历届试题选（二重积分的计算）

1. 设有平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,-a\le x\le a, x\le y\le a\}$， $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a, x\le y\le a\}$，则

$\iint_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________。(2004—2005 学年)

（A） $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　　　（B） $2\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（C） $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　　　（D） 0.

答案：记 $D_2=\{(x,y)\,|\,-a\le x\le 0, x\le y\le -x\}$， $D_3=\{(x,y)\,|\,0\le y\le a, -y\le x\le y\}$，则 $D=D_2\cup D_3$.

故 $\iint_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

注意到 D_2 关于 x 轴对称，且 $f(x,y)=xy+\cos x\sin y$ 满足 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则

$$\iint_{D_2}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

D_3 关于 y 轴对称，且 $g(x,y)=xy$ 满足 $g(-x,y)=-g(x,y)$， $h(x,y)=\cos x\sin y$ 满足 $h(-x,y)=h(x,y)$，则

$$\iint_{D_3}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \iint_{D_3}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

故 $\iint_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

故选（A）.

2. 设区域 D 为 $x^2+y^2\le R^2$，则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______________。(2004—2005 学年)

解：因为区域 D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

故
$$\begin{aligned}\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\frac{1}{a^2}\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{b^2}\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a^2}\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{b^2}\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

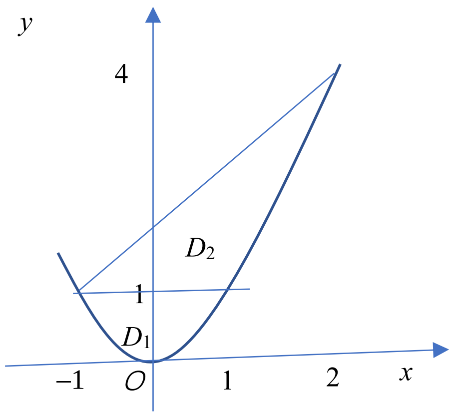
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})R^4.$$

答案：$\frac{\pi}{4}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})R^4.$

3. 改变积分次序并求值: $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x\sin y\mathrm{d}x+\int_1^4\mathrm{d}y\int_{y-2}^{\sqrt{y}}x\sin y\mathrm{d}x.$ （2004—2005 学年）

解：区域 D_1 和 D_2 如图所示，则



$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x\sin y\mathrm{d}x+\int_1^4\mathrm{d}y\int_{y-2}^{\sqrt{y}}x\sin y\mathrm{d}x$$
$$=\iint_{D_1}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_1\cup D_2}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x+2}x\sin y\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^2 x[\cos x^2-\cos(x+2)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^2 x\cos x^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^2 x\cos(x+2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\sin x^2\Big|_{-1}^2-[x\sin(x+2)\Big|_{-1}^2-\int_{-1}^2\sin(x+2)\mathrm{d}x]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin4-\sin1)-[2\sin4+\sin1+\cos(x+2)\Big|_{-1}^2]$$
$$=-\frac{3}{2}(\sin4+\sin1)+\cos1-\cos4.$$

4. 计算 $\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 所围闭区域. （2004—2005 学年）

解：令 $\begin{cases}x=2r\cos\theta\\ y=3r\sin\theta\end{cases}$，则 $|J|=2\cdot3\cdot r=6r$，故

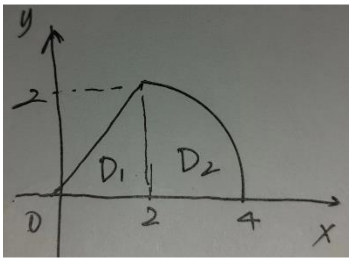
$$\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot6r\mathrm{d}r$$

$$=-6\pi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}(1-r^2)=-6\pi\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=4\pi.$$

5. 交换积分次序 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$ ____________。（2005—2006 学年）

解：本题中的 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 可改写成 $(x-2)^2+y^2=4$，即

$$x=2+\sqrt{4-y^2}.$$



如图所示，D_1 为 $x=0$，$x=2$，$y=0$，$y=x$ 所围成的区域，D_2 为 $x=2$，$x=4$，$y=0$，$y=\sqrt{4x-x^2}$ 所围成的区域.

于是，

$$\begin{aligned}&\int_0^2 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_2^4 dx\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy\\&=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy\\&=\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dy\int_y^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx\end{aligned}$$

6．设平面区域 D 由正方形 $|x|+|y|=1$ 所围成，则 $\iint_D(1+x+y)dxdy=$________。(2005—2006 学年)

解：因为 D 是菱形区域，关于 x 轴对称，而 $f(x,y)=y$ 满足 $f(x,-y)=-f(x,y)$，所以，$\iint_D ydxdy=0$.

同样，D 关于 y 轴对称，而 $g(x,y)=x$ 满足 $g(-x,y)=-g(x,y)$，所以，$\iint_D xdxdy=0$.

因此，$\iint_D(1+x+y)dxdy=\iint_D dxdy=D$ 的面积，因此，

$$\iint_D(1+x+y)dxdy=2.$$

7． 设 $f(x)$ 是区域 $D:1\le x^2+y^2\le 4$ 上的连续函数，则 $\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ 等于（　　）。

(A) $2\pi\int_1^2 xf(x)dx$；　　(B) $2\pi\left(\int_0^4 xf(x)dx-\int_0^2 xf(x)dx\right)$；

(C) $2\pi\int_1^2 f(x)dx$；　　(D) $2\pi\left(\int_0^4 f(x)dx-\int_0^2 f(x)dx\right)$.　(2005—2006 学年)

解：利用极坐标变换，可得

$$\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 rf(r)dr=2\pi\int_1^2 xf(x)dx.$$

故答案是（A）.

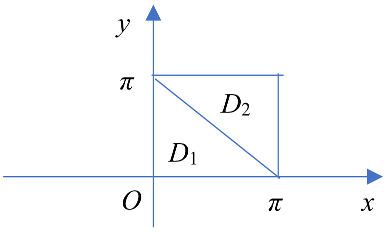
8．计算二重积分 $\iint_D|\sin(x+y)|dxdy$，其中 $D:0\le x\le\pi,0\le y\le\pi$.

(2005—2006 学年)

解：将区域 D 分成两个区域，其中

$$D_1=\{(x,y)|0\le y\le\pi-x,0\le x\le\pi\}，\quad D_2=\{(x,y)|\pi-x\le y\le\pi,0\le x\le\pi\}$$

于是，



$$\iint_D|\sin(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi-x}\sin(x+y)\mathrm{d}y-\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\pi-x}^{\pi}\sin(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}(\cos x-\cos\pi)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}(\cos\pi-\cos(\pi+x))\mathrm{d}x$$

$$=\pi+\pi=2\pi.$$

9. 设 $D:x^2+y^2\le y,x\ge 0$， $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，求 $f(x,y)$. (2005—2006 学年)

解：令 $A=\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，注意： A 是常数，于是 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A$.

两边积分，得 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}A\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

利用极坐标变换，有

$$\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}r\mathrm{d}r=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}).$$

10. 设 $f(x)$ 为连续函数， $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$__________。

(A) $2f(2)$； (B) $f(2)$； (C) $-f(2)$； (D) 0。 (2006—2007 学年)

解：设 D 是由 $y=1$， $y=t$， $x=y$， $x=t$ 围成的区域，则

$$F(t)=\iint_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

则 $F'(t)=(t-1)f(t)$，故 $F'(2)=f(2)$.

答案是 (B) .

11.设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，则 $I=\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________. (2006—2007 学年)

解：将区域划分为两个区域：

$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x,0\le x\le 1\right\}$， $D_2=\left\{(x,y)\middle|x\le y\le 1,0\le x\le 1\right\}$.

于是， $I=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\mathrm{e}-1.$$

12.求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 与 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体体积。(2006—2007 学年)

解：这是一个曲顶柱体的体积问题. 先求两曲面交线在 xoy 面上的投影.

联立方程 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$，消去 z，得 $x^2+2y^2=6-2x^2-y^2$，即 $x^2+y^2=2$.

记 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2\}$，则所求立体体积为

$$V=\iint\limits_D[6-2x^2-y^2-(x^2+2y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint\limits_D(2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用极坐标变换，有

$$V=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2-r^2)r\mathrm{d}r=6\pi(r^2-\frac{1}{4}r^4)\Big|_0^{\sqrt{2}}=6\pi.$$

13. 计算 $I=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}(ax+by+c)^2\,\mathrm{d}y$，其中 R，a，b，c 都是不为零的常数，$R>0$.(2006—2007 学年)

解：记 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le R^2\}$，

$$I=\iint\limits_D(ax+by+c)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(a^2x^2+b^2y^2+c^2+2abxy+2acx+2bcy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D(a^2x^2+b^2y^2+c^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_D(abxy+acx+bcy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为区域 D 关于 x 轴对称，则 $\iint\limits_D(abxy+bcy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D by(ax+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

D 关于 y 轴对称，则 $\iint\limits_D acx\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

D 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,因此，

$$I=a^2\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+b^2\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+c^2\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(a^2+b^2)\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+c^2\cdot\pi R^2$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+c^2\cdot\pi R^2$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r\mathrm{d}r+\pi R^2c^2$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}R^4+\pi R^2c^2$$

$$=\frac{a^2+b^2}{4}\pi R^4+\pi R^2c^2.$$

14. D 是直线 $y=x$， $y=0$， $x=\pi$ 所围成的闭区域，则 $\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.（2007—2008 学年）

解：$\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2$.

15. 设 $I_1=\iint\limits_D\frac{x+y}{4}\mathrm{d}\sigma$， $I_2=\iint\limits_D\sqrt{\frac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$， $I_3=\iint\limits_D\sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D: $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$，则（　　）。　(2007—2008 学年)

A、 $I_1<I_2<I_3$；　　B、$I_2<I_3<I_1$；　　C、 $I_1<I_3<I_2$；　　D、$I_3<I_2<I_1$.

解：注意到点 $(2,2)$ 在圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 上.

对方程 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 两边对 x 求导，得 $2(x-1)+2(y-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，将点 $(2,2)$ 代入，可得

$$k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(2,2)}=-1.$$

于是，圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 在点 $(2,2)$ 处的切线方程为 $y-2=-(x-2)$，即 $x+y=4$.

因此，圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 在切线 $x+y=4$ 的下方，故在区域 D 上， $x+y\le 4$.

同理，圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y-0=-(x-0)$，即圆 $x+y=0$.

因此，圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 在切线 $x+y=0$ 的上方，故在区域 D 上， $x+y\ge 0$.

于是，在区域 D 上， $\frac{x+y}{4}\le\sqrt{\frac{x+y}{4}}\le\sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$.

故 $I_1<I_2<I_3$，选（A）

16. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$，则 $\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=$（　　）(2008—2009 学年)

(A) $\frac{4}{3}\pi$; (B) $\frac{2}{3}\pi$ (C) $\frac{1}{3}\pi$ (D) $\frac{1}{6}\pi$.

解：利用极坐标变换，

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}(-\frac{1}{3})(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

答案：C

17．计算二重积分 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\pi\}$.（2011—2012学年）

解：利用极坐标变换，有

$$I=\mathrm{e}^{\pi}\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2}\sin r^2\cdot r\mathrm{d}r.$$

令$t=r^2$，则$r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$，于是，

$$I=\mathrm{e}^{\pi}\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\pi\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t.$$

因为 $\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-t}\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\mathrm{e}^{-t})\cos t\mathrm{d}t$

$$=-[\mathrm{e}^{-t}\cos t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}(-\sin t)\mathrm{d}t]$$

$$=\mathrm{e}^{-\pi}+1-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t,$$

所以，$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\pi}+1)$.

故 $I=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\pi}(\mathrm{e}^{-\pi}+1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\pi}.$