1 Logique des propositions

Exercice 1 – Sémantique, d'après *Lassaigne & de Rougemont*

1. Soit $F = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.
   F et $\neg F$ sont-elles satisfiables ? Sont-elles des tautologies ? Justifier.
2. Trouver une formule G telle que $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ soit une tautologie.
3. Soit F' obtenue en remplaçant p par $\neg p$ (et réciproquement). F' est-elle conséquence de F ? F est-elle conséquence de F' ? Justifier.

Satisfiable : $\exists$ interpretation tq la formule est vraie.

$[\bot]^I = 0$
$[\top]^I = 1$
$[p]^I = I(p)$
$[\varphi \wedge \psi]^I = [\varphi]^I \cdot [\psi]^I$

F satisfiable car l'interpretation I_1 défini par $I_1(p)=1$, $I_1(q)=1$ et $I_1(r)=0$

satisfait la formule $[F]^{I_1} = 1$.

Autre écriture $I_1 = \{p, q\}$ (Interpretation totale).
$\{q, r\}$
$\{p, r\}$

$\{p, q, r\}$, $\{p\}$, $\{q\}$, $\{r\}$, $\emptyset$ satisfont $\neg F$

F satisfiable $\Leftrightarrow$ $\neg F$ non valide

F insatisfiable $\Leftrightarrow$ $\neg F$ valide

$\neg F$ satisfiable $\Leftrightarrow$ F non valid / n'est pas une tautologie.

$\neg F$ insatisfiable $\Leftrightarrow$ F valide

Pas des tautologies car F et $\neg F$ sont satisfiables.

G tq $\varphi = (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ tautologie.

Si $G = F$ $(F \wedge F) \vee (\neg F \wedge \neg F) \equiv F \vee \neg F \equiv \top$

$\leftarrow$ 0 et 1 avec interpretation $\top$ et $\bot$ dans les formules.

Comme $[\top]^I = 1$, $\forall$ interpretation, et $\varphi \equiv \top$ (qui signifie $[\varphi]^I = [\top]^I = 1$)
φ est une tautologie.

$\varphi \equiv (F \vee \neg F) \wedge (F \vee \neg G) \wedge (G \vee \neg F) \wedge (G \vee \neg G)$
$\equiv \top \wedge (F \vee \neg G) \wedge (G \vee \neg F) \wedge \top$
$\equiv (\neg G \vee F) \wedge (\neg F \vee G)$
$\equiv G \Rightarrow F \wedge F \Rightarrow G$
$\equiv F \Leftrightarrow G$

$\bot \rightarrow \varphi$ tautologie

$F' = (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$F \models F'$ $\forall$ interprétaᵒ I $[F]^I = 1$ alors $[F']^I = 1$ $\{I / [F]^I = 1\} \subseteq \{I / [F']^I = 1\}$

$\{p, q\}$ satisfait F mais satisfait pas F' donc $F \not\models F'$

$\{p, q, r\}$ satisfait F' mais pas F donc $F' \not\models F$.

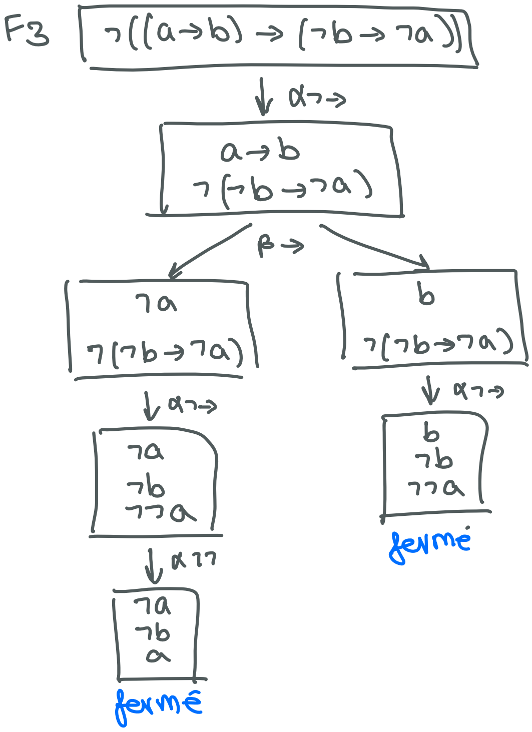
$\{I / [F]^I = 1\} = \{\{p,q\}, \{p,r\}, \{q,r\}\}$ $\varphi \vdash \varphi' \iff \varphi \models \varphi'$

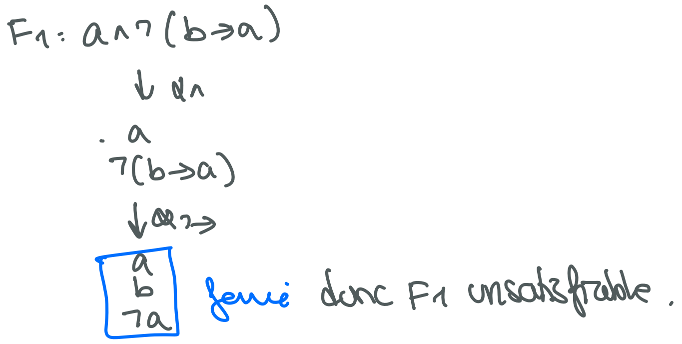
$\{I \mid [F']^I = 1\} = \{\{q\}, \{r\}, \{p,q,r\}\}$

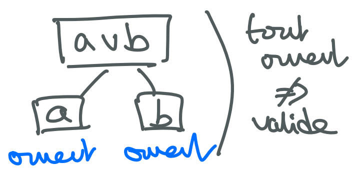
Exercice 2 – Méthode des tableaux sémantiques

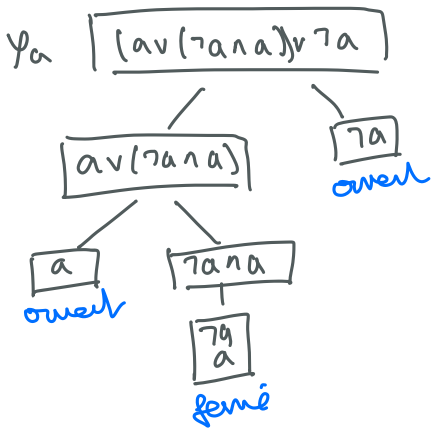
Que peut-on dire des formules suivantes en utilisant la méthode des tableaux sémantiques ?

- $F_1 = a \wedge \neg(b \to a)$
- $F_2 = ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to (\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$
- $F_3 = \neg((a \to b) \to (\neg b \to \neg a))$ pas satisfiable
- $F_4 = ((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a))$
- $F_5 = (a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$
- $F_6 = ((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$

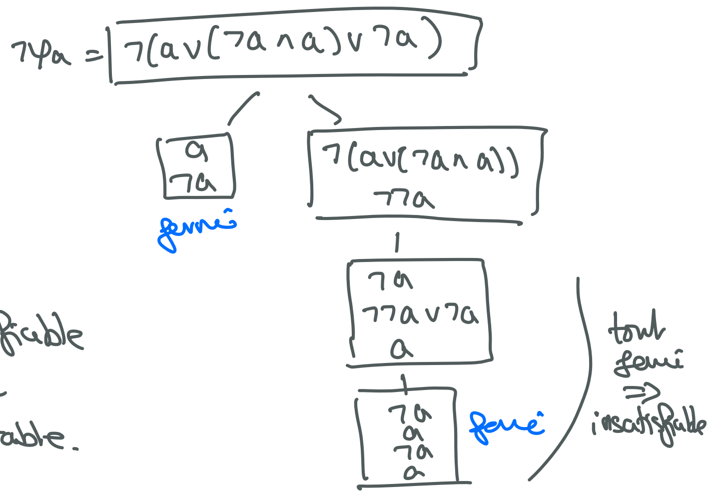








Donc ¬φa insatisfiable
⇒ φa valide
donc satisfiable.



$F_4 = ((a \to b) \wedge (b \to c)) \vee ((c \to b) \wedge (b \to a))$

$(a \to b) \wedge (b \to c)$ | $(c \to b) \wedge (b \to a)$

$a \to b$, $b \to c$ | $c \to b$, $b \to a$

$\neg a$, $b \to c$ | b, $b \to c$ | $\neg c$, $b \to a$ | b, $b \to a$

$\neg a$, $\neg b$ — ouvert | $\neg a$, c — ouvert | $\boxed{b, \neg b}$ | b, c — ouvert | $\neg c$, $\neg b$ — ouvert | $\neg c$, a — ouvert | $\boxed{b, \neg b}$ | b, a — ouvert

F_4 satisfiable

$F_5 = (a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$

$\neg a$, $((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$ | b, $(b \to c) \leftrightarrow (a \to c)$

$\neg a$, $b \to c$, $a \to c$ | b, $b \to c$, $a \to c$

$\neg a$, $\neg b$, $a \to c$ | $\neg a$, c, $a \to c$ | ...

$\neg a$, $\neg b$, $\neg a$ | ...

ouvert donc satisfiable

$\neg F_5 = \neg((a \to b) \to ((b \to c) \leftrightarrow (a \to c)))$

$a \to b$, $\neg((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$

$\neg a$, $\neg((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$ | b, $\neg((b \to c) \leftrightarrow (a \to c))$

$\neg a$, $\neg(b \to c)$ | $\neg a$, $\neg(a \to c)$

$\neg a$, b, $\neg c$ ouvert donc $\neg F_5$ satisfiable.

$F_2 : ((a \vee c) \wedge (b \vee c)) \to (\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$

$\neg((a \vee c) \wedge (b \vee c))$ | $\neg b \to ((a \wedge b) \vee c)$

$\neg(a \vee c)$ | $\neg b \vee c$ | $\boxed{b}$ | $(a \wedge b) \vee c$

$\boxed{\neg a, \neg c}$ ouvert | $\boxed{\neg b, \neg c}$ | $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ | $a \wedge b$ | $\boxed{c}$

$\emptyset, \{b\}$ | $\emptyset \{a\}$ | $\boxed{a, b}$ | $\{c\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$

$\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$

donc valide & satisfiable.

$\neg F_3$

$(a \vee c) \wedge (b \vee c)$, $\neg(\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$

$a \vee c$, $b \vee c$, $\neg(\neg b \to ((a \wedge b) \vee c))$

$a \vee c$, $b \vee c$, $\neg b$, $\neg((a \wedge b) \vee c)$ $\to$ $a \vee c$, c, $\neg b$, $\neg((a \wedge b) \vee c)$ $\to$ $\boxed{a \vee c, c, \neg b, \neg(a \wedge b), \neg c}$ fermé

$\boxed{a \vee c, \neg b, (a \wedge b) \vee c}$ fermé

donc unsatisfiable

Exercice 3 – Preuves de Hilbert

1. Justifier chaque étape de la démonstration ci-dessous dans le système formel de Hilbert et identifier le résultat démontré :

F_1	p	[Hyp]	Hyp
F_2	$\neg q \to r$	[Hyp]	SA
F_3	$\neg\neg p \to \neg r$	[Hyp]	MP
F_4	$(\neg\neg p \to \neg r) \to (r \to \neg p)$	[SA3]	
F_5	$r \to \neg p$	[MP F_3 F_4	
F_6	$(r \to \neg p) \to (\neg q \to (r \to \neg p))$	[SA1]	
F_7	$\neg q \to (r \to \neg p)$	[MP F_5] F_6	
F_8	$(\neg q \to (r \to \neg p)) \to ((\neg q \to r) \to (\neg q \to \neg p))$	[SA2]	
F_9	$(\neg q \to r) \to (\neg q \to \neg p)$	[MP F_7] F_8	
F_{10}	$\neg q \to \neg p$	[MP F_2] F_9	
F_{11}	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	[SA3]	
F_{12}	$p \to q$	[MP F_{10} F_{11}	
F_{13}	q	[MP F_1] F_{12}	

2. En utilisant le théorème de la déduction, rappelé ci-dessous :

$$\text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B \text{ alors } A_1, A_2, \ldots, A_{n-1} \vdash (A_n \to B)$$

établir que $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

$\Leftarrow \quad A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$

Si $A_1, \ldots A_n \vdash B$
alors $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash A_n \to B$

$\Leftarrow \quad A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$

$\Leftarrow \quad A \to B,\ B \to C,\ A \to C$

F_1 :	A	Hyp
F_2 :	$A \to B$	Hyp
F_3 :	$B \to C$	Hyp
F_4 :	B	MP $F_1 F_2$
F_5 :	C	MP $F_3 F_4$

On a mq $A \to B, B \to C, A \to C$. en appliquant 3 fois le th. de la déduction, on en déduit $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

Exercice 4 – Preuve de Hilbert

Démontrer les théorèmes suivants dans le système formel de Hilbert :

1. $\vdash \neg B \to (B \to C)$
2. $\vdash \neg\neg B \to B$
3. $\vdash B \to \neg\neg B$ +exo prec
4. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

SA 1 $\quad A \to (B \to A)$ introduire variable

SA 2 $\quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

SA 3 $\quad (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

MP $\quad A, A \to B \vdash B$

1. $\vdash \neg B \to (B \to C)$

$\Leftarrow \neg B \vdash B \to C$

~~$\Leftarrow \neg B, B \vdash C$~~

$\cdot\ \neg C \to \neg B \to B \to C$

$\neg B \to (\neg C \to \neg B)$

F_1 : $\neg B$ [Hyp]

F_2 : $\neg B \to (\neg C \to \neg B)$ [SA1] introduit la variable.

F_3 : $\neg C \to \neg B$ [MP F_1 F_2]

F_4 : $(\neg C \to \neg B) \to (B \to C)$ [SA 3]

F_5 : $B \to C$

On a prouvé $\neg B \vdash B \to C$ en appliquant le th de la déduction, on en déduit $\vdash \neg B \to (B \to C)$

2. $\vdash \neg\neg B \to B$

$\neg\neg B \vdash B$

$\neg\neg B$	(Hyp).
$\neg\neg B \to (\neg B \to \neg\neg\neg B)$	(Q1) $B = \neg B$ $C = \neg\neg\neg B$
$\neg B \to \neg\neg\neg B$	(MP F1, F2)
$\neg B \to \neg\neg\neg B) \to (\neg\neg B \to B)$	(SA3)
$\neg\neg B \to B$	(MP F1. F4)
B	

On a prouvé $\neg\neg B \vdash B$. On en deduit (TH de la deduction $\vdash \neg\neg B \to B$

3. $\vdash B \to \neg\neg B$

$(\neg\neg\neg B \to \neg B) \to (B \to \neg\neg B)$	SA3
$(\neg\neg\neg B \to \neg B)$	Q2 avec $B = \neg B$
$B \to \neg\neg B$	MP avec F_1 F_2.

4. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$(A \to B) \vdash \neg B \to \neg A$

$\neg B, A \to B \vdash \neg A$

On a prouvé $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$

D'où on deduit (TH. reduction)

$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

F1	$A \to B$	[Hyp]
F2	$A \to B \to ((B \to \neg\neg B) \to (A \to \neg\neg B))$	[Q2]
F3	$(B \to \neg\neg B) \to (A \to \neg\neg B)$	[MP]
F4	$B \to \neg\neg B$	[Q.4]
F5	$A \to \neg\neg B$	
F6	$(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg\neg B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$	
F7	$\neg\neg A \to A$	
F8	$(A \to \neg\neg B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$	
F9	$\neg\neg A \to \neg\neg B$	
F10	$(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$	
F11	$\neg B \to \neg A$	[MP]

Exercice 5 – Sémantique

Quel est le nombre maximum de formules non équivalentes que l'on peut former avec n variables propositionnelles ? Quelles sont-elles pour $n = 1$?

formule equivalente = m̂ interpretation.

2^n = nb d'interpretation / lignes de table de verité

= nb de sous ens d'un ens de cardinal n.

nb de formules qu'on peut créer pour n variables : 2^{2^n}

2 Logique des prédicats du premier ordre (LPPO)

2.1 Représentation

Exercice 6

En utilisant les symboles de prédicats et fonctions suivants

predicats

$A(x)$	x est anglais	$e(x)$	dénote le pire ennemi de x
$H(x,y)$	x hait y	n	dénote Napoléon
$C(x,y)$	x connaît y		

fonctions

représenter les phrases suivantes par des formules de la LPPO :

1. tout Anglais hait quelqu'un
2. le pire ennemi de Napoléon est anglais
3. tout Anglais hait son pire ennemi
4. tout le monde connaît quelqu'un qu'il hait et quelqu'un qu'il ne hait pas
5. celui qui connaît son pire ennemi ne le hait pas

1. $\forall x, \exists y.\ A(x) \rightarrow H(x,y)$

$\forall x\ (A(x) \rightarrow \exists y H(x,y))$

$\forall x \in E . P(x) \Leftrightarrow \forall x\ (E(x) \rightarrow P(x))$

FAUX ⚠

- $\cancel{\exists x \exists y.\ A(x) \rightarrow H(x,y)}$
- $\cancel{\forall x \exists y\ A(x) \wedge H(x,y)}$ car
  $\forall x \exists y\ A(x) \wedge \forall x \exists y H(x,y)$
  tout le monde est anglais et tlm hait qqn
- $\cancel{\forall x . \exists y.\ H(A(x), y)}$ pas de predicat dans predicat.

2. $A(e(n))$

3. $\forall x\ (A(x) \rightarrow H(x, e(x)))$

$\exists$ avec $\vee, \rightarrow$
$\forall$ avec $\wedge$

4 $\forall x (\exists y\ C(x,y) \wedge H(x,y)) \wedge (\exists z\ C(x,z) \wedge \neg H(x,z))$

5. $\forall x\ (C(x, e(x)) \rightarrow \neg H(x, e(x)))$

forme prenexe : tous les quantificateurs sont au début et appliquée à toute la formule.

Forme normale negative : negation devant les variables et pas devant operateur

Exercice 7

On considère le domaine des œuvres littéraires, le domaine des auteurs et le domaine des êtres humains. Les symboles de constantes `a`, `m`, `s` représentent respectivement Alice, "Les mots" et Jean-Paul Sartre. Les prédicats unaires D et R sont tels que $D(x)$ représente "x est un membre du département de littérature" et $R(x)$ "x est un roman", les prédicats binaires E et L tels que $E(x,y)$ représente "x a écrit y" et $L(x,y)$ "x a lu y".

1. Représenter les phrases suivantes par des formules de la LPPO
   (a) Un des membres du département de littérature a lu Les mots.
   (b) Tous les membres du département de littérature ont lu Les mots.
   (c) Alice a lu un roman de Sartre
   (d) Un des membres du département de littérature n'a lu que des romans de Sartre
   (e) Aucun des membres du département de littérature n'a lu tous les romans de Sartre
   (f) Tous les membres du département de littérature qui ont lu Les mots ont lu tous les romans de Sartre.

a. $\exists x\,(D(x) \wedge L(x,m))$

b. $\forall x\;(D(x) \rightarrow L(x,m))$.

c. $\exists x\;(R(x) \wedge E(s,x) \wedge L(a,x))$

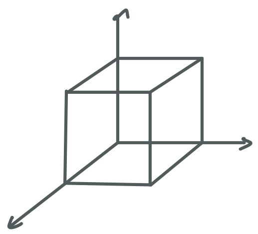
d. $\exists x\,\forall y\,(D(x) \wedge R(x) \wedge \neg E(s,y)) \rightarrow \neg L(x,y))$ $\neg D(x) \vee \neg R(y) \vee E(s,y) \vee \neg L(x,y)$.

$\exists x\,(D(x) \wedge (\forall y\; R(y) \wedge L(x,y) \rightarrow E(s,y))$ $\exists x\,\forall y,(D(x) \wedge (\neg R(y) \vee \neg L(x,y) \vee E(s,y))$

Il a lu tous les él^t de sartre $\exists x\,(D(x) \wedge (\forall y.\; R(y) \wedge E(s,y) \Rightarrow L(x,y))$

Il a lu des romans que de Sartre $\exists x\; D(x) \wedge \forall y\; L(x.y) \wedge E(x,y) \rightarrow R(y)$.

Dans tout ce qu'il a lu c'est que des romans de Sartre $\cdots$ $L(x,y) \Rightarrow R(y) \wedge E(s,y)$.



2. Exprimer en langage naturel la signification des formules suivantes

   (a) $\exists x(D(x) \wedge \neg L(x,m))$

   (b) $\forall x((R(x) \wedge E(s,x)) \rightarrow L(a,x))$

   (c) $\forall x(D(x) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge E(s,y) \wedge L(x,y)))$

   (d) $\neg\exists x(D(x) \wedge \forall y((R(y) \wedge L(x,y)) \rightarrow E(s,y))$

a. Il y a des membres du club qui n'ont pas lu "Les mots"
b. Alice a lu tous les romans de Sartre
c. Tout membre du départe^t ont lu un roman écrit par Sartre.

1 Sémantique et interprétation de la LPPO

Exercice 1

On considère les trois formules suivantes :

$F_1 = \forall x.\exists y.R(x,y)$

$F_2 = \exists x.\forall y.R(x,y)$

$F_3 = \forall x.\forall y.(R(x,y) \rightarrow \exists z.(R(x,z) \wedge R(z,y)))$ ← dense

Pour chacune d'entre elles, dire si elle est valide dans les structures suivantes :

1. les entiers naturels $\mathbb{N}$ et R=inférieur strict,
2. les rationnels $\mathbb{Q}$ et R=inférieur strict,
3. l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et R=inclusion stricte.

1. F1 non valide pour $x=0$
F2 non valide
F3 non valide

2. F1 valide
F2 non valide
F3 valide

3. $\forall X \subseteq \mathbb{N}, \exists Y \subseteq \mathbb{N}, X \subset Y$, non valide.
F2 non valide
F3 non valide.

Structure M. défini par un domaine $|M| = \mathbb{N}$ et une fct d'interprétation ? et évaluation

Exercice 2 On considère la formule $\forall x.\forall y.(R(x,y) \to x \neq y)$ où x et y sont 2 variables et R et $\neq$ 2 prédicats binaires. Quel que soit le domaine $|M|$ considéré, le prédicat $\neq$ prend la valeur de vérité vrai si ses 2 arguments sont différents et faux sinon.

1. Cette formule admet-elle un modèle à un seul élément (c'est-à-dire avec $card(|M|) = 1$) ?
2. Combien admet-elle de modèles à deux éléments ?
3. Si le domaine est $\mathbb{N}$ et R la relation de divisibilité, est-ce que la formule est satisfaite pour cette structure ?
4. Reprendre les questions précédentes avec la formule $\forall x.\exists y.(R(x,y) \wedge (x \neq y))$.

1. $|M| = \{a\}$ $\quad \neq^M = \emptyset \quad R^M(a,a) = 0 \to R^M = \emptyset$ modèle
$\quad = 1 \to R^M = \{(a,a)\}$ X

2. $|M| = \{a,b\}$ $\quad \neq^M = \{(a,b),(b,a)\}$ $\quad R^M$ (a,a) 0
(a,b) 0/1
(b,a) 0/1
(b,b) 0

4 Modèles $R^M = \emptyset$
$= \{(a,b),(b,a)\}$
$= \{(a,b)\}$
$= \{(b,a)\}$

?
$\neg P(Y) \vee Q(Y) = \forall y \; P(Y) \to Q(Y)$
$P(a)$ $\quad Q(a)$

$$\frac{P(a) \qquad \neg P(Y) \vee Q(Y)}{Q(a)}$$

ens de clauses

$a \vee b$
$a \vee \neg b$
$a \vee c \vee d$
$\neg a \vee e$

Resolution. on prend deux clauses on en deduit une troisième.

$$\frac{\neg a \vee b \qquad a}{b} \qquad \frac{\cancel{\neg a} \vee b \vee c \qquad \cancel{a} \vee \neg d}{b \vee c \vee \neg d} \qquad \frac{a \to (b \vee c) \qquad d \to a}{d \to (b \vee c)}$$

Exercice 3 – Cas propositionnel : diagnostic médical simpliste, encore

On dispose des connaissances suivantes sur la grippe :

(a) La fièvre est définie comme une température supérieure à 38°. $\neg s \vee f$ C_1

(b) Les patients qui ont la grippe doivent prendre du tamiflu. $\neg g \vee ta$ C_2

(c) Les patients qui ont de la fièvre et qui toussent ont la grippe. $\neg f \vee \neg t \vee g$ C_3

(d) Le patient tousse et a une température supérieure à 38°. to C_4

s C_5

1. Formaliser ces connaissances en utilisant les variables propositionnelles `grippe`, `tamiflu`, `fièvre`, `toux`, `sup38`.
2. En utilisant la méthode de résolution, montrer que le patient doit prendre du tamiflu.

2. On ajoute HYP : $\neg ta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg ta \qquad C_2}{\neg g} \qquad C_3}{\neg f \vee \neg to} \qquad C_4}{\neg f} \qquad C_1}{\neg s} \qquad C_5}{\square}$$

Donc $(C_1, \dots, C_5) \wedge \neg ta \vDash \square$.

$(C_1, \dots, C_5) \vDash ta$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{C_4}{to} \qquad C_3}{\neg f \vee g} \qquad \dfrac{C_1 \qquad C_5}{f}}{g} \qquad C_2}{\boxed{ta}}$$

$C_1 . C_2 . C_3 . C_4 . C_5 \vdash ta$

par résolution

Exercice 5 – LPPO

On considère un langage comportant les constantes c, d, les prédicats unaires E, I, S et le prédicat binaire R. Montrer par la méthode de résolution que l'ensemble de clauses suivant n'est pas satisfiable.

$C_1 = E(c)$
$C_2 = I(d)$
$C_3 = S(d)$
$C_4 = \neg I(y) \vee R(c, y)$
$C_5 = \neg E(x) \vee \neg S(y) \vee \neg R(x, y)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{C_2}{I(d)} \qquad \overset{C_4}{\neg I(Y) \lor R(c,Y)}}{R(c,d)}\{Y \backslash d\} \qquad \overset{C_5}{\neg E(X) \lor \neg S(Y) \lor \neg R(X,Y)}}{\neg E(c) \lor \neg S(d)}\{X \backslash c, Y \backslash d\} \qquad \overset{C_1}{E(c)}}{\neg S(d)} \qquad \overset{C_3}{S(d)}}{\square}$$

On a prouvé par résolution $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \vdash \square$

Donc $\{C_1, \dots, C_5\}$ est non satisfiable

$F \vdash \square$ nous donne F unsatisfiable

$F \vdash P$ nous donne $F \models P$

réciproquement, $\nexists$.

a fortiori $F \cup \dots \vdash P$

on a renommé pour que ça soit plus facile les substitutions

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{C_4}{\neg I(X) \lor R(c,X)} \qquad \overset{C_5}{\neg E(X') \lor \neg S(Y) \lor \neg R(X',Y)}}{\neg I(c) \lor \neg E(c) \lor \neg S(X)} \begin{cases} X' \backslash c \\ Y \backslash X \end{cases} \begin{cases} X \backslash Z \\ Y \backslash Z \end{cases} \qquad E(c)}{\neg I(Z) \lor \neg S(Z)} \qquad I(d)}{\neg S(d)}\{Z \backslash d\} \qquad S(d)}{\square}$$

Exercice 4 – Unification

On considère un langage où x, y, z, u, v, w sont des symboles de variable, a un symbole de constante, f, g des symboles de fonction d'arités respectives 1 et 2, et p un symbole de prédicat d'arité 3.

Pour chacun des couples (F_1, F_2) suivants, examiner si $F_2 = \sigma(F_1)$, pour une substitution σ, et si F_1 et F_2 sont unifiables.

1. $F_1 : p(x, f(y), g(f(u), w))$ et $F_2 : p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$
2. $F_1 : p(x, f(x), g(f(y), x))$ et $F_2 : p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$
3. $F_1 : p(x, f(x), g(f(x), x))$ et $F_2 : p(z, f(f(a)), g(f(g(a, z)), v))$

①

$F_1: \; p(x, f(y), g(f(u), w))$

$x \backslash z \qquad y \backslash f(a) \qquad u \backslash g(a,z) \qquad w \backslash v$

$F_2: \; p(z, f(f(a)), g(f(g(a,z)), v))$

$z \backslash x' \qquad f(a) \qquad g(a,x') \qquad v \backslash v'$

$x' \qquad f(a) \qquad g(a,x') \qquad v'$

$x \backslash x' \qquad x' \backslash f(a) \qquad u \backslash g(a,x') \qquad w \backslash v'$

$F_1: \; p(x, f(y)), g(f(u), w)$

$\rightarrow \; p(x', f(f(a)), g(f(g(a,x'))), v')$

$\sigma = \{ z \backslash x', \; x \backslash x', \; y \backslash f(a), \; u \backslash g(a,x'), \; v \backslash v', \; w \backslash v' \}$

②

$F_1: \; p(x, f(x), g(f(x), x))$

$x \backslash x' \qquad x \backslash f(a) \qquad x \backslash g(a, f(a))\,?$

$x' \qquad f(a) \qquad g(a, f(a))$

$z \backslash x'$

$F_2: \; p(z, f(f(a)), g(f(g(a,z)), v))$

pour enlever $\exists Y$, on le substitue avec une fct qui dépend de X.

Skolemization

$\forall X \, \exists Y \rightarrow Y \leftarrow f(X)$

$\exists X \ldots \rightarrow X \leftarrow x_0$

$\forall R(X, f(X))$. $\boxed{R(X, f(X))}$

$\forall Y \, R(x_0, Y)$ $\boxed{R(x_0, Y)}$

$\forall X \exists Y, R(X,Y)$ $\qquad \forall X \exists Y R(X,Y)$

$\exists X, \forall Y, R(X,Y)$. $\qquad \exists X \forall Y \; R(X,Y)$

$\forall X \forall Y (R(X,Y) \rightarrow \exists Z (R(X,Z) \wedge R(Z,Y)))$

$\forall X \; \forall Y \; (\neg R(X,Y) \vee \exists Z (\ldots))$

$\forall X \forall Y \exists Z \; (\neg R(X,Y) \vee (R(X,Z) \wedge R(Z,Y)))$

$\forall X \forall Y \exists Z \; (\neg R(X,Y) \vee R(X,Z)) \wedge (\neg R(X,Y) \vee R(Z,Y))$

$\forall X \forall Y \exists Z \longrightarrow Z \leftarrow g(X,Y)$.

$\neg R(X,Y) \vee R(X, g(X,Y))$

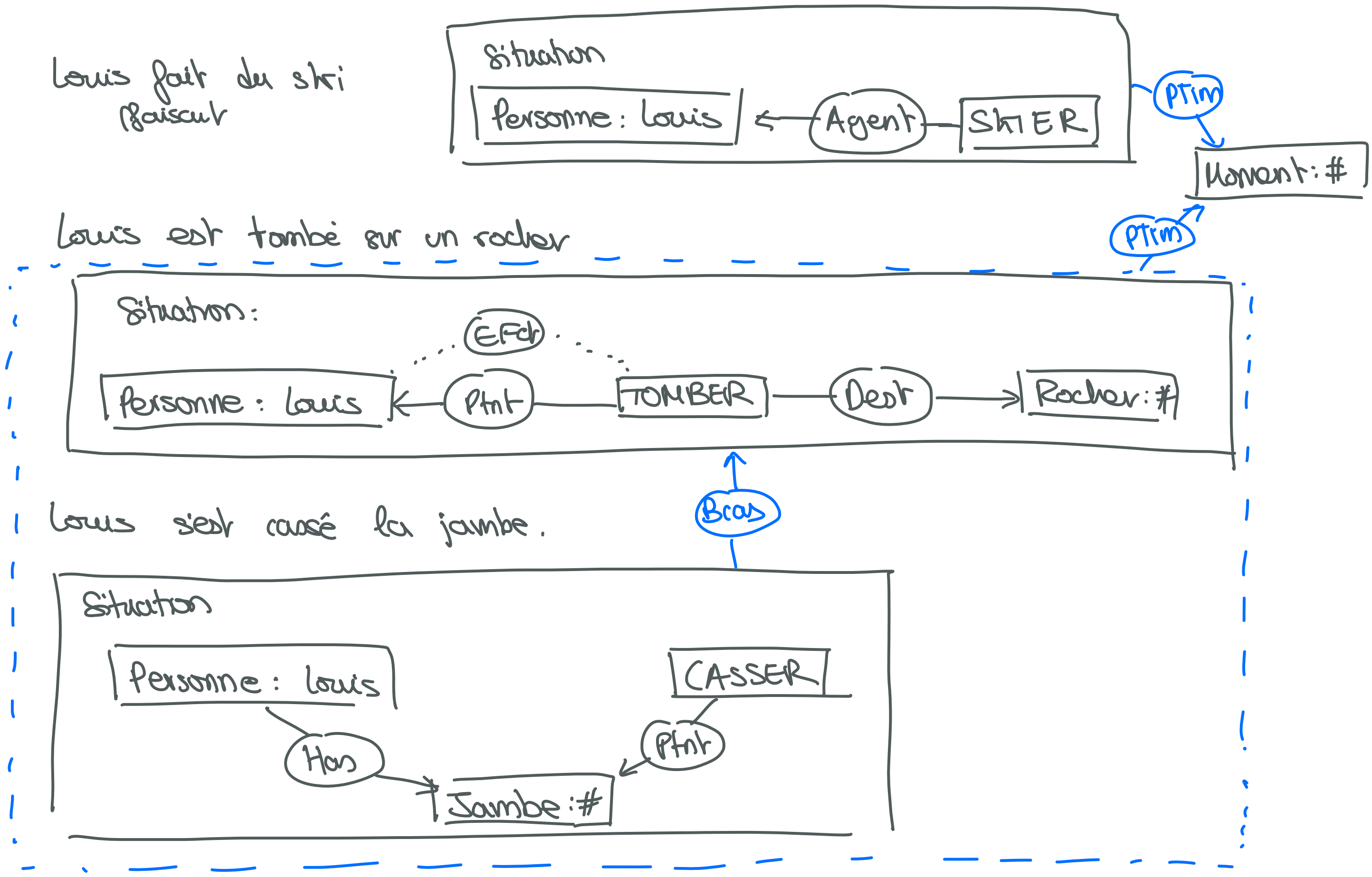
$\neg R(X,Y) \vee R(g(X,Y), Y)$

$\boxed{\text{TD3}}$

Graphes conceptuels

Exercice 1 Représentation des connaissances

Traduire la phrase suivante par un graphe conceptuel en utilisant des situations. On utilise les concepts suivants : `SKIER`, `TOMBER`, `CASSER`, `Personne`, `Jambe`, `Rocher`, `Situation` et `Moment` avec les relations de Sowa `(Has)`, `(Agnt)`, `(Ptnt)`, `(Dest)`, `(PTim)` et `(Bcas)`. *Alors qu'il faisait du ski, Louis est tombé sur un rocher et s'est cassé la jambe.*



Exercice 2 Raisonnement : Jointure et généralisation

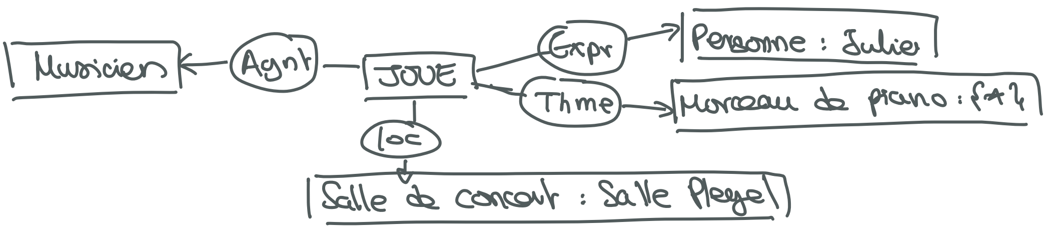
On considère la hiérarchie de concepts suivante :

```
Entité
    -> Personne -> Musicien -> Compositeur -> Compositeur classique
                            -> Interprete -> Pianiste
    -> Morceau -> Morceau de piano -> Sonate
                                   -> Variation
    -> Lieu -> Ville
            -> Salle de concert
    -> Action -> Joue
              -> Compose
    -> Germanique -> Allemand -> Baroque allemand
                  -> Autrichien
    -> Moment -> Date
              -> Siecle
    -> Piano
```

1. Jointure maximale.

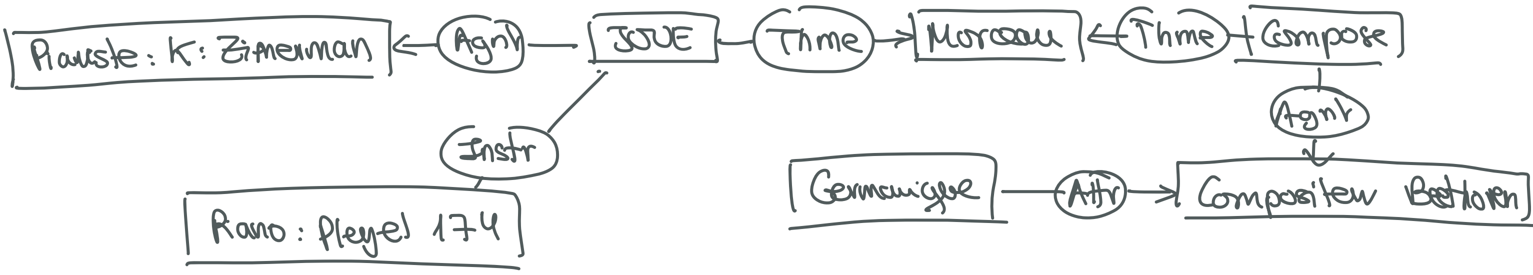
   (a) Traduire les deux graphes de Sowa suivants (G_1 et G_2) en une phrase du langage naturel, puis donner leur jointure maximale $G_{1,2}$.

```
G1 : [Musicien]<-(Agnt)<-[Joue]-
                              ->(Expr)->[Personne:Julie]
                              ->(Thme)->[Morceau de piano:{*}]
                              ->(Loc) ->[Salle de concert: Salle Pleyel]
```



Un musicien joue des morceaux de piano à la salle Pleyel pour / devant Julie

```
G2 : [Joue]-
        ->(Instr)->[Piano:Pleyel 174]
        ->(Agnt)->[Pianiste:K.Zimerman]
        ->(Thme)->[Morceau]<-(Thme)<-[Compose]->(Agnt)->[Compositeur: Beethoven]<-(Attr)<-[Germanique]
```

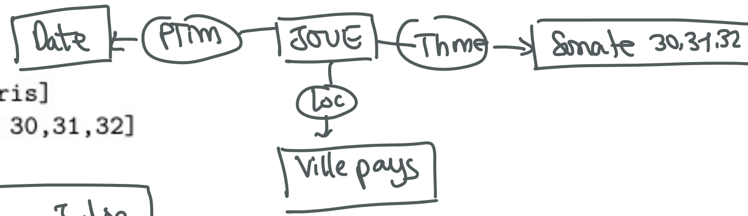


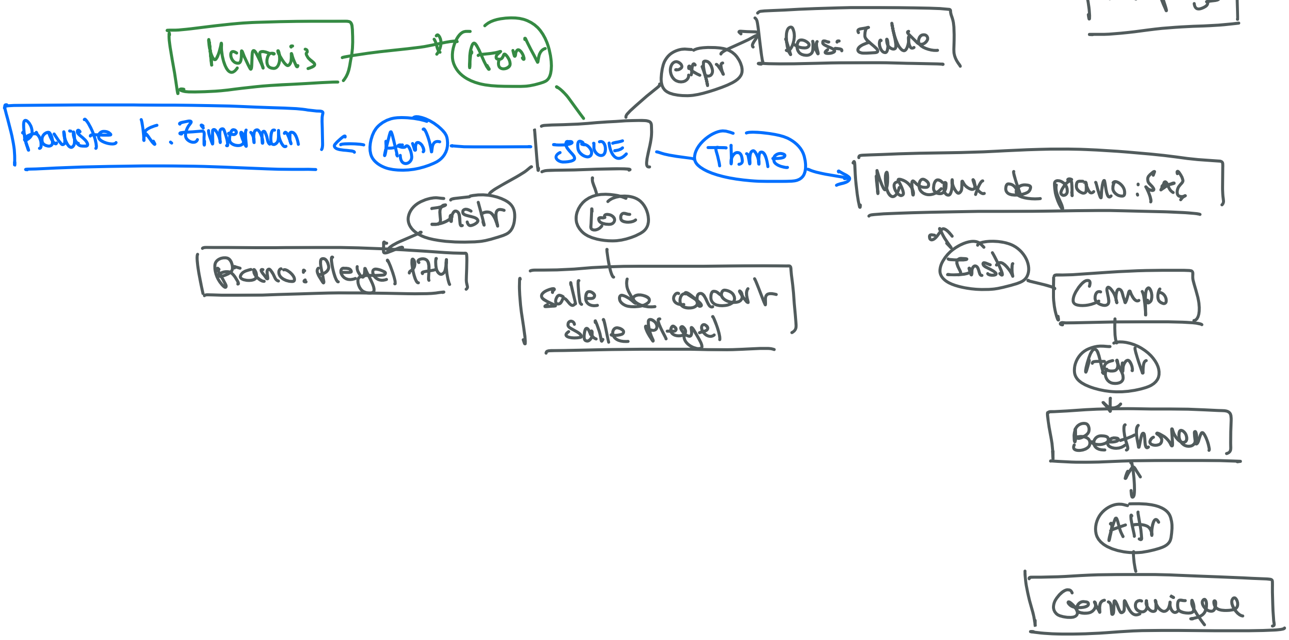
K.Zimerman joue sur le piano pleyel 174 un morceaux composé par le compositeur germanique Beethoven

(b) Même question avec le résultat de la jonction précédente $G_{1,2}$ et le graphe de Sowa suivant (G_3). On nomme le résultat G_{all}.

a compléter

```
G3 : [Date:06/06/2014]<-(Ptim)<-[Joue]-
                                ->(Loc)->[Ville:Paris]
                                ->(Thme)->[Sonate: 30,31,32]
```





2. Généralisation et subsomption.

   (a) Traduire les deux graphes de Sowa suivants (G_4 et G_5) en une phrase du langage naturel, puis donner leur généralisation G_6.

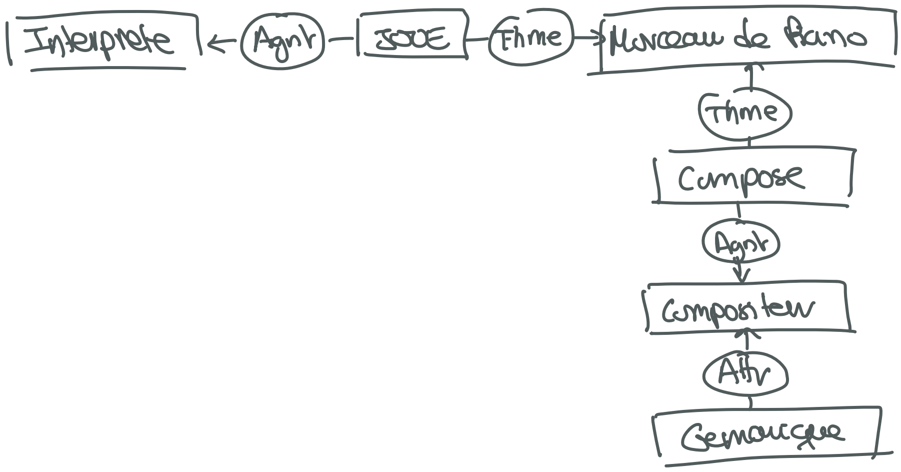
```
G4 : [Variations : Goldberg]-
                <-(Thme)<-[Joue]->(Agnt)->[Interprete:G.Gould]
                <-(Thme)<-[Compose]-
                               ->(Agnt)->[Compositeur]->(Attr)->[Baroque Allemand]
                               ->(Ptim)->[Siecle:18eme]
```

G.Gould joue une variation de Goldberg composé par un compositeur Baroque

Allemand au 18ê siècle .

```
G5 : [Sonata:{*}@3]-
        <-(Thme)<-[Joue]->(Agnt)->[Pianiste:{*}]
        <-(Thme)<-[Compose]->(Agnt)->[Compositeur classique]->(Attr)->[Autrichien]
```

G6 :



→ il est plus precis que le graphe 2

→ subsume pas G1 et G2 .

(b) Indiquer quels sont les graphes subsumés par G_6 parmi G_1, G_2, G_3, $G_{1,2}$ et G_{all}.

G_6 subsumé $G_{1,2}$.

Exercice 3 $\mathcal{FL}^-$, $\mathcal{ALC}$ et extensions

On considère les concepts et les rôles suivants

- `Humain`, `Chien`, `Masculin`, `Feminin`, `NonBinaire` `Homme`, `Femme`, `Mere`, `Frere`
- `aSoeur` : aSoeur(X,Y) signifie que X a pour sœur Y
- `aEnfant` : aEnfant(X,Y) signifie que X a un enfant Y

1. Représenter en $\mathcal{FL}^-$ les connaissances suivantes :
   (a) Pierre est un humain de genre masculin.
   (b) Pierre a une sœur.
   (c) Les hommes sont les humains de genre masculin.
   (d) Les mères ont des enfants.
   (e) Tous les enfants d'un humain sont humains.

a. Pierre : Humain $\sqcap$ Masculin. | Pierre : Humain
Pierre : Masculin.

b. Pierre : $\exists$aSoeur

c. Homme $\equiv$ Humain $\sqcap$ Masculin

d Mere $\sqsubseteq$ $\exists$aEnfant

e. Humain $\sqsubseteq$ $\forall$aEnfant . Humain.

$\forall X, \forall Y \ aEnfant(X,Y) \wedge Humain(X) \wedge \neg Humain(Y) \to \bot$

$\neg aEnfant(X,Y) \vee \neg Humain(X) \vee Humain(Y).$

$Humain(X) \wedge aEnfant(X,Y) \to Humain(Y).$

$\forall X\,(Humain(X) \to (\forall Y,\ aEnfant(X,Y) \to Humain(Y)))$

$[\forall aEnfant.Humain](X).$

2. Représenter en $\mathcal{ALCN}$ les connaissances suivantes :
   (a) On ne peut pas être à la fois un humain et un chien.
   (b) On ne peut pas être à la fois masculin et féminin, sauf à être non binaire.
   (c) Tout homme qui a une sœur est un frère
   (d) La mère d'un frère a au moins 2 enfants.

a. $Humain \sqcap chien \sqsubseteq \bot$

b. $Masculin \sqcap Feminin \sqsubseteq NonBinaire$ (possible dans $\mathcal{FL}^-$)

$\Updownarrow$

$Masculin \sqcap Feminin \sqcap \neg NonBinaire \sqsubseteq \bot$

3. Représenter les concepts `MereDeFilles` (mère qui n'a que des enfants filles), `GrandMere` et `FilleUnique` à partir des concepts déjà existants.

$MereDeFille \equiv Mere \sqcap \forall aEnfant.Femme$

$\equiv Femme \sqcap \exists aEnfant.Femme \sqcap \forall aEnfant.Femme$