Rappel

K : $\vdash \Box(F \to G) \to (\Box F \to \Box G)$

T : $\vdash \Box F \to F$

4. $\vdash \Box F \to \Box\Box F$.

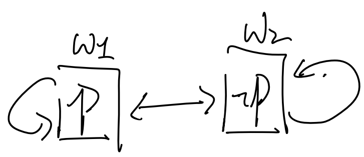
5. $\vdash \neg\Box F \to \Box\neg\Box F$.

Exercice 1 (Savoir que, savoir si, croire possible que...)

On rappelle ici que "savoir si p" équivaut à savoir p ou savoir $\neg p$, tandis que "croire possible p" équiva à ne pas savoir que $\neg p$. Montrez formellement que les énoncés suivants sont vrais :

- ne pas savoir si p, c'est croire possible que p soit vrai et croire possible que p ne soit pas vrai ;
- savoir que je ne sais pas p est équivalent à ne pas savoir (que) p.

$K^{sw} p = Kp \vee K\neg p$.



$$\left.\begin{array}{l} w_1 \not\models Kp \\ w_1 \not\models K\neg p \end{array}\right\} \; w_1 \not\models K^{sw} p$$

1)

ne pas savoir si p : $\neg(Kp \vee K\neg p) = F_1$.

croire possible que p et croire possible que $\neg p$.

$F_2 : \neg K \neg p \wedge \neg K \neg\neg p$

$F_1 = \neg K p \wedge \neg K \neg p = F_2$ par commutativé de $\neg$

2)

$F_1 : K \neg K p$

$F_2 \quad \neg K p$

$\vdash K \neg K p \to \neg K p$ par axiome (T)

$\vdash \neg K p \to K \neg K p$ (5).

Donc $\vdash F$

Exercice 2 (Connaître les résultats de l'élection)

Formaliser en logique épistémique les énoncés suivants :

- Charlotte sait que Asma ou Ben connaissent le résultat de l'élection ;
- Asma croit possible que Charlotte sache que Ben connait le résultat de l'élection ;
- Ben sait qu'Asma sait qu'il ne connait pas le résultat ;
- Ben sait que si Charlotte a écouté la radio ou a appelé Asma, elle connait le résultat.

e : résultat élection.

r : écoute radio

a : Charlotte Asma.

1)

$K_C(K_A e \wedge K_B e)$

2)

$\neg K_A \neg K_C K_B e$

3)

$K_B K_A \neg K_B e$

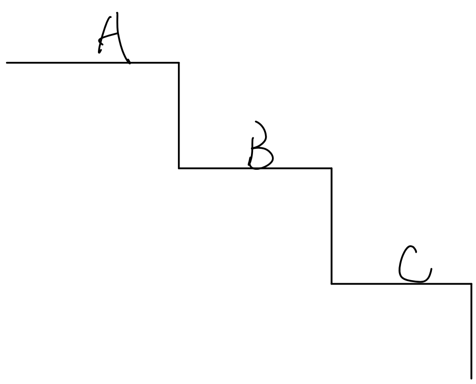
4)

$K_B((r \vee a) \to K_C e)$

Exercice 4 (Trois femmes debout (sur un escalier))

On considère la situation suivante. Trois femmes sont sur différentes marches d'un escalier : A, sur la plus haute ; B, sur la moyenne ; et C, sur la plus basse ; de telle façon que A voit le sommet de la tête de B et C, que B voit celui de C, et que C ne voit rien. Une quatrième femme passe devant elles et leur dit que l'une d'elles a un papillon sur la tête.

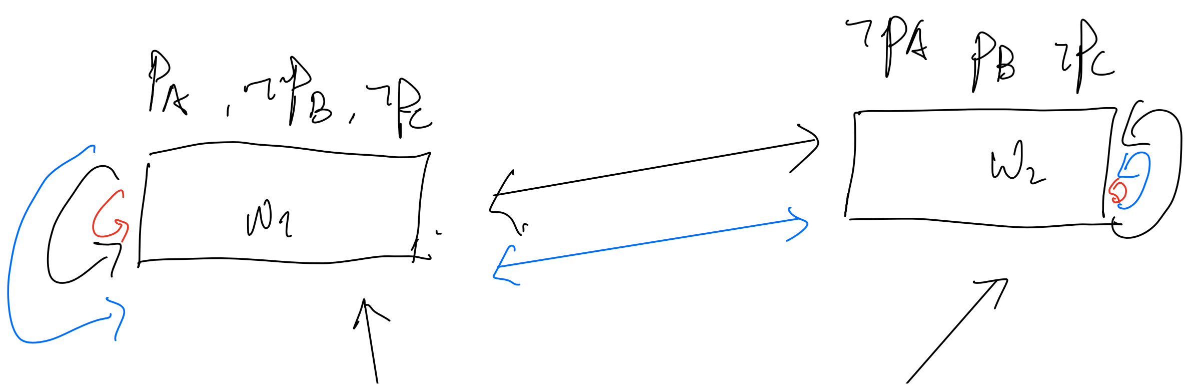
- Modéliser cette situation par une structure de Kripke ;
- Que faut-il vérifier pour montrer que A peut toujours savoir si elle a le papillon sur la tête ?
- Même question pour montrer que C ne peut jamais savoir si elle a le papillon sur la tête ?

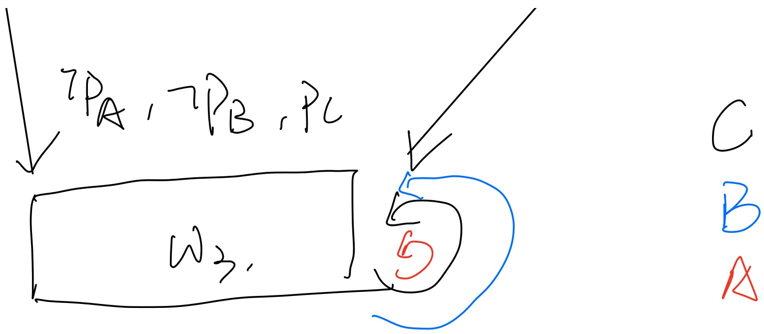


P_A : A a le papillon.

P_B : B ______

P : C ______





C 不知道 蝴蝶在谁头上.
其它两种情况 indistingable.

<u>2)</u> Pour A.

$$M \overset{?}{\models} K_A p_A \vee K_A \neg p_A$$

$M, w_1 \models K_A p_A$

$R_A(w_1) = \{w_1\}$.

(<u>GoP</u>

$M, w_1 \not\models K_B p_A$

$R_B(w_1) = \{w_1, w_2\}$)

Donc $w_1 \models K_A p_A \vee K_A \neg p_A$.

$M, w_2 \models K_A \neg p_A$ (seulement lui-même)

Donc $w_2 \models K_A p_A \vee K_A \neg p_A$

$M, w_3 \models K_A \neg p_B$

Donc ________.

$M, w \models F$

ssi $M, w \not\models \neg F$.

3] Pour c.

$M \stackrel{?}{\models} \neg(K_c p_a \vee K_c \neg p_a) \equiv \neg K_c p_a \wedge \neg K_c \neg p_a$

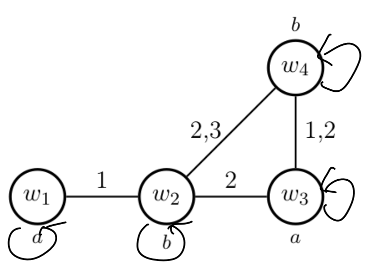
$$\begin{cases} M, w_1 \not\models K_c p_a . \\ M, w_1 \not\models K_c \neg p_a \end{cases}$$

et pareil pour w_2

pareil pour w_3

Exercice 3 (Exemple sur une structure de Kripke)

On considère la structure de Kripke suivante (la relation est supposée symétrique et réflexive, la relation est donc non dirigée, et les arcs de réflexivité non spécifiés) : $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ et $R_1 = \{(w_1, w_2), (w_3, w_4)\}$, $R_2 = \{(w_2, w_4), (w_3, w_4), (w_2, w_3)\}$, et $R_3 = \{(w_2, w_4)\}$. Enfin $I(a) = \{w_1, w_3\}$, $I(b) = \{w_2, w_4\}$.



1. Les relations d'accessibilité des agents 1, 2 et 3 constituent-elles des relations d'équivalence ?
2. Exprimez en logique épistémique les affirmations suivantes. Sont-elles vraies ?
   a) dans le monde w_1, l'agent 1 ne sait pas que l'agent 2 sait que a ;
   b) il existe un monde dans lequel l'agent 2 sait que l'agent 1 sait que a ;
   c) l'agent 2 sait que l'agent 3 sait b ;
   d) dans le monde w_1, l'agent 1 ne sait pas si l'agent 2 sait si a.

1] équivalence : symétrique, réfléxique, transitive.

$w_2 R w_3$, $w_3 R w_4$, $w_4 R w_2$

2)

a) $M, w_1 \models \neg K_1 K_2 a$

$w_1 R_1 w_2$ et $w_2 \models \neg K_2 a$.

car $w_2 \models w_2$ et $w_2 \not\models a$.

b)

Mq il existe w

$M, w \models K_2 K_1 a$.

$M \models \neg K_2 K_1 a$.

car $w_1 R_2 w_2$ et $w_2 \models \neg K_1 a$.

car $w_2 R_1 w_2$ et $w_2 \not\models a$

et $M, w_2 \models \neg K_2 K_1 a$.

car $w_2 R_2 w_1$ et $w_1 \models \neg K_1 a$.

car $w_1 R w_1$ et $w_1 \not\models a$.

et ~

Pour mq $w \models \neg K F$

mq $w R w'$ et $w' \models \neg F$

MAIS ⚠ $\neg K F \neq K \neg F$.

c)

$M \not\models K_2 K_3 b$

car $M, w_1 \not\models K_2 K_3 b$

car $w_1 R_2 w_1$ et $w_1 \not\models K_3 b$

car $w_1 R_3 w_2$ et $w_2 \not\models b$

d)

$M, w_1 \models \neg(K_1(K_2 a \vee K_2 \neg a)) \vee K_1 \neg(K_2 a \vee K_2 \neg a))$

Exercice 5 (Le jeu des as et des huits) [tiré de "Reasoning About Knowledge", Fagin, Halpern, Moses, Vardi]

On considère un jeu de cartes dont les règles sont les suivantes : on prend les quatre as et les quatre huits d'un jeu. Trois joueurs se voient distribuer deux cartes chacun, qu'ils ne regardent pas et placent sur leur front, de manière à ce que les deux autres joueurs puissent les voir.

1. Enumérez les différents mondes possibles.
2. Représentez le modèle de Kripke correspondant à cette situation.
3. Identifiez les mondes où un joueur peut directement identifier les cartes qu'il possède simplement en voyant les cartes des autres.

1)

J_1 J_2 J_3.

t_1	AA	AB	AB
t_2	AA	AA	BB
t_3	AA	AB	BB