历届试题选（曲线积分）解答

一、设 Γ 是螺线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ 的一段，起点为 $(a,0,0)$，终点 $(a,0,4\pi b)$，则 $\int_\Gamma (yz-x^2)\mathrm{d}x+(zx-y)\mathrm{d}y+(xy-1)\mathrm{d}z=$____________。 (2005—2006)

解：起点为 $(a,0,0)$ 对应于 $t=0$，终点 $(a,0,4\pi b)$ 对应 $t=4\pi$，故

$$\int_\Gamma (yz-x^2)\mathrm{d}x+(zx-y)\mathrm{d}y+(xy-1)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{4\pi}[(a\sin t\cdot bt-a^2\cos^2 t)\cdot(-a\sin t)+(bt\cdot a\cos t-a\sin t)\cdot a\cos t+(a\cos t\cdot a\sin t-1)\cdot b]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{4\pi}[-a^2bt\sin^2 t+a^3\cos^2 t\sin t+a^2bt\cos^2 t-b]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{4\pi}[a^2bt\cos 2t+a^3\cos^2 t\sin t-b]\mathrm{d}t$$

$$=a^2bt\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{4\pi}-\int_0^{4\pi}a^2b\frac{1}{2}\sin 2t\mathrm{d}t-\frac{a^3}{3}\cos^3 t\Big|_0^{4\pi}-4\pi b$$

$$=\frac{1}{4}a^2b\cos 2t\Big|_0^{4\pi}-4\pi b$$

$$=-4\pi b$$

二、设曲线 Γ：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+y+z=0\end{cases}$，则 $\int_\Gamma (x+y^2)\,\mathrm{d}s=$________________。 (2008—2009)

解：因为 Γ 关于 x， y 有轮换对称性，则 $\int_\Gamma x\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}s$， $\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s$.

同样，Γ 关于 x， z 有轮换对称性，则 $\int_\Gamma x\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z\,\mathrm{d}s$， $\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s$.

因此， $\int_\Gamma x\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_\Gamma (x+y+z)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_\Gamma 0\,\mathrm{d}s=0$，

$$\int_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\int_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_\Gamma \mathrm{d}s=\frac{1}{3}\cdot 2\pi=\frac{2}{3}\pi,$$

其中 $\int_\Gamma \mathrm{d}s=\Gamma$ 的长度.

因此，$\int_\Gamma (x+y^2)\,\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi$.

三、设 L 为上半圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 及 x 轴所围成的区域的整个边界，沿逆时针方向，则

$\oint_L y^2\,\mathrm{d}x=$______________________。 (2008—2009)

解：$\oint_L y^2\,\mathrm{d}x=\int_a^{-a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=-\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$

$$=-2\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=-2(a^3-\frac{1}{3}a^3)=-\frac{4}{3}a^3.$$

四、设曲线Γ是菱形之边界，方向为逆时针方向，其顶点分别为$(2,0),(0,3),(-2,0),(0,-3)$，求曲线积分$\oint_\Gamma\frac{5y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3|x|+2|y|}$之值。 (2005—2006)

解：记D为曲线Γ所围成的菱形区域.

注意到，曲线Γ的方程为$3|x|+2|y|=6$，故$\oint_\Gamma\frac{5y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3|x|+2|y|}=\frac{1}{6}\oint_\Gamma 5y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$.

由格林公式，有

$$\oint_\Gamma\frac{5y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3|x|+2|y|}=\frac{1}{6}\iint_D(-1-5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为$\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ D的面积$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=12.$

五、计算 $\int_L\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中$L$分别为：（1）圆周$(x-2)^2+y^2=2$，沿逆时针方向；（2）圆周$(x-1)^2+y^2=2$，沿逆时针方向。 (2008—2009)

解：
$$P(x,y)=\frac{y}{2(x^2+y^2)},\ Q(x,y)=-\frac{x}{2(x^2+y^2)},$$

则当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot2y}{2(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot2x}{2(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2},$$

即 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

（1） L 为圆周 $(x-2)^2+y^2=2$，则 L 围成的区域 $D=\{(x,y)\big|(x-2)^2+y^2\le 1\}$.

于是，$(0,0)\notin D$，故由格林公式，得

$$\int_L \frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{2(x^2+y^2)}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\,.$$

（2） L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，则 L 围成的区域 $D=\{(x,y)\big|(x-1)^2+y^2\le 2\}$.

此时，$(0,0)\in D$，不能直接用格林公式.

作曲线 $L_1: x^2+y^2=\varepsilon^2$，取足够小的 ε，使得曲线 L_1 位于区域 D 的内部，并设曲线 L_1 的方向为顺时针方向.

设曲线 L 与曲线 L_1 围成的区域为 D，曲线 L_1 围成的区域为 D_1，则

$$\int_L \frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{2(x^2+y^2)}=\int_{L\cup L_1}\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{2(x^2+y^2)}-\int_{L_1}\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{2(x^2+y^2)}\,.$$

因为 $(0,0)\in D$，由格林公式，得

$$\int_{L\cup L_1}\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{2(x^2+y^2)}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\,.$$

而 $$\int_{L_1}\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{2(x^2+y^2)}=\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{L_1}y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y\,.$$

由格林公式，

$$\int_{L_1}y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y=-\iint_{D_1}(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （注意：L_1 是顺时针方向）

$$=2\cdot\pi\varepsilon^2\,,$$

所以，$$\int_{L_1}\frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{2(x^2+y^2)}=\pi\,.$$

故 $$\int_L \frac{y\,\mathrm{d}\,x-x\,\mathrm{d}\,y}{2(x^2+y^2)}=-\pi.$$

六、计算$\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - 2y)\,\mathrm{d}\,x + (\mathrm{e}^x \cos y - 2)\,\mathrm{d}\,y$，其中$L$为上半圆周$(x-a)^2 + y^2 = a^2 (y \ge 0)$，沿逆时针方向。（常数$a > 0$） (2008—2009)

解：$P(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y - 2y, Q(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y - 2$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{e}^x \cos y - 2, \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y,$$

即 $$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2.$$

作辅助线$L_1 : y = 0, x : -a \to a$， L_1与L所围成的区域为D.

则 $$\int_L (\mathrm{e}^x \sin y - 2y)\,\mathrm{d}\,x + (\mathrm{e}^x \cos y - 2)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_{L+L_1} (\mathrm{e}^x \sin y - 2y)\,\mathrm{d}\,x + (\mathrm{e}^x \cos y - 2)\,\mathrm{d}\,y - \int_{L_1} (\mathrm{e}^x \sin y - 2y)\,\mathrm{d}\,x + (\mathrm{e}^x \cos y - 2)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{-a}^{a} 0\mathrm{d}x$$

$$= 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi a^2 = \pi a^2.$$

七、计算$\oint_L (|x| + 2|y|)\,\mathrm{d}\,s$，其中$L$ 为单位圆周$x^2 + y^2 = 1$。 (2010—2011)

解：记L_1为曲线L位于第一象限的部分.

因为L关于x轴和y轴均对称，且$f(x,y) = |x| + 2|y|$满足$f(-x,y) = f(x,y)$， $f(x,-y) = f(x,y)$，

则 $$\oint_L (|x| + 2|y|)\,\mathrm{d}\,s = 4\int_{L_1} (x + 2y)\mathrm{d}s.$$

因为圆周$x^2 + y^2 = 1$的参数方程为$x = \cos t$， $x = \sin t$，则

$$\oint_L (|x| + 2|y|)\,\mathrm{d}\,s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + 2\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= 4(1+2) = 12.$$

八、计算$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2 + y^2}$，其中$L$为曲线$|x| + |y| = 2$，方向为逆时针。 (2010—2011)

解：记$P(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}$， $Q(x,y) = -\frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}$，则当$(x,y) \notin (1,0)$时，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1\cdot[(x-1)^2+y^2]-y\cdot 2y}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1\cdot[(x-1)^2+y^2]-(x-1)\cdot 2(x-1)}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}.$$

因为$(1,0)$位于曲线L围成的区域中，故不能直接用格林公式.

作辅助曲线$L_\varepsilon:(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$，并取$\varepsilon$足够小，使得$L_\varepsilon$位于曲线$L$所围成的区域内部，$L_\varepsilon$取顺时针方向.

记L与L_ε围成的区域为D，L_ε围成的区域为D_ε，于是，

$$\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\oint_{L+L_\varepsilon}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}-\oint_{L_\varepsilon}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}.$$

由于$(1,0)$不在区域D内，则由格林公式，得

$$\oint_{L+L_\varepsilon}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

而 $$\oint_{L_\varepsilon}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_\varepsilon}y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}(-\iint_{D_\varepsilon}(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\qquad\text{（格林公式，注意 }L_\varepsilon\text{ 是顺时针的）}$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\varepsilon^2=2\pi.$$

故 $$\oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=0-2\pi=-2\pi.$$

九、设L为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\end{cases}$，计算$\int_L\sqrt{z^2+2y^2}\mathrm{d}s$.　　(2011—2012)

解：因为在曲线L上，$y=x$，$x^2+y^2+z^2=a^2$，则

$$\int_L\sqrt{z^2+2y^2}\mathrm{d}s=\int_L\sqrt{z^2+x^2+y^2}\mathrm{d}s=a\int_L\mathrm{d}s,$$

因为平面$y=x$经过球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的球心，故圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ y=x\end{cases}$的半径为$a$，所以，

$$\int_L \sqrt{z^2+2y^2}\,\mathrm{d}s = a\cdot 2\pi a = 2\pi a^2,$$

其中 $\int_L \mathrm{d}s = L$ 的周长 $=2\pi a$.

十、计算曲线积分 $\oint_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}y$，式中 L 是由 $x^2+y^2=1$， $x^2+y^2=4$，$y=x$ 及 $y=\sqrt{3}x$ 在第一象限所围成区域 D 的正向边界。 (2011—2012)

解：记 $P(x,y)=\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}$，$Q(x,y)=\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2}{y}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\frac{1}{y}=\frac{2}{x^2+y^2}.$$

由格林公式，有

$$\oint_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{2}{x^2+y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用极坐标变换，则有

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{1}{r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{12}\ln 2.$$

故 $$\oint_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{12}\ln 2.$$

十一、计算 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=4,\ y\ge 0$ 与 x 轴围成的闭曲线. (2014—2015)

解：记 L_1 为上半圆周 $x^2+y^2=4\ (y\ge 0)$， $L_2: y=0,-2\le x\le 2$.

于是， $$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$$

$$=\int_{L_1}\mathrm{e}^2\mathrm{d}s+\int_{-2}^{2}\mathrm{e}^{|x|}\sqrt{1+0^2}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^2\int_{L_1}\mathrm{d}s+2\int_0^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^2\cdot\pi\cdot 2+2(\mathrm{e}^2-1)=2(\pi+1)\mathrm{e}^2-2.$$

十二、计算 $\int_L xy\mathrm{d}x$， L 为曲线 $y^2=x$ 上由 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧. (2014—2015)

解：$\int_L xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}y^2\cdot y\cdot 2y\mathrm{d}y=4\int_0^1 y^4\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$.

十三、计算$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$(x-1)^2+y^2=2$，取逆时针方向. (2014—2015)

解：类似于第五题. 答案：-2π.

十四、(1) 证明：在整个xOy平面内，$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$为某个二元函数$u(x,y)$的全微分；

(2)求解全微分方程$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0$；

(3)求$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$，其中曲线$L$：$(x-1)^2+y^2=4,\ y\geq 0$，$L$的方向为逆时针方向.

(2014—2015)

解：(1) $P(x,y)=x+y+1, Q(x,y)=x-y^2+3$，因为在整个$xOy$平面内，$\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y}$.

故在整个xOy平面内，$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$为某个二元函数$u(x,y)$的全微分.

(2) 求原函数$u(x,y)$.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x (x+1)\mathrm{d}x+\int_0^y (x-y^2+3)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y\end{aligned}$$

因此，全微分方程$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0$的通解为$\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y=C$，其中$C$为任意常数.

(3) 曲线L的起点坐标为$(3,0)$，终点坐标为$(-1,0)$，故

$$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=u(-1,0)-u(3,0)$$

$$=\frac{1}{2}-1-(\frac{9}{2}+3)$$

$$=-8.$$

十五、计算$\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中$L$为$x^2+y^2=4$上半圆周与$x$轴围成的封闭曲线. (2015—2016)

解：和第十一题相同.

十六、计算$\int_L xy\mathrm{d}x$，其中L为抛物线$y^2=x$由$(1,-1)$到$(1,1)$. (2015—2016)

解：和第十二题相同.

十七、计算曲线积分$\int_\Gamma \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$，其中$\Gamma$为曲线$x=\mathrm{e}^t\cos t$，$y=\mathrm{e}^t\sin t$，$z=\mathrm{e}^t$上对应于$t$从0到2的一段弧. (2016—2017)

解：
$$\int_\Gamma \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\int_0^2 \frac{-\mathrm{e}^t\sin t\cdot(-\mathrm{e}^t\sin t+\mathrm{e}^t\cos t)+\mathrm{e}^t\cos t\cdot(\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t)+\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t\cos t)^2+(\mathrm{e}^t\sin t)^2+(\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2(1+\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}(3-\mathrm{e}^{-2}).$$

十八、计算$\oint_L(2|x|+y)\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=4$. (2016—2017)

解：L的参数方程为$x=2\cos t$，$y=2\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

因为L关于x轴对称，$f(x,y)=y$满足$f(x,-y)=-y=-f(x,y)$，则$\oint_L y\mathrm{d}s=0$.

L关于x轴和y轴均对称，且$g(x,y)=|x|$满足$g(-x,y)=|x|=g(x,y)$，$g(x,-y)=|x|=g(x,y)$，

则
$$\oint_L|x|\mathrm{d}s=4\oint_{L_1}x\mathrm{d}s,$$

其中L_1为圆周$x^2+y^2=4$位于第一象限部分.

于是，
$$\oint_L|x|\mathrm{d}s=4\oint_{L_1}x\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\cdot\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\mathrm{d}t$$
$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=16.$$

十九、计算曲线积分$I=\oint_L x\mathrm{d}s$，其中L是由直线$y=x$与抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$所围区域的整个边界;

(2017—2018)

解：直线$y=x$与抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$的交点为$(0,0)$和$(2,2)$.

记$L_1: y=x, 0\le x\le 2$，$L_2: y=\frac{1}{2}x^2, 0\le x\le 2$，则

$$I=\oint_L x\mathrm{d}s=\int_{L_1} x\mathrm{d}s+\int_{L_2} x\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^2 x\cdot\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x+\int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\Big|_0^2+\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

$$=2\sqrt{2}+\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

二十、计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}x$，其中 L 为上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (y\geq 0)$ 从 $(a,0)$ 到 $(-a,0)$ 那一段弧. (2017—2018)

解：L 的参数方程为 $x=a\cos t$， $y=b\sin t$， $t:0\to\pi$.

则 $$I=\int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}x=\int_0^\pi (a^2\cos^2 t+2ab\cos t\sin t)(-a\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=-a^3\int_0^\pi \cos^2 t\sin t\mathrm{d}t-2a^2b\int_0^\pi \cos t\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3}a^3\cos^3 t\Big|_0^\pi-\frac{2}{3}a^2b\sin^3 t\Big|_0^\pi$$

$$=-\frac{2}{3}a^3.$$

二十一、利用 Green 公式计算曲线积分 $I=\int_L [\cos(x+y^2)+2y]\mathrm{d}x+[2y\cos(x+y^2)+3x]\mathrm{d}y$，其中 L 为曲线 $y=\sin x$ 自 $x=\pi$ 到 $x=0$ 的一段. (2017—2018)

解：$P(x,y)=\cos(x+y^2)+2y, Q(x,y)=2y\cos(x+y^2)+3x$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin(x+y^2)+3, \frac{\partial P}{\partial y}=-2y\sin(x+y^2)+2.$$

作辅助线 $L_1: y=0, x:0\to\pi$，记 L 与 L_1 所围成的区域为 D，则

$$I=\oint_L [\cos(x+y^2)+2y]\mathrm{d}x+[2y\cos(x+y^2)+3x]\mathrm{d}y$$

$$-\int_{L_1} [\cos(x+y^2)+2y]\mathrm{d}x+[2y\cos(x+y^2)+3x]\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D [-2y\sin(x+y^2)+3-(-2y\sin(x+y^2)+2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x \qquad \text{（格林公式）}$$

$$=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y-0$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2.$$

二十二、计算第一类曲线积分 $I=\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 是圆周 $(x-1)^2+y^2=4$. (2018—2019)

解：L 的参数方程为 $x=1+2\cos t$， $y=2\sin t$， $0\le t\le 2\pi$，则

$$I=\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}[(1+2\cos t)^2+(2\sin t)^2]\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{2\pi}(5+4\cos t)\mathrm{d}t=20\pi.$$

二十三、计算第二类曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 是椭圆 $x^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$，取逆时针方向.

(2018—2019)

解：$P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$，

则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

即 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

L 为椭圆 $x^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$，记 L 围成的区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}\le 1\}$.

此时，$(0,0)\in D$，不能直接用格林公式.

作曲线 $L_1:x^2+y^2=\varepsilon^2$，取足够小的 ε，使得曲线 L_1 位于区域 D 的内部，并设曲线 L_1 的方向为顺时针方向.

设曲线 L 与曲线 L_1 围成的区域为 D，曲线 L_1 围成的区域为 D_1，则

$$\int_L\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{L+L_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\int_{L_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

因为$(0,0)\in D$，由格林公式，得

$$\int_{L+L_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

而 $$\int_{L_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y.$$

由格林公式，

$$\int_{L_1}y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=-\iint_{D_1}(-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{（注意：}L_1\text{是顺时针方向）}$$

$$=2\cdot\pi\varepsilon^2,$$

所以，$$\int_{L_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=2\pi.$$

故$\int_L\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-2\pi.$

二十四、计算第一类曲线积分$I=\oint_L y\mathrm{d}s$，其中L为摆线的一拱$x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$ (2019—2020)

解：$$I=\oint_L y\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}3(1-\cos t)\sqrt{(3(1-\cos t))^2+(3\sin t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=9\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t$$

$$=18\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=36\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=72\int_0^{\pi}\sin^3 u\mathrm{d}u \qquad (\text{令}u=\frac{t}{2})$$

$$=-72\int_0^{\pi}(1-\cos^2 u)\mathrm{d}\cos u$$

$$=-72(\cos u-\frac{1}{3}\cos^3 u)\Big|_0^{\pi}=96$$

二十五、计算第二类曲线积分$I=\oint_L(x^2y\cos x+2xy\sin x-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2x)\mathrm{d}y$，其中$L$是由上半

圆 $y=\sqrt{2x-x^2}$ ，取逆时针方向. (2019—2020)

解：$P(x,y)=x^2y\cos x+2xy\sin x-\mathrm{e}^x, Q(x,y)=x^2\sin x-2x$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2\cos x+2x\sin x, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\sin x+x^2\cos x-2$.

作辅助线 $L_1: y=0,\ x:0\to 2$，记 L 与 L_1 围成的区域为 D.

于是，由格林公式，得

$$I=\oint_{L+L_1}(x^2y\cos x+2xy\sin x-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2x)\mathrm{d}y$$
$$-\int_{L_1}(x^2y\cos x+2xy\sin x-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2x)\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D[2x\sin x+x^2\cos x-2-(x^2\cos x+2x\sin x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2(-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$$
$$=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2+\mathrm{e}^x\Big|_0^2$$
$$=-\pi+\mathrm{e}^2-1.$$

二十六、计算第一类曲线积分 $I=\oint\limits_L(y^2+xy^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$. (2020—2021)

解：因为 L 关于 y 轴对称，且 $f(x,y)=xy^2$ 满足 $f(-x,y)=-xy^2=-f(x,y)$，则 $I=\oint\limits_L xy^2\mathrm{d}s=0$.

由于 L 关于 x 轴和 y 轴均对称，$g(x,y)=y^2$ 满足 $g(-x,y)=y^2=g(x,-y)$，故 $\oint\limits_L y^2\mathrm{d}s=4\int_{L_1}y^2\mathrm{d}s$，其中 L_1 为曲线 L 的第一象限部分.

由 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\Rightarrow(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{3}})^2=1$，可设参数方程 $\begin{cases}x^{\frac{1}{3}}=\cos t\\ y^{\frac{1}{3}}=\sin t\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$.

$$I=\oint_L(y^2+xy^2)\mathrm{d}s=4\int_{L_1}y^2\mathrm{d}s$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{3}{2}\sin^8 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}.$$

二十七、计算第二类曲线积分 $I=\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $y=\frac{\pi}{2}\cos x$ 从点 $(0,\frac{\pi}{2})$ 到点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 的一段有向弧. (2020—2021)

解：作有向曲线 $L_1:x=\frac{\pi}{2}\cos t,\ y=\frac{\pi}{2}\sin t$， $t:0\to\frac{\pi}{2}$. 设 D 为 L 和 L_1 所围成的有界区域，则

$$I=\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L+L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\int_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L+L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\int_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

利用格林公式，有

$$\oint_{L+L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{x^2+y^2})-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0.$$

又 $$\int_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\sin t(-\frac{\pi}{2}\sin t)-\frac{\pi}{2}\cos t\cdot\frac{\pi}{2}\cos t}{(\frac{\pi}{2}\cos t)^2+(\frac{\pi}{2}\sin t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}.$$

因此，$I=0-(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}.$

二十八、设 L 为由上半圆周 $y=\sqrt{4-x^2}$ 及 x 轴所围成的有界区域的整个边界，计算第一类曲线积分 $I=\oint_L(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}s$. (2021—2022)

解：记 $L_1:y=\sqrt{4-x^2},-2\le x\le 2$，参数方程为 $x=2\cos t$， $y=2\sin t$， $0\le t\le\pi$，

$L_2:y=0,\ -2\le x\le 2.$

于是， $I=\oint_L(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}s$

$$\int_{L_1}(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}(2\cos t+2\sin t+4\cos^2 t+4\sin^2 t)\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=4\int_0^{\pi}(\cos t+\sin t+2)\mathrm{d}t$$

$$=8+8\pi,$$

$$\int_{L_2}(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_{-2}^{2}(x+x^2)\sqrt{1+0^2}\mathrm{d}x=\frac{16}{3}.$$

因此，$I=\int_{L_2}(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{16}{3}+8+8\pi=\frac{40}{3}+8\pi.$

二十九、设 L 为上半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1\,(y\ge 0)$ 上从 $(1,0)$ 到 $(0,2)$ 的那一段有向弧，计算第二类曲线积分

$\int_L (x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y.$ （2021—2022）

解：作辅助线 $L_1: x=0, y:2\to 0$，$L_2: y=0, x:0\to 1$.

设 D 为有向曲线 L，L_1，L_2 所围成的有界区域.

于是，$\int_L (x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y$

$$=\oint_{L+L_1+L_2}(x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$-\int_{L_1}(x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$-\int_{L_2}(x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

利用格林公式，

$$\oint_{L+L_1+L_2}(x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(1+4x\sin^2 y)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+3y-2\sin y\cos y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(4\sin^2 y-3+2\cos 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(2-2\cos 2y-3+2\cos 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{4}\pi\cdot 1\cdot 2=-\frac{\pi}{2}.$$

又 $\int_{L_1}(x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y=\int_2^0\mathrm{d}y=-2$，

$$\int_{L_2}(x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

于是， $$\int_{L}(x^2+3y-2\sin y\cos y)\mathrm{d}x+(1+4x\sin^2 y)\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}-(-2)-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{4}.$$