1 Modélisation et résolution graphique

Exercice 1 (Optimisation du fret)

On souhaite tirer le meilleur rendement d'un avion transporteur qui rapporte 3000€ par tonne de fret transportée dans la cabine et 1000€ par tonne de fret transportée dans la soute, sachant que la capacité de la soute est de 20 tonnes et celle de la cabine est de 10 tonnes, que pour des raisons de sécurité, la charge maximale que peut accepter l'avion est de 28 tonnes et enfin que, pour des raisons d'équilibrage, le fret de la cabine amputé d'une tonne ne doit pas excéder les deux tiers du fret de la soute.

云货桶 船舱 删除 2/3

Q 1.1 Modéliser ce problème comme un programme linéaire.

Q 1.2 Effectuer une résolution graphique et en déduire le rendement optimal par vol.

Q 1.3 Quelle augmentation de rendement peut-on obtenir si l'on tolère deux tonnes de plus en cabine ?

Exercice 2 (De l'importance du gradient)

On s'intéresse aux valeurs de x_1 et x_2 qui minimiseront la fonction économique $f_n(x_1, x_2) = nx_1 + 20x_2$ sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 & \geq & 10 \\ 10x_1 + x_2 & \geq & 10 \\ x_2 & \geq & 1 \end{cases}$$

Q 2.1 Résoudre le problème graphiquement pour $n = 10$

Q 2.2 Déterminer l'ensemble N des valeurs de n pour lesquelles la solution trouvée en 1) est optimale pour f_n. $n \in [0, 20]$

Q 2.3 Donnez la ou les solution(s) optimale(s) en fonction de n.

Exercice 3 (Un whisky sur mesure)

Il existe trois types de Scotch whisky : les "Malt", qui ne contiennent que de l'orge, les "Grain", qui sont produits à partir de plusieurs céréales, et les "Blend", qui sont une combinaison de Malt et de Grain whisky.

大麦

Les Blend sont avantageux économiquement par rapport aux Malt car la fabrication du Grain whisky est moins onéreuse que celle des Malt, et le mélange des deux permet d'obtenir des breuvages de meilleure qualité que les Grain. En principe, pour faire un blend, on mélange entre quinze et cinquante Malt différents et trois ou quatre Grain. En ce qui nous concerne, nous ne mélangerons que les 4 Malt et les 2 Grain du tableau qui suit.

昂贵的 饮料

Malt Blend mélange

15–50 Malt types

3 ou 4 Grain types

D1 NAWAL.BENABBON@lip6.fr.

Ex.1

1-1

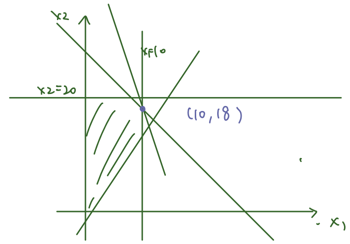
	cabine	soute
coût	3000	1000
capacité	10	20
	x_1	x_2

28

1-2

$$\begin{cases} x_1 \leq 10 \\ x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 28 \\ x_1 - 1 \leq \frac{2}{3} x_2 \end{cases}$$

$x_2 \geq \frac{3}{2} x_1 - \frac{3}{2}$



$3000x_1 + 1000x_2 = c$

$x_2 = -3x_1 + \frac{c}{1000}$

$c = 3000 \times 10 + 18 \times 1000 = 48000$

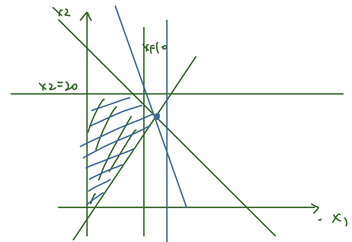
1.3.

$$\begin{cases} x_2 \geq \frac{3}{2} x_1 - \frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 \leq 28 \end{cases}$$

$\frac{5}{2} x_1 - \frac{3}{2} \leq 28$

$5x_1 \leq 59$

$$\begin{cases} x_1 = 11.8 \\ x_2 = 16.2 \end{cases}$$

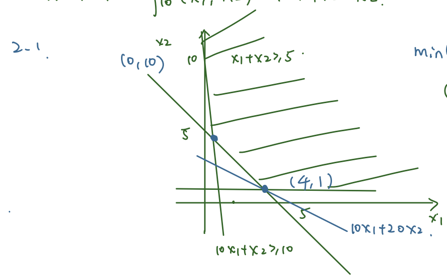


$c = 3000 \times 11.8 + 1000 \times 16.2 = 51600$ €

Ex2

$n = 10$. $f_{10}(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2$.

2-1.



$\min(f_{10}(x_1, x_2)) = 10 \times 4 + 1 \times 20 = 60$.

$(4, 1)$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$10x_1 + 5 - x_1 = 10$

$9x_1 = 5$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{9} \\ x_2 = \frac{40}{9} \end{cases}$$

2.2. $N \in (0, 20]$

2.3. $n \in (-\infty, 0)$. problème non borné

$n = 0$. $\min(f_n(x_1, x_2)) = 20$, tous les point ayant $(x_1, 4)$, $x_1 \geq 1$.

$n \in (0, 20]$. $\min(f_n(x_1, x_2)) = 4n + 20$. $(4, 1)$.

$n \in (20, 200]$ $\min(f_n(x_1, x_2)) = \frac{5}{9}n + \frac{800}{9}$. $\left(\frac{5}{9}, \frac{40}{9}\right)$

$n \in (200, +\infty)$. problème non borné

Ex 3.

W.	I.	S.	G.	prix.
x_{11}	4.	1	4.	150.
x_{12}	2.	1	3.	125
x_{13}	3.	2.	1	112.
x_{14}	1	3.	3.	135
x_{21}	2	1	2.	55
x_{22}	1	3.	3	93.

$I \in [1{,}7, 2{,}3]$

$S \in [1{,}7, 2{,}3]$ $3{,}5$

$G \in [3{,}2, 3{,}8]$

$$X = \sum_{\substack{i \in [1,2] \\ j \in [1,4]}} w_{ij} x_{ij}.$$

$\vec{v} = (4, 2, 3, 1, 2, 1)$.

$\vec{s} = (1, 1, 2, 3, 1, 3)$

$\vec{g} = (4, 3, 1, 3, 2, 3)$.

$c^t = \vec{p} = (150, 125, 112, 135, 55, 93)$

$$\boxed{\min. \sum_{\substack{i \in [1,2] \\ j \in [1,4]}} p_{ij} w_{ij}.}$$

$$\begin{cases} \sum_{j \in [1,4]} w_{1,j} \geq 0{,}7. \\ \sum_{\substack{i \in [1,2] \\ j \in [1,4]}} w_{ij} = 1. \\ I = \sum_{\substack{i \in [1,2] \\ j \in [1,4]}} v_{ij} w_{ij} \in [1{,}7, 2{,}3] \\ S = \sum_{\substack{i \in [1,2] \\ j \in [1,4]}} s_{ij} w_{ij} \in [1{,}7, 2{,}3]. \\ G = \sum_{\substack{i \in [1,2] \\ j \in [1,4]}} g_{ij} w_{ij} \in [3{,}2, 3{,}8] \end{cases}$$

$w_{ij} \in [0, 1]$ $\forall i \in [1, 2]$,

Whisky	intensité	sensation	goût 4	prix unitaire
Laphroaig	fort 4	frais 1	tourbé 泥煤味	150
Bunnahabhain	moyen 2	frais 1	sucré 3	125
Ardberg	piquant 3	épais 2	salé 1	112
Glenfiddich	doux 1	sec 3	sucré 3	135
Grain I	moyen 2	frais 1	amer 苦的 2	55
Grain II	doux 1	sec 3	sucré 3	93

Le problème consiste à doser correctement les différents whiskies, de manière à ce que les qualités subtiles des différents Malt ne disparaissent pas, et que le prix de revient soit le meilleur possible. Pour cela on souhaite déterminer les proportions des différents whiskies pour obtenir un blend moyen, épais, à mi-chemin entre sucré et tourbé, et qui soit au meilleur prix de revient. On conviendra qu'un blend qui se respecte contient au moins 70% de Malt. De plus, on supposera que l'intensité, la sensation et le goût peuvent être représentés par les échelles numériques suivantes :

Intensité :	doux = 1	moyen = 2	piquant = 3	fort = 4
Sensation :	frais = 1	épais = 2	sec = 3	
Goût :	salé = 1	amer = 2	sucré = 3	tourbé = 4

et que l'on peut effectuer des opérations arithmétiques sur ces échelles : par exemple, mélanger 1 unité d'un whisky d'intensité 2 avec 1 unité d'un whisky d'intensité 3 donne 2 unités d'un whisky d'intensité 2,5. En outre, comme l'évaluation des whiskies est assez subjective, on admettra que les échelles données ci-dessus ont une tolérance de 0,3 ; autrement dit, tous les whiskies d'intensité comprises entre 1,7 et 2,3 sont moyens.

Q 3.1 Après avoir défini les variables de décision pertinentes, formaliser ce problème comme un programme linéaire.

Exercice 4 (Optimisation d'une production de jus de pomme)

Une fabrique artisanale normande produit deux jus de pommes P_1 et P_2. Chaque jour la production totale de jus de pomme doit être d'au moins 50 litres mais peut aller au delà. Le jus de pomme P_1 doit être filtré au rythme de 3 litres par minute, par la machine M_1 puis par la machine M_2. Le jus de pomme P_2 doit quant à lui être filtré plus lentement, au rythme de 2 litres par minute, d'abord par la machine M_2 puis par la machine M_3. Le producteur n'a qu'un accès limité à ces machines qu'il partage avec d'autres. Chaque jour il dispose de 15 minutes sur la machine M_1, de 25 minutes sur la machine M_2 et de 15 minutes sur la machine M_3. Sachant que le bénéfice lié à la vente d'un litre de produit P_2 rapporte deux euros et que celui lié à la vente d'un litre de produit P_1 rapporte un euro, on souhaite trouver le plan de production journalier optimal.

Q 4.1 Modéliser le problème par un programme linéaire.

Q 4.2 Représenter graphiquement le polyèdre des contraintes et faire une résolution géométrique du problème.

Q 4.3 Soit $k > 0$ le bénéfice lié à la vente d'un litre de produit P_2. Expliquer comment varie la solution du problème en fonction de k, le bénéfice lié au produit P_1 restant de 1 euro par litre.

Exercice 5 (Affec

On considère dans
Internet peut renc
Supposons qu'on
sateurs finaux et
correspondent au
utilisateurs A et
de bande passant
de bande passant
Chaque connexio
une combinaison
unité via le long

Q 5.1 Ecrire
le revenu du

Q 5.2 Supp
moins deux

Q 5.3 On r
mial en la
Est-ce que
tation opti

Exercice

On consid

On cherc

Q 6.1 I
somme

Q 6.2
maxim

换成2个问题，须同时满足：

$$\begin{cases} \min. z = c^t w. \\ Aw \geq b_1. \\ w \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \max \ z = c^t w. \\ -Aw \leq b_2. \\ w \geq 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4,2,3,1,2,1 \\ 1,1,2,3,1,3 \\ 4,3,1,3,2,3 \\ 1,1,1,0,0,0 \end{pmatrix} \qquad w^t = (w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{21}, w_{22}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1,7 \\ 1,7 \\ 3,2 \\ 0,7 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -2,3 \\ -2,3 \\ -3,8 \\ -0,7 \end{pmatrix}$$

Ex 4. $w_1 + w_2 \geq 50.$

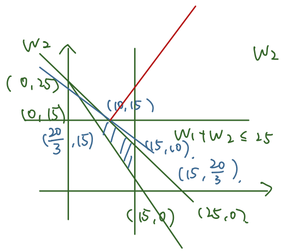
	P_1	P_2.
m_1		15.
m_2		25
M_3.		15
produit	3L	2L.
vente	1€/L	2€/L.

w_1：做 P_1 用时.
w_2：做 P_2 用时.

4.1.

$$\begin{cases} w_1 \leq 15. \\ w_2 \leq 15 \\ w_1 + w_2 \leq 25 \\ 3w_1 + 2w_2 \geq 50. \\ \max (3w_1 + 4w_2) \end{cases}$$

4.2.



$w_2 \geq -\frac{3}{2} w_1 + 25.$

$= -10.$

$\frac{20}{3}$

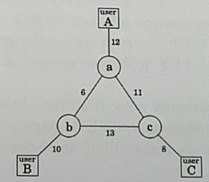
$3w_1 + 4w_2 = c.$

$w_2 = \frac{c}{4} - \frac{3}{4} w_1.$

$\max (3w_1 + 4w_2) = 90$
$(w_1, w_2) = (10, 15)$

Exercice 5 (Affectation optimale de bande passante)

On considère dans cet exercice une version miniaturisée du type de problème qu'un fournisseur d'accès Internet peut rencontrer.
Supposons qu'on gère le réseau représenté sur la figure ci-dessous, où A, B, C représentent les utilisateurs finaux et a, b, c des noeuds intermédaires de transit. Les valeurs indiquées sur les connexions correspondent aux bandes passantes disponibles. On a besoin d'établir trois connexions : entre les utilisateurs A et B, entre B et C, et entre A et C. Chaque connexion nécessite au moins deux unités de bande passante, mais peut se voir allouée davantage. La connexion A-B rapporte 3 Euros par unité de bande passante, et les connexions B-C et A-C rapportent 2 Euros et 4 Euros respectivement.
Chaque connexion peut être routée de deux façons, via un long chemin ou un court chemin, ou par une combinaison des deux : par exemple, deux unités de bande passante via le court chemin, et une unité via le long chemin.



Q 5.1 Ecrire un programme linéaire permettant de déterminer les routages permettant de maximiser le revenu du réseau.

Q 5.2 Supposons qu'on relâche la contrainte imposant que chaque connexion doit se voir allouée au moins deux unités de bande passante. Est-ce que l'optimum change ?

Q 5.3 On rappelle qu'un programme de PL en variables continues peut se résoudre en temps polynomial en la taille de l'instance par les méthodes des points intérieurs (hors programme de MOGPL). Est-ce que le programme linéaire proposé permet de conclure à la polynomialité du problème d'affectation optimale de bande passante ?

Exercice 6 (Linéarisations)

On considère les points (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, 7)$ du plan :

$$(1,3), (2,5), (3,7), (5,11), (7,14), (8,15), (10,19)$$

不是有线. sinon → linéaire.

On cherche une droite qui passe approximativement par ces points (les points ne sont pas alignés).

Q 6.1 Ecrire un programme linéaire qui détermine la droite d'équation $y = ax + b$ minimisant la somme des valeurs absolues des écarts :

$(1,3)$:
écart : $3 - (a \cdot 1 + b)$

$$\text{minimiser} \rightarrow \sum_{i=1}^{7} |y_i - ax_i - b|$$

pas linéaire

Q 6.2 Ecrire un programme linéaire qui détermine la droite d'équation $y = ax + b$ minimisant le maximum des valeurs absolues des écarts :

minimiser le max des valeurs absolues

max ← minimiser

4.3. $f = \max(3w_1 + 2k w_2)$.

$\in (-\infty, 0)$

$(w_1, w_2) = (\frac{20}{3}, 15)$

$f(w_1, w_2) = 20 + 30k$.

$= 0$

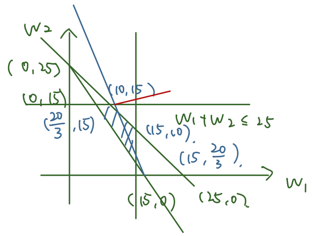
$w_1 = 15, \quad w_2 \in [\frac{20}{3}, 10]$

$f(w_1, w_2) = 45$.

$\in [0, 1)$

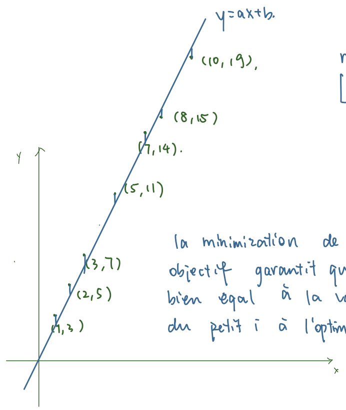
$(w_1, w_2) = (15, 10)$.

$f(w_1, w_2) = 45 + 20k$.



Ex 6.

6.1



$$\min \overbrace{|3-a-b|}^{e_1} + \overbrace{|5-2a-b|}^{e_2} + \cdots + \overbrace{|19-10a-b|}^{e_7}$$

$\hookrightarrow e_i = |y_i - a x_i - b|$.

$$\Rightarrow \min \sum_{i=1}^{7} e_i$$

$e_1 \geq 3-a-b$

$e_1 \geq -3+a+b$

$e_2 \geq 5-2a-b$

$e_2 \geq -5+2a+b$

$\vdots$

$e_7 \geq 19-10a-b$.

$e_7 \geq -19+10a+b$

$\forall i \in [\![1, 7]\!]\ e_i \geq 0$.

$a, b \in \mathbb{R}$.

la minimization de la fonction. objectif garantit que ei est bien egal à la valeur absolue du petit i à l'optimum.

$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$x^- = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\begin{cases} |x| = x^+ + x^- \\ x = x^+ - x^-. \end{cases}$

$\Rightarrow \min\ e_1^+ + e_1^- + \cdots + e_7^+ + e_7^-$.

$e_1^+ - e_1^- = 3-a-b$.

$e_2^+ - e_2^- = 5-2a-b$

$\vdots$

$e_7^+ - e_7^- = 19-10a-b$.

$e_1^+ \cdots e_7^+ \geq 0$

$e_1^- \cdots e_7^- \geq 0$. $\quad a, b \in \mathbb{R}$.

因为是 min. 所以 e_i^+, e_i^- 一定是一个 0, 一个绝对值.

Ici, aussi la minimisation permet de garantir que $e^+ + e^-$ correspond à la valeur absolue à l'optimum

$$\max_{i \in [\![1,7]\!]} |y_i - a x_i - b|$$

Exercice 7 (Harvard)

Dans une université Américaine, pour obtenir le premier semestre du master d'informatique de l'op-
tion recherche opérationnelle, un étudiant doit valider au moins 2 UEs (unités d'enseignement) de
mathématiques, au moins deux UEs de recherche opérationnelle et au moins 2 UEs d'informatique.
L'UE de *calcul* est considérée comme une pure UE de mathématiques et ne compte que pour l'exi-
gence portant sur le nombre d'UEs en mathématiques. De même l'UE de *programmation* est considérée
comme une pure UE d'informatique et ne compte que pour l'exigence sur le nombre d'UEs en informa-
tique. En revanche, certaines des UEs sont mixtes et peuvent être utilisées pour satisfaires plusieurs
exigences. Ainsi, l'UE *optimisation* compte à la fois comme une UE de mathématiques et comme une
UE de recherche opérationnelle, l'UE *structures de données* compte à la fois comme UE d'informatique
et de mathématiques. L'UE *statistiques* compte à la fois comme une UE de mathématiques et comme
une UE de recherche opérationnelle. L'UE de *simulation* compte à la fois comme UE de recherche
opérationnelle et d'informatique. Enfin l'UE *prévision* compte à la fois comme une UE de recherche
opérationnelle et de mathématiques.
Certains des cours figurent comme prérequis pour d'autres. Ainsi le cours dispensé dans l'UE *calcul*
est un prérequis pour suivre l'UE de *statistiques*; l'UE de programmation est un prérequis pour suivre
l'UE *simulation* ou l'UE *structures de données*; l'UE *statistiques* est un prérequis pour suivre l'UE
prévision.

Q 7.1 Formuler un programme mathématique en variables binaires qui permette de trouver le nombre minimal d'UEs que l'on doit suivre pour être en mesure d'obtenir le premier semestre de l'option recherche opérationnelle.

Exercice 8 (Sélection de représentants)

Considérons 6 personnes a, b, c, d, e, f, chacune d'entre elles étant membre d'au moins l'un des 5 comités suivants A, B, C, D, E. Plus précisément, les membres du comité A sont b et e, les membres du comité B sont b, d et e, les membres du comité C sont a, c, d, e et f, les membres du comité D sont b, d et e et les membres du comité E sont b et e. On souhaite savoir s'il est possible de désigner un représentant par comité de manière à ce que tous les comités aient désigné des personnes distinctes.

Q 8.1 Modéliser ce problème comme un programme linéaire en variables binaires.

Exercice 9 (Producteurs et consommateurs de blé)

Le blé est produit dans les régions Centre et Poitou-Charentes et consommé dans le Limousin et en
Auvergne. Le Centre produit 740 milliers de tonnes par an et le Poitou-Charentes 305 milliers de
tonnes. Dans le même temps, le Limousin consomme 540 milliers de tonnes et l'Auvergne 505 milliers
de tonnes. L'émission de CO_2 liée au transport d'une tonne de blé du Centre vers le Limousin est de
26 kg, de 34 kg du Centre vers l'Auvergne, de 20kg du Poitou-Charentes vers le Limousin, et de 38 kg
du Poitou-Charentes vers l'Auvergne.

Q 9.1 Ecrire un programme linéaire pour déterminer la quantité de blé (en tonnes et en fractions
de tonnes) à transporter de chaque région productrice vers chaque région consommatrice, de façon à
minimiser l'empreinte carbone.

Exercice 10 (Ordonna

Soit un projet qui se déc
optimal des tâches du pr

On précise que les tâch
que celle-ci ne commer

Q 10.1 Ecrire un pro
ordonnancement opti
précédence et conduis

6.2. $\min \max_{i \in [\![1,7]\!]} e_i$

| $\min \max \{x_1+3x_2,\ 4x_1-2x_2\}$

$x_1+3x_2 \geq 4x_1-2x_2$

$-3x_1 \geq -5x_2$

$x_1 \leq \frac{5}{3}x_2 \Rightarrow x_1+3x_2$

$x_i > \frac{5}{3}x_2 \Rightarrow 4x_1-2x_2$

$\min (x_1+3x_2) \mid x_1 \leq \frac{5}{3}x_2$

$\min (4x_1-2x_2) \mid x_1 > \frac{5}{3}x_2$

$x_2 < \frac{3}{5}x_1$

$\min \frac{14}{3}x_2$ $\qquad \frac{20-6}{3}$

$\min \frac{14}{3}$

6.2. $\min \left(\max_{i \in [\![1,7]\!]} (e_i)\right)$

$\Rightarrow \min z$

$z \geq e_i \quad \forall i \in [\![1,7]\!]$

$e_1 \geq 3-a-b$

$e_1 \geq -3+a+b$

$e_2 \geq 5-2a-b$

$e_2 \geq -5+2a+b$

$\vdots$

$e_7 \geq 19-10a-b$

$e_7 \geq -19+10a+b$

$\forall i \in [\![1,7]\!]\ e_i \geq 0$. $z \geq 0$

$a, b \in \mathbb{R}$.

| $\min z$

$z \geq e_i^+ + e_i^- \quad \forall i \in [\![1,7]\!]$

$e_1^+ - e_1^- = 3-a-b$

$e_2^+ - e_2^- = 5-2a-b$

$\vdots$

$e_7^+ - e_7^- = 19-10a-b$

$e_1^+ \cdots e_7^+ \geq 0$

$e_1^- \cdots e_7^- \geq 0$ $\qquad a, b \in \mathbb{R}$

$z \geq 0$.

Ex 7.

	M.	I	RO.		
Calcul.	1	0	0	✓	w_1
★ programmation.	0	1.	0	✓	w_2
optimisation.	1	0	1		w_3
structure. données	1	1	0.		w_4
Statistique.	1	0	1.	✓	w_5
Simulation.	0.	1	1	✓	w_6
prévision.	1	0	1		w_7

calcul. M.
programmation. I.
statistique. M RO.
simulation. I RO.

$m = (1,0,1,1,1,0,1)$

$i = (0,1,0,1,0,1,0)$

$ro = (0,0,1,0,1,1,1)$.

$\min \sum_{i=1}^{7} w_i$

$m^t w \geq 2$.

$i^t w \geq 2$.

$ro^t w \geq 2$.

$w_2 \geq w_4$

$w_1 \geq w_5$

$w_2 \geq w_6$

$w_5 \geq w_7$

$w_i \geq 0 \quad \forall i \in [\![1,7]\!]$.

Ex 8.

A:

		1 A	2 B	3 C	4 D	5 E
1	a	0 ($w_{1,1}$)	0	1	0	0
2	b	1 ($w_{2,1}$)	1 ($w_{2,2}$)	0	1	1
3	c	0	0	1	0	0
4	d	0	1 ($w_{4,2}$)	1	1	0
5	e	1 ($w_{5,1}$)	1 ($w_{5,2}$)	1	1	1
6	f	0	0	1	0	0

$\max \sum w_{ij}$

$(0,1,0,0,1,0)(w_{1,1} \cdots w_{6,1}) = 1$

$M^t w \in (1,1,1,1,1)$. 每个社团有人.

$0 \leq \sum_{i=1}^{6} w_{i,j} \leq 1$ 一个人

$\forall i,j \in [\![1,6]\!] \times [\![1,5]\!]$ $w_{i,j} \in \{0,1\}$.

Ex 9.

		C	P	
A	L	26 w_{11}	20 w_{12}	540
	A	34 w_{21}	38 w_{22}	505
		740	305	

min

$A = \begin{pmatrix} 26 & 20 \\ 34 & 38 \end{pmatrix}$

Exercice 10 (Ordonnancement)

Soit un projet qui se décompose en sept tâches numérotées de a à g. On s'intéresse à l'ordonnancement optimal des tâches du projet sur la base des données suivantes :

Tâches	a	b	c	d	e	f	g
Durée	6	3	6	2	4	3	1
Précédentes	–	–	–	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,d\}$	$\{c,e,f\}$

On précise que les tâches figurant comme précédentes d'une tâche donnée doivent être achevées avant que celle-ci ne commence.

Q 10.1 Ecrire un programme linéaire qui permette de déterminer un ordonnancement optimal. Un ordonnancement optimal est un calendrier de réalisation des tâches qui respecte les contraintes de précédence et conduise à une date finale du projet le plus tôt possible.

2 Méthode algébrique, tableaux

Exercice 11 (Un problème de production)

Une firme fabrique deux produits A et B à l'aide des matières premières I, II et III. Le fonctionnement de l'usine est représenté par le tableau suivant :

	A	B
I	2	1
II	1	2
III	0	1

Cela signifie que pour produire 1 unité du produit A on utilise 2 unités de I et 1 unité de II et que pour produire 1 unité de B on utilise 1 unité de I, 2 unités de II et 1 unité de III. La direction de la firme dispose des matières premières I, II et III en quantités respectives 8, 7 et 3. Le profit dû à la fabrication d'une unité de produit A est égal à 4, de même le profit dû à la fabrication d'une unité de B est égal à 5. La tâche de la direction est de faire fonctionner cette usine de manière optimale, c'est-à-dire de rendre le profit maximum tout en respectant les contraintes de rareté sur les matières premières.

Q 11.1 Modéliser le problème comme un programme linéaire sous forme canonique, qu'on appellera (P).

Q 11.2 Après avoir représenté graphiquement le polygone convexe des solutions réalisables de (P), résoudre graphiquement le problème ainsi posé.
L'objectif des questions qui suivent est de résoudre le programme linéaire à l'aide de l'algorithme du simplexe.

Q 11.3 Mettre le programme (P) sous forme standard. Nous appellerons ce programme (P').

Q 11.4 Mettre en correspondance les sommets du polygone convexe associé au programme linéaire (P) avec les solutions réalisables du programme linéaire (P').

Q 11.5 On prend l'origine comme solution de base de départ. Le programme linéaire associé s'écrit :

$$\text{Max } 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} e_1 &= 8 - 2x_1 - x_2 \\ e_2 &= 7 - x_1 - 2x_2 \\ e_3 &= 3 - x_2 \\ x_1, x_2&, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Conformément à la procédure de passage d'un sommet réalisable à un sommet réalisable adjacent, il faut atteindre un sommet adjacent à l'origine en lequel la fonction objectif est améliorée. Deux cheminements sont possibles : l'un sur l'axe des abscisses, l'autre sur l'axe des ordonnées. Si on effectuait le changement de base sur l'axe des abscisses, x_1 entrerait dans la base, passant d'une valeur nulle à $x_1 = 4$ et e_1 sortirait de la base, passant de $e_1 = 8$ à $e_1 = 0$. Si on effectuait le changement de base sur l'axe des ordonnées, x_2 entrerait dans la base, passant d'une valeur nulle à $x_2 = 3$ et e_3 sortirait de la base, passant de $e_3 = 3$ à $e_3 = 0$. Conformément au critère de Dantzig, on préfère faire entrer x_2 dans la base car $5 > 4$. D'où la nouvelle configuration suivante :

variables hors base : $e_3 = 0$, $x_1 = 0$
variables de base : $x_2 = 3$, $e_1 = 5$, $e_2 = 1$

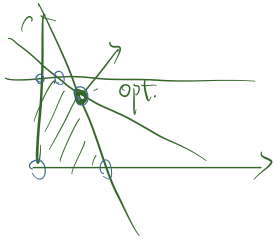
	A	B	
I	2	1	8
II	1	2	7
III	0	1	3
	4	5	

11.1

$$\max\ 4w_1+5w_2$$

$$\begin{cases} 2w_1+w_2\le 8 \\ w_1+2w_2\le 7 \\ w_2\le 3 \\ w_1, w_2\ge 0 \end{cases}$$

11.2



1.3.

$$\max\ 4w_1+5w_2$$

ombre d'intersection

$\frac{2}{5}) = 10 > 5$

arcequ'il existe des mauvais côté de la contrainte.

$$\begin{cases} 2w_1+w_2+e_1=8 \\ w_1+2w_2+e_2=7 \\ w_2+e_3=3 \end{cases}$$

$w_1, w_2, e_1, e_2, e_3\ge 0$

	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	2	1	1	0	0	8
e_2	1	2	0	1	0	7
e_3	0	$\boxed{1}$	0	0	1	3
f:	4	$\boxed{5}$	0	0	0	0

	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	2	0	1	0	-1	5
e_2	$\boxed{1}$	0	0	1	-2	1
w_2	0	1	0	0	1	3
f	$\boxed{4}$	0	0	0	-5	-15

消掉下面m数

$\max\ 4w_1+5w_2$

$w_2\le 4$

$$\begin{cases} e_1=8-2w_1-w_2 \\ e_2=7-w_1-2w_2 \quad w_2\le 3.5 \\ e_3=3-w_2 \quad w_2\le 3 \end{cases}$$

$w_2=3-e_3$

$w_2=3-e_3$

$\max\ 4w_1+15-3w_2$

$$\begin{cases} e_1=5-2w_1+e_3 \\ e_2=1-w_1+2e_3 \\ w_2=3-e_3 \end{cases}$$

	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	0	0	1	-2	$\boxed{3}$	3
w_1	1	0	0	1	-2	1
w_2	0	1	0	0	1	3
f	0	0	0	-4	3	-19

$e_1=3+2e_2-3e_3$

$w_1=1-e_2+2e_3$

$w_2=3-e_3$

$\max\ -4e_2+3e_3+19$

	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3	
e_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1
w_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	3
w_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
f	0	0	-1	-2	0	-22

$e_3=1-\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2$

$w_1=3-\frac{2}{3}e_1+\frac{1}{3}e$

$w_2=2+\frac{1}{3}e_1-\frac{2}{3}$

$(w_1, w_2, e_1, e_2, e_3)=(2.5, 3, 0, 3.5, 0)$

$\max\ 4w_1+5w_2=22$

	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	2	1	1	0	0	8
e_2	1	2	0	1	0	7
e_3	0	$\boxed{1}$	0	0	1	3
f:	4	$\boxed{5}$	0	0	0	0

	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	2	0	1	0	-1	5
e_2	$\boxed{1}$	0	0	1	-2	1
w_2	0	1	0	0	1	3
f	$\boxed{4}$	0	0	0	-5	-15

	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3		
e_1	0	0	1	-2	$\boxed{3}$	3	除以3
w_1	1	0	0	1	-2	1	
w_2	0	1	0	0	1	3	
f	0	0	0	-4	$\boxed{3}$	-19	

	w_1	w_2	e_1	e_2	e_3	
e_3	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	1
w_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3
w_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
f	0	0	-1	-2	0	-22

Poursuivre le déroulement de l'algorithme du simplexe, en réécrivant à chaque itération le programme (P') comme l'expression des variables de base en fonction des variables hors base. Vous interpréterez également chaque itération sur le graphique de la question 2.

Q 11.6 Résoudre à nouveau le problème (P'), cette fois-ci par la méthode des tableaux du simplexe.

Exercice 12 (Un exercice béton)

Une société fabrique du béton en vrac, prêt à l'emploi, qu'elle livre dans différents chantiers de la région parisienne. Le béton est fabriqué dans deux centrales à béton situées l'une à l'ouest et l'autre au nord de Paris. Dans le contexte actuel, il existe une demande quotidienne minimum de 1000 tonnes de béton qu'il faut satisfaire. Le chef de production cherche à déterminer le niveau respectif d'activité des deux centrales afin de minimiser le coût d'exploitation de la société. Les données techniques et les coûts correspondants sont donnés ci-dessous :

- une tonne de béton est un mélange de 400 litres d'eau (1ℓ = 1kg pour l'eau) et de 600 kg d'ingrédients solides (sables, gravier, ciment),
- les ingrédients solides sont acheminés par camion,
- les coûts directs de production donnés comprennent la main d'oeuvre,
- compte tenu des stocks et des transports, on ne peut recevoir, par jour, plus de 800 tonnes d'ingrédients solides sur l'ensemble des deux centrales
- la productivité est mesurée en temps de main d'oeuvre pour la fabrication d'une tonne de béton,
- on dispose quotidiennement d'un total de 107 heures de main d'oeuvre pouvant être réparties indifféremment sur les deux centrales,
- le coût d'exploitation est composé des coûts d'approvisionnement et des coûts de productions (on ne prend pas en compte les coûts de livraison du béton qui sont à la charge des clients),
- pour la centrale ouest (resp. nord), le coût d'approvisionnement est de 10 (resp. 20) euros par tonne d'ingrédients solides, le coût de production de 50 (resp. 30) euros par tonne de béton, le temps de main d'oeuvre nécessaire de 0,10 (resp. 0.11) heures par tonne fabriquée, la capacité maximale de production de 700 (resp. 900) tonnes par jour.

Q 12.1 Formuler un PL permettant de rechercher la politique de production optimale.

Q 12.2 Montrer qu'on peut omettre de considérer la contrainte liée aux quantités d'ingrédients solides disponibles, ainsi que la contrainte portant sur la capacité maximum de production de la centrale Nord.

Q 12.3 Présenter le problème de production optimale comme un problème de maximisation mis sous la forme standard. Montrer que la solution $x_1 = 700$ et $x_2 = 300$ correspond à une base réalisable de ce problème.

Q 12.4 Appliquer l'algorithme du simplexe à partir de la base trouvée à la question précédente et déterminer la solution optimale.

Q 12.5 En dehors de la contrainte liée à la satisfaction de la demande, quelle est la contrainte qui empêche l'amélioration de la fonction objectif ? Expliquer pourquoi en terme de limitation de ressource. Etudier comment une augmentation locale de cette ressource impacterait sur le coût global de la solution optimale. Déterminer alors quel est le manque sur cette ressource pour réduire le coût au maximum. Si ce manque était comblé, quelle serait alors la solution optimale et son coût ?

Exercice 13 (Calcul d'un tableau à partir d'une base, dégénérescences)

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rl} \text{Max } z = 6x_1 + 4x_2 & \\ -3x_1 + 2x_2 \le 4 & \\ 3x_1 + 2x_2 \le 16 & \\ x_1 \le 3 & \\ x_1, x_2 \ge 0 & \end{array}$$

$\begin{cases} x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases}$

Q 13.1 Si on note x_3, x_4, x_5 les variables d'écart, déterminer le tableau du simplexe obtenu pour la base $\{x_1, x_2, x_5\}$ (sans faire d'itérations préalables !) et en déduire que cette base est optimale. Représenter les contraintes sur un graphique. La solution optimale est-elle unique ? Comment cela se traduit sur le tableau du simplexe correspondant ?

Q 13.2 On ajoute au PL la contrainte $x_1 + 4x_2 \le 22$ et on prend comme objectif $z = x_1 + x_2$. Faire tourner l'algorithme du simplexe depuis la base $\{x_2, x_4, x_5, x_1\}$. Représenter les contraintes sur un graphique. Qu'observe-t-on ? Comment cela se traduit sur les tableaux du simplexe ?

Exercice 14 (Solutions optimales d'un programme linéaire)

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}_k$ suivant :

$$\max z = x_1 + kx_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

Q 14.1 Déterminer les bases réalisables associées au polyèdre des contraintes et les coordonnées des sommets associés.

Q 14.2 Discuter en fonction de k la ou les solutions optimales de $\mathcal{P}_k$

Exercice 15 (Systèmes d'équations linéaires)

Q 15.1 Donner une méthode permettant de prouver l'existence, et, si elle existe, de calculer une solution x *non négative*, c'est-à-dire satisfaisant $x \ge 0$, d'un système $Ax = b$ d'équations linéaires. On supposera que A est une matrice à p lignes et n colonnes avec $n > p$.

Q 15.2 Utiliser cette méthode pour trouver une solution *non négative* -si elle existe- aux systèmes ci-dessous. Expliciter *toutes* les solutions *non négatives* des deux systèmes.

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + 12x_3 = 10 \\ 10x_1 + 8x_2 + 20x_3 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2+x_3 &= 4 \\ 3x_1+2x_2 \quad +x_4 &= 16 \\ x_1 \quad +x_5 &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2 = 4-x_3 \\ 3x_1+2x_2 = 16-x_4 \\ x_1 \quad +x_5 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1-\frac{2}{3}x_2 = -\frac{4}{3}+\frac{1}{3}x_3 \\ 4x_2 = 20-x_3-x_4 \\ \frac{2}{3}x_2+x_5 = 3+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x_3 = \frac{13}{3}-\frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}+\frac{1}{3}x_3+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(20-x_3-x_4) \\ x_2 = \frac{1}{4}(20-x_3-x_4) \\ x_5 = \frac{13}{3}-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}(20-x_3-x_4) \end{cases}$$

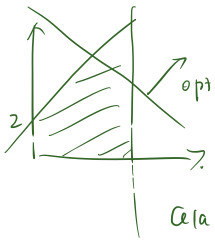
$$\begin{cases} x_1 = 2+\frac{1}{6}x_3-\frac{1}{6}x_4 \\ x_2 = 5-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4 \\ x_5 = 1-\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{6}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_1 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 2 \\ x_2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 5 \\ x_5 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 1 & 1 \\ f & 0 & 0 & \underline{\underline{0}} & -2 & 0 & -32 \end{array}$$

⚠ sur une face !

$$\max(6x_1+4x_2) = \underline{6}(2+\tfrac{1}{6}x_3-\tfrac{1}{6}x_4)+\underline{4}(5-\tfrac{1}{4}x_3-\tfrac{1}{4}x_4)$$
$$= 32-2x_4$$

les coefficients des variables hors base sont tous négatifs ou nuls dans la fonction objective, donc la base $\{x_1, x_2, x_5\}$ est optimale.



le gardien est perpendiculaire à une face de polyèdre : tous les solutions de cette face sont optimales.

Cela se traduit dans le tableau par une variable hors base avec son coefficient nulle. C'est le dégénérescence de première espèce

13.2.

$$\begin{cases} x_1 = 2+\frac{1}{6}x_3-\frac{1}{6}x_4 \\ x_2 = 5-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4 \\ x_5 = 1-\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{6}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2+x_3 &= 4 \\ 3x_1+2x_2 \quad +x_4 &= 16 \\ x_1 \quad +x_5 &= 3 \\ x_1 \quad +x_4 \quad +x_6 &= 22 \end{cases}$$

$$x_1+x_4 = 22-x_6$$

$$x_4 = 22-x_6-x_1$$

$$x_1 = 2+\frac{1}{6}x_3-\frac{1}{6}(22-x_6-x_1)$$

$$\frac{5}{6}x_1 = 2+\frac{1}{6}x_3-\frac{22}{6}+\frac{1}{6}x_6$$
$$= -\frac{10}{6}+\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{6}x_6$$

$$x_4 = 22-x_6-(-2+\tfrac{1}{5}x_3+\tfrac{1}{5}x_6)$$

$$x_4 = 24+\frac{1}{5}x_3-\frac{6}{5}x_6$$

$$x_2 = 2+\frac{1}{6}x_3-\frac{1}{6}(24+\tfrac{1}{5}x_3-\tfrac{6}{5}x_6)$$
$$= -2+\frac{2}{15}x_3+\frac{1}{5}x_6$$

$$x_5 = 1-\frac{1}{6}x_3+\frac{1}{6}(24+\tfrac{1}{5}x_3-\tfrac{6}{5}x_6)$$
$$= 5-\frac{2}{15}x_3-\frac{1}{5}x_6$$

$$\begin{cases} x_2 = -2+\frac{2}{15}x_3+\frac{1}{5}x_6 \\ x_4 = 24+\frac{1}{5}x_3-\frac{6}{5}x_6 \\ x_5 = 5-\frac{2}{15}x_3-\frac{1}{5}x_6 \\ x_1 = -2+\frac{1}{5}x_3+\frac{1}{5}x_6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\ \hline x_2 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & 0 & 0 & \frac{3}{14} & 5 \\ x_4 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & 1 & 0 & -\frac{6}{7} & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & 1 & -\frac{1}{7} & 1 \\ x_1 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 2 \\ & & & \frac{3}{14} & & & -\frac{5}{14} & -7 \end{array}$$

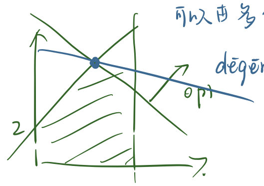
déjà sur l'optimum !

$(x_1, x_2) = (5, 2)$.

Ce point est caractérisé par plusieurs base !

$\frac{7}{2}$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	5
x_3	0	0	1	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	0
x_5	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	1
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	2.
f:	0	0	0	$-\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	-7.



可以由多个 base 组成

dégénérescence du type 2!

Sommet (2.5)

la base associée au 1er tableau est optimale car elle a la même valeur que celle du 2ème tableau (=7). Pourtant, dans le 1er tableau, le coefficient de x_3 dans la fonction objectif est strictement positif. C'est un effet de la dégénérescence de seconde espèce : chaque fois qu'une variable en base est nulle, on est dans la dégénérescence de 2nd espèce. la raison géométrique est qu'il passe par un des sommets un (ou plusieurs) hyperplans supplementaires

Exercice 14 (Solutions optimales d'un programme linéaire)

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}_k$ suivant :

$$\max z = x_1 + kx_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Q 14.1 Déterminer les bases réalisables associées au polyèdre des contraintes et les coordonnées des sommets associés.

Q 14.2 Discuter en fonction de k la ou les solutions optimales de $\mathcal{P}_k$

Exercice 15 (Systèmes d'équations linéaires)

Q 15.1 Donner une méthode permettant de prouver l'existence, et, si elle existe, de calculer une solution x *non négative*, c'est-à-dire satisfaisant $x \geq 0$, d'un système $Ax = b$ d'équations linéaires. On supposera que A est une matrice à p lignes et n colonnes avec $n > p$.

Q 15.2 Utiliser cette méthode pour trouver une solution *non négative* -si elle existe- aux systèmes ci-dessous. Expliciter *toutes* les solutions *non négatives* des deux systèmes.

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + 12x_3 = 10 \\ 10x_1 + 8x_2 + 20x_3 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

14.1 Choisir 2 variable parmi 3.

(x_1, x_2) prendre élément hors base $= 0$.

(x_2, x_3) vérifier si c'est positif

(x_1, x_3).

$x_3 = 0$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$

$x_2 = \frac{-1}{4} < 0$. pas réalisable.

$x_2 = 0$ $(x_1, x_3) = (4, 1)$. réalisable

$x_1 = 0$ $\begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_2 = -4 \end{cases}$ pas réalisable,

14.2. pour la base (x_1, x_3).

$2(1 + 4x_2) + kx_2 + 4 + 3x_2$.

x_2

$(k+11)x_2 + 6$

x_1

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ x_1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ x_3 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ f: & 0 & k+11 & 0 & -6 \end{array}$$

$\hookrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + 3x_2. \\ x_3 = x_1 + x_2 - 3 = 4 + 3x_2 + x_2 - 3 = 1 + 4x_2. \end{cases}$

$k \in [-\infty, -11[$. $(x_1, x_2, x_3) = (4, 0, 1)$ optimal.

$\max z = 6$. l'optimum unique.

or. $k = -11$. dégénérescence 1er espèce, infinité de sol. opt.

$\forall i \geq 0$. $(4, i, 1)$ sont sol. opt. avec $z = 6$.

$k \in]11, +\infty[$. pas de sol. opt., problème non borné.

3 Méthodes d'initialisation - Introduction à la dualité

Exercice 16 (Initialisation à l'aide de variables artificielles)

On souhaite résoudre le problème (P) suivant :

$$\begin{array}{rcl} \text{Max } 6x_1 + 5x_2 & & \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 90 \\ 3x_1 + x_2 & \geq & 60 \\ 3x_1 + 6x_2 & \geq & 180 \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq & 140 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Q 16.1 En introduisant des variables artificielles, formuler un programme linéaire (P') qui permette de trouver un sommet réalisable des contraintes de (P). En déduire la base associée à ce sommet et le tableau du simplexe associé.

Exercice 17 (Initialisation par la méthode des pénalités)

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}$ suivant :

$$\max z = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

On souhaite résoudre le problème $\mathcal{P}$ par la méthode du simplexe en initialisant l'algorithme par la méthode des pénalités. Soit $\mathcal{P}_M$ le problème avec objectif pénalisé associé à $\mathcal{P}$. Déterminer la ou les solutions de $\mathcal{P}_M$ et en déduire la ou les solutions de $\mathcal{P}$.

Exercice 18 (Intiialisation à partir d'une base réalisable)

Q 18.1 Mettre le PL suivant sous forme standard :

$$\begin{array}{c} \text{Max } z = x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_j \geq 0 \text{ pour } j = 1, 2 \end{array}$$

Q 18.2 Ecrire le tableau du simplexe correspondant à la base suivante :

Exercice 16 (Initialisation à l'aide de variables artificielles)

On souhaite résoudre le problème (P) suivant :

$\min\ 90v_1 - 60v_2 - 180v_3 + 140v_4$

$$\begin{array}{rcll} \text{Max } 6x_1 + 5x_2 & & & \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 90 & v_1 \\ -(3x_1 + x_2) & \geq & 60 & v_2 \\ -(3x_1 + 6x_2) & \geq & 180 & v_3 \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq & 140 & v_4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} 2v_1 - 3v_2 - 3v_3 + 2v_4 \leq 6 \\ v_1 - v_2 - 6v_3 + 2v_4 \leq 5 \end{cases}$$

Q 16.1 En introduisant des variables artificielles, formuler un programme linéaire (P') qui permette de trouver un sommet réalisable des contraintes de (P). En déduire la base associée à ce sommet et le tableau du simplexe associé.

Max. $6x_1 + 5x_2$

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 + e_1 & & = 90 \\ 3x_1 + x_2 \quad - e_2 & + b_1 & = 60 \\ 3x_1 + 6x_2 \quad - e_3 & + b_2 & = 180 \\ 2x_1 + 2x_2 \quad + e_4 & & = 140 \end{array}$$

$x_1, x_2, e_1, e_2, e_3, e_4, b_1, b_2 \geq 0$

$b_1 + b_2 = 240 - 6x_1 - 7x_2 + e_2 + e_3$

1°. 2 phase. min. $b_1 + b_2$.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_1	b_2	
e_1	2	1	1	0	0	0	0	0	90
b_1	3	1	0	-1	0	0	1	0	60
b_2	3	$\boxed{6}$	0	0	-1	0	0	1	180
e_4	2	2	0	0	0	1	0	0	140
f :	-6	$\boxed{-7}$	0	1	1	0	0	0	-240

-60

$\frac{12\cancel{6}\times 240}{\cancel{2}} = 18$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_1	b_2	
e_1	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	60
b_1	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	0	-1	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	30
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	30
e_4	2	0	0	0	$\frac{1}{6}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	80
	$-\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{7}{6}$	-30

$\frac{7}{2}$ $\frac{12}{2}$

30×7
-240

15×3

60 - 50x

30 × 2/5
6

Base réalisable :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_1	b_2	
e_1	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{15}$	42
x_1	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{15}$	12
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	24
e_4	0	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{30}$	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	56
	0	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$

sur l'optimum.

Phase 2 :

		x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
	e_1	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{15}$	0	42
$-6\times$	x_1	$\boxed{1}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	0	12
$-5\times$	x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	24
	e_4	0	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{30}$	1	56
	f :	$\boxed{6}$	5	0	0	0	0	0
	f :	0	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	-192

b_1, b_2 消不掉 ⇒ pas de sol. réalisable.

Exercice 17 (Initialisation par la méthode des pénalités)

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}$ suivant :

$$\max z = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

On souhaite résoudre le problème $\mathcal{P}$ par la méthode du simplexe en initialisant l'algorithme par la méthode des pénalités. Soit $\mathcal{P}_M$ le problème avec objectif pénalisé associé à $\mathcal{P}$. Déterminer la ou les solutions de $\mathcal{P}_M$ et en déduire la ou les solutions de $\mathcal{P}$.

$\max z = x_1 - x_2 - Mb.$

$x_1 + x_2 + e_1 = 3$
$x_1 - 3x_2 - e_2 + b = 4$

	x_1	x_2	e_1	e_2	b	
e_1	$\boxed{1}$	1	1	0	0	3
b	1	-3	0	-1	1	4
	$1+M$	$-3M-1$	M	$-M$	M	$4M$

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_1	
x_1	1	1	1	0	0	3
b	0	-4	-1	-1	$\boxed{1}$	1
f :	0	$-4M-2$	-1	$-M$	0	$-M-3$

max $z = 3$.

Q 18.1 Mettre le PL suivant sous forme standard :

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 - 4x_2 \leq 4$$
$$x_j \geq 0 \text{ pour } j = 1, 2$$

18.2 Ecrire le tableau du simplexe correspondant à la base suivante :

Max $z = x_1 + 2x_2$

$-x_1 + 2x_2 + e_1 = 4$
$-x_1 + x_2 + e_2 = 1$
$x_1 - 4x_2 + e_3 = 4$

$-1 - 2\times(-1)$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	-1	2	1	0	0	4
e_2	-1	$\boxed{1}$	0	1	0	1
e_3	1	-4	0	0	1	4
f :	1	$\boxed{2}$	0	0	0	0

$L_1 - 2L_1$

$1 - 4$ 0

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	$\boxed{1}$	0	1	-2	0	2
x_2	-1	1	0	1	0	1
e_3	-3	0	0	4	1	8
f:	$\boxed{3}$	0	0	-2	0	-2

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
x_1	1	0	1	-2	0	2
x_2	0	1	1	-1	0	3
e_3	0	0	$\boxed{3}$	-2	1	14
f:	0	0	-3	4	0	-8

question précédente.

Exercice 19 (Combinaisons linéaires de contraintes)

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } z = x_1 + 4x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Q 19.1 En utilisant la deuxième contrainte, montrer que 20 est une borne supérieure de la solution optimale.

Q 19.2 En utilisant une combinaison linéaire de la première et la troisième contrainte, montrer que 17 est une borne supérieure de la solution optimale.

Q 19.3 En utilisant une combinaison linéaire de la deuxième et la troisième contrainte, montrer que 13 est une borne supérieure de la solution optimale. Proposer une solution admissible de même valeur. Conclusion ?

Exercice 20 (Dual d'un programme linéaire)

Pour obtenir le dual d'un PL général (dans le cas d'une maximisation), on cherche une combi "légale" des contraintes du problème afin d'obtenir une nouvelle contrainte valide majorant t terme la fonction objectif du programme.

Q 20.1 Définir les multiplicateurs y_i légaux dans les cas suivants :

$$\begin{array}{llcll} i) & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n & \leq & b_i & \times y_i \\ ii) & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i & \times y_i \\ iii) & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n & \geq & b_i & \times y_i \end{array}$$

Q 20.2 Dans les cas suivants, définir les contraintes assurant que la combinaison des du problèmes conduit à une majoration terme à terme (c.à.d. $c_j x_j \leq (\sum_{i=1}^m y_i a_{ij})x_j$ $(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij})x_j)$ de la fonction objectif : $i)$ $x_j \geq 0$, $ii)$ $x_j \in \mathbb{R}$, $iii)$ $x_j \leq 0$.

Q 20.3 Ecrire le dual du programme linéaire suivant :

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } z = x_1 + 4x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Q 19.1 En utilisant la deuxième contrainte, montrer que 20 est une borne supérieure de la sol optimale.

Q 19.2 En utilisant une combinaison linéaire de la première et la troisième contrainte, montr 17 est une borne supérieure de la solution optimale.

19.3 En utilisant une combinaison linéaire de la deuxième et la troisième contrainte, mont est une borne supérieure de la solution optimale. Proposer une solution admissible de même nclusion ?

19.1 $\begin{cases} x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 + 4x_2 \leq 8x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{cases}$

19.2 $x_1 - x_2 + 5x_2 \leq 2 + 5 \times 3 = 17$

19.3 $\dfrac{2x_1 + x_2 + 7x_2}{2} \leq \dfrac{5 + 3 \times 7}{2} = 13$

$x_1 = 1$ $x_2 = 3$ réalisable

Exercice 20 (Dual d'un programme linéaire)

Pour obtenir le dual d'un PL général (dans le cas d'une maximisation), on cherche une combi "légale" des contraintes du problème afin d'obtenir une nouvelle contrainte valide majorant t terme la fonction objectif du programme.

Q 20.1 Définir les multiplicateurs y_i légaux dans les cas suivants :

$$\begin{array}{llcllc} i) & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n & \leq & b_i & \times y_i & y_i \geq 0 \\ ii) & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i & \times y_i & y_i \in \mathbb{R} \\ iii) & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n & \geq & b_i & \times y_i & y_i \leq 0 \end{array}$$

$-a_{i1}x_1 + \cdots - a_{in}x_n \leq -b$

Q 20.2 Dans les cas suivants, définir les contraintes assurant que la combinaison des du problèmes conduit à une majoration terme à terme (c.à.d. $c_j x_j \leq (\sum_{i=1}^m y_i a_{ij})x_j$ $(\sum_{i=1}^m y_i a_{ij})x_j)$ de la fonction objectif : $i)$ $x_j \geq 0$, $ii)$ $x_j \in \mathbb{R}$, $iii)$ $x_j \leq 0$.

Q 20.3 Ecrire le dual du programme linéaire suivant :

20.1 i) $y_i \geq 0$

ii) $y_i = 0$

iii) $y_i \leq 0$

20.2 i) min $\sum_i b_i y_i$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$

$y_j \geq 0$

ii) min $\sum b_i y_i$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

$y_i \in \mathbb{R}$

iii) min $\sum -b_j y_i$

$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i \leq c_j$

$y_i \leq 0$

20.3)

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 \\
&x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -5 \\
&-x_1 + 2x_2 - 2x_4 \leq 1 \\
&4x_1 - x_3 - x_4 = 4 \\
&2x_3 + 3x_4 \geq 5 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 5$

$4x_1 - x_3 - x_4 \leq 4$

$-4x_1 + x_3 + x_4 \leq 4$

$-2x_3 - 3x_4 \leq -5$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ -5 \end{matrix}$$

min. $5y_1 + y_2 + 4y_3 - 4y_4 - 5y_5$

$yA^t \geq c$

$-y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq 4$

$-y_1 + y_2 \geq 2$

$y_1 + y_2 \geq -2$

$-2y_1 - y_3 + y_4 - 2y_5 \leq 1$

$-2y_2 - y_3 + y_4 - 3y_5 \geq -3$

$y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 \\
&x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -5 \\
&-x_1 + 2x_2 - 2x_4 \leq 1 \\
&4x_1 - x_3 - x_4 = 4 \\
&2x_3 + 3x_4 \geq 5 \\
&x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Exercice 21 (Dites-le avec des fleurs)

Un restaurateur désire fleurir son restaurant ; il veut disposer d'au moins 140 roses, 160 lys et 48 renoncules. Il s'adresse pour cela au fleuriste "Aurore boréale" qui propose trois types de bouquets, intitulés Fanny, Automne et Espérance :

	roses	lys	renoncules	*prix*
Fanny	5	10	0	10
Automne	0	16	10	13
Espérance	10	0	8	14

Le restaurateur va donc essayer de minimiser le coût total de son achat.

Q 21.1 Poser le problème sous forme d'un programme linéaire (on supposera les bouquets fractionnables).

Q 21.2 Un fleuriste "Le Jardin d'Eden" se propose de s'installer à proximité et de proposer des fleurs à l'unité. Quel programme linéaire doit-on résoudre pour déterminer les prix auxquels le fleuriste doit vendre ses fleurs pour concurrencer "Aurore boréale" (auprès du restaurateur) tout en faisant un bénéfice maximal ? Que reconnaît-on ?

Q 21.3 Vérifier que (1, 0, 0) est une solution réalisable du dual. En déduire une borne inférieure sur la valeur optimale du primal.

Exercice 22 (Analyse post-optimale, relaxation de contraintes et dualité)

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire suivant :

$$\max z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$s.c. \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 40 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 30 \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Q 22.1 En vous servant des contraintes de $\mathcal{P}$, exprimer x_1, x_2 en fonction de x_3 puis z en fonction de x_3 et en déduire la solution optimale de $\mathcal{P}$.

Q 22.2 On considère une version modifiée de $\mathcal{P}$ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ dans laquelle la fonction objectif est désormais $\max z = 3x_1 - \lambda x_2 - x_3$ où λ est un réel positif ou nul. Pour quelles valeurs de λ la solution optimale de $\mathcal{P}$ est optimale pour $\mathcal{P}(\lambda)$.

Q 22.3 On revient au problème intial $\mathcal{P}$. Ecrire le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ et le résoudre graphiquement.

ce 21 (Dites-le avec des fleurs)

aurateur désire fleurir son restaurant ; il veut disposer d'au moins 140 roses, 160 lys et 48 les. Il s'adresse pour cela au fleuriste "Aurore boréale" qui propose trois types de bouquets, Fanny, Automne et Espérance :

		roses	lys	renoncules	*prix*
x_1	Fanny	5	10	0	10
x_2	Automne	0	16	10	13
x_3	Espérance	10	0	8	14
		140	160	48	

urateur va donc essayer de minimiser le coût total de son achat.

Poser le problème sous forme d'un programme linéaire (on supposera les bouquets fraction-

Un fleuriste "Le Jardin d'Eden" se propose de s'installer à proximité et de proposer des fleurs . Quel programme linéaire doit-on résoudre pour déterminer les prix auxquels le fleuriste doit es fleurs pour concurrencer "Aurore boréale" (auprès du restaurateur) tout en faisant un maximal ? Que reconnaît-on ?

Vérifier que (1, 0, 0) est une solution réalisable du dual. En déduire une borne inférieure sur optimale du primal.

$$\min \quad 10x_1 + 13x_2 + 14x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_3 \geq 140 \\ 10x_1 + 16x_2 \geq 160 \\ 10x_2 + 8x_3 \geq 48 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\Leftrightarrow$

$$\max \quad 140v_1 + 160v_2 + 48v_3$$

$$\begin{cases} 5v_1 + 10v_2 \leq 10 \\ 16v_2 + 10v_3 \leq 13 \\ 10v_1 + 8v_3 \leq 14 \end{cases}$$

	v_1	v_2	v_3	e_1	e_2	e_3	
e_1	5	10	0	1	0	0	10
e_2	0	$\boxed{16}$	10	0	1	0	13
e_3	10	0	8	0	0	1	14
f	140	$\boxed{160}$	48	0	0	0	0.

	v_1	v_2	v_3	e_1	e_2	e_3	
e_1	$\boxed{5}$	0	$-\frac{25}{4}$	1	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{15}{8}$
e_2	0	1	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{13}{16}$
e_3	10	0	8	0	0	1	14
$f =$	$\boxed{140}$	0	-52	0	-10	0	-130

	v_1	v_2	v_3	e_1	e_2	e_3	
e_1	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
e_2	0	1	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{13}{16}$
e_3	0	0	$\boxed{\frac{41}{2}}$	-2	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{41}{4}$
f	0	0.	103	-28	$\frac{5}{4}$	0	-235

(1, 0, 0) est réalisable.

Donc $\max \quad 140v_1 + 160v_2 + 48v_3 \leq 140$.

Donc $\min \quad 10x_1 + 13x_2 + 14x_3 \geq 140$

avec $Ax_1 = v_1 A^t$

$x_1 = A^{-1} v_1 A^t$.

$v_2 = v_3 = 0$ contraint 2 et 3 inactive. Donc $e_2 = e_3 = 0$

$$\begin{cases} 10x_1 + 16x_2 = 160 \\ 10x_2 + 8x_3 = 48 \end{cases}$$

Exercice 22 (Analyse post-optimale, relaxation de contraintes et dualité)

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire suivant :

$$\max z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$s.c. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Q 22.1 En vous servant des contraintes de $\mathcal{P}$, exprimer x_1, x_2 en fonction de x_3 puis z en fonction de x_3 et en déduire la solution optimale de $\mathcal{P}$.

Q 22.2 On considère une version modifiée de $\mathcal{P}$ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ dans laquelle la fonction objectif est désormais $\max z = 3x_1 - \lambda x_2 - x_3$ où λ est un réel positif ou nul. Pour quelles valeurs de λ la solution optimale de $\mathcal{P}$ est optimale pour $\mathcal{P}(\lambda)$.

Q 22.3 On revient au problème initial $\mathcal{P}$. Ecrire le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ et le résoudre graphiquement.

22.1 $x_1 = 30 - 3x_2 - x_3$

$120 - 12x_2 - 4x_3 + 2x_2 + x_3 = 40$

$10x_2 = 80 - 3x_3$

$x_2 = 8 - \frac{3}{10}x_3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_3 \leq \frac{80}{3}} \approx 27.$

$x_1 = 30 - 24 + \frac{9}{10}x_3 - x_3$

$x_1 = 6 - \frac{1}{10}x_3 \Rightarrow x_3 \leq 60$

$z = 3x_1 - x_2 - x_3 = 18 - \frac{3}{10}x_3 - 8 + \frac{3}{10}x_3 - x_3$

$= 10 - x_3, \quad x_3 \geq 0$

z dépend que de x_3. prenant $\{x_1, x_2\}$ la base. $x_3 = ($

max $z = 10$ parceque $x_3 \geq 0$, $(x_1, x_2, x_3) = (8, 6, 0)$. Sur l'optimum.

22.2. max. $z = 18 - \frac{3}{10}x_3 - 8\lambda + \frac{3}{10}\lambda x_3 - x_3$

$= (18 - 8\lambda) + \underline{\frac{3}{10}(\lambda - \frac{13}{3})x_3}$

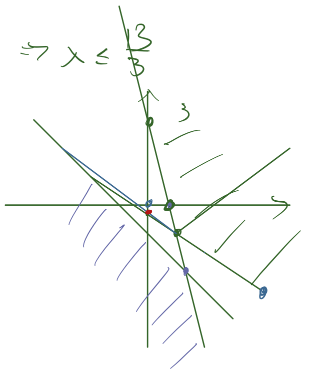
il faut $\lambda - \frac{13}{3} \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{13}{3}$

22.3. min. $40v_1 + 30v_2$

$$\begin{cases} 4v_1 + v_2 \leq 3 \\ 2v_1 + 3v_2 \leq -1 \\ v_1 + v_2 \leq -1 \end{cases}$$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.

$(1, -1)$ $z = 10$



$4x + 3y = c$

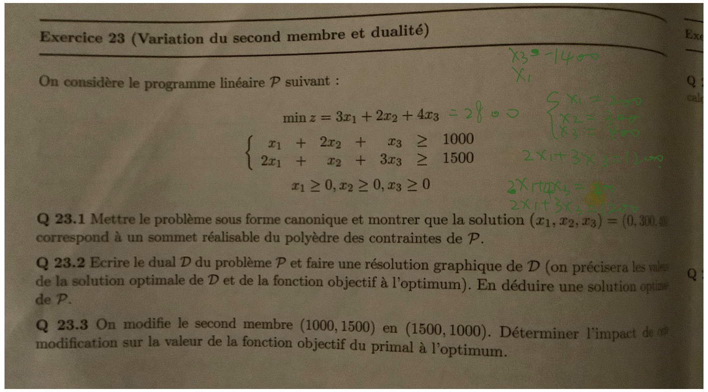
$y = -\frac{4}{3}x + \frac{c}{3}$

22.4 $v_1, v_2 \geq 0$

$(\frac{3}{4}, 0)$. $z = 30$

$$\begin{cases} 4v_1 + v_2 = 3 \\ v_1 + v_2 = -1 \end{cases}$$

$3v_1 = 4 \quad v_1 = \frac{4}{3}, \; v_2 = -\frac{7}{3}$



Exercice 23 (Variation du second membre et dualité)

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}$ suivant :

$$\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2800$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1000 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$x_3 = -1400$, x_1

$\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 300 \\ x_3 = 400 \end{cases}$

$2x_1 + 3x_3 = 1200$

$2x_1 + 3x_3 = 1200$

Q 23.1 Mettre le problème sous forme canonique et montrer que la solution $(x_1, x_2, x_3) = (0, 300, 4$ correspond à un sommet réalisable du polyèdre des contraintes de $\mathcal{P}$.

Q 23.2 Ecrire le dual $\mathcal{D}$ du problème $\mathcal{P}$ et faire une résolution graphique de $\mathcal{D}$ (on précisera les vale de la solution optimale de $\mathcal{D}$ et de la fonction objectif à l'optimum). En déduire une solution opti de $\mathcal{P}$.

Q 23.3 On modifie le second membre $(1000, 1500)$ en $(1500, 1000)$. Déterminer l'impact de modification sur la valeur de la fonction objectif du primal à l'optimum.

$\frac{27}{14} \times \frac{3}{2}$ $1.5 - \frac{12}{14}$ $-2x_2 + x_3 = 1000$

$2x_2 + 6x_3 = 3000$

$7x_3 = 4000$

$x_3 = \frac{4000}{7}$

$\frac{3}{7}$

$x_2 =$

Q 23.1 $\min z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} \cancel{x_1} - 2x_2 + x_3 - \cancel{e_1} + \cancel{b_1} = 1000 & v_1 \\ \cancel{2x_1} + x_2 + 3x_3 - \cancel{e_2} + \cancel{b_2} = 1500 & v_2 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, b_1, b_2 \geq 0$

$x_1 - 2x_2 = 1000 - x_3$

$2x_1 + 2x_2 = 3000 - 3x_3$

$5x_1 = 4000 - 7x_3$

$x_1 = \frac{4000}{5} - \frac{7}{5}x_3$

$(0, 300, 400)$

$$\boxed{\begin{array}{l} 600 + 400 = 1000 \\ 300 + 1200 = 1500 \end{array}}$$

contraintes vérifié. $\Rightarrow (b_1, b_2) = (0, 0)$

Q 23.2. max: $1000v_1 + 1500v_2 = 2200$ $(10, 15)$ $(2, 3)$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 \leq 3 & \times \\ 2v_1 + v_2 \leq 2 & \checkmark \\ v_1 + 3v_2 \leq 4 & \checkmark \end{cases}$$

$v_1, v_2 \geq 0$.

$\frac{9}{6}$

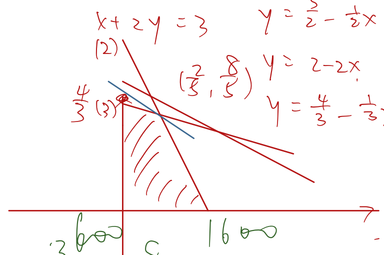
$x + 2y = 3$ $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$

$(\frac{2}{5}, \frac{8}{5})$ $y = 2 - 2x$

$y = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x$

$\frac{12}{6}$

$\frac{8}{6}$



$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2800 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1000 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 300 \\ x_3 = 400 \end{cases}$$

$\frac{2}{5} \times 1500 + \frac{8}{5} \times 1000 = 2200$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2200 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1500 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1000 \end{cases}$$

$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2000$

1200

$$\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 300 \\ x_3 = 400 \end{cases}$$

4 Applications de la dualité

Exercice 24 (Théorème des écarts complémentaires)

Q 24.1 Montrer, en utilisant le théorème des écarts complémentaires (et en effectuant le moins de calculs possible), que la solution $x^* = (1; 2; 0; 4; 0)$ est optimale pour le programme linéaire suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ s.c. & \left|\begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 & \leq & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_5 & \leq & 4 \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 & \leq & 3 \\ 3x_1 + 4x_3 + x_5 & \leq & 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_5 & \leq & -1 \\ -4x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 & \leq & -1 \\ x_i \geq 0, \; i = 1 \cdots 5 & & \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Q 24.2 On considère le programme linéaire suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} \min & z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.c. & \left|\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ 2x_1 - x_2 & \geq & 5 \\ x_1 + 4x_2 & \geq & 6 \\ x_i \geq 0, \; i = 1 \cdots 2 & & \end{array}\right. \end{array}\right.$$

La solution $x^* = (3; 1)$ est-elle optimale ? Et la solution $x^* = (\frac{26}{9}; \frac{7}{9})$?

Q 24.3 On considère le programme linéaire suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{ll} \max & z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ s.c. & \left|\begin{array}{lcl} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & \leq & 11 \\ x_i \geq 0, \; i = 1 \cdots 3 & & \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Résoudre le dual de (P). En déduire la solution optimale de (P) à l'aide du théorème des écarts complémentaires.

Exercice 25 (Analyse de sensibilité)

La compagnie *Topvitrage* fabrique des vitres de haute qualité, en particulier des fenêtres et des portes vitrées. Elle possède trois usines. Les cadres en aluminium et les accessoires sont produits dans l'usine 1, les cadres en bois sont produits dans l'usine 2, enfin l'usine 3 produit les vitres et assemble les produits.

En raison de la baisse du chiffre d'affaires, la direction de la compagnie a décidé de réorganiser la ligne de production. La production des produits déficitaires est arrêtée, libérant de la capacité de production pour lancer deux nouveaux produits à fort succès potentiel :

Produit 1 : Une porte vitrée de 240 cm avec cadre en aluminium

Produit 2 : Une fenêtre double vitrage de dimension 120 cm × 180 cm avec cadre en bois

Le produit 1 nécessite de mobiliser une partie de la capacité de production des usines 1 et 3, mais san

Exercice 24 (Théorème des écarts complémentaires)

Q 24.1 Montrer, en utilisant le théorème des écarts complémentaires (et en effectuant le moins de calculs possible), que la solution $x^* = (1; 2; 0; 4; 0)$ est optimale pour le programme linéaire suivant :

inactive.
active.
active.
active.
inactive

Q 24.2 On considère le programme linéaire suivant :

$=12$ v_1 v_2 v_3

$6+3=9$

3, 5, 6

$2v_1 + 2v_2 + v_3 \leq 2$

$v_1 - v_2 + 4v_3 \leq 3$

3−8

	v_1	v_2	v_3	e_1	e_2	
e_1	2	2	1	1	0	2
e_2	1	−1	$\boxed{4}$	0	1	3
f	3	5	$\boxed{6}$	0	0	0

e_1	2	2	1	1	0	2.
v_3	−7	−9	0	0	1	−5
f:	−9	−7	0	−6	0	−12.

$v_1 =$

La solution $x^* = (3; 1)$ est-elle optimale ? Et la solution $x^* = (\frac{26}{9}; \frac{7}{9})$?

Q 24.3 On considère le programme linéaire suivant :

Résoudre le dual de (P). En déduire la solution optimale de (P) à l'aide du théorème des écarts complémentaires.

Thm des écarts complémentaire.

x^* et y^* sont les solut° optimal du primal et dual respectivement.

1) x^*, y^* réalisable

2) $y^*_i = 0$ si $(Ax)_i \leq b_i$ $\qquad y_i^*(\sum_{j=1} a_{ij} x_j - b_i) = 0$

3) $x_j^* > 0$ si $(yA^t)_i = c_j$ $\qquad x_j^*(\sum_{i=1} a_{ij} y_i - c_j) = 0$

24.1. dual : $(1, 2, 0, 4, 0)$, Contraintes 2, 3, 4 active, 1, 5 inactive.

min. $4v_2 + 3v_3 + 2v_4 - v_5$

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 + 3v_3 \geq 1 \\ 2v_1 + v_4 - 4v_5 \geq 2. \\ \cancel{3v_1 + 2v_2 - v_4 - 3v_5 \geq 3}, \end{array}\right.$$

$v_1^* = v_5^* = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} v_3 = \frac{1}{3}. \\ v_4 = 2. \\ v_2 = 4 \end{array}\right.$$

$4V_1 + V_2 \qquad -V_5 \geq 4$

$\cancel{5V_1 + 3V_2 + V_3 + 2V_4 - 2V_5 \geq 5}$

$V_1 = 0,\ V_2 = 4\ V_3 = \frac{1}{3}\ V_4 = 4\ V_5$

mq. $x^* = (1, 2, 0, 4, 0)$ optimal.

x^* réalisable sur P.

$\Rightarrow$ trouver v^* la sol. opt de D.

$v^* = (0, 4, \frac{1}{3}, 4, 0)$ est solution réalisable sur dual.

or. $\begin{cases} v_i^* \sum (Ax_j - b)_i = 0 \\ x_j^* \sum (v_i A^t - c)_j = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^*, v^*$ sols. opt. de P et D.

24.2.

$2 \times 3 + 1 \geq 3.$

$2 \times 3 - 1 = 5$ active.

$3 + 4 \times 1 \geq 6.$

$x^* = (3, 1)$

$P = \begin{cases} \min\ z = 2x_1 + 3x_2. \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \quad \text{active} \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$

$D = \begin{cases} \max\ h = 3v_1 + 5v_2 + 6v_3 \\ \begin{cases} 2v_1 + 2v_2 + v_3 \leq 2 \\ v_1 - v_2 + 4v_3 \leq 3 \end{cases} \\ v_1, v_2, v_3 \geq 0 \end{cases}$

contraintes 1 et 3 inactive

$\Rightarrow v_1 = v_3 = 0.$

$x_1, x_2 > 0$, égalité.

$\begin{cases} 2v_2 = 2. \\ v_2 = 3. \end{cases}$ absurde !

$x^* = (3, 1)$

$z = 3 \times 2 + 3 \times 1 = 9.$

pas optimum

$2 - \frac{8}{9} = \frac{15}{9}$

$x^* = (\frac{26}{9}, \frac{7}{9})$ $z = 2 \times \frac{26}{9} + 3 \times \frac{7}{9} = \frac{52+21}{9} = \frac{73}{9}$

x_1

$v_1 = 0.$ $\qquad 2 - \frac{8}{7} = \frac{6}{7}$

$\frac{52}{9} + \frac{7}{9} = \frac{59}{9} \geq 3$

$\frac{52}{9} - \frac{7}{9} = \frac{45}{9} = 5.$ active

$\begin{cases} 2v_2 + v_3 = 2. \\ -v_2 + 4v_3 = 3 \end{cases}$

$\frac{26}{9} + \frac{28}{9} = \frac{54}{9} = 6.$ active.

$-2v_2 + 8v_3 = 6$

$v_1 = 0,\ v_2 = \frac{5}{9},\ v_3 = \frac{8}{9}.$

$\begin{cases} v_3 = \frac{8}{9} \\ v_2 = \frac{5}{9}. \end{cases}$ $\qquad v_3 = \frac{8}{9}$ $\qquad v_2 = \frac{18-8}{9}$

$h = 5 \times \frac{5}{9} + \frac{8}{9} \times 6 = \frac{73}{9}$

$z \neq h$?

24.3 $\quad \min.\ 11(v_1 + v_2 + v_3)$

$3(v_1 + v_2 + v_3) \geq 4$

$4(v_1 + v_2 + v_3) \geq 5$

$5(v_1 + v_2 + v_3) \geq 6.$

$v_1 + v_2 + v_3 \geq \frac{4}{3}$

$\min\ h = \frac{4}{3} \times 11 = \frac{44}{3}$

$(v_1, v_2, v_3) = (\frac{4}{3}, 0, 0).$

$\max.\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 11.$

$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11.$

(2)(3). inactive, $x_2 = x_3 = 0$

$x_1 = \frac{11}{3}$

$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{11}{3}, 0, 0)$

Donc $z = \frac{44}{3}$ sol opt.

[E]xercice 25 (Analyse de sensibilité)

[L]a compagnie *Topvitrage* fabrique des vitres de haute qualité, en particulier des fenêtres et des portes [vi]trées. Elle possède trois usines. Les cadres en aluminium et les accessoires sont produits dans l'usine [1,] les cadres en bois sont produits dans l'usine 2, enfin l'usine 3 produit les vitres et assemble les [pro]duits.

[En] raison de la baisse du chiffre d'affaires, la direction de la compagnie a décidé de réorganiser la ligne [de] production. La production des produits déficitaires est arrêtée, libérant de la capacité de production [pou]r lancer deux nouveaux produits à fort succès potentiel :

[Pro]duit 1 : Une porte vitrée de 240 cm avec cadre en aluminium

[Pro]duit 2 : Une fenêtre double vitrage de dimension 120 cm × 180 cm avec cadre en bois

[Le p]roduit 1 nécessite de mobiliser une partie de la capacité de production des usines 1 et 3, mais san[s]

Produit 1 $\qquad$ 2.

Al.

Bois.

Vitre.

faire appel à l'usine 2. Le produit 2 a besoin seulement des usines 2 et 3. Une étude de marché montre que la compagnie pourra vendre autant des deux produits qu'elle peut en produire. Néanmoins, du fait des capacités limitées de production, il reste à déterminer quel temps consacrer à la production des deux produits. Les données sont celles indiquées dans le tableau ci-dessous. La première ligne du tableau se lit comme suit : l'usine 1 a 4 heures de temps de production disponible par semaine, et la production d'un lot du produit 1 nécessite 1 heure.

	Prod. 1 (x_1)	*Prod. 2* (x_2)	*Temps dispo./sem.*	n
Usine 1	1 heure	0 heure	4 heures	2
Usine 2	0 heure	2 heures	12 heures	3
Usine 3	3 heures	2 heures	18 heures	1
Profit/lot	3000 euros	5000 euros		4000.

Q 25.1 Ecrire le programme linéaire à résoudre pour optimiser le profit.

Q 25.2 Faire une résolution graphique du problème. En déduire le tableau optimal du simplexe.

Q 25.3 La compagnie envisage maintenant la production d'un produit n, dont la production nécessiterait 2 heures/lot dans l'usine 1, 3 heures/lot dans l'usine 2 et 1 heure/lot dans l'usine 3, et rapporterait un bénéfice de 4000 euros par lot. Est-ce intéressant financièrement ?

Exercice 26 (Fonction paramétrique et dualité)

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère le programme linéaire $\mathcal{P}(\lambda)$ défini par :

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2\lambda \\ x_1 - x_2 \geq -3\lambda \\ -4x_1 + x_2 \geq -8\lambda \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Q 26.1 Mettre $\mathcal{P}(1)$ sous forme standard avec un second membre positif. En déduire que mettre toutes les variables d'écart en base ne correspond pas à une solution réalisable.

Q 26.2 Utiliser la méthode en deux phases (après ajout éventuel d'une ou plusieurs variables artificielles là où c'est utile) pour la résolution de $\mathcal{P}(1)$; on utilisera la méthode des tableaux pour effectuer toute itération de l'algorithme du simplexe. Vérifier ainsi que la solution optimale de $\mathcal{P}(1)$ est $x^* = (0, 1)$.

Q 26.3 En utilisant la forme initiale de $\mathcal{P}(\lambda)$ (celle avec les inégalités), écrire le problème dual $\mathcal{D}(\lambda)$ de $\mathcal{P}(\lambda)$, puis résoudre $\mathcal{D}(1)$ en vous servant du théorème des écarts complémentaires.

Q 26.4 Etudier comment évolue la solution optimale de $\mathcal{P}(\lambda)$ et sa valeur en fonction de λ pour $\lambda \geq 1$.

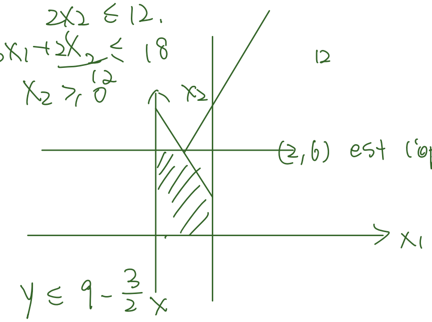
Exercice 27 (Jeu de Morra)

Dans cet exercice, on cherche à identifier une stratégie gagnante pour le jeu de Morra. Dans ce jeu, à chaque tour, chaque joueur cache un ou deux pions, et essaye de parier, à voix haute, combien de pions l'autre joueur a caché. Si un seul des joueurs a parié la bonne solution, son score augmente d'autant de points qu'il y a de pions cachés en tout ; le score de l'autre joueur diminue du même nombre de

25.1. $\max z = 3000x_1 + 5000x_2$.

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12. \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

12



(2,6) est l'optimum.

$(x_1, x_2) = (0, 9)$

$y \leq 9 - \frac{3}{2}x$

(2, 6)

$y = c - \frac{3}{5}x$

$z = 6000 + 30000 = 36000$.

il faut.
$x_1 = 2$. $e_2 = 2$.

e_2 est la ba

?

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	1	0	1	0	0	4
e_2	0	$\boxed{12}$	0	1	0	12.
e_3	3	2	0	0	1	18
f:	3000	5000	0	0	0	0

12 | 5000

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	$\boxed{1}$	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	$\frac{1}{12}$	0	1
e_3	3	0	0	$-\frac{1}{6}$	1	16.
f	3000	0	0	$-\frac{5000}{12}$.	0.	$-\frac{5000}{12}$.

16-12

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
x_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	$\frac{1}{12}$	0.	1
e_3	0	0	-3	$-\frac{1}{6}$	1	4
f	0	0	-3000.	$\frac{-5000}{12}$	0.	$\frac{-5000}{12} - 4 \times 3000$

base = $\{x_1, x_2, e_1\} = (2, 6, 2)$. hors base : (0, 0).

$(2, 6, 2, 0, 0)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 = 12 - x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 = 12 - x_4 \\ 2x_2 - 3x_3 = 6 - x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_4 \\ -3x_3 = -6 - x_5 + x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = 6 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = 2 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
x_3	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
f	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{-1500}$	$\boxed{1000}$	36000
			$y_1^* =$	$= y_2^*$	$y_3^* =$	

$$z = 3k x_1 + 5k x_2 = 36k - k x_5 + k x_4 - 2.5k x_4$$
$$= 36k - 1.5k x_4 - k x_5$$

24.3 :

$$\max \; 3000 x_1 + 5000 x_2 + 4000 x_n$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_n \leq 4 \\ 2x_2 + 3x_n \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_n \leq 10 \end{cases}$$

dual. $\min \; 4v_1 + 12v_2 + 10v_3$
$$\begin{cases} v_1 + 3v_3 \geq 3k \\ 2v_2 + 2v_3 \geq 5k \end{cases}$$

$v_1 = 0$

$v_3 = 1k$

$\boxed{2v_1 + 3v_2 + v_3 \geq 4k}$ $\quad v_2 = \frac{3}{2}k$.

v_1, v_2, v_3 réalisable ?

$(v_1, v_2, v_3) = (0, \frac{3k}{2}, 1k)$.

$3k + 1k \geq 4k$ vérifie la troisième contrainte

Donc (v_1, v_2, v_3) reste la sol. réalisable donc optimale.

Donc x_n n'influence pas la sol. opt.

Exercice 26 (Fonction paramétrique et dualité)

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère le programme linéaire $\mathcal{P}(\lambda)$ défini par :

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2\lambda \\ x_1 - x_2 \geq -3\lambda \\ -4x_1 + x_2 \geq -8\lambda \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Q 26.1 Mettre $\mathcal{P}(1)$ sous forme standard avec un second membre positif. En déduire que mettre to[...] les variables d'écart en base ne correspond pas à une solution réalisable.

Q 26.2 Utiliser la méthode en deux phases (après ajout éventuel d'une ou plusieurs variable[...] [ar]tificielles là où c'est utile) pour la résolution de $\mathcal{P}(1)$; on utilisera la méthode des tableaux [...] effectuer toute itération de l'algorithme du simplexe. Vérifier ainsi que la solution optimale de[...] est $x^* = (0, 1)$.

Q 26.3 En utilisant la forme initiale de $\mathcal{P}(\lambda)$ (celle avec les inégalités), écrire le problème dua[l] de $\mathcal{P}(\lambda)$, puis résoudre $\mathcal{D}(1)$ en vous servant du théorème des écarts complémentaires.

Q 26.4 Etudier comment évolue la solution optimale de $\mathcal{P}(\lambda)$ et sa valeur en fonction de λ pour[...]

26.1 $\mathcal{P}(1)$

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 - x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$\max : \lambda(2v_1 - 3v_2 - 8v_3)$$
$$\begin{cases} v_1 + v_2 - 4v_3 \leq 3 \\ 2v_1 - v_2 + v_3 \leq 2 \end{cases}$$

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - e_1 = 2 \\ -x_1 + x_2 + e_2 = 3 \end{cases}$$

$4x_1 - x_2 \quad + e_3 = 8$

si e_1, e_2, e_3 en base, $x_1 = x_2 = 0$, donc $e_1 = -2$, c'est pas réalisable

26.2 :

$$\max z = -3x_1 - 2x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - e_1 + a_1 = 2 \\ -x_1 + x_2 + e_2 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + e_3 = 8 \end{cases}$$

min a_1

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & e_1 & e_2 & e_3 & a_1 & \\ \hline a_1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ e_3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ \hline f: & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & e_1 & e_2 & e_3 & a_1 & \\ \hline x_2 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ e_2 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ e_3 & \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 9 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

réalisable :

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & e_1 & e_2 & e_3 & \\ \hline x_2 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 2 \\ e_3 & \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 9 \\ \hline & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \boxed{2} & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

≥ 0

déjà sur optimum !

$z = 2 + 2x_1 + e_1 \qquad (x_1, x_2, e_1, e_2, e_3) = (0, 1, 0, 2, 9)$

$= 2$ sur l'opt

26.3 $\quad \lambda = 2.$

$$D(\lambda) = \begin{cases} \max : \lambda(2v_1 - 3v_2 - 8v_3) \\ v_1 + v_2 - 4v_3 \leq 3. \\ 2v_1 - v_2 + v_3 \leq 2 \end{cases}$$

$P(1)$. $x^* = (0, 1, 0, 2, 9)$

$D(1)$

$z = 2.$

$$P(1). \quad \min z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 & \text{val} \\ -x_1 + x_2 \leq 3 & \text{inac} \\ 4x_1 - x_2 \leq 8 & \text{inact} \end{cases}$$

$x_2 > 0.$

$1 \leq 3.$

$-1 \leq 8$

$2v_1 - v_2 + v_3 = 2.$

$v_2 = 0 \quad v_3 = 0.$

Donc. $v^* = (1, 0, 0)$ sol. dual optimal de $D(1)$

26.4 : $D(\lambda)$ reste optimal. la sol ne change pas

$P(\lambda)$

$(1, 0, 0).$

$x_1 + 2x_2 = 2\lambda$

$x_1 = 0$

$x_2 = \lambda.$

$(x_1, x_2) = (0, \lambda).$ Mais la valeur optimal sont les mêmes.

Exercice 27 (Jeu de Morra)

Dans cet exercice, on cherche à identifier une stratégie gagnante pour le jeu de Morra. Dans ce j… chaque tour, chaque joueur cache un ou deux pions, et essaye de parier, à voix haute, combien de …'autre joueur a caché. Si un seul des joueurs a parié la bonne solution, son score augmente d'a… …e points qu'il y a de pions cachés en tout ; le score de l'autre joueur diminue du même nomb… …oints. Sinon, rien ne se passe. Par exemple, si Claire cache 2 pions et parie 1 tandis que Paul cache … pions et parie 2, Paul gagne 4 points et Claire en perd 4.

… chaque étape, chaque joueur a donc le choix entre 4 actions :

[1,1] : cacher 1 pion, parier 1 pion,
[1,2] : cacher 1 pion, parier 2 pions,
[2,1] : cacher 2 pions, parier 1 pion,
[2,2] : cacher 2 pions, parier 2 pions.

7.1

$$\begin{array}{c|cccc} A \backslash B & (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \\ \hline (1,1) & 0 & 2 & -3 & 0 \\ (1,2) & -2 & 0 & 0 & 3 \\ (2,1) & 3 & 0 & 0 & -4 \\ (2,2) & 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

A gagne B

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

27.2.

$$\begin{array}{c|cccc} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

$$E(\text{Paul}) = \frac{1}{2}(-2c_1 + 3c_4 + 3c_1 - 4c_4) = \frac{1}{2}(c_1 - c_4)$$

$$E(\text{Claire}) = \frac{1}{2}(c_4 - c_1).$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

$$E_G = p^T G C.$$

27.3

$c_4 = 1$.

$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 1)$

27.4

$$\begin{cases} \max.\ p^T G C. \\ \sum_i p = 1 \\ p_i \geq 0 \end{cases}$$

$\boxed{Gc^T}$

max: $p_1(c_1 0 +$ ______ + ___

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

points. Sinon, rien ne se passe. Par exemple, si Claire cache 2 pions et parie 1 tandis que Paul cache 2 pions et parie 2, Paul gagne 4 points et Claire en perd 4.
A chaque étape, chaque joueur a donc le choix entre 4 actions :
- [1,1] : cacher 1 pion, parier 1 pion,
- [1,2] : cacher 1 pion, parier 2 pions,
- [2,1] : cacher 2 pions, parier 1 pion,
- [2,2] : cacher 2 pions, parier 2 pions.

Q 27.1 Définir la matrice G des gains pour ce jeu.

Q 27.2 Claire et Paul font une longue partie en suivant les stratégies suivantes :
- *Stratégie de Claire :* inconnue ; elle a joué c_1 fois [1,1], c_2 fois [1,2], c_3 fois [2,1] et c_4 fois [2,2].
- *Stratégie de Paul :* lancer une pièce à chaque tour pour choisir entre [1,2] et [2,1].
Calculer l'espérance de gain de Paul dans cette partie, ainsi que celle de Claire. $\downarrow \frac{1}{2}$ $\downarrow \frac{1}{2}$

Q 27.3 Si Paul adopte la stratégie précédente, quelle stratégie Claire a intérêt à jouer pour minimiser l'espérance de gain de Paul (et par conséquent maximiser sa propre espérance de gain) ?

Q 27.4 Maintenant, si Claire adopte une stratégie où elle joue [1,1] avec une probabilité c_1, [1,2] avec une probabilité c_2, [2,1] avec une probabilité c_3 et [2,2] avec une probabilité c_4, quel programme linéaire Paul doit-il résoudre pour déterminer la stratégie qui maximise son espérance de gain ? Quelle sera alors l'espérance de gain de Paul en fonction de c_1, c_2, c_3 et c_4 ?

Q 27.5 Symétriquement, si Paul adopte une stratégie où il joue [1,1] avec une probabilité p_1, [1,2] avec une probabilité p_2, [2,1] avec une probabilité p_3 et [2,2] avec une probabilité p_4, quel programme linéaire Claire doit-elle résoudre pour déterminer la stratégie qui minimise l'espérance de gain de Paul (et par conséquent maximise sa propre espérance de gain) ? Quelle sera alors l'espérance de gain de Claire en fonction de p_1, p_2, p_3 et p_4 ?

Q 27.6 En supposant que Claire répond de façon optimale, quel programme linéaire Paul est amené à résoudre afin de déterminer les probabilités p_1, p_2, p_3 et p_4 qui maximisent son espérance de gain ?

Q 27.7 En supposant que Paul répond de façon optimale, quel programme linéaire Claire est amenée à résoudre afin de déterminer les probabilités c_1, c_2, c_3 et c_4 qui minimisent l'espérance de gain de Paul ?

Q 27.8 Quel est le lien entre les deux programmes linéaires précédents ? Conclusion ?

Q 27.9 Sans faire le moindre calcul, indiquer l'espérance de gain de chacun des joueurs si ils jouent de façon optimale

Q 27.10 En déduire l'ensemble des stratégie optimales de Claire et Paul.

Exercice 28 (Jeu de nombres)

On considère un jeu répété à deux joueurs (notés 1 et 2) dans lequel à chaque tour les joueurs choisissent simultanément un entier positif compris entre 1 et 100. Si les deux nombres choisis sont égaux, il n'y a pas de gain. Si un joueur choisit un nombre x strictement plus grand que le nombre y choisi par son adversaire alors cet adversaire lui donne 1 euro si $x - y = 1$ et lui prend 2 euros si $x - y > 1$ (par exemple, lorsque le joueur 2 joue 40, le joueur 1 gagne 1 s'il a joué 41 alors qu'il perd 2 s'il a joué 42 ou plus).

Q 28.1 Soit G la matrice des gains du joueur 1 pour ce jeu (matrice de taille 100×100 qu'on s'abstiendra d'écrire en extension). Donner la sous matrice de G correspondant aux 5 premieres lignes et 5 premières colonnes (nombres de 1 à 5 pour chaque joueur).

Q 28.2 Pour un joueur donné, une stratégie pure s est dite *dominée* s'il existe une autre stratégie pure

$$(2C_2-3C_3)p_1+(-2C_1+3C_4)p_2+(3C_1-4C_4)p_3+(-3C_2+4C_3)p_4$$

$$\max\ p_1(C_1G_{11}+C_2G_{12}+C_3G_{13}+C_4G_{14})+p_2(\quad)+p_3(\quad)+p_4$$

$P(x)=$

$p_1+p_2+p_3+p_4=1.$ $\quad v_1$

v_2

v_3

v_4

$p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 0$

$i=\arg\max([C_1, C_2, C_3, C_4])$

$p_i=1$, autres $=0$

$E_G(\text{Paul}) = \max([C_1, C_2, C_3, C_4])$

avec
$$\begin{cases} C_1 = 2C_2-3C_3 \\ C_2 = -2C_1+3C_4 \\ C_3 = 3C_1-4C_4 \\ C_4 = -3C_2+4C_3 \end{cases}$$

$D(v)=$
$$\begin{cases} \min \sum_i v_i \\ v_i \geq (CG)_i \\ v_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

27.5. Même chose $E_G(\text{Claire}) = \max([P_1, P_2, P_3, P_4])$

Car zero sum et symétrique.

27.6 $C_1 = 1$ si $2p_2-3p_3$ max

$\rightarrow -2p_2+3p_3$ $\quad E_G=3.$

$C_2=1$ si $-2p_1+3p_4$ max $\quad E_G=2$

$\rightarrow 2p_1-3p_4$

$C_3=1$ si $3p_1-4p_4$ max $\quad E_G=4$

$\rightarrow -3p_1+4p_4$

$C_4=1$ si $-3p_2+4p_3$ max

$\rightarrow 3p_2-4p_3$

$$\max\{\min\{(-2p_2+3p_3,\ 2p_1-3p_4,\ -3p_1+4p_4,\ 3p_2-4p_3)\}\}$$

max: z

$z \leq -2p_2+3p_3$

$z \leq 2p_1-3p_4$

$z \leq -3p_1+4p_4$

$z \leq 3p_2-4p_3$

$\sum_i^4 p = 1$

$p \geq 0$

max: z

$z+2p_2-3p_3 \leq 0$

$z-2p_1+3p_4 \leq 0$

$z+3p_1-4p_4 \leq 0$

$z-3p_2+4p_3 \leq 0$

$\sum^4 p \leq 1$

$-\sum_i^4 p \leq -1$

$p \geq 0$

posons $z = \mu' - \mu''$

	μ'	μ''	p_1	p_2	p_3	p_4	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	
e_1	1	-1	0	2	-3	0	1	0	0	0	0	0	0.
e_2	1	-1	-2	0	0	3	0	1	0	0	0	0	0
e_3	1	-1	3	0	0	-4	0	0	1	0	0	0	0
e_4	1	-1	0	-3	4	0	0	0	0	1	0	0	0
e_5	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
e_6	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	-1

27.6

max: $z = \mu' - \mu''$

$\mu'-\mu''$ $\quad z+2p_2-3p_3 \leq 0$ $\quad C_1$

$\mu'-\mu''$ $\quad z-2p_1+3p_4 \leq 0$ $\quad C_2$

$\mu'-\mu''$ $\quad z+3p_1-4p_4 \leq 0$ $\quad C_3$

$\mu'-\mu''$ $\quad z-3p_2+4p_3 \leq 0$ $\quad C_4$

$\sum^4 p \leq 1$ $\quad \lambda'$

$\sum^4 p \leq 1$ $\quad \lambda''$

27.7

min $z' = \lambda' - \lambda''$

$\lambda'-\lambda''$ $\quad z'-2C_2+3C_3 \geq 0$

$\lambda'-\lambda''$ $\quad z'+2C_2-3C_4 \geq 0$

$\lambda'-\lambda''$ $\quad z'-3C_1+4C_4 \geq 0$

$\lambda'-\lambda''$ $\quad z'+3C_2-4C_3 \geq 0$

$\sum_i^4 C_i \leq 1$ $\quad \mu'$

$\sum^4 C_i$ $\quad \mu''$

$-\sum_i p_i \leq -1$	$-\sum_i c_i \leq -1$ $\quad \mu''$
$\mu', \mu'', p_i \geq 0$	$\lambda', \lambda'', c_i \geq 0$

27.8 Ce sont dual de l'un l'autre.

27.9. Comme le perd est le gain de l'autre, l'espérance de gain est 0.