TD 8 – Oscillateurs –

Corrigé des exercices

Contenu

Exercice 26 : Vibration d'une molécule diatomique : H-Cl

Dans ce problème, on souhaite modéliser les vibrations d'une molécule diatomique : H-Cl. Puisque $m_{Cl} \gg m_H$, on va supposer que l'atome de chlore est immobile, au point O, dans un référentiel galiléen et que l'atome d'hydrogène se déplace suivant l'axe (Ox). L'interaction entre les deux atomes est modélisée par l'énergie potentielle suivante :

$$U(x) = U_0\left(e^{-2a(x-x_0)} - 2e^{-a(x-x_0)}\right)$$

Cette forme d'énergie potentielle correspond à ce que l'on nomme potentiel de Morse[1]. Il s'agit d'un modèle très fréquemment utilisé pour rendre compte des propriétés vibrationnelles des molécules.

Données :

distance moyenne entre les 2 noyaux : 1,274 Å
énergie de dissociation de H-Cl : 430 $\mathrm{kJ.mol^{-1}}$
paramètre a : $1{,}87.10^{10}$ $\mathrm{m^{-1}}$
masse de l'atome d'hydrogène : $1,66\,.\,10^{-27}$ kg

1) Tracer l'allure de $U(x)$ pour $x > 0$. Pourquoi ce potentiel est-il bien adapté pour décrire l'interaction entre les deux atomes ?

L'énoncé precise :

$$U(x) = U_0\left(e^{-2a(x-x_0)} - 2e^{-a(x-x_0)}\right)$$

On cherche d'abord les limites aux bornes de la fonction :

$$\lim_{x\to 0} U(x) = U(0) = U_0 e^{ax_0}\left(e^{ax_0} - 2\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} U(x) = 0$$

On calcule ensuite la dérivée :

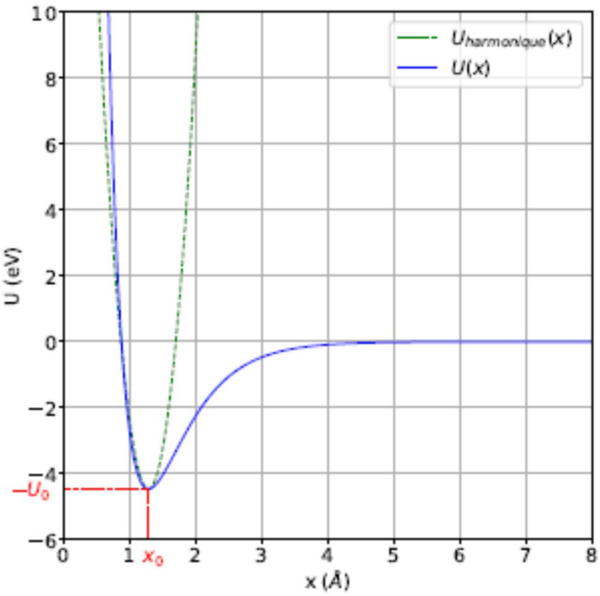
$$\frac{dU(x)}{dx} = -2aU_0\left(e^{-2a(x-x_0)} - e^{-a(x-x_0)}\right)$$

La dérivée s'annule pour $x = x_0$ et est positive lorsque $x > x_0$. x_0 est alors un minimum de la fonction, pour cette valeur on a :

$$U(x_0) = U_0(1-2) = -U_0$$

Il existe donc une distance d'équilibre $x = x_0$ entre les deux atomes. De plus, comme le potentiel tend vers 0 lorsque la distance tend vers l'infini, il existe également une possibilité de dissocier les deux atomes de la molécule.

[1] Ce potentiel a été introduit par le physicien américain Philip McCord Morse en 1929.



2) Que représentent les paramètres U_0 et x_0 ?

x_0 correspond à la distance d'équilibre entre les deux atomes. Soit ici : $x_0 \approx 1{,}274$ Å

U_0 correspond à la quantité d'énergie qu'il faut fournir à la molécule pour qu'elle passe de l'état d'équilibre pour lequel la distance entre les deux atomes vaut x_0 à un état où les deux atomes sont dissociés (infiniment éloignés l'un de l'autre), autrement dit, il s'agit de l'énergie de dissociation. On a donc : $U_0 = 430$ kJ.mol^{-1}

3) Expression de la force exercée sur l'atome d'hydrogène. force en x_0 ?

Connaissant le potentiel, on en déduit la force qui s'exerce sur l'atome d'hydrogène, c'est à dire la force qui "dérive" du potentiel. Comme le potentiel ne dépend que de x, alors on aura :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{dU(x)}{dx}\vec{u}_x}$$

où $\vec{u}_x$ est un vecteur unitaire de l'axe Ox, orienté dans le sens des x croissants.

Soit :

$$\vec{F} = -\frac{dU(x)}{dx}\vec{u}_x$$

$$\vec{F}(x) = 2aU_0\left(e^{-2a(x-x_0)} - e^{-a(x-x_0)}\right)\vec{u}_x$$

Valeur de la force en x_0 :

$$\boxed{\vec{F}(x_0) = \vec{0}}$$

On retrouve bien le fait que x_0 correspond à une position d'équilibre stable : partant de x_0, si l'atome se rapproche de O, la force est orientée positivement et tend à ramener l'atome d'hydrogène vers la position d'équilibre, inversement si l'atome s'éloigne de O depuis x_0, la force tend à ramener l'atome vers la position d'équilibre : orientation de la force vers la gauche.

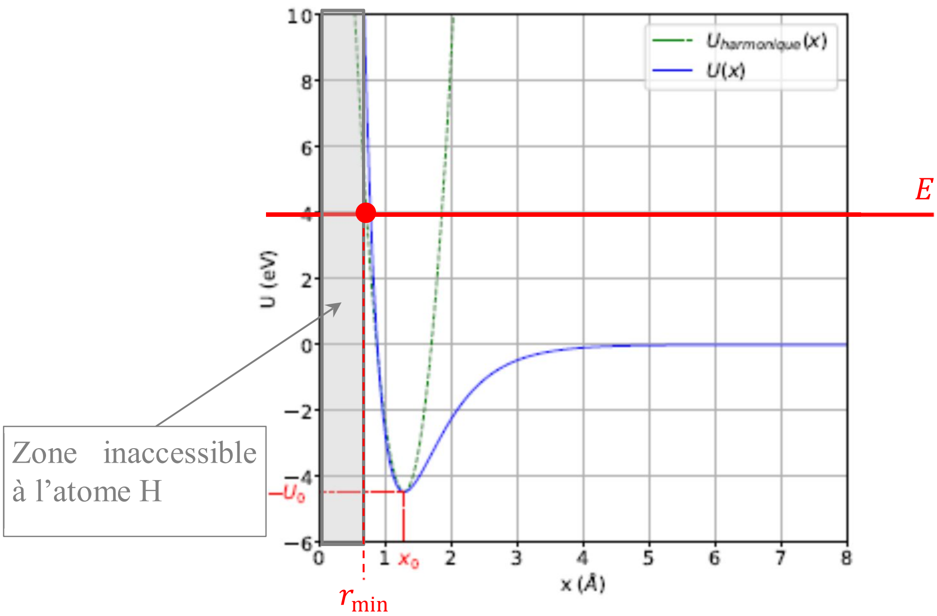
4) On note E l'énergie mécanique du système {H + Cl}. Décrire son mouvement pour les cas (a) $E > 0$ et (b) $E < 0$.

Le système est isolé et conservative, son énergie mécanique est constant, on la représentera sur le graphe par une droite horizontale. Le système est également purement mécanique, l'énergie mécanique E est la somme de E_c, l'énergie cinétique de H (seul élément mobile du système) et de l'énergie potentielle d'interaction U.

$$E = E_c(\dot{x}) + U(x)$$

L'énergie cinétique est une quantité positive par construction. Les zones du graphe qui correspondent à $E < U(x)$ sont inaccessibles à l'atome d'hydrogène.

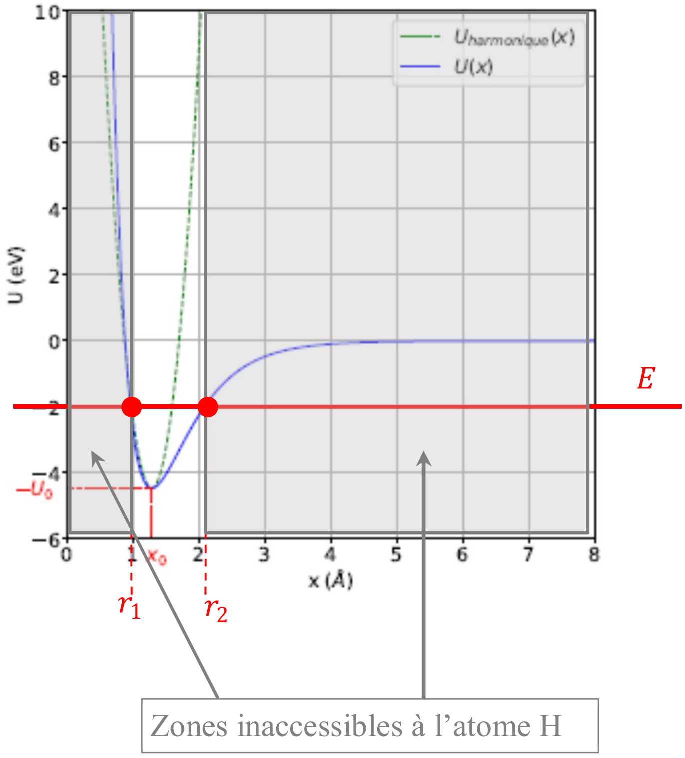
<u>Premier cas</u> : cette énergie est positive



Dans le cas où l'énergie mécanique du système est positive, il n'existe qu'un point d'intersection entre la droite horizontale E et la courbe $U(x)$.

L'atome d'hydrogène va pouvoir s'approcher de l'atome de chlore jusqu'à la distance minimale $r_{\min}$ telle que $U(r_{\min}) = E$ (point d'intersection des deux courbes), il ne peut s'approcher plus puisque pour $r_{\min} > x, U(x) > E$. Par contre, l'atome pourra s'éloigner à l'infini.

Deuxième cas : cette énergie est négative



Dans le cas où l'énergie mécanique du système est négative, on peut distinguer trois cas :

- $E < -U_0$, il n'existe aucun point d'intersection entre la droite horizontale E et la courbe $U(x)$. La configuration n'est pas accessible.

- $E = -U_0$ il existe un seul point d'intersection et l'atome d'hydrogène n'a pas d'énergie cinétique : la molécule composée des deux atomes est dans un état d'équilibre pour lequel la distance entre ces deux atomes est la distance d'équilibre x_0.

- $-U_0 < E < 0$: il y a cette fois deux points d'intersection, notés r_1 et r_2. L'atome d'hydrogène reste dans le voisinage de l'atome de chlore (pas de possibilité de dissociation). Au cours du temps, l'atome oscille entre les deux positions qui correspondent aux deux points d'intersection. Ces oscillations sont périodiques (pas de frottements) et se poursuivent indéfiniment.

5) Cas où $E \cong -U_0$. À l'aide d'un développement limité, montrer que le système se comporte comme un oscillateur harmonique. Raideur du ressort équivalent.

Au voisinage de x_0, on établit un développement limité de $U(x)$:

$$U(x) \approx U(x_0) + (x - x_0)\left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \cdots$$

Or, on vient de voir que le potentiel passe par un minimum lorsque $x = x_0$, ce qui implique

$$\left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$$

Il reste :

$$U(x) \approx -U_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \cdots$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -2a^2U_0\left(-2e^{-2a(x-x_0)} + e^{-a(x-x_0)}\right)$$

$$\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = +2a^2U_0$$

Au voisinage de x_0, on a alors :

$$U(x) = -U_0 + a^2U_0(x - x_0)^2 = U_0(1 - [a(x - x_0)]^2)$$

La force exercée alors sur l'atome d'hydrogène va s'écrire :

$$\vec{F}(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\vec{u}_x = -2a^2U_0(x - x_0)\vec{u}_x$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au mouvement de l'atome d'hydrogène soumis à la force F, dans le référentiel galiléen d'origine O (position de l'atome de Chlore) on obtient en posant : $X = x - x_0$,

$$m\ddot{X} = -2a^2U_0X$$

Soit encore :

$$\ddot{X} + \frac{2a^2U_0}{m}X = 0$$

Le système se comporte comme un oscillateur harmonique, la raideur équivalent du ressort est égale à :

$$k_{\text{eq}} = 2a^2U_0 = \frac{(2 * (1{,}87)^2 * 4{,}3 * 10^5 * 10^{20})}{6{,}022 * 10^{23}} = 500 \text{ N.m}^{-1}$$

$$\boxed{k_{\text{eq}} = 2a^2U_0 = 500 \text{ N. m}^{-1}}$$

6) Fréquence ν des petites oscillations pour la molécule H-Cl, longueur d'onde correspondante λ.

$$\ddot{X} + \frac{2a^2U_0}{m}X = 0$$

représente l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 telle que :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Soit :

$$\omega_0^2 = \frac{2a^2U_0}{m} \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2a^2U_0}{m}} = 5{,}5.\,10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$$

La fréquence des petites oscillations est donnée par :

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{2a^2U_0}{4m\pi^2}} = \frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{U_0}{2m}} \cong 9.\,10^{13} \text{ Hz}$$

Et la longueur d'onde associée est égale à :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{(3.\,10^8)}{9.\,10^{13}} = \frac{1}{3}\,10^{-5} \text{ m} \cong 3{,}3 \text{ µm}$$

Exercice 27 : Suspensions d'une voiture

Une suspension de voiture est un élément élastique (gros ressort) qui relie les "masses suspendues" du véhicule (châssis, moteur, passagers...) aux "masses non suspendues" (roues, essieu, système de freinage...). L'amortissement structurel du ressort est augmenté par l'ajout d'un "amortisseur" en parallèle.

On nommera par la suite "suspension" l'ensemble {ressort + amortisseur} de raideur constante k_s et d'amortissement visqueux C_s. On compte une suspension par roue. Le rôle de ces suspensions est d'atténuer les vibrations transmises au véhicule à cause des imperfections de la route et d'assurer la continuité du contact roue/chaussée malgré les défauts de la route.

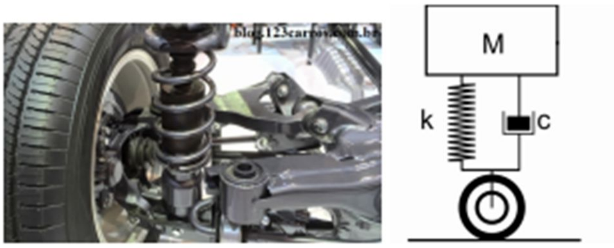


Figure 26 – Suspension d'un véhicule et son modèle à un degré de liberté

Modélisation

On propose de mettre en place un modèle vibratoire très simple d'une voiture de masse M_v : un modèle à un degré de liberté (1ddl) vertical. La voiture possède quatre suspensions identiques de raideur k_s et d'amortissement C_s. On supposera que les roues sont parfaitement rigides et que le véhicule est à l'arrêt.

1) Raideur équivalente k_{eq} de ce modèle.

Les quatre ressorts du véhicule sont placés en parallèle, par conséquent, la raideur équivalente de ce modèle à un degré de liberté vertical est égale à la somme des raideurs des quatre ressorts, soit :

$$\boxed{k_{\mathrm{eq}} = 4k_s}$$

2) $k = k_s$. Masse M à prendre en compte. Justifier "modèle quart de véhicule"

Si on ne considère qu'une seule roue, et donc un seul ressort de raideur k_s, la masse à prendre en compte est celle d'un quart de la masse totale du véhicule, ce qui justifie l'appellation « modèle quart de véhicule ».

$$\boxed{M = \frac{1}{4}M_v}$$

3) Non contraint, le ressort d'une suspension a une longueur ℓ_{0s}. Installé sur le véhicule, sa longueur vaut ℓ_{1s}. ($h = \ell_{0s} - \ell_{1s}$) est-il positif ou négatif ? Comment déterminer la raideur de la suspension à partir de ces informations et des données de l'énoncé **A.N.** valeur de k_s pour $M_v = 1200$ kg, $h = 25$ cm et $g = 10$ m.s^{-2}.

Une fois installé sur le véhicule, le ressort doit supporter la charge M, il est alors comprimé, on peut donc écrire : $h = \ell_{0s} - \ell_{1s} > 0$.

Une fois comprimé, le ressort exerce sur la masse M une force (loi de Hooke) : $\vec{F} = k_s h \vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire de l'axe vertical orienté vers le haut.

La masse est également soumise à son poids, $\vec{P}$, force verticale orientée vers le bas et de module constant mg. $\vec{P} = -Mg\,\vec{u}_z$

La masse étant à l'équilibre, dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle, soit, les deux forces étant verticales :

$$Mg = k_s h \Longrightarrow k_s = \frac{Mg}{h}$$

A.N.

$$\boxed{k_s = \frac{Mg}{h} = \frac{M_v g}{4h} = 12000 \text{ N.m}^{-1}}$$

Nous utiliserons le modèle "mono roue" pour la suite de l'exercice.

On choisit de travailler dans un repère galiléen lié au sol. L'origine O du repère est au niveau de la base de la suspension, l'axe vertical Oz est ascendant (voir figure). Lorsque le système est à l'équilibre statique on a $z = z_0$.

Modèle mono roue non amorti

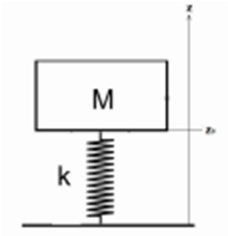


Figure 27 – Suspension d'un véhicule - Modèle non amorti

4) Bilan des efforts appliqués à la masse. Expressions en fonction de $k,\ M,\ z,\ z_0$ et g.

La masse est soumise à :

- son poids, $\vec{P}$, force verticale orientée vers le bas et de module constant mg.

$$\boxed{\vec{P} = -Mg\,\vec{u}_z}$$

- la force élastique exercée par le ressort $\vec{F}_{\text{el}} = -k(z-\ell_0)\vec{u}_z$, force verticale dont l'orientation dépend du signe de $(z-\ell_0)$. Pour répondre précisément à l'énoncé on doit éliminer le paramètre ℓ_0 :

Lorsque le système est à l'équilibre statique, $z = z_0$. La somme des forces qui s'exercent sur la masse est nulle, soit :

$$-k(z_0-\ell_0) = Mg \implies \ell_0 = \frac{Mg}{k} + z_0$$

La force exercée par le ressort (en utilisant les variables de l'énoncé) vaut :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{el}} = (Mg - k(z-z_0))\vec{u}_z}$$

5) Équation du mouvement libre non amorti de la voiture (paramètre $z(t)$).

Le référentiel d'étude étant supposé galiléen, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique au mouvement de la masse M, soumise à son poids et à la force de rappel du ressort, soit, en notant $a = \vec{a}.\vec{u}_z = d^2z/dt^2$ son accélération dans la direction verticale :

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = (Mg - k(z-z_0)) - Mg$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{M}(z-z_0) = 0}$$

C'est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants et dont le second membre est une constante.

6) Équation de mouvement en $Z(t), (z(t) - z_0)$. Que remarque-t-on ?

Soit $Z(t) = z(t) - z_0$, z_0 étant une constante, on a aussi :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Soit en prenant comme paramètre de déplacement Z :

$$\boxed{\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{k}{M}Z = 0}$$

Il s'agit maintenant d'une équation différentielle du second ordre homogène qui correspond exactement à celle de l'oscillateur harmonique en posant $\omega_0^2 = k/M$.

7) Solution générale $Z(t)$, pulsation propre ω_0, fréquence propre f_0 et période propre T_0 des oscillations verticales du véhicule. **A. N.**

La solution générale de cette équation différentielle homogène est de la forme :

$$Z(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où A et φ sont deux constantes (équation différentielle du second ordre), qu'on pourra déterminer à partir des conditions initiales.

La pulsation propre s'écrit :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M} \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

La fréquence propre est donnée par :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Et la période propre (inverse de la fréquence) par :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

A.N.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 2 * \sqrt{\frac{12000}{1200}} = 6{,}32 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \cong 1 \text{ Hz}$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \cong 1 \text{ s}$$

Modèle amorti

On propose à présent de prendre en compte l'effet de l'amortisseur sur le comportement du véhicule. On ajoute pour cela un amortissement $C = C_s$ au modèle.

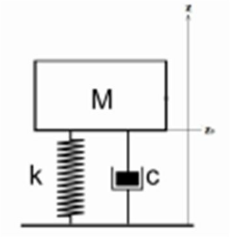


Figure 28 – Suspension d'un véhicule - Modèle amorti

8) Amortissement visqueux. Expression de la force de frottement exercée sur la masse.

Il existe maintenant une force supplémentaire à rajouter au bilan des forces pour prendre en compte l'amortissement. L'amortissement étant par hypothèse de type visqueux, cette force est proportionnelle à la vitesse ($\dot{z} = \dot{Z}$) et orientée dans le sens opposé au mouvement :

$$\boxed{\vec{F}_v = -C_s \dot{Z}\, \vec{u}_z}$$

9) Équation de mouvement en $Z(t)$ de ce modèle amorti.

On doit rajouter une force dans le bilan, puis appliquer à nouveau le principe fondamental de la dynamique soit ici :

$$M\frac{d^2Z}{dt^2} = -kZ - C_s\dot{Z}$$

$$\boxed{\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{C_s}{M}\frac{dZ}{dt} + \frac{k}{M}Z = 0}$$

Il s'agit encore d'une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants et homogène.

10) Comportement de M en fonction de C. Différents "régimes" possibles.

On peut réécrire l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\frac{C_s}{2k}\frac{k}{M}\frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z = \frac{d^2Z}{dt^2} + 2\left(\frac{C_s}{2k}\sqrt{\frac{k}{M}}\right)\omega_0\frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z = 0$$

On pose :

$$\alpha = \frac{C_s}{2k}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{C_s}{2M}\sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{C_s}{2M\omega_0}$$

Ce paramètre correspond au taux d'amortissement.

Soit :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\alpha\omega_0\frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z = 0$$

Pour déterminer la solution de cette équation différentielle homogène, linéaire, du second ordre et à coefficients constants, on écrit l'équation caractéristique associée :

$$r^2 + 2\alpha\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

On calcule ensuite le discriminant réduit de cette équation du second degré :

$$\Delta' = (\alpha\omega_0)^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\alpha^2 - 1)$$

En fonction de la valeur de α, trois régimes peuvent être déterminés :

- Si $0 < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}$, le discriminant est négatif, ses racines sont imaginaires, du type $\pm i\omega_0\sqrt{(1-\alpha^2)}$, les solutions sont de type **oscillatoires** : le système (la masse M) oscille autour de sa position d'équilibre ($Z = 0$).

  $r_\pm = -\omega_0(\alpha \pm i(1-\alpha^2) = -\omega_0\alpha \pm i\omega_p$, où $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2}$

  ω_p est appelée la pseudo pulsation du mouvement.

  Le régime est dit « sous-amorti ». Les solutions vont s'écrire sous la forme :

  $$Z(t) = A(\exp -\omega_0\alpha t)\cos(\omega_p t + \beta)$$

  L'équation différentielle étant du second ordre, il y a deux constantes notées ici A et β (que l'on peut déterminer si on a accès à deux conditions initiales – position, vitesse-)

- Si $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$, le discriminant est nul, le système (la masse M) revient à sa position d'équilibre ($Z = 0$) sans osciller. C'est le cas où la masse revient le plus vite à sa position d'équilibre. La solution s'écrit :

  $$r = \pm\omega_0\alpha$$

  Le régime est dit « à amortissement critique ». Les solutions vont s'écrire sous la forme :

  $$Z(t) = (a + bt)\exp -\omega_0\alpha t$$

  L'équation différentielle étant du second ordre, il y a deux constantes notées ici a et b (que l'on peut déterminer si on a accès à deux conditions initiales – position, vitesse-)

- Si $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{1}$, le discriminant est strictement positif, le système (la masse M) revient à sa position d'équilibre ($Z = 0$) sans osciller. Les solutions de l'équation caractéristique s'écrivent :

$$r_{\pm} = -\omega_0 \alpha \pm \omega_p$$

Le régime est dit « sur amorti ». Les solutions vont s'écrire sous la forme :

$$Z(t) = (c \exp \omega_p t \; + d \exp -\omega_p t) \exp -\omega_0 \alpha t$$

L'équation différentielle étant du second ordre, il y a deux constantes notées ici c et d (que l'on peut déterminer si on a accès à deux conditions initiales – position, vitesse-)

Amortissement critique

11) Expression C_c de C en fonction de M et de ω_0 correspondant au régime critique. Solution générale de l'équation de mouvement en régime critique : $Z(t) = (A + Bt)e^{pt}$

C.I. $Z(t = 0) = Z_0$ et $\frac{dZ}{dt}(t = 0) = \dot{Z}\,(t = 0) = 0$

Déterminer p, A et B en fonction de ω_0, C, Z_0 et $\dot{Z}_0$.

Dans le régime critique

$$\alpha = 1 \Longrightarrow C_c = 2M\omega_0$$

On vient de donner la solution sous la forme :

$$Z(t) = (a + bt) \exp -\omega_0 \alpha t \,, \alpha = 1$$

En comparant les deux expressions, on en déduit :

$$p = -\omega_0$$

Pour déterminer les constantes A (a) et $B(b)$, on utilise les conditions initiales :

$$Z(t = 0) = Z_0 = A$$

On calcule la dérivée par rapport au temps de Z :

$$\dot{Z}(t) = -(Z_0 + bt)\omega_0 \exp -\omega_0 t + b \exp -\omega_0 t$$

$$\dot{Z}(t = 0) = -Z_0\omega_0 + b = 0 \Longrightarrow b = B = Z_0\omega_0$$

La solution complète, prenant en compte les conditions initiales, va alors s'écrire :

$$\boxed{Z(t) = Z_0(1 + \omega_0 t) \exp -\omega_0 t}$$

12) Proposer une estimation du temps au bout duquel l'écart à l'équilibre Z se trouve réduit d'un facteur 10.

À l'instant $t = t_1$, on a

$$Z(t_1) = \frac{Z_0}{10} = Z_0(1 + \omega_0 t_1) \exp -\omega_0 t_1$$

$$(1 + \omega_0 t_1) \exp -\omega_0 t_1 = 0{,}1$$

La solution n'est pas « évidente » on peut essayer une résolution numérique en encadrant peu à peu la solution.

$$\omega_0 t_1 = 1 \Longrightarrow (1 + \omega_0 t_1) \exp -\omega_0 t_1 = \frac{2}{e} = 0{,}7$$

$$\omega_0 t_1 = 2 \Longrightarrow (1 + \omega_0 t_1) \exp -\omega_0 t_1 = \frac{3}{e^2} = 0{,}4$$

$$\omega_0 t_1 = 3 \Longrightarrow (1 + \omega_0 t_1) \exp -\omega_0 t_1 = \frac{4}{e^3} \cong 0{,}2$$

$$\omega_0 t_1 = 4 \Longrightarrow (1 + \omega_0 t_1) \exp -\omega_0 t_1 = \frac{5}{e^4} \cong 0{,}09$$

$$\omega_0 t_1 = 3{,}8 \Longrightarrow (1 + \omega_0 t_1) \exp -\omega_0 t_1 = \frac{4{,}8}{e^{3{,}8}} \cong 0{,}11$$

$$\omega_0 t_1 = 3{,}9 \Longrightarrow (1 + \omega_0 t_1) \exp -\omega_0 t_1 = \frac{4{,}9}{e^{3{,}9}} \cong 0{,}1$$

On en déduit une estimation de l'instant t_1 : $t_1 \cong 0{,}62$ s, plus faible que T_0

Véhicule chargé

13) Des passagers (masse totale m) embarquent dans le véhicule. Nouvelle pulsation propre ? Le mouvement est-il toujours apériodique ?

Dans la mesure où nous sommes toujours dans le modèle "quart de véhicule", la masse supplémentaire à prendre en compte est $m/4$. La masse totale du modèle quart de véhicule devient alors : $M' = 0{,}25(M_v + m)$

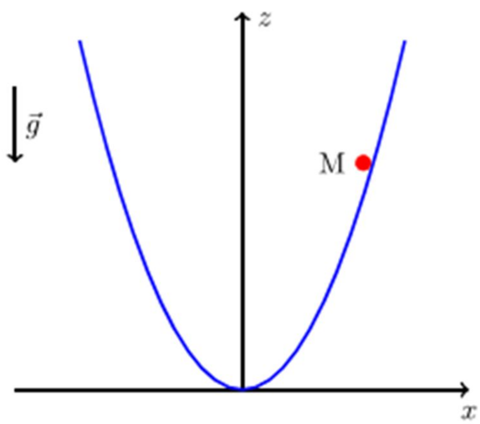
$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k}{M'}} < \omega_0$$

$$\alpha' = \frac{C_s}{2M'}\sqrt{\frac{M'}{k}} = \frac{C_s}{2\omega_0' M'} = \frac{C_s}{2}\sqrt{\frac{1}{M'k}} < \alpha$$

Le régime n'est plus apériodique. $\alpha' < 1$. Il est maintenant pseudo périodique.

Exercice 28 : Mouvement dans une cuvette parabolique

On considère un point matériel M, de masse m, pouvant glisser sans frottement dans une cuvette de forme parabolique d'équation $z = ax^2$ où a est une constante positive. On suppose que M est lâché sans vitesse initiale depuis la position $(x_0, z_0 = ax_0^2)$.



1) L'énergie mécanique de M est-elle conservée ?

Le système {M + support + Terre} est isolé et conservative, on néglige tous les frottements. M est soumis à son poids, force conservative et à la réaction normale du support qui ne travaille pas. Par conséquent, le système étant isolé, l'énergie totale (principe de conservation de l'énergie) est conservée, et le système étant de plus conservatif, son énergie mécanique est conservée également.

2) Déterminer en fonction de x l'expression de l'énergie potentielle de M.

Le système considéré n'a qu'une source d'énergie potentielle : l'interaction gravitationnelle entre M et la Terre. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit simplement en fonction de l'altitude z du point M, soit en prenant $E_p(z = 0) = 0$,

$$E_p(z) = mgz$$

Pour donner son expression en fonction de x, on a : $z = ax^2$, soit finalement :

$$\boxed{E_p(x) = mgax^2}$$

3) Représenter sur un diagramme énergétique l'énergie potentielle et l'énergie mécanique de M. Expliquer qualitativement quel va être le mouvement de M.

On a vu que l'énergie mécanique du système était conservée, on va pouvoir la représenter sur un diagramme énergétique par une droite horizontale.

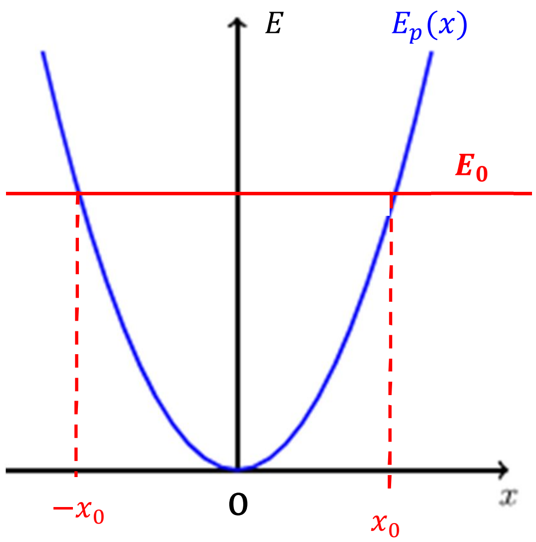
On peut également calculer sa valeur en n'importe quel, par exemple à l'instant initial où la position de M est x_0 et sa vitesse nulle.

Le système étant purement mécanique, l'énergie mécanique s'écrit comme la somme de l'énergie cinétique de M (seul élément mobile du système) et de l'énergie potentielle d'interaction {M/Terre}.

À l'instant initial, l'énergie mécanique se réduit donc à l'énergie potentielle $E_p(x_0)$, soit E_0 la valeur constante de l'énergie mécanique, on a :

$$E_0 = mgax_0^2$$

L'énergie potentielle présente un graphe parabolique (même allure que le support).



Comme l'énergie mécanique est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique (quantité positive par construction), les valeurs de x qui correspondent à une énergie potentielle supérieure à $E_p(x_0)$ ne sont pas accessibles : le point M va osciller périodiquement entre les deux positions extrêmes : $-x_0$ et $+x_0$:

Partant de $(x_0, ax_0^2 = z_0)$ sans vitesse initiale, M « descend » le long de la paroi et sa vitesse augmente, il passe par O avec une vitesse maximale et « remonte » jusqu'en $(-x_0, ax_0^2 = z_0)$ point qu'il atteint avec une vitesse nulle, il repart alors dans l'autre sens…

4) Expression du vecteur vitesse de M dans la base cartésienne, en fonction de x et $\dot{x}$.

On a $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + z\vec{u}_z = x\vec{u}_x + ax^2\vec{u}_z$

La vitesse de M est la dérivée par rapport au temps du vecteur position. Dans la base cartésiennes, les vecteurs unitaires sont constants, on a donc :

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + 2ax\dot{x}\,\vec{u}_z}$$

5) Expression de l'énergie mécanique de M en fonction de x et $\dot{x}$.

L'énergie mécanique s'écrit comme la somme de l'énergie cinétique de M (seul élément mobile du système) et de l'énergie potentielle d'interaction {M/Terre} :

$$\boxed{E(x) = mgax^2 + \frac{1}{2}m(1 + 4a^2x^2)\dot{x}^2}$$

6) À quelle condition M se comporte-t-il comme un oscillateur harmonique ? On donnera la période des oscillations.

Rappel : pour un oscillateur harmonique à une dimension formé par un ressort de raideur k horizontal et un point matériel de masse m :

$$E(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Pour que M se comporte comme un oscillateur harmonique il faut que le coefficient du terme en $\dot{x}^2$ ne dépende pas de x, ici il faudra donc que :

$$1 \gg 4a^2x^2$$

C'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{1}{2a} > x > -\frac{1}{2a}$$

Dans ces conditions, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E(x) = mgax^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Comme l'énergie mécanique est conservée, on a encore :

$$\frac{dE(x)}{dx} = 2mgax\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$\dot{x} = 0$ n'est pas une solution (s'il n'y a pas de mouvement, pas d'oscillateur)

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\ddot{x} + 2gax = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{2ga}$ et de période propre :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{2}{ga}}}$$