厦门大学《线性代数》课程期中试题

考试日期：2016.11　信息学院自律督导部整理

一、单项选择题（每小题 2 分，共 14 分）

1. 已知 4 阶矩阵 A 的第三列的元素依次为 $1,3,-2,2$，它们的余子式的值分别为 $3,-2,1,1$，则 $|A|=$（　　　　　）。

（A）5　　　　（B）-5　　　　（C）-3　　　　（D）3

2. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，则下列结论中不正确的是（　　　　　）。

（A）　若 $ABC=E$，则 A,B,C 都可逆

（B）　若 $AB=AC$，且 A 可逆，则 $B=C$

（C）　若 $AB=AC$，且 A 可逆，则 $BA=CA$

（D）　若 $AB=0$，且 $A\neq 0$，则 $B=0$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$（　　　　　）。

（A）$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　　（B）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　　（C）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　　（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

4. 设 A、B 均为 n 阶矩阵，满足 $AB=O$，则必有（　　　　　）。

（A）$|A|+|B|=0$　　　（B）$r(A)=r(B)$

（C）$A=O$ 或 $B=O$　　　（D）$|A|=0$ 或 $|B|=0$

5. 已知 n 阶方阵 A 和常数 k，且 $|A|=d$，则 $|kAA^T|$ 的值为（　　　　　）。

（A）$k\,d^2$　　　（B）$k^2\,d^2$　　　（C）$k^{2n}\,d^2$　　　（D）$k^n\,d^2$

6. 设 A 是 3 阶可逆矩阵, 交换 A 的 1, 2 行得 B, 则（　　　　　）。

(A) 交换 $A*$ 的 1, 2 行得到 $B*$

(B) 交换$A*$的 1, 2 列得到$B*$

(C) 交换$A*$的 1, 2 行得到$-B*$

(D) 交换$A*$的 1, 2 列得到$-B*$

7. 设A为$m\times n$矩阵，若A的秩为$R(A)=r$，则下面结论正确的是(　　　　　)。

（A）A的r阶子式都不为零。　　（B）A的$r-1$阶子式都不为零。

（C）A的所有$r+1$阶以上子式都为零。　　（D）A的$r-1$阶以下子式都不为零。

二、填空题（每空格 3 分，共 18 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&-3\\-1&-2&5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&a&-2\\0&5&a\\0&0&-1\end{bmatrix}$. 则矩阵 $AB-A$ 的秩 $r\left(AB-A\right)=$________________.

2. 若A是 3 阶矩阵，$|A|=\frac{1}{2}$，$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$____________________.

3. 设$D=\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\6&8&1&2\\3&9&1&2\\6&2&3&2\end{vmatrix}$，则$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=$__________________________.

4. 设$\alpha=(1,-2,1)^T$, 设$A=\alpha\alpha^T$，则$A^6=$__________________________________.

5. 设 3 阶方阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, 则$A^{10}=$________________________.

6. 设三阶矩阵$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21}+2a_{31} & a_{23}+2a_{33} & a_{22}+2a_{32} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$，

若$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，则$B^{-1}=$__________________________ .

三、计算题（共 50 分）

1. 按自然数从小到大为标准次序，求下列排列的逆序数：

$$1 \quad 3 \quad \cdots \quad \boldsymbol{(2n-1)} \quad \boldsymbol{(2n)} \quad \boldsymbol{(2n-2)} \quad \cdots \quad 2$$

2. 求行列式D的值, 其中$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$。

3. 求矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & -3 & -10 \\ -3 & 9 & -6 & -9 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}$的秩。

4. 已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且$XA=X+B$，求$X$。

5. 设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$，且$a_{11}\neq 0$。又$A^*=A^T$，求$|A|$。注：A^*是A伴随矩阵。

四、证明题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 设 A 为 n 阶可逆对称矩阵，B 为 n 阶对称矩阵，当 $E+AB$ 可逆时，证明：$(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵。

2. 设 A 为可逆矩阵，证明：A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。

（1）如果 $m>n$ 时，证明：$|AB|=0$.

（2）如果 $m<n$ 且 $AB=E$，证明：$R(B)=m$.