

Méthodes et outils de l'IA et de la RO (LU3IN025)

Cours 4 : Cas particuliers et manipulabilité

Nawal Benabbou

Licence Informatique - Sorbonne Université

2021-2022



Mariages avec listes de préférences incomplètes

Que faire lorsque certains individus préfèrent être seuls plutôt qu'être mariés avec certaines personnes ?

Données : listes de préférence incomplètes

Supposons que chaque personne fournit une liste ordonnée sur les personnes de l'autre sexe qu'elle juge acceptable.

Définition : mariage acceptable

Un mariage est dit "acceptable" si toutes les personnes qui sont mariées le sont avec quelqu'un jugé comme acceptable.

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Que faire lorsque certains individus préfèrent être seuls plutôt qu'être mariés avec certaines personnes ?

Données : listes de préférence incomplètes

Supposons que chaque personne fournit une liste ordonnée sur les personnes de l'autre sexe qu'elle juge acceptable.

Définition : mariage acceptable

Un mariage est dit "acceptable" si toutes les personnes qui sont mariées le sont avec quelqu'un jugé comme acceptable.

Question 1 :

Existe-t-il toujours un mariage parfait acceptable ?

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Que faire lorsque certains individus préfèrent être seuls plutôt qu'être mariés avec certaines personnes ?

Données : listes de préférence incomplètes

Supposons que chaque personne fournit une liste ordonnée sur les personnes de l'autre sexe qu'elle juge acceptable.

Définition : mariage acceptable

Un mariage est dit "acceptable" si toutes les personnes qui sont mariées le sont avec quelqu'un jugé comme acceptable.

Question 1 :

Existe-t-il toujours un mariage parfait acceptable ? Non. Contre-exemple :

Préférences des hommes :

	1	2
Yohan	Bea	
Zach	Bea	

Préférences des femmes :

	1	2
Amy	Yohan	Zach
Bea	Zach	

Y et Z considère uniquement B comme acceptable. Avec qui mettre A ?

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Question 2 :

Considérons une instance du problème de mariage stable telle qu'il existe un mariage parfait acceptable. Existe-t-il forcément un mariage parfait acceptable et stable ?

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Question 2 :

Considérons une instance du problème de mariage stable telle qu'il existe un mariage parfait acceptable. Existe-t-il forcément un mariage parfait acceptable et stable ? Non. Contre-exemple :

Préférences des hommes :

	1	2
Yohan	Amy	
Zach	Amy	Bea

Préférences des femmes :

	1	2
Amy	Zach	Yohan
Bea	Zach	

(Y-A, Z-B) est un mariage parfait acceptable (mais pas stable). Pour cette instance, seul le mariage (Z-A) est acceptable et stable.

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Question 2 :

Considérons une instance du problème de mariage stable telle qu'il existe un mariage parfait acceptable. Existe-t-il forcément un mariage parfait acceptable et stable ? Non. Contre-exemple :

Préférences des hommes :

	1	2
Yohan	Amy	
Zach	Amy	Bea

Préférences des femmes :

	1	2
Amy	Zach	Yohan
Bea	Zach	

(Y-A, Z-B) est un mariage parfait acceptable (mais pas stable). Pour cette instance, seul le mariage (Z-A) est acceptable et stable.

Question 3 :

Existe-t-il toujours un mariage acceptable stable ?

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Question 2 :

Considérons une instance du problème de mariage stable telle qu'il existe un mariage parfait acceptable. Existe-t-il forcément un mariage parfait acceptable et stable ? Non. Contre-exemple :

Préférences des hommes :

	1	2
Yohan	Amy	
Zach	Amy	Bea

Préférences des femmes :

	1	2
Amy	Zach	Yohan
Bea	Zach	

(Y-A, Z-B) est un mariage parfait acceptable (mais pas stable). Pour cette instance, seul le mariage (Z-A) est acceptable et stable.

Question 3 :

Existe-t-il toujours un mariage acceptable stable ? Oui. Il suffit d'adapter l'algorithme de Gale-Shapley de la manière suivante :

- Une femme rejette un homme si elle le juge non acceptable.
- Si un homme est célibataire après avoir proposé à toutes les femmes qu'il juge acceptables, alors il ne fait plus de proposition.

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Comme dans le cas de listes complètes, on peut montrer que cette adaptation de l'algorithme de Gale-Shapley retourne toujours le même mariage acceptable stable, celui qui est "homme-optimal".

Question 4 :

Les personnes en couple sont les mêmes dans tous les mariages acceptables stables. VRAI ou FAUX ?

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Comme dans le cas de listes complètes, on peut montrer que cette adaptation de l'algorithme de Gale-Shapley retourne toujours le même mariage acceptable stable, celui qui est "homme-optimal".

Question 4 :

Les personnes en couple sont les mêmes dans tous les mariages acceptables stables. VRAI ou FAUX ? VRAI.

Preuve : Considérons une instance avec deux mariages acceptables stables M et M' . Supposons qu'il existe une paire (h_1-f_1) dans M telle que h_1 est célibataire dans M' . Dans le mariage M' , pour que la paire (h_1-f_1) ne soit pas instable, il faut que la femme f_1 soit mariée avec un homme h_2 qu'elle préfère à h_1 . Par conséquent, dans le mariage M , pour que la paire (h_2-f_1) ne soit pas instable, il faut que l'homme h_2 soit marié avec une femme f_2 qu'il préfère à f_1 . En itérant le raisonnement sur la paire (h_2-f_2) , on va arriver à une contradiction puisque le nombre personnes est fini. Remarque : on peut faire un raisonnement similaire en commençant avec une femme célibataire.

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Comme dans le cas de listes complètes, on peut montrer que cette adaptation de l'algorithme de Gale-Shapley retourne toujours le même mariage acceptable stable, celui qui est "homme-optimal".

Question 4 :

Les personnes en couple sont les mêmes dans tous les mariages acceptables stables. VRAI ou FAUX ? VRAI.

Preuve : Considérons une instance avec deux mariages acceptables stables M et M' . Supposons qu'il existe une paire (h_1-f_1) dans M telle que h_1 est célibataire dans M' . Dans le mariage M' , pour que la paire (h_1-f_1) ne soit pas instable, il faut que la femme f_1 soit mariée avec un homme h_2 qu'elle préfère à h_1 . Par conséquent, dans le mariage M , pour que la paire (h_2-f_1) ne soit pas instable, il faut que l'homme h_2 soit marié avec une femme f_2 qu'il préfère à f_1 . En itérant le raisonnement sur la paire (h_2-f_2) , on va arriver à une contradiction puisque le nombre personnes est fini. Remarque : on peut faire un raisonnement similaire en commençant avec une femme célibataire.

Question 5 :

Il existe toujours un unique mariage acceptable stable. VRAI ou FAUX ?

Mariages avec listes de préférences incomplètes

Comme dans le cas de listes complètes, on peut montrer que cette adaptation de l'algorithme de Gale-Shapley retourne toujours le même mariage acceptable stable, celui qui est "homme-optimal".

Question 4 :

Les personnes en couple sont les mêmes dans tous les mariages acceptables stables. VRAI ou FAUX ? VRAI.

Preuve : Considérons une instance avec deux mariages acceptables stables M et M' . Supposons qu'il existe une paire (h_1-f_1) dans M telle que h_1 est célibataire dans M' . Dans le mariage M' , pour que la paire (h_1-f_1) ne soit pas instable, il faut que la femme f_1 soit mariée avec un homme h_2 qu'elle préfère à h_1 . Par conséquent, dans le mariage M , pour que la paire (h_2-f_1) ne soit pas instable, il faut que l'homme h_2 soit marié avec une femme f_2 qu'il préfère à f_1 . En itérant le raisonnement sur la paire (h_2-f_2) , on va arriver à une contradiction puisque le nombre personnes est fini. Remarque : on peut faire un raisonnement similaire en commençant avec une femme célibataire.

Question 5 :

Il existe toujours un unique mariage acceptable stable. VRAI ou FAUX ? Faux. Reprendre le contre-exemple du cours 1. Il fonctionne ici puisque c'est un cas particulier où tous les individus considèrent tous les autres comme acceptables.

Nombre d'hommes \neq Nombre de femmes

Question 6 :

Reprendre les questions 3, 4 et 5 dans le cas où le nombre d'hommes n'est pas égal au nombre de femmes.

Nombre d'hommes \neq Nombre de femmes

Question 6 :

Reprendre les questions 3, 4 et 5 dans le cas où le nombre d'hommes n'est pas égal au nombre de femmes.

Réponse :

Les réponses sont les mêmes. On se ramène au cas précédent de la manière suivante : si on a n_1 hommes et n_2 femmes, avec $n_1 > n_2$, on rajoute $n_1 - n_2$ femmes fictives avec des listes vides (et/ou on ne les ajoute pas dans les listes des hommes). Dans le cas où $n_1 < n_2$, on ajoute des hommes fictifs de manière symétrique.

Nombre d'hommes \neq Nombre de femmes

Question 6 :

Reprendre les questions 3, 4 et 5 dans le cas où le nombre d'hommes n'est pas égal au nombre de femmes.

Réponse :

Les réponses sont les mêmes. On se ramène au cas précédent de la manière suivante : si on a n_1 hommes et n_2 femmes, avec $n_1 > n_2$, on rajoute $n_1 - n_2$ femmes fictives avec des listes vides (et/ou on ne les ajoute pas dans les listes des hommes). Dans le cas où $n_1 < n_2$, on ajoute des hommes fictifs de manière symétrique.

Pour le problème des hôpitaux et des internes :

De la même manière, on peut traiter le cas où il y a plus/moins de places dans les hôpitaux que d'internes. Dans une affectation stable, ce seront toujours les mêmes internes affectés et les mêmes hôpitaux remplis.

Un individu peut-il avoir intérêt à mentir dans l'algorithme de Gale-Shapley ?

Définition : Algorithme/procédure à véracité garantie (non manipulable)

Un algorithme est dit “à véracité garantie” s’il n’existe pas de situation où un agent à intérêt à mentir sur ses données, même en connaissant les données des autres personnes. Formellement, un algorithme est dit “à véracité garantie” si et seulement si, pour tout ensemble de m agents, dont les vraies données sont respectivement (d_1^*, \dots, d_m^*) , il n’existe aucune paire agent-données (i, d_i) telle que l’agent i préfère la solution retournée par l’algorithme avec $(d_1^*, \dots, d_{i-1}^*, d_i, d_{i+1}^*, \dots, d_m^*)$ à la solution retournée avec les vraies données $(d_1^*, \dots, d_i^*, \dots, d_m^*)$.

Un exemple : véracité garantie et élection présidentielle

Question :

On considère le mécanisme d'élection à la présidence de la république française. Ce mécanisme est-il à véracité garantie ?

Un exemple : véracité garantie et élection présidentielle

Question :

On considère le mécanisme d'élection à la présidence de la république française. Ce mécanisme est-il à véracité garantie ? NON. Au second tour, il n'y a que deux candidats, donc on a évidemment envie de voter pour son candidat préféré. Par contre, au premier tour, il y a ce que l'on appelle le vote utile.

Exemple 1 : vos préférences sont $A > B > \dots > E > F$. Les sondages disent qu'il y a de fortes chances d'avoir "E face à F" au 2ème tour. De plus, B est en 3ème position dans les sondages, alors que A est dernier. Dans ce cas, vous pouvez avoir envie de voter pour B au lieu de A, pour essayer d'éviter le pire.

Un exemple : véracité garantie et élection présidentielle

Question :

On considère le mécanisme d'élection à la présidence de la république française. Ce mécanisme est-il à véracité garantie ? NON. Au second tour, il n'y a que deux candidats, donc on a évidemment envie de voter pour son candidat préféré. Par contre, au premier tour, il y a ce que l'on appelle le vote utile.

Exemple 1 : vos préférences sont $A > B > \dots > E > F$. Les sondages disent qu'il y a de fortes chances d'avoir "E face à F" au 2ème tour. De plus, B est en 3ème position dans les sondages, alors que A est dernier. Dans ce cas, vous pouvez avoir envie de voter pour B au lieu de A, pour essayer d'éviter le pire.

Exemple 2 : supposons maintenant que A est en tête dans les sondages, et que B et F sont au coude à coude pour la 2ème position. Dans ce cas, vous pouvez avoir envie de voter B au lieu de A pour éviter le pire au 2ème tour. Mais, si les sondages vous informent aussi que A perdrait face à B au 2ème tour, alors que A gagnerait face à F, vous pouvez avoir envie de voter pour F au 1er tour.

Un exemple : véracité garantie et élection présidentielle

Question :

On considère le mécanisme d'élection à la présidence de la république française. Ce mécanisme est-il à véracité garantie ? NON. Au second tour, il n'y a que deux candidats, donc on a évidemment envie de voter pour son candidat préféré. Par contre, au premier tour, il y a ce que l'on appelle le vote utile.

Exemple 1 : vos préférences sont $A > B > \dots > E > F$. Les sondages disent qu'il y a de fortes chances d'avoir "E face à F" au 2ème tour. De plus, B est en 3ème position dans les sondages, alors que A est dernier. Dans ce cas, vous pouvez avoir envie de voter pour B au lieu de A, pour essayer d'éviter le pire.

Exemple 2 : supposons maintenant que A est en tête dans les sondages, et que B et F sont au coude à coude pour la 2ème position. Dans ce cas, vous pouvez avoir envie de voter B au lieu de A pour éviter le pire au 2ème tour. Mais, si les sondages vous informent aussi que A perdrait face à B au 2ème tour, alors que A gagnerait face à F, vous pouvez avoir envie de voter pour F au 1er tour.

Pouvez-vous proposer un règle électorale qui ne soit pas manipulable ?

Un exemple : véracité garantie et élection présidentielle

Question :

On considère le mécanisme d'élection à la présidence de la république française. Ce mécanisme est-il à véracité garantie ? NON. Au second tour, il n'y a que deux candidats, donc on a évidemment envie de voter pour son candidat préféré. Par contre, au premier tour, il y a ce que l'on appelle le vote utile.

Exemple 1 : vos préférences sont $A > B > \dots > E > F$. Les sondages disent qu'il y a de fortes chances d'avoir "E face à F" au 2ème tour. De plus, B est en 3ème position dans les sondages, alors que A est dernier. Dans ce cas, vous pouvez avoir envie de voter pour B au lieu de A, pour essayer d'éviter le pire.

Exemple 2 : supposons maintenant que A est en tête dans les sondages, et que B et F sont au coude à coude pour la 2ème position. Dans ce cas, vous pouvez avoir envie de voter B au lieu de A pour éviter le pire au 2ème tour. Mais, si les sondages vous informent aussi que A perdrait face à B au 2ème tour, alors que A gagnerait face à F, vous pouvez avoir envie de voter pour F au 1er tour.

Pouvez-vous proposer un règle électorale qui ne soit pas manipulable ?

Théorème [Gibbard-Satterthwaite] (pour le cas avec au moins 3 candidats)

Considérons une règle de vote qui assure que chaque candidat peut être élu. Si la règle de vote est non-manipulable, alors c'est forcément une dictature.

Véracité et Mariage Stable

Question :

Est-ce que l'algorithme de Gale-Shapley est à véracité garantie ?

Véracité et Mariage Stable

Question :

Est-ce que l'algorithme de Gale-Shapley est à véracité garantie ? Non.

Vraies préférences des hommes :

	1	2	3
Xavier	Bea	Amy	Claire
Yohan	Amy	Bea	Claire
Zach	Amy	Bea	Claire

Vraies préférences des femmes :

	1	2	3
Amy	Xavier	Zach	Yohan
Bea	Zach	Xavier	Yohan
Claire	Xavier	Yohan	Zach

Dans ce problème, il n'existe que deux mariages stables :

- le mariage homme-optimal : $H\text{-OPT} = (X-B, Y-C, Z-A)$,
- et le mariage femme-optimal : $F\text{-OPT} = (X-A, Y-C, Z-B)$.

Si l'algorithme retourne le mariage homme-optimal, alors en transmettant :

Amy : Xavier Yohan Zach

Amy améliore sa situation puisque $F\text{-OPT}$ devient l'unique mariage stable.

Si l'algorithme retourne le mariage femme-optimal, alors en transmettant :

Xavier : Bea Claire Amy

Xavier améliore sa situation puisque $H\text{-OPT}$ devient l'unique mariage stable.

Véracité et Mariage Stable

Théorème [Roth 1982]

Pour le problème de mariage stable, il n'existe pas d'algorithme de recherche de mariage stable qui est à véracité garantie.

Véracité et Mariage Stable

Théorème [Roth 1982]

Pour le problème de mariage stable, il n'existe pas d'algorithme de recherche de mariage stable qui est à véracité garantie.

Théorème [Roth 1982]

L'algorithme de Gale-Shapley en faveur des hommes est tel qu'aucun homme n'a intérêt à mentir sur ses préférences (véracité garantie "côté homme"). De même, quand ce sont les femmes qui font les propositions, l'algorithme est à véracité garantie "côté femme".

Véracité et Mariage Stable

Théorème [Roth 1982]

Pour le problème de mariage stable, il n'existe pas d'algorithme de recherche de mariage stable qui est à véracité garantie.

Théorème [Roth 1982]

L'algorithme de Gale-Shapley en faveur des hommes est tel qu'aucun homme n'a intérêt à mentir sur ses préférences (véracité garantie "côté homme"). De même, quand ce sont les femmes qui font les propositions, l'algorithme est à véracité garantie "côté femme".

Remarque

Un résultat pas si négatif pour l'algorithme de Gale-Shapley car :

- La véracité garantie sur un seul côté est suffisant quand l'autre côté n'est pas stratégique. Par exemple, quand on affecte des tâches à des agents, les tâches ne vont pas se plaindre.
- La manipulation reste un exercice difficile, notamment quand le nombre de personnes impliquées est très grand.
- Comment manipuler sans connaître les données des autres ?

Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié un problème très particulier (les mariages), pour illustrer des approches et des domaines qui vont bien au-delà de ce problème.

UEs d'aide à la décision dans le master ANDROIDE

Étude de différents problèmes :

- Décision multicritère et procédures de vote (MADMC),
- Décision dans l'incertain (MADI),
- Théorie des jeux (DJ, AOTJ).

UEs d'optimisation dans le master ANDROIDE

Étude de méthodes de résolution :

- Graphes et programmation linéaire (MOGPL),
- Autres outils algorithmiques et complexité (RP, COMPLEXE, AOTJ, MAOA).