厦门大学《概率统计》课程

期末试题·答案

自律督导部

考试日期: 2016 （A） 信息学院自律督导部整理

一、选择题（共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1、 D

2、 A

$$E(X_i)=\frac{1}{\lambda},\ D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2},\ E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{n}{\lambda},D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{n}{\lambda^2}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}=\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

3、 C 若 X 与 Y 独立且均服从标准正态分布，则 A,B,C,D 都正确，但是未说明 X 与 Y 独立，则只能选 C。

4、 D

5、 B 依规定犯第二类错误，就是犯“存伪”的错误，即接收 H_0，H_0 不真。故应选（B)。

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

6、 1/12

7、 1/20，1/100，2

8、 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

9、 F， (10，5)。

10、 $\frac{2\sigma}{\sqrt{\text{n}}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\le L$，故$\text{n}\ge\frac{4\sigma^2}{L^2}Z_{\frac{\alpha}{2}}^2$

三、计算题（共 5 小题，每小题 12 分，总计 60 分）

11、 解：

(1)设

$$X_k=\begin{cases}1, 第k个元件正常工作\\0, 第k个元件损坏\end{cases}$$

又设X为系统正常运行时完好的元件数，于是$X=\sum_{k=1}^{100}X_k$.

由题意可知$X_k(k=1,2,...,100)$服从0-1分布，则

$$X=\sum_{k=1}^{100}X_k\sim B(100,0.9)$$

于是$E(X)=np=100*0.9=90, D(X)=npq=100*0.9*0.1=9$

故所求概率为

$$P(X>85)=1-P(X\le 85)=1-\Phi(\frac{85-90}{\sqrt{9}})=1-\Phi(-\frac{5}{3})=\Phi(\frac{5}{3})$$ （6 分）

$$=\Phi(1.67)=0.9525$$

(2)$P(X\ge 0.8n)=0.95, E(X)=0.9n, D(X)=0.09n$,而

$$P(X\ge 0.8n)=1-\Phi(\frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{0.09n}})=1-\Phi(\frac{-0.1n}{0.3\sqrt{n}})=\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}).$$ （6 分）

故$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})$=0.95，得$\frac{\sqrt{n}}{3}$=1.645，$n=24.35$,取$n=25$

12、解：（1）矩估计：$u_1=E(X)=\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3(1-\theta)^2=3-2\theta \quad \theta=\frac{3-u_1}{2}$

则有$\overline{\theta}=\frac{3-\overline{X}}{2}$，矩估计值为$\overline{\theta}=\frac{5}{6}$**。 （6分）**

（2）最大似然估计：

$$L(\theta)=P\{X_1=1\}P\{X_2=2\}P\{X_3=1\}$$
$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-\theta)^2=2\theta^3(1-\theta)^3$$
$$\ln L(\theta)=3\ln\theta+3\ln(1-\theta)+\ln 2$$ （6分）
$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}\xrightarrow[\text{令其等于0}]{}\overline{\theta}=\frac{1}{2}$$

13、解：

假设

H_0：$u=u_0(u_0=70)$

因为σ^2未知，选择统计量$U=\dfrac{\overline{X}-u_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

查表$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$　　（6分）

而$\left|\dfrac{\overline{X}-u_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\right|=\left|\dfrac{66.5-70}{\dfrac{15}{\sqrt{36}}}\right|=1.4$，因为$1.4\in(-2.0301,2.0301)$

故接受H_0，即可以认为学生考试的平均成绩为70分（6分）

14、 解：（1）10 个人的得分分别记为$X_1,X_2,\cdots X_{10}$，它们的联合概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{10})=\prod_{i=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\bar{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{10}\right),$$

$$P\{\bar{X}<\mu\}=\Phi\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma/\sqrt{10}}\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}.\qquad（6 分）$$

（2）若一人得奖的概率为p，则得奖人数$Y\sim b(10,p)$，此处p是随机选取一人，其考分X在 70 分以上的概率，因$X\sim N(62,25)$，故

$$p=P\{X>70\}=1-P\{X\le 70\}=1-\Phi\left(\frac{70-62}{\sqrt{25}}\right)$$
$$=1-\Phi(1.6)=1-0.9452=0.0548.$$

至少一人得奖的概率为

$$P\{Y\ge 1\}=1-(0.9452)^{10}=0.431.\qquad（6 分）$$

15、 解：本题需检验

（1）$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$　　（$\alpha=0.05$）.

（2）$H_0^{'}:\mu_1=\mu_2,H_1^{'}:\mu_1\ne\mu_2$　　（$\alpha=0.05$）.

今$n_1=10,n_2=10,\bar{x}_1=99.2,s_1^2=0.84,\bar{x}_2=98.9,s_2^2=0.77.$

（1）$s_1^2/s_2^2=1.09$，而$F_{0.025}(9,9)=4.03,F_{0.975}(9,9)=\dfrac{1}{4.03},$

$$\frac{1}{4.03}<1.09<4.03.$$

故能接受 H_0，认为两者方差相等。　　　　　（6 分）

（2）　$$s_w^2=\frac{9\times 0.84+9\times 0.77}{18}=0.805.$$

$$|t|=\frac{99.2-98.9}{\sqrt{0.805}\left(\sqrt{1/10+1/10}\right)}=0.748<t_{0.025}(18)=2.1009.$$

故接受 $H_0^{'}$，认为所需天数相同。　　　　　（6 分）

16、

证明：

(1) 因$X\sim F(n_1,n_2)$,故可设$X=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$,其中$U\sim\chi^2(n_1),V\sim\chi^2(n_2)$,　（5 分）

且U与V相互独立，于是$\dfrac{1}{X}=\dfrac{V/n_2}{U/n_1}\sim F(n_2,n_1)$.

(2)由上侧α分位数的定义知

$$P(X\ge F_{1-a}(n_1,n_2))=1-a,$$

$$P(\frac{1}{X}\le\frac{1}{F_{1-a}(n_1,n_2)})=1-a,$$

即$P(Y\le\dfrac{1}{F_{1-a}(n_1,n_2)})=1-a$,

$$1-P(Y>\frac{1}{F_{1-a}(n_1,n_2)})=1-a$$

$$P(Y>\frac{1}{F_{1-a}(n_1,n_2)})=a$$

而$P(Y\ge F_a(n_2,n_1))=a$.又因为Y为连续型随机变量，故　　（5 分）

$$P(Y\ge\frac{1}{F_{1-a}(n_1,n_2)})=a,$$

从而$F_{1-a}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_a(n_2,n_1)}$.