厦门大学《 线性代数A 》课程试卷

信息科学与技术学院各 系 2018年级 各类 专业

主考教师：_____ 试卷类型：（A卷）

姓名：____________ 学号：_______________ 班级：__________ 成绩：______

说明:R(A)表示A的秩；A*表示A的伴随矩阵；|A|表示A的行列式

一、单项选择题（每小题2分，共14分）

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 2+x & x \\ x & x & 3+x \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为（ B ）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

2. 若n阶矩阵A满足 $A^2=A$，且 $A=\frac{1}{2}(E+B)$，则 B^2 等于（ A ）。

(A) E　　(B) A　　(C) 0　　(D) B

3. 设矩阵A是方阵，若满足矩阵关系式 $AB=AC$，则必有（ D ）。

(A) $A=0$　　(B) $B=C$ 时 $A\neq 0$

(C) $A\neq 0$ 时 $B=C$　　(D) $|A|\neq 0$ 时 $B=C$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & y \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的充分必要条件是（ B ）

(A) $x-y=1$　　(B) $x-y=-1$　　(C) $x=y$　　(D) $x=2y$

5.设 A 为3阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{3}$，则 | / 3 的值为（ B ）。

(A) 12　　(B) 24　　(C) 40　　(D) 30

6.设 $A,B,A+B$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ = (D).

(A) $A+B$ (B) $A^{-1}+B^{-1}$ (C) $(A+B)^{-1}$ (D) $A(A+B)^{-1}B$

7. 一个值不为零的 n 阶行列式，经过若干次矩阵的初等变换后，该行列式的值（ B）

(A)保持不变 (B)保持不为零

(C)保持相同的正负号 (D)可以变为任何值

二、 填空题（每空格 3 分，共 18 分）

1. 5. 设四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & b & d & a \\ d & b & c & a \\ a & b & d & c \end{vmatrix}$，的值____0_____

则 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$

2. 7. 设 A 为三阶矩阵, 且 $|A|=1, |2A^{-1}+3A^*|=$ ______125_______

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 则 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为____0_____.

=____________.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{11} =$ ___$\begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix}$______

5. 设 E 是 n 阶单位矩阵，A,B 均为 n 阶矩阵,且$A^2 = E = B^2$,则$(AB)^2 = E$的充分必要条件是 ___AB=BA________

6. 设三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} + 2a_{31} & a_{23} + 2a_{33} & a_{22} + 2a_{32} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$,

若 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，则 $B^{-1} =$ ________$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$________________ .

三、计算题（共 50 分）

1、求下列行列式的值：

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

解：1

2、$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1} = ?$

解：因为 $AA^*=|A|E$,所以 $\frac{1}{|A|}AA^*=E$, $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$ 。

$$(A^{-1}\vdots E)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&-1\\0&-1&0&-2&2&1\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&2&-2&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{pmatrix}，所以 A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}。$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&1\\2&-2&-1\\2&-1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=-1$$

所以 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-2&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

3、已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，求 $|B|$ 。

解：方法一。由 $ABA^*=2BA^*+E$ 得， $ABA^*-2BA^*=E$，即（$A-2E$）$BA^*=E$，

$|A|=3$ ， $|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$，所以矩阵 A 和矩阵（$A-2E$）可逆， A^* 也可逆， $B=(A-2E)^{-1}(A^*)^{-1}$ ，易得

$$|B|=|(A-2E)^{-1}|\,|(A^*)^{-1}|=|A-2E|^{-1}\,|A^*|^{-1}=\frac{1}{|A|^2}=\frac{1}{9},$$

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以 $B=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&3&0\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$， $|B|=\frac{1}{9}$ 。

4．设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\2&a&3&4\\3&1&5&7\end{pmatrix}$，求$A$的秩。

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\2&a&3&4\\3&1&5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\0&0&a-1&ab-2b+2\\0&0&0&2-b\end{pmatrix}$

当$a\neq1$且$b\neq2$时，$r(A)=4$；当$a\neq1$且$b=2$时，$r(A)=3$；当$a=1$且$b\neq2$时，$r(A)=3$；当$a=1$且$b=2$时，$r(A)=2$。

5. $A^2+A=0,$试证明$A+3E$可逆，并求其逆（$A+3E$）$^{-1}$

解：由$A^2+A=0$可得，$A^2+A-6E=-6E$,得

$(A+3E)(A-2E)=-6E$,即（$A+3E$）$\frac{1}{6}(2E-A)=E$,

所以$A+3E$可逆 且（$A+3E$）$^{-1}=\frac{1}{6}(2E-A)$。

四、证明题（每小题 6 分，共 18 分）

1. 设矩阵$\mathbf{A}$为$m\times n$ 阶矩阵，$\mathbf{B}$为$n\times m$阶矩阵，$\mathbf{AB}=\mathbf{E}$，证明：$R(\mathbf{A})=R(\mathbf{B})=m$

证明：
$$\begin{aligned}&\mathbf{AB}=\mathbf{E}\Rightarrow R(\mathbf{A})\geq R(\mathbf{AB})=R(\mathbf{E})=m\\&R(\mathbf{A})\leq\min(m,n)\leq m\\&\therefore R(\mathbf{A})=m\end{aligned}$$

同理
$$\begin{aligned}&\mathbf{AB}=\mathbf{E}\Rightarrow R(\mathbf{B})\geq R(\mathbf{AB})=R(\mathbf{E})=m\\&R(\mathbf{B})\leq\min(m,n)\leq m\\&\therefore R(\mathbf{B})=m\end{aligned}$$

2. 设方阵$\mathbf{A}$为幂 0 矩阵，即$\mathbf{A}^k=\mathbf{0},k>1$，证明：$\mathbf{E-A}$为可逆。

证明：$\mathbf{E}-\mathbf{A}^k=(\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})$

因为$\mathbf{A}^k=\mathbf{0}$，所以有

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})=\mathbf{E}$$

所以$\mathbf{E}-\mathbf{A}$可逆，且$\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}\right)^{-1}=(\mathbf{E}+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}^{k-1})$

3. 设n 阶方阵$\mathbf{A}$的伴随矩阵为$\mathbf{A}^*$，且$R\left(\mathbf{A}\right)=n$，证明：$R\left(\mathbf{A}^*\right)=n$。

证明：由$\mathbf{A}\mathbf{A}^*=\left|\mathbf{A}\right|\mathbf{E}$ 有$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^{-1}\left|\mathbf{A}\right|\mathbf{E}$，

所以$\left|\mathbf{A}^*\right|=\left|\mathbf{A}^{-1}\left|\mathbf{A}\right|\mathbf{E}\right|=\left|\mathbf{A}^{-1}\right|\left|\mathbf{A}\right|^n=\left|\mathbf{A}\right|^{n-1}$，

由于$R\left(\mathbf{A}\right)=n$，$\left|\mathbf{A}\right|\neq 0$，$\left|\mathbf{A}^*\right|\neq 0$，$\mathbf{A}^*$可逆，则 $R\left(\mathbf{A}^*\right)=n$