厦门大学《线性代数》课程期中试题 B · 答案

考试日期：2012. 11　　信息学院自律督导部整理

一．　计算题（共 38 分）

1．（6 分）设 $A=\begin{pmatrix}5&-2&1\\3&4&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-3&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，计算（1）$AB^T$，（2）$B^TA$.

解　（1）$AB^T=\begin{pmatrix}-19&-9\\-1&-7\end{pmatrix}$，（2）$B^TA=\begin{pmatrix}-21&-2&-1\\10&-4&2\\3&4&-1\end{pmatrix}$。

2.　（6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}7&0&1&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\7&0&-2&-5\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^5\begin{vmatrix}7&1&4\\1&1&2\\7&-2&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&0&2\\1&1&2\\9&0&-1\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}6&2\\9&-1\end{vmatrix}=-24$.

3.　（6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&0&\cdots&0\\3&0&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\n&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&2&0&\cdots&0\\3&0&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\n&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-(2+3+\cdots+n)&2&3&\cdots&n\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$=\left(2-\frac{n(n+1)}{2}\right)n!$$

4.　（10 分）设 A 为 3 阶矩阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，A^* 是 A 的伴随矩阵，计算 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

解　$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2A^*\right|=\frac{1}{|A|}\left|\frac{1}{3}AA^{-1}-2AA^*\right|$

$$=2\left|\frac{1}{3}E-2|A|E\right|=2\left|\frac{1}{3}E-2\times\frac{1}{2}\times E\right|=2\left|-\frac{2}{3}E\right|=2\left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=-\frac{16}{27}.$$

5. （10 分）设$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$都是 4 维列向量，矩阵$A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$且$|A|=4$,矩阵$B=(\beta,2\gamma_1,3\gamma_2,\gamma_3)$且$|B|=21$，求$|A+B|$.

解　由$A+B=(\alpha+\beta,3\gamma_1,4\gamma_2,2\gamma_3)$可得

$$|A+B|=|\alpha+\beta,3\gamma_1,4\gamma_2,2\gamma_3|=|\alpha,3\gamma_1,4\gamma_2,2\gamma_3|+|\beta,3\gamma_1,4\gamma_2,2\gamma_3|$$

$$=3\times4\times2\times|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times2\times|\beta,2\gamma_1,3\gamma_2,\gamma_3|$$

$$=3\times4\times2\times4+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times2\times21=180.$$

二. （15 分）求一元 n 次多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n+x \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+x & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1+x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

的所有的根.

解 行列式每一行元素的和为一个常数，故将第 2-n 列均加到第一列可得

$$f(x)=(a_1+a_2+\cdots+a_n+x)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n+x \\ 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}+x & a_n \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2+x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n+x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 0 & \cdots & x & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n+x)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}x^{n-1}.$$

因此$f(x)=0$的根为：$x=-(a_1+a_2+\cdots+a_n),x=0(n-1\text{重})$.

三.(15 分)若 AB=BA,则称 A 与 B 可交换，设$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵。

解 设$B=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$满足 AB=BA，即

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix}x+z&y+w\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&x+y\\z&z+w\end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{cases}x+z=x\\y+w=x+y,\\w=z+w\end{cases}$$

解得$z=0,x=w$，因此$B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$,其中$a,b$为任意常数.

四.（15 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$为 A 的伴随矩阵，求$X$.

解 计算得$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$. 关系式$A^*X=A^{-1}+2X$左乘 A 可得$4X=E+2AX$，整理为$(4E-2A)X=E$，故$X=(4E-2A)^{-1}$.

由

$$(4E-2A,E)=\begin{pmatrix}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

可得

$$X=(4E-2A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

五.（10 分）设 A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 m 阶可逆矩阵，判断矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$是否可逆，如果可逆，求其逆.

解　由 A 为 n 阶可逆矩阵，B 为 m 阶可逆矩阵可知A^{-1}和B^{-1}是存在的，验证可得

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

故矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$可逆且

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

六.(7 分)　设 A 为 n 阶非零实矩阵，A 的每一个元素a_{ij}等于它的代数余子式，即$a_{ij}=A_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$，证明 A 可逆.

证明　条件 A 的每一个元素a_{ij}等于它的代数余子式，即 $a_{ij}=A_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$意味着$A^{*}=A^{T}$. 利用伴随矩阵的性质有 $A^{*}A=|A|E$，因此 $A^{T}A=|A|E$.

下面证明$|A|\neq 0$. 若$|A|=0$ ，则上式意味着$A^{T}A=0$，

因此 A=0, 这与 A 是非零矩阵是矛盾的，因此 $|A|\neq 0$，即 A 可逆.