微分方程历届试题选（二）参考答案

一、求解下列方程：

1. $y''+a^2y=8\cos bx$ （$a>0,b>0$）（2005-2006 学年第三学期）

解：特征方程为 $r^2+a^2=0$，特征根 $r=\pm a\mathrm{i}$.

于是，$y''+a^2y=0$ 的通解为 $Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

下面求 $y''+a^2y=8\cos bx$ 的特解.

(1)当 $a=b$ 时，$\lambda+\mathrm{i}\,\omega=b\,\mathrm{i}=a\,\mathrm{i}$ 为特征根.

因此，设特解为 $y^*=x(k_1\cos ax+k_2\sin ax)$，

$$(y^*)'=(k_1\cos ax+k_2\sin ax)+x(-ak_1\sin ax+ak_2\cos ax)$$

$$=(k_1+ak_2x)\cos ax+(k_2-ak_1x)\sin ax,$$

$$(y^*)''=(2ak_2-a^2k_1x)\cos ax+(-2ak_1-a^2k_2x)\sin ax。$$

由 $(y^*)''+a^2y^*=8\cos bx$ 可得

$$(2ak_2-a^2k_1x)\cos ax+(-2ak_1-a^2k_2x)\sin ax+a^2(k_1x\cos ax+k_2x\sin ax)=8\cos bx,$$

即 $\quad 2ak_2\cos ax-2ak_1\sin ax=8\cos bx$.

于是，$\begin{cases}2ak_2=8\\-2ak_1=0\end{cases}$，则 $k_2=\dfrac{4}{a},k_1=0$。

故 $\quad y^*=\dfrac{4}{a}x\sin ax$.

因此，方程 $y''+a^2y=8\cos bx$ 的通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{4}{a}x\sin ax$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

（2）当 $a\neq b$ 时，$\lambda+\mathrm{i}\,\omega=b\,\mathrm{i}$ 不是特征根.

因此，设特解为 $y^*=k_1\cos bx+k_2\sin bx$，

$$(y^*)'=-k_1b\sin bx+k_2b\cos bx,\quad (y^*)''=-k_1b^2\cos bx-k_2b^2\sin bx。$$

由 $(y^*)''+a^2y^*=8\cos bx$ 可得

$$-k_1b^2\cos bx-k_2b^2\sin bx+a^2(k_1\cos bx+k_2\sin bx)=8\cos bx,$$

即 $$k_1(a^2-b^2)\cos bx+k_2(a^2-b^2)\sin bx=8\cos bx。$$

于是，$\begin{cases}k_1(a^2-b^2)=8\\ k_2(a^2-b^2)=0\end{cases}$，故 $k_1=\dfrac{8}{a^2-b^2},k_2=0$.

故 $$y^*=\frac{8}{a^2-b^2}\cos bx.$$

从而，原方程的通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{8}{a^2-b^2}\cos bx$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

2. $y''=3\sqrt{y}$，$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=2$ （2005-2006 学年第三学期）

解：设 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是，$p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=3\sqrt{y}$，即 $p\mathrm{d}p=3\sqrt{y}\mathrm{d}y$.

两边积分，得 $\int p\mathrm{d}p=\int 3\sqrt{y}\mathrm{d}y$，即 $\dfrac{1}{2}p^2=3\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{y^3}+C_1$，即 $p=\sqrt{4\sqrt{y^3}+C_1}$ 。

由 $y|_{x=0}=1$，$p|_{x=0}=2$，故 $2=\sqrt{4+C_1}$，所以，$C_1=0$。

所以，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y^{\frac{3}{4}}$，即 $y^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x$。

两边积分，得 $\int y^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}y=\int 2\mathrm{d}x$，即 $4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2$。

由 $y|_{x=0}=1$，得 $4=C_2$，于是，所求的解为 $4y^{\frac{1}{4}}=2x+4$，即 $y=\dfrac{1}{16}(x+2)^4$。

3. $y''+a^2y=\mathrm{e}^x$。（2008-2009 学年第二学期期中试卷）

解：（1）$a=0$时，$y''=\mathrm{e}^x$，积分两次，可得微分方程的通解：

$$y=\mathrm{e}^x+C_1x+C_2,$$

其中 C_1，C_2 为任意常数。

（2）$a\neq 0$时，不妨设 $a>0$，此时特征方程为 $r^2+a^2=0$，特征根为 $r=\pm a\,\mathrm{i}$.

于是，对应的齐次方程 $y''+a^2y=0$ 的通解为 $Y=C_1\cos ax+C_2\sin ax$，其中 C_1，C_2 为任意常数。

因为 $f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=\mathrm{e}^x$，此时 $P_m(x)=1$，$m=0$，$\lambda=1$ 不是特征根。

因此可设特解 $y^*=Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=b\mathrm{e}^x$，代入方程 $y''+a^2y=\mathrm{e}^x$，可得

$$b\mathrm{e}^x+a^2b\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x,$$

即 $b=\dfrac{1}{1+a^2}$，故得特解 $y^*=\dfrac{1}{1+a^2}\mathrm{e}^x$.

因此，所求通解为 $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\dfrac{1}{1+a^2}\mathrm{e}^x$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数。

如果$a<0$，则所求通解为 $y=C_1\cos|a|x+C_2\sin|a|x+\dfrac{1}{1+a^2}\mathrm{e}^x$，也可以写成

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax+\frac{1}{1+a^2}\mathrm{e}^x,$$

其中C_1，C_2为任意常数。

4. $y''+y'=\mathrm{e}^x+\cos x$。(2010-2011 学年第二学期期中试卷)

解：特征方程为$r^2+r=0$，特征根为$r_1=0$，$r_2=-1$.

于是对应齐次方程 $y''+y'=0$ 的通解为$Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}$，其中C_1，C_2为任意常数。

考虑 $f_1(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=\mathrm{e}^x$，于是，$P_m(x)=1$，$m=0$，$\lambda=1$不是特征根，则取 $y_1^*=a\mathrm{e}^x$；

考虑 $f_2(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}(P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x)=\cos x$，

于是，$P_l(x)=1$，$P_n(x)=0$，故$l=n=0$，故取$m=\max\{l,n\}=0$.

$\lambda=0$，$\omega=1$，$\lambda+\mathrm{i}\omega=\mathrm{i}$不是特征根，因此可设 $y_2^*=b\cos x+c\sin x$.

因此，$y^*=y_1^*+y_2^*=a\mathrm{e}^x+b\cos x+c\sin x$，代入微分方程 $y''+y'=\mathrm{e}^x+\cos x$，得

$$a\mathrm{e}^x-b\cos x-c\sin x+a\mathrm{e}^x-b\sin x+c\cos x=\mathrm{e}^x+\cos x,$$

即 $$2a\mathrm{e}^x+(c-b)\cos x-(b+c)\sin x=\mathrm{e}^x+\cos x.$$

比较两边系数，得$\begin{cases}2a=1\\c-b=1\\b+c=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

故 $y^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x$，因此，所求方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\cos x+\sin x),$$

其中C_1，C_2为任意常数。

5. $yy''=2[(y')^2-y']$满足$y(0)=1$，$y'(0)=2$ (2012-2013 学年第二学期期中试卷)

解：因为方程不显含x，则设$y'=p(y)$，则$y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，故$yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2(p^2-p)$，即

$$\frac{1}{p-1}\mathrm{d}p=\frac{2}{y}\mathrm{d}y,$$

两边积分，$\int\frac{1}{p-1}\mathrm{d}p=\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y$，得$\ln|p-1|=2\ln|y|+\ln|C_1|=\ln|C_1y^2|$，故$p=1+C_1y^2$.

由已知条件$y(0)=1$，$y'(0)=2$可得$2=1+C_1$，于是$C_1=1$。

故$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$，即$\dfrac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$，两边积分，可得$\arctan y=x+C_2$，即$y=\tan(x+C_2)$。

由$y(0)=1$可得$1=\tan C_2$，则$C_2=\dfrac{\pi}{4}$，所求微分方程的解为$y=\tan(x+\dfrac{\pi}{4})$。

6. 求初值问题 $y''+9y=6\mathrm{e}^{3x}$，$y(0)=y'(0)=0$的解. (2013-2014 学年第二学期期中试卷)

解:特征方程$r^2+9=0$,特征根$r=\pm3\mathrm{i}$,则对应齐次方程$y''+9y=0$的通解为$Y=C_1\cos3x+C_2\sin3x$,

其中C_1，C_2为任意常数。

由于$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=6\mathrm{e}^{3x}$，$P_m(x)=6$，$m=0$，$\lambda=3$不是特征根，因此取$y''+9y=6\mathrm{e}^{3x}$的特解为$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=a\mathrm{e}^{3x}$，代入方程，可得$9a\mathrm{e}^{3x}+9a\mathrm{e}^{3x}=6\mathrm{e}^{3x}$，解比较两边系数，得$a=\dfrac{1}{3}$.

故微分方程$y''+9y=6\mathrm{e}^{3x}$的通解为$y=C_1\cos3x+C_2\sin3x+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数。

由$y(0)=y'(0)=0$可得$\begin{cases}C_1+\dfrac{1}{3}=0\\3C_2+1=0\end{cases}$，解得$C_1=C_2=-\dfrac{1}{3}$。

故所求微分方程初值问题的解为$y=\dfrac{1}{3}(-\cos3x-\sin3x+\mathrm{e}^{3x})$。

7.求微分方程$y''=2y^3$满足初始条件$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$的特解。(2014-2015 学年第一学期期末试卷)

解：因为方程 $y''=2y^3$ 不显含 x，故设 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是方程可化为 $p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2y^3$，即

$2p\mathrm{d}p=4y^3\,\mathrm{d}y$，两边积分，可得 $p^2=y^4+C_1$，于是，$p=\sqrt{y^4+C_1}$。

由 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$ 可得 $1=\sqrt{1+C_1}$，求得 $C_1=0$，

则 $p=y^2$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2$，分离变量，可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x$，两边积分，可得 $-\dfrac{1}{y}=x+C_2$.

由 $y|_{x=0}=1$，得 $-1=0+C_2$，故 $C_2=-1$，于是，$-\dfrac{1}{y}=x-1$.

所求初值问题的解为 $y=\dfrac{1}{1-x}$。

8.求微分方程 $xy''=y'\ln y'$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1, y'\big|_{x=1}=\mathrm{e}$ 的特解.(2015-2016 学年第一学期期末试卷)

解：注意到原方程不显含 y，令 $y'=p(x)$，原方程可降阶为 $x\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p\ln p$.

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p\ln p}=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，两边积分得 $\ln|\ln p|=\ln|x|+\ln C_1$.

整理得 $p=\mathrm{e}^{C_1x}$，由 $y'\big|_{x=1}=\mathrm{e}$ 可得 $C_1=1$，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\mathrm{e}^x$.

再积分一次，得 $y=\mathrm{e}^x+C_2$.

由 $y\big|_{x=1}=1$ 得 $C_2=1-\mathrm{e}$. 故所求微分方程的特解为 $y=\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}$.

9. 求微分方程 $y''-y=2(\mathrm{e}^x+\cos x)$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=2$ 的特解。(2016-2017 学年第一学期期末试卷)

解：原微分方程的特征方程为 $r^2-1=0$，解得特征根 $r_1=-1, r_2=-1$.

因此可令微分方程的一个特解为 $y^*=axe^x+b\cos x+c\sin x$，代入原微分方程求得 $a=1, b=-1, c=$。

故微分方程的特解为 $y=x\mathrm{e}^x-\cos x+C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x$。又 $y(0)=0, y'(0)=2$，从而

$$y(0)=-1+C_1+C_2=0, y'(0)=1-C_1+C_2=2,$$

解得 $C_1=0, C_2=1$.

因此满足初始条件微分方程的特解为 $y=x\mathrm{e}^x-\cos x+\mathrm{e}^x$。

10. $yy''+(y')^2=0$；(2017-2018 学年第二学期期中试卷)

解： 令 $y'=P(y)$，则 $y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$.

于是，$yP\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}+P^2=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}P}{P}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$.

两边积分，得 $\ln|P|=-\ln|y|+\ln|C_1'|$，即 $P=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{C_1'}{y}$.

分离变量，得 $y\mathrm{d}y=C_1'\mathrm{d}x$，两边积分后，得 $\dfrac{1}{2}y^2=C_1'x+C_2'$.

故原方程的通解为 $y^2=C_1x+C_2$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

11. $y''+3y'+2y=3\mathrm{e}^x+6\sin x$；(2017-2018 学年第二学期期中试卷)

解： 由 $r^2+3r+2=0$，解得 $r_1=-1$，$r_2=-2$.对应的齐次线性方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

设 $y''+3y'+2y=3\mathrm{e}^x$ 的特解为 $y_1^*=A\mathrm{e}^x$，代入方程 $y''+3y'+2y=3\mathrm{e}^x$，解得 $A=\dfrac{1}{2}$，故 $y_1^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

设 $y''+3y'+2y=6\sin x$ 的特解为 $y_2^*=B\cos x+D\sin x$，代入方程 $y''+3y'+2y=6\sin x$，得

$$(B+3D)\cos x+(D-3B)\sin x=6\sin x,$$

故 $\begin{cases}B+3D=0\\D-3B=6\end{cases}$，解得 $\begin{cases}B=-\dfrac{9}{5}\\D=\dfrac{3}{5}\end{cases}$.

于是，$y_2^*=-\dfrac{9}{5}\cos x+\dfrac{3}{5}\sin x$.

故所求微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-\dfrac{9}{5}\cos x+\dfrac{3}{5}\sin x$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

12. $y''=2y^3$， $y(0)=y'(0)=1$；(2018-2019 学年第二学期期中试卷)

解：与第 7 题相同。

13. $y''-2y'+y=1+\sin x$ (2018-2019 学年第二学期期中试卷)

解：特征方程为 $r^2-2r+1=0$，特征根为 $r_1=r_2=1$。

对应的齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，其中 C_1， C_2 为任意常数.

$f_1(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=1$， $P_m(x)=1$， $m=0$， $\lambda=0$ 不是特征根，可取 $y_1^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=a$；

$f_2(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}(P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x)=\sin x$， $P_l(x)=0$， $l=0$， $P_n(x)=1$， $n=0$，于是，$m=\max\{l,n\}=0$。

$\lambda=0$， $\omega=1$， $\lambda+\mathrm{i}\omega=\mathrm{i}$ 不是特征根，可取

$$y_2^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}(R_m(x)\cos\omega x+R_m(x)\sin\omega x)=b\cos x+c\sin x;$$

故设特解 $y^*=y_1^*+y_2^*=a+b\cos x+c\sin x$，代入 $y''-2y'+y=1+\sin x$，得

$$-b\cos x-c\sin x-2(-b\sin x+c\cos x)+a+b\cos x+c\sin x=1+\sin x,$$

即 $$a+2b\sin x-2c\cos x=1+\sin x。$$

比较两边系数，得 $a=1, b=\dfrac{1}{2}, c=0$，从而 $y^*=1+\dfrac{1}{2}\cos x$。

于是，所求的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+1+\dfrac{1}{2}\cos x$，其中 C_1， C_2 为任意常数.

14. 曲线上任一点的切线在 y 轴上的截距和法线在 x 轴上的截距的比为一定值，求此曲线方程。(2005-2006 学年第三学期)

解：设 (x,y) 是曲线 $y=y(x)$ 上任意一点，则过该点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$。

令 $X=0$，可得切线在 y 轴上的截距为 $Y=y-xy'$。

过该点的法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$，令 $Y=0$，则得法线在 x 轴上的截距为 $X=x+yy'$。

由已知条件，$\dfrac{y-xy'}{x+yy'}$为常数，设为$k\neq 0$，即$\dfrac{y-xy'}{x+yy'}=k$，整理后可得$y'=\dfrac{y-kx}{ky+x}=\dfrac{\frac{y}{x}-k}{k\frac{y}{x}+1}$。

这是齐次方程，令$u=\dfrac{y}{x}$，则$y=xu$，则$y'=u+xu'$。

于是，$u+xu'=\dfrac{u-k}{ku+1}$，即$xu'=-\dfrac{k(1+u^2)}{ku+1}$，也即$\dfrac{ku+1}{1+u^2}\mathrm{d}u=-\dfrac{k}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分，得$\displaystyle\int\frac{2ku+2}{1+u^2}\mathrm{d}u=-\int\frac{2k}{x}\mathrm{d}x$，即

$$k\ln(1+u^2)+2\arctan u=-2k\ln|x|+C,$$

也即$k\ln(x^2+y^2)+2\arctan\dfrac{y}{x}=C$，其中$C$为任意常数。

15. 设函数$y(x)$满足$y'(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-y(t)]\mathrm{d}t,\quad y(0)=1$，求$y(x)$.

(2013-2014 学年第二学期期中试卷)

解：由$y'(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-y(t)]\mathrm{d}t$令$x=0$，可得$y'(0)=1$.

对方程$y'(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-y(t)]\mathrm{d}t$两边求导，则$y''(x)=6\sin^2 x-y(x)$，即$y''+y=3-3\cos 2x$.

齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r=\pm\mathrm{i}$，故齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为

$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$

容易看到$y''+y=3$有一特解$y_1^*=3$.

设$y''+y=-3\cos 2x$的特解为$y_2^*=a\cos 2x+b\sin 2x$，代入方程$y''+y=-3\cos 2x$中，得

$$-4a\cos 2x-4b\sin 2x+a\cos 2x+b\sin 2x=-3\cos 2x.$$

比较系数，可得$a=1,\ b=0$，则$y_2^*=\cos 2x.$

所以，$y''+y=3-3\cos 2x$的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x+3+\cos 2x$.

由$y(0)=1,\ y'(0)=1$可得$C_1=-3$，$C_2=1$.

故 $y=-3\cos x+\sin x+3+\cos 2x$.

16. 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-4y'+3y=x\mathrm{e}^{x}$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^{2}-\frac{1}{4}x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$.(2015-2016 学年第一学期期末试卷)

解： 特征方程 $r^{2}-4r+3=0$，特征根 $r_1=1$，$r_2=3$，对应齐次方程的通解为 $Y(x)=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{3x}$.

设原方程的特解为 $y^{*}(x)=x^{k}\cdot Q_m(x)\cdot \mathrm{e}^{\lambda x}=x(ax+b)\mathrm{e}^{x}$，将 $y^{*}(x)$ 代入原方程，并整理得

$$-4ax+2a-2b=x,$$

所以有 $-4a=1, 2a-2b=0$，解得 $a=b=-\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 原方程的通解 $y(x)=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{3x}+(-\frac{1}{4}x^{2}-\frac{1}{4}x)\mathrm{e}^{x}$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

又已知有公切线，得 $y(0)=1, y'(0)=-\frac{1}{4}$，即 $c_1+c_2=1, c_1+3c_2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$，解得 $c_1=\frac{3}{2}, c_2=-\frac{1}{2}$.

所以，$y(x)=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}+(-\frac{1}{4}x^{2}-\frac{1}{4}x)\mathrm{e}^{x}$.

17. 已知二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'-y\cos^{2}x=0$ 有两个互为倒数的特解，求 $p(x)$ 及此方程的通解.

(2013-2014 学年第二学期期中试卷)

解：设 $y=y(x)$ 是原方程的解，则 $\frac{1}{y}$ 也是方程的解，于是，

$$(\frac{1}{y})''+p(x)(\frac{1}{y})'-\frac{1}{y}\cos^{2}x=0,$$

即
$$\frac{-yy''+2(y')^{2}}{y^{3}}-p(x)\frac{y'}{y^{2}}-\frac{1}{y}\cos^{2}x=0.$$

$$\Rightarrow \frac{2(y')^2}{y^3} - \frac{y'' + p(x)y'}{y^2} - \frac{1}{y}\cos^2 x = 0.$$

由 $y'' + p(x)y' = y\cos^2 x$，可得 $\frac{2(y')^2}{y^3} - \frac{2}{y}\cos^2 x = 0$，则 $y' = y\cos x$ 或 $y' = -y\cos x$.

解得 $y = \mathrm{e}^{\tan x}$ 或 $y = \mathrm{e}^{-\tan x}$.

代入原方程，得 $p(x) = \tan x$.

通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{\tan x} + C_2\mathrm{e}^{-\tan x}$，其中 C_1， C_2 为任意常数。