厦门大学《线性代数》课程期中试题·答案

考试日期：2014&15.11　信息学院自律督导部整理

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 对于n阶可逆矩阵A，B，则下列等式中（ B ）不成立.

(A) $\left|(AB)^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right| \cdot \left|B^{-1}\right|$　　(B) $\left|(AB)^{-1}\right| = (1/\left|A^{-1}\right|)\cdot(1/\left|B^{-1}\right|)$

(C) $\left|(AB)^{-1}\right| = |A|^{-1} \cdot |B|^{-1}$　　(D) $\left|(\mathbf{AB})^{-1}\right| = 1/|\mathbf{AB}|$

2. 设A、B为同阶方阵，则必有(D)

A. $|A+B|=|A|+|B|$　　B. $AB=BA$

C. $(AB)^T=A^TB^T$　　D. $|AB|=|BA|$

3. 设A、B均为n阶矩阵，满足$AB=O$，则必有（ D ）

A. $|A|+|B|=0$　　B. $r(A)=r(B)=0$

C. $A=O$或$B=O$　　D. $|A|=0$或$|B|=0$

4. 设$A=(a_{ij})_{3\times3}$，$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，那么

（ C ）.

（A）$AP_1P_2=B$　　（B）$AP_2P_1=B$　　（C）$P_1P_2A=B$　　（D）$P_2P_1A=B$

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$是四维列向量，且$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则

$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=$（ C ）.

（A）$m+n$　　（B）$-(m+n)$　　（C）$n-m$　　（D）$m-n$

6. 下列矩阵是行最简形矩阵的是（ B ）.

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. 设n阶方阵A、B、C满足$ABC=E$，则必有（ C ）。

A. $ACB=E$　　B. $CBA=E$

C. $BCA=E$　　D. $BAC=E$

8. 若同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有（ C ）。

A. $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$　　　　B. $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\boldsymbol{B}$ 不可逆

C. $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})$　　　　D. $|A|=0$，$|B|\neq 0$

9. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则下面结论错误的是（ B ）。

A. $|A|\neq 0$　　　　B. $|A^*|=|A|^{n+1}$

C. A 与 E 行等价　　　　D. $r(A)=n$

10、设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 A 的秩为 $R(A)=r$，则下面结论正确的是（ C ）。

A. A 的 r 阶子式都不为零。　　　　B. A 的 $r-1$ 阶子式都不为零。

C. A 的所有 $r+1$ 阶以上子式都为零。　　　　D. A 的 $r-1$ 阶以下子式都不为零。

二、填空题（每空格 4 分，共 20 分）

1. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$ $\underline{\quad a^n+(-1)^{n+1}b^n \quad}$.

2. 设 $\alpha=(1,2,3)^T$，$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^T$，$A=\alpha\beta^T$，则 $A^n=$ $\underline{\quad 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad}$.

3. 设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -E_{n-1} \\ -1 & 0^T \end{pmatrix}$，则 $\det A=$（ B ）.

(A) 1　　　(B) -1　　　(C) $(-1)^{n-1}$　　　(D) $(-1)^n$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}^{-1}$ 中，第 3 行第 2 列的元素是（ B ）。

A. $\frac{1}{3}$　　　B. $\frac{1}{2}$　　　C. 1　　　D. $\frac{3}{2}$

5. 设四阶方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\underline{\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad}$.

三、计算题（共 45 分）

1. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ -b & a-b & -b & -b \\ b & b & a+b & b \\ -b & -b & -b & a-b \end{vmatrix}$$

解：$\begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ -b & a-b & -b & -b \\ b & b & a+b & b \\ -b & -b & -b & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ a & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b & b \\ -b & a-b & -b & -b \\ b & b & a+b & b \\ -b & -b & -b & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -b & a-b & -b & -b \\ b & b & a+b & b \\ -b & -b & -b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ -b & -b & -b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ -b & -b & -b & a-b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

2. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3+x \end{vmatrix}$$

解：课本题变形 $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2+a_3x+x^2 & a_3+x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & a_1+a_2x+a_3x^2+x^3 & a_2+a_3x+x^2 & a_3+x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4 & a_1+a_2x+a_3x^2+x^3 & a_2+a_3x+x^2 & a_3+x \end{vmatrix}$$

3. **解矩阵方程 $X = AX + B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.**

解：由 $X = AX + B$，得 $(E-A)X = B$

$$X=(E-A)^{-1}B,$$

为此对矩阵 $(E-A, B)$ 施行初等行变换化为行最简形矩阵，

$$(E-A,B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

所以 $X=(E-A)^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$，试用初等行变换将行阶梯型 F，并求 P_1、P_2、…、P_l，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$F，其中 P_1、P_2、…、P_l 为初等矩阵，l 初等变换次数。

解：$A \to E(1,2)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ **课本题多加了一个要求。**

$$\to E(3+1(2))\ (E(1,2)\ A)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to E(3+2(-1))\ (E(3+1(2))\ (E(1,2)\ A))=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $E(3+2(-1))\ E(3+1(2))\ E(1,2)\ A=F$

即 $A=E^{-1}(1,2)\ E^{-1}(3+1(2))\ E^{-1}(3+2(-1))\ F=P_1\ P_2\ P_3\ F$

所以 $P_1=E^{-1}(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$、$P_2=E^{-1}(3+1(2))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$、

$P_3=E^{-1}(3+2(-1))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$。

5．（6 分）设 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$，$D$ 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}，求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

解： $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$ 等于用 1, 3, −2, 2 替换 D 的第 3 行对应元素所得行列式，即

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\1&3&-2&2\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_4+c_3}}\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\-5&1&3&-1\\1&3&-2&0\\1&-5&3&0\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2+r_1}}\begin{vmatrix}3&1&-1&1\\-2&2&2&0\\1&3&-2&0\\1&-5&3&0\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2\div(-2),\text{按四列展开}}}\ 2\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&3&-2\\1&-5&3\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&4&-1\\0&0&3\end{vmatrix}=24$$

四、证明题（每小题 5 分，共 15 分）

1. 若 A，B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$. 证明 A 和 B 都是不可逆的.

证：假设 A 可逆，即 A^{-1} 存在，以 A^{-1} 左乘 $AB=0$ 的两边得 $B=0$，这与 B 是 n 阶非零矩阵矛盾；类似的，若 B 可逆，即 B^{-1} 存在，以 B^{-1} 右乘 $AB=0$ 的两边得 $A=0$，这与 A 是 n 阶非零矩阵矛盾，因此，A 和 B 都是不可逆的.

2、设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，证明 A 和 $A+2E$ 都可逆，并求 A^{-1} 和 $(A+2E)^{-1}$。

课本题。

3、设 n 阶方阵 A 可逆，证明 $(A^*)^*=$ 并求 A^{-1} 和 $(A+2E)^{-1}$。

证明：因为 A 可逆，所以 A^* 可逆。$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A^*|}(A^*)^*$ 得

$(A^*)^*=|A^*|\,(A^*)^{-1}$,同理 $A^*=|A|\,A^{-1}$，所以 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$。又 $|A^*|=|A|^{n-1}$

故 $(A^*)^*=|A^*|\,(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\dfrac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A$。证毕