0、行列式求值常用方法.

1). 用定义求　每行取1个数. 再乘$(-1)^{\text{逆序数}}$

2)、范德蒙德

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geq i>j\geq 1}(x_i-x_j)$$

必须确保形式一致.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots \\ x_1^4 & x_2^4 & \cdots \end{vmatrix}$$ 不是范德蒙德

3)、爪型

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ b_2 & a_2 & & \\ b_3 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ b_n & & & a_n \end{vmatrix}$$ 使用中间的爪将 b(或 c)全部消去.

$\frac{a_n}{a_n}\cdot b_n$

$$= \left[a_1-\left(\frac{b_2c_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_nc_n}{a_n}\right)\right]a_2a_3\cdots a_n.$$

4)、逐行/列加消

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ \cdots & & & & & \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{最后一列}-\text{倒数第二列}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 0 \\ \cdots & & & & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \cdots$$

关系不明确时可使用

5) 加边法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_{11} & a_{12} \\ b_3 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6)、整行加

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{第一列}+\text{其它各列}} \begin{vmatrix} x+a_1+\cdots+a_n & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & x & & a_n \\ & a_2 & & \vdots \\ & \vdots & & \\ & a_2 & & x \end{vmatrix} = (x+a_1+\cdots)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & x & & a_n \\ \vdots & a_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & & x \end{vmatrix}.$$

适用于每行/列元素之和相等

之后用第一列消去上三角中所有元素. 即可计算

7)、按行/列展开.

适用于某行上元素较少时　超过2个则不考虑此方法.

1. 代数余子式的性质.

2. (10分) 设 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 的第i行第j列元素a_{ij}的代数余子式记作A_{ij}.

求$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$.

解：$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=15.$

（写出$A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}$的行列式3分，行列式计算过程5分，结果2分。）

不要死算

注意 $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & \underline{A_{21}} \\ \underline{A_{12}} & A_{22} \end{pmatrix}$ 不同于普通行列式下标 $\begin{pmatrix} a_{11} & \underline{a_{12}} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\cdot A_{kj} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & 其它. \end{cases}$$

即不同行元素与代数余子式乘积 $=0$

$$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$$

- $r(A)=n-1$

$\Rightarrow |A|=0.\quad A\cdot A^*=|A|E=0 \quad r(A)+r(A^*)\leq n \quad r(A^*)\leq 1.$

$\Rightarrow$ 至少有1个 $n-1$阶子式 $\neq 0$ $\Rightarrow$. $\exists A_{ij}\neq 0.$ $\Rightarrow r(A^*)>0.$

$r(A)<n-1$

$\Rightarrow \forall A_{ij}$ 为A的$n-1$阶子式均为0.

伴随矩阵

$A^*=|A|\cdot A^{-1}$

1. 两边同乘A $\quad A\cdot A^*=A^*\cdot A=|A|E$
2. $|A^*|=\left||A|\cdot A^{-1}\right|=|A|^n\cdot|A|^{-1}=A^{n-1}$
3. $(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n\cdot|A|\cdot\frac{1}{k}\cdot A^{-1}=k^{n-1}\cdot|A|\cdot A^{-1}=k^{n-1}\cdot A^*$
4. $(A^{-1})^*=|A|^{-1}\cdot A$
   $(A^*)^{-1}=(|A|\cdot A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}\cdot A$
5. $(AB)^*=|AB|\cdot(AB)^{-1}=|A||B|\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}=B^*\cdot A^*$
6. $(A^*)^*=|A^*|\cdot(A^*)^{-1}=\left||A|\cdot A^{-1}\right|(|A|\cdot A^{-1})^{-1}=A^n|A|^{-1}|A|^{-1}A=A^{n-2}A$

15 / 235

2、矩阵的行列式计算.

3. (10分) 设A,B是n阶方阵，A^*是A的伴随矩阵，B^{-1}是B的逆矩阵，且$|A|=2$, $|B|=3$. 求行列式$|2A^*B^{-1}|$.

解：$|2A^*B^{-1}|=\left|2A^*B^{-1}\right|=2^n\left|A^*B^{-1}\right|=2^n|A^*|\cdot\left|B^{-1}\right|=2^n|A|^{n-1}|B|^{-1}=2^n\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=2^{2n-1}/3.$

（过程8分，结果2分）

A.B 矩阵

k 数.

$|AB|$. 矩阵A.B相乘后的行列式 最终结果是一个数

$|A||B|$: 矩阵A.B分别计算行列式后相乘. 2个数相乘

$|kA|$: 矩阵A先与常数k相乘, 再求行列式 $=k^n\cdot|A|$

$k|A|$ 矩阵A求行列式, 得到结果后再与k相乘

注意. A为矩阵. $|A|$为一个数

常用结论

$|AB|=|A||B|$

$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|} \qquad (A\cdot A^{-1}=E)$

$|A^*|=|A|^{n-1} \qquad (AA^*=|A|\cdot E)$

3、矩阵分块法

行列式 $\left|\begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix}\right| = |A|\cdot|B|$

转置 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}$.

逆 $\begin{bmatrix} A & \\ & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & C^{-1} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

其余通过行变换求。

求法：$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F & G \\ H & I \end{bmatrix} = E$.

求解 F, G, H, I.

4 解矩阵方程

$AX=B$ 求 X

① 改A $\begin{cases} EX = X \\ AX = B \end{cases}$ $\begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} X \\ B \end{pmatrix}$

② 改B $\begin{cases} AX = B \\ A\cdot A^{-1} = E \end{cases}$ $A^{-1}\cdot B = X$, $A^{-1}\cdot E = A^{-1}$ $A^{-1}(B\ E) = (X\ A^{-1})$ [redacted]该用····

③ 改X $\begin{cases} AX = B \\ AE = A \end{cases}$ $A(X\ E) = (B\ A)$, $A^{-1}(B\ A) = (X, E)$

要么改A. 要么改X. 再调整B

！必需先证明矩阵可逆才能进行下一步。否则还是老老实实代数求解。

5. 秩.

定义 最高阶非0子式, 某些题很有用.

8条性质. 证明会考, 需熟悉证明过程.

1) $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min(m,n)$.

2) $R(A) = R(A^T)$

3) $A \sim B$ $\quad r(A) = r(B)$

4). P, Q 可逆. $R(PAQ) = R(A)$

5). $\max(r(A), r(B)) \le R(A,B) \le R(A) + R(B)$

6). $R(A+B) \le R(A) + R(B)$

7) $R(AB) \le \min(R(A), R(B))$.

8). $R(A+E) + R(A-E) \ge n$

9) $A_{m\times n} \cdot B_{n\times l} = C$. 且 $R(A) = n$

则 $R(B) = R(C)$.

23级同学加一下.

密码是大学名字(4个字).