历届空间解析几何试题解答

1. 将 xoz 坐标面上抛物线的一段 $z=x^2(1\le x\le 2)$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程为________。该旋转曲面在 xoy 坐标面上的投影为 $\{(x,y,z)\in R^3 \mid$ ______________________ $\}$。(2021—2022)

解：所求旋转曲面的方程为 $z=x^2+y^2(1\le x^2+y^2\le 4)$，该旋转曲面在 xoy 坐标面上的投影为

$$\{(x,y,z)\in R^3 \mid \underline{z=0,\ 1\le x^2+y^2\le 4}\}$$

2. 设曲线 L 的一般方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$，试将此一般方程化为参数方程。(2021—2022)

解：先将 $(x-1)^2+y^2=1$ 写成参数方程 $x=1+\cos t$， $y=\sin t$， $0\le t\le 2\pi$.

代入 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，得

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-(1+\cos t)^2-\sin^2 t}=\sqrt{2-2\cos t}=2\sin\frac{t}{2},$$

故所求曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \quad ,0\le t\le 2\pi. \\ z=2\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$$

3. 求通过直线 $L:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 且平行于直线 $x=y=z$ 的平面。(2020—2021)

解：设过直线 $L:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 的平面束方程为 $\lambda(x+y)+\mu(x-y+z)=0$，即

$$(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+\mu z=0,$$

其法向量为 $\vec{n}=(\lambda+\mu,\lambda-\mu,\mu)$。

直线 $x=y=z$ 的方向向量为 $\vec{s}=(1,1,1)$，由已知条件，知 $\vec{n}\perp\vec{s}$，故 $\vec{n}\cdot\vec{s}=0$，即

$$(\lambda+\mu)\cdot 1+(\lambda-\mu)\cdot 1+\mu\cdot 1=0,$$

即 $\mu=2\lambda$.

于是所求的平面方程为 $\lambda(x+y)+2\lambda(x-y+z)=0$，即 $3x-y+2z=0$.

4. 求两异面直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$与$x-1=y=\frac{z}{2}$之间的距离.（2018—2019）

解一:直线$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$的方向向量为$\overrightarrow{n_1}=(1,2,3)$,直线$L_2$：$x-1=y=\frac{z}{2}$的方向向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,1,2)$.

过直线$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$，做平面$\Pi$（设法向量为$\vec{n}$），使平面$\Pi$平行于直线$L_2$：$x-1=y=\frac{z}{2}$.

易知$\vec{n}\perp\overrightarrow{s_1}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{s_2}$，故取

$$\vec{n}=\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}.$$

因此，平面Π的方程为$x+y-z=0$.

因为平面Π平行于L_2，故所求两异面直线的距离就等于直线L_2上任意一点（例如，取$(1,0,0)$）到平面Π的距离，因此，所求异面直线L_1和L_2的距离为

$$d=\frac{|1+0-0|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

解二:直线$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$的方向向量为$\overrightarrow{n_1}=(1,2,3)$,直线$L_2$：$x-1=y=\frac{z}{2}$的方向向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,1,2)$.

两直线的公垂线的方向向量

$$\vec{s}=\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}.$$

取$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$的点$M_1(0,0,0)$，$L_2$：$x-1=y=\frac{z}{2}$上的点$M_2(1,0,0)$.

实际上，所求的异面直线的距离等于$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,0,0)$在公垂线上的投影，即

$$d=\frac{|\vec{s}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s}|}=\frac{|1\times1+1\times0+(-1)\times0|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. 已知椭球面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5$ 被平面 $y=z$ 所截，得到的曲线为一椭圆，求该椭圆在 xoy 坐标面的投影曲线方程。(2018-2019)

解：由 $\begin{cases} x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=5 \\ y=z \end{cases}$ 消去 z，则得 $x^2+\frac{5}{4}y^2=5$，即 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$，故该椭圆在 xoy 坐标面的投影曲线方程为 $\begin{cases} \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \\ z=0 \end{cases}$.

6. 求曲线 $\begin{cases} (x+1)^2-z^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$ 在 yoz 平面上的投影曲线方程。(2017—2018)

解：两个式子相减，得 $4x-y^2-x^2=0$**，即** $x=\frac{1}{4}(y^2+z^2)$**，代入第一个方程，得**

$$(y^2+z^2+4)^2-16z^2=16,$$

即 $(y^2+z^2)^2+8y^2-8z^2=0$**，因此，所求投影曲线方程为**

$$\begin{cases} (y^2+z^2)^2+8y^2-8z^2=0 \\ x=0 \end{cases}.$$

7. 求直线 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程。(2017—2018)

解：过直线 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$ **作一平面，使其垂直于平面** $x+y+z=0$.

设所求平面的方程为 $x+y-z-1+\lambda(-x+y-z-1)=0$**，即** $(1-\lambda)x+(1+\lambda)y-(1+\lambda)z-1-\lambda=0$.

由 $(1-\lambda,1+\lambda,-1-\lambda)\perp(1,1,1)$**，得** $1-\lambda+1+\lambda-1-\lambda=0$**，即** $\lambda=1$**。**

故所求平面方程为 $y-z-1=0$**. 所求投影方程为** $\begin{cases} y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

8. 求曲线 $\begin{cases} x^2+2y^2+z-1=0, \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$ 在 yoz 坐标面上的投影柱面和投影曲线方程。(2016—2017)

解：消去 x 得曲线在 yoz 坐标面上的投影柱面方程是 $y^2+z^2+z-1=0$，从而得

投影曲线方程$\begin{cases} y^2+z^2+z-1=0, \\ x=0 \end{cases}$.

9.求过点$(1,3,1)$，且平行于平面$2x+y-2z+6=0$，又与直线$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$相交的直线的方程。

（2016—2017）

解一：过点$M(1,3,1)$，与平面$\pi:2x+y-2z+6=0$相平行的平面方程为$\pi_1:2(x-1)+(y-3)-2(z-1)=0$，即$\pi_1:2x+y-2z-3=0$.

又令$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}=t$，则$\begin{cases} x=2t, \\ y=t+1, \\ z=t+2, \end{cases}$把它们代入$\pi_1:2x+y-2z-3=0$，解得

$t=2$，所以直线L与平面π_1的交点为$N(4,3,4)$. 于是所求的直线的方向向量为

$\overrightarrow{MN}=(3,0,3)$，从而得所求的直线方程为$L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{1}$或$\begin{cases} x-z=0, \\ y=3. \end{cases}$

解二：过点$M(1,3,1)$，与平面$\pi:2x+y-2z+6=0$相平行的平面方程为$\pi_1:2(x-1)+(y-3)-2(z-1)=0$，即$\pi_1:2x+y-2z-3=0$.

又直线$L:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$过点$P(0,1,2)$，其方向向量$\vec{s}=(2,1,1)$，所以过点$M(1,3,1)$和直线$L:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$的平面$\pi_2$的法向量为

$$\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(3,-3,-3)=3(1,-1,-1),$$

所以平面π_2的方程为$\pi_2:(x-1)-(y-3)-(z-1)=0$，即$\pi_2:x-y-z+3=0$.

于是所求的直线方程为$\begin{cases} 2x+y-2z-3=0, \\ x-y-z+3=0 \end{cases}$.

10. 求曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$在$zox$面上的投影曲线方程。（2015—2016）

解：消去 y 可得 $3x^2+2z^2=16$，可得投影曲线方程为 $\begin{cases}3x^2+2z^2=16\\ y=0\end{cases}$.

11. 求过点 $P(1,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都平行的直线方程。(2015—2016)

解：平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 的法向量分别为 $\vec{n}_1=\{1,0,2\}$ 和 $\vec{n}_2=\{0,1,-3\}$.

设所求直线的方向向量为 $\vec{l}$，则 $\vec{l}\perp\vec{n}_1,\vec{l}\perp\vec{n}_2$. 故取

$$\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=\{-2,3,1\}$$

则所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

12. 设直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面 $\Pi:2x-y+z-2=0$，求直线 L 与平面 Π 的夹角。(2015—2016)

解：直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 的方向向量为

$$\vec{s}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=\{-28,14,-7\}=7\{-4,2,-1\}$$

则

$$\sin\alpha=\frac{\left|\{-4,2,-1\}\cdot\{2,-1,1\}\right|}{\left|\{-4,2,-1\}\right|\cdot\left|\{2,-1,1\}\right|}=\frac{11}{\sqrt{21}\sqrt{6}}=\frac{11}{\sqrt{126}}$$

故所求夹角为 $\arcsin\dfrac{11}{\sqrt{126}}$.