MOGPL
Rapport projet

name name
name name

Sorbonne Université
2022 - 2023

Table des matières

1 Linéarisation de *f*

1.1) Soit le problème suivant :

$$\min \sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i$$
$$\text{s.c.} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k$$
$$a_{ik} \in \{0,1\}, i = 1, \dots, n$$

Il s'agit d'un problème du sac-à-dos où tous les objets ont le même poids (ici 1). Dans le cas où nous cherchons à avoir k objets, la solution optimale correspond aux k objets ayant les plus grandes valeurs.
La solution optimale est alors donnée par $L_k(z)$.

1.2) Soit le problème (P) suivant :

$$\min \sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i$$

$$\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} & = & k \\ a_{ik} & \leq & 1 \end{array} \right. \iff \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} & = & k \\ -a_{ik} & \geq & -1 \end{array} \right.$$
$$a_{ik} \geq 0, i = 1, \dots, n \qquad\qquad a_{ik} \geq 0, i = 1, \dots, n$$

Soit le dual (D) de (P) :

$$\max k\, r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik}$$
$$\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{rcl} r_k - b_{ik} & \leq & z_i \end{array} \right.$$
$$b_{ik} \geq 0, i = 1, \dots, n$$

Nous calculons $L(4,7,1,3,9,2)$ en résolvant le programme linéaire suivant :

$$\max k\, r_k + \sum_{i=1}^{6} b_{ik}$$
$$\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{rcl} r_k - b_{1k} & \leq & 1 \\ r_k - b_{2k} & \leq & 2 \\ r_k - b_{3k} & \leq & 3 \\ r_k - b_{4k} & \leq & 4 \\ r_k - b_{5k} & \leq & 7 \\ r_k - b_{6k} & \leq & 9 \end{array} \right.$$
$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0, i = 1, \dots, 6$$

En utilisant Gurobi (fichier `q12.py`), nous obtenons :

$$L_1(z) = 1\,;\, L_2(z) = 3\,;\, L_3(z) = 6\,;\, L_4(z) = 10\,;\, L_5(z) = 17\,;\, L_6(z) = 26$$

Nous avons bien $L_k(z) = \sum_{i=1}^{k} z_i$ pour tout $k = 1, \dots, 6$.

1.3) Montrons que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x))$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} w'_k L_k(z(x)) && + w'_n L_n(z(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[w'_k \sum_{i=1}^{k} z_{(i)}(x) \right] && + w_n \sum_{i=1}^{n} z_{(i)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[(w_k - w_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} z_{(i)}(x) \right] && + w_n \sum_{i=1}^{n} z_{(i)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[w_k \sum_{i=1}^{k} z_{(i)}(x) \right] - \sum_{k=1}^{n-1} \left[w_{k+1} \sum_{i=1}^{k} z_{(i)}(x) \right] && + w_n \sum_{i=1}^{n} z_{(i)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll}
f(x) = w_1 z_1 & + w_2 [z_1 + z_2] + w_3 [z_1 + z_2 + z_3] + \ldots + w_{n-1} [z_1 + \ldots + z_{n-1}] + w_n [z_1 + \ldots + z_n] \\
& - w_2 z_1 \qquad - w_3 [z_1 + z_2] \qquad - \ldots - w_{n-1} [z_1 + \ldots + z_{n-2}] - w_n [z_1 + \ldots + z_{n-1}] \\
f(x) = w_1 z_1 & + w_2 z_2 \qquad + w_3 z_3 \qquad - \ldots + w_{n-1} z_{n-1} \qquad + w_n z_n \\
f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i
\end{array}$$

Nous obtenons bien $f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i(x) = \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x))$ avec $w'_k = (w_k - w_{k+1})$ pour k allant de 1 à $n-1$ et $w'_n = w_n$.

1.4) Soit la linéarisation de f sous la forme d'un programme linéaire :

$$\max \sum_{k=1}^{n} w'_k (k\, r_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik})$$

$$\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{rcl} r_k - b_{ik} & \leq & z_i(x) \\ x & \in & X \end{array} \right.$$

$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0, i = 1, \ldots, n$$

Reformulons le problème de l'exemple 1 comme un programme linéaire.

$$\begin{aligned}
\max f(x) &= \sum_{k=1}^{2} w'_k (k\, r_k - \sum_{i=1}^{2} b_{ik}) \\
&= w'_1 (r_1 - \sum_{i=1}^{2} b_{i1}) + w'_2 (2 r_2 - \sum_{i=1}^{2} b_{i2}) \\
&= r_1 - \sum_{i=1}^{2} b_{i1} + 2 r_2 - \sum_{i=1}^{2} b_{i2}
\end{aligned}$$

$$\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{rcl} r_k - b_{ik} & \leq & z_i(x) \\ x & \in & X \end{array} \right. \iff \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{rcl} r_1 - b_{i1} & \leq & z_i(x) \\ r_2 - b_{i2} & \leq & z_i(x) \\ \sum_{j=1}^{5} x_j & = & 3 \end{array} \right.$$

$r_k \in \mathbb{R}$, $b_{ik} \geq 0$ et $i, k \in \{1, 2\}$

$$\Updownarrow$$

$$\max f(x) = r_1 - \sum_{i=1}^{2} b_{i1} + 2r_2 - \sum_{i=1}^{2} b_{i2}$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} r_1 - b_{11} & \leq & z_1(x) \\ r_2 - b_{12} & \leq & z_1(x) \\ r_1 - b_{21} & \leq & z_2(x) \\ r_2 - b_{22} & \leq & z_2(x) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 3 \end{cases}$$

$r_k \in \mathbb{R}$, $b_{ik} \geq 0$, $x_i \in \{0, 1\}$ et $i, k \in \{1, 2\}$

En utilisant les données de l'exemple 1, nous obtenons :

$$\max f(x) = r_1 - \sum_{i=1}^{2} b_{i1} + 2r_2 - \sum_{i=1}^{2} b_{i2}$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} r_1 - b_{11} & \leq & 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 \\ r_2 - b_{12} & \leq & 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 \\ r_1 - b_{21} & \leq & 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 5x_5 \\ r_2 - b_{22} & \leq & 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 5x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 3 \end{cases}$$

$r_k \in \mathbb{R}$, $b_{ik} \geq 0$, $x_i \in \{0, 1\}$ et $i, k \in \{1, 2\}$

$$\Updownarrow$$

$$\max f(x) = r_1 - \sum_{i=1}^{2} b_{i1} + 2r_2 - \sum_{i=1}^{2} b_{i2}$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} r_1 - b_{11} - 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 8x_4 - x_5 & \leq & 0 \\ r_2 - b_{12} - 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 8x_4 - x_5 & \leq & 0 \\ r_1 - b_{21} - 3x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 5x_5 & \leq & 0 \\ r_2 - b_{22} - 3x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 5x_5 & \leq & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 3 \end{cases}$$

$r_k \in \mathbb{R}$, $b_{ik} \geq 0$, $x_i \in \{0, 1\}$ et $i, k \in \{1, 2\}$

En utilisant Gurobi (fichier `q14.py`), nous obtenons comme solution optimale :

$$f(x) = 50$$

$$r_1 = 16, r_2 = 18$$

$$b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{21} = 0, b_{22} = 2$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0$$

2 Application au partage équitable de biens indivisibles

2.1) Soit le programme linéaire en variables mixtes suivant :

$$\max f(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i z_{(i)}(x)$$

$$\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1 \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1 \end{array} \right.$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ et } i, j = 1, \ldots, n$$

$$\text{Avec } z_i = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_{ij}$$

Nous considérons le problème suivant :

> *3 individus A, B et C doivent se partager un lot de 6 objets, de valeurs respectives 325, 225, 210, 115, 75 et 50 euros. La valeur totale du lot est de 1000 euros, mais la solution qui consiste à diviser en trois parties égale n'est pas réalisable.*

En utilisant d'abord le vecteur poids $w = (3, 2, 1)$, nous obtenons :