历届试卷级数部分补充

一、正项级数$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$之和等于______。

（A）1；　　（B）$\frac{1}{2}$；　　（C）$\frac{1}{3}$；　　（D）$\frac{1}{4}$.　　(2005—2006)

解：注意到$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$，

因此级数的前n项和为

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3})+(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4})+(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5})+\cdots+(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})]$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}).$$

于是，$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}.$

二、幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$的收敛域为 _________。　　(2005—2006)

解：记$a_n=\frac{1}{n3^n}$，则该级数的收敛半径为$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot 3^n}}{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}=3\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=3$.

当$|x-3|<3$即$0<x<6$时级数收敛.

当$x=0$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，这是收敛的交错级数；

当$x=6$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，这是调和级数，发散.

故级数的收敛域为$[0,6)$.

三、设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}$绝对收敛。 (2005—2006)

证明：因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数，故$S_n\geq S_{n-1}$，即$S_n^2\geq S_n\cdot S_{n-1}$.

又因为$a_n=S_n-S_{n-1}$， 则当$n=2,3,\cdots$时，

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}\right|=\frac{a_n}{S_n^2}\leq\frac{a_n}{S_n\cdot S_{n-1}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n\cdot S_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}.$$

级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n})$的前$n$项和为

$$\sigma_n=(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2})+(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3})+(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4})+\cdots+(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}})=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{n+1}}.$$

因为正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$.

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{a_1}$，即级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n})$收敛.

由比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}\right|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}$绝对收敛。

四、把$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$展成麦克劳林（Maclaurin）级数。 (2005—2006)

解：当$|x|<1$时，$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$。

两边求导，得 $\frac{1}{(1-x)^2}=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},|x|<1$

五、若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则下列级数中必发散的是（ ）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ (2008—2009)

解：(A) 如果取$u_n=\frac{1}{n}$，$v_n=-\frac{1}{n+1}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$是收敛的；

(B) 如果取$u_n=\frac{1}{n}$，$v_n=\frac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$是收敛的；

（C）如果取 $u_n=\frac{1}{n}$， $v_n=\frac{1}{n}$， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的；

（D）如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 收敛，由 $|u_n|\le|u_n|+|v_n|$， $|v_n|\le|u_n|+|v_n|$ 可以推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ 都收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，和已知条件矛盾.

故正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 发散.

六、若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=3$ 处（　）

(A)　绝对收敛　　(B)　条件收敛　　(C)　发散　　(D)　收敛性不能确定　　(2008—2009)

解：如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则级数在 $|x-1|<|-2-1|=3$ 内绝对收敛.

而 $x=3$ 满足 $|x-1|<3$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=3$ 处绝对收敛.

答案：(A)

七、函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式为____________,其收敛域为________。(2008—2009)

解：当 $|x|<1$ 时， $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

故当 $|x|<1$ 时，

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

注意到， $x=\pm1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\pm\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，因为 $\frac{1}{2n+1}$ 单调减少，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$，由莱布尼茨判别法，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛.

答案： $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$， $[-1,1]$.

八、设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列 $(a_0\ne0)$，试求：

（1）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径；　　（2）数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 的和。　　(2008—2009)

解：因为 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列，则 $a_n=a_0+nd$，其中 d 为公差.

（1）由于 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_0+nd}{a_0+(n+1)d}\right|=1$，故收敛半径为 $R=1$；

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_0}{2^n}+d\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$.

记级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n},$$
$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}},$$

两式相减，得

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}},$$

即 $\quad S_n=2(1-\dfrac{1}{2^n})-\dfrac{n}{2^n}$.

于是，$\quad S_n=\lim\limits_{n\to\infty}2(1-\dfrac{1}{2^n})-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=2-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2^x}=2-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x\ln 2}=2.$

故 $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=2.$

所以，$\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_0}{2^n}+d\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=a_0\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}+2d=2(a_0+d).$

九、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域以及和函数； (2008—2009)

解：记 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$.

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm1)^n}{n(n+1)}$，因为 $\left|\dfrac{(\pm1)^n}{n(n+1)}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm1)^n}{n(n+1)}$ 绝对收敛，因此，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

当 $|x|<1$ 时，记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，于是 $S_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$，因此，$S_1(x)=-\ln(1-x)+C$.

因为$S_1(0)=0$，故$C=0$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

注意到，当$x\neq 0$且$|x|<1$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x)=\frac{1}{x}(-\ln(1-x)-x)=-\frac{\ln(1-x)}{x}-1.$$

当$x=0$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=0$.

因此，当$|x|<1$时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}0, & x=0,\\ \frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & 0<|x|<1,\end{cases}$$

因为 $$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)}{x}\ln(1-x)+1=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}}+1$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}}+1=-\lim_{x\to1^-}(1-x)+1=1,$$

$$S(-1)=\lim_{x\to-1^+}S(x)=1-2\ln 2.$$

综上，所求的和函数为

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x=1,\\ \frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & -1\le x<1\text{且}x\neq 0\end{cases}.$$

十、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]$的收敛性，是绝对收敛还是条件收敛？ (2008—2009)

解：因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]\right|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}\neq0.$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]\right|$发散.

记 $f(x)=x-\ln(1+x)\ (0<x\le1)$， $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$，即 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 在 $(0,1]$ 上单调增加.

因此，$u_n=n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]=0$.

由莱布尼茨判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]$收敛.

综上，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]$条件收敛.

十一、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$的收敛性，是绝对收敛还是条件收敛？ （2008—2009）

解：记 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x\ge1)$，则当 $x>\mathrm{e}$ 时， $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$.

因此，当 $n>2$ 时， $u_n=\frac{\ln n}{n}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

由莱布尼茨判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$收敛.

注意到，当 $n>2$ 时， $\left|(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}\right|\ge\frac{1}{n}$，而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}\right|$发散.

综上，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$是条件收敛的.

十二、据a的取值，讨论常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$ $(a>0)$的敛散性（绝对收敛，条件收敛或发散）。

（2010—2011）

解：（1）当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-a^{-x}\ln a}{1}=\infty$，因此，级数发散；

（2）当 $a=1$ 时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，因为$\frac{1}{n}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，由莱布尼茨判别法，级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，当$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$为调和级数，发散。因此，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$条件收敛.

（3）当 $a>1$ 时，记$u_n=\frac{(-1)^n}{na^n}$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)a^{n+1}}}{\frac{1}{na^n}}=\frac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{a}<1$，因此，级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{na^n}\right|$收敛.

因此，当$a>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$绝对收敛.

十三、求无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$的和函数$S(x)$，并指出其收敛域。 (2010—2011)

解：记$a_n=(-1)^n n(n+1)$，于是，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$的收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.$$

又$x=\pm1$时，当$n\to\infty$时，该幂级数的通项$(-1)^n n(n+1)(\pm1)^n$不趋于0，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)(\pm1)^n$

发散.

故幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$的收敛域为$(-1,1)$.

当$x\in(-1,1)$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^{n+1})''$$

$$=[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}]''$$

$$=(\frac{-x^2}{1+x})''=(1-x-\frac{1}{1+x})''=-\frac{2}{(1+x)^3}.$$

故幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$的和函数为

$$S(x)=-\frac{2x}{(1+x)^3},\ -1<x<1.$$

十四、把函数$f(x)=-\ln\frac{1+x}{1-x}+x^2$展成关于$x$的幂级数。 (2010—2011)

解：$$f'(x)=-\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}+2x$$

$$=-\frac{2}{1-x^2}+2x.$$

当$|x|<1$时，$$f'(x)=-2\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n+2x.$$

两边积分，得 $$f(x)-f(0)=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^2.$$

因为 $f(0)=0$，则 $f(x)=-2x+x^2-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

当 $x=\pm1$ 时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{2n+1}}{2n+1}=\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ 发散.

故$-2x+x^2-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$的收敛域为$(-1,1)$.

于是，$$f(x)=-2x+x^2-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},-1<x<1.$$

十五、设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，若存在正数b，使得$a_{n+1}\le b(a_n-a_{n+1}),(n=1,2,\cdots)$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。（2011—2012）

证明：因为$a_{n+1}\le b(a_n-a_{n+1})$，则$a_{n+1}\le\frac{b}{1+b}a_n, n=1,2,\cdots$.

于是，$$a_n\le\frac{b}{1+b}a_{n-1}\le(\frac{b}{1+b})^2a_{n-2}\le\cdots\le(\frac{b}{1+b})^{n-1}a_1.$$

因为$b>0$，则$0<\frac{b}{1+b}<1$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b}{1+b})^{n-1}a_1$收敛.

由比较判别法，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

十六、求幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$的收敛域及它的和函数$S(x)$.（2011—2012）

解：记$u_n(x)=(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}x^2\,\frac{2n}{2n+2}=x^2.$$

因此，当$x^2<1$，即$|x|<1$时，级数$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$收敛；

当$x^2>1$，即$|x|>1$时，级数$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$发散.

当$x^2=1$，即当$x=\pm1$时，$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n}$，因为$\dfrac{1}{2n}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}=0$，由莱布尼茨判别法，级数

$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n}$收敛.

故级数$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$的收敛域为$[-1,1]$.

记$S(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$，当$|x|<1$时，

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=-\frac{x}{1+x^2}.$$

两边积分，得　$S(x)-S(0)=-\displaystyle\int_0^x\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

因为$S(0)=1$，所以，

$$S(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)，\quad -1\le x\le 1.$$

十七、将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成x的幂级数。　　（2011—2012）

解：
$$f'(x)=\frac{1}{1+(\frac{1-2x}{1+2x})^2}\cdot\frac{-2(1+2x)-(1-2x)\cdot 2}{(1+2x)^2}=-\frac{2}{1+4x^2}.$$

于是，当$4x^2<1$，即$|x|<\dfrac{1}{2}$时，

$$f'(x)=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n+1}x^{2n}.$$

两边积分，得

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}.$$

因为 $f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，故

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}.$$

注意到 $|x|=\frac{1}{2}$，即 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}=\pm\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}.$$

因为 $\frac{1}{2n+1}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$，由莱布尼茨判别法知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ 收敛.

因此，$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}=\pm\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1},\ x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$$

十八、讨论正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin n|}{2^n}$ 的敛散性 . (2014—2015)

解：记 $a_n=\frac{n}{2^n}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛.

又 $\frac{n|\sin n|}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$，由比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin n|}{2^n}$ 收敛.

十九、讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+4}$ 的收敛性； (2014—2015)

解：因为 $\left|(-1)^n\frac{n}{n^2+4}\right|=\frac{n}{n^2+4}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+4}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4}=1$，

而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{n^2+4}\right|$ 收敛.

记 $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$， $f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+4)-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$，故当 $x>2$ 时， $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调减少.

因此，当 $n>2$ 时，$\frac{n}{n^2+4}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4}=0$，由莱布尼茨判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+4}$ 收敛.

二十、判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{n}{n^2+4}+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 的敛散性. (2014—2015)

解：记 $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$， $f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+4)-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$，故当 $x>2$ 时， $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在

$[2,+\infty)$ 上单调减少.

因此，当 $n>2$ 时，$\frac{n}{n^2+4}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4}=0$，由莱布尼茨判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+4}$ 收敛.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{n}{n^2+4}+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 发散.

二十一、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$ 在 $(-1,1)$ 内的和函数. (2014—2015)

解：记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$，则当 $|x|<1$ 时，

$$S'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n}=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}.$$

记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$，则 $S_1'(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{2x}{1-x^2}$，于是，两边积分，得

$$S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x\frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x=-\ln(1-x^2).$$

因为 $S_1(0)=0$，则 $S_1(x)=-\ln(1-x^2)$，即

$$S'(x)=2xS_1(x)=-2x\ln(1-x^2).$$

两边积分，得

$$S(x)-S(0)=\int_0^x(-2x)\ln(1-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=(1-x^2)\ln(1-x^2)\Big|_0^x-\int_0^x(1-x^2)\cdot\frac{-2x}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=(1-x^2)\ln(1-x^2)+x^2,$$

因为 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$，则 $S(0)=0$，于是，

$$S(x)=(1-x^2)\ln(1-x^2)+x^2,\ -1<x<1.$$

二十二、将 $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数. (2014—2015)

解：令 $t=x-2$，则 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{t+2-1}{(t+2)^2}=\dfrac{1}{t+2}-\dfrac{1}{(t+2)^2}$，

当 $|t|<2$ 时，$\dfrac{1}{t+2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{t}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{t}{2})^n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{2^n}$，

$$\frac{1}{(t+2)^2}=(-\frac{1}{t+2})'=(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n})'$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nt^{n-1}}{2^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nt^{n-1}}{2^{n+1}}$$

因此，

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nt^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(k+1)t^k}{2^{k+2}}\qquad(k=n-1)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)t^n}{2^{n+2}}$$

故 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+2}})t^n,\quad |t|<2,$$

即 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+2}})(x-2)^n,\quad |x-2|<2.$$

注意，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{n+1}{2^{n+2}})(x-2)^n$ 在 $|x-2|=2$ 是不收敛的（通项不趋于零）.

二十三、设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.　(2014—2015)

解：级数的前 n 项和为为 $S_n=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

因此，数列 $\{a_n\}$ 有界，设 $|a_n|\le M$，于是，有 $|a_nb_n|\le M|b_n|$.

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛.

由比较审敛法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛.