历届试题选（二）

一、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2+x^4)+\ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$；

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})$；

3. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2-x}{2})^{\frac{x}{\sin\pi x}}$；

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2+x})(\mathrm{e}^{1+x}-\mathrm{e}^{1-x})$；（2020-2021）

5.

一、写出函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}$ 的表达式.（2017—2018）

二、试求函数 $f(x)=\dfrac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并说明间断点的类型. 如果是第一类间断点，说明是可去间断点还是跳跃间断点.（2017—2018）

三、试求函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x^2-3x+2|}$ 的间断点，并判断间断点类型（说明理由）.（2018—2019）

四、设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且有 $f(1)+f(2)=2$. 证明：至少存在一点 $\xi\in[1,2]$，使得 $f(\xi)=1$.（2018—2019）

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(1)=0$. 试证：存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $f(x_0)=x_0$.（2019—2020）

六、求函数 $y=\dfrac{|x^2+x|}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的间断点，并判别其类型.（2020—2021）

七、利用不等式：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}\ (0<b<a)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$.（2020—2021）.