1 Logique des propositions

Exercice 1 – Sémantique, d'après *Lassaigne & de Rougemont*

1. Soit $F = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.
   F et $\neg F$ sont-elles satisfiables ? Sont-elles des tautologies ? Justifier.
2. Trouver une formule G telle que $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une tautologie.
3. Soit F' obtenue en remplaçant p par $\neg p$ (et réciproquement). F' est-elle conséquence de F ? F est-elle conséquence de F' ? Justifier.

Satisfiable : $\exists$ interpretation tq la formule est vraie.

$[\bot]^I = 0$
$[\top]^I = 1$
$[p]^I = I(p)$
$[\varphi \wedge \psi]^I = [\varphi]^I \cdot [\psi]^I$

F satisfiable car l'interpretation I_1 défini par $I_1(p)=1$, $I_1(q)=1$ et $I_1(r)=0$ satisfait la formule $[F]^{I_1} = 1$.

Autre écriture $I_1 = \{p, q\}$ (Interpretation totale).
$\{q, r\}$
$\{p, r\}$

$\{p, q, r\}$, $\{p\}$, $\{q\}$, $\{r\}$, $\emptyset$ satisfont $\neg F$

F satisfiable $\Leftrightarrow$ $\neg F$ non valide

F insatisfiable $\Leftrightarrow$ $\neg F$ valide

$\neg F$ satisfiable $\Leftrightarrow$ F non valid / n'est pas une tautologie.

$\neg F$ insatisfiable $\Leftrightarrow$ F valide

Pas des tautologies car F et $\neg F$ sont satisfiables.

G tq $\varphi = (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ tautologie.

Si $G = F$ $(F \wedge F) \vee (\neg F \wedge \neg F) \equiv F \vee \neg F \equiv \top$ $\leftarrow$ 0 et 1 avec interpretation $\top$ et $\bot$ dans les formules.

Comme $[\top]^I = 1$, $\forall$ interpretation, et $\varphi \equiv \top$ (qui signifie $[\varphi]^I = [\top]^I = 1$) φ est une tautologie.

$\varphi \equiv (F \vee \neg F) \wedge (F \vee \neg G) \wedge (G \vee \neg F) \wedge (G \vee \neg G)$
$\equiv \top \wedge (F \vee \neg G) \wedge (G \vee \neg F) \wedge \top$
$\equiv (\neg G \vee F) \wedge (\neg F \vee G)$
$\equiv G \Rightarrow F \wedge F \Rightarrow G$
$\equiv F \Leftrightarrow G$

$\bot \rightarrow \varphi$ tautologie

$F' = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$F \models F'$ $\forall$ interprétaᵒ I $[F]^I = 1$ alors $[F']^I = 1$ $\{I / [F]^I = 1\} \subseteq \{I / [F']^I = 1\}$

$\{p, q\}$ satisfait F mais satisfait pas F' donc $F \not\models F'$

$\{p, q, r\}$ satisfait F' mais pas F donc $F' \not\models F$.

$\{I / [F]^I = 1\} = \{\{p,q\}, \{p,r\}, \{q,r\}\}$

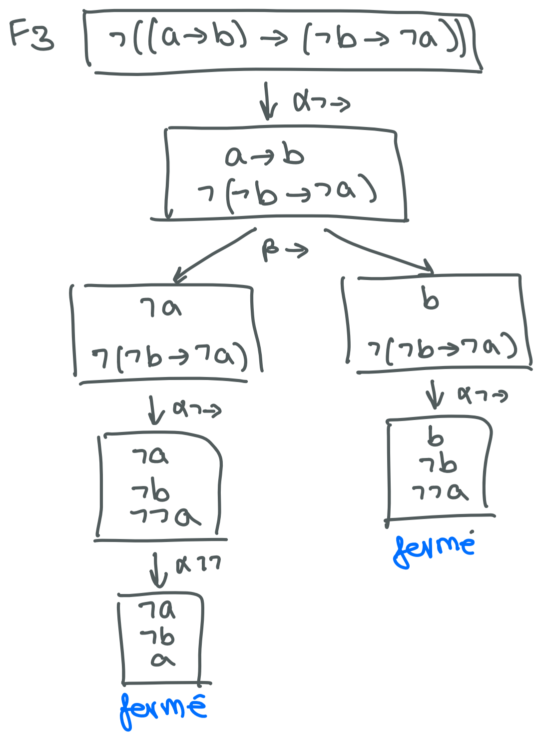
$\varphi \vdash \varphi' \Leftrightarrow \varphi \models \varphi'$

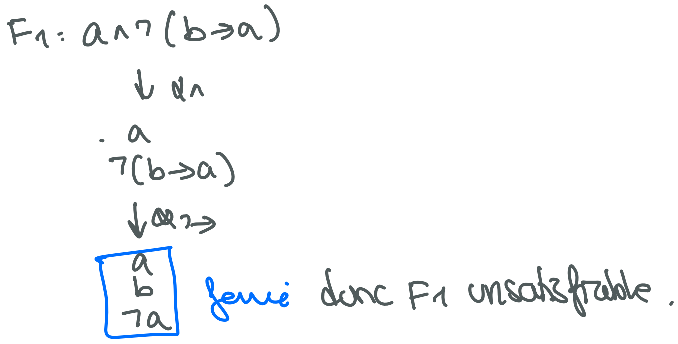
$\{I \mid [F']^I = 1\} = \{\{q\}, \{r\}, \{p,q,r\}\}$

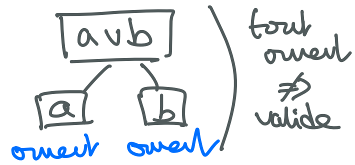
Exercice 2 – Méthode des tableaux sémantiques

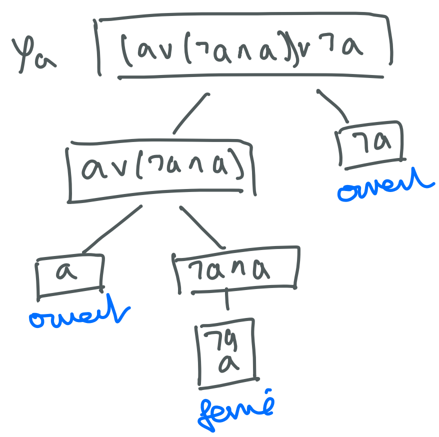
Que peut-on dire des formules suivantes en utilisant la méthode des tableaux sémantiques ?

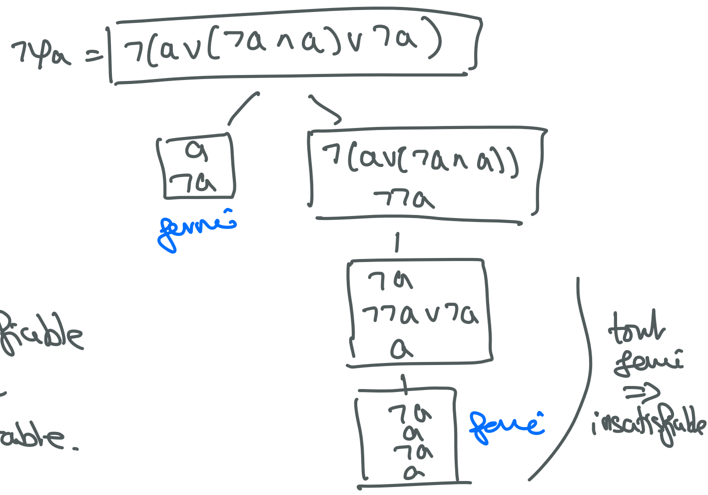
- $F_1 = a \wedge \neg(b \to a)$
- $F_2 = ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to (\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$
- $F_3 = \neg((a \to b) \to (\neg b \to \neg a))$ pas satisfiable
- $F_4 = ((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a))$
- $F_5 = (a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$
- $F_6 = ((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$











Donc ¬φa insatisfiable

⇒ φa valide

donc satisfiable.

$F_4 = ((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a))$

- $(a \to b) \wedge (b \to c)$
  - $a \to b$, $b \to c$
    - $\neg a$, $b \to c$
      - $\neg a$, $\neg b$ — ouvert
      - $\neg a$, c — ouvert
    - b, $b \to c$
      - $\boxed{b,\ \neg b}$
      - b, c — ouvert
- $(c \to b) \wedge (b \to a)$
  - $c \to b$, $b \to a$
    - $\neg c$, $b \to a$
      - $\neg c$, $\neg b$ — ouvert
      - $\neg c$, a — ouvert
    - b, $b \to a$
      - $\boxed{b,\ \neg b}$
      - b, a — ouvert

F_4 satisfiable

$F_5 = (a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$

- $\neg a$, $((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$
  - $\neg a$, $b \to c$, $a \to c$
    - $\neg a$, $\neg b$, $a \to c$
      - $\neg a$, $\neg b$, $\neg a$
    - $\neg a$, c, $a \to c$
      - ...
- b, $(b \to c) \leftrightarrow (a \to c)$
  - b, $b \to c$, $a \to c$
    - ...

ouvert donc satisfiable

$\neg F_5 = \neg((a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c)))$

- $a \to b$, $\neg((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$
  - $\neg a$, $\neg((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$
    - $\neg a$, $\neg(b \to c)$
      - $\neg a$, b, $\neg c$ — ouvert donc $\neg F_5$ satisfiable.
    - $\neg a$, $\neg(a \to c)$
  - b, $\neg((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$

$F_2 := ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to (\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$

- $\neg((a \vee c) \wedge (b \vee c))$
  - $\neg(a \vee c)$
    - $\boxed{\neg a,\ \neg c}$ ouvert — $\phi, \{b\}$
  - $\neg b \vee c$
    - $\boxed{\neg b,\ \neg c}$ — $\phi\ \{a\}$
- $\neg b \to ((a \wedge b) \vee c)$
  - $\boxed{b}$ — $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$
  - $(a \wedge b) \vee c$
    - $a \wedge b$
      - $\boxed{a,\ b}$ — $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$
    - $\boxed{c}$ — $\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$

donc valide & satisfiable.

$\neg F_3$

- $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$, $\neg(\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$
  - $a \vee c$, $b \vee c$, $\neg(\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$
    - $a \vee c$, $b \vee c$, $\neg b$, $\neg((a \wedge b) \vee c)$ $\to$ $a \vee c$, c, $\neg b$, $\neg((a \wedge b) \vee c)$ $\to$ $\boxed{a \vee c,\ c,\ \neg b,\ \neg(a \wedge b),\ \neg c}$ faux
      - $\boxed{a \vee c,\ \neg b,\ (a \wedge b) \vee c}$ faux

donc unsatisfiable

Exercice 3 – Preuves de Hilbert

1. Justifier chaque étape de la démonstration ci-dessous dans le système formel de Hilbert et identifier le résultat démontré :

F_1	p	[Hyp]	Hyp
F_2	$\neg q \rightarrow r$	[Hyp]	SA
F_3	$\neg\neg p \rightarrow \neg r$	[Hyp]	MP
F_4	$(\neg\neg p \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$	[SA3]	
F_5	$r \rightarrow \neg p$	[MP F3 F4	
F_6	$(r \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p))$	[SA1]	
F_7	$\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$	[MP F5 F6	
F_8	$(\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg q \rightarrow r) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$	[SA2]	
F_9	$(\neg q \rightarrow r) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	[MP F7 F8	
F_{10}	$\neg q \rightarrow \neg p$	[MP F2] F9	
F_{11}	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$	[SA3]	
F_{12}	$p \rightarrow q$	[MP F10 F11	
F_{13}	q	[MP F1] F12	

2. En utilisant le théorème de la déduction, rappelé ci-dessous :

$$\text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B \text{ alors } A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$$

établir que $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$\Leftarrow \quad A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

$\Leftarrow \quad A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

$\Leftarrow \quad A \rightarrow B,\ B \rightarrow C,\ A \rightarrow C$

Si $A_1, \ldots A_n \vdash B$
alors $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$

F_1 : A Hyp
F_2 : $A \rightarrow B$ Hyp
F_3 : $B \rightarrow C$ Hyp
F_4 : B MP $F_1 F_2$
F_5 : C MP $F_3 F_4$

On a mq $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \rightarrow C$. en appliquant 3 fois le th. de la déduction. on en déduit $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Exercice 4 – Preuve de Hilbert

Démontrer les théorèmes suivants dans le système formel de Hilbert :

1. $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$
2. $\vdash \neg\neg B \rightarrow B$
3. $\vdash B \rightarrow \neg\neg B$ +exo prec
4. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

SA 1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ introduire variable
SA 2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
SA 3 $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

MP $A, A \rightarrow B \vdash B$

1. $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$

$\Leftarrow \neg B \vdash B \rightarrow C$

$\cancel{\Leftarrow \neg B, B \vdash C}$

· $\neg C \rightarrow \neg B \rightarrow B \rightarrow C$

$\neg B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$

F_1 : $\neg B$ [Hyp]
F_2 : $\neg B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ [SA1] introduit la variable.
F_3 : $\neg C \rightarrow \neg B$ [MP F_1 F_2]
· F_4 : $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow C)$ [SA 3]
F_5 : $B \rightarrow C$

On a prouvé $\neg B \vdash B \rightarrow C$ en appliquant le th de la déduction, on en déduit $\vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow C)$

2. $\vdash \neg\neg B \to B$ | $\neg\neg B$ | (Hyp).
$\neg\neg B \vdash B$ | $\neg\neg B \to (\neg B \to \neg\neg\neg B)$ | (Q1) $B = \neg B$ $C = \neg\neg\neg B$
| $\neg B \to \neg\neg\neg B$ | (MP F1, F2)
| $(\neg B \to \neg\neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B)$ | (SA3)
| $\neg\neg B \to B$ | (MP F1. F4)
| B |

On a prouvé $\neg\neg B \vdash B$. On en deduit (TH de la deduction $\vdash \neg\neg B \to B$

3. $\vdash B \to \neg\neg B$

$(\neg\neg\neg B \to \neg B) \to (B \to \neg\neg B)$ SA3
$(\neg\neg\neg B \to \neg B)$ Q2 avec $B = \neg B$
$B \to \neg\neg B$ MP avec F_1 F_2.

4. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
$(A \to B) \vdash \neg B \to \neg A$
$\neg B, A \to B \vdash \neg A$

$\neg B$
$A \to B$

$\neg B \to (\neg A \to \neg B) \to ((\neg B \to \neg A) \to (\neg B \to \neg B))$
$(\neg B \to \neg A) \to (\neg B \to \neg B)$.

Exercice 5 – Sémantique
Quel est le nombre maximum de formules non équivalentes que l'on peut former avec n variables propositionnelles ? Quelles sont-elles pour $n = 1$?

formule equivalente = m̂ interpretation.

2^n = nb d'interpretation / lignes de table de verité
= nb de sous ens d'un ens de cardinal n.

nb de formules qu'on peut créer pour n variables : 2^{2^n}

2 Logique des prédicats du premier ordre (LPPO)

2.1 Représentation

Exercice 6

En utilisant les symboles de prédicats et fonctions suivants

predicats

$A(x)$	x est anglais	$e(x)$	dénote le pire ennemi de x
$H(x,y)$	x hait y	n	dénote Napoléon
$C(x,y)$	x connaît y		

fonctions

représenter les phrases suivantes par des formules de la LPPO :

1. tout Anglais hait quelqu'un
2. le pire ennemi de Napoléon est anglais
3. tout Anglais hait son pire ennemi
4. tout le monde connaît quelqu'un qu'il hait et quelqu'un qu'il ne hait pas
5. celui qui connaît son pire ennemi ne le hait pas

1. $\forall x, \exists y.\ A(x) \rightarrow H(x,y)$

$\forall x\ (A(x) \rightarrow \exists y H(x,y))$

$\forall x \in E. P(x) \Leftrightarrow \forall x\ (E(x) \rightarrow P(x))$

FAUX ⚠

- ~~$\exists x \exists y.\ A(x) \rightarrow H(x,y)$~~
- ~~$\forall x\ \exists y\ A(x) \wedge H(x,y)$~~ car $\forall x\ \exists y\ A(x) \wedge \forall x \exists y H(x,y)$ tout le monde est anglais et tlm hait qqn
- ~~$\forall x. \exists y.\ H(A(x), y)$~~ pas de predicat dans predicat.

2. $A(e(n))$

3. $\forall x\ (A(x) \rightarrow H(x, e(x)))$

$\exists$ avec $\vee, \rightarrow$
$\forall$ avec $\wedge$

4 $\forall x (\exists y\ C(x,y) \wedge H(x,y)) \wedge (\exists z\ C(x,z) \wedge \neg H(x,z))$

5. $\forall x\ (C(x, e(x)) \rightarrow \neg H(x, e(x)))$

forme prenexe : tous les quantificateurs sont au début et appliquée à toute la formule.

Forme normale negative : negation devant les variables et pas devant operateur

Exercice 7

On considère le domaine des œuvres littéraires, le domaine des auteurs et le domaine des êtres humains. Les symboles de constantes a, m, s représentent respectivement Alice, "Les mots" et Jean-Paul Sartre. Les prédicats unaires D et R sont tels que $D(x)$ représente "x est un membre du département de littérature" et $R(x)$ "x est un roman", les prédicats binaires E et L tels que $E(x,y)$ représente "x a écrit y" et $L(x,y)$ "x a lu y".

1. Représenter les phrases suivantes par des formules de la LPPO
   (a) Un des membres du département de littérature a lu Les mots.
   (b) Tous les membres du département de littérature ont lu Les mots.
   (c) Alice a lu un roman de Sartre
   (d) Un des membres du département de littérature n'a lu que des romans de Sartre
   (e) Aucun des membres du département de littérature n'a lu tous les romans de Sartre
   (f) Tous les membres du département de littérature qui ont lu Les mots ont lu tous les romans de Sartre.

a. $\exists x\,(D(x) \wedge L(x,m))$

b. $\forall x\,(D(x) \rightarrow L(x,m))$.

c. $\exists x\,(R(x) \wedge E(s,x) \wedge L(a,x))$

d. $\exists x\,\forall y\,(D(x) \wedge R(x) \wedge \neg E(s,y)) \rightarrow \neg L(x,y))$ $\quad \neg D(x) \vee \neg R(y) \vee E(s,y) \vee \neg L(x,y)$.

$\exists x\,(D(x) \wedge (\forall y\; R(y) \wedge L(x,y) \rightarrow E(s,y))$ $\quad \exists x\,\forall y,\,(D(x) \wedge [\neg R(y)] \vee \neg L(x,y) \vee E(s,y))$

Il a lu tous les el^{r} de sartre $\quad \exists x\,(D(x) \wedge (\forall y.\; R(y) \wedge E(s,y) \rightarrow L(x,y))$

Il a lu des romans que de Sartre $\quad \exists x\; D(x) \wedge \forall y\; L(x.y) \wedge E(x,y) \rightarrow R(y)$.

Dans tout ce qu'il a lu c'est que des romans de Sartre $\cdots$ $L(x,y) \rightarrow R(y) \wedge E(s,y)$.