厦门大学《线性代数 B》课程试卷

学院______年级______姓名________学号________

主考教师：　　试卷类型：（A 卷）　　2015.06.10

一．填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 A 为 3 阶矩阵，α_j 为 A 的第 j 列，令 $B=[\alpha_3, 3\alpha_2-\alpha_3, 2\alpha_1+5\alpha_2]$，若 $|A|=-2$，则 $|B|=$ _________.

2. 设 A 为 3 阶矩阵，若 $|A|=\dfrac{1}{3}$，则 $\left|(3A)^{-1}+5A^{*}\right|$ _________.

3. 设 $P=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$，若 $AP=P\Lambda$, 试求 $A^n=$ _________

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&t\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&-1&2\end{bmatrix}$. 若存在可逆矩阵 P, Q，使 $PAQ=B$，则常数 $t=$ ___________.

5. 设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，向量 $\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，试求常数 $a=$ _____.

二．（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$AX=2X+A$, 求 X .

三．（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\1&3&3&1\\1&-5&-5&12\\3&-1&-1&15\end{bmatrix}$, 试求矩阵 A 的秩及 A 的一个最高阶非零子式。

四．（15 分）设 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$

问 a, b 为何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

五．（15 分）证明：线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = b_1, \\ x_2 - x_3 = b_2, \\ x_3 - x_4 = b_3, \\ x_4 - x_5 = b_4, \\ -x_1 + x_5 = b_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{5} b_i = 0$. 当方程组有解时，求出它的通解.

六.（15 分）设 n 阶矩阵 A 满足条件 $A^2 - 3A + 2E = 0$，

证明：a) $A-2E, A-E$ 不同时为可逆矩阵，

b) $R(A-2E) + R(A-E) = n$，

c) 当 $k \neq 1,2$ 时，$A-kE$ 为可逆矩阵。

七.（5 分）上题中，若 n 阶矩阵 A 满足条件 $A^2 - aA + bE = 0$，其中 a,b 为实数，且 $a^2 > 4b$，请推广上题中的 3 个结论。

请问这些结论是否可以推广至 $A^2 - aA + bE = 0$，其中 a,b 为实数，且 $a^2 = 4b$ 的情形吗？