TD 10 - Dynamique des fluides 2

Exercice 33 - Pourquoi un jet s'amincit-il au cours de sa chute ?

On constate sur la figure 1a qu'un filet d'eau sortant d'un robinet s'amincit au cours de sa chute. l'objectif de cet exercice est de prédire sa forme.

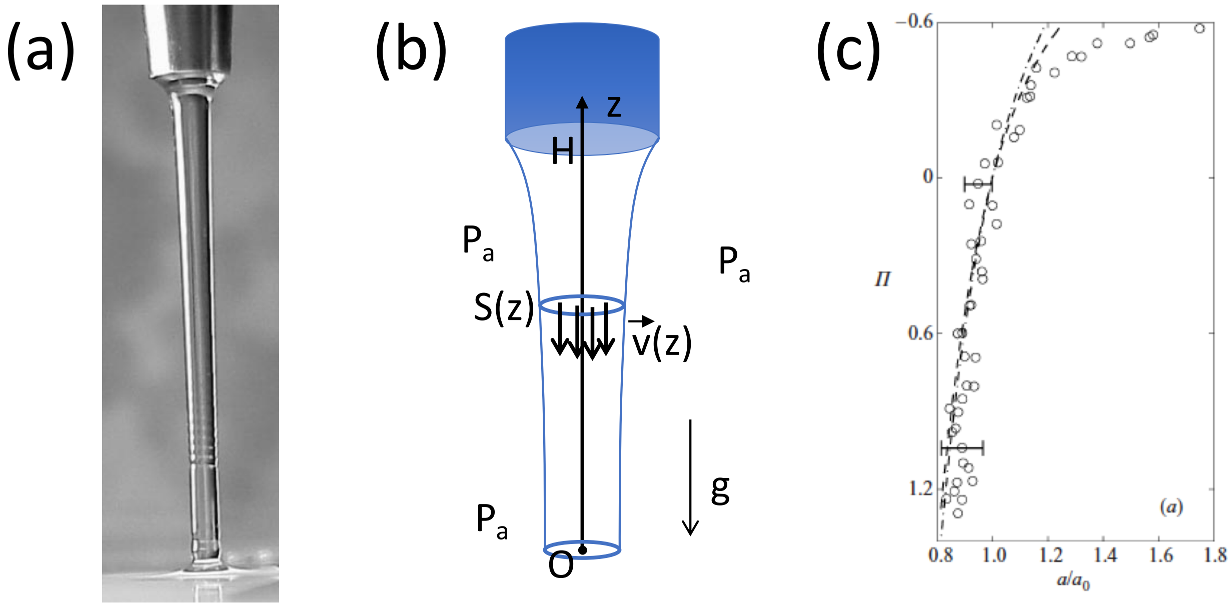


FIGURE 1 – (a) Photo d'un jet tombant. (b) Schéma. (c) Figure extraite de *Fluid pipes*, Hancock et Bush, Journal of Fluid Mechanics vol. 466, p. 285 (2002)

Le jet d'eau débouchant dans l'air au repos à la pression atmosphérique homogène P_a, on suppose que la pression de l'eau dans le jet vaut P_a quelle que soit son altitude. On suppose de plus que dans le jet l'eau présente une vitesse constante le long de toute section droite du jet. L'écoulement est supposé stationnaire, isovolume (eau de masse volumique constante) et parfait. On note $D(z)$ le diamètre du jet d'eau, à l'altitude z, $S(z)$ sa section, $U(z)$ la vitesse de l'eau. Le fond de l'évier est à l'altitude 0, l'extrémité du robinet à l'altitude H (voir la figure 1b).

1. En exploitant la conservation du débit, reliez $U(z)$ à $D(z)$, $D_R = D(H)$ (D_R diamètre du robinet) et $U_R = U(H)$ (la vitesse de l'eau en sortie de robinet).
2. En appliquant le théorème de Bernoulli à cet écoulement, exprimer $U(z)$ en fonction de U_R et de l'altitude adimensionnée $\Pi = \frac{2g(H-z)}{U_R^2}$.
3. En déduire une expression de $D(z)$ en fonction de D_R et de Π. Selon ce résultat, le diamètre du jet augmente ou diminue-t-il au cours de sa chute ? Comme le montre la figure 1c, ce modèle (courbe en tirets) est en bon accord avec les mesures de Π en fonction de $D/D_R = a/a_0$ (cercles) sur une large gamme de valeurs de Π.
4. En inventoriant les forces auxquelles est soumise une particule fluide tombant dans le jet, montrez que celle-ci accélère au cours de sa chute. Expliquez alors qualitativement pourquoi le jet s'amincit au cours de sa chute.
5. Exprimez le débit volumique du jet D_v en fonction de H, D_R et $D(0)$. Cette expression permet d'évaluer le débit d'un jet en analysant simplement une photo du jet.

CORRECTION:

1. Le jet étant stationnaire, sa forme est constante. De plus l'écoulement est isovolume donc le volume d'eau entre l'altitude H et l'altitude z est constant. Donc le débit sortant du robinet est égal au débit tombant à travers la section du jet à l'altitude z :

$$D_{\mathrm{H}} = D_{\mathrm{z}}$$

Le débit volumique à travers une section droite de l'écoulement est égal à la vitesse du fluide $\times$ l'aire de la section (en supposant que la vitesse est identique en tout point de la section). On a donc,

$$U(H) \times \frac{\pi D(H)^2}{4} = U(z) \times \frac{\pi D(z)^2}{4} \ .$$

Sous l'effet de la pesanteur la vitesse du fluide augmente le long de l'écoulement, en particulier $U(z) > U(H)$. Pour assurer la conservation du débit, le diamètre de la section du jet diminue donc le long de l'écoulement, en particulier $D(z) < D(H)$.

D'après la relation précédente on a,

$$\boxed{U(H)D(H)^2 = U(z)D(z)^2} \ .$$

2. L'écoulement étant isovolume stationnaire parfait, on peut appliquer le théorème de Bernoulli à la ligne de courant coïncidant avec l'axe (Oz) entre les points d'altitude H et z :

$$P(H) + \frac{1}{2}\rho U(H)^2 + \rho g H = P(z) + \frac{1}{2}\rho U(z)^2 + \rho g z$$

La surface extérieure du jet est en contact avec l'atmosphère qui est à la pression constante P_{atm}. Par continuité de la pression, on a $P_H = P_{\mathrm{atm}}$ et $P_z = P_{\mathrm{atm}}$. On en déduit,

$$\frac{1}{2}\rho \left(U(z)^2 - U(H)^2\right) = \rho g (H - z)$$

et donc,

$$\boxed{U(z)^2 - U(H)^2 = 2g(H-z)} \ .$$

soit :

$$U(z) = U_R \sqrt{1 + \underbrace{\frac{2g(H-z)}{U_R^2}}_{\Pi}}$$

3. D'après le résultat de la question 1, on a $U(z) = U(H)D(H)^2/D(z)^2$, soit :

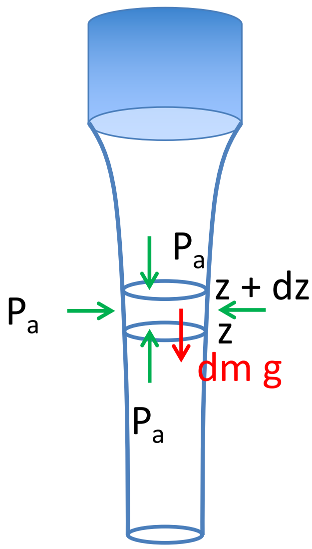
$$D(z) = D_R \sqrt{\frac{U_R}{U(z)}}$$

En insérant cette relation dans celle obtenue à la question précédente, on obtient,

$$D(z) = D_R (1 + \Pi)^{-1/4}$$

quand z diminue, Π augmente, donc $(1+\Pi)^{-1/4}$ diminue, donc $d(z)$ diminue : le jet s'affine lorsque l'altitude diminue, donc au cours de sa chute.

4. Une PF située entre les altitudes z et $z + dz$ est soumise à :
   — son poids
   — la résultante des forces de pression exercées par l'eau située au-dessus d'elle et en-dessous d'elle
   — les forces de pression exercées par l'air le long de sa surface de contact avec l'air



L'eau et l'air étant à la même pression P_a, toutes les forces de pression se compensent, donc la PF n'est soumise finalement qu'à son poids : elle est en chute libre, comme un objet lâché dans l'air, et accélère avec l'accélération g. La vitesse d'une PF est donc d'autant plus grande qu'elle chute depuis longtemps, donc qu'elle est plus bas : U augmente quand z diminue. Par conservation du débit volumique US, S diminue quand z diminue.

5. D'une part $D(0)^2U(0) = D_R U_R^2$ soit $\frac{U(0)}{U_R} = \frac{D_R^2}{D(0)^2}$. D'autre part, $U(0)^2 = U_R^2 + 2gH$ donc $\frac{U(0)^2}{U_R^2} = 1 + \frac{2gH}{U_R^2}$. En combinant ces deux égalités, $\frac{D_R^4}{D(0)^4} = 1 + \frac{2gH}{U_R^2}$ soit $U_R^2 = 2gH\left(\frac{D_R^4}{D(0)^4} - 1\right)^{-1}$. Donc $D_v = \frac{\pi}{4}D_R^2 U_R = \frac{\pi}{4}D_R^2\sqrt{2gH}\left(\frac{D_R^4}{D(0)^4} - 1\right)^{-1/2} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2gH}\left(\frac{1}{D(0)^4} - \frac{1}{D_R^4}\right)^{-1/2}$.

Exercice 34 - Débimètre basé sur la division d'un écoulement.

Un écoulement d'air dans une canalisation horizontale de section S_1 est divisé en deux écoulements dans deux canalisations de sections égales S_2, voir la figure 2. On suppose que tout l'écoulement s'effectue dans un plan horizontal. Pour mesurer la différence de pression entre l'amont et l'aval de la division, on monte un manomètre à liquide en connectant entre l'amont et l'aval un tube en U vertical partiellement rempli d'un liquide de masse volumique ρ_M.

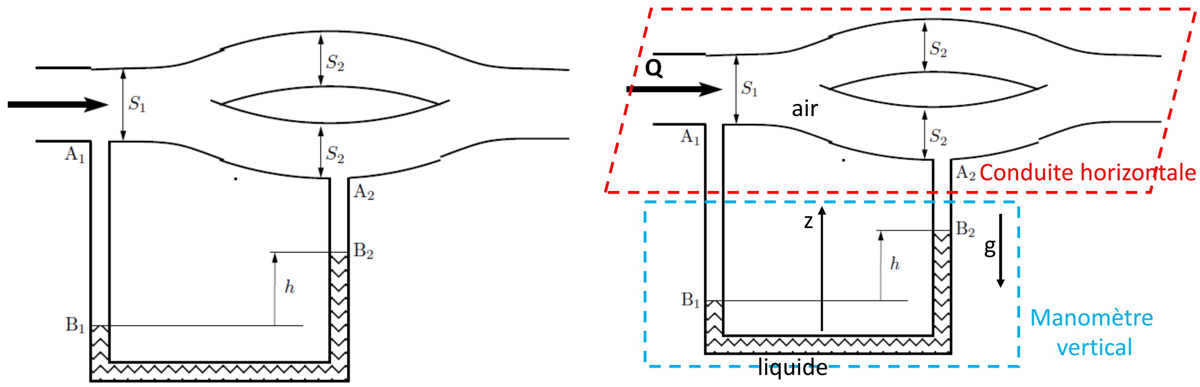


FIGURE 2 – *Géométrie de l'écoulement.*

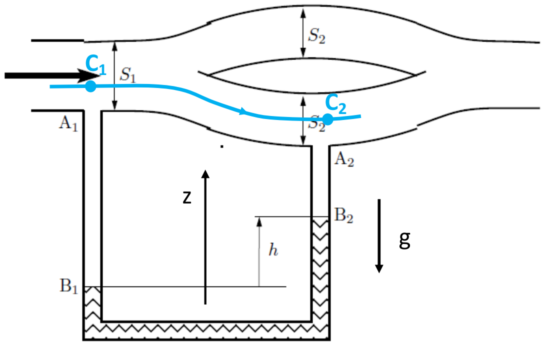
1. On suppose que la vitesse de l'air est homogène le long de toute section droite de canalisation. Exprimez la conservation du débit pour exprimer la vitesse v_2 dans la conduite de section S_2 en fonction du débit volumique d'air Q et S_2 puis de S_1, S_2 et de la vitesse v_1 dans la conduite de section S_1.
2. On considère l'écoulement de l'air comme isovolume (de masse volumique ρ) stationnaire et parfait. Appliquez le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant (que vous représenterez) reliant l'amont et l'aval de la division au niveau des points A_1 et A_2.
3. On admet que la pression est homogène le long de toute section droite de canalisation, donc que la pression dans le tube en A_1 est égale à celle dans la canalisation au niveau de A_1 (de même pour A_2). On suppose aussi que l'effet de la gravité sur l'air est suffisamment faible à l'échelle du tube pour que $P_{B1} = P_{A1}$ et $P_{B2} = P_{A2}$. En appliquant la loi de l'hydrostatique au liquide contenu dans le manomètre en U, exprimez la hauteur $h = z_{B2} - z_{B1}$ en fonction de Q, des densités des fluides et des sections S_1 et S_2. Cette relation permet de déterminer le débit d'air dans la canalisation sans insérer de dispositif à l'intérieur de la canalisation.

CORRECTION:

1. On note v_1 la vitesse du fluide dans le tuyau de section S_1. La vitesse du fluide dans les deux tuyaux de section S_2 est la même et est notées v_2. Le débit volumique à travers la section S_1 est égale à la somme des débits volumiques à travers les deux sections S_2 et donc
$$\boxed{v_1 S_1 = 2 v_2 S_2}\,. \tag{1}$$
2. L'écoulement est parfait, stationnaire et isovolume. Appliquons le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant passant par les points C_1 et C_2 en regard des points A_1 et A_2 (voir la figure ci-dessous) :
$$P_{A_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_{C_1} = P_{A_2} + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_{C_2}$$
or la conduite est horizontale : $z_{C_1} = z_{C_2}$ donc :
$$P_{C_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_{C_2} + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

Or la pression est homogène le long de toute section droite de canalisation, donc $P_{C_1} = P_{A_1}$ et $P_{C_2} = P_{A_2}$, donc :

$$\boxed{P_{A_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_{A_2} + \frac{\rho v_2^2}{2}} \tag{2}$$



3. Le débit volumique entrant est $Q = v_1 S_1$. D'après la relation (1) obtenue à la première question, en déduit que,

$$v_1 = Q/S_1 \quad \text{et} \quad v_2 = Q/(2S_2) \; .$$

D'après la relation (2) obtenue question 1, on a alors,

$$\frac{\rho Q^2}{2}\left(\frac{1}{4S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = P_{A_1} - P_{A_2} \tag{3}$$

Le liquide dans le tube étant à l'équilibre statique, la loi de l'hydrostatique s'applique :

$$P_{B_1} - P_{B_2} = \rho_M g h$$

On suppose que l'effet de la gravité sur l'air est suffisamment faible à l'échelle du tube pour que $P_{B1} = P_{A1}$ et $P_{B2} = P_{A2}$, donc :

$$P_{A_1} - P_{A_2} = \rho_M g h \tag{4}$$

En combinant (3) et (4) :

$$\rho_M g h = \frac{\rho Q^2}{2}\left(\frac{1}{4S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)$$

et finalement :

$$\boxed{h = \frac{\rho Q^2}{2\rho_M g}\left(\frac{1}{4S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)}$$

Exercice 35 - Tube de Pitot

Un tube de Pitot permet de déterminer la vitesse d'un écoulement fluide à partir de deux mesures de pression. Le tube de Pitot est couramment utilisé pour mesurer la vitesse d'un avion par rapport à l'air dans lequel il se déplace (figure 3a), ou la vitesse d'un gaz dans une canalisation. L'objectif de cet exercice est de modéliser le fonctionnement de ce dispositif.

Le dispositif est placé dans un écoulement homogène et stationnaire d'air de vitesse $U_\infty = 250$ km/h (vitesse d'un avion de ligne au décollage) de pression égale à la pression atmosphérique P_a, voir la figure 3b. Il a une forme profilée de diamètre 2 cm dans sa partie cylindrique et inclut de deux tubes remplis d'air :

— un tube central percé d'un orifice ("prise de pression") A_1 à son extrémité, placée face à l'écoulement,

— un tube latéral qui communique avec l'air extérieur via un petit orifice ("prise de pression") B_2.

Un manomètre différentiel à liquide (de masse volumique ρ_M) relié à chacun des deux tubes permet de mesurer la différence de pression qui existe entre les points A_1 et B_2 via la différence de hauteur h entre les deux ménisques liquides A_3 et B_3.

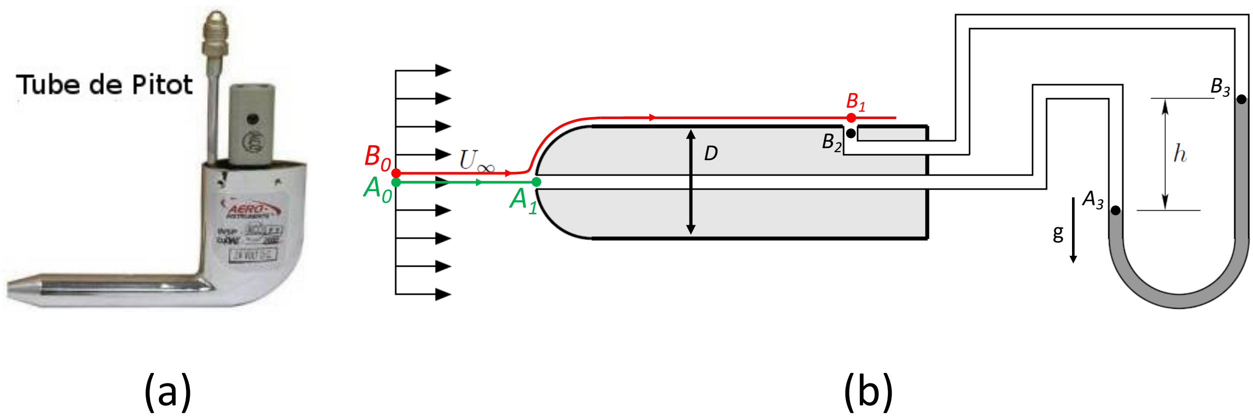


FIGURE 3 – (a) tube de Pitot pour l'aéronautique. (b) schéma du tube et notations.

1. Calculez le nombre de Reynolds de l'écoulement. La viscosité cinématique de l'air est $\nu = 10^{-5}$ m^2 s^{-1}, sa masse volumique de l'air au repos $\rho = 1$ kg m^{-3}. Justifiez qu'on puisse considérer l'écoulement comme isovolume et parfait.

Deux lignes de courant particulières sont tracées sur la figure 3b :

— la ligne A_0A_1, qui se termine en A_1 où la vitesse de l'air s'annule puisque le tube est bouché (A_1 est appelé un point de stagnation de l'écoulement).

— la ligne B_0B_1, qui est très proche de A_0A_1, et qui contourne le tube de Pitot en passant à la verticale de la prise de pression B_2. On suppose que la vitesse du fluide en B_1 vaut U_∞.

Dans la suite de l'exercice, compte tenu des différences de masse volumique entre l'air et le liquide, vous pourrez négliger les effets de la gravité pour l'air, mais vous en tiendrez compte pour le liquide du manomètre.

2. Exprimez la pression en A_1, P_{A1}, en fonction de P_a, ρ, et U_∞.
3. Exprimez la pression en B_1, P_{B1}.
4. Justifiez que $P_{A1} = P_{A3}$
5. On admet que la pression ne varie pas entre B_1 (situé le long de la ligne de courant B_0B_1) et B_2 (situé à l'intérieur de l'orifice où l'air est au repos). Montrez que $P_{B1} = P_{B3}$.
6. Reliez P_{A3}, P_{B3} et h.

7. Exprimez finalement U_∞ en fonction de h. Exprimez-la numériquement avec U_∞ en $\mathrm{m\,s^{-1}}$ et h en mm si le liquide est de l'eau.

CORRECTION:

1. $U_\infty = 70\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. $\mathrm{Re} = \frac{U_\infty D}{\nu} = 1,4 \times 10^5 \gg 1$ donc cet écoulement externe à grand nombre de Reynolds peut être considéré comme parfait. D'autre part, $U_\infty \ll c$ où $c = 340\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ est la vitesse du son dans l'air dans les CNTP, donc l'écoulement peut être considéré comme isovolume.
2. Théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant A_0A_1 :
$$P_a + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_{A1}$$
3. Théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant B_0B_1 : $P_a + \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_{B1} + \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2$ donc $P_{B1} = P_a$.
4. Entre A_1 et A_3 se trouve de l'air au repos donc d'après de principe de l'hydrostatique en l'absence d'effet de la gravité la pression de cet air est homogène et $P_{A1} = P_{A3}$.
5. Pour la même raison, $P_{B2} = P_{B3}$. Comme $P_{B2} = P_{B1}$, $P_{B1} = P_{B3}$. Finalement on a : $P_{A3} - P_{B3} = P_{A1} - P_a = \dfrac{1}{2}\rho U_\infty^2$
6. Loi de l'hydrostatique dans le liquide de masse volumique homogène :
$$P_{A3} - P_{B3} = \rho_M g(z_{B3} - z_{A3}) = \rho_M g h$$
7. $$U_\infty = \sqrt{\frac{2\rho_M g h}{\rho}}$$
Avec $\rho_M = 1000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$,
$$U_\infty\ (\mathrm{m/s})\ = 4,5 \times \sqrt{h\ (\mathrm{mm})}$$