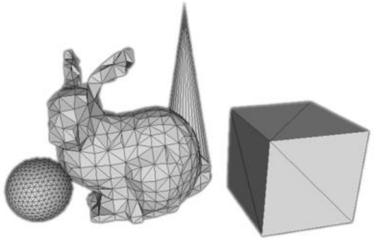
Introduction to Computer Graphics



Transformation 2

本节内容

- 顶点变换流程
- 模型视图变换
  - 模型变换
    - 平移
    - 旋转
    - 缩放
  - 视图变换
    - 相机变换gluLookAt
- 投影变换
  - 正交投影
  - 透视投影
- 视口变换

向量

- 向量
  - $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$
  - $\boldsymbol{a}$的模长：$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
  - 归一化：$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

向量

- 向量点乘（点积）
  - $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$
  - $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
    $= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{cos} < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$
  - $\boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 几何意义：向量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影

向量

- 向量叉乘（叉积）
  - $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$
  - $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$
  - $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

    $= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\,\boldsymbol{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\boldsymbol{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\boldsymbol{k}$
  - $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)^T, \boldsymbol{j} = (0, 1, 0)^T, \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)^T,$

矩阵

- 矩阵
  - 矩阵与向量的乘法
  - 投影观点

$$\begin{bmatrix} | \\ \mathbf{y} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{r_1} & - \\ - & \mathbf{r_2} & - \\ - & \mathbf{r_3} & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{x} \\ | \end{bmatrix}$$

  - 加权观点

$$\begin{bmatrix} | \\ \mathbf{y} \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3.$$

矩阵

- 矩阵
  - 矩阵与矩阵的乘法
  - **AB=P**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \dots \quad a_{im}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{matrix}} & \dots & b_{1c} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & & \dots & b_{mc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & \dots & \boxed{p_{ij}} & \dots & p_{ic} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{r1} & \dots & p_{rj} & \dots & p_{rc} \end{bmatrix}$$

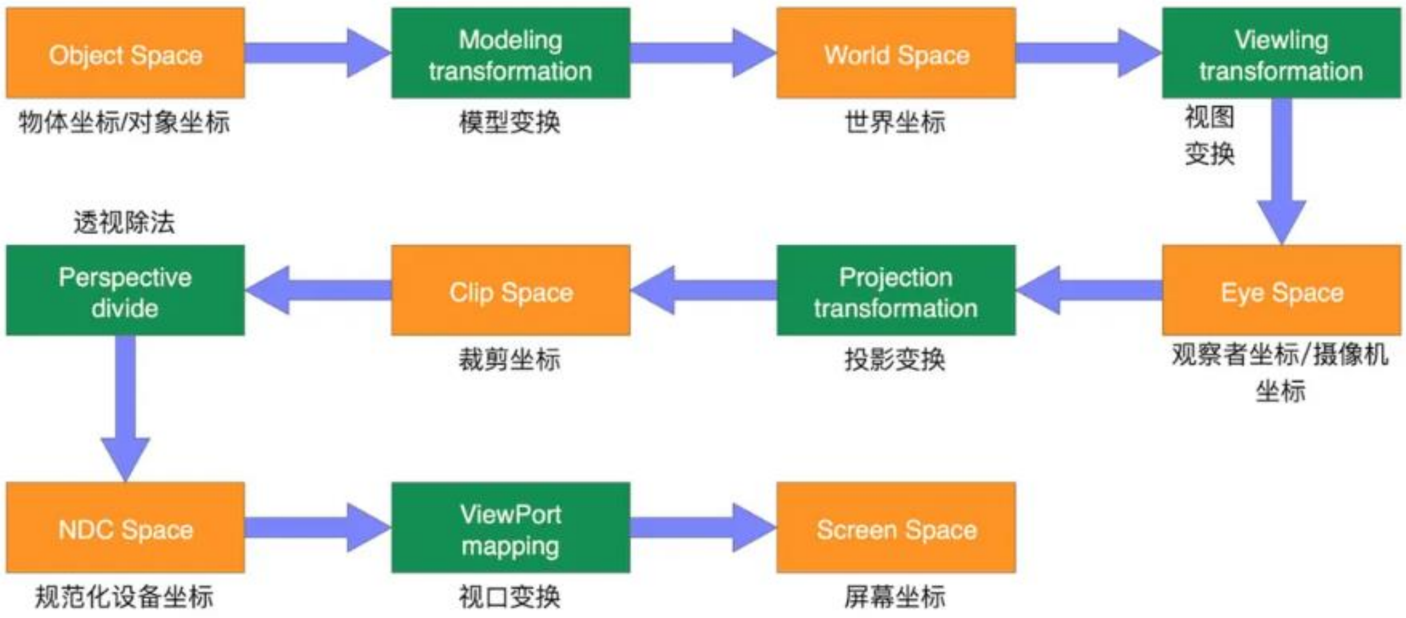
  - **P=AB**
  - **P^T=B^{T}A^T**
  - **AB=AB (一般不成立!)**

矩阵

- 正交基的构建、正交矩阵
  - 单位正交矩阵 $A^T A = AA^T = I$
  - 正交：各向量点积为0
  - 单位：各向量模长为1

  - 给定三个不共面的向量，如何构建正交基？
    - 叉乘

顶点变换的流程



Object Space
物体坐标/对象坐标
Modeling transformation
模型变换
World Space
世界坐标
Viewling transformation
视图变换
Eye Space
观察者坐标/摄像机坐标
Projection transformation
投影变换
Clip Space
裁剪坐标
透视除法
Perspective divide
NDC Space
规范化设备坐标
ViewPort mapping
视口变换
Screen Space
屏幕坐标

顶点变换的流程

模视变换

$$\begin{pmatrix} X_{eye} \\ Y_{eye} \\ Z_{eye} \\ W_{eye} \end{pmatrix} = M_{modelView} * \begin{pmatrix} X_{obj} \\ Y_{obj} \\ Z_{obj} \\ W_{obj} \end{pmatrix} = M_{view} * M_{model} * \begin{pmatrix} X_{obj} \\ Y_{obj} \\ Z_{obj} \\ W_{obj} \end{pmatrix}$$

投影变换

$$\begin{pmatrix} x_{clip} \\ y_{clip} \\ z_{clip} \\ w_{clip} \end{pmatrix} = M_{projection} * \begin{pmatrix} x_{eye} \\ y_{eye} \\ z_{eye} \\ w_{eye} \end{pmatrix}$$

透视除法

$$\begin{pmatrix} x_{ndc} \\ y_{ndc} \\ z_{ndc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{clip}/w_{clip} \\ y_{clip}/w_{clip} \\ z_{clip}/w_{clip} \end{pmatrix}$$

视口变换

$$\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{w}}{2} x_{ndc} + (\mathrm{x} + \frac{\mathrm{w}}{2}) \\ \frac{\mathrm{h}}{2} y_{ndc} + (\mathrm{y} + \frac{\mathrm{h}}{2}) \\ \frac{\mathrm{f}-\mathrm{n}}{2} z_{ndc} + \frac{\mathrm{f}+\mathrm{n}}{2} \end{pmatrix}$$

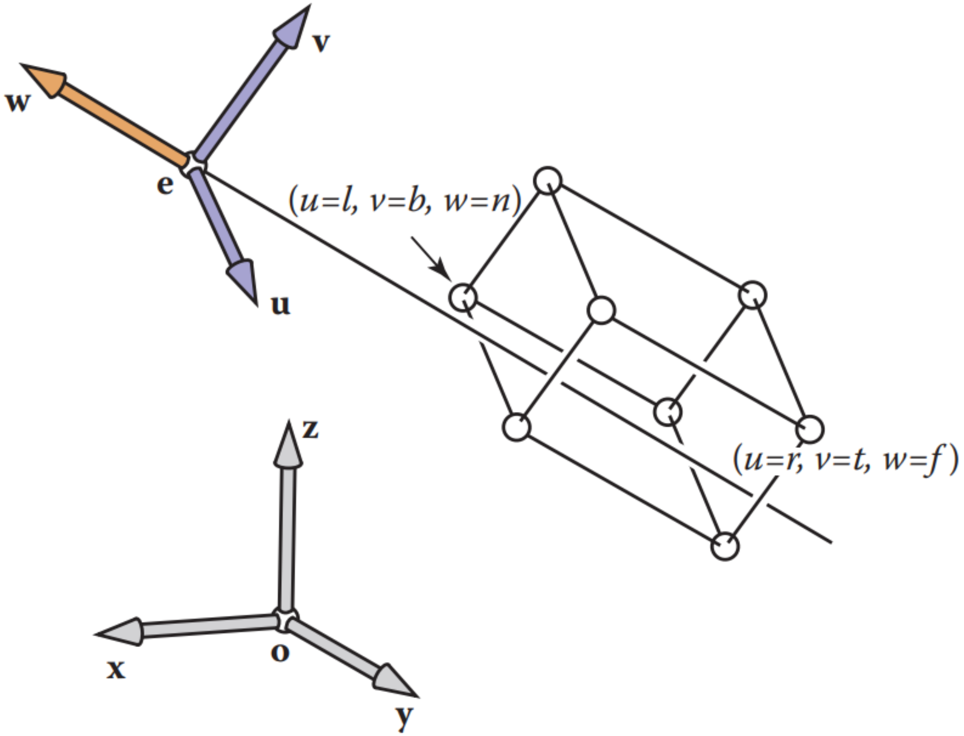
视图变换

- 设置相机位置、方位
- 属于模型视图矩阵
  - gluLookAt设置相机的位置和方位
  - 其实可以等价于反方向设置物体的位置和方位
  - 因此：gluLookAt可以有glRotate和glTranslate等函数联合实现
- 如何求gluLookAt所对应的变换矩阵

gluLookAt

- 相机变换（视点变换）

- the eye position $\mathbf{e}$,
- the gaze direction $\mathbf{g}$,
- the view-up vector $\mathbf{t}$.



模型视图变换

- 相机变换（视点变换）

  - the eye position $\mathbf{e}$,
  - the gaze direction $\mathbf{g}$,
  - the view-up vector $\mathbf{t}$.

$$\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|},$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{w}}{\|\mathbf{t} \times \mathbf{w}\|},$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}.$$

$$\mathbf{M}_{\text{cam}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} & \mathbf{e} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ x_w & y_w & z_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_e \\ 0 & 1 & 0 & -y_e \\ 0 & 0 & 1 & -z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

实例计算

```
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
glLoadIdentity();
gluLookAt(0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 0);
float arr[16];
glGetFloatv(GL_MODELVIEW_MATRIX, arr);
for(int i=0; i<4; ++i)
{
    for(int j=0; j<4; ++j)
    {
        printf("%f ", arr[j*4+i]);
    }
    printf("\n");
}
```

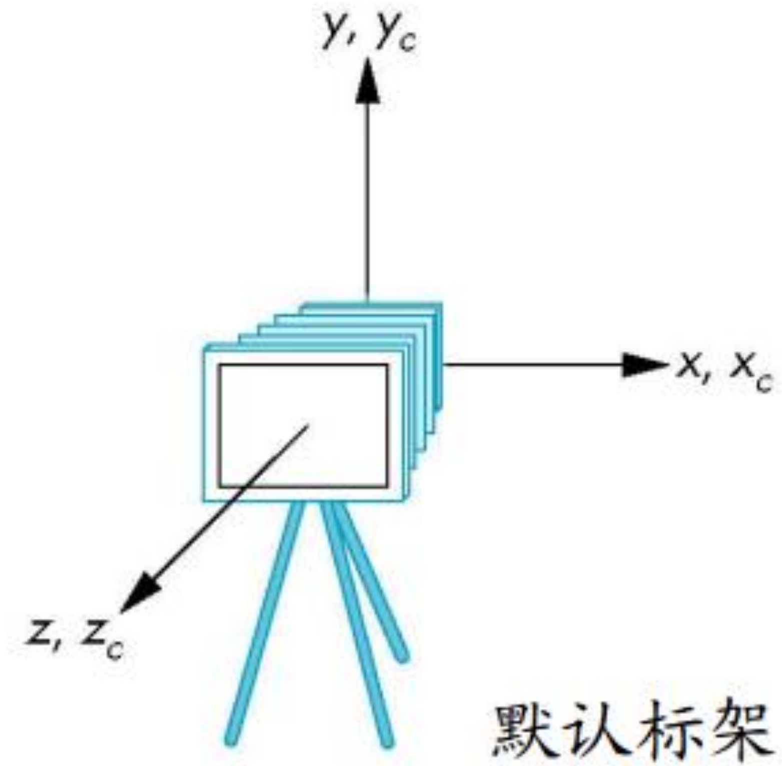
```
1.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 1.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 1.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 1.000000
```

```
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
glLoadIdentity();
gluLookAt(0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0);
float arr[16];
glGetFloatv(GL_MODELVIEW_MATRIX, arr);
for(int i=0; i<4; ++i)
{
    for(int j=0; j<4; ++j)
    {
        printf("%f ", arr[j*4+i]);
    }
    printf("\n");
}
```

```
-1.000000 0.000000 0.000000 0.000000
0.000000 -1.000000 0.000000 0.000000
0.000000 0.000000 1.000000 0.000000
0.000000 0.000000 0.000000 1.000000
```

注意相机标架

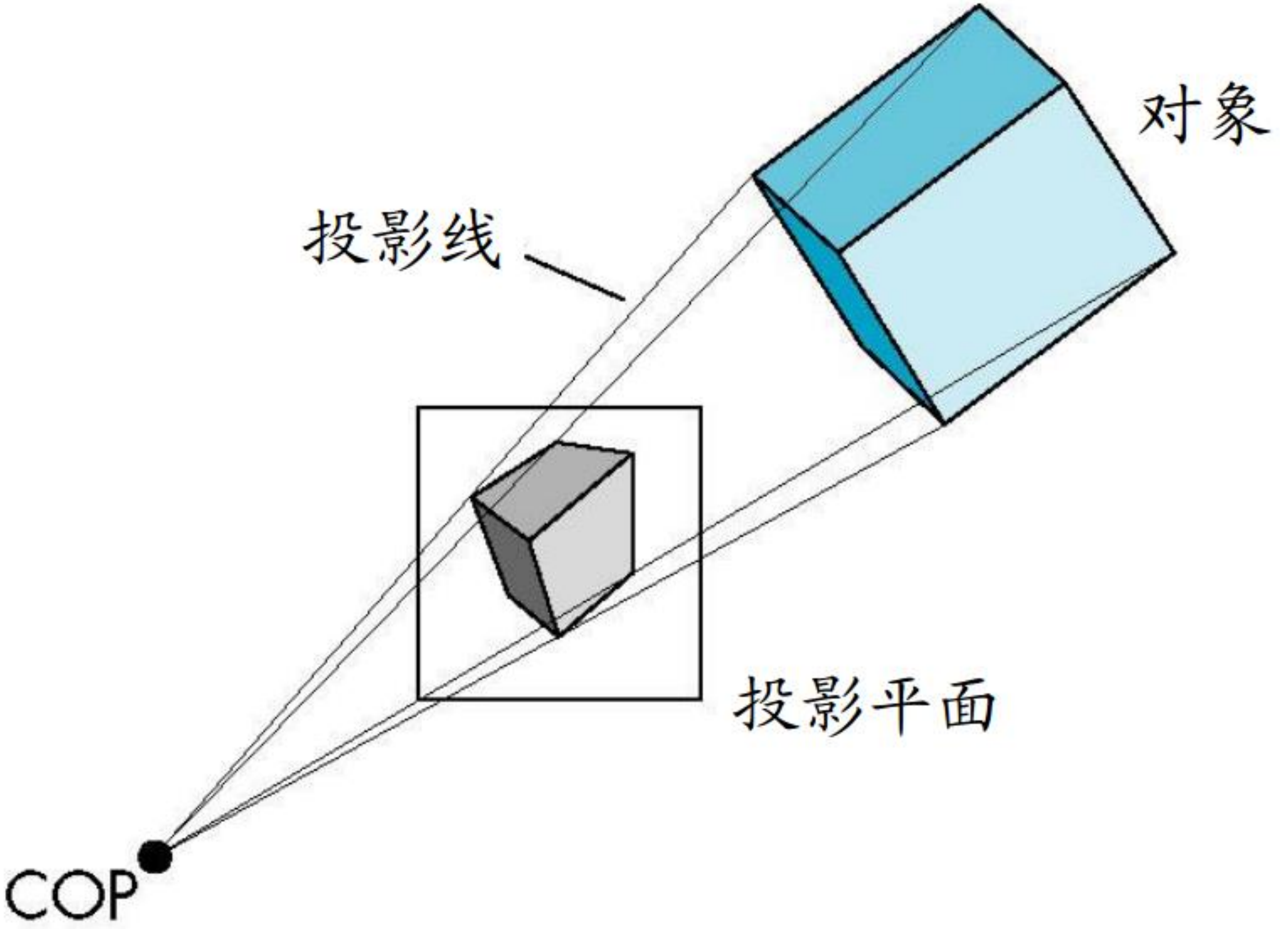
- 默认相机标架是与世界标架重合
- 但是相机是朝z负方向看的



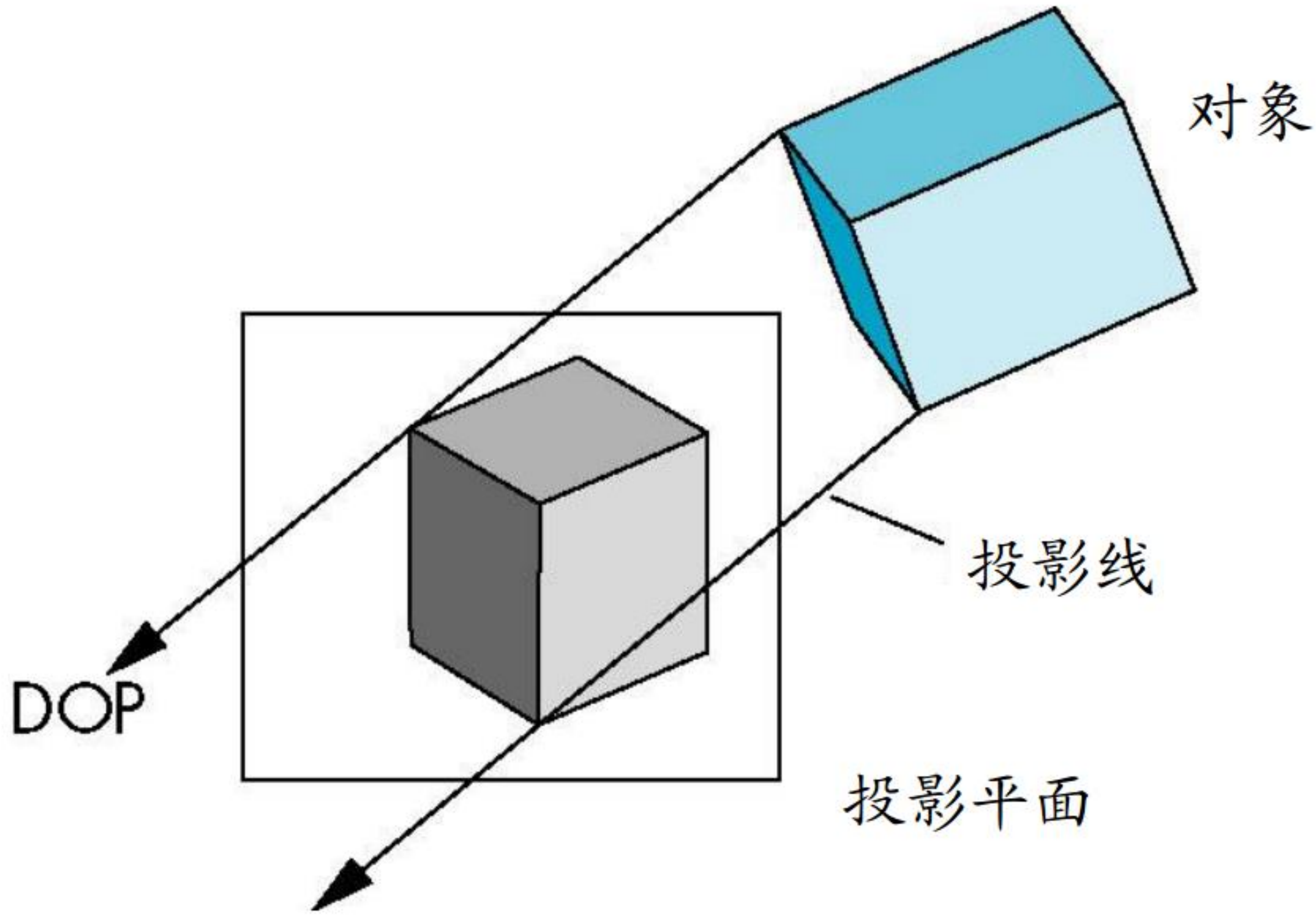
透视投影 vs 平行投影

- 计算机图形学中把所有的投影用同样的方法处理，用一个流水线体系实现它们
- 在经典视图中为了绘制不同类型的投影，发展出来不同的技术
- 平行投影和透视投影有基本区别，虽然从数学上说，平行投影是透视投影的极限状态

透视投影

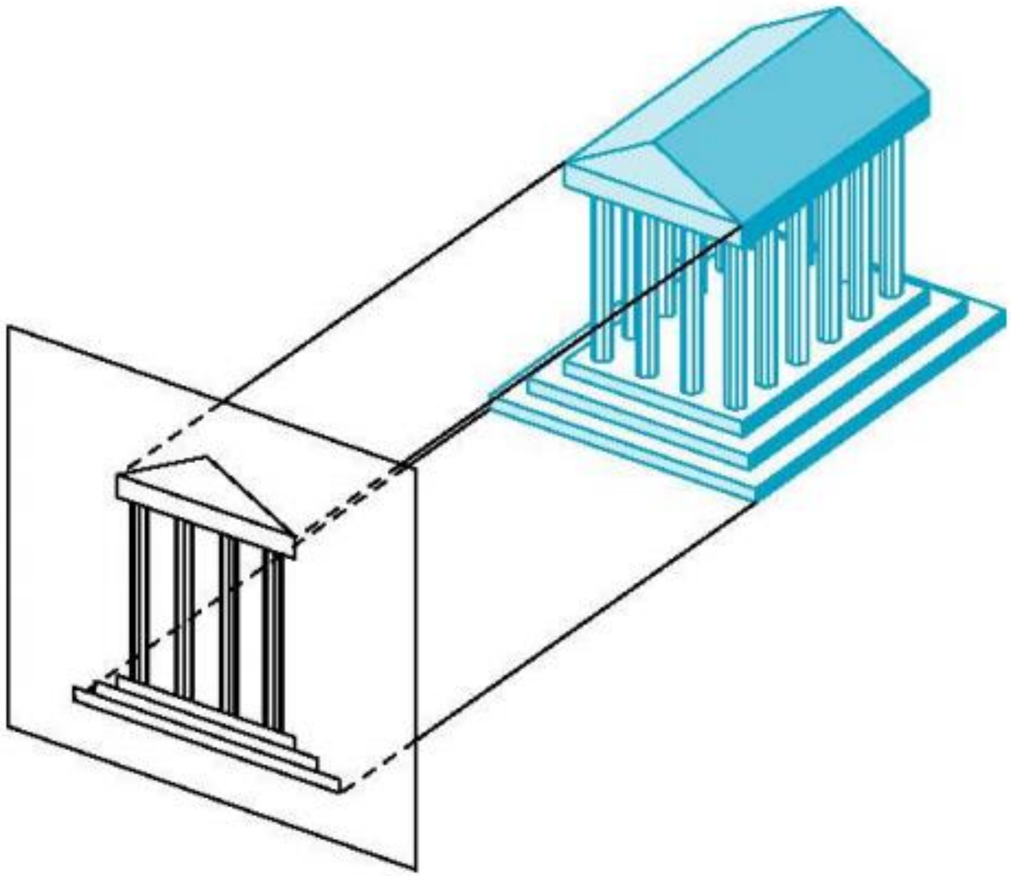


平行投影



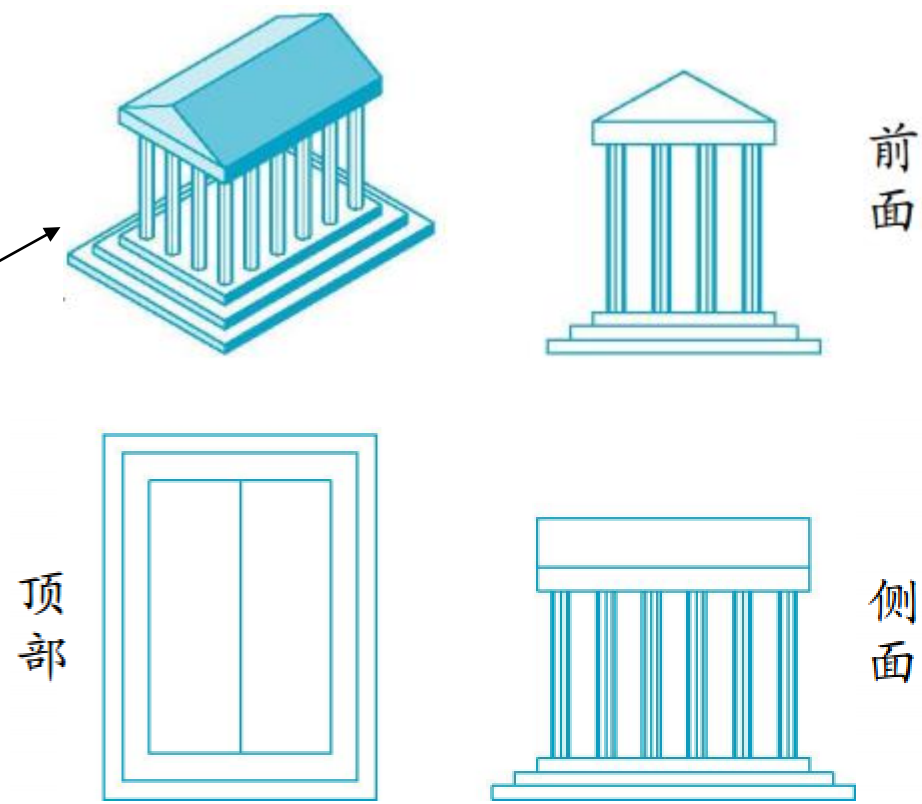
正交投影

- 投影线垂直于投影平面

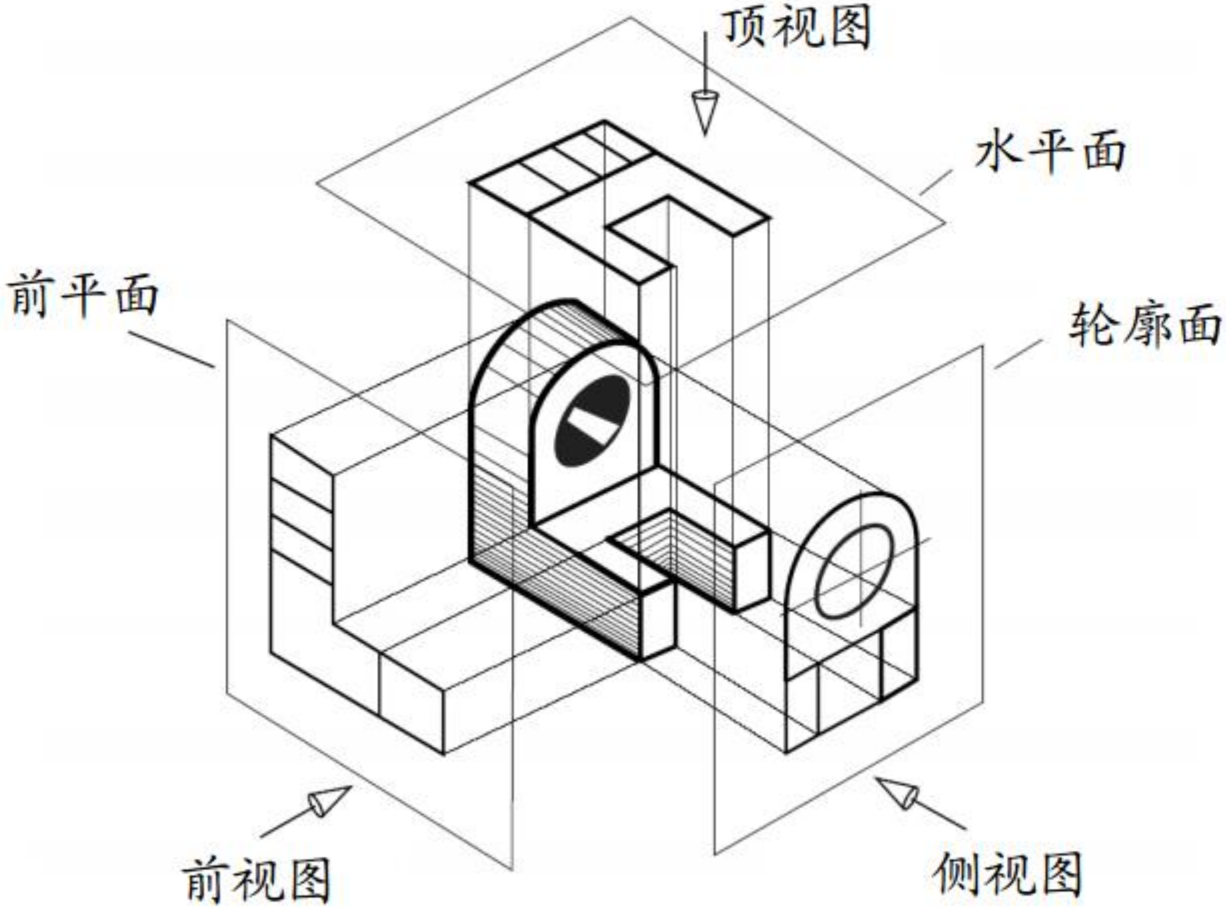


多视点正交投影

- 投影平面平行于某个主视面
- 通常从前面、和侧面进行投影
  - 三视图
  - 正视图（主视图）
  - 俯视图
  - 侧视图（左视图）
  - 正等轴测图（不是多视图正交视图中的一部分）
  - 在CAD和建筑行业中，通常显示出来三个视图以及正等轴测图



机器零件的三视图

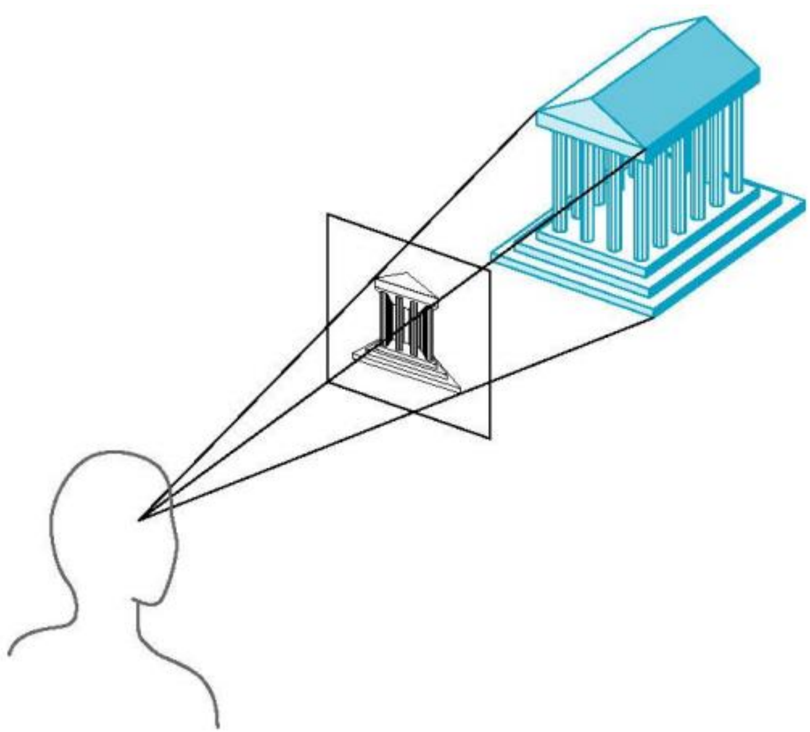


优缺点

- 保持了距离与角度
  - 保持形状
  - 可以用来测量
    - 建筑设计图
    - 手册
- 看不到对象真正的全局形状，因为许多面在视点中不可见

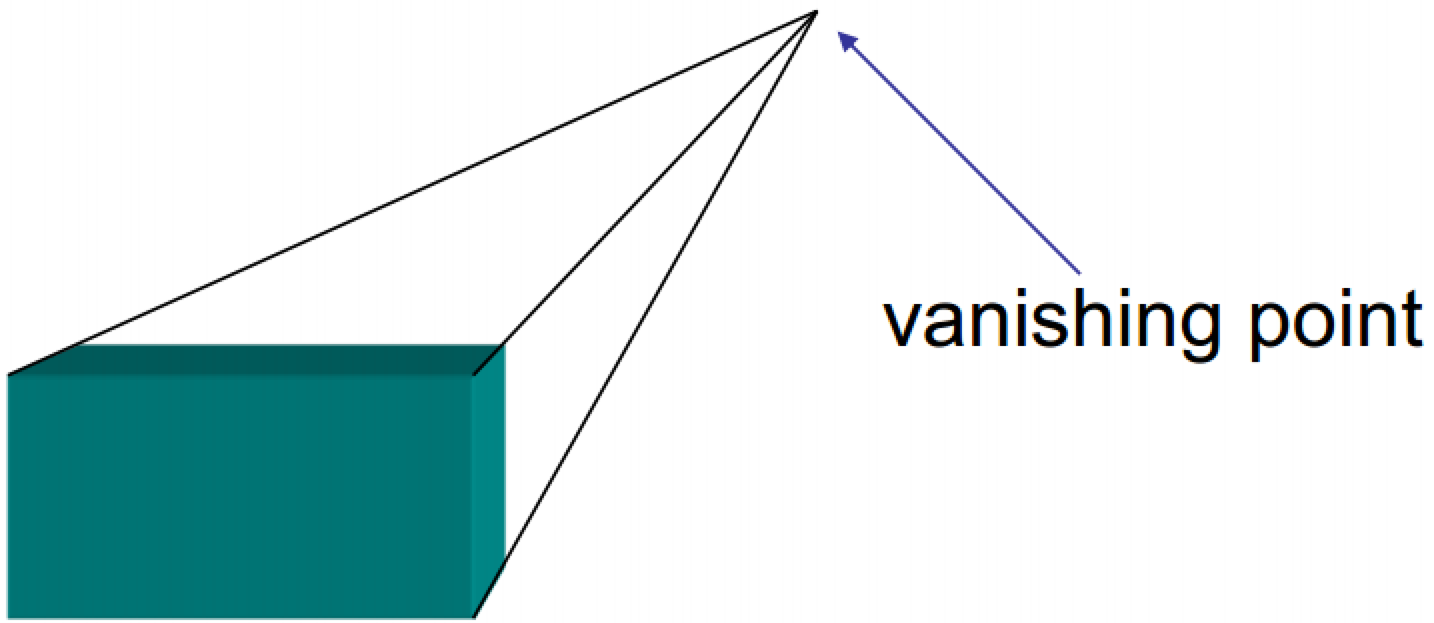
透视投影

- 投影线会聚于投影中心(COP)：尺寸缩小
- 经典视图中，观察者相对于投影平面对称
  - 投影中心和投影窗口确定一个对称的正棱锥

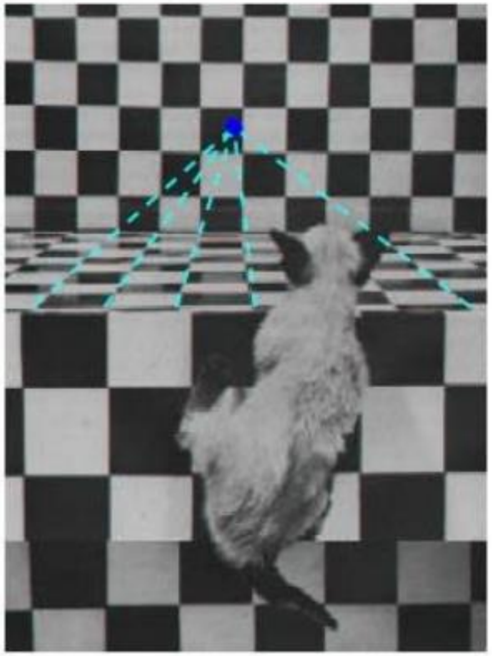


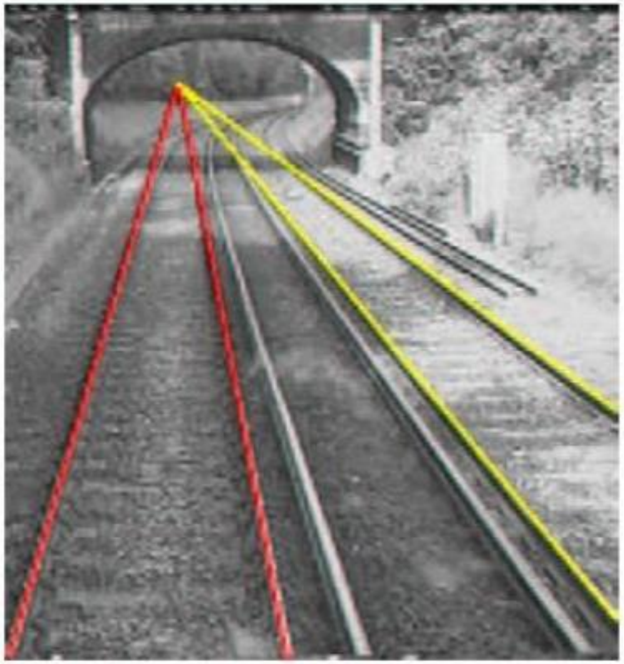
灭点（vanishing point）

- 对象上（不平行于投影面）的平行线在投影后交于一个灭点(vanishing point)
- 手工绘制简单透视投影时要利用这些灭点



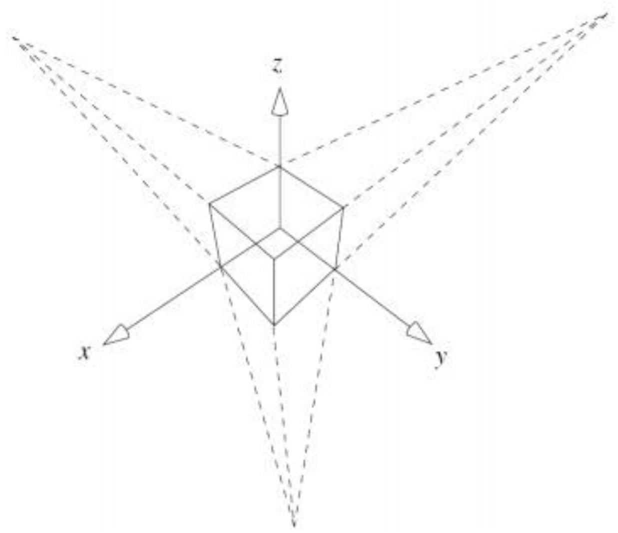
示例





三点透视

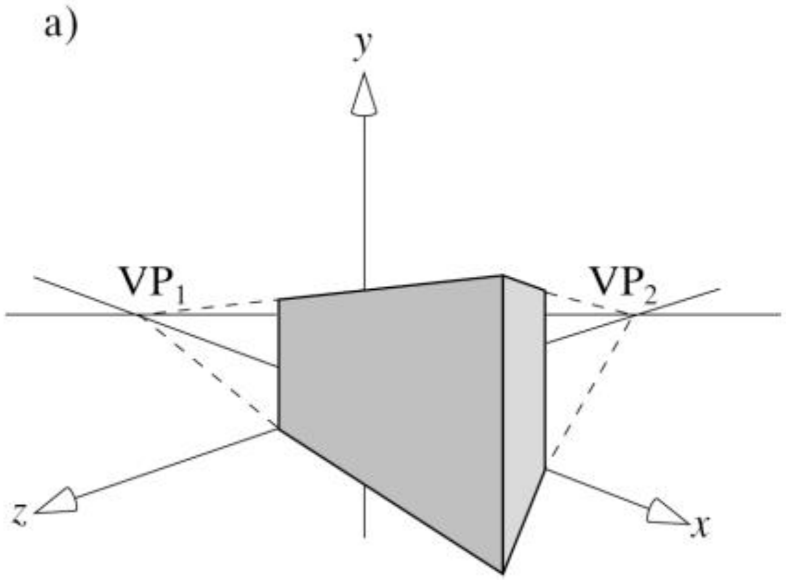
- 立方体的投影中有三个灭点



(a)

两点透视

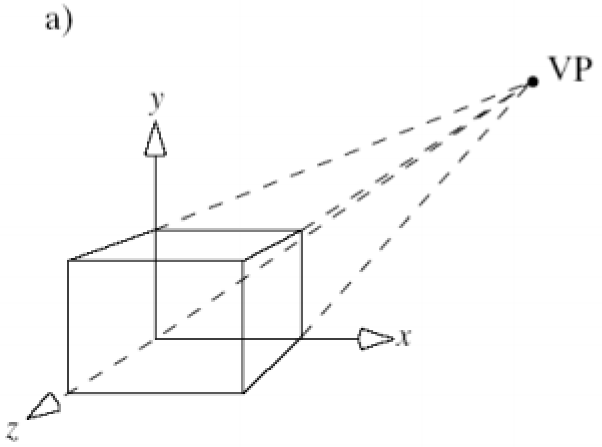
- 立方体的投影中有两个灭点

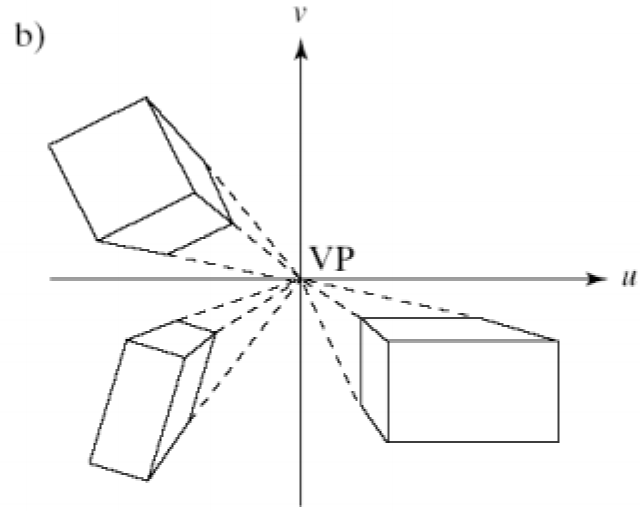


(b)

单点透视

- 立方体的投影中有一个灭点



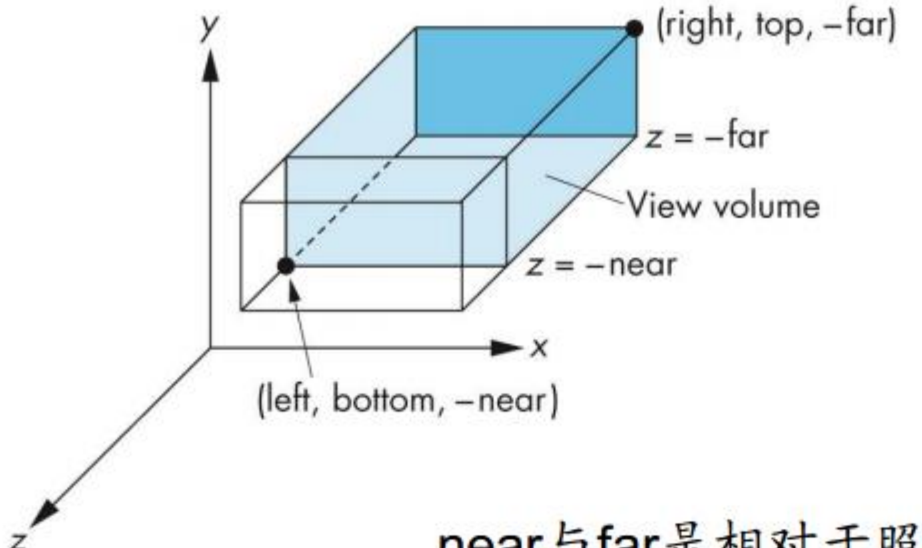


优缺点

- 同样大小的对象，离视点越远，投影结果就越小(diminuition)
  - 看起来更自然
- 直线上等距的几点投影后不一定等距—非均匀缩短(nonuniform foreshortening)
  - 借助透视投影图测量尺寸较平行投影困难
- 只有在平行于投影面的平面上角度被保持
- 相对于平行投影而言，更难用手工进行绘制（但对计算机而言，没有增加更多的困难）
- 主要应用在动画等真实感图形领域

正交投影

- glMatrixMode(GL_PROJECTION)
- void **glOrtho**(GLdouble left, GLdouble right, Gldouble bottom, GLdouble top, GLdouble near, GLdouble far);
  - 视景体是与坐标轴平行的长方体
  - near和far可取正值、零或负值，但near和far不应相同



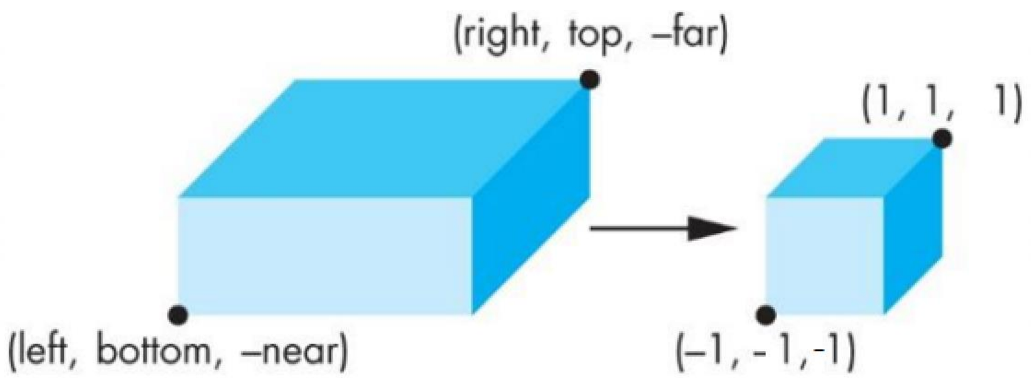
near与far是相对于照相机而言的

规范视景体

- OpenGL缺省的视景体是中心在原点，边长为2的立方体，相当于调用
  glMatrixMode(GL_PROJECTION);
  glLoadIdentity();
  glOrtho(-1.0, 1.0, -1.0, 1.0, -1.0, 1.0);
  称这个视景体为规范视景体（canonical view volume）
- 采用规范视景体的优点:
  - 同一流水线支持平行投影和透视投影
  - 简化了裁剪过程

正交规范化

- 规范化 -> 求出把指定裁剪体转化为默认裁剪体的变换
  glOrtho(left, right, bottom, top, near, far)
- 作用：把视景体内的坐标规范化到-1和1之间



近裁剪面z=-near映射到z=-1平面，
远裁剪面z=-far映射到z=1平面

正交规范化矩阵

分两步

近裁剪面z=-near映射到z=-1平面，
远裁剪面z=-far映射到z=1平面

– 平移：把中心移到原点，对应的变换为

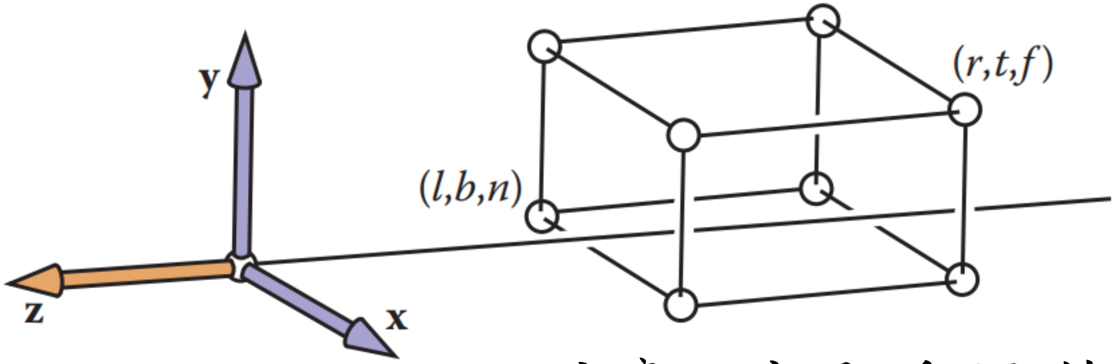
T(–(left+right)/2, –(bottom+top)/2, (near+far)/2))

– 缩放：进行放缩从而使视景体的边长为2

S(2/(right-left), 2/(top – bottom), -2/(far-near))

$$\mathbf{P}=\mathbf{S}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \frac{2}{right-left} & 0 & 0 & -\frac{right+left}{right-left} \\ 0 & \frac{2}{top-bottom} & 0 & -\frac{top+bottom}{top-bottom} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far-near} & -\frac{far+near}{far-near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

正交投影矩阵公式

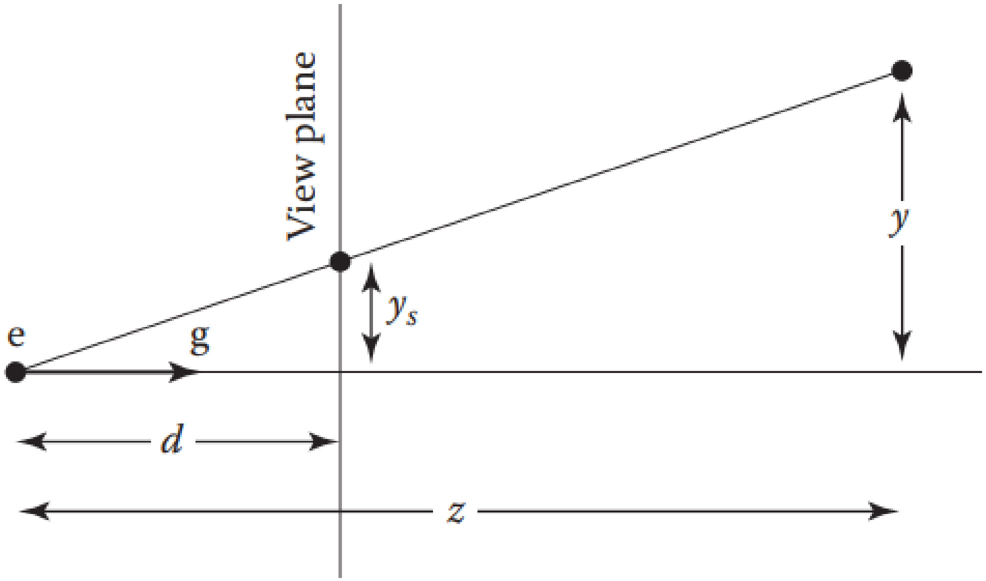


注意：这里n和f取的是绝对值

$$M_{orth} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

透视变换

- 思考z的作用？



$$y_s = \frac{d}{z} y$$

透视变换

- 如何将下面的式子写成矩阵乘法的形式?

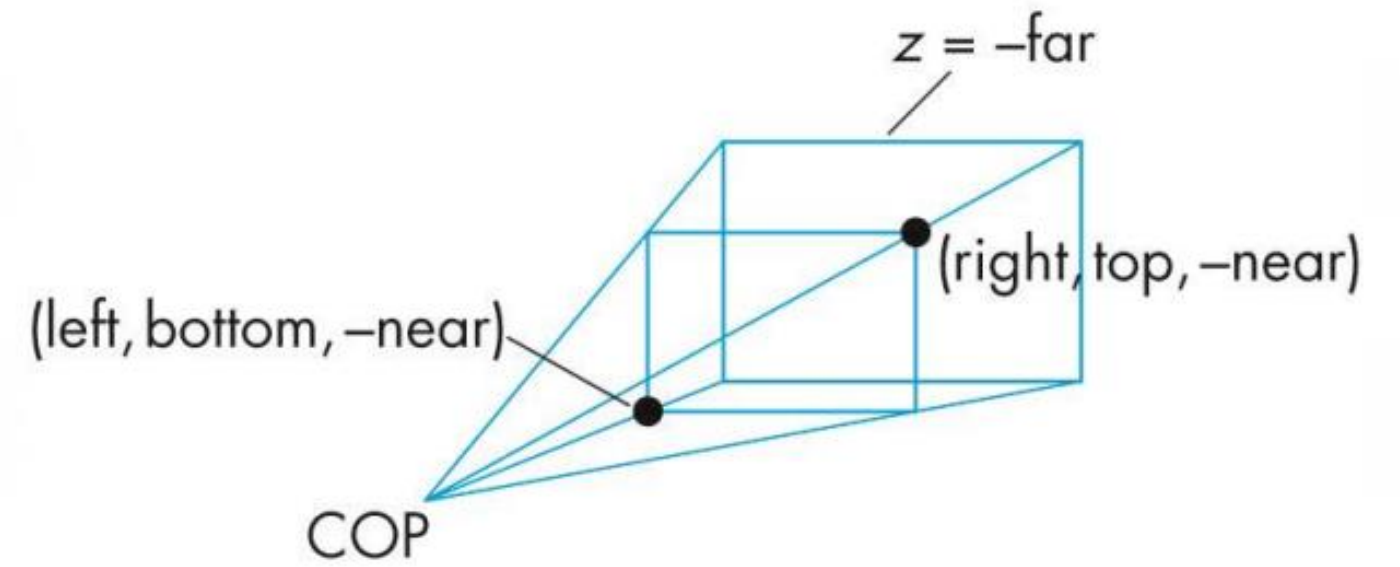
$$x_s = \frac{d}{z} y$$

$$y_s = \frac{d}{z} x$$

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

透视投影

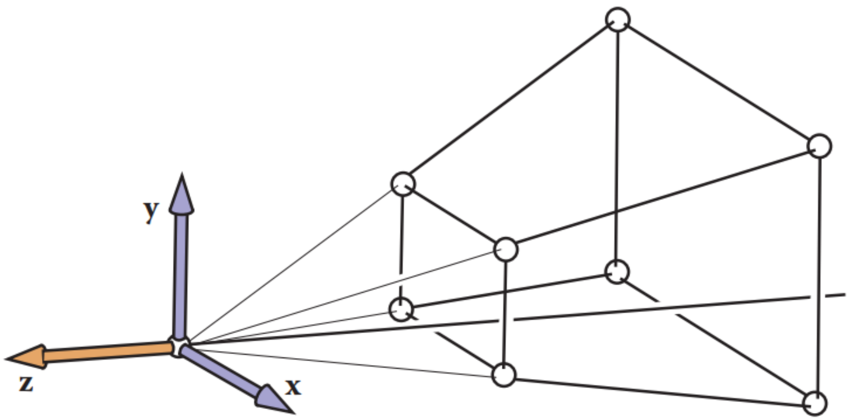
- glFrustum可以定义非对称视景体，而gluPerspective只能定义对称视景体



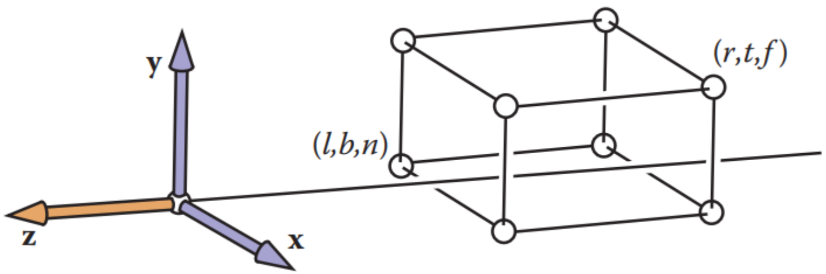
透视投影

- 透视变换转成正交变换

z=-n -> -n
z=-f -> -f



$$P=\begin{bmatrix}-n & 0 & 0 & 0\\ 0 & -n & 0 & 0\\ 0 & 0 & -(n+f) & -fn\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$



$$P\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-nx\\ -ny\\ -(n+f)z-fn\\ z\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-\frac{nx}{z}\\ -\frac{ny}{z}\\ -(n+f)-\frac{fn}{z}\\ 1\end{bmatrix}$$

透视投影

- 透视变换的投影矩阵

$$\mathbf{M}_{\text{per}} = \mathbf{M}_{\text{orth}}\mathbf{P}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

glFrustum对应的矩阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{NSH} = \begin{bmatrix} \frac{2near}{right-left} & 0 & \frac{right+left}{right-left} & 0 \\ 0 & \frac{2near}{top-bottom} & \frac{top+bottom}{top-bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & -\frac{2far*near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

视口变换glViewport

- glViewport(Ox, Oy, width, height)
  - 把规范化视景体中的内容“填入”指定的范围内
  - 规范化视景体坐标(x,y,z)
  - WinX = Ox + (x+1)/2*width
  - WinY = Oy + (y+1)/2*height
  - WinZ = (z+1)/2 (规范化到[0,1]之间)
  - 写成矩阵形式?
  - 注意：这里的WinY坐标和窗口系统的坐标（例如鼠标获取）朝向是反的

gluProject

- 学会此函数的用法
- 要求自行实现顶点变换的结果应与此函数结果一致