厦门大学《线性代数》课程期中试题 B · 答案

考试日期：2013.11　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一．　计算题（共 50 分）

1.（6 分）设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&1&1\\3&-1&3\end{bmatrix}$, 计算（1） AA^T，（2） A^TA.

解（1） $AA^T=\begin{bmatrix}4&-2&6\\-2&3&-1\\6&-1&19\end{bmatrix}$，（2） $A^TA=\begin{bmatrix}14&-4&8\\-4&2&-2\\8&-2&10\end{bmatrix}$。

2. （6 分）设 $A=\alpha\beta^T$, 其中 $\alpha=(1,2,L\ ,n)^T$, $\beta=(1,1,L\ ,1)^T$, 试求矩阵 A^3.

解　$A^3=\alpha\left(\beta^T\alpha\right)\left(\beta^T\alpha\right)\beta^T=\left(\beta^T\alpha\right)^2\left(\alpha\beta^T\right)$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\begin{pmatrix}1&1&L&1\\2&2&L&2\\L&L&L&L\\n&n&L&n\end{pmatrix}$$

3. （6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}x&1&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&0\\5&4&3&x+2\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix}x&1&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&0\\5&4&3&x+2\end{vmatrix}=(x+2)\begin{vmatrix}x&1&0\\0&x&1\\0&0&x\end{vmatrix}=(x+2)x^3$.

4. （6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&2&L&2&2\\2&2&2&L&2&2\\2&2&3&L&2&2\\L&L&L&L&L&L\\2&2&2&L&n-1&2\\2&2&2&L&2&n\end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2\end{vmatrix}$

$$=1(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2\end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

5. （6 分）设$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$都是 4 维列向量，矩阵$|A|=|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=5,$矩阵$|B|=|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=-2$，求$|A+2B|$.

解 $|A+2B|=|\alpha+2\beta,3\gamma_1,3\gamma_2,3\gamma_3|=|\alpha,3\gamma_1,3\gamma_2,3\gamma_3|+|2\beta,3\gamma_1,3\gamma_2,3\gamma_3|$

$=3^3|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+2\times 3^3|\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|=3^3\times 5-2\times 3^3\times 2=27$.

6. （10 分）若三阶矩阵 A 的伴随矩阵为A^*，已知$|A|=\dfrac{1}{2}$，求$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

解 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\dfrac{1}{3}A^{-1}-2|A|A^{-1}\right|=\left|-\dfrac{2}{3}A^{-1}\right|=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3\left|A^{-1}\right|$

$=-\dfrac{8}{27}\dfrac{1}{|A|}=-\dfrac{4}{27}$.

7. （10 分）设 A,B 为三阶矩阵，且满足方程$A^{-1}BA=6A+BA$. 若矩阵$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

解 因为$|A|=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{84}\neq 0$，矩阵 A 为可逆矩阵，且$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$. 关系式

$A^{-1}BA=6A+BA$右乘A^{-1}可得$A^{-1}B=6E+B$，即$\left(A^{-1}-E\right)B=6E$，由

$A^{-1}-E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$可知矩阵$A^{-1}-E$可逆，且

$$\left(A^{-1}-E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

故

$$B=6\left(A^{-1}-E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

二.　（15 分）设 A,B,C,D 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，A 是可逆矩阵.

如果分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix}E&0\\-CA^{-1}&E\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}E&-A^{-1}B\\0&E\end{bmatrix},$$

（1）计算 PQR,（2）证明矩阵 Q 可逆的充分必要条件是$D-CA^{-1}B$是可逆的.

解　（1）$PQR=\begin{bmatrix}E&0\\-CA^{-1}&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E&-A^{-1}B\\0&E\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}A&B\\0&D-CA^{-1}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E&-A^{-1}B\\0&E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&0\\0&D-CA^{-1}B\end{bmatrix}.$

（2）显然$|P|=|R|=1$，故

$$|Q|=|PQR|=\begin{vmatrix}A&0\\0&D-CA^{-1}B\end{vmatrix}=|A|\left|D-CA^{-1}B\right|,$$

因为矩阵 A 是可逆矩阵，故$|A|\neq 0$，因此$|Q|\neq 0$的充分必要条件为$\left|D-CA^{-1}B\right|\neq 0$，即矩阵 Q 可逆的充分必要条件是$D-CA^{-1}B$是可逆的.

三. （15 分）证明 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

证明 用归纳法证明. 当 n=1 时，结论显然成立，假设结论对 n−1 阶行列式成立，即 $D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha$. 对 n 阶行列式按最后一行展开可得

$$D_n=2\cos\alpha D_{n-1}+1\times(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}$,

将 $D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha, D_{n-2}=\cos(n-2)\alpha$ 代入上关系式整理可得

$$D_n=2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2}=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha$$

$$=\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha-\cos(n-2)\alpha=\cos n\alpha,$$

根据归纳法原理可知结论成立.

四.（15 分）设 A, B, C 为 4 阶矩阵，满足 $3A^{-1}+2BC^TA^{-1}=B$，其中

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A.

解 由 $|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1$ 可知矩阵 B 是可逆矩阵. 由 $3A^{-1}+2BC^TA^{-1}=B$ 得

$$A=B^{-1}\left(3E+2BC^{-1}\right)=3B^{-1}+2C^T.$$

由 $B^{-1}=|B|B^*$ 计算可得

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

因此

$$A=3B^{-1}+2C^{T}=\begin{pmatrix}2&2&3\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix}.$$

五.（5 分）设 A 为实对称矩阵，且 $A^2=0$，证明 A=0.

证明　将矩阵按列分块为 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，因 A 为实对称矩阵，故 $A^T=A$. 因此

$$A^2=A^TA=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\alpha_1^T\alpha_2&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1&\alpha_2^T\alpha_2&\cdots&\alpha_2^T\alpha_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\alpha_n^T\alpha_1&\alpha_n^T\alpha_1&\cdots&\alpha_n^T\alpha_1\end{bmatrix},$$

条件 $A^2=0$ 即为 $\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}0, & i\neq j,\\1, & i=j.\end{cases}$

由 $\alpha_i^T\alpha_i=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2$ 可得 $\alpha_i^T\alpha_i=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0$ 的充分必要条件为 $a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0, i=1,2,\cdots,n$. 即 $A=0$.