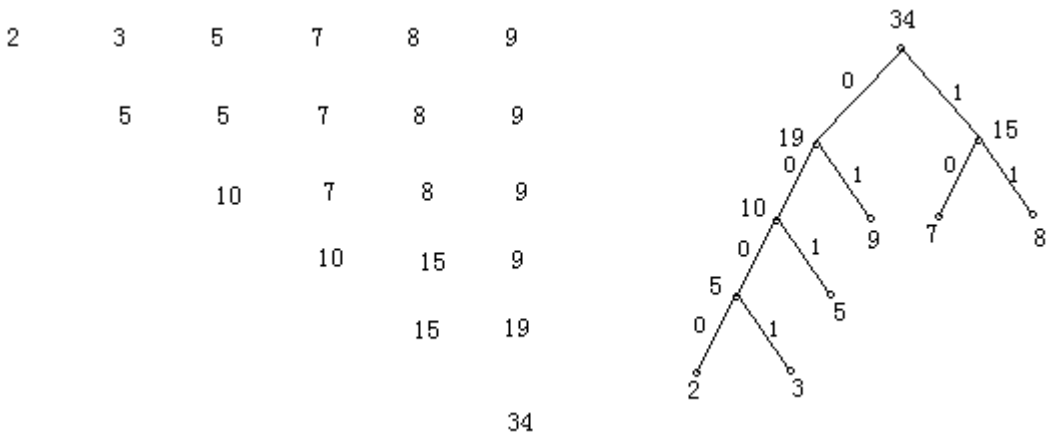


解：用 a,b,c,d,e,f,g 7 个结点表示 7 个人，若两人能交谈可用一条无向边连结，所得无向图为此图中的 Hamilton 回路即是圆桌安排座位的顺序。

Hamilton 回路为 a b d f g e c a。

4、（8 分）

解：(1)



$$W(T)=2\times 4+3\times 4+5\times 3+9\times 2+7\times 2+8\times 2=83$$

(1) 用 0000 传输 a、0001 传输 b、001 传输 c、01 传输 f、10 传输 d、11 传输 e 传输它们的最优前缀码为{0000，0001，001，01，10，11} 。

试卷十四试题与答案

## 九、 填空 10% （每小题 2 分）

1、 设  $\langle A,\vee,\wedge,-\rangle$  是由有限布尔格  $\langle A,\leq\rangle$  诱导的代数系统，S 是布尔格  $\langle A,\leq\rangle$  中所有原子的集合，则  $\langle A,\vee,\wedge,-\rangle\sim$ \_\_\_\_\_。

2、 集合  $S=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$  上的二元运算\*为

*	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$\alpha$	$\delta$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\gamma$	$\gamma$
$\delta$	$\alpha$	$\delta$	$\gamma$	$\delta$

那么，代数系统  $\langle S,*\rangle$  中的么元是 \_\_\_\_\_， $\alpha$  的逆元是 \_\_\_\_\_。

3、 设 I 是整数集合， $Z_3$  是由模 3 的同余类组成的同余类集，在  $Z_3$  上定义  $+_3$  如下：

$[i] +_3 [j] = [(i + j) \bmod 3]$ , 则 $+_3$ 的运算表为 \_\_\_\_\_ ;

$\langle \mathbb{Z}_3, +_3 \rangle$ 是否构成群 \_\_\_\_\_ 。

4、 设  $G$  是  $n$  阶完全图, 则  $G$  的边数  $m =$  \_\_\_\_\_ 。

5、 如果有一台计算机, 它有一条加法指令, 可计算四数的和。现有 28 个数需要计算和, 它至少要执行 \_\_\_\_\_ 次这个加法指令。

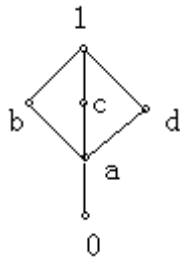
## 十、 选择 20% （每小题 2 分）

1、 在有理数集  $Q$  上定义的二元运算 $*$ ,  $\forall x, y \in Q$  有  $x * y = x + y - xy$ , 则  $Q$  中满足 ( )。

- A、 所有元素都有逆元;                      B、 只有唯一逆元;  
C、  $\forall x \in Q, x \neq 1$  时有逆元  $x^{-1}$ ;      D、 所有元素都无逆元。

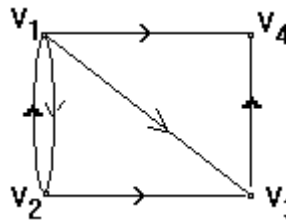
2、 设  $S = \{0, 1\}$ ,  $*$  为普通乘法, 则  $\langle S, * \rangle$  是 ( )。

- A、 半群, 但不是独异点;      B、 只是独异点, 但不是群;  
C、 群;                                  D、 环, 但不是群。



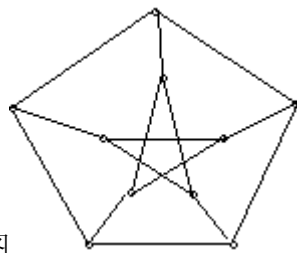
3、 图 给出一个格  $L$ , 则  $L$  是 ( )。

- A、 分配格;      B、 有补格;      C、 布尔格;      D、 A,B,C 都不对。



3、 有向图  $D = \langle V, E \rangle$ , 则  $v_1$  到  $v_4$  长度为 2 的通路有 ( ) 条。

- A、 0;      B、 1;      C、 2;      D、 3 。



- 4、在 Peterson 图中，至少填加 ( ) 条边才能构成 Euler 图。
- A、1;    B、2;    C、4;    D、5 。

## 十一、 判断 10% (每小题 2 分)

- 1、在代数系统  $\langle A, * \rangle$  中如果元素  $a \in A$  的左逆元  $a_e^{-1}$  存在，则它一定唯一且  $a^{-1} = a_e^{-1}$ 。( )
- 2、设  $\langle S, * \rangle$  是群  $\langle G, * \rangle$  的子群，则  $\langle G, * \rangle$  中幺元  $e$  是  $\langle S, * \rangle$  中幺元。( )
- 3、设  $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \text{ 均为有理数}\}$ ,  $+$ ,  $\cdot$  为普通加法和乘法，则代数系统  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是域。( )
- 4、设  $G = \langle V, E \rangle$  是平面图， $|V|=v$ ,  $|E|=e$ ,  $r$  为其面数，则  $v-e+r=2$ 。( )
- 5、如果一个有向图  $D$  是欧拉图，则  $D$  是强连通图。( )

## 四、证明 46%

- 1、设  $\langle A, * \rangle$  是半群， $e$  是左幺元且  $\forall x \in A, \exists \hat{x} \in A$ ，使得  $\hat{x} * x = e$ ，则  $\langle A, * \rangle$  是群。(10 分)
- 2、循环群的任何非平凡子群也是循环群。(10 分)
- 3、设  $aH$  和  $bH$  是子群  $H$  在群  $G$  中的两个左陪集，证明：要末  $aH \cap bH = \Phi$ ，要末  $aH = bH$ 。(8 分)
- 4、设  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是一个含幺环， $|A| > 3$ ，且对任意  $\forall a \in A$ ，都有  $a \cdot a = a$ ，则  $\langle A, +, \cdot \rangle$  不可能是整环（这时称  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是布尔环）。(8 分)
- 5、若图  $G$  不连通，则  $G$  的补图  $\overline{G}$  是连通的。(10 分)

## 五、布尔表达式 8%

设  $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$  是布尔代数



$\langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \neg \rangle$  上的一个布尔表达式，试写出其的析取范式和合取范式。

六、图的应用 16%

- 1、构造一个结点  $v$  与边数  $e$  奇偶性相反的欧拉图。（6 分）
- 2、假设英文字母，a，e，h，n，p，r，w，y 出现的频率分别为 12%，8%，15%，7%，6%，10%，5%，10%，求传输它们的最佳前缀码，并给出 happy new year 的编码信息。（10 分）

答案

四十、 填空 10%（每小题 2 分）

$+_3$	[0]	[1]	[2]	1 、 $\langle \mathcal{P}(S), \cup, \cap, \sim \rangle$ ； 2 、 $\beta$ ， $\gamma$ ； 3 、 是； $\frac{1}{2}n(n-1)$ ； 5、9
[0]	[0]	[1]	[2]	
[1]	[1]	[2]	[0]	
[2]	[2]	[0]	[1]	

四十一、 选择 10%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	C	B	D	B	D

四十二、 判断 10%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5
答案	N	Y	Y	N	Y

四十三、 证明 46%

1、（10 分）证明：

(1)  $\forall a,b,c \in A$  ,若  $a * b = a * c$  则  $b = c$

事实上： $\because a * b = a * c \therefore \exists \hat{a}$  使  $\hat{a} * (a * b) = \hat{a} * (a * c)$

$(\hat{a} * a) * b = (\hat{a} * a) * c, \therefore e * b = e * c$

即： $b = c$

(2)  $e$  是  $\langle A, * \rangle$  之幺元。

事实上：由于  $e$  是左幺元，现证  $e$  是右幺元。

$\forall x \in A, x * e \in A, \exists \hat{x}$  使  $\hat{x} * (x * e) = (\hat{x} * x) * e = e * e = e = \hat{x} * x$

由(1)即  $x * e = x, \therefore e$  为右幺元

(3)  $\forall x \in A$ , 则  $x^{-1} \in A$

事实上:  $\forall x \in A \quad (x * \hat{x}) * x = x * (\hat{x} * x) = x * e = x = e * x$

$x * \hat{x} = e$  故有  $\hat{x} * x = x * \hat{x} = e \quad \therefore x$  有逆元  $\hat{x}$

由 (2), (3) 知:  $\langle A, * \rangle$  为群。

2、(10 分) 证明:

设  $\langle G, * \rangle$  是循环群,  $G = \langle a \rangle$ , 设  $\langle S, * \rangle$  是  $\langle G, * \rangle$  的子群。且  $S \neq \{e\}, S \neq G$ , 则存在最小正整数  $m$ ,

使得:  $a^m \in S$ , 对任意  $a^l \in S$ , 必有  $l = tm + r, 0 \leq r < m, t > 0$ ,

故:  $a^r = a^{l-tm} = a^l * a^{-tm} = a^l * (a^m)^{-t} \in S$  即:  $a^l = a^r * (a^m)^t \in S$

所以  $a^r \in S$  但  $m$  是使  $a^m \in S$  的最小正整数, 且  $0 \leq r < m$ , 所以  $r=0$  即:  $a^l = (a^m)^t$

这说明  $S$  中任意元素是  $a^m$  的乘幂。所以  $\langle G, * \rangle$  是以  $a^m$  为生成元的循环群。

3、(8 分) 证明:

对集合  $aH$  和  $bH$ , 只有下列两种情况:

(1)  $aH \cap bH \neq \Phi$ ; (2)  $aH \cap bH = \Phi$

对于  $aH \cap bH \neq \Phi$ , 则至少存在  $h_1, h_2 \in H$ , 使得  $ah_1 = bh_2$ , 即有  $a = bh_2h_1^{-1}$ , 这时任

意  $ah \in aH$ , 有  $ah = bh_2h_1^{-1}h \in bH$ , 故有  $aH \subseteq bH$

同理可证:  $bH \subseteq aH$  所以  $aH = bH$

4、(8 分) 证明:

反证法: 如果  $\langle A, +, \cdot \rangle$  是整环, 且有三个以上元素, 则存在  $a \in A, a \neq \theta, a \neq 1$  且  $a \cdot a = a$

即有:  $a \neq \theta, a - 1 \neq \theta$  但  $a \cdot (a - 1) = a \cdot a - a = a - a = \theta$  这与整环中无零因子条件矛盾。

因此  $\langle A, +, \cdot \rangle$  不可能是整环。

5、(10 分) 证明:

因为  $G = \langle V, E \rangle$  不连通, 设其连通分支是  $G(V_1), \dots, G(V_k) \quad (k \geq 2), \forall u, v \in V$ , 则有两种情况:

(1)  $u, v$ , 分别属于两个不同结点子集  $V_i, V_j$ , 由于  $G(V_i), G(V_j)$  是两连通分支, 故  $(u, v)$

在不  $G$  中, 故  $u, v$  在  $\overline{G}$  中连通。

(2)  $u, v$ , 属于同一个结点子集  $V_i$ , 可在另一结点子集  $V_j$  中任取一点  $w$ , 故  $(u, w), (w, v)$

均在  $\overline{G}$  中, 故邻接边  $(u, w)(w, v)$  组成的路连接结点  $u$  和  $v$ , 即  $u, v$  在  $\overline{G}$  中也是连通的。

五、布尔表达式 8%

函数表为：

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$E(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$E(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$$

析取范式：

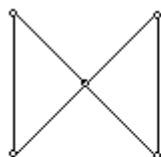
$$\vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

合取范式：

$$E(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

## 六、 树的应用 16%

1、（6分）解：



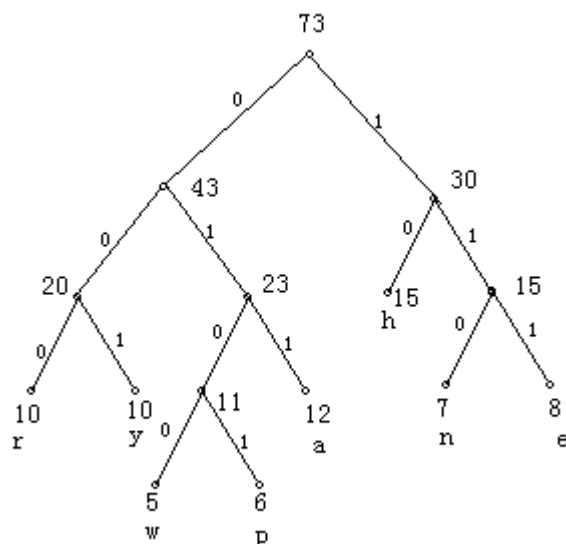
结点数5，边数6，每个结点数均为偶数，所以它是欧拉图。



结点数6，边数7，每个结点数均为偶数，所以它是欧拉图。

2、（10分）解：

根据权数构造最优二叉树：



传输它们的最佳前缀码如上图所示，

happy new year 的编码信息为：

10 011 0101 0101 001 110 111

0100 001 111 011 000

附：最优二叉树求解过程如下：

5	6	7	8	10	10	12	15
	11	7	8	10	10	12	15
		11	15	10	10	12	15
			11	15	20	12	15
				15	20	23	15
					20	23	30
						43	30
							73

试卷十五试题与答案

## 十二、 填空 20% （每空 2 分）

- 1、如果有限集合  $A$  有  $n$  个元素，则  $|2^A| =$  \_\_\_\_\_。
- 2、某集合有 101 个元素，则有 \_\_\_\_\_ 个子集的元素为奇数。
- 3、设  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ ,  $B_i$  是  $S$  的子集, 由  $B_{17}$  表达的子集为 \_\_\_\_\_, 子集  $\{a_2, a_6, a_7\}$  规定为 \_\_\_\_\_。
- 4、由  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 生成的最小集的形式为 \_\_\_\_\_, 它们的并为 \_\_\_\_\_ 集, 它们的交为 \_\_\_\_\_ 集。
- 5、某人有三个儿子, 组成集合  $A = \{S_1, S_2, S_3\}$ , 在  $A$  上的兄弟关系具有 \_\_\_\_\_ 性质。
- 6、每一个良序集必为全序集, 而 \_\_\_\_\_ 全序集必为良序集。
- 7、若  $f: A \rightarrow B$  是函数, 则当  $f$  是  $A \rightarrow B$  的 \_\_\_\_\_,  $f^c: B \rightarrow A$  是  $f$  的逆函数。

## 十三、 选择 15% （每小题 3 分）

- 1、集合  $B = \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$  的幂集为 ( )。  
A、  $\{\{\Phi\}, \{\{\Phi\}, \Phi\}, \Phi\}$ ;

- B、 $\{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \{\{\Phi, \{\Phi\}\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}, \{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}, B\}$ ;  
 C、 $\{\Phi, \{\Phi\}, \{\{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}, \{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}, B\}$ ;  
 D、 $\{\{\Phi\}\{\Phi, \{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}, \{\{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}, \Phi, B\}$

2、下列结果正确的是 ( )。

- A、 $(A \cup B) - A = B$ ; B、 $(A \cap B) - A = \Phi$ ; C、 $(A - B) \cup B = A$ ;  
 D、 $\Phi \cup \{\Phi\} = \Phi$ ; E、 $\Phi \cap \{\Phi\} = \Phi$ ; F、 $A \oplus A = A$ 。

3、集合  $A \cup \bar{B}$  的最小集范式为 ( ) (由 A、B、C 生成)。

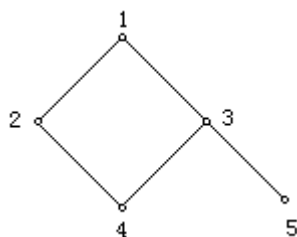
- A、 $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$ ;  
 B、 $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ ;  
 C、 $(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup B \cup C)$ ;  
 D、 $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup B)$ 。

4、在 ( ) 下有  $A \times B \subseteq A$ 。

- A、 $A = B$ ; B、 $B \subseteq A$ ; C、 $A \subseteq B$ ; D、 $A = \Phi$  或  $B = \Phi$

5、下列二元关系中是函数的有 ( )。

- A、 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in N \wedge y \in N \wedge x + y < 10 \}$ ;  
 B、 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in R \wedge y \in R \wedge y = x^2 \}$ ;  
 C、 $R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in R \wedge y \in R \wedge x = y^2 \}$ 。



### 三、15%

用 Warshall 算法, 对集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上二元关系  $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$  求  $t(R)$ 。

### 四、15%

集合  $C^* = \{a + bi \mid i^2 = -1, a, b \text{ 是任意实数}, a \neq 0\}$ ,  $C^*$  上定义关系

$R = \{ \langle a + bi, c + di \rangle \mid ac > 0 \}$ , 则  $R$  是  $C^*$  上的一个等价关系, 并给出  $R$  等价类的几何说明。

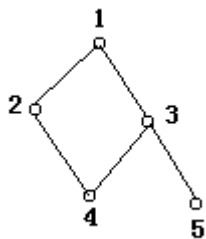
## 五、计算 15%

1、设  $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $S=\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ , 为  $A$  的一个分划, 求由  $S$  导出的等价关系。

(4 分)

2、设  $Z$  为整数集, 关系  $R = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in Z \wedge a \equiv b \pmod{k} \}$  为  $Z$  上等价关系, 求  $R$  的模  $k$  等价关系的商集  $Z/R$ , 并指出  $R$  有秩。(5 分)

3、设  $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A$  上的偏序关系为



求  $A$  的子集  $\{3, 4, 5\}$  和  $\{1, 2, 3\}$ , 的上界, 下界, 上确界和下确界。(6 分)

## 六、证明 20%

1、假定  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ , 且  $g \circ f$  是一个满射,  $g$  是个入射, 则  $f$  是满射。(10 分)

2、设  $f, g$  是  $A$  到  $B$  的函数,  $f \subseteq g$  且  $dom g \subseteq dom f$ , 证明  $f = g$ 。(10 分)

答案

一、填空 20% (每空 2 分)

1、 $2^n$ ; 2、 $2^{100}$ ; 3、 $\{a_4, a_8\}$ ,  $B_{01000110}$  ( $B_{70}$ ); 4、 $\hat{A}_1 \cap \hat{A}_2 \cap \cdots \cap \hat{A}_n$  ( $\hat{A}_i = A_i$  或  $\overline{A_i}$ ), 全集,  $\Phi$ ; 5、反自反性、对称性、传递性; 6、有限; 7、双射。

二、选择 15% (每小题 3 分)

题目	1	2	3	4	5
答案	B	B, E	A	D	B

三、Warshall 算法 15%

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解:

$i=1$  时,  $M_R[1,1]=1, A=M_R$

$i=2$  时,  $M[1,2]=M[4,2]=1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$i=3$  时,  $A$  的第三列全为 0, 故  $A$  不变

$i=4$  时,  $M[1,4]=M[2,4]=M[4,4]=1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$i=5$  时,  $M[3,5]=1$ , 这时

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $t(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$ 。

#### 四、5%

证明:

对称性:  $\forall a+bi \in C^*, c+di \in C^*$  且  $\langle a+bi, c+di \rangle \in R, ac > 0$

$\Rightarrow ca > 0, \therefore \langle c+di, a+bi \rangle \in R$ 。

自反性:  $\forall a+bi \in C^* (a \neq 0), aa > 0 \therefore \langle a+bi, a+bi \rangle \in R$

传递性: 若  $\forall a+bi \in C^*, c+di \in C^*, e+fi \in C^*$

当  $\langle a+bi, c+di \rangle \in R$  且  $\langle c+di, e+fi \rangle \in R$  则

$ac > 0, ce > 0, \therefore acce > 0$  即  $ae > 0 \therefore \langle a+bi, e+fi \rangle \in R$

所以  $R$  是  $C^*$  上等价关系。

$R$  两等价类:  $\pi_1 = \{z \mid z = a+bi, a > 0\}$  右半平面;

$\pi_2 = \{z \mid z = a+bi, a < 0\}$  左半平面。

#### 五、计算 15%

1、(4分)  $R = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$ 。

2、(5 分)  $Z/R=\{[0], [1], \dots, [k-1]\}$  , 所以  $R$  秩为  $k$ 。

3、(6 分)  $\{3, 4, 5\}$ : 上界: 1, 3; 上确界: 3; 下界: 无; 下确界: 无;

$\{1, 2, 3\}$ : 上界: 1; 上确界: 1; 下界: 4; 下确界: 4。

## 六、证明 20%

1、(10 分) 证明:  $\forall b \in B$ , 由于  $g$  是入射, 所以存在唯一  $c \in C$  使  $g(b) = c$ , 又  $g \circ f$  满射, 对上述  $c$  存在  $a \in A$ , 使得  $g \circ f(a) = c$ , 也即  $g(f(a)) = c$ , 由  $g$  单射, 所以  $f(a) = b$  即:  $\forall b \in B$  均存在  $a \in A$  使得  $f(a) = b$ , 所以  $f$  满射。

2、(10 分) 证明:

$\forall \langle x, y \rangle \in g$  则  $x \in \text{dom}g$  且  $y \in \text{range}g \Rightarrow x \in \text{dom}f$  且  $y \in \text{range}g$

对上述  $x \in \text{dom}f$  则  $\exists y' \in \text{range}f$  即  $\langle x, y' \rangle \in f$

而  $f \subseteq g \therefore \langle x, y' \rangle \in g$  但  $\langle x, y \rangle \in g$  由  $g$  是函数知  $y' = y$

$\therefore x \in \text{dom}f$  且  $y \in \text{range}f$  即  $\langle x, y \rangle \in f$

$\therefore f = g$