专业：

学院：

学号：

姓名：

一、（14 分）

一质点沿半径为1 m 的圆周运动，运动方程为θ=2+3t^3，θ式中以弧度计，t以秒计，求：

(1) t＝2 s时，质点的切向和法向加速度；

(2)当加速度的方向和半径成45°角时，其角位移是多少?

解：由题可得，质点的角速度和角加速度分别为：

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=9t^2 \text{ .... } 2\text{分}$$

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=18t \text{ .... } 2\text{分}$$

(1) $t=2$ s 时，

$$a_t=R\alpha=1\times18\times2=36m\cdot s^{-2} \text{ .... } 2\text{分}$$

$$a_n=R\omega^2=1\times(9\times2^2)^2=1296m\cdot s^{-2} \text{ .... } 2\text{分}$$

(2)当加速度方向与半径成45°角时，有

$$\tan 45^{\circ}=\frac{a_t}{a_n}=1$$

即

$$R\omega^2=R\alpha \text{ .... } 2\text{分}$$

亦即

$$(9t^2)^2=18t$$

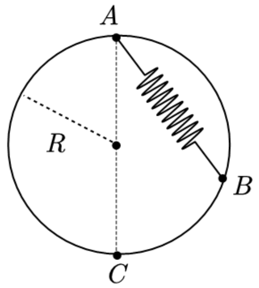
则解得

$$t^3=\frac{2}{9} \text{ .... } 2\text{分}$$

于是角位移为

$$\theta = 2 + 3t^3 = 2 + 3\times\frac{2}{9} = 2.67 \qquad \text{rad}$$ ....2 分

二、（14 分）

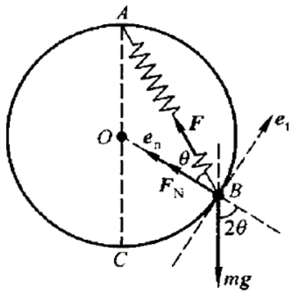


一根原长l_0的弹簧，当下端悬挂质量为m的重物时，弹簧长$l = 2l_0$。现将弹簧一端悬挂在竖直放置的圆环上端A点，把弹簧另一端所挂重物放在光滑圆环的B点，设环的半径$R = l_0$，如图所示，已知AB长为$1.6R$。当重物在B点无初速地沿圆环滑动时，试求：

（1）重物在B点的加速度和圆环对重物的正压力；

（2）重物滑到最低点C时速度。

解:



（1）平衡时：$mg = kl_0$，所以$k = \frac{mg}{l_0}$..2 分

任意位置时，如右图

$$\begin{cases} mgsin2\theta - Fsin\theta = ma_t \\ N + Fcos\theta - mgcos2\theta = ma_n = m\frac{v^2}{R} \end{cases}$$ ....4 分

处于B点时：$\cos\theta = \frac{AB}{2R} = 0.8$，$\sin\theta = 0.6$时$v = 0$，所以$a_n = 0$

此时弹性力$F = k\cdot 0.6l_0 = 0.6mg$

加速度：$a = a_t = gsin2\theta - 0.6gsin\theta = g\sin\theta\,(2\cos\theta - 0.6) = 0.6g$.......................................2 分

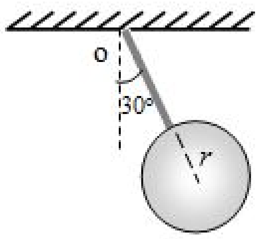
正压力：$N = -Fcos\theta + mgcos2\theta = -0.2mg$，符号表示与图示反方向。...................................2 分

（2）机械能守恒

$$\frac{1}{2}k(1.6R - l_0)^2 + mg(2R - 1.6Rcos\theta) = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}k(2R - l_0)^2$$ ....2 分

$$v_c = \sqrt{0.8gR}$$ ....2 分

三、（14 分）



一钟摆可以在竖直平面内摆动。已知摆锤的质量为m，半径为r，摆杆的质量也为m，长度为$2r$。将钟摆拉离平衡位置至与竖直方向成30^0角，后由静止释放。求：

（1） 钟摆相对转轴O的转动惯量J；

（2） 钟摆由初始位置摆动到竖直位置的过程中重力矩所做的功。

解:

（1）摆杆的转动惯量：

$$J_1 = \frac{1}{3}m(2r)^2 = \frac{4}{3}mr^2 \text{ .... } 3\text{分}$$

摆锤的转动惯量：

$$J_2 = \frac{1}{2}mr^2 + m(3r)^2 = \frac{19}{2}mr^2 \text{ .... } 3\text{分}$$

$\therefore$ 钟摆的转动惯量：

$$J = J_1 + J_2 = \frac{65}{6}mr^2 \text{ .... } 1\text{分}$$

（2） 重力矩做功：

$$W = W_1 + W_2 = -\Delta E_{p1} - \Delta E_{p2} = mgr(1-\cos 30^0) + 3mgr(1-\cos 30^0) \text{ .... } 6\text{分}$$

$$= 2mgr(2-\sqrt{3}) \text{ .... } 1\text{分}$$

或：

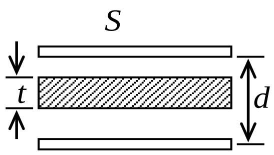
$$W_1 = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} mgr\sin\theta d\theta = (1-\frac{\sqrt{3}}{2})mgr \text{ .... } 3\text{分}$$

$$W_2 = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} 3mgr\sin\theta d\theta = 3(1-\frac{\sqrt{3}}{2})mgr \text{ .... } 3\text{分}$$

$$\therefore W = W_1 + W_2 = 2mgr(2-\sqrt{3}) \text{ .... } 1\text{分}$$

四、（14 分）

如题所示，一空气平行板电容器，极板面积为 S ，两极板之间距离为 d ，其中平行地放有一层厚度为 t ($t < d$) 、相对介电常量为 ε_r 的各向同性均匀电介质。略去边缘效应，试求其电容值。



解法一：设极板上的自由电荷面密度为 σ_0 . 应用 $\vec{D}$ 的高斯定理可得两极板之间的电位移大小为

$$D = \sigma_0 \text{ .... } 2\text{分}$$

由 $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ 得空气中的电场强度大小为

$$E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0 \text{ .... } 2\text{分}$$

电介质中的电场强度的大小为

$$E = \sigma_0 / (\varepsilon_0\,\varepsilon_r) \text{ .... } 2\text{分}$$

两极板之间的电势差为

$$U=E_0(d-t)+Et \quad =\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(d-t)+\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t\right]$$ ……………………………4 分

电容器的电容为

$$C=\frac{\sigma_0 S}{U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t}$$ ………………………………………………………4 分

答案可以有不同的表达形式：

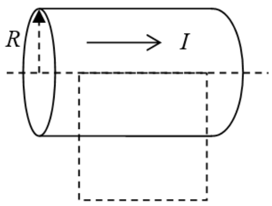
$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r(d-t)+t}$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{(d-t)+t/\varepsilon_r}$$

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d+(1/\varepsilon_r-1)t}$$

五、（15 分）

如图所示，一半径为R的无限长圆柱形载流导线，电流密度为 $j=j_0 r/R$，其中 j_0 为常量，r为到中心轴的距离。求：



（1）距离中心轴r处的磁感应强度大小；

（2）边长为$2R$的正方形平面的一条边在轴上，则通过该平面的磁通量大小；

（3）单位长度该导线内的磁场能。

解：(1)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I=\begin{cases}\mu_0\int_0^r \frac{j_0 r}{R}2\pi r dr & \mathrm{r}\le\mathrm{R}\\ \mu_0\int_0^R \frac{j_0 r}{R}2\pi r dr & \mathrm{r}>\mathrm{R}\end{cases}$$ ………………………………3 分

$$B\cdot 2\pi r=\begin{cases}\frac{2\pi\mu_0 j_0 r^3}{3R} & \mathrm{r}\le\mathrm{R}\\ \frac{2\pi\mu_0 j_0 R^2}{3} & \mathrm{r}>\mathrm{R}\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}\frac{\mu_0 j_0 r^2}{3R} & \mathrm{r}\le\mathrm{R}\\ \frac{\mu_0 j_0 R^2}{3r} & \mathrm{r}>\mathrm{R}\end{cases}$$ ………………………………2 分

(2)

………………………………3 分

$$\Phi=\left|\int \vec{B}\cdot d\vec{S}\right|=\int BdS=\int B_1 dS+\int B_2 dS$$

$$=\int_0^R \frac{\mu_0 j_0 r^2}{3R}2Rdr+\int_R^{2R}\frac{\mu_0 j_0 R^2}{3r}2Rdr$$

$$=\frac{2\mu_0 j_0 R^3}{3}(\frac{1}{3}+\ln 2)$$ ……………………………2 分

(3)

$$W_m=\int w_m\cdot dV=\int_0^R \frac{B^2}{2\mu_0}2\pi rdr$$ ……………………………3 分

$$=\int_0^R \frac{[\mu_0 j_0 r^2/(3R)]^2}{2\mu_0}2\pi rdr$$

$$=\frac{[\mu_0 j_0/(3R)]^2}{2\mu_0}2\pi\frac{1}{6}R^6$$

$$=\frac{\pi\mu_0 j_0^2 R^4}{54}$$ ……………………………2 分

六、(14 分)

某人测得一静止棒长为 l，质量为 m，于是求得此棒线密度为 $\lambda = m/l$，

(1)假定此棒以速度 v 在棒长方向上运动，此人再测棒的线密度 λ_1 应为多少？

(2)若棒在速度垂直长度方向上运动，它的线密度 λ_2 又为多少？

解：(1)

$$l'=l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ ……………………………………………2 分

$$m'=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ ……………………………………………2 分

$$\lambda_1=\frac{m'}{l'}=\frac{m}{l}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\lambda}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ ……………………………………………3 分

(2)

$$l''=l$$ ……………………………………………………2 分

$$m''=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ ……………………………………………2 分

$$\lambda_2=\frac{m''}{l''}=\frac{m}{l}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ ……………………………………………3 分

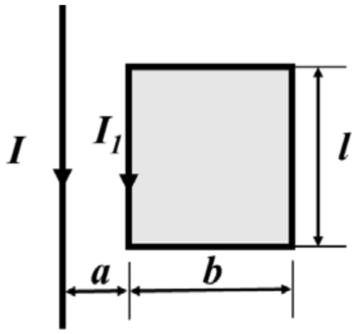
七、(15 分)

在长直电流 I 旁放置一矩形线圈与其共面，线圈长为l、宽为b，近边距长直导线距离为a, 如图所示。求：

（1）线圈与长直导线之间的互感系数；

（2）假设线圈中通有逆时针方向的电流I_1，则线圈受的安培力的大小和方向；

（3）假设线圈在垂直于导线方向上以匀速率v的速度远离导线运动，问当线圈离导线较近的一边到导线的垂直距离为a时，线圈中的感应电动势的大小和方向。

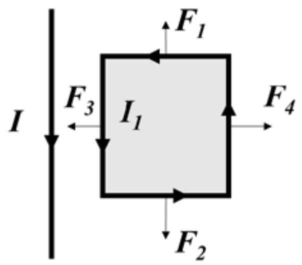


解：（1）$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ……………………………………1 分

$$\mathrm{d}\Phi=\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=B\mathrm{d}S=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}l\mathrm{d}r \text{ ……………………………1 分}$$

$$\Phi=\int_a^{a+b}\frac{\mu_0 Il}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a} \text{ …………………………1 分}$$

$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a} \text{ …………………………2 分}$$



（2）

$$\because \vec{F}_1=-\vec{F}_2 \text{ ……………………………1 分}$$

$$F_3=\frac{\mu_0 II_1 l}{2\pi a}$$ ——方向向左…………………………2 分

$$F_4=\frac{\mu_0 II_1 l}{2\pi(a+b)}$$ ——方向向右…………………………2 分

所以线圈所受到的安培力合力的大小为：

$$F=F_3-F_4=\frac{\mu_0 II_1 l}{2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)=\frac{\mu_0 II_1 bl}{2\pi a(a+b)}$$ ——方向向左…………2 分

（3）

方法 1. $\therefore \xi_i=-\dfrac{d\Phi_m}{dt}=-\dfrac{\mu_0 Il}{2\pi}\cdot\dfrac{d}{dt}\left(\ln\dfrac{a+b}{a}\right)=\dfrac{\mu_0 Iblv}{2\pi a(a+b)}$ ；

方法2. $\therefore \xi_i=\dfrac{\mu_0 Ilv}{2\pi a}-\dfrac{\mu_0 Ilv}{2\pi(a+b)}=\dfrac{\mu_0 Iblv}{2\pi a(a+b)}$ …………………………2分

方向逆时针……………………………………………………………………………………………………1分