Homework #7

Due: 2024-6-25 00:00 | 5 Questions, 100 Pts

Name: XXX

Question 1 (42') (矢量微分恒等式).

已知 φ 为标量场函数，$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 为矢量场函数，$\mathbf{a}$ 为任意矢量，请证明如下恒等式：

a (7')

$$\nabla(\varphi\mathbf{v}) = \varphi(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\varphi)\mathbf{v}$$

b (7')

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}$$

c (7')

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})\times\mathbf{a} = [\mathbf{v}\nabla - \nabla\mathbf{v}]\cdot\mathbf{a}$$

d (7')

$$\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v}) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u})$$

e (7')

$$\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\nabla\mathbf{u}) - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{u}\cdot(\nabla\mathbf{v})$$

f (7') 若 $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} = 0$，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0$，则 $\mathbf{u}$ 为调和函数，即

$$\nabla\cdot\nabla\mathbf{u} = 0.$$

◀

Question 2 (18') (亥姆霍兹分解).

a (9') 若矢量场 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$，试证明必存在向量势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 使得 $\mathbf{A} = \nabla\times\boldsymbol{\psi}$.

b (9') 若矢量场 $\mathbf{A}$ 满足 $\nabla\times\mathbf{A} = 0$，试证明必存在标量势函数 ϕ 使得 $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

◀

我们为一个集合 V 配备了加法 $+ : (V,V)\to V$ 和数乘 $(\mathbb{R},V)\to V$，便构成了一个（$\mathbb{R}$ 上的）线性空间。其上的加法需要满足结合律、交换律，并具有单位元与逆元；其上的数乘需要关于加法满足分配律。该线性空间中的元素 $v\in V$ 被我们称为矢量。

我们将标量线性函数 $\alpha : V \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}$ 为余矢量。包含了全体余矢量的空间 V^* 被我们称为关于 V 的对偶空间。若 V 为有限维空间，那么 $\dim V = \dim V^*$. 对于有限维矢量空间 V 中的任意一组基底 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$，将存在一组 V^* 中唯一一组基底 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 满足

$$\alpha_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

这组基底被称为对偶基。这些对偶基可以提取出矢量在基底下的系数，即

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1(\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n(\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_n.$$

我们扩展这一概念，称多元线性函数

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \xrightarrow{\text{multilinear}} \mathbb{R}$$

为 k-形式。该 k-形式需要满足斜对称性，即

$$\omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = -\omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k).$$

我们将包含了全体 k-形式的空间记作 $\mathrm{Alt}^k V = \bigwedge^k V^*$, 并将流形 M 上的 k-形式场记作 $\Gamma(\mathrm{Alt}^k TM) = \Omega^k(M)$。若 $\dim V = n$，那么排列组合可得

$$\dim\left(\bigwedge^k V^*\right) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Question 3 (15') (外积).
我们对于微分形式可以定义一种新的乘法，叫做外积

$$\wedge : \bigwedge^k V^* \times \bigwedge^l V^* \to \bigwedge^{k+l} V^*,$$

满足结合律 $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$, 且 1-形式为关于该乘法的迷向向量，即对于任意的 $\alpha \in V^*$ 满足 $\alpha \wedge \alpha = 0$.

a (5') 请验证对于任意的 $\alpha, \beta \in V^*$，满足 $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$。

b (5') 更一般地，对于 $\sigma \in \bigwedge^k V^*$,$\omega \in \bigwedge^l V^*$，满足 $\sigma \wedge \omega = (-1)^{kl}\omega \wedge \sigma$.

由于外积运算的定义，我们可以对 1-形式做外积来得到 k-形式。对于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$，可以得到 k-形式 $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)$ 为

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \det\begin{pmatrix} \alpha_1(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \alpha_1(\boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \alpha_k(\boldsymbol{v}_k) \end{pmatrix}.$$

c (5') 选取 $\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ 中的基底为 $\mathrm{d}x\,, \mathrm{d}y\,, \mathrm{d}z\,, \mathrm{d}t\,$. 对于 2-形式 $\alpha = u_{12}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + u_{24}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}t + u_{34}\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$ 与 1-形式 $\beta = w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z$，计算 $\alpha \wedge \beta$ 与 $\alpha \wedge \alpha$.

◀

我们为矢量空间配置一个非退化的对称双线性形式

$$\flat : V \to V^*,$$

则该矢量空间可以被称为度量空间。该度量可逆，其逆为 $\sharp = \flat^{-1} : V^* \to V$；对称，即 $\flat(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}) = \flat(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u})$。我们将 $\flat(\boldsymbol{u})$ 记作 $\boldsymbol{u}^\flat \in V^*$.

对于三维平直空间 $\mathbb{R}^3$ 而言，选取其正交基底为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，则 $\boldsymbol{e}_1^\flat, \boldsymbol{e}_2^\flat, \boldsymbol{e}_3^\flat$ 为 $(\mathbb{R}^3)^*$ 上的对偶基底。那么对于任一矢量 $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3$ 可以被写为 1-形式

$$\boldsymbol{u}^b = u_1\boldsymbol{e}_1^\flat + u_2\boldsymbol{e}_2^\flat + u_3\boldsymbol{e}_3^\flat \in (\mathbb{R}^3)^*$$

或者 2-形式

$$\star\boldsymbol{u}^b = u_1\left(\boldsymbol{e}_2^\flat \wedge \boldsymbol{e}_3^\flat\right) + u_2\left(\boldsymbol{e}_3^\flat \wedge \boldsymbol{e}_1^\flat\right) + u_3\left(\boldsymbol{e}_1^\flat \wedge \boldsymbol{e}_2^\flat\right) \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*.$$

将 3-形式的基底 $\boldsymbol{e}_1^\flat \wedge \boldsymbol{e}_2^\flat \wedge \boldsymbol{e}_3^\flat$ 简记为 $\det$，对于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$，$\alpha = \boldsymbol{a}^\flat, \beta = \boldsymbol{b}^\flat, \omega = \star\boldsymbol{w}^\flat$，可以得到：

- 1-形式间的外积对应于叉乘 $\alpha \wedge \beta = \star(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^\flat$.
- 1-形式与 2-形式间的外积对应于点乘 $\alpha \wedge \omega = \omega \wedge \alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{w} \det$.
- 作用在 1-形式上的内积对应于点乘 $i_{\boldsymbol{a}}\beta = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.
- 作用在 2-形式上的内积对应于叉乘 $i_{\boldsymbol{a}}\omega = (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{a})^\flat$.
- 作用在 3-形式上的内积给出该矢量与其 2-形式的对应 $i_{\boldsymbol{w}} \det = \omega$.

其中描述的内积算子 $i_{\boldsymbol{a}} : \bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-1} V^*$，满足

- 对于所有的 $\beta \in V^*$，$i_{\boldsymbol{a}}\beta = \beta(\boldsymbol{a})$.
- **Leibniz 规则**。对于 $\eta \in \bigwedge^k V^*$，$i_{\boldsymbol{a}}(\eta \wedge \sigma) = (i_{\boldsymbol{a}}\eta) \wedge \sigma + (-1)^k \eta \wedge (i_{\boldsymbol{a}}\sigma)$.
- **链复形**。$i_{\boldsymbol{a}} i_{\boldsymbol{a}} = 0$.
- 实践中,可以将矢量 $\boldsymbol{a}$ 插入到其作用的第一个位置上,即 $(i_{\boldsymbol{a}}\eta)(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1}) = \eta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{k-1})$.

Question 4 (9') (内积).
使用 Leibniz 规则与三维空间中对应的矢量形式，验证以下结论

a (4') $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

b (5') $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^3$ 满足 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$.

◀

选取标量场 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 与矢量场 $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，我们可以将 $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$ 写成 1-形式 $\boldsymbol{v}^b = v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + u_3\,\mathrm{d}z$ 或者 2-形式 $\star\boldsymbol{v}^b = i_{\boldsymbol{v}} \det = v_1(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) + v_2(\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x) + v_3(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$. 外微分 $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 由与内积算子一致的方法定义为

- 作用在 0-形式 f 上得到的 $\mathrm{d}f$ 即为关于其微分。
- **链复形**。$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.
- **Leibniz 规则**。对于 $\omega \in \bigwedge^k V^*$，$\mathrm{d}(\omega \wedge \sigma) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge (\mathrm{d}\sigma)$.

那么

- d 作用在 0-形式得到梯度
$$\boldsymbol{\nabla} f = (\mathrm{d}f)^\sharp.$$
- d 作用在 1-形式得到旋度
$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v})^\flat = \star\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}^\flat\,.$$
- d 作用在 2-形式得到散度
$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\det = \mathrm{d} \star \boldsymbol{v}^\flat = \mathrm{d} i_{\boldsymbol{v}} \det\,.$$

Question 5 (16') (外微分).
选取 $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为三维空间中的标量场，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为三维空间中的矢量场。请根据以上知识证明：

a (4') $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b})$.

b (4') $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{\nabla} f) \cdot \boldsymbol{a} + f \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}$.

c (4') $\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{a} + f \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}$.

d (4') $\boldsymbol{\nabla} \times (f \boldsymbol{\nabla} g) = \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g$.

◀