厦门大学《线性代数》课程期中试题 A·答案

考试日期：2012.11　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一.　计算题（共 54 分）

1.（6 分）设 $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，计算（1）$AB^T$，（2）$B^TA$.

解（1）$AB^T=\begin{pmatrix}-19 & -9\\ -1 & -7\end{pmatrix}$，（2）$B^TA=\begin{pmatrix}-21 & -2 & -1\\ 10 & -4 & 2\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$。

2.（6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -5\end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}7 & 0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 7 & 0 & -2 & -5\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^5\begin{vmatrix}7 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 7 & -2 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\\ 9 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}6 & 2\\ 9 & -1\end{vmatrix}=-24$.

3.（6 分）计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ n & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 3 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ n & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-(2+3+\cdots+n) & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$$
$$=\left(2-\frac{n(n+1)}{2}\right)n!$$

4.（6 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 4 & t\\ 0 & t & 3 & 0\end{pmatrix}$，$R(A)=2$，求 t.

解 $A=\begin{pmatrix}1&2&2&0\\-1&-2&4&t\\0&t&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&0&6&t\\0&t&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&t&3&0\\0&0&6&t\end{pmatrix}$，

如果$R(A)=2$，则$t=0$，此时

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&0&3&0\\0&0&6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&0\\0&0&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

5. （10 分）设A均为 3 阶矩阵，且$|A|=\frac{1}{2},A^*$是 A 的伴随矩阵，计算$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

解 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2A^*\right|=\frac{1}{|A|}\left|\frac{1}{3}AA^{-1}-2AA^*\right|$

$$=2\left|\frac{1}{3}E-2|A|E\right|=2\left|\frac{1}{3}E-2\times\frac{1}{2}\times E\right|=2\left|-\frac{2}{3}E\right|=2\left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=-\frac{16}{27}.$$

6. （10 分）设$\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$都是 4 维列向量，矩阵$A=(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，且$|A|=4$矩阵$B=(\beta,2\gamma_1,3\gamma_2,\gamma_3)$且$|B|=21$，求$|A+B|$.

解 由$A+B=(\alpha+\beta,3\gamma_1,4\gamma_2,2\gamma_3)$可得

$$|A+B|=|\alpha+\beta,3\gamma_1,4\gamma_2,2\gamma_3|=|\alpha,3\gamma_1,4\gamma_2,2\gamma_3|+|\beta,3\gamma_1,4\gamma_2,2\gamma_3|$$

$$=3\times4\times2\times|\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times2\times|\beta,2\gamma_1,3\gamma_2,\gamma_3|$$

$$=3\times4\times2\times4+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times2\times21=180.$$

7. （10 分）已知 A 和 B 均为三阶矩阵，将 A 的第三行的−2 倍加至第 2 行得到矩阵A_1，将 B 中第 2 列加至第 1 列得到矩阵B_1，又知$A_1B_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，求$AB$.

解 由已知可得$PA=A_1,\ BQ=B_1$,其中$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 显然 P, Q 均为可逆的且$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 进一步，由$PABQ=A_1B_1$可得

$$AB=P^{-1}A_1B_1Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&2&8\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

二. （10 分）设 $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&3&\cdots&n&x\\1&2^2&3^2&\cdots&n^2&x^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&2^{n-1}&3^{n-1}&\cdots&n^{n-1}&x^{n-1}\\1&2^n&3^n&\cdots&n^n&x^n\end{vmatrix}$，求导函数 $f'(x)$ 的零点个数及其所在的区间.

解 根据范德蒙行列式性质有

$$f(x)=c(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

其中 $c=2!\times3!\times\cdots\times(n-1)!$. 显然 n 次多项式方程 $f(x)=0$ 的 n 个根均为单根，分别是为 $1,2,\cdots,n$.

利用导数性质可知 $f'(x)$ 是 n−1 次多项式，再利用罗尔定理可知 $f'(x)$ 的 n−1 个零点分别在区间 $(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n)$.

三.（15 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，求 X.

解 计算得 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$. 关系式 $A^*X=A^{-1}+2X$ 左乘 A 可得 $4X=E+2AX$，整理为 $(4E-2A)X=E$，故 $X=(4E-2A)^{-1}$.

由

$$\left(4E-2A,E\right)=\begin{pmatrix}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

可得

$$X=\left(4E-2A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

四. （15 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，如果 η 是 $Ax=b$ 的一个解，求 $Ax=b$ 的解.

解 把 η 代入 $Ax=b$ 可得 $a=c$． 化增广矩阵 (A,b) 为阶梯形

$$\left(A,b\right)=\begin{pmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\1&a&a&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&a&1&0\\0&1&3&1&1\\0&1-2a&1-2a&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&a&a&1&0\\0&1&3&1&1\\0&0&-2\left(1-2a\right)&-\left(1-2a\right)&-\left(1-2a\right)\end{pmatrix},$$

当 $a=\frac{1}{2}$ 时

$$\left(A,b\right)\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可见 $r\left(A,b\right)=r(A)=2$，线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}，其中k_1，k_2\in R.$$

当$a\neq\frac{1}{2}$时

$$\left(A,b\right)\to\begin{pmatrix}1&a&a&1&0\\0&1&3&1&1\\0&0&2&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

可见$r\left(A,b\right)=r(A)=3<4$，线性方程组$Ax=b$有无穷多解

$$x=k\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}，其中k\in R.$$

五.(6 分) 设 A, B 是两个 n 阶矩阵， $E-AB$可逆，证明$E-BA$可逆.

证明（反证法）如$|E-BA|$=0，则齐次方程组$\left(E-BA\right)x=0$有非零解，设η是其非零解，即$BA\eta=\eta\neq0$.

对于齐次方程组$\left(E-AB\right)x=0$，由于

$$\left(E-AB\right)A\eta=A\eta-ABA\eta=A\eta-A\eta=0,$$

从 $BA\eta=\eta\neq0$可知$A\eta\neq0$，这样齐次线性方程组$\left(E-AB\right)x=0$有非零解$A\eta$，这与$E-AB$可逆矛盾. 故$|E-BA|\neq0$，即$E-BA$可逆.