Exercice 49 (Problème d'import-export)

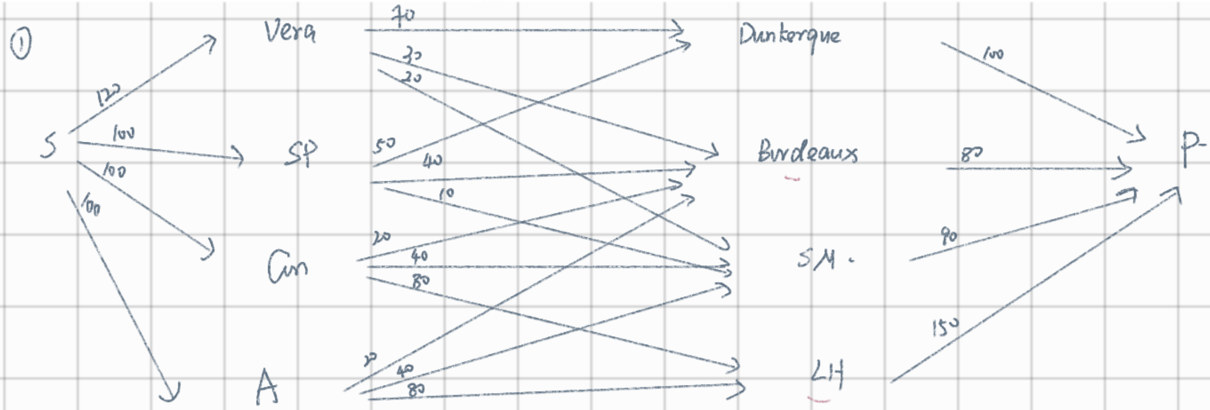
Une société d'import-export dispose, dans les ports de Veracruz, Sao Paulo, Conakry et Abidjan, de stocks de café de respectivement 120t, 100t, 100t et 100t, pour lesquels elle a reçu des commandes d'importateurs de Dunkerque (100t), Bordeaux (80t), Saint-Nazaire (90t) et Le Havre (150t). Divers bateaux se rendent des ports étrangers considérés vers les ports français de destination. Les tonnages sont donnés par le tableau suivant :

		100	80	90	150
		Dunkerque	Bordeaux	Saint-Nazaire	Le Havre
120	Veracruz	70	30	20	
100	Sao Paulo	50	40	10	
100	Conakry		20	40	80
100	Abidjan		20	40	80

Q 49.1 Modéliser ce problème sous la forme de la recherche d'un flot maximum dans un réseau de transport.

Q 49.2 Déterminer les diverses cargaisons de façon à satisfaire au mieux les demandes, les commandes destinées à Bordeaux et au Havre étant prioritaires.

①



②. $S \xrightarrow{120} V \xrightarrow{30} B \xrightarrow{80} t$ 30

$S \xrightarrow{100} SP \xrightarrow{40} B \xrightarrow{50} t$ 40.

$S \xrightarrow{100} C \xrightarrow{20} B \xrightarrow{10} t$ 10

$S \xrightarrow{90} C \xrightarrow{80} LH \xrightarrow{150} t$ 80.

$S \xrightarrow{100} A \xrightarrow{80} LH \xrightarrow{70} t$ 70.

$S \xrightarrow{90} V \xrightarrow{70} D \xrightarrow{100} P$ 70.

$S \xrightarrow{60} SP \xrightarrow{50} D \xrightarrow{30} P$ 30.

$S \xrightarrow{20} V \xrightarrow{20} SN \xrightarrow{90} P$ 20.

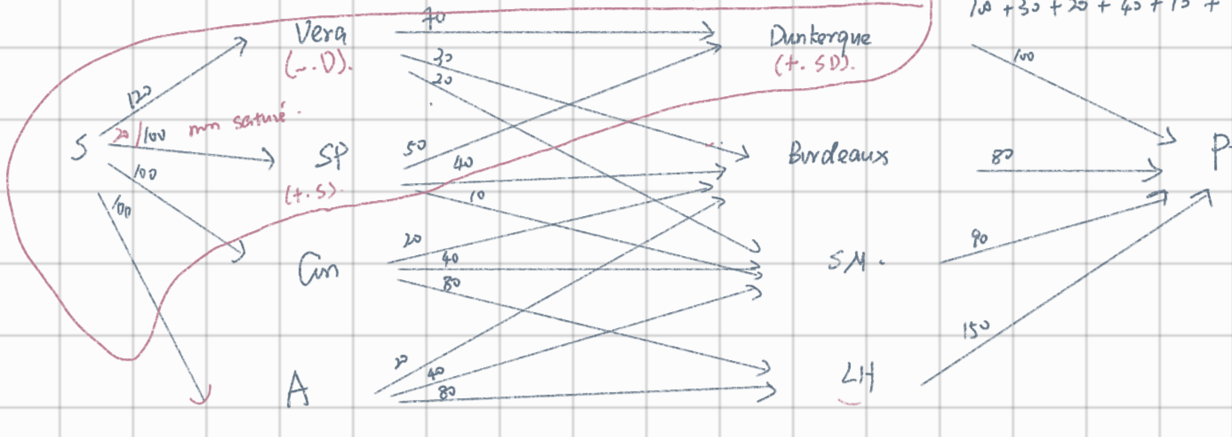
$S \xrightarrow{30} SP \xrightarrow{10} SN \xrightarrow{70} P$ 10

$S \xrightarrow{10} C \xrightarrow{40} SN \xrightarrow{60} P$ 10.

$S \xrightarrow{30} A \xrightarrow{40} SN \xrightarrow{50} P$ 30.

⇒ Valeur flot 400. est-il un flot max ?

10 + 30 + 20 + 40 + 10 + 60 + 100 = 400.



arc saturé e
f(e) = c(e).

(S. SP. V D) (A B. SN. LH. t. C)

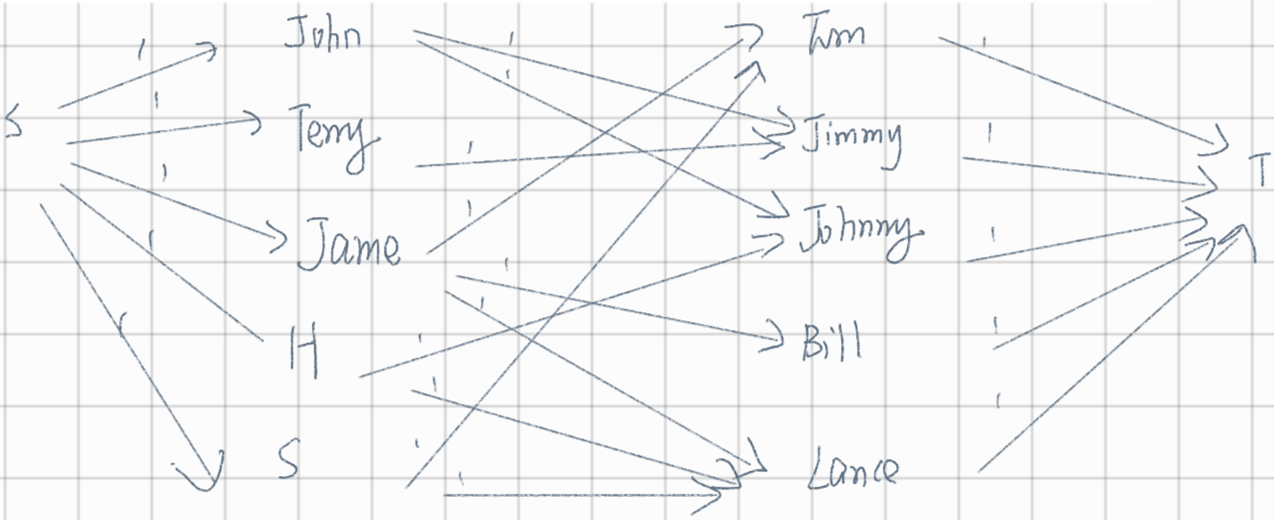
Exercice 50 (Bataille d'Angleterre)

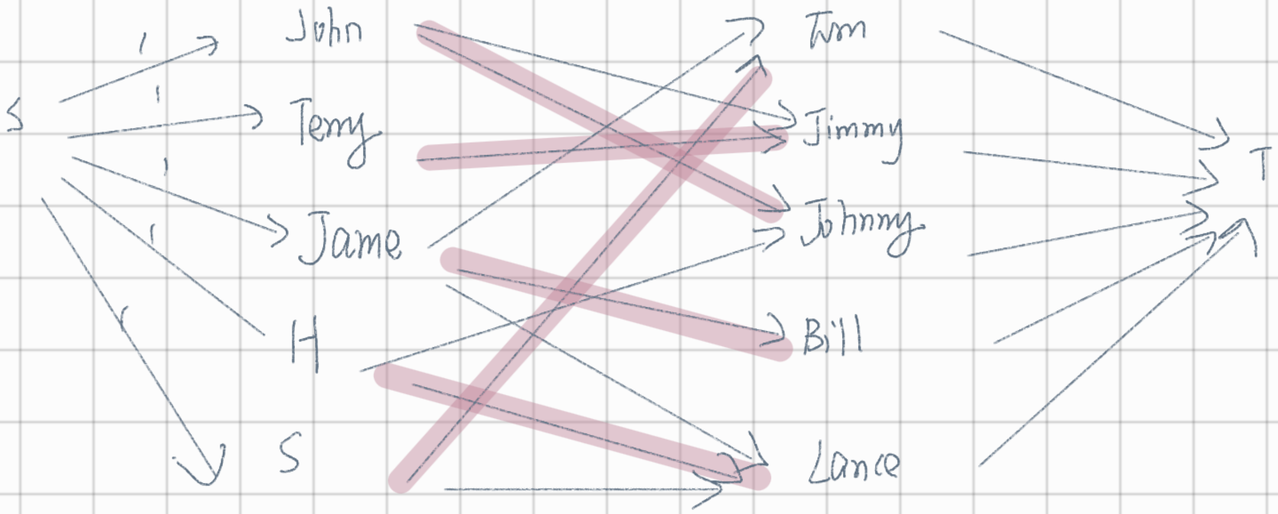
Lors de la seconde guerre mondiale, la bataille d'Angleterre se déroula surtout dans le ciel. Les biplaces anglais comportait un pilote et un mitrailleur. Du fait des besoins de coordination entre les deux équipiers, le pilote et le mitrailleur devaient avoir réalisé des sorties d'entraînement ensemble pour pouvoir ensuite sortir ensemble en conditions réelles. Le tableau ci-dessous, comportant les pilotes en ligne et les mitrailleurs en colonne, indique les équipiers potentiels ayant déjà réalisé des sorties d'entraînement ensemble. Les Anglais visaient bien évidemment à composer des équipes permettant d'avoir le plus possible d'avions simultanément dans le ciel.

p/m	Tom	Jimmy	Johnny	Bill	Lance
John		X	X		
Terry		X			
James	X			X	X
Henry			X		X
Steve	X				X

Q 50.1 Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de flot maximum dans un réseau de transport.

Q 50.2 En première approche, on a formé les équipes (John,Johnny), (Terry,Jimmy), (James,Bill) et (Steve,Lance). Proposer une meilleure solution.





Ex51.

Un individu souhaite organiser une soirée regroupant plusieurs de ses amis. Cependant, afin de préserver une ambiance conviviale, il sait qu'il vaut mieux éviter de mettre en présence certains de ceux-ci. Les incompatibilités de caractères sont représentées sur le graphe biparti G de la figure 1, dont les sommets figurent les différents amis et les arêtes figurent les incompatibilités. La détermination d'un groupe d'amis le plus large possible à inviter correspond à la recherche d'un ensemble stable de cardinalité maximale sur G. On rappelle qu'un ensemble stable d'un graphe non orienté est un sous-ensemble S de sommets tel qu'aucune arête n'a ses deux extrêmités dans S.

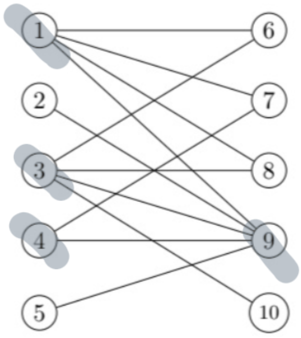


FIGURE 1 – Graphe des incompatibilités de caractères.

Les deux questions qui suivent visent à montrer que la détermination d'un ensemble stable de cardinalité maximale sur G peut se ramener à la résolution d'un problème de flot maximum.

Q 51.1 Montrer que le complément dans X (ensemble des sommets) de toute couverture est un ensemble stable, et réciproquement que le complément de tout ensemble stable est une couverture. En déduire que rechercher un stable de cardinalité maximale est équivalent à rechercher une couverture de cardinalité minimale. On rappelle qu'une couverture est un sous-ensemble de sommets tel que toute arête du graphe a au moins une de ses extrêmités dans le sous-ensemble.

Stable

Couverture.

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Q. $\exists$ une couverture de cardinalité < 5.

$C = \{1, 3, 9, 4\}$ 所有 arête.

l'ensemble des sommets

le complement de C est X / C

** Le complément d'un stable est une Couverture

Soit S le stable et soit $\bar{S} = X/C$ son complément.

Par l'absurde. on va supposer que $\bar{S}$ n'est pas un couverture.

$\rightarrow \exists$ une arête dont aucun extremite ne fait partie de $\bar{S}$

$\rightarrow$ ses 2 extrémité fait partie de S. Contradit°.

** le complément d'une couverture est un stable

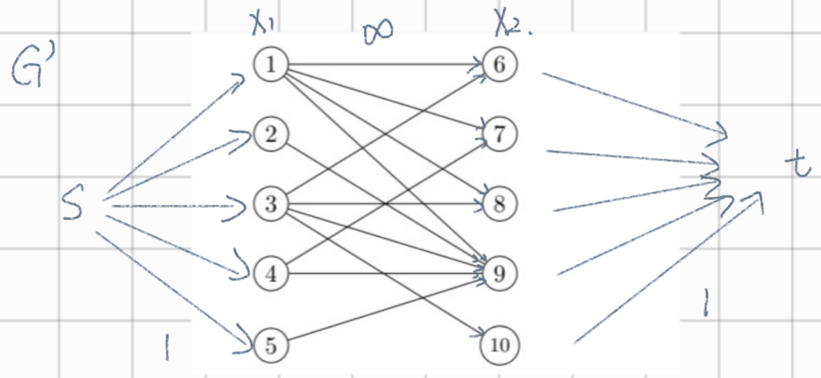
Soit C la couverture et soit $\bar{C} = X/C$ son complément.

Par l'absurde. On va suppose que $\bar{C}$ n'est pas un stable.

$\Rightarrow \exists$ une arête dont les 2 extrémités sont dans $\bar{C}$

et donc C n'est pas une couverture.

Q 51.2 Soient X_1 et X_2 les deux sous-ensembles stables de sommets en lesquels X se partitionne. Construire un graphe orienté G' à partir de G, muni d'une source s et d'un puits t, puis déterminer des capacités sur les arcs de G' de façon à ce que la valeur de la coupe minimum séparant s et t dans G' soit égale à la valeur d'une couverture minimum dans G. Pour le prouver, montrer tout d'abord que si (S, T) est une coupe minimum dans G', obtenue au terme de l'algorithme de Ford et Fulkerson, alors l'ensemble $(X_1 \cap T) \cup (X_2 \cap S)$ est une couverture sur G de même valeur. Montrer ensuite que pour toute couverture C dans G, la valeur de la coupe $(\{s\} \cup (\bar{C} \cap X_1) \cup (C \cap X_2), \{t\} \cup (C \cap X_1) \cup (\bar{C} \cap X_2))$ dans G' est égale à la cardinalité de C.



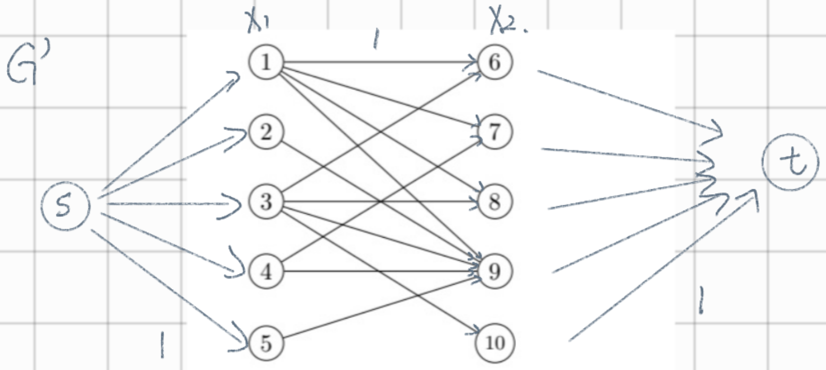
Obs

La capacité d'une coupe minimum est finie.

la taille d'une couverture mini dans G.

la capacité d'une coupe mini dans G'

Est-ce que la capacité d'une coupe mini dans G peut être infinie ?



* Soit (S.T) la coup min obtenue à la fin de l'algorithme de Ford et Fulkerson. Mq $(X_1 \cap T) \cup (X_2 \cap T)$ est une couverture de graphe G.

Supposons que $(X_1 \cap T) \cup (X_2 \cap T)$ n'est pas une couverture. Dans ce cas, il existe une arête $e = (\underset{\in X_1}{i}, \underset{\in X_2}{j})$ tel que $\begin{cases} i \notin (X_1 \cap T) \cup (X_2 \cap S) \\ \text{et} \\ j \notin (X_1 \cap T) \cup (X_2 \cap S) \end{cases}$

Donc forcément on a $i \notin T$.

Comme (S.T) forme une partit° de l'ensemble des sommets.

On en déduit que $i \in S$.

Donc le sommet i est marqué

D'après l'algo de marquage on en déduit que j est forcément marqué

Donc $j \notin S$.

Or $j \notin X_2 \cap S$ par l'hypothèse.

Donc contradict°

$$* \; v(S.T) = \sum_{i \in X_1 \cap T} c(s, i) + \sum_{j \in X_2 \cap T} c(i, t)$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cardinalité}}}{|X_1 \cap T|} + |X_2 \cap S|.$$

Soit C une couverture dans G. Mq $(\overbrace{\{s\} \cup (\bar{C} \cap X_1) \cup (C \cap X_2)}^{S'}, \overbrace{\{t\} \cup (C \cap X_1) \cup \underbrace{(\bar{C} \cap X_2)}_{\emptyset \text{ car } \in X_1}}^{T'})$ a la même valeur que C., c'est à dire qu'elle est égale à $|C|$

$$v(S', T') = \sum_{i \in C \cap X_1} c(s, i) + \cancel{\sum_{\substack{i \in \bar{C} \cap X_1 \\ j \notin C \cap X_2}} c(i, j)} + \sum_{i \in C \cap X_2} c(i, t).$$

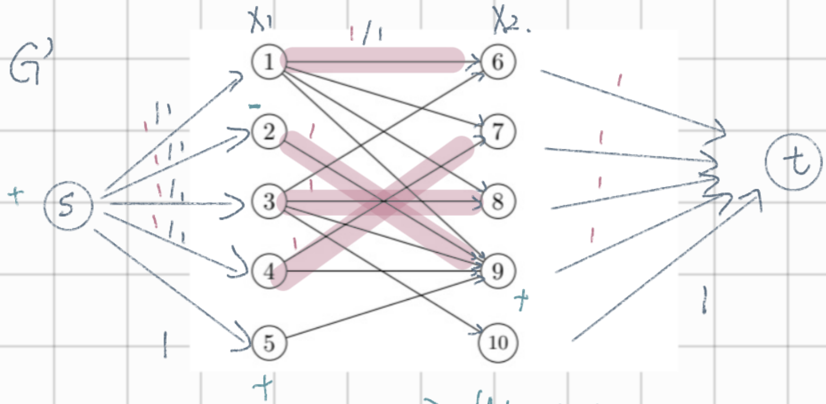
$X_1 \to X_2$

$(= 0, \; C \text{ couverture.})$

$$= |C \cap X_1| + |C \cap X_2|$$

$$= |C|.$$

Q 51.3 Appliquer l'algorithme de Ford et Fulkerson pour déterminer un flot maximum sur le graphe construit dans la question précédente. On expliquera de façon claire et détaillée les étapes de successives de la détermination de ce flot maximum. Expliquer ensuite en détail comment on peut déduire de ce calcul un ensemble stable de cardinalité maximale sur G. On indiquera précisément la liste des sommets composant cet ensemble stable.



$\Rightarrow$ flot max.

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{coupe min}}}{C} = (S.T)$ avec $S = \{s. 5. 9. 2\}$.

$T = \{t, 1, 6. 7 \; 8. 3. 4. 10\}$

La couverture min est donc $(X_1 \cap T) \cup (X_2 \cap S)$

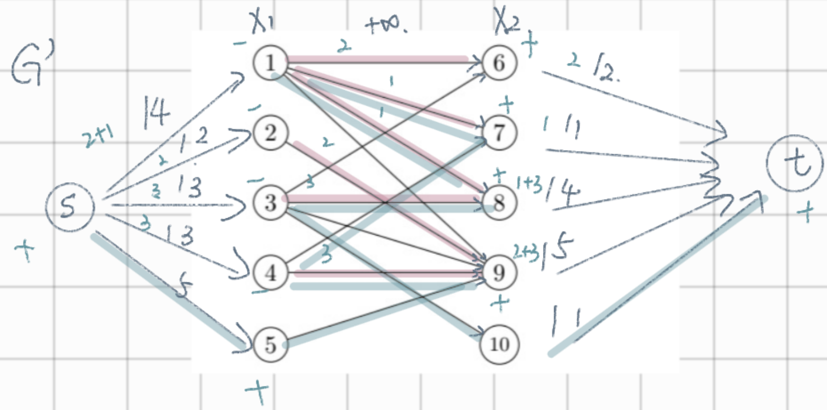
$= \{1, 3. 4. 9\}$.

Donc l'ensemble stable de taille max est obtenu en prenant le complémentaire. On obtient donc $\{2. 5. 6. 7. 8. 10\}$

Q 51.4 Supposons maintenant que chacun des amis ne présente pas la même utilité pour leur hôte. On souhaite donc prendre en compte cet aspect dans le modèle. Pour ce faire, à chaque sommet i du graphe G on associe un *poids* noté $w(i)$, dont la valeur, pour chaque sommet, est précisée dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$w(i)$	4	2	3	3	5	2	1	4	5	1

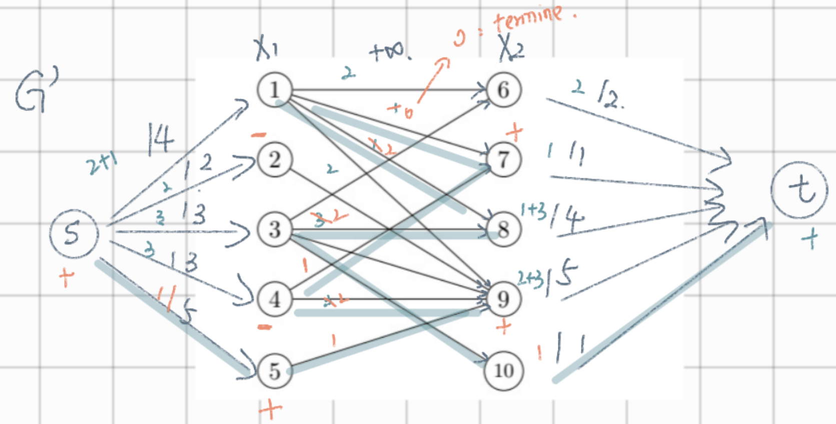
On recherche maintenant un ensemble stable de G *de poids maximal*, le poids d'un sous-ensemble de sommets étant égal à la somme des poids des sommets qui le composent. Montrer pourquoi et comment ce problème peut, lui aussi, se ramener à la résolution d'un problème de flot maximum dans un graphe qu'on précisera, en indiquant clairement les capacités attribuées à chacun des arcs.



① flot.

② coupe

2+1 +4 + 5 = 12.



nouvelle.

$C = (S.T)$ avec $S = \{s. 2. 4. 5. 7. 9\}$

coupe min $\quad T = \{t, 1, 3. 6. 8, 10\}$.

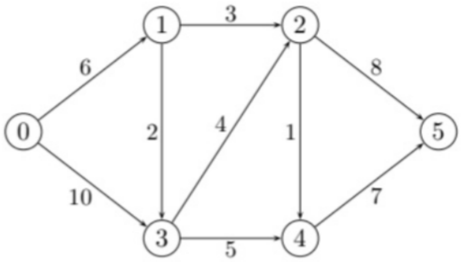
La couverture min est donc $(X_1 \cap T) \cup (X_2 \cap S)$

$= \{1. 3. 7. 9\}$.

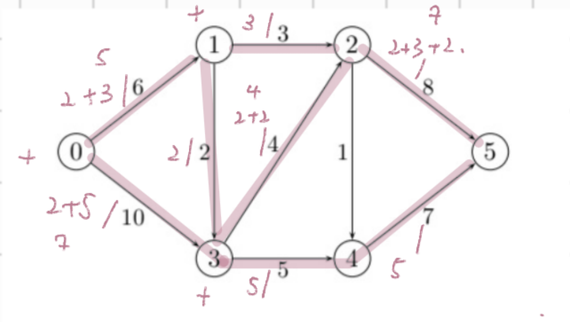
Donc l'ensemble stable de taille max est obtenu en prenant le complémentaire. On obtient donc $\{2. 4. 5. 6. 8, 10\}$.

Exercice 52 (Minimisation d'une fonction quadratique)

On considère le graphe orienté suivant dont les arcs sont munis de capacités.



Q 52.1 Déterminer un flot maximum et une coupe minimale séparant 0 de 5. On associe maintenant une variable 0-1 à chaque sommet du graphe en attribuant la valeur 1 à x_0 et la valeur 0 à x_5, et on considère la coupe séparant le sous-ensemble $S = \{i : x_i = 1\}$ de $\bar{S} = \{i : x_i = 0\}$. Montrer que la capacité de cette coupe peut s'exprimer comme une fonction quadratique (i.e., de degré 2) des variables x_i. En déduire que la recherche d'une coupe minimale séparant deux sommets donnés dans un graphe peut se ramener à la minimisation d'une fonction quadratique en variables 0-1. Que peut-on dire des coefficients des termes quadratiques dans la fonction obtenue ?



*. La coupe min : $C^* = (S^*, T^*)$ avec $S^* = \{0, 1, 3\}$

$T^* = \{2, 4, 5\}$.

*. Soit $C = (S, T)$ la coupe définit par les variables x_i

$$V(S,T) = \sum_{\substack{(i,j)\in E \\ \text{avec } i\in S \\ j \in T}} C_{ij} = \sum_{(i,j)} C_{ij}\, x_i (1 - x_j).$$

Donc trouver la coupe de valeur min revient à miniser la f°

$$f(x) = \sum_{(i,j)\in E} C_{ij}\, x_i (1 - x_j)$$

Les coefficients des termes quadratiques $(-C_{ij})$ sont negatifs

Q 52.2 Soit la fonction quadratique :

$$g(x) = -2x_1 + 15x_2 - 3x_3 + 10x_4 - 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - 2x_2x_3 - 9x_2x_4 - 5x_3x_4$$

Montrer que la minimisation de cette fonction peut se ramener à la recherche d'une coupe minimale (donc d'un flot maximum) sur un graphe que l'on construira. En déduire la valeur de $\min_{x\in\{0,1\}^4}\{g(x)\}$.