厦门大学《线性代数》期末试题·答案

考试日期：2012.1　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、A和B均为n阶矩阵，且$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$，则必有（　D　）

A　$A=E$；　　B　$B=E$；　　C　$A=B$.　　D　$AB=BA$。

2、设 A 是方阵，如有矩阵关系式 AB=AC，则必有（　D　）

A　=0　　B.　$B\neq C$ 时 A=0　　C.　$A\neq 0$ 时 B=C　　D.　$|A|\neq 0$ 时 B=C

3、设 A是 $s\times n$矩阵，则齐次线性方程组 $Ax=0$有非零解的充分必要条件是（ D ）

A. A的行向量组线性无关　　B. A的列向量组线性无关

C. A的行向量组线性相关　　D. A的列向量组线性相关

4、若 $\boldsymbol{x}_1$是方程$\boldsymbol{AX=B}$的解，$\boldsymbol{x}_2$是方程$\boldsymbol{AX=O}$的解，则（A）是方程$\boldsymbol{AX=B}$的解（$c\in R$）

A. x_1+cx_2　　B.　cx_1+cx_2　　C.　cx_1-cx_2　　D.　cx_1+x_2

5、设矩阵A的秩为 r，则A中（　C　）

A.所有 r—1 阶子式都不为 0　　B.所有 r—1 阶子式全为 0

C.至少有一个 r 阶子式不等于 0　　D.所有 r 阶子式都不为 0

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、已知向量$\alpha=(1,3,2,4)^T$与$\beta=(k,-1,-3,2k)^T$正交，则$k=$___24___.

2、$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$.

3、设 3 阶矩阵 A 的行列式$|A|$=8，已知A有 2 个特征值—1 和 4，则另一特征值为___-2___.

4、如果X_1,X_2都是方程$A_{n\times n}X=O$的解，且$X_1\neq X_2$，则$|A_{n\times n}|=$___0___.

5、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,3,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-1)^T$线性___无关___.（填相关或无关）

三、（10 分）计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解　原式 =40；　　　　　　　　　…………10 分

四、（10 分）已知 $f(x)=x^2+4x-1$，$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $f(A)$。

解　$A^2=\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　　　………4 分

$4A=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$　　　…………8 分

$f(A)=\begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　　…………10 分

五、（10 分）求齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=0 \\ -3x_1+x_2+2x_3-4x_4=0 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$的一个基础解系及其通解.

解　齐次线性方程组的系数矩阵 A 为：$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=0 \\ -3x_1+x_2+2x_3-4x_4=0 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　…4 分

一般解为: $\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$ （x_3 为自由未知量） ……………………6 分

故齐次线性方程组的通解为 $X=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $(k_1k_2$为常数$)$…………10 分

六、（12 分）判定二次型 $f=-x_1^2-x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ 的正定性，并求该二次型的秩。

解 二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$$ ………4 分

$\left|-1\right|=-1<0$； ………2 分

$\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-3<0$ ………2 分

$\begin{vmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{vmatrix}=-13<0$ ………2 分

所以矩阵的秩为 3，即二次型的秩为 3 2 分

七、（10 分）求向量组：$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\5\\2\\-1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\5\\-7\\-4\end{bmatrix}$，$\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\6\\17\\9\end{bmatrix}$的秩及一个极大线性无关组，并将其余向量通过该极大线性无关组表示出来.

解 向量组对应的矩阵为

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 5 & 5 & 6\\ -1 & 2 & -7 & 17\\ -1 & -1 & -4 & 9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ……3 分

所以矩阵的秩为 3 ……6 分

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为一组极大无关组 ……8 分

$\alpha_3=-5\alpha_1+\alpha_2$ ……10 分

八、（12 分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0,\\ 0 & 0 & x\end{bmatrix}$相似

（1）求x；

（2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$。

解 （1） 由于 A 与 B 相似，则$tr(A)=tr(B)$。

因为$tr(A)=5$，$tr(B)=3+x$，则$x=2$。 ………4 分

（2） 因为B的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=2$，所以 A 的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=2$。

当$\lambda_1=0$时，它对应的特征向量为$a_1=(1,-1,0)^T$

当对于$\lambda_2=3$时，它对应的特征向量为$a_2=(0,0,1)^T$

当$\lambda_3=2$时，它对应的特征向量为$a_3=(1,1,0)^T$

取$P=\left(a_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=B$。 ……… 12 分

九、（6 分）设 3 阶矩阵A的特征值为 2（二重），−4，求$\left|\left(-\frac{1}{2}A^*\right)^{-1}\right|$。

解 $=-8\left|\left(A^*\right)^{-1}\right|=-\frac{1}{2}=$ ……6 分