厦门大学《线性代数》期末试题

考试日期：2011.1　信息学院自律督导部整理

一、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 如果行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则$\begin{vmatrix} -2a_{11} & -2a_{12} & -2a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=$____________。

2. 设$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，则$A_{12}+A_{22}+A_{32}+A_{42}=$________________。

3. 设$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,且有$ABC=E$,则$A^{-1}=$___________。

4. 设齐次线性方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的基础解系含有 2 个解向量，则$a=$______。

5. A、B均为 5 阶矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2},|B|=2$，则$\left|-B^TA^{-1}\right|=$____________。

6. 设$\alpha=(1,-2,1)^T$, 设$A=\alpha\alpha^T$，则$A^6=$________________。

7. 设A为n阶可逆矩阵，A^*为A的伴随矩阵，若λ是矩阵A的一个特征值，则A^*的一个特征值可表示为__________。

8. 若$f=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3$为正定二次型，则$t$的范围是__________。

9. 设向量$\alpha=(2,1,3,2)^T,\beta=(1,2,-2,1)^T$，则$\alpha$与$\beta$的夹角$\theta=$______。

10. 若 3 阶矩阵A的特征值分别为 1，2，3，则$|A+E|=$______________。

二、单项选择（每小题 2 分，共 10 分）

1. 若齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$有非零解, 则$\lambda=$（　　）

A. 1 或 2　　B. －1 或－2　　C. 1 或－2　　D. －1 或 2.

2. 已知 4 阶矩阵A的第三列的元素依次为$1,3,-2,2$，它们的余子式的值分别为$3,-2,1,1$，则$|A|=$

（　　）

A. 5　　　　　B. −5　　　　　C. −3　　　　　D. 3

3. 设 A、B 均为 n 阶矩阵，满足 $AB=O$，则必有（　　　）

A. $|A|+|B|=0$　　　　　B. $r(A)=r(B)$

C. $A=O$ 或 $B=O$　　　　　D. $|A|=0$ 或 $|B|=0$

4. 设 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个解向量，则下列向量中仍为该方程组解的是（　　）

A. $\beta_1+\beta_2$　　　B. $\frac{1}{5}(3\beta_1+2\beta_2)$　　　C. $\frac{1}{2}(\beta_1+2\beta_2)$　　　D. $\beta_1-\beta_2$

5. 若二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则 $k=$（　　　）

A. 1　　　　　B. 2　　　　　C. 3　　　　　D. 4

三、计算题（每题 9 分，共 63 分）

1. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & \Lambda & b \\ b & a & \Lambda & b \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b & b & \Lambda & a \end{vmatrix}$

2. 设 A,B 均为 3 阶矩阵，且满足 $AB+E=A^2+B$，若矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 B。

3. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 和 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$；已知 β_3 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 具有相同的秩，求 a，b 的值。

4. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-5\\3\\6\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\5\\4\\8\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩以及它的一个极大线性无关组；

（2）将其余的向量用所求的极大线性无关组线性表示。

5. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+9x_4=a \end{cases}$

（1）a为何值时方程组有解？（2）当方程组有解时求出它的全部解（用解的结构表示）.

6. 设矩阵$P=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,$D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵$A$由关系式$P^{-1}AP=D$确定，试求$A^5$

7. 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形，并写出相应的可逆线性变换。

四、证明题（7 分）

已知 3 阶矩阵 $B\neq O$，且矩阵 B 的列向量都是下列齐次线性方程组的解

$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$，（1）求 λ 的值；（2）证明：$|B|=0$