



厦门大学《线性代数》期末试题·答案

考试日期：2010.1 信息学院自律督导部整理



一. 填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 令 $A = (1, 0, 3, 5)^T, B = (-2, 8, 6, 9)^T$, 则 $A^T B =$ 61,

$AB^T =$ 略.

2. 若三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是它的

三个解向量, 且 $\beta_1 + \beta_2 = (2, -6, 3)^T, \beta_2 + \beta_3 = (-6, 8, 5)^T$, 则该线性方

程组的通解是 $(1, -3, 3/2)^T + k(8, 14, -2)^T, k \in R$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ t & -3 & 6 \\ -2 & t & 5 \end{pmatrix}$ 的行向量线性相关, 则实数 t 满足的条件是

$t = 3$, 或 $t = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{61}$.

4. 令 A_{ii} 是三阶矩阵 A 的元素 a_{ii} 的代数余子式 ($i=1, 2, 3$), 若 A 的特征值为 3, 4, 5,

则 $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$ 47.

5. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & c+2 & 0 \\ 1 & 0 & c-5 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 c 的取值范围为

$C > 0$.

二. 选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 A, B 均为 n 阶正交矩阵, 则 (3).

- (1) $A+B$ 为正交矩阵 (2) $A-B$ 为正交矩阵
(3) BAB 为正交矩阵 (4) kAB 为正交矩阵 ($k>0$ 为实数)

2. 设 A 为 m 阶可逆矩阵, B 为 n 阶可逆矩阵, 则可逆分块矩阵

$D = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的逆矩阵是 (2).

$$(1) \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & A^{-1} \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} O & A^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$$

3. 设 α 与 β 是线性无关的单位向量, 则 α 与 β 的内积必

_____.

(1) >0 (2) <0 (3) >1 (4) <1

4. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, A^T, A^{-1}, A^* 分别是 A 的转置矩阵, 逆矩阵和伴随矩阵, 若 ξ 是 A 的特征向量, 则下列命题中的不正确的是 _____ (1) _____.

(1) ξ 是 A^T 的特征向量

(2) 2ξ 是 A^{-1} 的特征向量

(3) 3ξ 是 A^* 的特征向量

(4) 4ξ 是 kA 的特征向量 (k 为常数)

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 _____ (2) _____.

(1) A 与 B 是相似的且是合同的

(2) A 与 B 是相似的但不是合同的

(3) A 与 B 不是相似的但是合同的

(4) A 与 B 不是相似的也不是合同的

三. (15 分) 试求五元齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间 V (作为 R^5 的子空间) 的一组规范 (标准) 正交基。

解 依题意知,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $R(A)=2$, 并且原方程组的一个基础解系为:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

接下来将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交化. 令 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 = \alpha_2,$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\beta_2^T \beta_2} \beta_2 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

最后将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化可得

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix},$$

向量组 η_1, η_2, η_3 即为所求。

四. (12 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量, 并计算 A^9 的

特征值。

解 因为 $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(\lambda-3)^2,$

故 A 的特征值为 $-3, 3$ (2 重)。

当 $\lambda = -3$ 时, 解线性方程组 $(A + 3E)x = 0$ 。由于

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 A 的属于特征值 -3 的全部特征向量为 $k_1(0, 0, 1)^T$ ($k_1 \neq 0$)。

又

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 A 的属于特征值 3 的全部特征向量为 $k_2(1, 1, 0)^T$ ($k_2 \neq 0$)。

根据特征值的性质 A^9 的特征值为 $(-3)^9, 3^9, 3^9$ 。

五. (16 分) 令 $\alpha_1 = (1, k, 1)^T, \alpha_2 = (k, 1, 1)^T, \alpha_3 = (-1, k-2, -1)^T, \beta = (-1, k-2, -1)^T,$

问 k 为何值时

- (1) 向量 β 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;
- (2) 向量 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法唯一;
- (3) 向量 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法不唯一, 并求其一般表达式

解 略

六. (12 分) 设三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$, 试求一个可逆线性变换 $x = Py$ 的将此二次型化为规范型.

解 依题意知, 所给的二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\text{因} \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{令} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{则} |P| = \frac{1}{2}.$$

故 $x = Py$ 是可逆的线性变换, 且 f 的规范型为 $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

七. (10 分) 令 A 为 n 阶正定矩阵, 证明: (1) 存在 n 阶实可逆矩阵 P , 使得 $A = P^T P$; 为 (2) 对任意 n 阶实可逆矩阵 B , 存在 n 阶实可逆矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 与 $Q^T B Q$ 均为对角矩阵.

证明 (1) 因 A 为 n 阶正定矩阵, 故 A 是实对称矩阵, 且其特征值全部为整数。依相关定理知, 存在 n 阶正交矩阵, 使得

$$A = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \text{O} & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} U,$$

其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 A 的特征值. 令 $P = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \text{O} & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} U$, 则 P 是 n 阶实可逆矩阵, 且

$A = P^T P$, 从而命题 (1) 得证。

(2) 因 A 为 n 阶正定矩阵, 故根据命题 (1) 知存在 n 阶实可逆矩阵 P 使得 $P^T A P = E$.

而对任意 n 阶实可逆矩阵 B , $P^T B P$ 是 n 阶实对称矩阵, 故有 n 阶正交矩阵 C , 使得

$$(PC)^T B P C = C^T P^T B P C = \Lambda, \text{ 其中 } \Lambda \text{ 为对角矩阵。}$$

同时 $(PC)^T A P C = C^T P^T A P C = E$, 因此 $Q = PC$ 即为所求。