



厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷解答

_____学院_____系_____年级_____专业

试卷类型: (理工类 A 卷)

考试时间: 2022. 4. 23

一、填空题: (每小题 4 分, 共 24 分)

1. 已知向量 $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (2, -3, 1)$, $\vec{c} = (1, -2, 0)$, 则 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \underline{-2}$ 。
2. 将 xOz 坐标面上抛物线的一段 $z = x^2$ ($1 \leq x \leq 2$) 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为 $z = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 4$, 该旋转曲面在 xOy 坐标面上的投影为 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$ 。
3. 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^x$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^x$ 是某个二阶常系数非齐次线性微分方程的三个特解, 则该方程的通解为 $y = xe^x + C_1e^x + C_2e^{2x}$ 。
4. 设 $x = -t \cos 2t$ 是无阻尼强迫振动方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 4 \sin pt$ 的一个特解, 其中 $k > 0, p$ 为常数, 则该振动系统的角频率 $k = \underline{2}$, 干扰力的角频率 $p = \underline{2}$ 。
5. 设二元函数 $z = \frac{x \cos y + y \cos x}{1 + \cos x + \cos y}$, 则 $dz|_{(0,0)} = \underline{\frac{1}{3}(dx + dy)}$ 。
6. 函数 $u = x^2 + y^2 + z$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿着椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ 在该点的外法方向的方向导数为 $\underline{\frac{7}{6}\sqrt{6}}$ 。

二、(本题 8 分) 求过点 $(1, 1, 1)$ 且通过直线 $x = y = 2z$ 的平面方程。

解: 取直线 $x = y = 2z$ 上的一点 $(0, 0, 0)$, 通过点 $(0, 0, 0)$ 和 $(1, 1, 1)$ 的直线的一个方向向量为

$\vec{s}_1 = (1, 1, 1)$, 直线 $x = y = 2z$ 的一个方向向量为 $\vec{s}_2 = (2, 2, 1)$, 所求平面的一个法向量为

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0), \text{ 因此该平面方程为 } -(x-1) + (y-1) = 0, \text{ 即 } x - y = 0.$$

三、(每小题 9 分, 共 18 分) 求解下列微分方程:

1. 求微分方程 $xy' = -\sqrt{x^2 + y^2} + y$ ($x > 0$) 的通解;

解: 原微分方程变形为 $y' = -\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入得

$u + x \frac{du}{dx} = -\sqrt{1 + u^2} + u$, 整理得 $-\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{x} dx$, 从而 $-\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{1}{x} dx$, 进一步有

$-\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln x + \ln C$, 因此 $\sqrt{1 + u^2} - u = Cx$, 故 $2Cxu = 1 - C^2x^2$, 即原微分方程的通解为 $y = \frac{1}{2C} - \frac{1}{2}Cx^2$ 。

2. 求满足初始条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$ 的微分方程 $y'' - \frac{1}{1+x}y' = 8(x+1)^2$ 的特解。

解: 令 $P(x) = y'$, 则原微分方程为 $\frac{dP}{dx} - \frac{1}{1+x}P = 8(x+1)^2$, 解得

$$P = e^{\int \frac{1}{1+x} dx} (C_1 + 8 \int (x+1)^2 e^{-\int \frac{1}{1+x} dx} dx) = (1+x)[C_1 + 4(x+1)^2] = C_1(1+x) + 4(x+1)^3。$$

又 $P(0) = y'(0) = 4$, 得 $C_1 = 0$, 因此 $y' = 4(x+1)^3$, 从而 $y = (x+1)^4 + C_2$, 又 $y(0) = 0$, 得 $C_2 = -1$, 所以所求的特解为 $y = (x+1)^4 - 1$ 。

四、(本题 8 分) 设曲线 L 的一般方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$, 试将此一般方程化为参数方程,

并求出该曲线在点 $(1, 1, \sqrt{2})$ 处的切线方程。

解: 令 $x = 1 + \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则 $z = \sqrt{4 - (1 + \cos \theta)^2 - \sin^2 \theta} = \sqrt{2(1 - \cos \theta)} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$,

因此曲线 L 的参数方程可为 $x = 1 + \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $z = 2 \sin \frac{\theta}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。

在点 $(1, 1, \sqrt{2})$ 处, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。所以该曲线在点 $(1, 1, \sqrt{2})$ 处的一个切向量为

$\vec{s} = (-\sin \theta, \cos \theta, \cos \frac{\theta}{2})|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = (-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 故所求的切线方程为 $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 。

五、(本题 9 分) 验证 $u(x, y, z, t) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$ ($t > 0$) 为热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ 的解, 其

$$\text{中 } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

$$\text{证: } \frac{\partial u}{\partial t} = \left(-\frac{3}{2t} + \frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2}\right) \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{2t} \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right) \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}.$$

由对称性, 得 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{y^2}{4t^2}\right) \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{z^2}{4t^2}\right) \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$ 。因此

$$\Delta u = \left(-\frac{3}{2t} + \frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2}\right) \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}, \quad \text{故 } \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

六、(本题 12 分) 判别二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处: (1) 是否

连续? (2) 一阶偏导数是否存在? (3) 是否可微? 请给出判定理由。

解: (1) 由于当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, 所以

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续。

$$(2) \quad f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 0}{x} = 1, \quad f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \quad \text{故}$$

$f(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处一阶偏导数存在。

$$(3) \text{注意到 } \frac{\Delta f - f_x(0, 0)\Delta x - f_y(0, 0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\Delta x((\Delta x)^2 - (\Delta y)^2) - \Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{-2\Delta x(\Delta y)^2}{(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})^3}$$

因为 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0^+ \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{-2\Delta x(\Delta y)^2}{(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})^3} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \neq 0$, 因此 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微。

七、(本题 11 分) 设方程 $x^2 + y^2 - 2yz - z^2 + 2 = 0$ 确定了二元函数 $z = z(x, y)$, 试求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

解: 方程两边分别对 x 和 y 求导, 则
$$\begin{cases} 2x - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 2y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

在上式中令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得 $\begin{cases} x = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$, 代入原方程求得

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 0 \\ y = z = -1 \end{cases}, \text{ 故所有可能极值点为 } (0, 1) \text{ 或 } (0, -1)。$$

由 (*) 式, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-z}{y+z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y+z} - \frac{x}{(y+z)^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - (\frac{\partial z}{\partial x})^2}{y+z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-x}{(y+z)^2} (1 + \frac{\partial z}{\partial y}) = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x} (1 + \frac{\partial z}{\partial y})}{y+z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1 - \frac{\partial z}{\partial y}}{y+z} - \frac{y-z}{(y+z)^2} (1 + \frac{\partial z}{\partial y}) = -\frac{1 - \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} (1 + \frac{\partial z}{\partial y})}{y+z},$$

在 $(0, 1, 1)$, $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \big|_{(0,1,1)} = \frac{1}{2}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \big|_{(0,1,1)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \big|_{(0,1,1)} = \frac{1}{2}$, 从而

$$AC - B^2 = \frac{1}{4} > 0, A > 0, \text{ 因此, } z = z(x, y) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 取得极小值 } 1。$$

在 $(0, -1, -1)$, $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \big|_{(0,-1,-1)} = -\frac{1}{2}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \big|_{(0,-1,-1)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \big|_{(0,-1,-1)} = -\frac{1}{2}$, 从而

$$AC - B^2 = \frac{1}{4} > 0, A < 0, \text{ 因此, } z = z(x, y) \text{ 在 } (0, -1) \text{ 取得极大值 } -1。$$

八、(本题 10 分) 已知 $f(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 。若 $f(x, 2x) = x$ 和

$$f_1'(x, 2x) = x^3, \text{ 求 } f_{11}''(x, 2x)。$$

解: 对 $f(x, 2x) = x$ 两端关于 x 求导, 有 $f_1'(x, 2x) + 2f_2'(x, 2x) = 1$ 。

将 $f_1'(x, 2x) = x^3$ 代入, 有 $f_2'(x, 2x) = \frac{1-x^3}{2}$, 然后两端关于 x 求导, 得

$$f_{21}''(x, 2x) + 2f_{22}''(x, 2x) = -\frac{3x^2}{2} \quad (\text{I})$$

对 $f_1'(x, 2x) = x^3$ 两端关于 x 求导, 得

$$f_{11}''(x, 2x) + 2f_{12}''(x, 2x) = 3x^2 \quad (\text{II})$$

又由于 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, 且 $f_{12}''(x, 2x) = f_{21}''(x, 2x)$, 联立 (I) 和 (II), 则有 $f_{11}''(x, 2x) = -2x^2$ 。