

高数竞赛阶段练习 4 学号_____ 姓名_____

一、填空题

1. 设函数 $z = f(xy, yg(x))$ ，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$ ，则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=1} =$ _____；
2. 设函数 $F(u, v)$ 具有连续的偏导数，且 $F'_u \bullet F'_v > 0$ ，函数 $y = f(x)$ 由 $F\left(\ln x - \ln y, \frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = 0$ 确定，则 $f'(x) =$ _____；
3. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(2, -2)$ 处可微，满足 $f(\sin(xy) + 2\cos x, xy - 2\cos y) = 1 + x^2 + y^2 + 0(x^2 + y^2)$ ， $0(x^2 + y^2)$ 表示比 $x^2 + y^2$ 为高阶无穷小（当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时），则该曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(2, -2, f(2, -2))$ 处的切平面方程 _____；
4. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ ，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续（填连续或不连续）_____（填可微或不可微）；
5. 设函数 $z = z(x, y)$ 由 $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定，其中 f 可导且 $2z \neq f'\left(\frac{z}{y}\right)$ ，则 $(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____；
6. 函数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$ 的极值情况：_____；
7. 点 $(2, 1, -3)$ 到直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{2}$ 的距离为_____；
8. 点 $A(1, 2, -1)$ ， $B(5, -2, 3)$ 在平面 $\Pi: 2x - y - 2z = 3$ 的两侧，过点 A, B 作球面 Σ 使其在平面 Π 上截得的圆 Γ 最小，则球面 Σ 的球心坐标为_____；
9. 函数 $u(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数，算子 A 定义为 $A(u) = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ ，则
- 1) $A(u - A(u)) =$ _____；2) 利用结论 1) 以 $\xi = \frac{y}{x}, \eta = x - y$ 为新的自变量改变方

- 程 $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 的形式为_____；
10. 函数 $f(x, y) = e^{-x}(ax + b - y^2)$ 中常数 a, b 满足条件_____时， $f(-1, 0)$ 为其极大值。
11. 点 $(-1, 6, 1)$ 关于直线 $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ 的对称点的坐标是_____；
12. 已知函数 $F(u, v, w)$ 可微， $F'_w(0, 0, 0) = 1$ ， $F'_v(0, 0, 0) = 2$ ， $F'_u(0, 0, 0) = 3$ ，函数 $z = f(x, y)$ 由 $F(2x - y + 3z, 4x^2 - y^2 + z^2, xyz) = 0$ 确定，满足 $f(1, 2) = 0$ ，则 $f'_x(1, 2) =$ _____；
13. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^4 + y^4} \sin(x^4 + y^4) =$ _____；
14. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2} \sin(x^2 - xy + y^2) =$ _____；
15. 设函数 $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ ，则 $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = 4e^{-1}$ 。
- 二、设 $f(x, y)$ 在平面区域 D 上可微，线段 PQ 位于 D 内，点 P, Q 的坐标为 $P(a, b), Q(x, y)$ ，求证：在线段 PQ 上存在点 $M(\xi, \eta)$ ，使得
- $$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(\xi, \eta)(x - a) + f'_y(\xi, \eta)(y - b).$$

- 三、已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定，求
- $z = z(x, y)$ 的极值。
- 四、证明当 $x \geq 0, y \geq 0$ 时， $e^{x+y-2} \geq \frac{1}{12}(x^2 + 3y^2)$ 。

- 五、已知曲面 $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ 与平面 $x + 2y + 2z = 0$ 的交线 Γ 是椭圆， Γ 在 xOy 平面上的投影 Γ_1 也是椭圆。（1）求椭圆 Γ_1 的四个顶点 A_1, A_2, A_3, A_4 的坐标（ A_i 位于第 i 象限， $i = 1, 2, 3, 4$ ）；（2）判断椭圆 Γ 的四个顶点在 xOy 平面上的投影是否是 A_1, A_2, A_3, A_4 ，写出理由。
- 六、已知二次锥面 $4x^2 + \lambda y^2 - 3z^2 = 0$ 与平面 $x - y + z = 0$ 的交线是一条直线 L 。（1）求常数 λ 的值，并求直线 L 的标准方程；（2）平面 Π 通过直线 L ，且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 2z + 10 = 0$ 相切，求平面 Π 方程。

- 七、已知曲线 $\Gamma: x^2 + 3y^2 + 2xy = 4$ 是 xOy 平面上的椭圆。（1）求椭圆 Γ 的四个顶点的坐标，并求 Γ 所围平面图形的面积；（2）求椭圆 Γ 上纵坐标最大与最小的点的坐标。
- 八、求函数 $f(x, y) = 3(x - 2y)^2 + x^3 - 8y^3$ 的极值，并证明 $f(0, 0) = 0$ 不是 $f(x, y)$ 的极值。

- 九、已知直线 $L_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{2}$ ， $L_2: \frac{x-8}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ 。（1）证明 L_1 与 L_2 是异面直线；2）若直线 L 与 L_1, L_2 皆垂直相交，交点分别为 P, Q ，试求点 P 与 Q 的坐标。3）求异面直线 L_1 与 L_2 的距离。
- 十、已知直线 $L_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{2}$ ， $L_2: \frac{x-8}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ 。（1）若直线 L 与 L_1, L_2 皆垂直相交，交点分别为 P, Q ，试求点 P 与 Q 的坐标；2）求异面直线 L_1 与 L_2 的距离。