Q 24.1 Montrer, en utilisant le théorème des écarts complémentaires (et en effectuant le moins de calculs possible), que la solution $x^* = (1;2;0;4;0)$ est optimale pour le programme linéaire suivant :

x^* est réalsable de P.

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \max\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\ s.c. \left|\begin{array}{lll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 & \leq & 0 \quad ① \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 & \leq & 4 \quad ② \\ 3x_1 + 4x_3 + x_5 & \leq & 3 \quad ③ \\ x_2 - x_3 + 2x_5 & \leq & 2 \quad ④ \\ -4x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 & \leq & -1 \quad ⑤ \\ x_i \geq 0,\ i = 1 \cdots 5 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$1+4+0-16 = -11$. ◦
4.
$3+0+0=3$
$2-0+0=2$.
$-4\times2-4=-12$. ◦.

* min → max
≥ ≤

On écrit le dual D de P.

$$D: \left\{\begin{array}{l} \text{Min } w = 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 - y_5 \\ s.c. \left|\begin{array}{l} y_1 + 3y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + y_4 - 4y_5 \geq 2 \\ 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 - y_4 - 3y_5 \geq 3 \\ -4y_1 + y_2 - y_5 \geq 4 \\ 5y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 - 2y_5 \geq 5 \\ y_i \geq 0 \quad i = 1..5 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

TEC donne une cond° nécessaire et suffisante pr qu'un coupe de solut° x^* y^* avec x^* réalsable de (P) et y^* réalsable de D soient opt.

- Si $x_i^* \neq 0$ alors la ième contrainte du dual est à l'égalité pr y^* (a).
- Si la jème contrainte de (P) n'est pas à l'égalité pr x^* alors $y_j^* = 0$ (b).

Nous cherchons y^* réalisable de D tq x^*. y^* satisfait les cond° de T.E.C.

(b). ① et ⑤ ne sont pas actives / saturés pr x^* donc $y_1^* = y_5^* = 0$.

(a) $x_1^* > 0$. $x_2^* > 0$ $x_4^* > 0$ donc regarder $x^*(1,2,0,4,0)$

$$\left\{\begin{array}{l} y_1^* + 3y_3^* = 1 \\ 2y_1^* + y_4^* - 4y_5^* = 2 \\ -4y_1^* + y_2^* - y_5^* = 4 \end{array}\right.$$ avec $y_1^* = y_5^* = 0$.

$\Rightarrow y_3^* = 1/3 \quad y_4^* = 2. \quad y_2^* = 4 \qquad y^* = (0, \underbrace{4, 1/3, 2}_{\geq 0}, 0)$

On vérifie y^* réalsable dans D.

Par le T.E.C. x^* est opt de (P) et y^* opt de D

On peut vérifier qu'elles ont la m̂ valeur $z(x^*) = 21$ $w(y^*) = 21$

$$(P)\left\{\begin{array}{l} \min\ z = 2x_1 + 3x_2 \\ s.c. \left|\begin{array}{lll} 2x_1 + x_2 & \geq & 3 \quad a \\ 2x_1 - x_2 & \geq & 5 \quad b \\ x_1 + 4x_2 & \geq & 6 \quad c \\ x_i \geq 0,\ i = 1 \cdots 2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$6+1=7$ ✓
$6-1=5$
$3+4=7$. ✓.

La solution $x^* = (3;1)$ est-elle optimale ? Et la solution $x^* = (\frac{26}{9};\frac{7}{9})$?

$\downarrow$

D. $\begin{cases} \max z = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ \text{s.c} \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 & ① \\ y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 3 & ② \\ y_i \geq 0. \end{cases} \end{cases}$

x^* $(3, 1)$ est bien réalisable.

Cherchons s'il existe y^* réalisable de P tq x^* y^* satisfait le hypo de T.E.C.

② $\begin{cases} x^* \text{ ne sature pas a et c.} \\ x_1^* . x_2^* \neq 0. \text{ donc } ① ② \text{ saturée.} \end{cases}$ $\Rightarrow y_1^*$ $y_3^* = 0$.

$\begin{cases} 2y_1^* + 2y_2^* + y_3^* = 2 \\ y_1^* - y_2^* + 4y_3^* = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2^* = 1 \\ y_2^* = -3 \end{cases} \Leftrightarrow$ pas possible

y^* n'existe pas, par le TEC. x^* pas optimale.

* x^* $(\frac{26}{3}, \frac{7}{3})$ réalisable de (P).

59/5 ≥ 3
5 ≥ 5
6 ≥ 6

Cherchons s'il existe .....

- pas saturée a. donc $y_1^* = 0$.
- $x_1^* . x_2^* \neq 0$. $\begin{cases} 2y_2 + y_3 = 2. \\ -y_2 + 4y_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 5/9 \\ y_3 = 8/9 \end{cases}$

$y^* = (0, 5/9, 8/9)$ est réalisable de D x^* y^* satisfait les hypo de TEC de (P) et de (D) resp. donc x^* y^* optimaux

$z(x^*) = 73/9$ $\quad w(y^*) = 73/9$.

Q 24.3 On considère le programme linéaire suivant :

$$(P) \begin{cases} \max \ z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ s.c. \left| \begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 & \leq & 11 \\ x_i \geq 0, \ i = 1 \cdots 3 \end{array} \right. \end{cases}$$

Résoudre le dual de (P). En déduire la solution optimale de (P) à l'aide du théorème des écarts complémentaires.

le dual D de P est D. $\begin{cases} \text{Min } W = 11y_1 \\ \text{S.C.} \begin{cases} 3y_1 \geq 4. \\ 4y_1 \geq 5 \\ 5y_1 \geq 6 \\ y_1 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$ $\quad \boxed{y_1 \geq 4/3}$, $y_1 \geq 5/4$, $y_1 \geq 6/5$

La solut° opt de D est $y^* = 4/3$

Cherchons x^* réalisable de P tq x^* y^* sat hyp de TEC.

- 2. 3 pas sat donc x_2^*, $x_3^* = 0$.
- $y^* > 0$. $\Rightarrow$ $(11/3, 0, 0)$ réalisable de P.

D'après le TEC. x^* opt de P.
$z(x^*) = 49/3 = w(y^*)$

Exercice 26 (Fonction paramétrique et dualité)

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère le programme linéaire $\mathcal{P}(\lambda)$ défini par :

$$\min z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2\lambda \\ x_1 - x_2 \geq -3\lambda \\ -4x_1 + x_2 \geq -8\lambda \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Q 26.1 Mettre $\mathcal{P}(1)$ sous forme standard avec un second membre positif. En déduire que mettre toutes les variables d'écart en base ne correspond pas à une solution réalisable.

Q 26.2 Utiliser la méthode en deux phases (après ajout éventuel d'une ou plusieurs variables artificielles là où c'est utile) pour la résolution de $\mathcal{P}(1)$; on utilisera la méthode des tableaux pour effectuer toute itération de l'algorithme du simplexe. Vérifier ainsi que la solution optimale de $\mathcal{P}(1)$ est $x^* = (0, 1)$.

Q 26.3 En utilisant la forme initiale de $\mathcal{P}(\lambda)$ (celle avec les inégalités), écrire le problème dual $\mathcal{D}(\lambda)$ de $\mathcal{P}(\lambda)$, puis résoudre $\mathcal{D}(1)$ en vous servant du théorème des écarts complémentaires.

Q 26.4 Etudier comment évolue la solution optimale de $\mathcal{P}(\lambda)$ et sa valeur en fonction de λ pour $\lambda \geq 1$.

① $P(1)$ $\lambda = 1$.

$\min z = 3x_1 + 2x_2$.

s.c. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - e_1 = 2 \\ x_1 - x_2 - e_1 = -3 \\ -4x_1 + x_2 - e_3 = -8 \\ x_i \geq 0 \quad e_j \geq 0 \end{cases}$

la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ n'est pas réalisable, car on a $e_1 = -2 < 0$.

dans la solution associée ($x_1 = x_2 = 0$, $e_1 = -2$ $e_2 = 3$ $e_3 = 8$)

② et ③. Ecrire le dual $D(\lambda)$ de $P(\lambda)$.

Montrer en utilisant la dualité que $x^*(0,1)$ et optimale de $P(1)$.

$D(\lambda)$: $\max z = 2\lambda y_1 - 3\lambda y_2 - 8\lambda y_3$.

s.c. $\begin{cases} y_1 + y_2 - 4y_3 \leq 3 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_i \geq 0 \quad i = 2, 3, 4 \end{cases}$

$x^*(0,1)$ est réalisable de $P(1)$

$0 + 2 = 2$
$0 - 1 = -1 \geq -3$
$1 \geq -8$

· Cherchons y^* réalisable de $D(1)$ tq x^*. y^* satisfont les hypo du TEC

* (2) (3) sont inactives donc y_2^*. $y_3^* = 0$.

* $x_2^* > 0$. donc $2y_1^* - y_2^* + y_3^* = 2 \Rightarrow y_1^* = 1$ $\quad y^* = (1,0,0)$ est réalisable de $D(1)$

D'après le T.E.C x^*, y^* opt. de $P(1)$ et $D(1)$, $z_{\lambda=1}(x^*) = 2 = W_{\lambda=1}(y^*)$.

④ $\lambda \geq 1$. $y^* = (1,0,0)$ est réalisable de $D(\lambda)$ (un multiple simplant la f° obj pr λ) de valeur 2λ

Donc $OPT(P(\lambda)) = 2\lambda$ (car $OPT(P(\lambda)) = OPT(D(\lambda))$)

$(0, \lambda)$ réalisable de $P(\lambda)$ de valeur 2λ. Elle est optimale.

"Deviner" les stratégies de l'autre et essayer d'y répondre optimalement.

Vous : tirer au sort proba p : dire main droite ; $1-p$: ··· gauche

si $p \neq 0.5$ risque ; si $p = 0.75$ → je vais la cacher à gauche, et vous perdez 3 fois sur 4

→ Si on ne veut pas cela arrive : on joue $p = 0.5$

Si on fait ça tout les 2. en moyenne chacun gagne une fois sur 2.

Exercice 28 (Jeu de nombres)

On considère un jeu répété à deux joueurs (notés 1 et 2) dans lequel à chaque tour les joueurs choisissent simultanément un entier positif compris entre 1 et 100. Si les deux nombres choisis sont égaux, il n'y a pas de gain. Si un joueur choisit un nombre x strictement plus grand que le nombre y choisi par son adversaire alors cet adversaire lui donne 1 euro si $x - y = 1$ et lui prend 2 euros si $x - y > 1$ (par exemple, lorsque le joueur 2 joue 40, le joueur 1 gagne 1 s'il a joué 41 alors qu'il perd 2 s'il a joué 42 ou plus).

Q 28.1 Soit G la matrice des gains du joueur 1 pour ce jeu (matrice de taille 100×100 qu'on s'abstiendra d'écrire en extension). Donner la sous matrice de G correspondant aux 5 premieres lignes et 5 premières colonnes (nombres de 1 à 5 pour chaque joueur).

Matrice des gains J_1 (inutile de mettre J_2. car le jeu est à somme nulle)

①.

$J_1 \backslash J_2$	1	2	3	4	5 ...	100
1	0	-1	2	2	2 ...	2
2	1	0	-1	2	2 ...	2
3	-2	1	0	-1	2 ...	...
⋮	-2	-2	1	0	-1 ...	2
100	-2					

Q 28.2 Pour un joueur donné, une stratégie pure s est dite *dominée* s'il existe une autre stratégie pure s' qui procure un gain supérieur ou égal à celui associé à s pour toute stratégie pure de l'adversaire et qu'il existe en outre une stratégie pure de l'adversaire telle que le gain associé à s' soit strictement supérieur à celui associé à s pour cette stratégie. Montrer que toutes les stratégies pures du joueur 1 qui consistent à jouer un nombre strictement supérieur à 3 sont dominées. Montrer qu'il en est de même pour les stratégies du joueur 2.

②. Strategie pure dominée → mauvais coup

a dominé par b → quel que soit fait l'adversaire jouer b est au moins aussi bien que a.

Jamais intéressant de joueur a (autant jouer b)

4 est dominé par 1 (je n'ai jamais intérêt à joueur 4)
5 ...
⋮
10 ...

Si "jouer i" est une stratégie pure dominée par "Jouer 1"

si l'adversaire joue 1, jouer 1 rapporte 0.
i : -2.
2. 1 : -1
i : -2.
$j \geq 3$ 1 : 2 ce qui est le gain maxima.

Q 28.3 On note $p = (p_1, p_2, p_3)$ et $q = (q_1, q_2, q_3)$ les vecteurs de probabilités qui caractérisent les stratégies mixtes des joueurs 1 et 2 (on a $p_1+p_2+p_3 = 1$ et $q_1+q_2+q_3 = 1$). Ecrire le programme linéaire que doit résoudre le joueur 1 si la stratégie du joueur 2 est connue et caractérisée par $\hat{q} = (1/3, 1/3, 1/3)$. En déduire une stratégie optimale pour le joueur 1 face à la stratégie $\hat{q}$.

J_2 joue 1 avec proba $\hat{q}_1 = 1/3$
2 : 1/3
3 : 1/3.

espérance de gain.

J_1 : s'il joue 1 $EG = 1/3. = 0 \times 1/3 - 1 \times 1/3 + 2 \times 1/3$

2 $\quad 0$

3. $\quad -1/3$

Si J_2 joue $\hat{q}$, alors la stratégie optimale pr J_1 est de jouer 1

C'est la solution opt suivant : $\begin{cases} \text{Max } EG = 1/3\, P_1 + 0\, P_2 - 1/3\, P_3 \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} P_1 + P_2 + P_3 = 1 \\ P_i \geq 0. \end{array} \right. \end{cases}$

$p^* (1,0,0) \qquad EG_{J_1} = 1/3.$

Si je connais la stratégie de l'adversaire, je sais y répondre optimalemt.

Q 28.4 On se place maintenant dans le cas où aucun joueur ne connaît a priori la stratégie de l'adversaire. Ecrire les programmes linéaires (duaux l'un de l'autre) que doivent résoudre respectivement les joueurs 1 et 2 pour jouer optimalement l'un contre l'autre.

Pb : je ne connais pas q.

* Je suis J_1 : si je joue (P_1, P_2, P_3), que peut-il se passer de pire ?

(Quelle est la réponse opt de J_2, et quel est min EG ?)

Si J_2 joue 1 $\quad EG_{J_1} = P_2 - 2P_3 \qquad (EG_{J_2} = -EG_{J_1})$

2 $\quad EG_{J_1} = -P_1 + P_3$

3 $\quad EG_{J_1} = 2P_1 - P_2.$

Le pire qui puisse se produire, c'est que J_2 joue le coup qui mini mon EG.

Si J_1 joue (P_1, P_2, P_3), sa EG est $\min \{ P_2 - 2P_3, -P_1 + P_3, 2P_1 - P_2 \}$

· J_1 : trouver (P_1, P_2, P_3) qui max cette "pire" EG

P_1, P_2, P_3 qui maxmise $\min \{ P_2 - 2P_3, -P_1 + P_3, 2P_1 - P_3 \}$

Cela revient à résoudre (P)

$$(P) \begin{cases} \text{Max } z = EG_{J_2}. \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} z \leq P_2 - 2P_3 \\ z \leq -P_1 + P_3. \\ z \leq 2P_1 - P_2. \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1 \\ P_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{array} \right. \end{cases}$$

* Si je suis J_2. si je joue (q_1, q_2, q_3). J_1 va chercher à max son EG. maxmise sera $\max \{ -q_1 + 2q_3, q_1 - q_3, -2q_1 + q_3 \}$

J_2 : trouver q_1, q_2, q_3 qui minimise cette valeur.

D.

$$\begin{cases} \text{Max } w = EGJ_1 \\ \text{s.c.} \quad w \geq q_2 - 2q_3 \\ \quad w \geq q_1 + q_3 \\ \quad z \leq -2q_1 + q_2 \\ \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ \quad q_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

D est le dual de P. $\rightarrow opt(P) = opt(D)$

le jeu est symétrique et à somme nulle donc $opt(P) = opt(D) = 0$.

Q 28.5 Pour éviter d'être trop prévisible, le joueur 2 utilise une stratégie optimale qui combine les 3 stratégies pures à sa disposition (on suppose donc qu'il existe une stratégie optimale telle que $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ et $q_3 > 0$). Dans cette hypothèse déterminer la stratégie optimale du joueur 1.

On suppose qu'il existe q^* optimale de D avec $q_1^* > 0$ $q_2^* > 0$ $q_3^* > 0$.

On cherche p^* optimale de (P).

Conditions au TEC.

$$\begin{cases} 0 = p_2^* - 2p_3^* & (\text{car } q_1^* > 0.) \\ 0 = -p_1^* + p_3^* & (q_2^* > 0.) \\ 0 = 2p_1^* - p_2^* & (q_3^* > 0.) \end{cases}$$

Pour la réalisabilité $p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1$.

On trouve $p_1^* = 1/3$ $p_2^* = 1/2$. $p_3^* = 1/4$

C'est une solut° de valeur opt $z^* = 0$

Exercice 25 (Analyse de sensibilité)

La compagnie *Topvitrage* fabrique des vitres de haute qualité, en particulier des fenêtres et des portes vitrées. Elle possède trois usines. Les cadres en aluminium et les accessoires sont produits dans l'usine 1, les cadres en bois sont produits dans l'usine 2, enfin l'usine 3 produit les vitres et assemble les produits.
En raison de la baisse du chiffre d'affaires, la direction de la compagnie a décidé de réorganiser la ligne de production. La production des produits déficitaires est arrêtée, libérant de la capacité de production pour lancer deux nouveaux produits à fort succès potentiel :

Produit 1 : Une porte vitrée de 240 cm avec cadre en aluminium
Produit 2 : Une fenêtre double vitrage de dimension 120 cm × 180 cm avec cadre en bois

Le produit 1 nécessite de mobiliser une partie de la capacité de production des usines 1 et 3, mais sans faire appel à l'usine 2. Le produit 2 a besoin seulement des usines 2 et 3. Une étude de marché montre que la compagnie pourra vendre autant des deux produits qu'elle peut en produire. Néanmoins, du fait des capacités limitées de production, il reste à déterminer quel temps consacrer à la production des deux produits. Les données sont celles indiquées dans le tableau ci-dessous. La première ligne du tableau se lit comme suit : l'usine 1 a 4 heures de temps de production disponible par semaine, et la production d'un lot du produit 1 nécessite 1 heure.

	Prod. 1	*Prod. 2*	*Temps dispo./sem.*
Usine 1	1 heure	0 heure	4 heures
Usine 2	0 heure	2 heures	12 heures
Usine 3	3 heures	2 heures	18 heures
Profit/lot	3000 euros	5000 euros	

Q 25.1 Ecrire le programme linéaire à résoudre pour optimiser le profit.

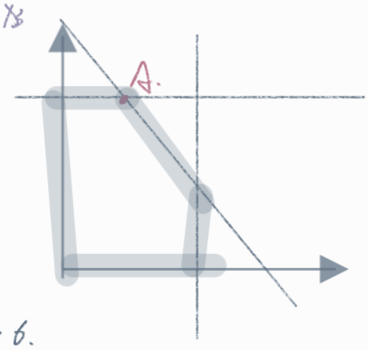
Q 25.2 Faire une résolution graphique du problème. En déduire le tableau optimal du simplexe.

Q 25.3 La compagnie envisage maintenant la production d'un produit n, dont la production nécessiterait 2 heures/lot dans l'usine 1, 3 heures/lot dans l'usine 2 et 1 heure/lot dans l'usine 3, et rapporterait un bénéfice de 4000 euros par lot. Est-ce intéressant financièrement ?

1. P. P_2.

$$\max z = 3000 x_1 + 5000 x_2 + 4000 x_3$$

s.c.
$x_1 + 2x_3 \leq 4$
$2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \leq 12$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18$
$x_i \geq 0$



② L'opt est (2) ∩ (3). $x_1^* = 2$ $x_2^* = 6$.

Sous forme standard $P' =$

$$\max z = 3000 x_1 + 5000 x_2$$

s.c.
$x_1 + e_1 = 4$
$x_2 + e_2 = 6$
$3x_1 + 2x_2 + e_3 = 18$
$x_i\ e_j \geq 0$

$x_1^* = 2$ $x_2^* = 6$ $e_1^* = 2$ $e_2^* = e_3^* = 0$. Base : $\{x_1, x_2, e_1\}$.

Tableau du simplexe correspond :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
x_1	1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2
x_2	0	1	0	1	0	6
e_1	0	0	1	$2/3$	$-1/3$	2
	0	0	0	-3	-1	-36.

$x_1 = 6 - \frac{2}{3}(6 - e_2) - \frac{1}{3}e_3$
$= 2 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3$

$e_1 = 2 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$

$z = 6 + 2e_2 - e_3 + 30 - 5e_2$ en k€.
$= 36 - 3e_2 - e_3$

③ Soit D le dual de (P).

$$\text{Min } w = 4y_1 + 6y_2 + 18y_3$$

s.c.
$$\begin{cases} y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

$X^* = (2, 6)$

$2y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 \geq 4$.

$2 \times 0 + \frac{3}{2} \times 3 + 1 \times 1 \geq 4$.

y^* réalisable de D_2. $w(y^*) = 36$

$x = (2, 6, 0)$ est réalisable de (P)

avec $z(x) = 36$

$(2, 6, 0)$ opt de P_2. produit 3 pas nécessaire.

Cherchons y^* ... TEC.

$2 < 4$

$12 = 12$.

$6 + 12 = 18$

- ''' mn salarié donc $y_1^* = 0$.
- $x_1^* > 0$ $x_2^* > 0$ donc $\begin{cases} y_1^* + 3y_3^* = 3 \\ y_2^* + 2y_3^* = 5 \end{cases}$ $\quad y_3^* = 1$, $y_2^* = 3$

$y^* = (0, 3, 1)$ est réalisable de D.

y^* est optimale de D par le TEC. $w(y^*) = 36 = z(x^*)$

Exercice 27 (Jeu de Morra)

Dans cet exercice, on cherche à identifier une stratégie gagnante pour le jeu de Morra. Dans ce jeu, à chaque tour, chaque joueur cache un ou deux pions, et essaye de parier, à voix haute, combien de pions l'autre joueur a caché. Si un seul des joueurs a parié la bonne solution, son score augmente d'autant de points qu'il y a de pions cachés en tout ; le score de l'autre joueur diminue du même nombre de points. Sinon, rien ne se passe. Par exemple, si Claire cache 2 pions et parie 1 tandis que Paul cache 2 pions et parie 2, Paul gagne 4 points et Claire en perd 4.

A chaque étape, chaque joueur a donc le choix entre 4 actions :
- [1,1] : cacher 1 pion, parier 1 pion,
- [1,2] : cacher 1 pion, parier 2 pions,
- [2,1] : cacher 2 pions, parier 1 pion,
- [2,2] : cacher 2 pions, parier 2 pions.

Q 27.1 Définir la matrice G des gains pour ce jeu.

		Claires			
		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
Paul	[1,1]	0	2	-3	0
	[1,2]	-2	0	0	3
	[2,1]	+3	0	0	-4
	[2,2]	0	-3	4	0