Exercice 54 (Site de rencontres sur internet)

On considère un site de rencontre sur internet, où les membres à la recherche de l'âme-sœur sont invités à "tchater" entre eux dans un premier temps. A l'issue de ces discussions, les membres sont invités à attribuer un score à leurs divers interlocuteurs. Le webmaster doit organiser les rencontres réelles qui auront lieu dans les prochains jours, sur la base de ces informations. Voici les tableaux des scores qui ont été attribués par les garçons aux filles, et par les filles aux garçons :

	Eve	Juliette	Cléopâtre	Yseult	Dalila
Adam	7	6	7	6	8
César	9	8	8	9	7
Roméo	7	6	5	10	8
Samson	4	9	8	4	9
Tristan	5	9	8	8	9

TABLE 1 – Scores attribués par les garçons aux filles

	Eve	Juliette	Cléopâtre	Yseult	Dalila
Adam	9	9	8	5	4
César	8	5	9	8	5
Roméo	7	9	7	5	7
Samson	10	6	7	6	10
Tristan	6	4	6	7	9

TABLE 2 – Scores attribués par les filles aux garçons

Q 54.1 On souhaite organiser des rendez-vous entre les garçons et les filles (un garçon par fille et réciproquement) de façon à minimiser la somme totale des regrets des différents protagonistes (le regret d'un protagoniste est la différence entre la note de son interlocuteur préféré et la note de l'interlocuteur qu'il va être amené à rencontrer). Modéliser ce problème comme un problème d'affectation.

Regart de garçons

	E	J	C	Y	D.
A	1	2	1	2	0.
C	0	1	1	0	1
R	0	4	5	0	2
S	5	0	1	5	0
T	4	0	1	1	0

Regret de filles.

	E	J	C	Y	D.
A	1	0	1	3	4.
C	2	4	0	0	5
R	3	0	2	3	3.
S	0	3	2	2	0
T	4	5	3	1	1

Regret total

enlève 2 à valeur de toute solut°.

	E	J	C	Y	D.	
A	2	2	2	5	6	← -2
C	2	5	1	0	7	
R	6	4	7	3	5	← -3.
S	5	3	3	7	0.	
T	8	5	4	2	1	← -1.

-6 à la valeur de toute solut°.

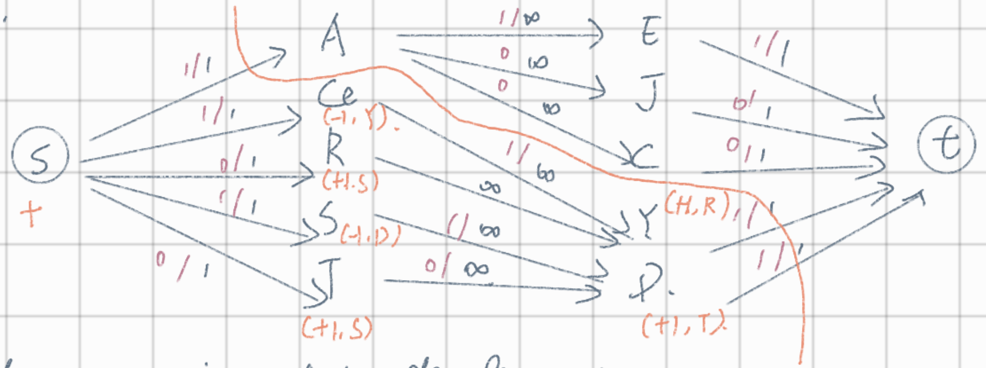
	E	J	C	Y	D.
A	0	0	0	3	4
C	2	5	1	0	7.
R	3	1	4	0	2
S	5	3	3	7	0
T	7	4	3	2	0.

Q 54.2 Résoudre à l'aide de l'algorithme hongrois le problème ainsi posé.

Toute colonne contient au moins un 0.

Existe-t-il une solut° de coût 0 (nouvelle matrice)?

Graphe des 0.



→ Faire apparaître des arcs qui sortent de la coupe

→ d'un sommet - ligne marqué à

un . colonne non marqué.

Element min $S_.$ = 1.

-1 sur les lignes marquées

+1 sur les colonnes marquées

un arêt 0

non marqué

	E	J	C	Y	D	
A	0	0	0	3	4.	
C	2	5	1	0	7	-1
R	3	1	4	0	2	-1
S	5	3	3	7	0	-1
T	7	4	3	1	0	-1.
				+1	+1	

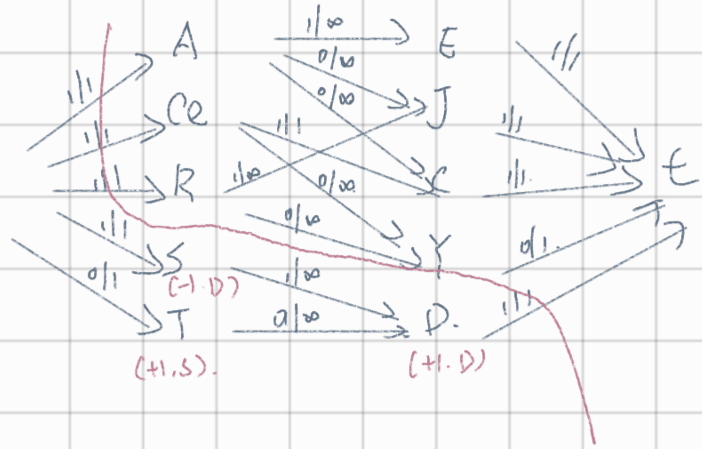
marqué (C, R, S, T)

↓

non marqué

	E	J	C	Y	D	
A	0	0	0	4	5	
Ce	1	4	0.	0	7	
R	2	0	3.	0	2.	
S	4	2	2.	7	0	-1
T	6	3	2	1	0	-1
					+1.	

marqué (S, T)



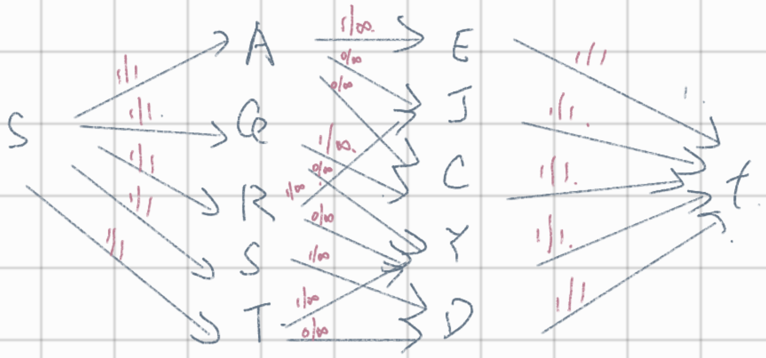
Sommet . ligne marqués {S.T}

. colonnes {D}

S=1 -1 sur {S. T}

+1 sur {D}

	E	J	C	Y	D..
A	0	0	0	4	6
Ce	1	4	0	0	8
R	2	0	3	0	3
S	3	1	1	6	0
T	5	2.	1	0	0



Solution optimale : A-E, Ce-C, R-J, S-D, T-Y

de coût / regret. $2+1+4+2=9$.

① Regret total

	É	J	C	Y	D
A	2	2	2	5	6
C	2	5	1	0	7
R	6	4	7	3	5
S	5	3	3	7	0
T	8	5	4	2	1

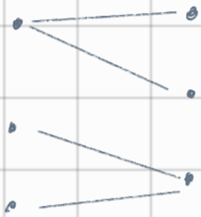
ou ② 1^{er} étape : -6

2 : $-4+2=-2$

3 : $-2+1=-1$

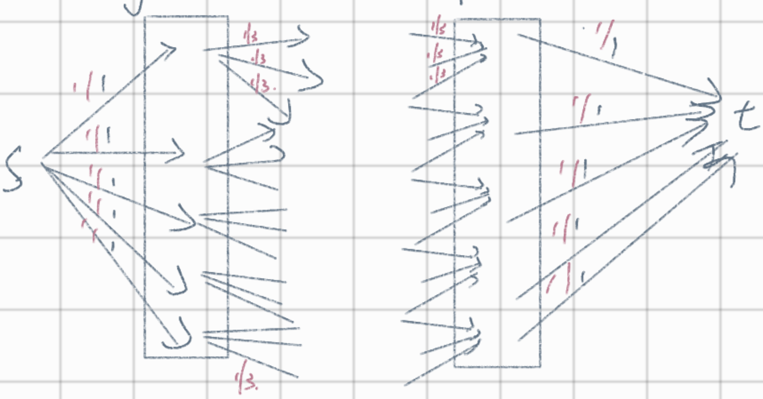
$\Rightarrow 9$.

Q 54.3 Suite à la forte croissance du nombre des membres sur le site, il ne devient plus possible pour chaque membre de discuter avec tous les membres du sexe opposé. C'est pourquoi le webmaster adopte une nouvelle procédure qui consiste à demander à chaque membre d'indiquer les membres du sexe opposé qu'il connaît. Il s'agit donc d'organiser des rendez-vous entre des personnes qui se connaissent. On suppose que le nombre n de garçons est égal au nombre de filles. En modélisant le problème comme un problème de flot, montrer que si chaque fille connaît exactement $k \geq 1$ garçons et si chaque garçon connaît exactement k filles, alors on peut arranger n rendez-vous entre des gens qui se connaissent.



k=1

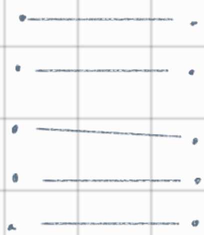
k=2.



Nombre max de rdv. (avec au plus un RV par personne).

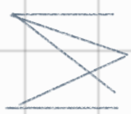
= valeur d'un flot max

k=1



k=2.

k=3.



Flot de valeur n en mettent $\frac{1}{k}$ sur chaque arc entre 1 garçon et une fille
La capacité est entière donc il existe un flot entier de valeur n.
$\Rightarrow$ On peut tjrs. organiser n rdv

Exercice 55 (Gestion d'un projet informatique)

La société Macrosoft SA veut réaliser un projet de logiciel qui consiste en 4 tâches : construction d'une base de données, interface utilisateur, modélisation du problème et algorithmes d'optimisation. Ces 4 tâches doivent être confiées aux 4 meilleurs ingénieurs de la société (I1, I2, I3 et I4). Le tableau suivant donne le temps en jours dont chaque ingénieur a besoin pour accomplir les différentes tâches :

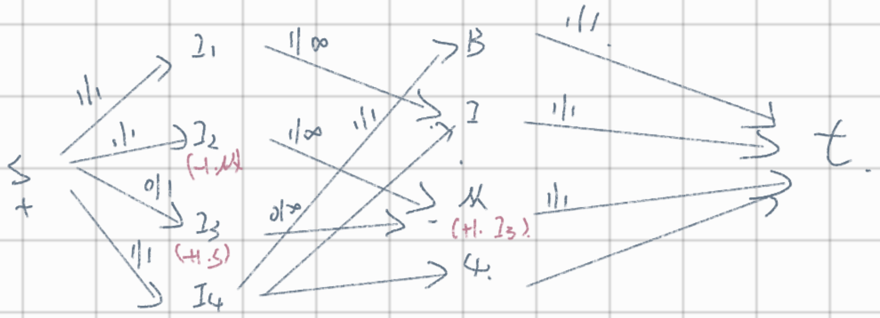
	base de données	interface	modélisation	algorithmes
I1	8	1	5	5
I2	5	6	4	11
I3	6	4	3	9
I4	3	3	7	7

Q 55.1 Utilisez la méthode Hongroise pour résoudre le problème de minimisation du temps total nécessaire pour réaliser le projet. Donnez l'affectation optimale et le temps total obtenu.

	base de données	interface	modélisation	algorithmes	
I1	8	1	5	5	-1
I2	5	6	4	11	-4
I3	6	4	3	9	-3
I4	3	3	7	7	-3

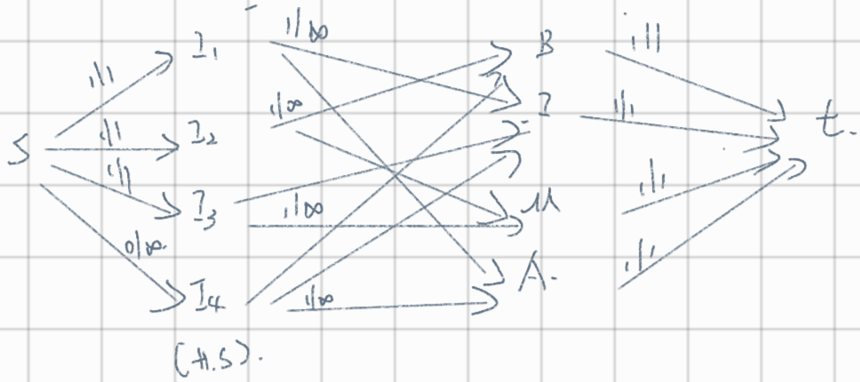
Graphe des 0 :

	B	I	M	A	
I1	7	0	4	0	
I2	1	2	0	3	-1
I3	3	1	0	2	-1
I4	0	0	4	0	
			+1	-4	



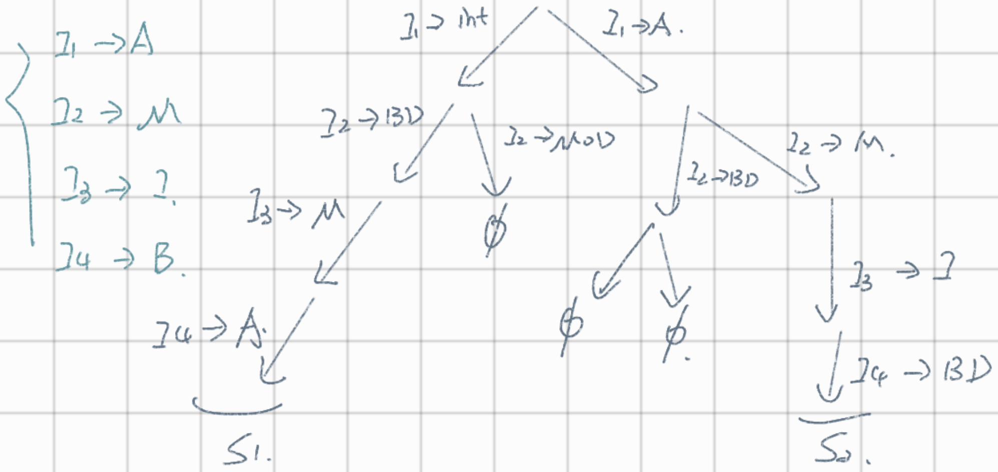
Sommets lignes marquées = {I2, I3}
colonnes {M}
S = 1.

	B	I	M	A	
I1	7	0	5	0	-4
I2	0	1	0	2	-4
I3	2	0	0	1	-4
I4	0	0	5	0	-4
	+4	+4	+4		



On a I1 → I
I2 → B
I3 → M
I4 → A.

durée 16.



On regard uniquement les 0 de la matrice et on fait un arbre de recherche.

Q 55.2 La solution optimale obtenue dans la question 1 est elle unique ? Sinon, expliquez comment obtenir d'autres solutions de même valeur pour la fonction objectif, puis appliquez le principe proposé sur l'instance de la question 1 et explicitez la ou les solution(s) obtenue(s).

Exercice 57 (Location de voitures)

Une entreprise de location de voitures cherche à redistribuer *à moindre coût* les voitures dans ses agences de manière à ce que le nombre de voiture dans chaque agence corresponde au mieux à ses besoins. Actuellement, l'entreprise a 10 voitures de trop à Rennes et 12 de trop à Paris. En revanche, ses agences à Orléans, Nice et Bordeaux aimeraient obtenir respectivement 5, 11 et 6 voitures supplémentaires. Les coûts de transport (en Euros) d'une voiture d'une ville à une autre sont donnés ci-dessous :

	Orléans	Nice	Bordeaux
Rennes	50	250	100
Paris	25	200	125

Q 57.1 Montrez que l'on peut modéliser ce problème comme un problème de transport et résolvez-le par l'algorithme primal-dual.

Q 57.2 On suppose maintenant que les agences d'Orléans, de Nice et de Bordeaux souhaitent obtenir respectivement 6, 14 et 7 voitures supplémentaires. Le nombre de voitures souhaitées est donc plus grand que le nombre de voitures disponibles. On suppose de plus qu'une agence peut obtenir moins de voitures que son souhait sans que cela n'engendre de coût supplémentaire. Montrez que l'on peut encore modéliser ce problème comme un problème de transport et résolvez-le par l'algorithme primal-dual.

Indication : Introduire un sommet fictif.

	Orléans	Nice	Bordeaux	offre
				-50
Rennes	50	250	100	10
Paris	25	200	125	12
				-25
demande	5	11	6	22

$\underbrace{5 \quad 11 \quad 6}_{22}$ demande.

10, 12) 22.

on enlève 500 à la valeur de toute solut°?

offre = demande → Dans toute solution exactement 10 voitures partiront de R
12 de P.

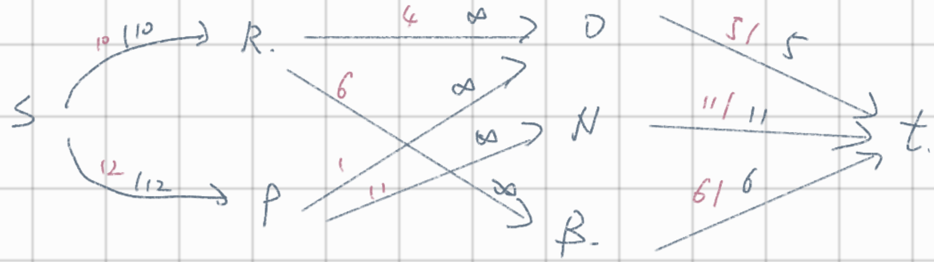
et exactement 5 arrivent à Orléans, 11 à N et 6 à B.

	O	N	B
R	0	200	50
P	0	175	100
		↑ −175	↑ −50

	O	N	B	
R	0	25	0	10
P	0	0	50	12
	5	11	6	

Solut° de coût 0.

Graphe des 0.



Flot de 22 unités.

→ opération optimale

	O	N	B
R	4		6
P	1	11	

de coût $4 \times 50 + 6 \times 100 + 1 \times 25 + 11 \times 200 = 3025$.

$50 \times 10 + 25 \times 12 + 175 \times 11 + 50 \times 6$.

自R enlever.

② offre

	Orléans	Nice	Bordeaux	offre	
Rennes	50	250	100	10	−50
Paris	25	200	125	12	−25
F	0	0	0	5	
	6	14	7	27	

27.

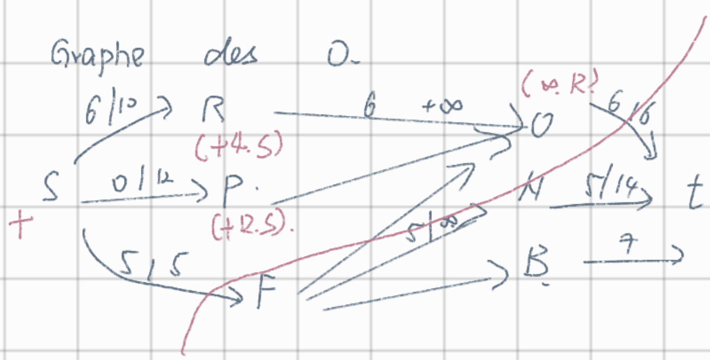
	O	N	B	
R	0	200	50	−50
P	0	175	100	−50
F	0	0	0	
	+50			

lignes marqués : R . P. −50

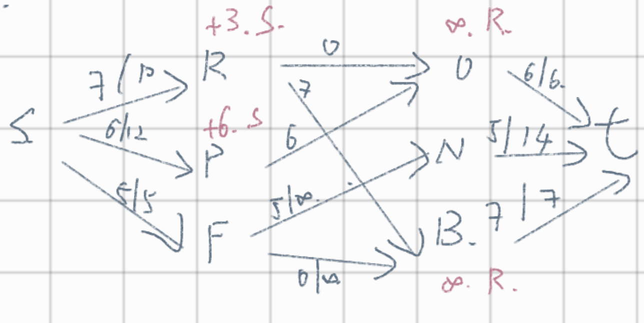
colones. O. +50.

$\delta = 50$.

Graphe des 0.



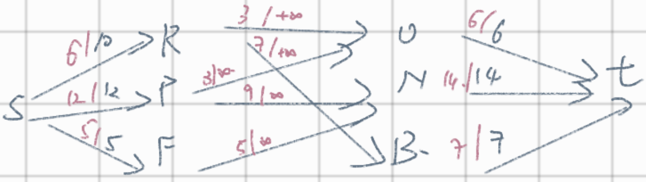
	O	N	B	
R	0	150	0	−125
P	0	125	50	−125
F	50	0	0	
	+125		+125	



lignes marqué : R. P. −125

colonnes marqué. O. B +125

$\delta = 125$.



	O	N	B
R	0	25	0.
P	0.	0.	50
F.	75	0.	125

La solution optimale est.

	O	N	B
R	3.		7.
P	3.	9.	
(F		5).	

de coût : $3 \times 50 + 7 \times 100 + 3 \times 25 + 9 \times 200 = 2725$.

Q 57.3 Il s'avère maintenant que si l'agence d'Orléans obtient moins de voitures qu'elle ne le souhaite, cela engendre un coût de 50 Euros pour chaque voiture manquante. De même, pour les agences de Nice et de Bordeaux, il en coûte respectivement 75 et 100 Euros pour chaque voiture manquante. Modifiez la modélisation donnée en question 2 pour prendre en compte ces changements (on ne demande pas ici de résoudre ensuite le problème).

	Orléans	Nice	Bordeaux	offre
Rennes	50	250	100	10 −50
Paris	25	200	125	12. −25.
F	50	75	100	5.
	6	14	7	

) 27.

	O	N	B
R	0	150	0
P	0	125	50
F.	50.	0	0

Exercice 59 (Problème de transport et PL)

On considère le problème de transport 3x3 dont la matrice des coûts est :

	C_1	C_2	C_3	
D_1	8	6	7	32
D_2	11	8	9	15
D_3	9	5	8	13
	26	10	24	60

60. λ. μ

offre = demande.

Les lignes correspondent à 3 dépôts D1, D2, D3 qui disposent de quantités 32, 15, 13 respectivement. Les colonnes correspondent à 3 clients dont les demandes sont de 26, 10 et 24 respectivement.

Q 59.1 Déterminez la solution dite du "coin Nord-Ouest" et indiquez précisément (en les présentant sous forme de tableau 3x3) les valeurs des différents flux dans cette solution, ainsi que le coût de cette solution.

Construction réalisable

	C_1	C_2	C_3		
D_1	26	6	0	~~32~~	~~6~~ 0
D_2	0	4	11	~~15~~	~~11~~ 0
D_3	0	0	13	~~13~~	0
	~~26~~	~~10~~	~~24~~		
	0	~~4~~	~~13~~		
		0	0		

Q 59.2 En appelant $x_{i,j}$ la quantité de produit transférée entre le dépôt i et le client j, exprimez le problème comme un programme linéaire en variables $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, ... $x_{3,3}$ (9 variables en tout). Ce programme linéaire est-il sous forme standard ? Si la réponse est oui, expliquez pourquoi. Si elle est non, donnez la forme standard du problème.

$$\text{Min } z = 8x_{11} + 6x_{12} + 7x_{13} + 11x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + 9x_{23} + 5x_{32} + 8x_{33}.$$

s.c.

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} = 32. & \lambda_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} = 15 & \lambda_2. \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} = 13 & \lambda_3. \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 26 & \mu_1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10. & \mu_2. \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = 24 & \mu_3. \\
x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3. \quad j = 1,2,3. &
\end{array}
\right.
$$

car équilibre offre - demande.

Remarque : Contrainte redondante.

Q 59.3 Ecrivez complètement le problème dual du programme linéaire sous forme standard obtenu à la question 2.

Dual.

$$\text{Max } 32\lambda_1 + 15\lambda_2 + 13\lambda_3 + 26\mu_1 + 10\mu_2 + 24\mu_3.$$

s.c.

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\lambda_1 + \mu_1 \leq 8. & x_{11} \\
\lambda_1 + \mu_2 \leq 6. & x_{12}. \\
\lambda_1 + \mu_3 \leq 7 & x_{13}. \\
\lambda_2 + \mu_1 \leq 11 & x_{21} \\
\lambda_2 + \mu_2 \leq 8. & x_{22}. \\
\lambda_2 + \mu_3 \leq 9. & x_{23}. \\
\lambda_3 + \mu_1 \leq 9. & x_{31} \\
\lambda_3 + \mu_2 \leq 5 & x_{32}. \\
\lambda_3 + \mu_3 \leq 8. & x_{33}
\end{array}
\right.
$$

Q 59.4 Résolvez le problème de transport posé plus haut.

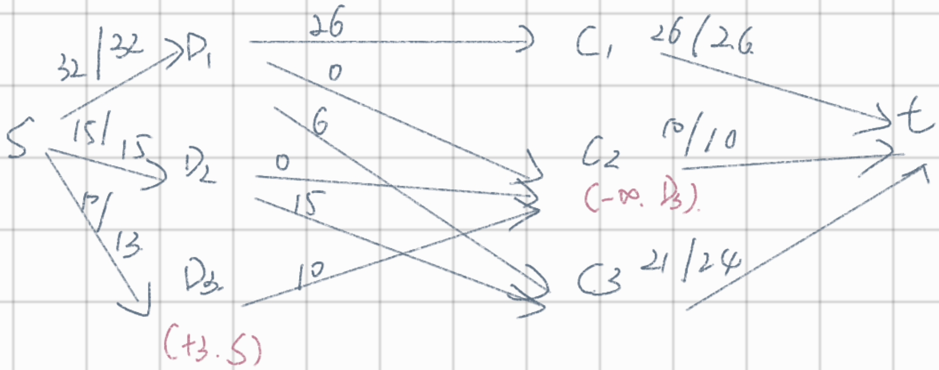
Q 59.5 En utilisant le théorème des écarts complémentaires, déduisez la solution optimale du problème dual obtenu à la question 3. Vérifiez l'égalité des valeurs optimales.

	C_1	C_2	C_3		
D_1	8	6	7	32	-6
D_2	11	8	9	15	-8
D_3	9	5	8	13	-5
	26	10	24	60	

60.

	C_1	C_2	C_3
D_1	2	0	1
D_2	3	0	1
D_3	4	0	3.
	↑ -2		↑ -1

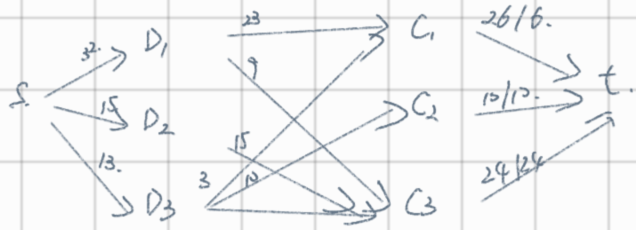
	C_1	C_2	C_3	
D_1	0	0	0	
D_2	1	0	0	-2.
D_3	2.	0	2.	
		+2		



ligne marqué D_3 -2.

colne marqué C_2 +2.

	C_1	C_2	C_3
D_1	0	2	0
D_2	1	2	0
D_3	0	0	0.



Solut° optimale.

23	0	9.
0	0	15
3	10	0

8	6	7.	-6	$\lambda_1=6$
11	8	9.	-8	$\lambda_2=8.$
9	5	8	-5 -2 = -7.	$\lambda_3=7$
-2	+2	-1		

$\mu_1=2$ $\mu_2=2$ $\mu_3=1$.

0	2	0
1	2	0.
1	0	0.

réalisable de D

optimale de valeur (TEC)

Exercice 56 (Résolution d'un problème de transport par Busacker et Gowen)

On considère un problème de transport entre 3 usines et 2 magasins. Les coûts c_{ij} de transport des produits de i vers j sont donnés ci-dessous :

	M1	M2	quantité disponible
U1	12	3	30
U2	14	4	40
U3	15	8	20
Besoin	30	60	

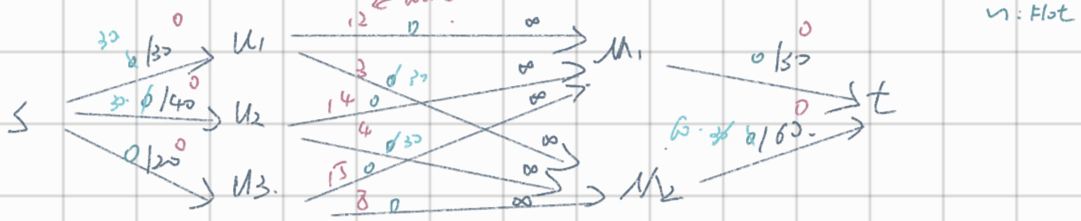
Q 56.1 Calculer la solution optimale de ce problème à l'aide de l'algorithme de Busacker et Gowen.

	M1	M2	quantité disponible
U1	12	3	30
U2	14	4	40
U3	15	8	20
Besoin	30	60	

offre = demande.

Réseau : arc : – capacité

– coût unitaire de transport.

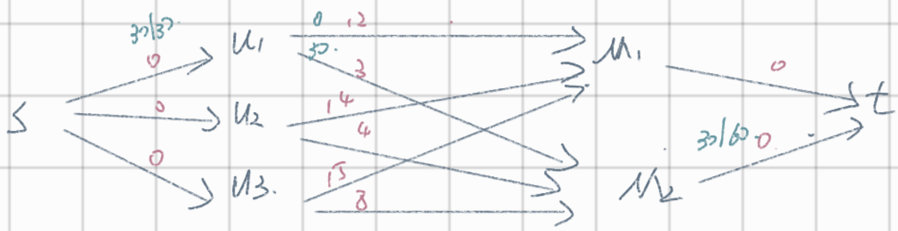


→ Trouver un flot de 90 unités (→ flot max)

à coût minimum.

* Algo de B. S. G ≃ FSF, mais à chaque étape prendre un chemin de coût min dans le graphe d'écart.

It. 1 : Graphe d'écart.



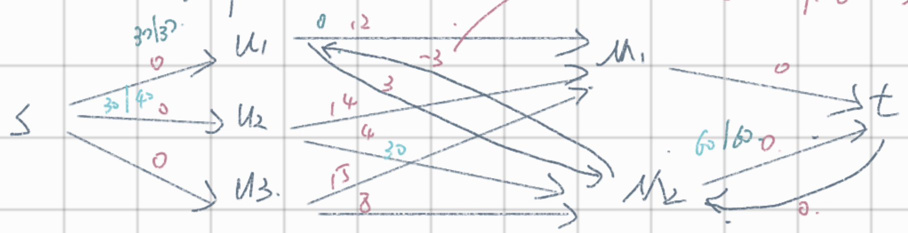
Chemin de coût min : (S, U1, M2, t) = coût 3

→ capacité résiduelle 30.

→ 30 sur (S, U1, M2, t).

#2 : Graphe d'écart

correspond à une diminut° du flot → "capacité 3"



Chemin de coût min (s, u2, v2, t) = 4

capacité résiduelle : 30.

. . .

Jusqu'à avoir un flot de 90 unités.