厦门大学《线性代数》课程期中试题 B

考试日期：2013.11　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一．　计算题（共 50 分）

1．（6 分）设 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 3\end{bmatrix}$, 计算（1） AA^T，（2） A^TA.

2．（6 分）设 $A=\alpha\beta^T$, 其中 $\alpha=\left(1,2,\cdots,n\right)^T$, $\beta=\left(1,1,\cdots,1\right)^T$, 试求矩阵 A^3.

3. （6 分）计算行列式$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 5 & 4 & 3 & x+2 \end{vmatrix}$.

4. （6 分）计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$.

5. （6 分）设$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$都是 4 维列向量，矩阵$|A|=|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=5$,矩阵$|B|=|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=-2$，求$|A+2B|$.

6. （10 分）若三阶矩阵 A 的伴随矩阵为A^*，已知$|A|=\frac{1}{2}$，求$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

7. （10 分）设 A,B 为三阶矩阵，且满足方程 $A^{-1}BA = 6A + BA$. 若矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$，求矩阵 B.

二.　　（15 分）设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，A 是可逆矩阵.

如果分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

（1）计算 PQR,（2）证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $D-CA^{-1}B$ 是可逆的.

三. （15 分）证明 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

四.（15 分）设 A, B, C 为 4 阶矩阵，满足$3A^{-1}+2BC^{T}A^{-1}=B$，其中

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

求A.

五.（5 分）设 A 为实对称矩阵，且 $A^2 = 0$，证明 A=0.