厦门大学《线性代数》课程期中试卷

信息学院________系 2017 年级________专业

学年学期：171801 主考教师：线性代数教学组 A 卷（√）B 卷

一、单项选择题（每小题 2 分，共 14 分）

1. 已知 $2n$ 阶行列式 D 的某一列元素及其余子式都等于 a，则 D=（　A　）。

（A）0　　（B）a^2　　（C）$-a^2$　　（D）na^2

2. 若 $R(A)=R(B)=r$，则必有（　C　）。

（A）A 与 B 等价

（B）A 与 B 的标准型矩阵相同

（C）A 与 B 的行阶梯型矩阵的非零行数相同

（D）A 与 B 的所有 $r-1$ 阶子式都不为零

3. 已知矩阵 A 和 B 均为对称矩阵，则以下为对称矩阵，除了（　B　）。

（A）$A-B$　　（B）AB　　（C）$\boldsymbol{2A^2+3A+4E}$　　（D）$\boldsymbol{A^*+B^*}$

4. 设 A 是可逆矩阵，将 A 的第 2 行的 3 倍加到第 1 行得 B，则（　D　）。

（A）将 $\boldsymbol{A}^*$的第 2 列的 3 倍加到第 1 列得到 $\boldsymbol{B}^*$

（B）将 $\boldsymbol{A}^*$的第 2 列的（−3）倍加到第 1 列得到 $\boldsymbol{B}^*$

（C）将 $\boldsymbol{A}^*$的第 1 列的 3 倍加到第 2 列得到 $\boldsymbol{B}^*$

（D）将 $\boldsymbol{A}^*$的第 1 列的（−3）倍加到第 2 列得到 $\boldsymbol{B}^*$

5. 下列叙述一定正确，除了（　A　）。

（A）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq \boldsymbol{0}$

（B）若 A、B、C 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A^{-1}C^{-1}B^{-1}}=\boldsymbol{E}$

（C）若 A、B 均为 n 阶不可逆矩阵，则 AB 必不可逆

（D）若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{R(A)\geq 1}$

6. 若 A 为 n 阶可逆矩阵（n≥2），则 $(A^{-1})^{*}=$（　　D　　）。

（A）$|A|A^{-1}$　　（B）$|A|A$　　（C）$|A^{-1}|A^{-1}$　　（D）$|A^{-1}|A$

7. 以下是方阵 A 可逆的等价命题，除了（　　B　　）。

（A）A 行满秩　　（B）A 的伴随矩阵 A^{*} 存在

（C）A 与 E 等价　　（D）存在矩阵 B，使 $AB=E$ $AB=E$

二、填空题（每空格 3 分，共 18 分）

1. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{a^n+(-1)^{n+1}b^n}$.

2. 设 $\alpha=(1,2,3)^T$，$\beta=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $A^n=\underline{3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}}$.

3. 设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -E_{n-1} \\ -1 & 0^T \end{pmatrix}$，则 $\det A=$ _-1______.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C=AB^{-1}$，则矩阵 C^{-1} 中，第 3 行第 2 列的元素是 $\underline{\frac{1}{2}}$.

5. 设四阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

三、计算题（共 50 分）

1. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$，求 $\mathbf{B}^{2010}-2\mathbf{A}^2$。

解：$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$B^2=P^{-1}A^2P=-E$, 所以

$B^{2010}-2A^2=E-2E=-E$.

2. 计算下列行列式：

（1）$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\end{vmatrix}$

$$\underline{\underline{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5}}\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\15&3&4&5&1\\15&4&5&1&2\\15&5&1&2&3\\15&1&2&3&4\end{vmatrix}\begin{matrix}r_2-r_1\\r_3-r_1\\r_4-r_1\\\underline{\underline{r_5-r_1}}\end{matrix}\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&2&2&-3&-3\\0&3&-2&-2&-2\\0&-1&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix}r_2+r_5\\r_3+2r_5\\\underline{\underline{r_4-2r_5}}\end{matrix}\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\0&0&0&0&-5\\0&0&0&-5&-5\\0&5&0&0&0\\0&-1&-1&-1&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}-r_2/5\\-r_3/5\\r_4/5\\\underline{\underline{-(r_5+r_3+r_4)}}\end{matrix}-5^3\times\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=-(-1)^{t(15423)}5^3\times15=5^4\times3=1875$$

（2）$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}$

方法一：

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}=\prod_{4\ge i\ge j\ge1}(x_i-x_j)$$

$$=(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1)$$

$$=2\times3\times2=12$$

方法二:

$$\xlongequal{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ r_4-r_1}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&3&8&15\\0&7&26&63\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{r_3-3r_2\\ r_4-7r_2}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&2&6\\0&0&12&42\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-6r_3}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&2&6\\0&0&0&6\end{vmatrix}=12$$

3. 设 A、B、C 为 n 阶方阵，$|A|=1$，$|B|=2$，计算$\left|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{T}(\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}+2\mathbf{E})^{T}-[(\mathbf{C}^{-1})^{T}\mathbf{A}]^{-1}\right|$。

解：$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E})^{T}-[(\boldsymbol{C}^{-1})^{T}\boldsymbol{A}]^{-1}$

$$=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}[(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1})^{T}+2\boldsymbol{E}]-\boldsymbol{A}^{-1}[(\boldsymbol{C}^{-1})^{T}]^{-1}$$

$$=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}[(\boldsymbol{B}^{-1})^{T}\boldsymbol{C}^{T}+2\boldsymbol{E}]-\boldsymbol{A}^{-1}[(\boldsymbol{C}^{-1})^{-1}]^{T}$$

$$=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}(\boldsymbol{B}^{-1})^{T}\boldsymbol{C}^{T}+2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{T}=2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T},$$

所以$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E})^{T}-[(\boldsymbol{C}^{-1})^{T}\boldsymbol{A}]^{-1}\right|=\left|2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{T}\right|=2^{n}\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left|\boldsymbol{B}^{T}\right|=2^{n+1}.$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&-3\\-3&2&-5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&\cancel{3/2}\\-2&1&-3\end{pmatrix}$ 7/2，求 X 使 $X(3E+A)=2B$.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{3}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\\ \mathbf{2}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&-3\\-3&2&-2\\2&4&7\\-4&2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&-3\\-5&2&-2\\-2&4&7\\-6&2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-3\\-5&12&-2\\-2&8&7\\-6&14&-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\-5&6&3\\-2&4&9\\-6&7&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&6&21\\-2&4&21\\-6&7&21\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&6&1\\-2&4&1\\-6&7&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3&-2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \mathbf{2}\boldsymbol{B}(\mathbf{3}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 2 & 6 & a & 20 \\ 5 & 12 & 3a+5 & 44-2b \end{pmatrix}$，求 $R(A)$。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 2 & 6 & a & 20 \\ 5 & 12 & 3a+5 & 44-2b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 2 & a-6 & 12 \\ 0 & 2 & 3a-10 & 24-2b \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 2 & a-6 & 12 \\ 0 & 4 & 3a-14 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 2 & a-6 & 12 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & a-6 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & b \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-6 \end{pmatrix}$$

当 a=2 且 b=6 时，R（A）=2；
当 a=2 且 b≠6 或者 a≠2 且 b=6 时，R（A）=3；
当 a≠2 且 b≠6 时，R（A）=4。

四、证明题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 设 A，B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明 $A\sim B$ 的充要条件是 $R(A)=R(B)$.

证 先证明：若 A 经一次初等行变换变为 B，则 $R(A)\le R(B)$.

设 $R(A)=r$，且 A 的某个 r 阶子式 $D_r\neq 0$.

当 $A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$ 或 $A\xrightarrow{r_i\times k}B$ 时，

在 B 中总能找到与 D_r 相对应的子式 $\overline{D}_r$,.

由于 $\overline{D}_r=D_r$ 或 $\overline{D}_r=-D_r$ 或 $\overline{D}_r=kD_r$，

因此 $\overline{D}_r\neq 0$，从而 $R(B)\ge r$.

当$A \xrightarrow{r_i+kr_j} B$时，分三种情况讨论：

（1）D_r中不含第 i行；

（2）D_r中同时含第 i行和第 j行；

（3）D_r中含第 i行但不含第 j行；

对 (1),(2) 两种情形，显然 B 中与 D_r 对应的子式 $\overline{D}_r = D_r \neq 0$,故 $R(B) \geq r$.

对情形(3)， $\overline{D}_r = \begin{vmatrix} \vdots \\ r_i + kr_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} \vdots \\ r_j \\ \vdots \end{vmatrix} = D_r + k\hat{D}_r$,

若$\hat{D}_r \neq 0$, 因$\hat{D}_r$中不含第i行，可知A中有不含第i行的r阶非零子式, $\therefore \quad R(B) \geq r$.

若$\hat{D}_r = 0$, 则 $\overline{D}_r = D_r \neq 0$,也有 $R(B) \geq r$.

故，若A经一次初等行变换变为B，则$R(A) \leq R(B)$.

又由于B也可经一次初等变换变为A,故也有$R(B) \leq R(A)$.

因此,$R(A) = R(B)$.

经一次初等行变换矩阵的秩不变，即可知经有限次初等行变换矩阵的秩仍不变.

下面证明：设A经初等列变换变为B,也有$R(A) = R(B)$.

设A经初等列变换变为B,则A^T经初等行变换变为B^T

$\because \quad R(A^T) = R(B^T)$, 且 $R(A) = R(A^T), R(B) = R(B^T)$,

$\therefore \quad R(A) = R(B)$.

综上,若 A 经有限次初等变换变为 B(即 $A \sim B$),则 $R(A) = R(B)$. 证毕

上页 下页 返回

2. 设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$为n阶可逆矩阵，并且每行的元素之和均为常数C，证明A^{-1}的每行元素之和均为$\dfrac{1}{C}$.

证明：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ \vdots \\ C \end{pmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，两边左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

显然 $C \neq 0$，故 $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

此式说明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 各行元素之和均为 $\frac{1}{C}$

优秀范例

$(a_{n1} \quad a_{n2} \quad \cdots \quad a_{nn})$

的每行元素之和均为 $\frac{1}{C}$.

证明：由题意知

$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=C$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

则 A^{-1} 中的第 i 行元素和为

$\frac{A_{1i}}{|A|}+\frac{A_{2i}}{|A|}+\cdots+\frac{A_{ni}}{|A|}$

又 $\because |A| = C\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (按第1列展开)

$= CA_{11}+CA_{21}+\cdots+CA_{n1}$

同理可得（把元素都加到第 i 列）

$|A| = CA_{1i}+CA_{2i}+\cdots+CA_{ni}$

$\therefore \frac{A_{1i}}{|A|}+\frac{A_{2i}}{|A|}+\cdots+\frac{A_{ni}}{|A|}$

$=\frac{A_{1i}+A_{2i}+\cdots+A_{ni}}{|A|}$

$=\frac{A_{1i}+A_{2i}+\cdots+A_{ni}}{C(A_{1i}+A_{2i}+\cdots+A_{ni})}$

$=\frac{1}{C}$

即 A^{-1} 的每行元素之和均为 $\frac{1}{C}$

证毕

3. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-2A-3E=O$，证明 $R(A+\cancel{2}E)+R(A-3E)=n$.

【证明】

由 $A^2-2A-3E=(A+E)(A-3E)=O$

【性质8】 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $R(A)+R(B)\le n$.

可得 $R(A+E)+R(A-3E)\le n$

又因为 $R(A-3E)=R(3E-A)$

【性质6】 $R(A+B)\le R(A)+R(B)$.

可得 $R(A+E)+R(A-3E)=R(A+E)+R(3E-A)\ge R(4E)\ge n$

故，可证 $R(A+E)+R(A-3E)=n$