



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2022.01.02

一、填空题：(每小题 4 分，共 24 分)

得 分

评阅人

1. 曲线 $y = \ln(1 + e^x)$ 的斜渐近线方程为 $y = x$ 。

2. 反正弦曲线 $y = \arcsin x$ 的拐点是 $(0, 0)$ 。

3. 设常数 a, b 满足 $\int \sqrt{x^2 + 4} dx = ax\sqrt{x^2 + 4} + b \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$, 则 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$ 。

4. $\int_{-3}^3 \frac{x^3 \cos^2 x}{\sqrt{1+x^2+x^4}} dx = 0$ 。

5. 悬链线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 上相应于 $-\ln 2 \leq x \leq \ln 2$ 的这一段曲线弧的长度为 $\frac{3}{2}$ 。

6. 设 $f(x) = \int_x^1 \cos t^2 dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 1$ 。

二、求下列的不定积分 (每小题 6 分，共 12 分)：

1. $\int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$;

解: $\int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d[\ln(x^2+1)] = \frac{1}{4} \ln^2(1+x^2) + C$

2. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$ 。

解: 令 $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, 代入

$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sin^2 t \cos t} d\sin t = \int \frac{1}{\sin^2 t} dt$

$= \int \csc^2 t dt = -\cot t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

三、求下列的定积分（每小题 8 分，共 16 分）：

1. $\int_{-1}^6 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx$;

解：令 $t = \sqrt[3]{x+2}$ ，则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^6 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{1+t} d(t^3-2) = \int_1^2 \frac{3t^2}{1+t} dt = \int_1^2 3t - 3 + \frac{3}{1+t} dt \\ &= \frac{3}{2} t^2 \Big|_1^2 - 3t \Big|_1^2 + 3 \ln(1+t) \Big|_1^2 = \frac{9}{2} - 3 + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{2} + 3 \ln 3 - 3 \ln 2\end{aligned}$$

2. $\int_0^\pi x \sin^2 x dx$ 。

解法一：
$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \sin^2 x dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

解法二：
$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi x dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi x \cos 2x dx = \frac{1}{4} x^2 \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 0 - 0 + 0 - 0 = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

四、（8 分）求反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ 。

解法一：
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx &= - \int_1^{+\infty} \arctan x d \frac{1}{x} = - \frac{\arctan x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d \arctan x \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x} + \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx = 0 + \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \Big|_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + 0 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad (\text{注: } \int \frac{\arctan x}{x^2} dx = - \frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法二: } \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx & \stackrel{t=\arctan x}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan^2 t} d(\tan t) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t \csc^2 t dt \\
 & = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t d(\cot t) = -t \cdot \cot t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot t dt = -t \cdot \cot t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \ln \csc t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 & = 0 - (-\frac{\pi}{4}) - 0 + \ln \sqrt{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2
 \end{aligned}$$

五、(14分) 设曲线 $y = xe^x$ 和直线 $y = ex$ 所围成的平面图形为 D 。试求: (1) 平面图形 D 的面积 A ; (2) 平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V 。

$$\text{解: (1) } A = \int_0^1 (ex - xe^x) dx = \left(\frac{e}{2} x^2 - xe^x + e^x \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad V &= \pi \int_0^e x^2(y) dy - \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot e \stackrel{y=xe^x}{=} \pi \int_0^1 x^2 d(xe^x) - \frac{\pi}{3} e \\
 &= \pi \int_0^1 (x^3 + x^2) e^x dx - \frac{\pi}{3} e = \pi (x^3 - 2x^2 + 4x - 4) e^x \Big|_0^1 - \frac{\pi}{3} e = 4\pi \left(1 - \frac{e}{3}\right)
 \end{aligned}$$

(2)的另外一种解法: 柱壳法。 $V = 2\pi \int_0^1 x \cdot (ex) dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot (xe^x) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\pi e}{3} x^3 \Big|_0^1 - 2\pi \int_0^1 x^2 e^x dx = \frac{2\pi e}{3} x^3 \Big|_0^1 - 2\pi (x^2 - 2x + 2) e^x \Big|_0^1 \\
 &= \frac{2\pi e}{3} - 0 - 2\pi e + 4\pi = 4\pi - \frac{4\pi e}{3}
 \end{aligned}$$

六、(8分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续且 $f(x) > 0$, 令 $F(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$, 证明 $F(x)$

在区间 $(0, +\infty)$ 上单调增加。

证: 由题意, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 可导, 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$$F'(x) = \frac{xf(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x t f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2} = \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2} \cdot f(x)$$

由积分中值定理, 存在 $\xi \in (0, x)$, 使得 $\int_0^x (x-t) f(t) dt = (x-\xi) f(\xi) x$ 。因此

$$F'(x) = \frac{(x-\xi) f(\xi) x}{\left(\int_0^x f(t) dt\right)^2} \cdot f(x) > 0, \text{ 故 } F(x) \text{ 在区间 } (0, +\infty) \text{ 上单调增加。}$$

七、（10 分）试求：（1）函数 $f(x) = (1+x)\ln^2(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式；

（2）函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)}$ 。

解法一：（1）由 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ，故

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right)^2 = (1+x)x^2\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right)^2 \\ &= (1+x)x^2\left(1 - x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right) = (1+x)x^2\left(1 - x + \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= x^2\left(1 - x^2 + \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)\right) = x^2\left(1 - x^2 + \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)\right) = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)。 \end{aligned}$$

$$(2) \because e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x = \left[1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + o(x^4)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right] = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)，$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^4)\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)} = 1。$$

解法二：（1）由 $f'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x)$ ，

$$f''(x) = 2(x+1)^{-1} \ln(x+1) + 2(x+1)^{-1} = \frac{2[\ln(1+x) + 1]}{x+1}，$$

$$f'''(x) = \frac{2[\ln(1+x) + 1]}{x+1} = \frac{2(1+x)^{-1}(x+1) - 2[\ln(1+x) + 1]}{(x+1)^2} = \frac{-2\ln(1+x)}{(x+1)^2}，$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2(x+1)^{-1}(x+1)^2 + 4(x+1)\ln(1+x)}{(x+1)^4} = \frac{-2 + 4\ln(1+x)}{(x+1)^3}，$$

得 $f(0) = 0$ ， $f'(0) = 0$ ， $f''(0) = 2$ ， $f'''(0) = 0$ ， $f^{(4)}(0) = -2$ 。

故函数 $f(x) = (1+x)\ln^2(1+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4) = x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)。$$

(2) 令 $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $h(x) = \cos x$, 则

$$g'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad g''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad g'''(x) = (3x - x^3)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$g^{(4)}(x) = (3 - 3x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} + (3x - x^3)xe^{-\frac{x^2}{2}} = (-x^4 + 3)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{得 } g(0) = 1, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = -1,$$

$g'''(0) = 0, \quad g^{(4)}(0) = 3$ 。故函数 $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式为

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)。$$

又 $h'(x) = -\sin x, \quad h''(x) = -\cos x, \quad h'''(x) = \sin x, \quad h^{(4)}(x) = \cos x$, 得 $h(0) = 1, \quad h'(0) = 0,$

$h''(0) = -1, \quad h'''(0) = 0, \quad h^{(4)}(0) = 1$, 故 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ 。从而

$$e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x = (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)) - [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)] = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)。$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^2 - (x^2 - \frac{1}{12}x^2 + o(x^4))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{12}x^2 + o(x^2)} = 1。$$

八、(8 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上有二阶导数且 $f''(x) \geq 0$ 。现已知 $f(1) = -4, \quad f'(1) = 2$,

证明: 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有且只有一个实根。

证: 由泰勒公式, 存在 $\xi \in (1, x)$, 使得 $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2$, 又根据题

意, $f''(\xi) \geq 0$, 从而有 $f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1) = -4 + 2(x-1) = 2x - 6$, 故有 $f(3) \geq 0$, 又

$f(1) = -4$, 因此由闭区间连续函数的介值定理, 知方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, 3]$ 上有一个实根。

另一方面, 由 $f''(x) \geq 0$, 故 $f'(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上不减, 即有 $f'(x) \geq f'(1) = 2$, 从而 $f(x)$ 在

区间 $[1, +\infty)$ 单调递增, 因此方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 的实根是唯一的。