# TD 11 - Moment cinétique d'un point matériel (1)

## Exercice 36 - Du danger de l'impact d'un astéroïde avec la Terre

On considère un astéroïde[1], que l'on assimile à un point matériel M de masse $m$, dont la trajectoire l'amène à passer au voisinage de la Terre. Au point A, très loin de la Terre, l'astéroïde possède une vitesse $\vec{v}_\infty$ et sa trajectoire est portée par une droite $\Delta$ situé à une distance $d$ du centre O de la Terre (figure 1). À l'approche de la Terre, sa trajectoire va être déviée en raison de l'attraction gravitationnelle terrestre et l'astéroïde va passer au point B à une distance minimale $r_{\text{min}}$ du centre O de la Terre ($r_{\text{min}} = \text{OA}$), avec une vitesse $\vec{v}_{\text{B}}$.

On suppose que la Terre, de masse $M_{\text{T}}$, est beaucoup plus massive que l'astéroïde de masse $m$. Ceci implique que l'attraction gravitationnelle exercée par l'astéroïde sur la Terre ne modifie pas significativement le mouvement de la Terre. En supposant que le passage de l'astéroïde au voisinage de la Terre s'effectue sur une durée petite par rapport à la période de rotation de la Terre autour du Soleil (1 an), on pourra alors supposer le référentiel géocentrique comme galiléen.

On souhaite déterminer à partir de quelle distance $d$ l'astéroïde entrerait en collision avec la Terre (en tombant sur le sol terrestre, l'astéroïde prend alors le nom de météorite).

Données : $v_\infty = 30$ km/s
constante universelle de gravitation : $G \approx 6,67 \times 10^{-11}$ N.m$^2$.kg$^{-2}$
masse de la Terre : $M_{\text{T}} \approx 6 \times 10^{24}$ kg
rayon de la Terre : $R_{\text{T}} \approx 6400$ km

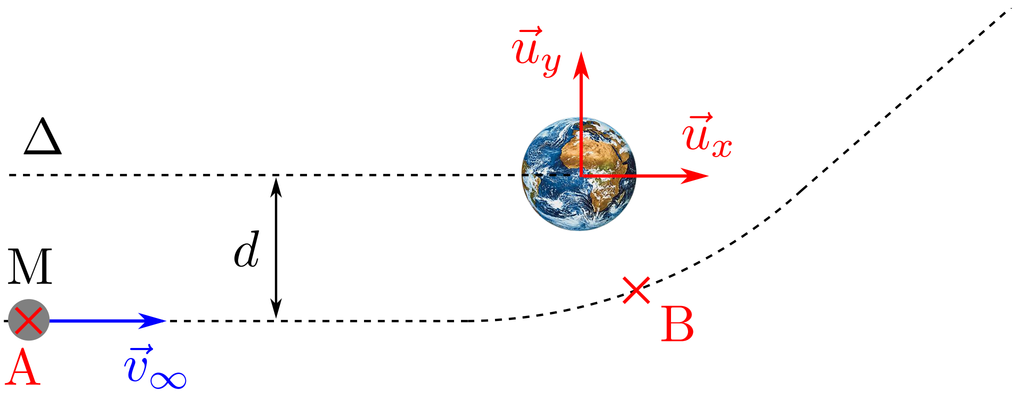


FIGURE 1 – Trajectoire du astéroïde. D'après un sujet du Concours Centrale-Supélec 2012.

1) Exprimer, en coordonnées polaires, le moment cinétique $\vec{L}_{\text{O}}$ de l'astéroïde par rapport à O.
2) Montrer que le moment cinétique reste constant et donner son expression lorsque l'astéroïde se trouve en A.
3) Montrer que $\vec{v}_{\text{B}}$ est perpendiculaire à la droite (OB).
4) En utilisant la conservation du moment cinétique entre A et B, exprimez $v_{\text{B}}$ en fonction de $v_\infty$ (relation n°1).
5) Justifiez le fait que l'énergie mécanique de l'astéroïde est conservée. En déduire une seconde expression de $v_{\text{B}}$ en fonction de $v_\infty$ (relation n°2).
6) À partir des deux relations obtenues aux questions 4 et 5, déterminer une expression de la distance $r_{\text{min}}$ en fonction de $G$, $M_{\text{T}}$, $v_\infty$ et $d$.
7) Déterminer la distance $d$ minimale pour que la collision n'ait pas lieu.

1. En fonction de leur taille, les petits corps rocheux en mouvement dans le système solaire sont appelés *astéroïdes* (taille $\sim 1$ m à quelques centaines de km) ou *météoroïdes* (taille $\sim 30$ $\mu$m à 1 m). Les astéroïdes dont l'orbite croise celle de la Terre, donc potentiellement dangereux, sont appelés *astéroïdes géocroiseurs*.

**CORRECTION:**

1. $\vec{L}_O \;=\; \vec{r}\wedge m\vec{v} \;=\; r\,\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi) \;=\; mr^2\dot{\varphi}\,\vec{u}_z$

2. Le référentiel géocentrique étant supposé galiléen, on peut appliquer le théorème du moment cinétique selon lequel $\dot{\vec{L}}_O = \vec{\Gamma}_O(\vec{F})$ où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées à l'astéroïde. On suppose ici que l'astéroïde n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre. On a donc :

$$\vec{F} \;=\; -\frac{GM_Tm}{r^2}\,\vec{u}_r \quad\rightarrow\quad \vec{\Gamma}_O(\vec{F}) \;=\; \vec{r}\wedge\vec{F} \;=\; r\,\vec{u}_r \wedge \left(-\frac{GM_Tm}{r^2}\,\vec{u}_r\right) \;=\; \vec{0}$$

$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}}_O = \vec{0} \quad$ donc $\quad \vec{L}_O \quad$ est constant

Lorsque l'astéroïde est très loin de la Terre (point A), $\vec{r} = -x_A\vec{u}_x - d\vec{u}_y$ et $\vec{v} = v_\infty\vec{u}_x$ donc :

$$\vec{L}_O \;=\; \vec{L}_O(A) \;=\; (-x_A\vec{u}_x - d\vec{u}_y)\wedge m\,v_\infty\vec{u}_x \;=\; m\,v_\infty\,d\,\vec{u}_z$$

3. $\vec{v}_B \;=\; \dot{r}(B)\,\vec{u}_r \;+\; r(B)\dot{\varphi}(B)\,\vec{u}_\varphi$

Or, B est le point de la trajectoire où la distance $r$ est minimale, donc $\dot{r}(B) = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{v}_B \;=\; r_{min}\dot{\varphi}(B)\,\vec{u}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_B \;\perp\; \vec{u}_r$

4. On a montré que $\vec{L}_O(A) = m\,v_\infty\,d\,\vec{u}_z$

$\vec{L}_O(B) \;=\; \vec{r}_B\wedge m\vec{v}_B \;=\; r_{min}\,\vec{u}_r\wedge mv_B\,\vec{u}_\varphi \;=\; m\,r_{min}\,v_B\,\vec{u}_z$

Puisque le moment cinétique est conservé : $\vec{L}_O(A) \;=\; \vec{L}_O(B)$

$$\Rightarrow \quad m\,v_\infty\,d \;=\; m\,r_{min}\,v_B \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_B \;=\; \frac{v_\infty\,d}{r_{min}}} \tag{1}$$

5. D'après le théorème de l'énergie mécanique, la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives. Dans cet exercice, on suppose que l'astéroïde n'est soumis qu'à la force de gravitation qui est conservative. Son énergie mécanique est donc conservée.

L'énergie potentielle gravitationnelle s'écrit : $E_p(r) \;=\; -\dfrac{GM_Tm}{r}$

$$E_m(A) \;=\; \frac{1}{2}mv_A^2 \;-\; \frac{GM_Tm}{r_A}$$

Le point A est supposé situé *très loin* de la Terre. Nous allons interpréter cette hypothèse en supposant qu'en A l'énergie potentielle gravitationnelle est négligeable par rapport à l'énergie cinétique (dit autrement, on fait comme si $r_A \rightarrow +\infty$).

$$\Rightarrow \quad E_m(A) \;=\; \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

En B l'énergie mécanique de l'astéroïde s'écrit

$$E_m(B) \;=\; \frac{1}{2}mv_B^2 \;-\; \frac{GM_Tm}{r_B}$$

Puisque $E_m(A) = E_m(B)$ on peut donc écrire

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 \;=\; \frac{1}{2}mv_B^2 \;-\; \frac{GM_Tm}{r_{min}}$$

$$\text{soit} \qquad \boxed{v_B \;=\; \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2GM_T}{r_{min}}}} \tag{2}$$

6. En utilisant les 2 expressions de $v_B$ on peut écrire :

$$\left(\frac{v_\infty\, d}{r_{min}}\right)^2 \;=\; v_\infty^2 + \frac{2GM_T}{r_{min}}$$

En multipliant cette équation (à droite et à gauche du signe =) par $\left(\frac{r_{min}}{v_\infty}\right)^2$ et on obtient :

$$r_{min}^2 \;+\; \frac{2GM_T}{v_\infty^2}\, r_{min} \;-\; d^2 \;=\; 0$$

discriminant de l'équation : $\quad \Delta = \left(\frac{2GM_T}{v_\infty^2}\right)^2 + 4d^2 \;>\; 0$

solutions de l'équation : $\quad r_\pm \;=\; -\frac{GM_T}{v_\infty^2} \;\pm\; \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_\infty^2}\right)^2 + d^2}$

La solution $r_-$ est évidemment négative et elle ne correspond donc pas à une solution physiquement acceptable car $r > 0$. La solution $r_+$ est positive puisque le terme contenu dans la racine carrée est nécessairement plus grand que $\left(\frac{GM_T}{v_\infty^2}\right)^2$. La valeur de $r_{min}$ correspond donc à la solution $r_+$ de cette équation :

$$\boxed{r_{min} \;=\; -\frac{GM_T}{v_\infty^2} \;+\; \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_\infty^2}\right)^2 + d^2}}$$

7. Pour qu'il n'y ait pas collision, il faut que $\quad r_{min} \;>\; R_T$

Soit :

$$-\frac{GM_T}{v_\infty^2} \;+\; \sqrt{\left(\frac{GM_T}{v_\infty^2}\right)^2 + d^2} \;>\; R_T$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{GM_T}{v_\infty^2}\right)^2 + d^2 \;>\; \left(R_T + \frac{GM_T}{v_\infty^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{GM_T}{v_\infty^2}\right)^2 + d^2 \;>\; R_T^2 \;+\; 2\,\frac{GM_T R_T}{v_\infty^2} \;+\; \left(\frac{GM_T}{v_\infty^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2 \;>\; R_T^2 \;+\; 2\,\frac{GM_T R_T}{v_\infty^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2 \;>\; R_T^2\left(1 + \frac{2GM_T}{v_\infty^2 R_T}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{d \;>\; R_T\sqrt{1 + \frac{2GM_T}{v_\infty^2 R_T}}}$$

Application numérique : $\quad d \;>\; 6830$ km

### Exercice 37 - Glisser sur un toboggan

Un enfant de masse $m = 25$ kg (assimilé à un point matériel M) glisse sans frottements sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $R = 2{,}5$ m (figure 2). L'enfant se laisse glisser sans vitesse initiale à partir du point A, correspondant à l'angle $\varphi_A = 10°$, jusqu'au point B qu'il atteint avec une vitesse $v_B$.

1) Exprimer, en coordonnées polaires, le moment cinétique $\vec{L}_{\mathrm{O}}$ de l'enfant par rapport au point O.
2) À l'aide du théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(t)$.
3) À partir de cette équation, exprimer la vitesse $v$ de l'enfant en fonction de $\varphi$. Calculer la valeur numérique de $v_{\mathrm{B}}$.

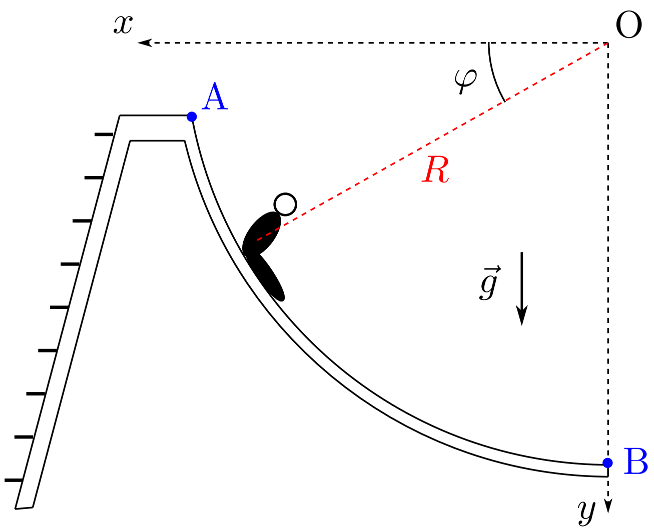


FIGURE 2 – Glissade sur un toboggan.

**CORRECTION:**

1. moment cinétique par rapport à O : $\vec{L}_O \;=\; \vec{r} \wedge m\vec{v}$

   mouvement circulaire de rayon $R$ : $\vec{r} = R\,\vec{u}_r$ et $\vec{v} = R\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$

   $\Rightarrow \;\vec{L}_O \;=\; R\,\vec{u}_r \wedge m\,R\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi \;=\; mR^2\dot{\varphi}\,\vec{u}_z$

2. Le référentiel terrestre étant supposé galiléen, on peut appliquer le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \;=\; \vec{\Gamma}_O$$

   où $\vec{\Gamma}_O$ est le moment résultant par rapport à O des forces appliquées à l'enfant.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi}\,\vec{u}_z\right) \;=\; mR^2\ddot{\varphi}\,\vec{u}_z$$

   Forces appliquées à l'enfant :
   - poids $\vec{P} \;=\; mg\,\vec{u}_y \;=\; mg\left(\sin\varphi\,\vec{u}_r + \cos\varphi\,\vec{u}_\varphi\right)$
   - réaction du support $\vec{N}$ normale au support puisqu'on suppose que l'enfant glisse sans frottement $\;\rightarrow\; \vec{N} \;=\; -N\,\vec{u}_r$

Donc : $\vec{\Gamma}_O \;=\; \vec{\Gamma}_O(\vec{P}) \;+\; \vec{\Gamma}_O(\vec{N})$

$\vec{\Gamma}_O(\vec{P}) \;=\; \vec{r}\wedge\vec{P} \;=\; R\,\vec{u}_r\wedge mg\,(\sin\varphi\,\vec{u}_r+\cos\varphi\,\vec{u}_\varphi) \;=\; mgR\cos\varphi\,\vec{u}_z$

$\vec{\Gamma}_O(\vec{N}) \;=\; \vec{r}\wedge\vec{N} \;=\; R\,\vec{u}_r\wedge(-N\,\vec{u}_r) \;=\; \vec{0}$

Le théorème du moment cinétique s'écrit donc

$$mR^2\ddot{\varphi} \;=\; mgR\cos\varphi \qquad\rightarrow\qquad \boxed{\ddot{\varphi} \;=\; \frac{g}{R}\cos\varphi} \tag{3}$$

3. L'équation précédente permet d'exprimer la vitesse de l'enfant en fonction de l'angle $\varphi$. Pour cela nous allons multiplier cette équation (à droite et à gauche du signe $=$) par $\dot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi}\,\dot{\varphi} \;=\; \frac{g}{R}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi \tag{4}$$

La primitive (par rapport à $t$) du membre de gauche est : $\int\ddot{\varphi}\,\dot{\varphi} \;=\; \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2(t)$

La primitive (par rapport à $t$) de $\dot{\varphi}\,\cos\varphi$ est : $\int\dot{\varphi}\,\cos\varphi \;=\; \sin\Big[\varphi(t)\Big]$

En intégrant l'équation 4 par rapport au temps on obtient donc :

$$\frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 \;=\; \frac{g}{R}\,\sin\varphi \;+\; cte \tag{5}$$

Pour déterminer la valeur de la constante d'intégration, utilisons la condition initiale en A :

$$\varphi(A)=\varphi_A \quad\text{et}\quad \dot{\varphi}(A)=0 \quad\Rightarrow\quad 0 \;=\; \frac{g}{R}\,\sin\varphi_A \;+\; cte$$

$$\Rightarrow \qquad cte \;=\; -\,\frac{g}{R}\,\sin\varphi_A$$

Ceci nous permet donc d'écrire : $\dot{\varphi}^2 \;=\; \frac{2g}{R}\,(\sin\varphi \;-\; \sin\varphi_A)$

Puisque $v \;=\; R\dot{\varphi}$ on a donc finalement :

$$v \;=\; \sqrt{2gR\,(\sin\varphi \;-\; \sin\varphi_A)}$$

En B, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ et on obtient alors :

$$v_B \;=\; \sqrt{2gR\,(1 \;-\; \sin\varphi_A)} \;\approx\; 6,4\ \mathrm{m/s}$$

Remarque

L'astuce consistant à multiplier l'équation 3 par $\dot{\varphi}$ pour pouvoir l'intégrer revient en fait à appliquer (sans le dire) le théorème de l'énergie cinétique. Une façon de démontrer celui-ci consiste d'ailleurs à partir de la seconde loi de Newton et à multiplier cette relation par $\vec{v}$ :

$m\,\vec{a} \;=\; \vec{F} \qquad\rightarrow\qquad m\,\vec{a}.\vec{v} \;=\; \vec{F}\vec{v}$

Soit : $m\,\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\vec{v}^2\right] \;=\; \vec{F}\vec{v} \qquad\rightarrow\qquad \frac{d}{dt}E_c \;=\; \vec{F}\vec{v}$

En intégrant cette relation : $\int dE_c \;=\; \int\vec{F}\vec{v}\,dt \qquad\rightarrow\qquad E_c \;=\; \int\vec{F}.d\vec{r}+cte$

Si on multiplie l'équation 5 par $mR^2$, le terme à gauche du signe $=$ correspond à l'énergie cinétique et le premier terme du membre de droite correspond au travail du poids.