历届试卷（三重积分）解答

一、设有空间区域

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\},$$

$$\Omega_2=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\},$$

则有______________。

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$； (B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$；

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$； (D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v.$ （2004—2005）

解：因为 Ω_1 关于 yoz 坐标面对称，且 $f_1(x,y,z)=x$， $f_2(x,y,z)=xyz$ 分别满足

$$f_1(-x,y,z)=-x=-f_1(x,y,z)，\quad f_2(-x,y,z)=-xyz=-f_2(x,y,z)，$$

因此，$\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，$\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

关于 zox 面对称，且 $f_3(x,y,z)=y$ 满足 $f_3(x,-y,z)=-y=-f_3(x,y,z)$，则 $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

而由于 Ω_1 关于 yoz 坐标面对称，关于 zox 面对称，且 $f_1(x,y,z)=z$ 满足

$$f_4(-x,y,z)=z=f_4(x,y,z)，\quad f_4(x,-y,z)=z=f_4(x,y,z)，$$

故 $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

答案：C.

二、设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v==$____________。

（2004—2005）

解：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成的立体 Ω 关于 yoz 面对称，且 $f_1(x,y,z)=x$ 满足 $f_1(-x,y,z)=-x=-f_1(x,y,z)$，则 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$

同理，Ω 关于 zox 面对称，且 $f_2(x,y,z)=x$ 满足 $f_2(x,-y,z)=-y=-f_2(x,y,z)$，则 $\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$

因此，$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

由 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$，有 $z^2=1-z^2$，于是，$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

用截面法，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}z\cdot\pi z^2\mathrm{d}z+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}z\cdot\pi(1-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{16}\pi+\frac{1}{2}\pi(1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4})\pi$$

$$=\frac{1}{16}\pi+\frac{1}{4}\pi-\frac{3}{16}\pi$$

$$=\frac{1}{8}\pi.$$

三、设Ω是由球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所围成的闭区域,则$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=($　　　　$)$

(A) $\iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；　　(B) $6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r$；

(C) $6\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}z^2\mathrm{d}z$；　　(D) $6\int_0^R z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(2005—2006)

解：(A）错，因为三重积分的积分变量是满足$x^2+y^2+z^2\le R^2$；

(B）错，由轮换对称性，有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r.$$

(C)错，由轮换对称性，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=6\iiint\limits_{\Omega_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$　　这里Ω_1是右半球面

$$=6\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2\mathrm{d}z$$　（由柱坐标变换）

(D）由轮换对称性，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=6\iiint\limits_{\Omega_2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{这里}\Omega_2\text{是上半球面}$$

$$=6\int_0^R \mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2-z^2} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=6\int_0^R z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

答案：D

四、利用对称性化简并计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 所围成的空间闭区域. (2005—2006)

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

因为 Ω 关于 yoz 面对称，而函数 $f(x,y,z)=2xy+2xz$ 满足 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}(2xy+2zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

Ω 关于 zox 面对称，而函数 $g(x,y,z)=2yz$ 满足 $g(x,-y,z)=-g(x,y,z)$，故 $\iiint\limits_{\Omega}2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

因此，$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

抛物面 $z=x^2+y^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 的交线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影为 $x^2+y^2=1$.

于是，由柱坐标变换，我们有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}(r^2+z^2)r\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1 r[r^2\sqrt{2-r^2}-r^4+\frac{1}{3}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}r^6]\mathrm{d}r.$$

令 $2-r^2=t$，则 $-2r\mathrm{d}r=\mathrm{d}t$，即 $r\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

故 $$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi\int_2^1[(2-t)\sqrt{t}-(2-t)^2+\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(2-t)^3](-\frac{1}{2})\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_1^2[(2-t)\sqrt{t}-(2-t)^2+\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(2-t)^3]\mathrm{d}t$$

$$=\pi[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}(2-t)^3+\frac{2}{15}t^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{12}(2-t)^4]\Big|_1^2$$

$$=\pi[\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{8}{5}\sqrt{2}+\frac{8}{15}\sqrt{2}-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{2}{15}-\frac{1}{12}]$$

$$=\pi[\frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{89}{60}]$$

五、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω： $x^2+y^2+z^2\le R^2\,(R\ge 0)$. (2007—2008)

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

因为 Ω 关于 yoz 面对称，而函数 $f(x,y,z)=2xy+2xz$ 满足 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}(2xy+2zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\,.$$

Ω 关于 zox 面对称，而函数 $g(x,y,z)=2yz$ 满足 $g(x,-y,z)=-g(x,y,z)$，故 $\iiint\limits_{\Omega}2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

因此， $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

利用球坐标变换，可得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^4\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}R^5=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

六、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域。

(2007—2008)

解：联立方程， $\begin{cases}x^2+y^2=2z\\ z=2\end{cases}$ ，消去 $x^2+y^2=4$，故 Ω 在 xoy 面的投影区域为 $x^2+y^2\le 4$.

由柱坐标变换，得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2}\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{2}r^2\cdot r\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{2}(2r^3-\frac{r^5}{2})\mathrm{d}r$$

$$=2\pi(\frac{1}{2}\cdot 2^4-\frac{1}{12}\cdot 2^6)$$
$$=2\pi(8-\frac{16}{3})=\frac{16}{3}\pi.$$

七、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 为曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的立体，则正确的解法为（ ）

(A) $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^1 z\,\mathrm{d}z$　　(B) $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\,\mathrm{d}z$

(C) $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_r^1 z\,\mathrm{d}z$　　(D) $I=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z zr\,\mathrm{d}r$　　(2008—2009)

解：联立方程，$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=1 \end{cases}$，消去 $x^2+y^2=1$，故 Ω 在 xoy 面的投影区域为 $x^2+y^2\le 1$.

由柱坐标变换，得

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\cdot r\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\mathrm{d}z\text{。}$$

A，C 是错误的，B 是正确的.

如果用截面法求 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}} z\cdot r\mathrm{d}r$$

所以，答案 D 是错误的.

八、设 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域，则 $\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V=$ ____________。

(2008—2009)

解：利用球坐标变换，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi} r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\pi}{10}.$$

九、计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 所谓的区域.

解：联立方程 $\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$，消去 z，得 $x^2+y^2=2$，因此，Ω 在 xoy 面上的投影区域为 $x^2+y^2\le 2$.

注意到，Ω 关于 yoz 面对称，故 $\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

于是，
$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\iiint\limits_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

利用柱坐标，得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}}r^2\cdot r\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2})\mathrm{d}r$$

令 $t=3-r^2$，$r\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi\int_3^1(3-t)(\sqrt{t}-\frac{3-t}{2})(-\frac{1}{2})\mathrm{d}t$$
$$=\pi\int_1^3(3-t)(\sqrt{t}-\frac{3-t}{2})\mathrm{d}t$$
$$=\pi\int_1^3[3\sqrt{t}-t\sqrt{t}-\frac{1}{2}(3-t)^2]\mathrm{d}t$$
$$=\pi[2t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}(3-t)^3]\Big|_1^3$$
$$=\pi(\frac{12}{5}\sqrt{3}-\frac{44}{15}).$$

十、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$，$z=2$ 所围成的区域.

解：用截面法.

$$\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}z(x^2+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^2 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_1^2 z^5\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}(64-1)=\frac{21}{4}\pi.$$

十一、计算$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$所围成的区域.

解：显然在Ω中，$0\le z\le\sqrt{2}$.

联立方程$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$，则$z=\sqrt{2-z}$，即$z=1$．于是，由截面法，可得

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v,$$

其中Ω_1为Ω位于$z=1$下方部分，Ω_2为Ω位于$z=1$上方部分.

于是，$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 2-z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z\cdot\pi z\mathrm{d}z+\int_1^{\sqrt{2}} z\cdot\pi(2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi(z^2-\frac{1}{4}z^4)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi(2-1-1+\frac{1}{4})=\frac{7}{12}\pi.$$

十二、设$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$，计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解：因为$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$是球心在原点的球体，关于$xoy$面对称，而$f(x,y,z)=|z|$满足

$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$，所以，

$$\iiint\limits_{\Omega}|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中Ω_1为Ω位于xoy面上方的部分.

故 $$\iiint\limits_{\Omega}|z|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 z\cdot\pi(1-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{4}z^4)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

十三、计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\le 4$介于$z=0$与$z=1$之间的部分.

解：用截面法

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 4-z^2}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^1 z\cdot\frac{1}{4}(4-z^2)^2\mathrm{d}z$$

$$=-\frac{\pi}{4}\int_0^1(4-z^2)^2\mathrm{d}(4-z^2)$$

$$=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}(4-z^2)^3\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{12}(64-27)=\frac{37}{12}\pi.$$

十四、求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

解：用柱坐标.

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}r^2\cdot r\mathrm{d}z$$

$$=4\pi\int_0^R r^3\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r\,.$$

令 $t=\sqrt{R^2-r^2}$，则 $r^2=R^2-t^2$，于是 $r\mathrm{d}r=-t\mathrm{d}t$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi\int_R^0(R^2-t^2)t(-t\mathrm{d}t)$$

$$=4\pi\int_0^R(R^2t^2-t^4)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{8}{15}\pi R^5\,.$$

十五、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

解：利用广义球坐标变换 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\sin\varphi\\ y=br\sin\theta\sin\varphi\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$，$|J|=abcr^2\sin\varphi$，于是,

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi abc\int_0^{\pi}\sin\varphi \mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{5}\pi abc.$$

十六、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 3$ 所围成的有界区域.

解：由截面法，

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^3 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\le z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^3 z\cdot\pi z\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}z^3\Big|_0^3 = 9\pi.$$

十七、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是有旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的有界闭区域.

解一: 联立方程 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases}$，消去 z，可得 $x^2 + y^2 = 1$，因此，Ω 在 xoy 面上的投影区域为：$x^2 + y^2 \le 1$.

用柱坐标变换，我们有

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^1 r^3(1-r^2)\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}) = \frac{\pi}{6}.$$

解二：截面法

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}} r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\cdot\frac{1}{4}\int_0^1 z^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

十八、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由球面 $z = x^2 + y^2 + z^2$ 所围成的有界区域.

解：利用球坐标 $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，则球面方程为 $r^2 = r\cos\varphi$，即 $r = \cos\varphi$.

于是， $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}(-\frac{1}{5}\cos^5\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.$$

十九、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，其中 Ω 是由三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体.

解一（投影法）：Ω 在 xoy 面上的投影为 $D=\{(x,y)\big|x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$.

于是， $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(1-x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(-\frac{1}{3})(1-x-y)^3\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

解二（截面法）：

Ω 在 z 轴上的投影为 $0\le z\le 1$，记 $D_z=\{(x,y)\big|x+y\le 1-z,x\ge 0,y\ge 0\}$.

于是， $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(z-2z^2+z^3)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4})=\frac{1}{24}.$$