Homework #8

Due: 2024-7-2 00:00 | 6 Questions, 100 Pts

Name: XXX

Question 1 (25') (曲率、挠率与 Frenet 标架).

求下列曲线的曲率和挠率：

a (5') $\boldsymbol{r}(t) = \left(at, \sqrt{2}a\log t, a/t\right), \quad a > 0;$

b (5') $\boldsymbol{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), bt), \quad a > 0;$

c (5') $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t).$

我们为曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$，其中 s 为弧长参数，得出 Frenet 标架为 $\{\boldsymbol{r}(s); \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$.

d (5') 假定曲线的挠率 $\tau \neq 0$ 为一个常数，求曲线

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \frac{1}{\tau}\boldsymbol{\beta}(s) - \int \boldsymbol{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s$$

的曲率和挠率。

e (5') 假定曲线的曲率 $\kappa \neq 0$ 为一个常数，挠率 $\tau > 0$, 求曲线

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\beta}(s) + \int \boldsymbol{\alpha}(s)\,\mathrm{d}s$$

的曲率和挠率，以及它的 Frenet 标架 $\left\{\tilde{\boldsymbol{r}}(s); \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(s), \tilde{\boldsymbol{\beta}}(s), \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)\right\}$.

◀

Question 2 (15') (参数曲线).

假定 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ 是以 s 为弧长参数的正则参数曲线，它的挠率不为 0，曲率不是常数，并且下面的关系式成立：

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)\right)^2 = R_0^2 = \text{const},$$

请证明该曲线落在一个球面上。

◀

Question 3 (30') (第一基本形与变换).

在球面 $\Sigma : x^2+y^2+z^2 = 1$ 上, 取 $N = (0, 0, 1), S = (0, 0, -1)$. 对于赤道平面上的任意一点 $p = (u, v, 0)$, 可以作唯一的一条直线经过 N, p 两点，它与球面有唯一的交点，记为 p'.

a (5') 证明：点 p' 的坐标是

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1},$$

并且它给出了球面上去掉北极 N 的剩余部分的正则参数表示。

b (5') 求球面上去掉南极 S 的剩余部分的类似地正则参数表示。

c (5') 求上面两种正则参数表示在公共部分的参数变换。

d (5') 证明球面是可定向曲面。

接下来我们要寻找保长对应与保角对应。

e (5') 证明在悬链面

$$\boldsymbol{r} = (a\cosh t\cos\theta, a\cosh t\sin\theta, at), \quad -\infty < t < \infty, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

和正螺旋面

$$\boldsymbol{r} = (v\cos u, v\sin u, au), \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

之间存在保长对应，其中常数 $a > 0$.

f (5') 请建立旋转面

$$\boldsymbol{r} = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

和平面之间的保角对应。

◀

Question 4 (10') (第三基本型).
定义曲面的第三基本型为 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}$. 证明：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n} + 2H\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n} + K\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

◀

Question 5 (10') (可展曲面).

a (5') 证明：没有平点的曲面 $\boldsymbol{r}: D \to \mathbb{R}^3$ 是可展的当且仅当 $K \equiv 0$.

b (5') 试构造一个 $K \equiv 0$ 的曲面，但它不是可展曲面。

◀

Question 6 (10') (极小曲面).
定义曲面 $\boldsymbol{r}: D \to \mathbb{R}^3$ 为**极小曲面**当且仅当 $H \equiv 0$.

a (5') 考虑由悬链线旋转得到的旋转曲面，即悬链面：

$$\boldsymbol{r} = (c\cosh\frac{u}{c}\cos v, c\cosh\frac{u}{c}\sin v, u).$$

证明：悬链面是唯一的既是旋转曲面又是极小曲面的曲面。

b (5') [伯恩斯坦定理] 证明：如果 $\boldsymbol{r} = (u, v, z(u,v))$ 在 $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ 上都有定义且是极小曲面，则 z 一定是线性函数。换句话说如果一个极小曲面是一个平面上的函数图像，则这个极小曲面是个平面。

◀