厦门大学《线性代数》期末试题·答案

考试日期：2013.1　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一.（填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & a & -2\\ 0 & 5 & a\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$. 则矩阵 $AB-A$ 的秩 $r(AB-A)=$ ___2___.

2. 设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$，向量 $\alpha=\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$. 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$ ___-1___.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & a & a-1\\ 1 & a & -2 & 3\end{bmatrix}$，若 $Ax=0$ 的基础解系是 2 个线性无关的解向量，那么 $Ax=0$ 的通解是 $k_1(3,-1,1,0)^T+k_2(-3,0,0,1)^T$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & x & 0\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，则 $x=$ ___4___.

5. 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ 合同，则二次型 x^TAx 的规范形为 ___$y_1^2+y_2^2$___.

二．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1． 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，则下列结论中不正确的是（　D　）

（A）　若 $ABC=E$，则 A,B,C 都可逆

（B）　若 $AB=AC$，且 A 可逆，则 $B=C$

（C）　若 $AB=AC$，且 A 可逆，则 $BA=CA$

（D）　若 $AB=0$，且 $A\neq 0$，则 $B=0$.

2． 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组必线性相关的是（　B　）.

（A） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ （B） $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ （C） $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ （D） $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且矩阵 A 的秩为 3，$\alpha_1=[1,2,3,4]^T$，$\alpha_2+\alpha_3=[0,1,2,3]^T$，$c$ 表示任意常数，则线性方程组 $Ax=b$ 的通解 x =（ A ）

（A） $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ （B） $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$ （C） $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ （D） $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

4. 设 A 为 n 阶矩阵，下述结论正确的是（ D ）

（A） 矩阵 A 有 n 个不同特征值

（B） 矩阵 A 和 A^T 有相同的特征值和特征向量

（C） 矩阵 A 的特征向量 α_1,α_2 的线性组合 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2$ 仍是 A 的特征向量

（D） 矩阵 A 对应于不同特征值的特征向量线性无关

5. 设 A,B 均为 n 阶正定矩阵，下列各矩阵中不一定是正定矩阵的是（ B ）

（A） $A^{-1}+B^{-1}$ （B） AB （C） A^*+B^* （D） $2A+3B$

三. （10 分）设向量组 $\alpha_1=[1,1,1,3]^T$, $\alpha_2=[-1,-3,5,1]^T$, $\alpha_3=[3,2,-1,p+2]^T$, $\alpha_4=[-2,-6,10,p]^T$. 当 p 为何值时，该向量组线性相关？当向量组线性相关时，求向量组的秩和一个极大无关组.

解 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，对矩阵 A 施以初等行变换化为阶梯型矩阵：

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\1&-3&2&-6\\1&5&-1&10\\3&1&p+2&p\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\0&-2&-1&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&p-2\end{bmatrix}$$

所以，当 $p=2$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，此时向量组的秩为 3，它的一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

四.（18 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$. 当 a,b 为何值时，存在矩阵 $C=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，使得 $AC-CA=B$，并求满足条件的所有矩阵 C.

解 计算得

$$AC=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{bmatrix},$$

$$CA=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{bmatrix},$$

$$AC-CA=\begin{bmatrix}ax_3-x_2 & x_2+ax_4-ax_1\\ x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{bmatrix}.$$

由 $AC-CA=B$ 可得

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}.$$

从而存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$，即为上方程组有解，考虑其增广矩阵

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{bmatrix},$$

所以，当 $a=-1, b=0$ 时，线性方程组有解，即存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$.

此时

$$\bar{A}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

线性方程组的通解为

$$X=c_1\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+c_2+1\\ -c_1\\ c_1\\ c_2\end{bmatrix}.$$

因此 $C=\begin{bmatrix}c_1+c_2+1 & -c_1\\ c_1 & c_2\end{bmatrix}$，其中 c_1，c_2 为任意常数.

五．（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$,

（1）计算 $|A|$；

（2）当实数 a 取何值时，$Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

解 （1）按第一列展开，得 $|A|=1+(-1)^5a^4=1-a^4$.

(2) 当 $Ax=\beta$ 有无穷多解，则 $|A|=0$，即 $1-a^4=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-1$.

当 $a=1$ 时，

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

由 $r(A)<r(\bar{A})$，方程组无解.

当 $a=-1$ 时，

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

由 $r(A)=r(\bar{A})$，方程组有无穷多解，其通解为

$$x=k\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

六.（17 分） 设有 3 元实二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

（1）记 $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T, y=\left(y_1,y_2,y_3\right)^T$，求正交变换 $x=Py$，将二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化为标准型.

（2）问 a 为何值时，二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 为正定二次型？

解　（1）二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$.

特征多项式为

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & a-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & a-\lambda & -1 \\ 0 & -1-a+\lambda & a-\lambda+1 \end{vmatrix}=-\left(\lambda-1-a\right)^2\left(\lambda-a+2\right).$$

特征值为 $\lambda_1=a+1$（两重），$\lambda_2=a-2$.

对 $\lambda_1=a+1$，由 $\left(A-\left(a+1\right)E\right)x=0$ 得特征向量 $x_1=\left(1,1,0\right)^T, x_2=\left(1,0,1\right)^T$.

对 $\lambda_2=a-2$，由 $\left(A-(a\text{-}2)\ E\right)x=0$ 得特征向量 $x_3=\left(-1,1,1\right)^T$.

因为 $\lambda_1=3$ 是两重根，对 x_1,x_2 正交化有

$$\beta_1=x_1=\left(1,1,0\right)^T,$$

$$\beta_2=x_2-\frac{\left(x_2,\beta_1\right)}{\left(\beta_1,\beta_1\right)}\beta_1=\left(1,0,1\right)^T-\frac{1}{2}\left(1,1,0\right)^T=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^T.$$

单位化，有

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,1,0\right)^T, \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(1,-1,2\right)^T, \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1,1,1\right)^T.$$

经 $x=Py$, 二次型化为 $\left(a+1\right)y_1^2+\left(a+1\right)y_2^2+\left(a-2\right)y_3^2$.

（2）显然，当 $a>2$ 时，二次型为正定二次型.

七.（10 分） 设 A,B 均为三阶矩阵，满足 $AB=A-B$. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是矩阵 A 的三个不同特征值，ξ_1,ξ_2,ξ_3 是与其相对于的特征向量. 证明：

（1） $\lambda_i \neq -1\left(i=1,2,3\right)$；

（2） ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是矩阵 B 的特征向量.

证明

（1）由 $AB=A-B$ 可得

$$\left(A+E\right)\left(E-B\right)=E,$$

因此矩阵 $A+E$ 可逆，即 $\left|A+E\right|\neq 0$，从而−1 不是矩阵 A 的特征值，即 $\lambda_i \neq -1\left(i=1,2,3\right)$.

（2）由已知可得 A 的属于 λ_i 的特征向量为 $\xi_i\left(i=1,2,3\right)$，即

$$A\xi_i=\lambda_i\xi_i, i=1,2,3.$$

由 $\left(A+E\right)\left(B-E\right)=E$ 可得 $\left(B-E\right)\left(A+E\right)=E$，所以

$$\left(B-E\right)\left(A+E\right)=\left(A+E\right)\left(B-E\right)$$

从而

$$AB=BA.$$

于是

$$AB\xi_i=BA\xi_i=\lambda_i B\xi_i, i=1,2,3.$$

若 $B\xi_i=0$，则 ξ_i 是 B 的一个特征向量，特征值为 $\mu_i=0$；

若 $B\xi_i\neq 0$，则 $AB\xi_i=\lambda_i B\xi_i$ 表示 $B\xi_i$ 也是矩阵 A 与特征值 λ_i 相对于的特征向量，因为 λ_i 均为单特征值，对应的线性无关的特征向量只有一个，故存在 μ_i 使得

$$B\xi_i=\mu_i\xi_i,$$

即 ξ_i 是矩阵 B 属于特征值 μ_i 的特征向量. 综上可知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是矩阵 B 的特征向量.