TD 12 - Moment cinétique d'un point matériel (2)

Exercice 38 - Le modèle de Bohr

A la suite des expériences menées par Rutherfor, Geiger et Marsden, le modèle atomique qui émerge en 1910 est celui d'une structure constituée d'un noyau de très petite taille, contenant l'essentiel de la masse et de charge positive, autour duquel les électrons négativement chargés orbitent sous l'effet de la force électrostatique, un peu comme les planètes orbitent autour du Soleil sous l'effet de la force de gravitation.

En 1913, le physicien danois Niels Bohr (1885-1962) imagine une théorie, à partir de ce modèle planétaire de l'atome et permettant d'expliquer les raies émises par un atome d'hydrogène excité. Dans ce modèle, l'atome d'hydrogène est un système à deux corps ponctuels : un noyau avec un proton de masse m_p et de charge électrique $+e$, et un électron de masse m_e et de charge $-e$. La masse du proton étant près de 2 000 fois celle de l'électron, le proton est considéré comme fixe au point O, origine du référentiel d'étude supposé galiléen. L'électron se déplace uniquement sur certaines orbites circulaires de centre O et de rayon R selon les lois de la mécanique classique.

Données	charge élémentaire	$e \approx 1,6 \times 10^{-19}$ C
	masse de l'électron	$m_e \approx 9,1 \times 10^{-31}$ kg
	cte de gravitation	$G \approx 6,67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
	permittivité du vide	$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \approx 8,84 \times 10^{-12}$
	vitesse de la lumière	$c \approx 3 \times 10^8$ m.s^{-1}
	constante de Planck	$h \approx 6,626 \times 10^{-34}$ J.s

A. Étude mécanique

1) L'électron est soumis à la force électrostatique $\vec{F_e}$ et à la force gravitationnelle $\vec{F_G}$. Rappelez les expressions de ces deux forces et montrez que la force gravitationnelle peut être négligée devant la force électrostatique.

   ℹ Il faut comparer la norme de ces deux forces.

2) Montrez que le mouvement circulaire de l'électron autour du noyau est uniforme et exprimez la vitesse v de l'électron en fonction de R et des données.

   ℹ Utilisez le PFD.

3) Exprimez l'énergie mécanique $E(R)$ de l'électron en fonction des données.

   ℹ $E_m = E_c + E_p$

4) Quelle énergie cinétique supplémentaire faut-il fournir à un électron situé une orbite de rayon R pour ioniser l'atome, c'est à dire pour que l'électron puisse échapper à l'attraction du proton ?

   ℹ Pour échapper à l'attraction du proton il faudrait que l'électron puisse atteindre une position $r \to +\infty$.

5) Montrez que le moment cinétique de l'électron par rapport à O est conservé.

   ℹ Utilisez le théorème du moment cinétique.

B. Quantification du moment cinétique

Les atomes peuvent émettre et absorber de la lumière. Puisque les ondes électromagnétiques, donc la lumière, transportent de l'énergie, un atome absorbant de la lumière doit donc voir son énergie augmenter. Si l'on suppose que la formule trouvée à la question 3 reste valable lors d'un tel processus, cela signifie que lorsqu'un atome d'hydrogène absorbe de la lumière, l'électron passe d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire de rayon plus grand. Or les atomes ne peuvent pas absorber ou émette une quantité quelconque d'énergie. Les spectres des atomes présentent des raies bien définies, ce qui signifie que seules certaine orbites particulières sont permises. Pour rendre compte de ce phénomène, Bohr ajoute une condition de quantification : les seules trajectoires circulaires autorisées sont celles pour lesquelles le module L_{O} du moment cinétique de l'électron par rapport à O est un multiple entier n de la constante de Planck réduite $\hbar$: $L_{\mathrm{O}} = n\hbar = n\frac{h}{2\pi}$.

6) Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_{\mathrm{O}}$ de l'électron par rapport à O.

   ℹ $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

7) Les trajectoires stables de l'électron sont des cercles dont les rayons R_n sont de la forme $R_n = n^2 a_1$, avec a_1 le *rayon de Bohr*. Exprimer puis calculer la valeur (en pm) de a_1.

   ℹ Il faut exprimer L_O en fonction de R, K, m et e.

8) En déduire que la vitesse de l'électron est quantifiée sous la forme $v_n = v_1/n$, où v_1 sera exprimée en fonction de c et de la constante de structure fine $\alpha = e^2/2hc\epsilon_0$. Calculer la valeur de α et préciser son unité. Calculer la vitesse de l'électron sur son orbite la plus proche du noyau ($n = 1$).

   ℹ Utilisez la relation entre v et R.

9) En déduire également que l'énergie mécanique E de l'électron est quantifiée sous la forme $E_n = -E_{\mathrm{i}}/n^2$, où E_{i}, énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, sera exprimée en fonction de m_e, c et α. Calculer la valeur de l'énergie de l'électron dans son état fondamental ($n = 1$) en J, puis en eV.

   ℹ Utilisez la relation entre E et R.

C. Absorption / émission d'un photon

L'émission de lumière par un atome correspond au passage d'un électron d'une orbite permise n à une autre orbite d'énergie inférieure m pour émettre un rayonnement de longueur d'onde λ sous la forme d'un photon d'énergie : $\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m \quad$ (avec $n > m$).

10) Déterminer l'expression puis calculer la valeur de la constante de Rydberg R_{H} de l'atome d'hydrogène définie par la relation :
$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

11) Déterminer la valeur de la longueur d'onde pour un électron transitant des niveaux d'énergie n = 3, 4, 5 et 6 vers le niveau m=2. Comparer ces valeurs avec le spectre d'émission / absorption de la figure 1. Ce spectre représente les premières raies spectrales de l'hydrogène qui furent étudiées et qui sont situées dans le domaine visible. Cette série de raies s'appelle la série de Balmer. Les premières raies sont numérotées au moyen de l'alphabet grec. La première raie, H_α, ayant une longueur d'onde de 656,3 nm, est donc rouge ; la seconde, H_β, située à 486,1 nm est bleue ; la troisième, H_γ, située à 434,0 nm est violette ; la quatrième, H_δ, située à 410,2 nm est également violette, et ainsi de suite, jusqu'à 364,6 nm.

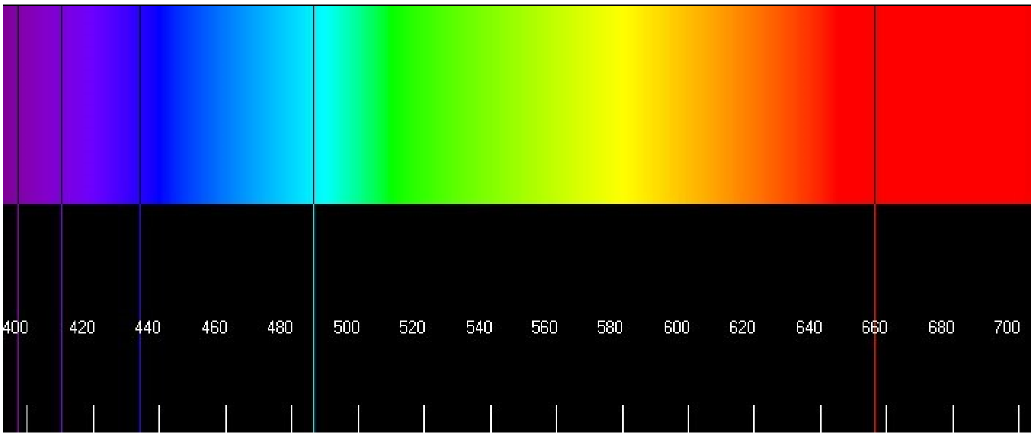

Figure 1 – Spectre d'absorption et d'émission de l'atome d'hydrogène.