多元函数微分学

一、设$y=f(x,t)$，而$t=t(x,y)$是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的函数，其中f,F都具有一阶连续偏导数，试证明：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}$.　　　　（2008-2009）

解：本题可看成方程组$\begin{cases} y=f(x,t) \\ F(x,y,t)=0 \end{cases}$的隐函数求导问题．注：两个方程有两个是函数，自变量一个，即x.

方程组$\begin{cases} y=f(x,t) \\ F(x,y,t)=0 \end{cases}$对$x$求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0 & (2) \end{cases}.$$

由（2），$\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\dfrac{\partial f}{\partial t}=0$. 由（1）可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial f}{\partial x})=0.$$

移项后，$(\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial t})\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x}$，即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}$.

二、 设函数$f(x,y,z)=xy^2z^3$，且有方程 $x^2+y^2+z^2=3xyz$ ①

（1）验证在点$(1,1,1)$近旁由方程①式能确定可微的隐函数$z=z(x,y)$；

（2）试求$f_x(x,y,z(x,y))$. ·　　　　（2008-2009）

解：（1）记函数$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz$.

因为$F(x,y,z)$在$(1,1,1)$的邻域内具有连续的偏导数，且

$$F_x = 2x - 3yz\text{，}\ F_y = 2y - 3xz\text{，}\ F_z = 2z - 3xy\,.$$

$$F(1,1,1) = 1^2 + 1^2 + 1^2 - 3 = 0\,,$$

$$F_z(1,1,1) = 2 - 3 = -1 \neq 0\,.$$

因此，由隐函数存在定理，在点$(1,1,1)$近旁由方程①式能确定可微的隐函数$z = z(x,y)$.

（2）由隐函数的求导公式，$\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{2x-3yz}{2z-3xy}$.

$$f_x(x,y,z(x,y)) = y^2z^3 + 3xy^2z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y^2z^3 - 3xy^2z^2 \cdot \frac{2x-3yz}{2z-3xy}\,.$$

三、设有一小山，取它的底面所在的平面为xoy坐标面，其底部所占的闭区域为$D = \{(x,y)\,|\,x^2 + y^2 - xy \le 75\}$，小山的高度函数为 $h = f(x,y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$ 。

（1）设$M(x_0,y_0) \in D$，问 $f(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为$g(x_0,y_0)$，试写出$g(x_0,y_0)$的表达式；

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚找一上山坡度最大的点作为攀岩的起点，也就是说，要在D的边界线$x^2 + y^2 - xy = 75$上找出（1）中$g(x,y)$达到最大值的点。试确定攀岩起点的位置.

（2008-2009）

解：$\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0) = (-2x_0 + y_0, -2y_0 + x_0)$，

$$\vec{s} = \frac{1}{|\mathrm{grad}\ f|}\mathrm{grad}\ f = \frac{1}{\sqrt{(-2x_0+y_0)^2 + (-2y_0+x_0)^2}}(-2x_0 + y_0, -2y_0 + x_0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}}(-2x_0 + y_0, -2y_0 + x_0)$$

（1） $f(x,y)$在该点沿$\vec{s}$方向的方向导数最大.

$$g(x_0,y_0) = |\mathrm{grad}\ f| = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}\,.$$

（2）作拉格朗日函数$L(x,y,\lambda) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 75)$.

令 $\begin{cases} L_x = 10x - 8y + \lambda(2x - y) = 0 & (1) \\ L_y = 10y - 8x + \lambda(2y - x) = 0 & (2) \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - xy - 75 = 0 & (3) \end{cases}$，

由（1）乘 x，（2）乘 y 后两式相减，得

$$10x^2 - 10y^2 + \lambda(2x^2 - 2y^2) = 0\text{，即}(5+\lambda)(x^2 - y^2) = 0.$$

如果 $\lambda = -5$，则由（1）（2），$x = y = 0$，则（3）不成立．所以 $\lambda \neq -5$．

于是，$x = \pm y$，代入（3），得驻点 $(5,-5), (-5,5), (5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), (-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$．

经计算，可得 $g(5,-5) = g(-5,5) = 15\sqrt{2}$，$g(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}) = g(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}) = 5\sqrt{6}$．

故攀岩的起点应设在 $(5,-5)$ 或 $(-5,5)$ 的位置.

四、已知 $f(x,y,z) = \dfrac{x\sin y + y\sin z + z\sin x}{\cos x + \cos y + \cos z}$，则 $f_x(0,0,\dfrac{\pi}{2}) = $____________.

解：$f(x,0,\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\frac{\pi}{2}\sin x}{\cos x + 1}$，则

$$f_x(0,0,\frac{\pi}{2}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,0,\frac{\pi}{2})\Big|_{x=0} = \frac{\pi}{2}\frac{\cos x(\cos x + 1) + \sin^2 x}{(\cos x + 1)^2}\Big|_{x=0} = \frac{\pi}{4}.$$

五、设函数 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x(0,0) = 2, f_y(0,0) = 3$，则下列正确的是（）．

（2009-2010）

（A）$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)} = 3\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$.

（B）曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $(2,3,1)$．

（C）曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(0,3,1)$．

（D）曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(1,0,2)$．

解：$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)} = f_x(0,0)\mathrm{d}x + f_y(0,0)\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y$，所以（A）不正确.

记 $F(x,y) = f(x,y) - z$，则曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为

$$(f_x(0,0), f_y(0,0), -1) = (2,3,-1).$$

故（B）不正确.

选择 y 为参数，曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=0 \end{cases}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=f(0,y) \end{cases}$，于是 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(0,1,f_y(0,0))=(0,1,3)$. 故（C）不正确.

选择 x 为参数，曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=f(x,0) \end{cases}$，于是 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(1,0,f_x(0,0))=(1,0,2)$. 故（D）正确.

六、设 $u=f(x+y,xz)$ 有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$（　　）. （2009-2010）

（A）$xf_2'+xf_{11}''+(x+z)f_{12}''+xzf_{22}''$　　（B）$xf_{12}''+xzf_{22}''$

（C）$f_2'+xf_{12}''+xzf_{22}''$　　（D）xzf_{22}''.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot z$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=f_{12}'\cdot x+f_{22}'\cdot x\cdot z+f_2'$，故（C）是正确的.

七、已知 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. （2009-2010）

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot(-\dfrac{y}{x^2})=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

故
$$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,1)}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,1)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{d}y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

八、已知曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线方向为 $\vec{T}$，求函数 $f(x,y,z)=x^z+\ln\dfrac{y}{z}$ 在点 $(1,2,1)$ 处沿方向 $\vec{T}$ 的方向导数. （2009-2010）

解：由$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$两边关于$x$求导，得$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z-x}{y-z} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-x}{z-y} \end{cases}$.

故曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线方向为$\vec{T}=(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})\Big|_{(1,-2,1)}=(1,0,-1)$，其方向余弦为

$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)=(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$.

又$f_x=zx^{z-1}$，$f_y=\dfrac{1}{y}$，$f_z=x^z\ln x-\dfrac{1}{z}$，则函数$f(x,y,z)$在点$(1,2,1)$处沿方向$\vec{T}$的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(f_x\cos\alpha+f_y\cos\beta+f_z\cos\gamma)\Big|_{(1,2,1)}=1\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times 0+(-1)\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}.$$

九、设$y=f(x,t)$，而$t=t(x,y)$是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的函数，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，其中$f,F$都具有一阶连续偏导数.　　　　（2009-2010）

解：同 2008-2009.

十、某厂生产甲、乙两种产品，当产量分别为x和y（吨）时的总收益函数为

$R(x,y)=27x+42y-x^2-2xy-4y^2$，总成本函数为$C(x,y)=36+12x+8y$（万元）

除此之外，生产甲种产品每吨需支付排污费 1 万元，生产乙种产品每吨需支付排污费 2 万元，

（1）在不限制排污支出的情况下，两种产品的产量各为多少时总利润最大？并求最大总利润.

（2）在限制排污总支出为6万元时，两种产品的产量各为多少时总利润最大？并求最大总利润.（2009-2010）

解：利润函数为$L(x,y)=R(x,y)-C(x,y)-x-2y=14x+32y-x^2-2xy-4y^2-36$.

（1）令$\begin{cases} L_x=14-2x-2y=0 \\ L_y=32-2x-8y=0 \end{cases}$，得唯一驻点$(4,3)$.

因实际问题的最大值存在，故甲产品和乙产品的产量分别为 4 吨和 3 吨时，利润最大，最大利润为 40 万元.

（2）作拉格朗日函数

$F(x,y)=L(x,y)+\lambda(x+2y-6)=14x+32y-x^2-2xy-4y^2-36+\lambda(x+2y-6)$，

令

$$\begin{cases} F_x = 14 - 2x - 2y + \lambda = 0 \\ F_y = 32 - 2x - 8y + 2\lambda = 0, \\ F_\lambda = x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

解得唯一驻点 $(2,2)$. 因实际问题的最大值存在，故甲产品和乙产品的产量分别为 2 吨和 2 吨时，利润最大，最大利润为 28 万元.

十一、设二元函数 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，$u=xy$，$v=x^2+y^2$,求 z 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 与二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. （2010-2011）

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\frac{\partial u}{\partial y}=x,\frac{\partial v}{\partial x}=2x,\frac{\partial v}{\partial y}=2y.$

于是，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}+2y\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})+2\frac{\partial f}{\partial v}+2x(y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}+y(x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})+2x(x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})+2\frac{\partial f}{\partial v}+2y(x\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+2\frac{\partial f}{\partial v}+4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

十二、求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+y^2=4x \end{cases}$ 在点 $M(0,0,4)$ 处的切线方程和法平面方程。 （2010-2011）

解：改写方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+y^2=4x \end{cases}$为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ (x-2)^2+y^2=4 \end{cases}$，于是将曲线在 xoy 平面上方的部分写成参数方程$\begin{cases} x=2+2\cos t \\ y=2\sin t \\ z=\sqrt{16-x^2-y^2}=\sqrt{8-8\cos t} \end{cases}$，$0\le t\le 2\pi$.

点$(0,0,4)$对应于$t=\pi$，故该点处的切向量为

$$\vec{T}=(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})\Big|_{t=\pi}=(-2\sin t,2\cos t,\frac{8\sin t}{2\sqrt{8-8\cos t}})\Big|_{t=\pi}=(0,2,0).$$

故所求的切线方程为$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-4}{0}$，或$\begin{cases} x=0 \\ z=4 \end{cases}$.

法平面方程为$0\cdot(x-0)+2(y-0)+0\cdot(z-4)=0$，即 $y=0$.

十三、设函数$u=xy^2z$，(1)求u函数在点$M_0(1,-1,2)$指向$M_1(2,1,-1)$的方向导数 ;(2)问函数u在M_0处沿什么方向的方向导数最大？它的最大值是多少？（2010-2011）

解：（1）$\overrightarrow{M_0M_1}=(1,2,-3)$，方向为

$$\vec{s}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|}\overrightarrow{M_0M_1}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}(1,2,-3)=(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}).$$

于是，所求的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,-1,2)}=(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma)\Big|_{(1,-1,2)}$$

$$=(\frac{1}{\sqrt{14}}y^2z+\frac{2}{\sqrt{14}}\cdot 2xyz-\frac{3}{\sqrt{14}}xy^2)\Big|_{(1,-1,2)}=-\frac{9}{\sqrt{14}}.$$

（2）$\mathrm{grad}\,u\big|_{(1,-1,2)}=(y^2z,2xyz,xy^2)\big|_{(1,-1,2)}=(2,-4,1)$，梯度的大小为$\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}$.

因此，函数u在M_0处沿方向$(\frac{2}{\sqrt{21}},-\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}})$的方向导数最大，它的最大值是$\sqrt{21}$.

十四、求函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$的极值。（2010-2011）

解：令$\begin{cases} f_x(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2y+2)=0 \end{cases}$，解得$x=\frac{1}{2},y=-1$.

又 $f_{xx}(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(4x+4y^2+8y+4)$， $f_{xy}(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(4y+4)$， $f_{yy}(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}$.

于是，$A=f_{xx}(\frac{1}{2},-1)=2\mathrm{e}$，$B=f_{xy}(\frac{1}{2},-1)=0$，$C=f_{yy}(\frac{1}{2},-1)=2\mathrm{e}$，故 $AC-B^2=4\mathrm{e}^2>0$，且 $A>0$，

故 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 在 $(\frac{1}{2},-1)$ 取得极小值，极小值为 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}$.

十五、设 u 为定义在平面上的二元函数， u 在直角坐标和极坐标下的函数表达式分别为：

$u=f(x,y)=g(r,\theta)$。 设 u 关于 (r,θ) 有连续的二阶偏导数。 试将二元函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 表示成极坐标

(r,θ) 下所对应的形式。 （2011-2012）

解：由 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 可得 $r=\sqrt{x^2+y^2}$， $\theta=\arctan\frac{y}{x}$.

因此，
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\theta}{r}.$$

于是，
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial g}{\partial r}(-\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}+(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x})\cos\theta$$

$$+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}(\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x})$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos\theta-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta})\cos\theta$$

$$+\frac{\sin\theta}{r^2}\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}(\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2})$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos^2\theta-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}.$$

十六、在第一卦限内做椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面使得该切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积最小。 求此切平面与椭球的切点， 并求此最小体积。 （2011-2012）

解：设切点坐标为(x_0, y_0, z_0)，则过该点的切平面方程为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0\text{，}$$

即$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}+\dfrac{z_0z}{c^2}=1$.

于是，切平面在三个坐标轴上的截距为$\dfrac{a^2}{x_0},\dfrac{b^2}{y_0},\dfrac{c^2}{z_0}$，故该切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积为

$$V=\frac{1}{6}\frac{a^2}{x_0}\cdot\frac{b^2}{y_0}\cdot\frac{c^2}{z_0}=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}.$$

问题可转化为$f(x,y,z)=xyz\ (x>0,y>0,z>0)$在条件$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$下的最大值.

作拉格朗日函数$L(x,y,z)=xyz+\lambda(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1)$，令

$$\begin{cases} L_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0 \\ L_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0 \\ L_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0 \\ L_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\text{，}$$

代入最后一个方程，得$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}, y=\dfrac{b}{\sqrt{3}}, z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$.

因此，切点取为$(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}})$时，该切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积最小，最小体积为

$$V=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.$$

十七、设$f(x,y)$为平面上二元函数，$f(x,y)$在平面上任意一点$P=(x,y)$处的梯度向量为$\nabla f(x,y)=(2x,y)$。给定$P_0=(1,1)$，试求$f(x,y)$的过P_0点的等高线。

（注：等高线即为$f(x,y)$取值为给定数值的点的轨迹。）　　（2011-2012）

解：由$\nabla f(x,y)=(2x,y)$，得$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x$，则$f(x,y)=x^2+\varphi(y)$. 又$\dfrac{\partial f}{\partial y}=y$，得$\varphi'(y)=y$，故

$\varphi(y)=\frac{1}{2}y^2+C$，$C$ 为常数. 因此，$f(x,y)=x^2+\frac{1}{2}y^2+C$.

因此，$f(x,y)$ 的过 P_0 点的等高线为 $f(x,y)=x^2+\frac{1}{2}y^2+C=1^2+\frac{1}{2}\times1^2+C$，即 $x^2+\frac{1}{2}y^2=\frac{3}{2}$.

十八、求曲线Γ：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\(x-1)^2+y^2=2\end{cases}$ 在点（2, 1，1）处的对称式切线方程。（2011-2012）

解：将Γ改写成参数方程$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos t\\ y=\sqrt{2}\sin t\\ z=\sqrt{6-x^2-y^2}=\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos t}\end{cases}$.

点（2, 1，1）对应于点$t=\frac{\pi}{4}$.

曲线Γ在点（2, 1，1）处的切向量为

$$\vec{T}=(-\sqrt{2}\sin t,\sqrt{2}\cos t,\frac{2\sqrt{2}\sin t}{2\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos t}})\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=(-1,1,1).$$

故所求切线方程为$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$.

十九、证明：$f\left(x,y\right)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$\left(0,0\right)$处连续，可导，但不可微.（2012-2013）

证明：当$\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)$时，$\left|f\left(x,y\right)\right|\leq|x|+|y|+|x|\frac{\left|x^2y\right|}{x^4+y^2}\leq\frac{3}{2}|x|+|y|$.

因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(\frac{3}{2}|x|+|y|)=0$，故$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f\left(x,y\right)=0=f(0,0)$，$f\left(x,y\right)$在点$\left(0,0\right)$处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f\left(\Delta x,0\right)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f\left(0,\Delta y\right)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\Delta y-0}{\Delta y}=0.$$

$f\left(x,y\right)$在点$\left(0,0\right)$处可导.

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{f\left(\Delta x,\Delta y\right)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x+\Delta y+\dfrac{(\Delta x)^3\Delta y}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^2}-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^3\Delta y}{((\Delta x)^4+(\Delta y)^2)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

而 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=(\Delta x)^2}}\frac{(\Delta x)^3\Delta y}{((\Delta x)^4+(\Delta y)^2)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^4}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{1+(\Delta x)^2}},$$

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{1+(\Delta x)^2}}=\dfrac{1}{2}$， $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{1+(\Delta x)^2}}=-\dfrac{1}{2}$，所以极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{1+(\Delta x)^2}}$ 不存在，故

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y\neq o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

所以， $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

二十、设方程组 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v\end{cases}$ 确定反函数组 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$， $z=u^2+v^2$， 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

（2012-2013）

解：方程组 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v\end{cases}$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}1=(\mathrm{e}^u+\sin v)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ 0=(\mathrm{e}^u-\cos v)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin v}{1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u[1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)]}\end{cases}.$

方程组 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v\end{cases}$ 两边对 y 求导，得

$$\begin{cases}0=(\mathrm{e}^u+\sin v)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ 1=(\mathrm{e}^u-\cos v)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases},$$

解得$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\cos v}{1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)]}\end{cases}$.

于是， $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2u^2\sin v+2v(\cos v-\mathrm{e}^u)}{u[1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)]}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-2u^2\cos v+2v(\sin v+\mathrm{e}^u)}{u[1+\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)]}.$$

二十一、设$z=f(2x-y,y\sin x)$，其中f具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. （2012-2013）

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+y\cos xf_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(-f_{11}''+\sin xf_{12}'')+\cos xf_2'+y\cos x(-f_{21}''+\sin xf_{22}'')$$

$$=-2f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)f_{12}''+\cos xf_2'+y\cos x\sin xf_{22}''.$$

二十二、求曲线$\begin{cases}x^2+3y^2+z^2=8\\ z^2=2x^2+2y^2\end{cases}$在点$(-1,1,-2)$处的切线方程与法平面方程. （2012-2013）

解：记$F(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2-8,\ G(x,y,z)=z^2-2x^2-2y^2$.

$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}6y & 2z\\ -4y & 2z\end{vmatrix}=20yz$，$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}2z & 2x\\ 2z & -4x\end{vmatrix}=-12zx$，$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & 6y\\ -4x & -4y\end{vmatrix}=16xy$.

则曲线$\begin{cases}x^2+3y^2+z^2=8\\ z^2=2x^2+2y^2\end{cases}$在点$(-1,1,-2)$处的切向量为

$$\vec{T}=\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)\Big|_{(-1,1,-2)}=(20yz,-12zx,16xy)\Big|_{(-1,1,-2)}=-8(5,3,2)$$

故所求的切线方程为$\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{2}$，法平面方程为$5(x+1)+3(y-1)+2(z+2)=0$，即

$5x+3y+2z+6=0$.

二十三、求曲线$C:\begin{cases}x^3+y^3+z^3=3\\ z=xy\end{cases}$在$(1,1,1)$处的法平面. （2013-2014）

解一： 因为曲面$x^3+y^3+z^3=3$在$(1,1,1)$处的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(3x^2,3y^2,3z^2)\big|_{(1,1,1)}=(3,3,3)$.

故曲面 $x^3+y^3+z^3=3$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为 $3(x-1)+3(y-1)+3(z-1)=0$.

曲面 $z=xy$ 在 $(1,1,1)$ 处的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(y,x,-1)\big|_{(1,1,1)}=(1,1,-1)$.

故曲面 $z=xy$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面方程为 $(x-1)+(y-1)-(z-1)=0$.

因此，曲线 C 在 $(1,1,1)$ 处的切线方程为：$\begin{cases}3(x-1)+3(y-1)+3(z-1)=0\\ (x-1)+(y-1)-(z-1)-0\end{cases}$.

从而切向向量可取为 $\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-2,2,0)$， 法平面方程为 $(x-1)-(y-1)=0$.

解二：方程组 $\begin{cases}x^3+y^3+z^3=3\\ z=xy\end{cases}$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}3x^2+3y^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3z^2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{cases}$$

将 $(1,1,1)$ 代入，$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{cases}$，于是，可得 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$，所以，切向量可取成

$$\vec{T}=\left\{1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right\}_{(1,1,1)}=\{1,-1,0\}.$$

于是，法平面方程为 $(x-1)-(y-1)=0$.

二十四、计算：（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$；　（2）设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 $\mathrm{d}z$.　（2013-2014）

解：（1）因 $0\le\left|\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{|xy|\cdot|x+y|}{x^2+y^2}\le\dfrac{|x+y|}{2}\to 0,(x,y)\to(0,0).$

于是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}=0.$

（2）对 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 两端求微分，得 $\dfrac{1}{z}\mathrm{d}x-\dfrac{x}{z^2}\mathrm{d}z=\dfrac{y}{z}\left(-\dfrac{z}{y^2}\right)\mathrm{d}y+\dfrac{y}{z}\cdot\dfrac{1}{y}\mathrm{d}z$，即

$$\frac{z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z}{z} = \frac{y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y}{y},$$

由此解得 $\mathrm{d}z = \dfrac{z(y\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y)}{y(z+x)}$.

二十五、已知$f(x,y) = x^2 + (\ln y)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x^2+y^2}}$,求$f_x'(2,1)$, $f_y'(2,1)$.　　（2013-2014）

解: 因 $f(x,1) = x^2$, $f(2,y) = 4 + (\ln y)\arcsin\sqrt{\dfrac{2}{4+y^2}}$,

于是， $f_x'(2,1) = \left.\dfrac{\mathrm{d}f(x,1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = 4,$

$$f_y'(2,1) = \left.\frac{\mathrm{d}f(2,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1} = \left.\left(\frac{1}{y}\arcsin\sqrt{\frac{2}{4+y^2}} + (\ln y)\cdot\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{4+y^2}}\right)_y'\right)\right|_{y=1} = \arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

二十六、试讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性.　　（2013-2014）

解：因 $\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0),$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 因为

$$f_x'(0,0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{0-0}{x} = 0,$$
$$f_y'(0,0) = \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to0}\frac{0-0}{y} = 0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导. 下面考虑可微性. 令

$$\Delta f(0,0) = f(x,y) - f(0,0) = f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y + \omega,$$

则 $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0^+$ 时，$\dfrac{\omega}{\rho} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$

于是 $$0\le\left|\frac{\omega}{\rho}\right|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to 0,\quad(\rho\to 0).$$

因此$\omega=o(\rho)$，故 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可微.

二十七、设$f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$，试证明：$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=0.$ （2013-2014）

解法一：由

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yf}{xz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_y=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\cdot\left(\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\right)=\frac{f}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{yf}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=x\cdot\frac{yf}{xz}+y\cdot\frac{f}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)-z\cdot\frac{yf}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0.$$

解法二：由 $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=f(x,y,z)$ 可得

$$f(u,v,w)=f(x,y,z),$$

其中$u=\lambda x,v=\lambda y,w=\lambda z$,将上式两端对$\lambda$求导数，得

$$\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial v}\cdot y+\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial w}\cdot z=0.$$

上式两端同乘以λ，得

$$\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u}\cdot u+\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial v}\cdot v+\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial w}\cdot w=0.$$

二十八、求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处沿外法线方向的方向导数. （2013-2014）

解：设$F=x^2+y^2+z^2-1$,则球面上点(x,y,z)处的外法线向量为

$$\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=2\{x,y,z\},$$

因点 P_0 在球面上，故 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$．记球面在点 P_0 处的单位外法线方向为$\overrightarrow{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，

则$\cos\alpha=\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=x_0,\cos\beta=\dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=y_0,\cos\gamma=\dfrac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=z_0,$

又因为 grad $f=2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=2\{x,y,z\}$,故 grad $f\,|_{P_0}=2\{x_0,y_0,z_0\}$,因此

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n_0}}=2\{x_0,y_0,z_0\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=2.$$

二十九、求曲线$C:\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$上到$xoy$平面距离最近的点.（2013-2014）

解：**解法一**：令$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$，可得：

$$\begin{cases}\lambda+2\mu x=0\\\lambda+2\mu y=0\\2z+\lambda+2\mu z=0\\x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}。$$

（1）$\mu=0$的情形，此时$\lambda=0$，$z=0$，解得$x=0,y=1$或者$x=1,y=0$；因为$z=0$，所以$(1,0,0)$和$(0,1,0)$为所求的点；

（2）$\mu\neq 0$的情形，则$x=y$。代入后两个方程解得：

$(x,y,z)=(0,0,1)$或$(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{-1}{3})$， 但这两点距离$xoy$平面的距离分别为$1$和$\dfrac{1}{3}$。

综上，距离xoy平面的距离的点应为$(1,0,0)$和$(0,1,0)$.

解法二：题目求点$(x,y,z)\in C$,使得$|z|$最小. 因$|z|\geq 0$,故若曲线C与平面$z=0$有交点，则这些交点即为所求. 由$\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\\z=0\end{cases}$得所求点为$(1,0,0)$和$(0,1,0)$.

注：若所作拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=|z|+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$$

或

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=\sqrt{z^2}+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$$

则需注明$z\neq 0$.否则L_z'在竖坐标$z=0$的点处偏导数不存在,也就无法通过求L的驻点的方式得到本题的

所求点(1,0,0)和(0,1,0). 但若考虑 $z=0$ 的情况，则就是第二种解法,可直接求出所求的点，也就用不上拉格朗日乘数法了.

三十、求曲面 $\sin xy+\sin yz+\sin zx=1$ 在 $(1,\frac{\pi}{2},0)$ 处的切平面方程. （2014-2015）

解：记 $F(x,y,z)=\sin xy+\sin yz+\sin zx-1$，则已知曲面在 $(1,\frac{\pi}{2},0)$ 处的法向量为

$$\vec{n}=\left\{F_x,F_y,F_z\right\}\Big|_{(1,\frac{\pi}{2},0)}=\left\{y\cos xy+z\cos xz,x\cos xy+z\cos yz,y\cos yz+x\cos xz\right\}\Big|_{(1,\frac{\pi}{2},0)}=\{0,0,\frac{\pi}{2}+1\}$$

故所求的切平面方程为 $z=0$.

三十一、求函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 的方向导数.

（2014-2015）

解：$\overrightarrow{AB}=\left\{2,-2,1\right\}$，$\overrightarrow{AB^0}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\left\{2,-2,1\right\}=\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$. 因此，所求的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(1,0,1)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_{(1,0,1)}$$

$$=\left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{y^2+z^2}}\cdot(-\frac{2}{3})+\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2z}{2\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{1}{3}\right)\Bigg|_{(1,0,1)}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

三十二、设函数 $z=f(x+\mathrm{e}^y,x^2y)$ 的二阶偏导连续，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. （2014-2015）

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 2xy=f_1'+2xyf_2'$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\cdot\mathrm{e}^y+f_{12}''\cdot x^2+2xf_2'+2xy\cdot(f_{21}''\cdot\mathrm{e}^y+f_{22}''\cdot x^2)$$

$$=f_{11}''\cdot\mathrm{e}^y+(x^2+2xy\mathrm{e}^y)f_{12}''+2xf_2'+2x^3y\,f_{22}''$$

三十三、设 $z=\sqrt{|xy|}$，1）求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}$，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$；2）证明该函数在点 $(0,0)$ 处不可微. （2014-2015）

解：1）$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot\Delta y|}-0}{\Delta y}=0$.

2） $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$.

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$ 与 k 的选择有关.

所以极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在，所以该函数在点 $(0,0)$ 处不可微.

三十四、求曲线 $x^2+y^2-z^2=1$， $x+y-2z=0$ 在点（1,1,1）处的切线方程和法平面方程.

（2014-2015）

解：对方程组 $\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1\\ x+y-2z=0\end{cases}$ 两边求导，得 $\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\\ 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x-z}{z-2y}\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y}{z-2y}\end{cases}$

切向量为 $\vec{T}=\left\{1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right\}\Big|_{(1,1,1)}=\left\{1,\dfrac{2x-z}{z-2y},\dfrac{x-y}{z-2y}\right\}\Big|_{(1,1,1)}=\{1,-1,0\}$.

于是，所求的切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{0}$ 或 $\begin{cases}x+y-2=0\\ z=1\end{cases}$，

法平面方程为 $(x-1)-(y-1)=0$，即 $x-y=0$.

三十五、求曲面 $\Sigma: x^2+y^2-2z=0$ 上的点到点 $P(2,2,0)$ 的最短距离. （2014-2015）

解：作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-2z)$，令

$$L_x=2(x-2)+2\lambda x=0 \qquad (1)$$

$$L_y=2(y-2)+2\lambda y=0 \qquad (2)$$

$$L_z=2z-2\lambda=0 \qquad (3)$$

$$x^2+y^2-2z=0 \qquad (4)$$

由（1）和（2）得 $(x-2)y=x(y-2)$，即 $x=y$. 代入（4），由（3）得 $x^2=z=\lambda$.

将 $\lambda=x^2$ 代入（1），有 $x^3+x-2=0$ 解得 $x=1$，于是 $y=1$，$z=1$. 故求得唯一驻点 $(1,1,1)$

实际问题最短距离一定存在，故曲面 $\Sigma: x^2+y^2-2z=0$ 上的点 $(1,1,1)$ 到点 $P(2,2,0)$ 的距离

最短，最短距离为$d=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{3}$.

三十六、已知函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，（1）求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$，并说明函数$f(x,y)$在$(0,0)$处是否连续；（2）求在$(0,0)$处$f(x,y)$的偏导数；（3）问在$(0,0)$处$f(x,y)$是否可微？

（2015-2016）

解：（1）因为$0\le\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\le\dfrac{1}{4}\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$，因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}=0$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0=f(0,0),$$

故函数$f(x,y)$在$(0,0)$处连续.

（2）$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0.$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

（3）$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}]^2$

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}[\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}]^2=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\dfrac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2}]^2=\dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$，与$k$有关，故

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}]^2$$

不存在，即$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\neq f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$.

所以，函数$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.

三十七、设$y=y(x),z=z(x)$是由方程$\begin{cases}z=xf(x+y)\\ F(x,y,z)=0\end{cases}$所确定的函数，其中$f(x)$具有一阶连续导数，$F(x,y,z)$具有连续的一阶偏导数，且$F_y+xf'(x+y)F_z\neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.（2015-2016）

解： 方程组$\begin{cases} z = xf(x+y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$两边对 x 求导，得$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(x+y) + xf'(x+y)(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \\ F_x + F_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$.

由
$$F_y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(x+y)F_y + xf'(x+y)F_y(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$$
$$= f(x+y)F_y + xf'(x+y)F_y + xf'(x+y)(-F_x - F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})$$

即
$$[F_y + xf'(x+y)F_z]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(x+y)F_y + xf'(x+y)F_y - xF_x f'(x+y)$$

所以，
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+y)F_y + xf'(x+y)F_y - xF_x f'(x+y)}{F_y + xf'(x+y)F_z}.$$

三十八、求由方程 $xyz + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分.

（2015-2016）

解：对 $xyz + \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ 两边微分， $yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z + \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$

故 $\mathrm{d}z = -\dfrac{(x + yz\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x + (y + zx\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}y}{z + xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，所以 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)} = \mathrm{d}x - \sqrt{2}\mathrm{d}y.$

三十九、在曲面 $z = xy$ 上求出一点，使曲面 $z = xy$ 在该点的法向量与函数 $u = x^2+y^2+z^2$ 在点 $P(1,2,1)$ 处的梯度平行，并写出过该点的切平面方程. （2015-2016）

解：设所求点的坐标为 (x_0, y_0, z_0)，则曲面 $z = xy$ 在该点的法向量为 $\vec{n} = \{y_0, x_0, -1\}$，函数 $u = x^2+y^2+z^2$ 在点 $P(1,2,1)$ 处的梯度为 $\mathrm{grad}\,u\big|_{(1,2,1)} = \{2x, 2y, 2z\}\big|_{(1,2,1)} = \{2,4,2\}$.

由已知条件，$\vec{n} \,/\!/\, \mathrm{grad}\,u\big|_{(1,2,1)}$，则 $\dfrac{y_0}{2} = \dfrac{x_0}{4} = -\dfrac{1}{2}$，故 $x_0 = -2, y_0 = -1, z_0 = x_0y_0 = 2$.

于是，所求点的坐标为 $(-2,-1,2)$，过该点的切平面方程为

$$1\cdot(x+2) + 2(y+1) + (z-2) = 0，即 x + 2y + z + 2 = 0.$$

四十、求点 $(1,1,\dfrac{1}{2})$ 到曲面 $z = x^2+y^2$ 的最短距离. （2015-2016）

解：作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-\dfrac{1}{2})^2 + \lambda(x^2+y^2-z)$.

令$\begin{cases} L_x = 2(x-1) + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2(y-1) + 2\lambda y = 0 \\ L_z = 2(z-\frac{1}{2}) - \lambda = 0 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$，$x = y = \dfrac{1}{1+\lambda}$，$z = \dfrac{1+\lambda}{2} = \dfrac{1}{2x}$，由$z = x^2 + y^2$可知$\dfrac{1}{2x} = 2x^2$，即$x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$，

所以得到唯一驻点$(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}})$，根据实际情况，最短距离一定存在，故该点为所求，最短距离为$\sqrt{(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}-1)^2 + (\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}-1)^2 + (\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1}{2})^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}}.$

四十一、设$F(u,v)$可微，试证明曲面$F(\dfrac{x-a}{z-c}, \dfrac{y-b}{z-c}) = 0$上任一点处的切平面都通过一定点.

（2015-2016）

证明：设$G(x,y,z) = F(\dfrac{x-a}{z-c}, \dfrac{y-b}{z-c})$，$(x_0, y_0, z_0)$是曲面$F(\dfrac{x-a}{z-c}, \dfrac{y-b}{z-c}) = 0$上任一点，则该点处的法向量为

$$\vec{n} = \left\{G_x, G_y, G_z\right\} = \left\{\frac{1}{z_0-c}F_1', \frac{1}{z_0-c}F_2', -\frac{1}{(z_0-c)^2}[(x_0-a)F_1' + (y_0-b)F_2'\right\},$$

过该点的且平面方程为

$$\frac{1}{z_0-c}F_1' \cdot (x-x_0) + \frac{1}{z_0-c}F_2' \cdot (y-y_0) - \frac{1}{(z_0-c)^2}[(x_0-a)F_1' + (y_0-b)F_2'](z-z_0) = 0$$

取$x = a,\ y = b,\ z = c$，则有

$$\frac{1}{z_0-c}F_1' \cdot (a-x_0) + \frac{1}{z_0-c}F_2' \cdot (b-y_0) - \frac{1}{(z_0-c)^2}[(x_0-a)F_1' + (y_0-b)F_2'](c-z_0)$$

$$= \frac{1}{z_0-c}F_1' \cdot (a-x_0) + \frac{1}{z_0-c}F_2' \cdot (b-y_0) + \frac{1}{z_0-c}[(x_0-a)F_1' + (y_0-b)F_2'$$

因此，(a,b,c)在该切平面上.