厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2020.11.22

一、求下列函数极限（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+x})(\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x})$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{x-1}{x^2+x}e^{1-x}(e^{2x}-1)]$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{x-1}{x^2+x}e^{1-x}\cdot 2x)=\lim_{x\to 0}(\frac{2(x-1)}{x+1}e^{1-x})=\frac{2(0-1)}{0+1}e^{1-0}=-2e$$

2. $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$；

解法一：令 $t=\pi-\arccos x$，则当 $x\to -1^+$ 时，$t\to 0^+$，且 $x=-\cos t$。由复合函数极限运算法则得

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1-\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{\frac{1}{2}t^2}$$

$$=2$$

解法二：$\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{2(\pi-\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{2}{-x}=2$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$。

解： $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)$

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2}+2(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7x^4}{12}}{x^4}=\frac{7}{12}$$

二、求下列函数的导数或微分（每小题 8 分，共 16 分）

1. 求 $y=\arctan\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$ 的一阶导数；

解： 令 $u=\sqrt{1-x^2}$，则 $y=\arctan u+\dfrac{1}{2}[\ln(1+u)-\ln(1-u)]$。

从而 $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{1+u^2}+\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{u+1}-\dfrac{1}{u-1})=\dfrac{1}{u^2+1}-\dfrac{1}{u^2-1}=\dfrac{-2}{(u^2+1)(u^2-1)}$，

$\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$。

因此 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-2}{(u^2+1)(u^2-1)}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2}{(x^3-2x)\sqrt{1-x^2}}$

2. 设方程 $2^{xy}=x^2+y$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $dy|_{x=0}$；

解： 方程两边微分，从而

$$d(2^{xy})=d(x^2+y)$$

从而 $2^{xy}\ln 2(ydx+xdy)=2xdx+dy$，把 $x=0,\ y=1$ 代入，解得

$$dy|_{x=0}=\ln 2\,dx$$

三、（8 分）设 $f(x)=(x^2+x+1)\cos^2\dfrac{x}{2}$, 求 $f^{(10)}(0)$。

解： 方程 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)+\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)\cos x$，由莱布尼兹公式，得

$$f^{(10)}(x)=\frac{1}{2}C_{10}^{0}(\cos x)^{(10)}\cdot(x^2+x+1)+\frac{1}{2}C_{10}^{1}(\cos x)^{(9)}\cdot(x^2+x+1)'$$

$$+\frac{1}{2}C_{10}^{2}(\cos x)^{(8)}\cdot(x^2+x+1)'',$$

$$f^{(20)}(x)=\frac{1}{2}\cos(x+\frac{10\pi}{2})\cdot(x^2+x+1)+5\cos(x+\frac{9\pi}{2})\cdot(2x+1)+45\cos(x+\frac{8\pi}{2})$$

$$f^{(20)}(0)=\frac{1}{2}\cos(5\pi)+5\cos(\frac{9\pi}{2})+45\cos(4\pi)=\frac{89}{2}$$

四、（8 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}} & x>0\\ b & x=0\\ c+\sin x & x<0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，试求常数 a,b,c。

解： 只考虑 $x=0$ 就行。因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 上连续, 所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$，即有

$\lim\limits_{x\to0^+}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}(c+\sin x)=b$，又 $\lim\limits_{x\to0^+}(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+ax^2)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{ax^2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(ax)}=1$，

$\lim\limits_{x\to0^-}(c+\sin x)=c$，从而 $b=c=1$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 上可导, 所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，即有

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{x}}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+\sin x-1}{x-0}$， 又 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+ax^2)}{x}}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\ln(1+ax^2)}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax^2}{x^2}=a$，

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+\sin x-1}{x-0}=1$ 得 $a=1$, 因此 $a=b=c=1$。

五、（10 分） $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=2t-1 \\ te^y+y+1=0 \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$ 及 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=-1}$ 。

解：方程 $te^y+y+1=0$ 的两边对 t 求导，得 $e^y+te^y\cdot\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=0$，解得

$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{e^y}{te^y+1}=\dfrac{e^y}{y}$，因此 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^y}{2y}$，两边对 x 求导，得

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{e^y}{2y}\right)\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y(y-1)}{2y^2}\cdot\dfrac{e^y}{2y}=\dfrac{e^{2y}(y-1)}{4y^3}$ 。当 $x=-1$ 时，$t=1,\ y=-1$ 。因此，

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{2e}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2e^2}$ 。

六、（8 分） 求函数 $y=\dfrac{|x^2+x|}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点，并判别其类型。

解： 间断点为 $x=0$， $x=-1$。注意到

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{1}=+\infty \text{ 和 } \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}xe^{\frac{1}{x}}=0,$$

因此 $x=0$ 为第二类间断点中的无穷间断点。

又注意到

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}xe^{\frac{1}{x}}=-e^{-1} \text{ 和 } \lim_{x\to-1^-}f(x)=-\lim_{x\to-1^-}xe^{\frac{1}{x}}=e^{-1},$$

因此 $x=-1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点。

七、（8 分） 证明数列极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ 存在，且极限值大于 1 但不超过 2。

证明： 令 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$，则 $\{x_n\}$ 为单调递增数列。又

$$1<x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=2-\frac{1}{n}<2$$

由单调有界准则，数列极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ 存在。由保号性，$1<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}\le2$。

八、（8 分）试确定常数 a,b，使 $1-\sqrt[3]{\cos 3x}$ 和 $a\ln(1+x)+bx$ 为 $x\to 0$ 时的等价无穷小。

解： 当 $x\to 0$ 时，

$$1-\sqrt[3]{\cos 3x}=-[(1+\cos 3x-1)^{\frac{1}{3}}-1]\sim\frac{1}{3}(1-\cos 3x)\sim\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(3x)^2=\frac{3}{2}x^2$$

$$a\ln(1+x)+bx=a(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))+bx=(a+b)x-\frac{a}{2}x^2+o(x^2)$$

因此 $a+b=0,-\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$，解得 $a=-3,b=3$。

（或者由 $0=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)+bx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}+b=a+b$ 和

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)-ax}{\frac{3}{2}x^2}=\frac{2a}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{2a}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{a}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=-\frac{a}{3}$$

解得 $a=-3,b=3$。）

九、（8 分）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)+f(2)=0$。证明存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

证明： 因为函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，所以在 $[1,2]$ 可取到最大值 M 和最小值 m。

又因为 $m\le\frac{f(1)+f(2)}{2}=0\le M$，所以由介值定理，至少存在一点 $x_0\in[1,2]$，使得 $f(x_0)=0$。

令 $\varphi(x)=xf(x)$，$x\in[0,2]$，根据题意，$\varphi(x)$ 在在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $\varphi(0)=\varphi(x_0)=0$。由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,2)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即有 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

十、（8 分）（1）设 $a>b>0$，证明：$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$；

（2）证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$。

证明：(1) 令 $f(x)=\ln x$，$x\in[a,b]$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\ln b-\ln a = f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)=\frac{1}{\xi}(b-a)$$

注意到$a<\xi<b$，从而$\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$，因此$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$。

(2)由（1）的结论，可得对于任意正整数$k\geq 2$，

$$\frac{1}{k}<\ln\frac{k}{k-1}<\frac{1}{k-1}。$$

从而$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}<\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}$。

注意到$\sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k}{k-1}=\ln n$，因此有$\ln n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\ln n+1$，进而$1<\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}<1+\frac{1}{\ln n}$。

由夹逼准则，$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$。