Projet MOGPL

Optimisation Equitable

Fanxiang Zeng
Zhe Wang

SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

15 Nov 2022

Contents

1 Linéarisation de f

1.1

soit

$$\min \sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i$$

$$s.c. \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k$$

$$a_{ik} \in \{0, 1\}, i = 1, ..., n$$

qui cherche à minimiser la somme des $a_{ik}z_i$ avec $a_{ik} \in \{0, 1\}$ et comme contrainte $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k$. Donc nous avons au strictement kz_i pour satisfaire la contrainte. Pour minimiser $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}z_i$, on doit choisir les plus petits z_i et comme z_i est strictement croissant, les plus petits z_i sont les i-premiers z_i ce qui correspondraient donc à $\sum_{i=1}^{k} z(i)$ et nous avons

$$L_K(z) = \sum_{i=1}^{k} z(i)$$

Donc L_k est équivalent au minimum de notre fonction objectif, qui représente l'optimalité de $\min \sum_{i=1}^{n} a_{ik}z_i$

1.2

Soit P :

$$\min \sum_{i=0}^{n} a_{ik} z_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k \\ a_{ik} \leq 1 \end{cases}$$

$$a_{ik} \geq 0, i = 1, \cdots, n$$

le dual D de P

$$\max kr_k - \sum_{i=0}^{n} b_{ik}$$

$$s.c. \{ r_k - b_{ik} \leq z_i$$

$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0, i = 1, \cdots, n$$

Calculons par programmation linéaire les composants du vecteur L(4, 7, 1, 3, 9, 2)

$$\max kr_k - \sum_{i=0}^{6} b_{ik}$$

$$s.c. \begin{cases} r_k - b_{1k} \leq 1 \\ r_k - b_{2k} \leq 2 \\ r_k - b_{3k} \leq 3 \\ r_k - b_{4k} \leq 4 \\ r_k - b_{5k} \leq 7 \\ r_k - b_{6k} \leq 9 \end{cases}$$

Nous obtenons telle programmation linéaire avec z_i croissant. En mettant ce PL dans gurobi solver nous trouvons :

$$L_1(z) = 1, L_2(z) = 3, L_3(z) = 6, L_4(z) = 10, L_5(z) = 17, L_6(z) = 26$$

1.3

Montrons que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} w'_k(kr_k - L_k(z(x))$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} w'_k L_k(z(x)) + w'_n L_n(z(x)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(w_k - w_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} z_i(x) + w_n \sum_{i=1}^{n} z_i(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} w_k \sum_{i=1}^{k} z_i(x) - \sum_{k=1}^{n-1} w_{k+1} \sum_{i=1}^{k} z_i(x) + w_n \sum_{i=1}^{n} z_i(x) \\
&= w_1 z_1 + w_2(z_1 + z_2) + w_3(z_1 + z_2 + z_3) + ... + w_{n-1}(z_1 + ... + z_{n-1}) + w_n(z_1 + ... + z_n) \\
&\quad - (w_2(z_1) + w_3(z_1 + z_2) + ... + w_n(z_1 + ... + z_{n-1})) \\
&= w_1 z_1 + w_2 z_2 + ... + w_n z_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i z_i \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

1.4

La maximisation de f(x) sur un ensemble X decrit par des contraints linéaires peut s'écrire sous la forme du programme linéaire suivant:

$$\max \sum_{k=1}^{n} w'_k(kr_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik})$$

$$s.c. \begin{cases} r_k - b_{ik} \leq z_i(x), i = 1, \cdots, n \\ x \in X \end{cases}$$

$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0, i = 1, \cdots, n$$

Reformulons le problème de l'exemple 1 avec cette linéarisation

$$\max \sum_{k=1}^{2} w'_k(kr_k - \sum_{i=1}^{2} b_{ik})$$
$$= w'_1(r_1 - \sum_{i=1}^{2} b_{i1}) + w'_2(2r_2 - \sum_{i=1}^{2} b_{i2})$$

$$s.c. \begin{cases} r_k - b_{ik} \leq z_i(x) \\ x \in X \end{cases} \iff s.c. \begin{cases} r_1 - b_{11} \leq z_1(x) = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 \\ r_1 - b_{12} \leq z_1(x) = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 \\ r_2 - b_{21} \leq z_2(x) = 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 5x_5 \\ r_2 - b_{22} \leq z_2(x) = 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 5x_5 \\ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 3 \end{cases}$$

$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0; i, k \in \{1, 2\}; x_i \in \{0, 1\}$$

Remarque : ici les w'_k sont des poids qui sont fixées par les utilisateurs nous pourront les fixer à 1 pour le moment pour les enlever de la fonction objectif.
Réécrivons le PL en mettant toutes les variables à gauche :

$$\max r_1 - \sum_{k=1}^{2} b_{i1} + 2r_2 - \sum_{i=1}^{2} b_{i2}$$

$$s.c. \begin{cases} r_1 - b_{11} - 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 8x_4 - x_5 \leq 0 \\ r_1 - b_{12} - 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 8x_4 - x_5 \leq 0 \\ r_2 - b_{21} - 3x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 5x_5 \leq 0 \\ r_2 - b_{22} - 3x_1 - 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 5x_5 \leq 0 \\ x1 + x2 + x3 + x4 + x5 = 3 \end{cases}$$

$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0; i, k \in \{1, 2\}; x_i \in \{0, 1\}$$

En entrant le PL dans le gurobi solver nous trouvons comme resultat :

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 0; x_5 = 0$$

$$r_1 = 16, r_2 = 18$$

$$b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{21} = 0, b_{22} = 2$$

$$\max r_1 - \sum_{k=1}^{2} b_{i1} + 2r_2 - \sum_{k=1}^{2} b_{i2} = 50$$

2 Application au partage équitable de biens indivisibles

2.1

n individus doivent se partager $p \geq n$ objets indivisibles de valeur connue, chaque individu ayant sa propre idée de l'utilité des objets pour lui. On souhaite répartir les p objets équitablement entre les n individus, pour cela on cherche l'affectation x des objets aux individus qui maximise $f(x)$

Selon les questions precedentes nous avons comme PL

$$\max f(x) = \sum_{i}^{n} w_i z_i$$
$$= \max \sum_{k=1}^{n} w'_k (kr_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik})$$
$$s.c. \begin{cases} r_k - b_{ik} \leq z_i(x), i = 1, \cdots, n \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 1 \end{cases}$$
$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0; i \in \{1, \cdots, n\}; j \in \{1, \cdots, p\}; x_{ij} \in \{0, 1\}$$

avec $z_i(x) = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_{ij}$
Réécrivons le PL adaptant au problème pour n = 3, p = 6, w' = (1,1,1) trouver à partir de w = (3,2,1), nous remplaçons u_{ij} par les valeurs écrites dans l'article tel que $u_{i1} = 325, u_{i2} = 225, u_{i3} = 210, u_{i4} = 115, u_{i5} = 75, u_{i6} = 50$:

$$\max \sum_{k=1}^{3} w'_k (kr_k - \sum_{i=1}^{3} b_{ik})$$
$$= (r_1 - (b_{11} + b_{21} + b_{31})) + (2r_2 - (b_{12} + b_{22} + b_{32})) + (3r_3 - (b_{13} + b_{23} + b_{33}))$$
$$s.c. \begin{cases} r_1 - b_{11} \leq z_1(x) = 325x_{11} + 225x_{12} + 210x_{13} + 115x_{14} + 75x_{15} + 50x_{16} \\ r_1 - b_{21} \leq z_2(x) = 325x_{21} + 225x_{22} + 210x_{23} + 115x_{24} + 75x_{25} + 50x_{26} \\ r_1 - b_{31} \leq z_3(x) = 325x_{31} + 225x_{32} + 210x_{33} + 115x_{34} + 75x_{35} + 50x_{36} \\ r_2 - b_{12} \leq z_1(x) = 325x_{11} + 225x_{12} + 210x_{13} + 115x_{14} + 75x_{15} + 50x_{16} \\ r_2 - b_{22} \leq z_2(x) = 325x_{21} + 225x_{22} + 210x_{23} + 115x_{24} + 75x_{25} + 50x_{26} \\ r_2 - b_{32} \leq z_3(x) = 325x_{31} + 225x_{32} + 210x_{33} + 115x_{34} + 75x_{35} + 50x_{36} \\ r_3 - b_{13} \leq z_1(x) = 325x_{11} + 225x_{12} + 210x_{13} + 115x_{14} + 75x_{15} + 50x_{16} \\ r_3 - b_{23} \leq z_2(x) = 325x_{21} + 225x_{22} + 210x_{23} + 115x_{24} + 75x_{25} + 50x_{26} \\ r_3 - b_{33} \leq z_3(x) = 325x_{31} + 225x_{32} + 210x_{33} + 115x_{34} + 75x_{35} + 50x_{36} \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ji} = 1 \end{cases}$$
$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0; i \in \{1, \cdots, n\}; j \in \{1, \cdots, p\}; x_{ij} \in \{0, 1\}$$

avec $z_i(x) = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_{ij}$

En mettant ce PL dans gurobi solver(cf. q21.py) nous trouvons comme profit maximisé 1985, avec pour chaque individu ayant une utilité de l'ensemble des objets affectés à l'individu $z_1 = 340, z_2 = 335, z_3 = 325$ Et la satisfaction moyenne des individus $(z_0 + z_1 + z_2)/3 = 333.33$

Pour $w = \{10, 3, 1\}$ nous avons $w' = \{7, 2, 1\}$ nous modifions seulement la fonction objectif pour mettre le nouveau PL dans gurobi:

$$\max \sum_{k=1}^{3} w'_k(kr_k - \sum_{i=1}^{3} b_{ik})$$

$$= 7(r_1 - (b_{11} + b_{21} + b_{31})) + 2(2r_2 - (b_{12} + b_{22} + b_{32})) + (3r_3 - (b_{13} + b_{23} + b_{33}))$$

Nous obtenons comme resultat:

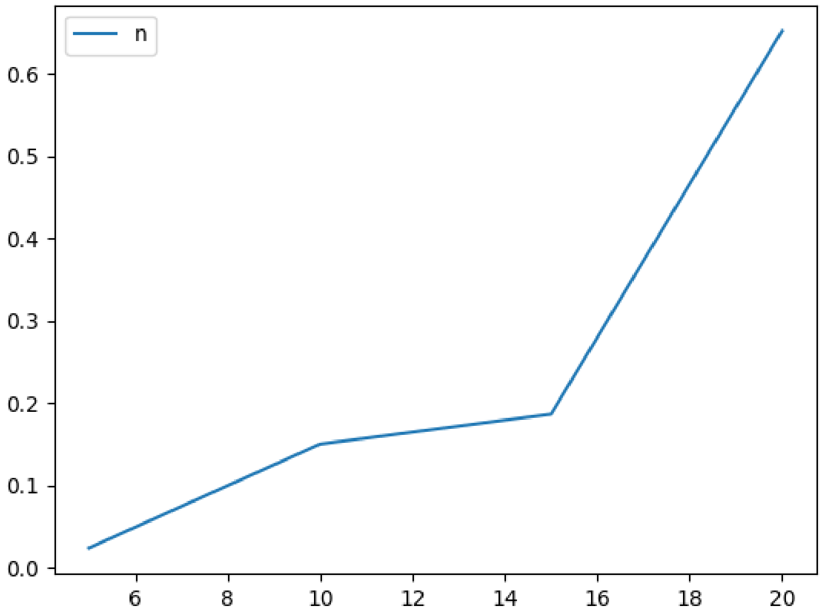
$$z_0 = 340, z_1 = 335, z_2 = 325$$
$$(z_0 + z_1 + z_2)/3 = 333.33$$

$$\text{profit maximisé} = 4595$$

Conclusion: Dans les 2 scénarios, les moyennes de satisfaction sont égales. On remarque que dans les 2 cas on retrouve les même solutions, en ayant juste une différence sur l'optimum. Cela montre que l'optimisation est bien équitable, et nous obtenons une moyenne maximale, et donc les objets sont répartie, équitablement.

2.2

Afin d'étudier l'évolution du temps de résolution en fonction de n et p. Nous avons pour $n = 5, 10, 15, 20$ et $p = 5n$ dans notre modèle (cf. q22.py) et on a obtenu le graphe ci-dessous avec en sur l'abscisse les valeur de n, et en ordonné le temps d'optimisation moyenne pour chaque n.



Nous observons que le temps d'optimisation moyenne augmente très rapidement quand n et p devient grand. En effet le nombre de variable et de contrainte sont dépendente de n et de p, au plus ils sont grand au plus on a des variables et des contraintes et du coup gurobi va mettre plus de temps pour faire l'optimisation.
P.S : dans le cas où $n = 20$ *comme y'a tellement de contrainte gurobi nous demande d'avoir sa licence pro, que nous avons obtenue gratuitement avec une licence étudiant.*

3 Application à la selection multicritère de projets

3.1

$$\max f(x) = \sum_{i}^{n} w_i z_i$$
$$= \max \sum_{k=1}^{n} w'_k(kr_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik})$$
$$s.c. \begin{cases} r_k - b_{ik} \leq z_i(x), i = 1, \cdots, n \\ \sum_{j=1}^{p} x_j c_j \leq b \end{cases}$$
$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0; i \in \{1, \cdots, n\}; j \in \{1, \cdots, p\}; x_j \in \{0, 1\}$$

avec $z_i(x) = \sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_j$ et $b = 1/2 \sum_{k=1}^{p} c_k$

Traduisons la formule pour répondre à la question en prenant $p = 4; n = 2$ et la matrice a = $[[19, 6, 17, 2], [2, 11, 4, 18]]$, cout = $[40, 50, 60, 50]$ et $w' = (1, 1)$ trouver à partir de $w = (2, 1)$. Ces valeurs sont issues du document optimequi20.pdf

$$\max \sum_{k=1}^{2} w'_k(kr_k - \sum_{i=1}^{2} b_{ik})$$
$$= (r_1 - (b_{11} + b_{21})) + (2r_2 - (b_{12} + b_{22}))$$

$$s.c. \begin{cases} r_1 - b_{11} \leq z_1(x) = 19x_1 + 6x_2 + 17x_3 + 2x_4 \\ r_1 - b_{21} \leq z_2(x) = 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 18x_4 \\ r_2 - b_{12} \leq z_1(x) = 19x_1 + 6x_2 + 17x_3 + 2x_4 \\ r_2 - b_{22} \leq z_2(x) = 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 18x_4 \\ \sum_{j=1}^{4} x_j c_j \leq b = 100 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$s.c. \begin{cases} r_1 - b_{11} - 19x_1 - 6x_2 - 17x_3 - 2x_4 \leq 0 \\ r_1 - b_{21} - 2x_1 - 11x_2 - 4x_3 - 18x_4 \leq 0 \\ r_2 - b_{12} - 19x_1 - 6x_2 - 17x_3 - 2x_4 \leq 0 \\ r_2 - b_{22} - 2x_1 - 11x_2 - 4x_3 - 18x_4 \leq 0 \\ 40x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 50x_4 \leq 100 \end{cases}$$
$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0; i \in \{1, \cdots, n\}; j \in \{1, \cdots, p\}; x_j \in \{0, 1\}$$

En mettant le PL ci-desssus dans gurobi, nous trouvons comme solution optimale :

$$x_1 = 1.0; x_2 = 0.0; x_3 = 0.0; x_4 = 1.0$$
$$b_{11} = 0; b_{12} = 0; b_{21} = 0; b_{22} = 1$$
$$(z_1, z_2) = (21, 20)$$

le max de fonction objectif est de 61
la satisfaction moyenne est de $(z_1(x) + z_2(x))/2 = 20.5$

Ensuite pour $w = (10, 1)$ nous avons $w' = (9, 1)$ changeons le fonction objectif :

$$\max 9(r_1 - (b_{11} + b_{21})) + (2r_2 - (b_{12} + b_{22}))$$

Nous trouvons :

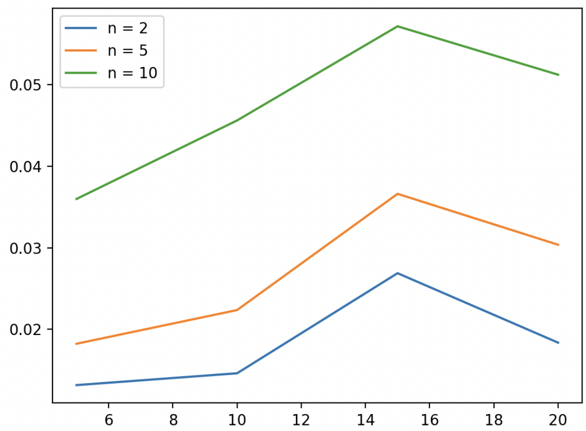
$$x_1 = 1.0; x_2 = 0.0; x_3 = 0.0; x_4 = 1.0$$
$$b_{11} = 0; b_{12} = 0; b_{21} = 0; b_{22} = 1$$
$$(z_1, z_2) = (21, 20)$$

le max de fonction objectif est de 221
la satisfaction moyenne est de $(z_1(x) + z_2(x))/2 = 20.5$

On remarque que pour $w' = (1, 1)$ et $w' = (9, 1)$ nous avons les mêmes valeurs des x_i, b_{ik}, z_i, avec une moyenne de satisfaction égales à 20.5 dans les 2 cas. La seule difference est que pour $w' = (1, 1)$ le max de fonction objectif est de 61 et pour $w' = (9, 1)$ le max est de 221. Cela veut dire que nous avons sélectioné les projets qui satisfont au maximum les objectifs de l'entreprise sousmise à une contrainte budgétaire.

3.2

En étudiant le temps de resolution en fonction de n et p, pour $n = 2, 5, 10$ et $p = 5, 10, 15, 20$ nous obtenons le graph ci-dessous avec en abscisse p, en ordonné le temps d'optimisation.



Nous observons qu'au plus n et p sont grand, le temps mise par le solver pour faire optimisation est important pour la même dans exercice 2.2
Remarque: les graphs obtenu avec q32.py ne sont pas toujours le même, des fois les résultats peuvent être bizarre, lancez le plusieur fois.

4 Application a la recherche d'un chemin robuste dans un graphe

4.1

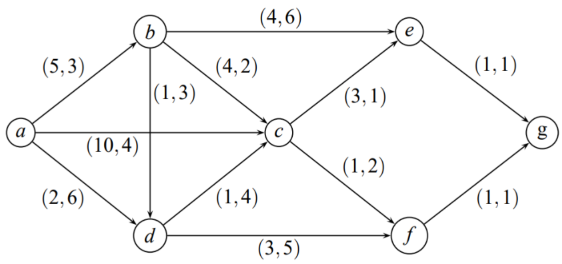


FIGURE 1 – Une instance du problème de chemin robuste à 2 scénarios

soit x_{ij} les variables boolean binaire tel que $x_{ij} \in \{0,1\}$ et $i,j \in G$ avec $G = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, x_{ij} representant un arc allant de sommet i a la sommet j. t_{ij} represente le temps necessaire pour aller du sommet i vers sommet j.
de maniere generale le PL de plus court chemin est :

$$\min \sum_{i,j \in G} x_{ij} t_{ij}^s$$

$$s.c. \left\{ \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0 \right.$$

$$x_{ij} \in (0,1), t_{ij}^s \in N, s \in S$$

En adapdant le PL au graph G on a :

$$\min \sum_{i,j \in G} x_{ij} t_{ij}^s$$

$$s.c. \begin{cases} x_{ab} + x_{ac} + x_{ad} = 1 \\ x_{bd} + x_{bc} + x_{be} = x_{ab} \\ x_{ce} + x_{cf} = x_{ac} + x_{bc} + x_{dc} \\ x_{dc} + x_{df} = x_{ad} + x_{bd} \\ x_{eg} = x_{be} + x_{ce} \\ x_{fg} = x_{cf} + x_{df} \end{cases}$$

$$x_{ij} \in (0,1), t_{ij}^s \in N, s \in S, S = \{1,2\}$$

En mettant ce PL dans gurobi solver pour trouver le plus court chemin, nous trouvons (cf. q41) :

- dans le scénario 1 (S=1) : le plus court chemin pour aller du sommet a au sommet g est $(ad \rightarrow dc \rightarrow cf \rightarrow fg)$ avec comme temps minimum $t^1_{ag} = 5$
- dans le scénario 2 (S=2) : le plus court chemin pour aller du sommet a au sommet g est $(ac \rightarrow ce \rightarrow eg)$ avec comme temps minimum $t^2_{ag} = 6$

4.2

Ne sachant pas quel scénario va se produire et ne connaissant même pas leur probabilité, dans cette question nous cherchons un chemin robuste qui reste rapide dans différent scénario.

$$\max f(x) = \sum_{i}^{n} w_i z_i$$
$$= \max \sum_{k=1}^{n} w'_k (kr_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik})$$

$$s.c. \begin{cases} r_k - b_{ik} \leq z_i(x), i = 1, \cdots, n \\ \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = 0 \end{cases}$$

avec $z_i = \sum_{(i,j)\in P} t^s_{ij} = \sum_{(i,j)\in G} x_{ij} t^s_{ij}$

$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0; i, j \in G; x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Réécrivons ce PL pour répondre à la question avec $w' = (1, 1)$ (trouver à partir de $w = (2, 1)$, $n = 2$:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{k=1}^{2} w'_k (kr_k - \sum_{i=1}^{2} b_{ik}) \\ & = w'_1(r_1 - (b_{11} - b_{21})) + w'_2(2r_k - (b_{12} + b_{22})) \\ & = (r_1 - (b_{11} - b_{21})) + (2r_k - (b_{12} + b_{22})) \end{aligned}$$

$$s.c. \begin{cases} r_1 - b_{11} \leq -z_1(x) \\ r_1 - b_{21} \leq -z_2(x) \\ r_2 - b_{12} \leq -z_1(x) \\ r_2 - b_{22} \leq -z_2(x) \\ x_{ab} + x_{ac} + x_{ad} = 1 \\ x_{bd} + x_{bc} + x_{be} = x_{ab} \\ x_{ce} + x_{cf} = x_{ac} + x_{bc} + x_{dc} \\ x_{dc} + x_{df} = x_{ad} + x_{bd} \\ x_{eg} = x_{be} + x_{ce} \\ x_{fg} = x_{cf} + x_{df} \end{cases}$$

avec $z_1(x) = 5x_{ab} + 10x_{ac} + 2x_{ad} + 4x_{bc} + x_{bd} + 4x_{be} + 3x_{ce} + x_{cf} + x_{dc} + 3x_{df} + x_{eg} + x_{fg}$
$z_2(x) = 3x_{ab} + 4x_{ac} + 6x_{ad} + 2x_{bc} + 3x_{bd} + 6x_{be} + x_{ce} + 2x_{cf} + 4x_{dc} + 5x_{df} + x_{eg} + x_{fg}$

$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0; i, j \in G; x_{ij} \in \{0,1\}, t_{ij}^s \in \mathbb{N}, s \in \{1,2\}$$

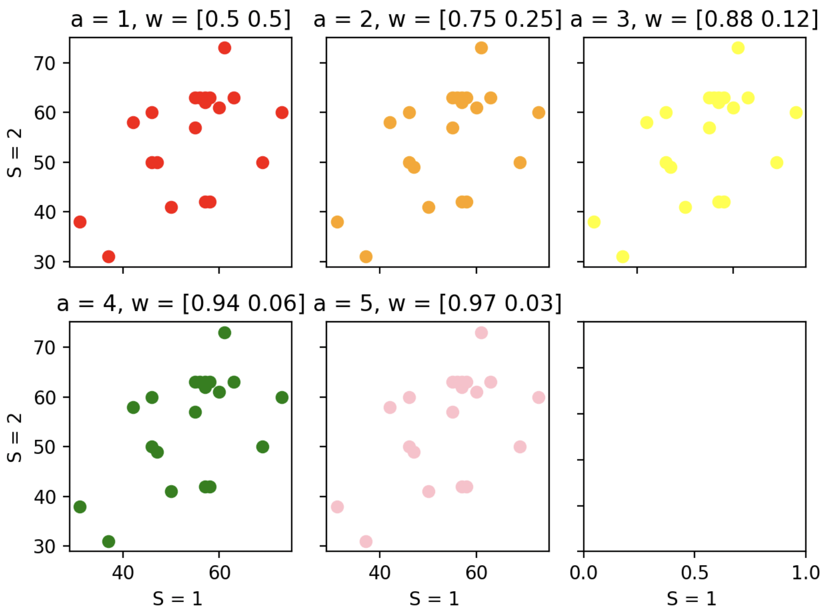
En mettant, ce PL dans gurobi solver pour trouver un chemin robuste, nous trouvons (cf. q42.py) : $(ab \to be \to eg)$, c'est un chemin qui reste rapide das

4.3

Dans cette question nous souhaitons d'étudier l'impact de la pondération de w sur la robustesse de la solution proposée en utilisant une famille de vecteurs de pondération $w(\alpha) \in R^n$ définie pour tout $\alpha \geq 1$ par les poids.

$$w_i(\alpha) = \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^\alpha - \left(\frac{n-i}{n}\right)^\alpha, i = 1, \cdots, n$$

Dans gurobi nous modélisons le cas $n = 2$, et on tirera aléatoirement 20 fois des temps de parcours t_{ij}^1 et t_{ij}^2 pour les arcs (i,j) du graphe de la figure 1. Pour chacune des 20 instances ainsi générées on calculera un chemin qui maximise v_f pour le vecteur $w(1)$ en choisissant $\alpha = 1$ et on représentera les 20 solutions sous forme nuage. Nous procédons de même manière pour les autres valeurs de α. Nous obtenons au final 5 nuages de points correspondant aux valeurs de $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$.



En observant les nuages des points pour $\alpha = 1, \cdots, 5$, on remarque que ces nuages sont identiques pour les différents α. Nous pouvons du coup en déduire que w_i n'a pas d'influence pour trouver un chemin robuste, car dans notre programme (cf. q43.py), pour chaque t_{ij}^s nous testons avec les 5 α, et on retrouve toujours les mêmes chemins.