厦门大学《线性代数》课程试卷

信息 学院________系 2021 年级________专业

学年学期：212201 主考教师：线性代数教学组 A 卷（√）B 卷

注：A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，|A|表示方阵 A 的行列式，r(A)表示矩阵 A 的秩

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $|A|=($　　$)$。

(A) $(-1)^n n$　　(B) $(-1)^{n-1} n$　　(C) $(-1)^{n-1}(n-1)$　　(D) $(-1)^n(n-1)$

答案：C

将第 2、3、…、n 行加至第 1 行，则第 1 行均为 n-1。提取公因数 n-1 后，将第 1 行的-1 倍加到第 2、3、…、n 行，即可化为上三角式，则由下式：

$$|A|=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1)$$

2. 齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 的系数矩阵记为 A，若存在三阶矩阵 $B\neq O$ 使得 $AB=0$，则（　　）。

(A) $\lambda=-2$且$|B|=0$　　(B) $\lambda=-2$且$|B|\neq 0$

(C) $\lambda=1$且$|B|=0$　　(D) $\lambda=1$且$|B|\neq 0$

【答案】C

3. 已知 A 是三阶矩阵，且$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$，则$|A|=$ (　　)。

(A) 0　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 8

答案：（B）

分析：由$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$，有$(A-E)(A^2+A+E)=E$，即$A^3=2E$，所以$|A|^3=|A^3|=|2E|=2^3|E|=2^3$，所以$|A|=2$

4. 设 A、B 均为 2 阶矩阵，A^*、B^*分别为A、B的伴随矩阵，若$|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$的伴随矩阵为：

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$

答案：（B）

分析：$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}|A||B|=6$，则$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$可逆，

所以$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}=6\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O & 2\times 3B^{-1} \\ 3\times 2A^{-1} & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$

5. 如图所示，

有三个平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i,\quad i=1,2,3$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为A，B，则(　　)。

(A) $R(A)=2$，$R(B)=3$　　(B) $R(A)=1$，$R(B)=2$

(C) $R(A)=2$，$R(B)=2$　　(D) $R(A)=1$，$R(B)=1$

【答案】两个平面有交线，意味着不平行，从而系数矩阵的秩至少为 2。三个平面的交线两两平行，故没有公共交点。这说明线性方程组无解。选 A

6. 设 A 为$m \times n$矩阵，B 为$n \times l$矩阵，$B \neq 0$，如果有 AB=0，则矩阵 A 的秩为(　　)。

(A) $R(A) = n$　　(B) $R(A) < n$　　(C) 无法判断　　(D) $R(A) < m$

B

7. 下列结论错误的是(　　)。

(A) 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，则$|A^5 - 4A^3| = 0$

(B) 若$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，则$A * = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(C) 设$A_{3\times3}, B_{4\times4}$，且$|A| = 1, |B| = -2$，则$\big||B|A\big| = -8$

(D) 矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$的逆矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D

8. 设A, B为 n 阶实矩阵,下列不成立的是(　　)。

(A) $r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & AA^T \end{bmatrix}) = 2r(A)$　　(B) $r(\begin{bmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{bmatrix}) = 2r(A)$

(C) $r(\begin{bmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{bmatrix}) = 2r(A)$　　(A) $r(\begin{bmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{bmatrix}) = 2r(A)$

[答案]C

解析:

$$r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & AA^T \end{bmatrix}) = r(A) + r(AA^T) = r(A) + r(A) = 2r(A)$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & AA^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & B \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

$$r(\begin{bmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & B \\ O & E_n \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & A^T \end{bmatrix}) = r(A) + r(A^T) = 2r(A)$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & O \\ B & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & A^T \end{bmatrix}$$

$$r(\begin{bmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} E_n & O \\ B & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & A^T \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & A^T \end{bmatrix}) = r(A) + r(A^T) = 2r(A)$$

故 ABD 正确

9. 已知 A 是 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，且$A^3=E$，则$\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}^{98}$=(　　)。

(A) $\begin{bmatrix} A & E \\ O & A \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} A & O \\ E & A \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$

10. 设$A=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$，其中 a、b、c 为实数，则下列选项中不能使$A^{100}=E$的是(　　)。

(A) a=1,b=2,c=-1　　(B) a=1,b=-2,c=-1

(C) a=-1,b=2,c=1　　(D) a=-1,b=2,c=-1

答案：（D）

分析：记$P=\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}$，则$P^2=\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$，故$P^{98}=\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}^{49}=$
$\begin{bmatrix} -A^{49} & O \\ O & -A^{49} \end{bmatrix}$，又因为$A^{49}=(A^3)^{16}A=EA=A$，所以$\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}^{98}=\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$

二、填空题（每空格 5 分，共 30 分）

1. 已知 r($\mathbf{A}_{3\times3}$)=2，r(**AB**)=1，B=$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -a \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$，则 a=___________。

答案：0.5

2. 设 **A**=$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$，$\mathbf{P}_1$=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，$\mathbf{P}_2$=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求$(\mathbf{P}_1)^{2021}\mathbf{A}(\mathbf{P}_2)^{2021}$=___________。

答案：$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -8083 & 4044 \end{bmatrix}$

3. 设$C=B_{n\times m}A_{m\times n}$，且$n>m$，则$|C|=$___________。

0

4. 设 A 为 4 阶方阵，$|A|=3, A^*$为A的伴随矩阵，若将矩阵 A 的第 3 行与第 4 行交换得到 B，则$|BA^*|=$ ___________。

解：-c

5. 设 x_1,x_2,x_3,x_4 是四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+c=0$ 的根，则行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & x_3 \\ 5 & 7 & x_4 & 0 \end{vmatrix}$

___________。

6. 设 $A=(a_{ij})_{3*3}$，$|A|=2$，A_{ij} 表示 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式（$i,j=1,2,3$），则

$(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23})^2+(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23})^2+(a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23})^2=$

_______。

解：4

三、计算题（共 32 分）

1. 设矩阵 **A**=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且满足 **AX**+**E**=**A**^{2}+**X**，其中 **E** 为 3 阶单位矩阵，求 **X**。

答案：

X=$\begin{bmatrix} r & s & t+1 \\ r-3 & s+3 & t \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，其中 r，s，t 为任意常数.

解析：

AX+E=A^2+X => AX-X=A^2-E => (A-E)X=(A-E)(A+E),

A-E=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$-$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$=**B**，

可知 **B** 不可逆，

(A-E)(A+E)=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

将 **X** 和**(A-E)(A+E)**按列分块：

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$[α$_1$, α$_2$, α$_3$]=[β$_1$, β$_2$, β$_3$]$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

即**(A-E)**α$_i$=β$_i$，i=1,2,3.

解得

$\alpha_1=\begin{bmatrix} r \\ r-3 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix} s \\ s+3 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix} t+1 \\ t \\ 2 \end{bmatrix}$，

所以 $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} r & s & t+1 \\ r-3 & s+3 & t \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，其中 r，s，t 为任意常数.

2. 设 A, B 都是 3 阶矩阵, 其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，$AB-A+B=E$, 且 $B \neq E$,

$r(A+B)=3$, 求常数 a 的值。

[解析]:

$AB-A+B=E \Rightarrow (A+E)(B-E)=O \Rightarrow r(A+E)+r(B-E) \leq 3$

因为$r(A+B)=3=r[(A+E)+(B-E)] \leq r(A+E)+r(B-E) \leq 3$

故 $r(A+E)+r(B-E)=3$

又因为$B \neq E \Rightarrow r(B-E) \geq 1 \Rightarrow r(A+E) \leq 2$

又因为$r(A+E)=r\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \geq 2 \Rightarrow r(A+E)=2$

于是$|A+E|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=13-2a=0 \Rightarrow a=\dfrac{13}{2}$

3. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \quad x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + ax_3 + 15x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = b \end{cases}$$

a，b 取何值时，方程组无解？有惟一解？有无穷多解时，求出通解。

【解答】对增广矩阵施以初等行变换

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & a & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & a-6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & b-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -b-4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3}(b+8) \\ 0 & 0 & 2+a & 0 & \frac{2}{3}(1-b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}(b+5) \end{bmatrix},$$

可见，当 $a=-2$，且 $b \neq 1$ 时，$R(A)=3$，$R(B)=4$，方程组无解

当 $a \neq -2$ 时，$R(A)=R(B)=4$，方程组有惟一解；

当 $a=-2$，$b=-1$ 时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有无穷多解。

$$\mathbf{B} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

通解为

$$x=\begin{bmatrix}-8\\3\\0\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}(k\in\mathbf{R})$$

4. 计算 $D=\begin{vmatrix}1&0&0&0&a_4\\0&1&0&0&a_3\\0&0&1&0&a_2\\0&0&0&1&a_1\\b_4&b_3&b_2&b_1&1\end{vmatrix}$。

解： $D=1-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4$

5. 设五次多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}x+1&1&1&1&1\\1&x+1&1&1&1\\1&1&x+1&1&1\\1&1&1&x+1&1\\1&1&1&1&x+1\end{vmatrix}$，求（1） x^5 的系数；（2） x^4 的系数；（3）常数项。

解： $f(x)$ 是关于 x 的 5 次多项式 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5$。

行列式中含 x 的一般项只有一个： $(-1)^{t(12345)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}=(x+1)^5$。故 x^5 的系数为 1；

x^4 的系数为 5。

令 x 等于 0，得常数项为 $f(0)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{vmatrix}=0$

四、证明题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$ 是 n 阶矩阵，试证明 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$ 。

解：

证法一：用归纳法设 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 D_n

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确；

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确；

当 $n<k$ 时，命题正确。

当 $n=k$ 时，按第一列展开，得

$$
\begin{aligned}
D_k &= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21} \\
&= 2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} + a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} \\
&= 2aD_{k-1}-a^2D_{k-2} \\
&= 2aka^{k-1}-a^2(k-1)a^{k-2}=(k+1)a^k
\end{aligned}
$$

故命题正确。

证法二：化为上三角

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a & \frac{(n+1)a}{n}\end{vmatrix}$$

$$=2a\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{4}{3}a\cdots\frac{n+1}{n}a=(n+1)a^n$$

2. 设矩阵 A 和 B 为同阶方阵，$\mathrm{A}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}=-\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$，证明$7\mathrm{AB}-2\mathrm{BA}$是对称矩阵的充要条件是$\mathrm{AB}+\mathrm{BA}=\mathrm{O}$, 此处 O 表示全 0 矩阵。

证：$(7\mathrm{AB}-2\mathrm{BA})^{\mathrm{T}}=7\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}-2\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$

由于$\mathrm{A}=\mathrm{A}^{\mathrm{T}},\mathrm{B}=-\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$，所以

$7\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}-2\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}=-7BA+2AB$

$7\mathrm{AB}-2\mathrm{BA}$为对称矩阵，则有$7\mathrm{AB}-2\mathrm{BA}=-7BA+2AB$，所以得$\mathrm{AB}+\mathrm{BA}=\mathrm{O}$

3. 证明：当$a_1,a_2,\cdots a_n$互不相等时，方程组无解.

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-2}x_n=a_1^{n-1}\\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n-2}x_n=a_2^{n-1}\\ \cdots\\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-2}x_n=a_n^{n-1}\end{cases}$$

证明：当$a_1,a_2,\cdots a_n$互不相等时，方程组无解.

【证明】

当$a_i(i=1,2,\cdots,n)$互不相同时，增广矩阵（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}$）的行列式正好是范德蒙德行列式，即

$$\det(\mathbf{A},\mathbf{b}) = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} \left(a_i - a_j\right) \neq 0$$

故（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}$）的秩$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$ ，而$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})\leqslant$ n－１ ，于是

而$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})\neq$ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，可证得原方程组无解.