厦门大学《线性代数》课程试卷

信息科学与技术 **学院** 2015 **级**

主考教师：线性代数教学组 试卷类型：(A卷)

一、 选择题（14分）：

1、向量α_1、α_2、…、α_s线性相关，则有（ D ）。

A、向量α_1、α_2、…、α_s中有零向量

B、向量α_1、α_2、…、α_s中有两个向量成比例

C、向量α_1、α_2、…、α_s有一向量可由其余向量线性表出

D、关于k_1、k_2、…k_s的齐次线性方程组$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$有无穷多解

2、设向量组α_1、α_2、…、α_s可由向量组β_1、β_2、…、β_s线性表示为

（α_1、α_2、…、α_s）=（β_1、β_2、…、β_s）$A_{s\times s}$，则下面命题正确的是（ D ）。

A、向量组β_1、β_2、…、β_s线性无关则向量组α_1、α_2、…、α_s线性无关

B、向量组α_1、α_2、…、α_s线性相关则向量组向量组β_1、β_2、…、β_s线性相关

C、矩阵$A_{s\times s}$可逆则向量组α_1、α_2、…、α_s线性无关

D、矩阵$A_{s\times s}$不可逆则向量组α_1、α_2、…、α_s线性相关

3、设A、B均为2阶非零方阵,，且$\boldsymbol{AB}=0$，均则一定有（ C ）。

A、可能$|A|=0$，$|B|\neq 0$

B、齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系含有两个解向量

C、$R(A)=R(B)$

D、$R(A)+R(B)<2$

4、设A为$m\times n$矩阵, 那么关于线性方程组$Ax=b$的命题正确的是(D)。

（A）、若$R(A)<n$， 则$Ax=b$有无穷多解。

（B）、若$R(A)<m$， 则$Ax=b$有无穷多解。

（C）、若$R(A)=n$， 则$Ax=b$有唯一解

（D）、若$R(A)=m$， 则$Ax=b$有解。

5、向量组α_1、α_2、…、α_s两两正交向量组是向量组α_1、α_2、…、α_s 线性无关的(B)。

（A）、充要条件

（B）、充分条件非必要条件

（C）、必要条件非充分条件

（D）、既非充分条件又非必要条件

6、设A为n阶方阵,与矩阵A的特征向量一定相同的矩阵是(D)。

（A）、A^T

（B）、$P^{-1}AP$,其中P^{-1}为n阶方阵P的逆矩阵

（C）、A^TA

（D）、A^{-1}

7、二次型$f(x)=x^TAx$（其中$A^T=A$）是正定矩阵的充要条件是（ B ）。

（A）、二次型$f(x)$负惯性指数等于零

（B）、A的所有特征值均为正数。

（C）、A的元素都大于零

（D）、不存在$X\in R^n, X\neq 0$，使$X^TAX<0$

二、 填空题（15 分）:

1、设二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$，则二次型的正惯性指数、负惯性指数、秩是__2，1，3______。

2、向量$\alpha_1=(1\quad 1\quad 0)^T$与向量$\alpha_2=(0\quad 1\quad 1)^T$的夹角$\theta$=__$\frac{2}{3}\pi$________ 。

3、设A为3阶不可逆方阵，且有$|2A-E|$=0和$|A+E|$=0，则A特征值为__0，1/2，-1___ 。

4、设3阶方阵A与B相似，且A的3个特征值分别为$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$，那么行列式$|B^{-1}-E|$=__6__ 。

5、已知三阶矩阵A的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$，它们所对应的特征向量分别为

$\alpha_1=(1\quad 0\quad 0)^T$ 、 $\alpha_2=(0\quad 2\quad 0)^T$ 、 $\alpha_3=(0\quad 0\quad 1)^T$ ， 则 矩 阵 A =

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$__________ 。

解： $A[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3]=[\lambda_1\alpha_1\quad \lambda_2\alpha_2\quad \lambda_3\alpha_3]=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

三、 计算题（55 分）：

1、求下列向量组的一个最大线性无关组和秩：（5 分）

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-1\\2\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\\-3\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}5\\0\\7\\-5\\-4\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-2\\-3\end{pmatrix}。$$

解： 设

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&3&5&2\\-2&-1&0&1\\3&5&7&2\\-1&-3&-5&-2\\2&-1&-4&-3\end{pmatrix}$$

对其施行初等行变换可得

$$\begin{pmatrix}1&3&5&2\\-2&-1&0&1\\3&5&7&2\\-1&-3&-5&-2\\2&-1&-4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&5&10&5\\0&-4&-8&-4\\0&0&0&0\\0&-7&-14&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则有 rank(A)=2, 最大线性无关组为 α_1,α_2.

2、试将向量组 $\alpha_1=(1\quad 2\quad -1)^T$、$\alpha_2=(-1\quad 3\quad 1)^T$、$\alpha_3=(4\quad -1\quad 0)^T$ 化为标准正交基。（10 分）

解： 取 $b_1=\alpha_1$;

$$b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$b_3=a_3-\frac{[a_3,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1-\frac{[a_3,b_2]}{\|b_2\|^2}b_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

再把它们单位化，取

$$e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\ e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$e_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$ e_1,e_2,e_3 即为所求。

3、写出二次型 $f=x^2+5y^2+6z^2-4xy$ 的矩阵，并判定它的正定性。（10 分）

解：二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&5&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

由 A 的顺序主子式可得

$$|1|=1>0;\quad \begin{vmatrix}1&-2\\-2&5\end{vmatrix}=1>0;\ |A|=\begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&5&0\\0&0&6\end{vmatrix}=6>0.$$ 可知它是正定的。

或者可通过求其特征值为：$\lambda_1=6;\lambda_2=3+2\sqrt{2};\lambda_2=3-2\sqrt{2}.$ 均为正数，可知它是正定的。

4、求线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4=1\\2x_1-2x_2-4x_3+6x_4=-1\end{cases}$$ 的通解（15 分）

解：对增广矩阵 B 施行初等行变换：

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\1&-1&1&-3&1\\2&-2&-4&6&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&0&2&-4&1\\0&0&-1&2&-0.5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&1&0\\0&0&1&-2&0.5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R(A)=R(B)=2$，故方程组有解，并有

$$\begin{cases}x_1=x_2+x_4+\frac{1}{2},\\x_3=2x_2+\frac{1}{2}.\end{cases}$$

取 $x_2=x_4=0,$ 则 $x_1=x_3=\frac{1}{2},$ 即得方程组的一个解

$\eta^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$，在对应的齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$中，取

$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，即得对应的齐次线性方程组的基础解系

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in R).$$

5、求矩阵$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$的特征值与特征向量。（15 分）

解：

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

求得 A 的特征值 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

当 $\lambda_1 = -2$ 时，解方程组 $(A+2E)\,x = 0$.

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{得基础解系 } \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

相应于特征值$\lambda_1 = -2$的所有特征向量为$k_1\xi_1$，k_1是非零实常数。

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时， 解方程组 $(A-E)\,x = 0$.

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得**基础解系**$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$

相应于特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的所有特征向量为$k_2\xi_2+k_3\xi_3$， k_2,k_3是不同时为零的实常数。

四、　证明题（16分）：

1、设有向量组α_1、α_2、…、α_s线性无关，向量组α_1、α_2、…、α_s、β线性相关，试证明：向量β可由向量组α_1、α_2、…、α_s线性表出。（5分）

证明：方法一。

证明：因为向量组α_1、α_2、…、α_s、β线性相关，所以存在不全为零的常数k_1、k_2、…、k_s、k_0，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k_0\beta=0$。下面证明$k_0\neq 0$。反证法。若$k_0=0$，则存在不全为零的常数$k_1$、$k_2$、…、$k_s$，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，也即向量组$\alpha_1$、$\alpha_2$、…、$\alpha_s$线性相关，矛盾。

所以$k_0\neq 0$。故有$k_0\beta=-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_s\alpha_s$，得

$$\beta=-\frac{k_1}{k_0}\alpha_1-\frac{k_2}{k_0}\alpha_2-\cdots-\frac{k_s}{k_0}\alpha_s$$，也即向量β可由向量组α_1、α_2、…、α_s线性表出。

方法二。

记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m), B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,b)$, 有$R(A)\le R(B).$

因向量组A线性无关，有$R(A)=m;$ 因向量组B线性相关，有$R(B)<m+1.$

所以$m\le R(B)<m+1,$ 即有$R(B)=m$。

把A和B分别作为线性方程组的系数矩阵和增广矩阵，由线性方程组

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)x=b$

有唯一解，即向量b能由向量组A线性表示，且表示式是唯一的。

2、设λ是矩阵A的特征值，试证明λ^2是矩阵A^2的特征值。（5分）

证明：λ是矩阵A的特征值，设x是相应的特征向量，则有

$Ax=\lambda x$，从而　$A^2x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda(\lambda x)=\lambda^2 x.$

于是可知λ^2是矩阵A^2的特征值, x是相应的特征向量。

或：因为λ是矩阵A的特征值，所以存在非零的向量α，使$A\alpha=\lambda\alpha$。在$A\alpha=\lambda\alpha$两边同乘矩阵A得：左边$=A(A\alpha)=A^2\alpha$，右边$=A(\lambda\alpha)=\lambda(A\alpha)=\lambda(\lambda\alpha)=\lambda^2\alpha$，即得

$A^2\alpha=\lambda^2\alpha$，所以$\lambda^2$是矩阵$A^2$的特征值。

3、若$R(A)=R(BA)$，试证明：方程组$Ax=0$与方程组$BAx=0$同解。（6 分）

证明：设x_0 是方程组$Ax=0$的解即$Ax_0=0$，有$(BA)x_0=B(Ax_0)=B0=0$，

也即x_0 是方程组$BAx=0$的解。

又设$R(A)=R(BA)=r$，ξ_1、ξ_2、…、ξ_{n-r}是

方程组$Ax=0$的一个基础解系，则ξ_1、ξ_2、…、ξ_{n-r}是方程组$BAx=0$的解，又由于

$R(A)=$ $R(BA)=r$，ξ_1、ξ_2、…、ξ_{n-r}也是方程组$BAx=0$的一个基础解系，
所以两个方程组同解。