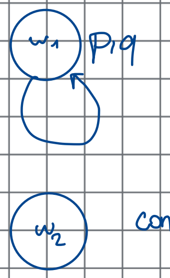
LRC - TD5 20/10/2022

$\Box$: box
$\Diamond$: diamant

Exercice 3

Rappel : - valide → tous les modèles sont satisfiables, c-à-d. vrais.
- satisfiable → au moins un modèle est vrai.
- insatisfiable → tous les modèles sont faux.

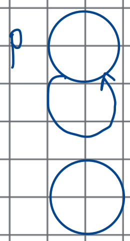
1. $p \land \Diamond (p \to q)$



⇒ satisfiable

contre-exemple ⇒ non-valide

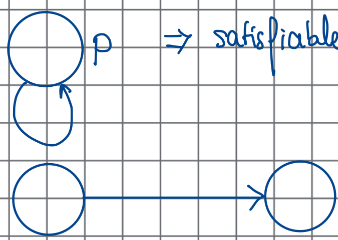
2. $\Box p \to \Diamond p$



⇒ satisfiable

⇒ non-valide

3. $\Diamond \Box p \to \Box \Diamond p$



⇒ satisfiable

contre-exemple ⇒ non-valide

4. $\Diamond p \land \Box \neg p$

Si satisfiable : $M, w \models \Diamond p \land \Box \neg p \iff M, w \models \Diamond p$ et $M, w \models \Box \neg p$

$\iff$ il existe w_0 tq $(w, w_0) \in R$ et $M, w_0 \models p$ et pour tous les mondes w' tq $(w, w') \in R$ on a $M, w' \models \neg p$.

$\iff$ __________ et $M, w_0 \models \neg p$

$\iff$ $w_0 \in I(p)$ et $w_0 \notin I(p)$. ⇒ contradiction.

Notre formule est insatisfiable.

5. $\Box (p \land q) \longrightarrow (\Box p \land \Box q)$

Si non valide : Alors, $\exists M, w$ tq :

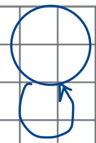
$M, w \not\models \Box(p \land q) \to (\Box p \land \Box q)$ ssi $M, w \models \Box(p \land q)$ et $M, w \not\models \Box p \land \Box q$
et $\exists w_0$ tq $M, w_0 \not\models p$ ou $\exists w_1$ tq $M, w_1 \not\models q$

dans tous les w' tq $(w, w') \in R$, on a $M, w' \models p \land q$ et (...).
il existe w_0 tq $(w, w_0) \in R$ tq $M, w_0 \not\models p$ et $M, w_0 \models p$ ou
il existe w_1 tq $(w, w_1) \in R$ tq $M, w_1 \not\models q$ et $M, w_1 \models q$

contradiction. 5. est valide.

LRC - TD5 | 20/10/2022

6. $\Diamond a \rightarrow \Diamond(b \vee \neg b)$



satisfiable

Si non valide:

Alors, $\exists M, w$ tq $M, w \not\models \Diamond a \rightarrow \Diamond(b \vee \neg b)$ ssi

il existe w tq $M, w \not\models \Diamond a$ <u>et</u> $M, w \not\models \Diamond(b \vee \neg b)$

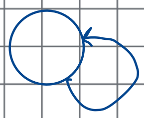
$\exists w_0$ (w, w_0) tq $M, w_0 \models a$ et $\nexists w_1$, $M, w_1 \models b \vee \neg b$ ← tautologie (toujours vraie)

$\models$ vrai

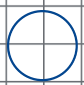
or w_0 est au moins accessible d'après w $\Rightarrow$ contradiction.

$\Rightarrow$ valide

7. $\Box \neg a \rightarrow \neg \Box a$



satisfiable



contre-ex. $\rightarrow$ non-valide

tautologie : proposition toujours vraie