历届向量代数试题

1. 已知向量$\vec{a}=(1,-1,3)$，$\vec{b}=(2,-3,1)$，$\vec{c}=(1,-2,0)$，则$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=$______________。(2021—2022)

解：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2-1-3=-2.$$

2. 将xoz坐标面上抛物线的一段$z=x^2(1\le x\le 2)$绕z轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为________。(2021—2022)

解：所求旋转曲面方程为$z=x^2+y^2(1\le x^2+y^2\le 4)$。

3. 设向量$\vec{a}$与$\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$平行，并满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=28$，求$\vec{a}$；(2020—2021)

解：因为向量$\vec{a}$与$\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$平行，则$\vec{a}=\lambda\vec{b}$。由$\vec{a}\cdot\vec{b}=28$可得$\lambda\left|\vec{b}\right|^2=28$，即$14\lambda=28$，解得$\lambda=2$，故$\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$。

4. 已知三角形顶点为$A(1,1,1)$，$B(2,3,4)$，$C(4,3,2)$，求此三角形ΔABC的面积；(2020—2021)

解：$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}\left|-4\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+8^2+(-4)^2}=2\sqrt{6}.$$

5. 已知空间中四个点的坐标分别为$A(0,0,0)$，$B(6,0,6)$，$C(4,3,0)$，$D(2,-1,3)$，求以AB、AC和AD为棱的平行六面体的体积。(2018—2019)

解：$\overrightarrow{AB}=(6,0,6)$，$\overrightarrow{AC}=(4,3,0)$，$\overrightarrow{AD}=(2,-1,3)$.

平行六面体的体积为：

$$V=\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|$$

$$V=\left|\left(\begin{vmatrix}0&6\\3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&6\\0&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}6&0\\4&3\end{vmatrix}\right)\cdot(2,-1,3)\right|$$

$$=|(-18,24,18)\cdot(2,-1,3)|=|-36-24+54|=6.$$

6. 设$\vec{a}=(-1,3,2)$，$\vec{b}=(2,-4,3)$，$\vec{c}=(4,-6,13)$，试证明三个向量在同一个平面上，并求$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影。(2017—2018)

解：作向量$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&3&2\\2&-4&3\end{vmatrix}=17\vec{i}+7\vec{j}-2\vec{k}$，注意到$\vec{c}\cdot\vec{n}=17\times4+7\times(-6)+(-2)\times13=0$，即$\vec{c}\perp\vec{n}$，也即$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$都垂直于同一个向量$\vec{n}$，所以，这三个向量在同一个平面上。

$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影$\mathrm{prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\dfrac{-1\times2+3\times(-4)+2\times3}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}}=-\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

7. 设 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,2,2)$，求$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})$和$(2\vec{a}-\vec{b})$与$\vec{a}$的夹角$\theta$.(2016—2017)

解：$2\vec{a}-\vec{b}=2(2,1,-1)-(1,2,2)=(3,0,-4)$.

所以，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})=\dfrac{(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{3\times1+0\times2+(-4)\times2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=-\dfrac{5}{3}$.

$$\cos\theta=\frac{(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}}{|2\vec{a}-\vec{b}||\vec{a}|}=\frac{3\times2+0\times1+(-4)\times(-1)}{\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

则$(2\vec{a}-\vec{b})$与$\vec{a}$的夹角$\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

8. 求以$A(4,7,-1)$、$B(5,5,1)$和$C(3,7,-2)$为顶点的三角形的面积。(2016—2017)

解：因为$\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,-1)$，则

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-2&2\\-1&0&-1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}.$$

于是所求三角形的面积为

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=\frac{3}{2}.$$

9. 已知$\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$和$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$。(2015—2016)

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=2\times3\times\cos\dfrac{\pi}{3}=3.$

$$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$$

$$=4\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=4\left|\vec{a}\right|^2-4\times3+\left|\vec{b}\right|^2=4\times2^2-12+3^2=13.$$

10. 设α与β均为单位向量，其夹角为$\dfrac{\pi}{4}$，求以$\alpha+2\beta$与$2\alpha-\beta$为邻边的平行四边形的面积.(2014—2015)

解：因为

$$(\alpha+2\beta)\times(2\alpha-\beta)=\alpha\times2\alpha+\alpha\times(-\beta)+2\beta\times(2\alpha)+2\beta\times(-\beta)$$

$$=-\alpha\times\beta-4\alpha\times\beta=-5\alpha\times\beta\text{，}$$

故以$\alpha+2\beta$与$2\alpha-\beta$为邻边的平行四边形的面积

$$S=\left|(\alpha+2\beta)\times(2\alpha-\beta)\right|=5\left|\alpha\times\beta\right|=5\left|\alpha\right|\left|\beta\right|\sin(\alpha,\beta)=5\sin\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$