厦门大学《线性代数》课程期中试题 A

考试日期：2013.11　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一．　计算题（共 50 分）

1．（6 分）设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,计算（1）$AA^T$，（2）$A^TA$.

2. （6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 5 & 4 & 3 & x+2 \end{vmatrix}$.

2. （6 分）计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$.

3. （6 分）设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，$R(A)=3$,求$k$.

4. （6 分）设$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$都是 4 维列向量，矩阵$|A|=|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=5,$矩阵$|B|=|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=-2$，求$|A+2B|$.

5. （10 分）设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，A 是可逆矩阵.

如果分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, R=\begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

（1）计算 PQR,（2）证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是$D-CA^{-1}B$是可逆的.

7（10 分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a\\3&5&1\end{bmatrix}$与矩阵$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\2&a&3\\a-1&5&1\end{bmatrix}$等价，确定常数$a$的取值范围.

二.（10 分）证明$D_n=\begin{vmatrix}\cos\alpha&1&&&\\1&2\cos\alpha&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&2\cos\alpha&1\\&&&1&2\cos\alpha\end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

三.（15 分）设 A,B,C 为 4 阶矩阵，满足$3A^{-1}+2BC^{T}A^{-1}=B$，其中

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

求A.

四．（20 分）设$\alpha=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\gamma=\begin{bmatrix}1\\2\\a\end{bmatrix}$，若$A=\alpha\beta^T,B=\beta\alpha^T$，求解方程$A^2x=2Bx+\gamma$.

五.(5 分) 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$是 n 阶矩阵，满足$A^TA=E$且$|A|=1$，又$\beta=[c_1,c_2,\cdots,c_n]^T$满足$\beta^T\alpha_n=1$，证明$B=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\beta]$可逆，并求$|B|$.