《线性代数》期末考试试题（三）

一、填空题

1. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$______.

2. 已知$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \\ 4 & -3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$，$A_{ij}\ (i,j=1,2,3,4)$为$D$的代数余子式，则$3A_{41}+4A_{42}-A_{43}+7A_{44}=$______.

3. 设$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵$B$满足$BA=B+2E$，则$|B|=$______.

4. 已知方阵A满足$A^2-3A+2E=0$，E为单位矩阵，则$(A+E)^{-1}=$______.

5. 设$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$，$B$为4阶方阵，且$r(B)=4$，则$r(AB)=$______.

6. 已知三阶方阵A的特征值是$\lambda, 2, 3$，且有$|2A|=144$，则$\lambda=$______.

7. 已知向量$\alpha=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$，若矩阵$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$相似于矩阵$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则$k=$______.

8. 设$\alpha_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$，若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，则$a=$________.

9. 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2$正定，则$\lambda$满足的条件为________.

10. 设A为4×5矩阵，且$r(A)=4$，又设向量p_1,p_2是齐次线性方程组$AX=0$的两个不同的解向量，则方程组$AX=0$的通解为$X=$________.

二、选择题

11． 设A为三阶方阵，将A的第 2 列加到第 1 列得到矩阵B，再交换矩阵B的第 2 行与第 3 行得到矩阵C，记

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$ 则$\boldsymbol{C}=$(　　).

(A) P_2AP_1　(B) P_1AP_2　(C) AP_1P_2　(D) P_2P_1A

12． 设A为$m\times n$型矩阵，B为$n\times m$型矩阵，E为m阶单位阵,若$AB=E$，则有(　　).

(A) $r(A)=m,\ r(\mathrm{B})=m$　(B) $r(A)=m,r(B)=n$

(C) $r(A)=n,\ r(\mathrm{B})=m$　(D) $r(A)=n,\ r(\mathrm{B})=n$

13． 设A为n阶方阵，且$|A|\neq0$，下列命题正确的是(　　).

(A) 对n阶方阵B，若$|B|=|A|$，则A,B有相同的特征值

(B) 对n阶方阵B，若$AB=0$，则$B=0$

(C) 对n阶方阵B，若$AB=BA$，则$B\neq0$

(D) 对任意非零向量$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$都有$X^{\mathrm{T}}AX>0$

14． 已知三维向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$，则三条直

线$\begin{cases} l_1 : a_1x + b_1y = c_1 \\ l_2 : a_2x + b_2y = c_2 \\ l_3 : a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$ (其中$a_i^2 + b_i^2 \neq 0,\ i = 1,2,3$)交于一点的充要条件是(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

(C) $r(\alpha_1,\alpha_2) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

(D) α_1,α_2线性无关, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

15. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三维向量空间$\mathbb{R}^3$的基，则由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为(　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

三、计算题

16. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

17. 设向量组: $\alpha_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$,

求此向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余的向量用该极大线性无关组表示.

18．求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\Pi: x+2y-z=0$ 上的投影方程.

19．设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&b&1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，已知 $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是线性方程组 $AX=b$ 的一个解，求线性方程组 $AX=b$ 的通解.

20．已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，矩阵 X 满足如下矩阵表达式：$AXA+BXB=AXB+BXA+E$，其中 E 为三阶单位矩阵，求矩阵 X.

四、综合题与证明题

21．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_2^2-2x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3$，

(1) 用正交变换 $X=PY$ 将二次型化为标准形(求出正交矩阵 P)；

(2) 说明方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 在几何上表示什么图形.

22．(1) 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，求证：$r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$.

(2) 设 A 为三阶方阵，向量 α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，而 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$. 求证：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

《线性代数》期末考试试题（三）参考答案

一、填空题

1. $\sqrt{5}$；　2. 0；　3. 2；　4. $-\dfrac{1}{6}(A-4E)$；　5. 2；

6. 3；　7. 2；　8. 6；　9. $-2<\lambda<2$；

10. $c(p_1-p_2)$，c 为任意常数.

二、单项选择题

11. A　12. A　13. B　14. D　15. C

三、计算题

16. 解答：
$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&10&10&10\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&-2&-1\\0&-3&-2&-1\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=160.$$

17. 解答：由题意可知

$$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&-6\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\-9&2&3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大无关组，其中

$$\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3.$$

18. 解答：设平面束方程：

$$2x-y+z-1+\lambda(x+y-z+1)=0,$$

其法向量$\{2+\lambda;-1+\lambda;1-\lambda\}$；由该平面与平面

$$\Pi: x+2y-z=0$$

垂直，可知$1(2+\lambda)+2(-1+\lambda)-(1-\lambda)=0,\lambda=\dfrac{1}{4}$，因此该垂直平面为$3x-y+z-1=0$；投影直线为

$$L':\begin{cases}3x-y+z-1=0\\ x+2y-z=0\end{cases}.$$

19. 解答：将$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$代入方程组$\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$得

$a=c$，其线性方程组增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\1&a&a&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&a&1&0\\0&1&3&1&1\\0&1-2a&1-2a&0&0\end{bmatrix}$$

(1) 当$a=\dfrac{1}{2}$时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$，

$r(A)=r(\overline{A})=2$,方程组有无穷多解,

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\quad(c_1,c_2\text{为任意常数}).$$

(2)当$a\neq\dfrac{1}{2}$时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&a&a&1&0\\0&1&3&1&1\\0&1&1&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

$r(A)=r(\overline{A})=3$，方程组有无穷多解，

$$X=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix},(c_1\text{为任意常数}).$$

20. 解答： 由 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，则

$$(A-B)X(A-B)=E,$$

由于 $(A-B)=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$|A-B|=1$，则 $A-B$ 可逆，所以 $X=[(A-B)^{-1}]^2$；由于

$$[A-B\,|\,E]=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

可得：$(A-B)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，则

$$X=[(A-B)^{-1}]^2=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

四、证明题与综合题

21．解答：(1) 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{bmatrix}$，特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

其特征值为 $\lambda_1=-4,\lambda_2=2,\lambda_3=5$；

$$f=-4y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$$

当特征值$\lambda_1=-4$，可得对应的特征向量$p_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

当特征值$\lambda_2=2$，可得对应的特征向量$p_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$；

当特征值$\lambda_3=5$，可得对应的特征向量$p_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

由单位化，则正交阵$P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$.

(2) 方程$f=-4y_1^2+2y_2^2+5y_3^2=1$表示单叶双曲面.

22、证明：(1)要证明$r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$，只需证明线性方程组$A^{\mathrm{T}}Ax=0$与线性方程组$Ax=0$同解即可；若$Ax=0$，在两边同时左乘以A^{T}，即满足$A^{\mathrm{T}}Ax=0$.

若$A^{\mathrm{T}}Ax=0$，则两边同时左乘以x^{T}. 则$x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=0$，即$(Ax)^{\mathrm{T}}Ax=\|Ax\|=0$.

由向量范数性质知$Ax=0$，因此$A^{\mathrm{T}}Ax=0$与$Ax=0$同解，其基础解系个数一样$n-r(A^{\mathrm{T}}A)=n-r(A)$，所以

$$r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A).$$

(2)证明：由线性相关性定义

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad (*)$$

只需证明k_1,k_2,k_3全为零即可；在定义两边同时左乘矩阵A，则$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+kA\alpha_3=0$，由特征值的定义及其题意$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k(\alpha_2+\alpha_3)=0$，即

$$-k_1\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad (**)$$

由(*)式减去(**)式可得

$$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0,$$

因为α_1,α_2为不同特征值对应的特征向量，则α_1,α_2线性无关，所以$k_1=k_3=0$，又由（1）式且α_2为特征向量，$k_2\alpha_2=0$，因此$k_1=k_2=k_3=0$，综上向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$线性无关.