# 厦门大学《线性代数》期末试题

考试日期：2017.1　信息学院自律督导部整理

自律督导部

## 一、　单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 $A,B$ 均为二阶矩阵，$A^*,B^*$ 分别为 $A,B$ 的伴随矩阵，若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为（　　）。

A. $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

2. 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵，则对于齐次线性方程组 ① $AX=0$ 和 ② $A^TAX=0$，必有（　　）。

A. ①的解是②的解，但②的解不是①的解；

D. ②的解是①的解，①的解也是②的解.

3. 设 $A$ 为 $4\times 3$ 矩阵，$\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的三个线性无关的解，$k_1,k_2$ 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为（　　）。

A. $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$　　B. $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_3-\eta_1)$

C. $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$　　D. $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

4. 设 $\alpha_1=(a,a,a)^T,\alpha_2=(a-1,a,a-1)^T,\alpha_3=(1,1,a-1)^T,\beta=(1,2,1)^T$. 若 $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示，则 $a$ 的值为（　　）。

A. $a=0$　　B. $a=2$　　C. $a\neq 0$ 且 $a\neq 2$　　D. $a=0$ 或 $a=2$

5. $A,B$ 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　　）。

A. $A$ 的列向量组线性相关，$B$ 的行向量组线性相关；

B. $A$ 的列向量组线性相关，$B$ 的列向量组线性相关；

C. $A$ 的行向量组线性相关，$B$ 的行向量组线性相关；

D. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

6. 设不含零向量的 $n$ 元向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是正交向量组，则必有（　　）。

A. $m \le n$　　B. $m \ge n$　　C. $m < n$　　D. $m > n$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 $n$ 阶可逆矩阵. 已知 $n$ 维列向量 $\alpha$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^T$ 属于特征值 $\lambda$ 的特征向量的是（　　）。

A. $\boldsymbol{P}^{-1}\alpha$　　B. $\boldsymbol{P}^T\alpha$　　C. $\boldsymbol{P}\alpha$　　D. $(\boldsymbol{P}^{-1})^T\alpha$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵，则必有（　　）。

A. $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$；

B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量；

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵；

D. 对于任意常数 $t$，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　　）。

A. 合同且相似　　B. 合同但不相似

C. 不合同但相似　　D. 既不合同也不相似

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，且 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，则当（　　）时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

A. $r(A)=r(B)$　　B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　　D. $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$

## 二、　填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 则

$\boldsymbol{B}^{2020}-2\boldsymbol{A}^2=$ ______________。

2. 已知$A=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是正交矩阵，则$a+b=$__________。

3. 设$\alpha=(1,1,1)^T$，$\beta=(1,0,k)^T$，若矩阵$\alpha\beta^T$相似于$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则

$k$ =__________。

4. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩为__________。

5. 实对称矩阵$A$的秩等于$r$，它有$t$个正特征值，则它正负惯性指数之差为

__________。

## 三、 计算题（50分）：

1. （10分）求下列非齐次线性方程组的通解。

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 = 5. \end{cases}$$

2. （10 分）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{3}\\\boldsymbol{t}\end{pmatrix}$，问

（1）当 $\boldsymbol{t}$ 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

（2）当 $\boldsymbol{t}$ 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

（3）当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将 $\alpha_3$ 表示为 $\alpha_1,\alpha_2$ 的线性组合。

3. （10 分）设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\mathbf{1}$，$\lambda_2=\mathbf{2}$，$\lambda_3=\mathbf{3}$，对应特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$，

$\xi_3=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{3}\\\mathbf{9}\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

4. （10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ 相似，求 $a,b$ 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$。

5. （10 分）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$$

（1） 写出二次型 $f$ 的矩阵表达式；

（2） 判断此二次型是否正定。

## 四、 证明题（15 分）：

1. （5 分）如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})$ 等于矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$，即 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$。那么该线性方程组有解。

2. （5 分）设向量 $\beta$ 可以由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{t-1},\alpha_t$ 线性表示，但向量 $\beta$ 不可以由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{t-1}$ 线性表示，证明向量 $\alpha_t$ 可以由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{t-1},\beta$ 线性表示。

3. （5 分）证明：设 $n$ 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 的全部特征值为 $\lambda_i\left(1\le i\le n\right)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$$