厦门大学《线性代数I》期中试卷

_______学院_______系_______年级_______专业

主考教师：_______ 试卷类型：（A卷） 2020年11月29日

注意：所有行列式化简和矩阵初等变换必须标出每一步骤！

分数	阅卷人

一、（10）计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $=6$

$$|A| \xlongequal[c_1-2c_3]{c_4+c_3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-4+10) = 6$$

分数	阅卷人

二、（10）设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 与 $B = [\alpha_1, \beta, \alpha_3, \alpha_4]$ 均为4阶方阵，且 $|A| = 2$，$|B| = 1$，求行列式 $|3A + 2B|$

$$= |[3\alpha_1, 3\alpha_2, 3\alpha_3, 3\alpha_4] + [2\alpha_1, 2\beta, 2\alpha_3, 2\alpha_4]| = |[5\alpha_1, 3\alpha_2+2\beta, 5\alpha_3, 5\alpha_4]|$$

$$= |[5\alpha_1, 3\alpha_2, 5\alpha_3, 5\alpha_4]| + |[5\alpha_1, 2\beta, 5\alpha_3, 5\alpha_4]|$$

$$= 5\times3\times5\times5\,|[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]| + 5\times2\times5\times5\,|[\alpha_1, \beta, \alpha_3, \alpha_4]|$$

$$= 375\times|A| + 250\times|B| = 1000$$

注意：若 $\beta = \alpha_2/2 \Rightarrow B = |[\alpha_1, \alpha_2/2, \alpha_3\ \alpha_4]| = \frac{1}{2}|[\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3, \alpha_4]| = \frac{1}{2}|A| = 1$

反之不成立 即 $|B| = 1$ $|A| = 2 \not\Rightarrow \beta = \frac{\alpha_2}{2}$

2阶反例：$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1$ 但 $\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 不成比例.

4阶反例：$|A| = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 2$ $|B_1| = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \beta & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 1$ $\Rightarrow \beta \neq \frac{\alpha_2}{2}$

分数	阅卷人

三、（10）确定参数λ，使矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&\lambda^2&-2\\1&-2&\lambda&1\\-2&1&-2&\lambda\end{bmatrix}$的秩最小。

$$A\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&\lambda^2&-2\\0&-3&\lambda-\lambda^2&3\\0&3&-2+2\lambda^2&\lambda-4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&\lambda^2&-2\\0&-3&\lambda-\lambda^2&3\\0&0&\lambda^2+\lambda-2&\lambda-1\end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix}1&1\\0&-3\end{vmatrix}\neq 0 \quad R(A)\geqslant 2$

$0=\lambda^2+\lambda-2$ 且 $\lambda-1=0$ 时 $\Rightarrow R(A)=2$ 最小

即 $\lambda=1$

分数	阅卷人

四、（10）设A为3阶可逆矩阵，B为2阶可逆矩阵，C为2×3矩阵。证明：分块矩阵$D=\begin{bmatrix}O&A_3\\B_2&C\end{bmatrix}$是可逆矩阵，并求$D^{-1}$。

① $|D|=(-1)^{2\times 3}|A||B|$

$=|A||B|$

$\neq 0$

D 可逆

法② $\begin{bmatrix}O&A\\B&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X&Y\\Z&W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&O\\O&E\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}AZ&AW\\BX+CZ&BY+CW\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E&0\\0&E\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}AZ=E\\AW=0\\BX+CZ=0\\BY+CW=E\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}Z=A^{-1}\\W=0\\X=-B^{-1}CA^{-1}\\Y=B^{-1}\end{array}$

$D^{-1}=\begin{bmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{bmatrix}$

法三 $\left[\begin{array}{cc|cc}0&A&E_3&0\\B&C&0&E_2\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{B^{-1}\times r_1\\A^{-1}\times r_2}]{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}E_2&B^{-1}C&0&B^{-1}\\0&E_3&A^{-1}&0\end{array}\right]$ 左乘

$\xrightarrow[\text{左乘}]{r_1-B^{-1}C\cdot r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}E_2&0&-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\0&E_3&A^{-1}&0\end{array}\right]$

$D=\begin{bmatrix}0&A\\B&C\end{bmatrix}$ 的最简型为 $\begin{bmatrix}E_2&0\\0&E_3\end{bmatrix}\Rightarrow D$ 可逆

$D^{-1}=\begin{bmatrix}-B^{-1}CA^{-1}&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}$

※分块矩阵做行的数乘变换和消元变换时都是左乘

对应列变换⇒(右乘)

分数	阅卷人

五、(10) 若$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&0\\6&-3\end{bmatrix}$，解矩阵方程：$AX+B=X$。（逆矩阵必须使用初等变换计算）

解：$B=X-AX \quad (E-A)X=B \quad X=(E-A)^{-1}\cdot B$

$$[E-A|B]=\begin{bmatrix}1&-1&0&1&-2\\1&0&-1&3&0\\1&0&2&6&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&-1&0&1&-2\\0&1&-1&2&2\\0&1&2&5&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&3&0\\0&1&-1&2&2\\0&0&3&3&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2+r_3\\r_1+r_3}]{r_3\times(\frac{1}{3})}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&4&-1\\0&1&0&3&1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right]=[E|X]$$

$$X=\begin{bmatrix}4&-1\\3&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

分数	阅卷人

六、(10) 已知R^3的两个基为$\alpha_1=[1,1,1]^T$，$\alpha_2=[1,-1,-1]^T$，$\alpha_3=[-1,1,-1]^T$；$\beta_1=[1,0,1]^T$，$\beta_2=[1,3,1]^T$，$\beta_3=[1,0,0]^T$，求由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵

解：$A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] \quad B=[\beta_1.\ \beta_2\ \beta_3]$

(法一) $B=AC \qquad C=A^{-1}B$

$$[A|B]=\begin{bmatrix}1&1&-1&1&1&1\\1&-1&1&0&3&0\\1&-1&-1&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&-1&1&1&1\\0&-2&2&-1&2&-1\\0&-2&0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1-r_2\\r_3+2r_2}]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}\\0&1&-1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&0&-2&1&-2&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_3\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&1&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&0\end{bmatrix}$$

(法二) $$[A|E]=\begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\1&-1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&-1&1&0&0\\0&-2&2&-1&1&0\\0&-2&0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+2r_2\\r_1-r_2}]{r_2\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-2&0&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_3\times(-\frac{1}{2})}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad C=A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&0\end{bmatrix}$$

分数	阅卷人

七、（15）求向量组的秩和一个最大线性无关组，并将其余向量用该最大无关组线性表出：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\4\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\2\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}3\\0\\7\\14\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_5=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\0\end{bmatrix}$$

解 $A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5]=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&0\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\ r_4-4r_1}]{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-8\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times\frac{1}{3}\\ r_4\times(\frac{1}{2})\\ r_3-r_2\\ r_4-r_2}]{\cancel{r_4\leftrightarrow r_3}}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-2&-10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{2})]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1&0&3&0&-\frac{1}{2}\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R(A)=3$　$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_4$ 是一个最大无关组

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$

$\alpha_5=-\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2+\frac{5}{2}\alpha_4$

分数	阅卷人

八、（15）讨论a,b取何值时，线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$无解，有唯一解，或有无穷多解？在无穷多解时，求其通解。

解：$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & b-1 & 0 \\ 1-a & 2b-1 & 0 \end{vmatrix} = (1-a)b$

① $b\neq 0$ 且 $a\neq 1$　$R(A)=R(A,\beta)=3=n \Rightarrow$ 唯一解

② $b=0$　$[A,\beta]=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2-r_1 \\ r_3-ar_1}]{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-3a \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　$R(A)=2<R(A,\beta)=3 \Rightarrow$ 无解

③ $a=1$ 时　$[A,\beta]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

i) $2b-1\neq 0$　即 $b\neq \frac{1}{2}$　$\Rightarrow 2=R(A)<R(A,\beta)=3$ 无解

ii) $2b-1=0$　$[A,\beta]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1-r_2]{r_2\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R(A)=R(A,\beta)=2<3 \Rightarrow$ 无穷多解

$\begin{cases} x_1=-x_3+2 \\ x_2=2 \end{cases}$

特解为 $\gamma_0=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$　导出组基础解系为 $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\xi$

$X=\gamma_0+c\xi$　c为任意实数

法二：$[A,\beta]=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_3-ar_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-ba & 1-a & 4-3a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+ar_2} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-br_2} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & (a-1)b & 2ab-4b+1 \end{bmatrix}$

① $(a-1)\neq 0$ 且 $b\neq 0$　即 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$　唯一解

② $a=1$ 时　$[A,\beta]\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2b+1 \end{bmatrix}$

i) $-2b+1\neq 0$　$b\neq \frac{1}{2}$　$R(A,\beta)>R(A) \Rightarrow$ 无解　ii) $-2b+1=0$　$b=\frac{1}{2}$　无穷多解　解如上 ii）

③ $b=0$　$[A,\beta]\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　对$\forall a$ 无解

八、（15）讨论a,b取何值时，线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$无解，有唯一解，或有无穷多解？在无穷多解时，求其通解。

增广矩阵作行变换（4分，也可用克莱默法则计算系数行列式）

$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}=b(1-a)$

$$[A,\beta]\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & (a-1)b & 1-4b+2ab \end{bmatrix}$$

当$a\neq 1$且$b\neq 0$时，有$R(A)=R(A,\beta)=3$，因此有唯一解（2分）；

当$b=0$时，有$R(A)<R(A,\beta)$，因此无解（2分）；

当$a=1,b\neq\frac{1}{2}$时，有$R(A)<R(A,\beta)$，因此无解（2分）；

当$a=1,b=\frac{1}{2}$时，有$R(A)=R(A,\beta)=2$，因此有无穷多解（2分）。继续化简得$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$（1分），因此通解为（2分）

$$x=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad c\in R$$

九、（10）设实矩阵A满足$A^2=AA^T$，证明A为对称矩阵。最快方法是利用矩阵的迹的性质，然而我们对迹不作学习要求。因此请按照下面路线完成证明。

（提示：使用线性方程组解的结构的相关知识，以及结论：$R(C)=R(C^TC)$对任意实矩阵C成立。）

（1）证明方程组$A^Tx=0$与$AA^Tx=0$同解；

（2）证明方程组$Ax=0$与$A^2x=0$同解；

（3）利用前两步结论和题目条件证明$A^TA=(A^T)^2$；

（4）证明$A-A^T=O$

(1)由$R(A^T)=R(AA^T)$可知方程组$A^Tx=0$与$AA^Tx=0$的基础解系有相同数量的向量（1分）；又$A^Tx=0$的解必然是$AA^Tx=0$的解（1分），因此$A^Tx=0$的基础解系也是$AA^Tx=0$的基础解系，于是同解（1分）；（也可以采用课本例题方法）

(2)由$R(A)=R(A^T)=R(AA^T)=R(A^2)$（1分），类似（1）可得结论（1分）；

(3)由$A^2=AA^T$可知$A(A-A^T)=O$，即$A-A^T$的列向量都是方程组$Ax=0$的解（1分）；由前两步结论可知$Ax=0$与$A^Tx=0$同解（1分），于是$A-A^T$的列向量也是$A^Tx=0$的解，所以$A^T(A-A^T)=O$，即$A^TA=(A^T)^2$（1分）；

(4)由$(A-A^T)^T(A-A^T)=(A^T-A)(A-A^T)=A^TA-A^2-(A^T)^2+AA^T=O$（1分），得$R(A-A^T)=R((A-A^T)^T(A-A^T))=R(O)=0$（1分），得证。