Chapitre 1

Énergie mécanique

Objectifs d'apprentissage

- Écrire l'expression du travail infinitésimal d'une force
- Calculer le travail d'une force le long d'un chemin rectiligne ou circulaire
- Définir la puissance instantanée / moyenne d'une force
- Définir l'énergie cinétique, Énoncer et démontrer le théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel sous forme infinitésimale (travail, puissance) et intégrée
- Définir une force motrice / résistante
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique en choisissant correctement l'état initial et l'état final
- Identifier les situations où le théorème de l'énergie cinétique est avantageux par rapport au PFD / où un bilan énergétique est suffisant pour résoudre le problème
- Définition d'une force conservative, expression du travail d'une force conservative
- Établir et connaître les principales énergies potentielles : pesanteur, élastique, gravitationnelle, électrostatique, à une constante près
- Exprimer l'additivité des énergies potentielles pour un point matériel soumis à plusieurs forces cons.
- Définir de l'énergie mécanique d'un point matériel
- Énoncer et démontrer le théorème de l'énergie mécanique : forme différentielle et intégrale
- Définir une position d'équilibre stable / instable
- Pour un système à 1 ddl : caractériser les positions d'équilibre à partir de l'étude de l'énergie potentielle
- Représenter l'énergie potentielle en fonction de la position
- Exploiter un graphe énergétique pour décrire l'évolution du système
- Pour un système, distinguer forces intérieures et forces extérieures
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique aux cas où il existe des forces intérieures qui travaillent

Introduction

L'énergie est un concept essentiel que l'on retrouve dans à peu près toutes les branches de la physique et de l'ingénierie. Il s'agit d'un concept abstrait qui permet de traduire le fait qu'au cours de l'évolution d'un système il existe une certaine grandeur qui est conservée. Par exemple, lorsqu'on lance un objet vers le haut, sa vitesse diminue à mesure que son altitude augmente. La vitesse initialement communiquée à l'objet est donc progressivement convertie en élévation d'altitude. En termes énergétiques on dit que l'énergie de mouvement (énergie cinétique) de l'objet est convertie en énergie de pesanteur. Si on considère maintenant un objet glissant sur le sol, on constate qu'il s'arrête après avoir parcouru une certaine distance. On constate également que la température de l'objet et la température du sol ont augmenté. Dans cette situation, l'énergie de mouvement macroscopique de l'objet est convertie en énergie d'agitation microscopique (énergie thermique).

Ces exemples illustrent plusieurs propriétés de l'énergie : c'est une grandeur qui se manifeste sous différentes formes, qui peut être convertie d'une forme en une autre et qui peut être échangée entre deux systèmes. Le point le plus important est que pour un système isolé (c'est à dire qui n'échange pas d'énergie avec l'extérieur), la quantité d'énergie qu'il contient est constante. Elle pourra être convertie d'une forme en une autre, elle pourra être échangée entre différentes sous-parties du système mais sa valeur totale sera toujours la même. Il ne peut donc pas y avoir de création ou de destruction d'énergie mais seulement des échanges entre différents systèmes ou des conversions entre les différentes formes de l'énergie.

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés à la dynamique d'un point matériel à partir du concept de force : la 2^{e} loi de Newton est une relation entre le vecteur accélération d'un point matériel et la résultante des forces qui lui sont appliquées. Dans le cadre de la mécanique newtonienne nous allons maintenant introduire différentes grandeurs énergétiques et nous montrerons que la dynamique d'un point matériel peut également être étudiée sur la base de théorèmes relatifs à ces grandeurs. Nous terminerons ce chapitre en montrant que dans le cas d'un système il est important de prendre en compte les échanges énergétiques internes au système si l'on veut rendre compte correctement de sa dynamique.

1.1 Énergie cinétique d'un point matériel, travail et puissance

Reprenons tout d'abord l'exemple donné en introduction d'un objet lancé vers le haut et soumis au champ de pesanteur. On suppose qu'à l'instant initial l'objet se trouve à l'altitude z_0 et possède une vitesse v_0 vers le haut. Au cours de son ascension sa vitesse diminue : la variation de son énergie de mouvement est associée à une variation de son altitude. Analysons cette situation à l'aide de la 2^{e} loi de Newton (on suppose l'axe (Oz) orienté vers le haut) :

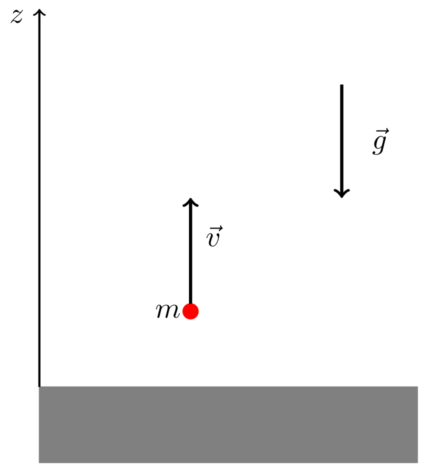
$$m\ddot{z} = -mg \quad \rightarrow \quad \dot{z}(t) = v(t) = v_0 - gt \quad \rightarrow \quad z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + z_0$$

Si on exprime t en fonction de v et que l'on injecte cette expression dans la 3^{e} relation on obtient :

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -g(z - z_0)$$

En multipliant par m de chaque côté on peut alors écrire : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(z - z_0)$

On obtient donc : $\Delta(\frac{1}{2}mv^2) = -mg\Delta z = -P\Delta z$. Cette relation relie la variation de la grandeur $\frac{1}{2}mv^2$ et la variation d'altitude Δz. Cet exemple permet de justifier la façon dont nous allons définir l'énergie cinétique d'un point matériel et nous allons maintenant montrer qu'une relation de même nature peut être écrite dans un cadre beaucoup plus général.



1.1.1 Énergie cinétique, puissance d'une force

Définition : énergie cinétique

On considère un point matériel de masse m possédant une vitesse v dans le référentiel $\mathcal{R}$. **L'énergie cinétique** de ce point matériel est définie par :

$$E_c \;=\; \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Propriétés :

- dimension : $[E_c] = M.L^2.T^{-2}$ unité SI : le Joule (J)
- l'énergie cinétique est une grandeur **scalaire** positive : $E_c \geq 0$
- l'énergie cinétique dépend du référentiel d'étude puisque son expression fait intervenir la vitesse qui est une grandeur dépendante du choix du référentiel
- notations :

$$\left.\begin{array}{lll} v = ||\vec{v}|| & \rightarrow & v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ \vec{v}^{\,2} = \vec{v} \cdot \vec{v} & \rightarrow & \vec{v}^{\,2} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v}^{\,2} = v^2}$$

L'énergie cinétique peut donc être notée indifféremment $\frac{1}{2}mv^2$ ou $\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}$

On souhaite maintenant caractériser la variation au cours du temps de cette grandeur. Pour cela nous allons calculer l'expression de sa dérivée par rapport au temps et nous allons utiliser le fait que $\vec{v}^{\,2} = v^2$ afin de faire apparaître la grandeur $\dot{\vec{v}}$ qui nous permettra de relier la variation de l'énergie cinétique à la résultante des forces appliquées grâce à la 2^e loi de Newton :

$$\frac{dE_c}{dt} \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\right) \;=\; m\,\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}$$

On suppose que le référentiel d'étude est galiléen et que le point matériel étudié est soumis à la résultante des forces $\vec{F}$. On a alors d'après la 2^e loi de Newton : $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ et on peut donc écrire :

$$\frac{dE_c}{dt} \;=\; \vec{F}\cdot\vec{v}$$

La variation de l'énergie cinétique du point matériel par unité de temps est donc égale au produit scalaire de la résultante des forces et de son vecteur vitesse.

Définition : puissance d'une force

Soit un point matériel M animé d'une vitesse $\vec{v}$ et soumis à une force $\vec{F}$. On appelle **puissance de la force** (ou puissance exercée / transmise par la force) la grandeur $\mathcal{P}$ définie par :

$$\mathcal{P} \;=\; \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Propriétés :

- dimension : $[\mathcal{P}] = M.L^2.T^{-3} = \dfrac{[E]}{T}$ unité : le Watt (W) 1 W = 1 J/s
- la puissance est une grandeur scalaire positive ou négative

  $\widehat{(\vec{F},\vec{v})} \in [0,\frac{\pi}{2}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P} \geq 0$ et $\widehat{(\vec{F},\vec{v})} \in [\frac{\pi}{2},\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P} \leq 0$

  cas particulier important : si $\vec{F} \perp \vec{v}$ alors $\mathcal{P} = 0$
- La puissance d'une force est une grandeur définie à chaque instant t : $\mathcal{P}(t) = \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)$

Nous pouvons maintenant reformuler la relation précédemment obtenue à l'aide de cette grandeur :

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel (1re forme)

La variation d'énergie cinétique par unité de temps d'un point matériel en mouvement dans un référentiel galiléen est égale à la puissance de la résultante des force $\vec{F}$:

$$\frac{dE_c}{dt}(t) \;=\; \mathcal{P}_{\vec{F}}(t) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{P}_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Le théorème de l'énergie cinétique nous permet de donner une interprétation à la notion de puissance : la puissance d'une force correspond à la quantité d'énergie transmise par unité de temps au point matériel par l'intermédiaire de cette force.

1.1.2 Travail d'une force

Puisque $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ où $\vec{r}$ est le vecteur position, on peut s'écrire : $\dfrac{dE_c}{dt} \;=\; \vec{F}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

En multipliant cette équation par dt on obtient alors : $dE_c \;=\; \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Définition : travail infinitésimal (ou élémentaire) d'une force

On considère un point matériel M effectuant un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$. Au cours de ce déplacement, M est soumis à une force $\vec{F}$. On appelle **travail infinitésimal** de la force $\vec{F}$ la grandeur notée δW et définie par :

$$\delta W \;=\; \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

On considère un point matériel M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ le long de la trajectoire $\mathcal{C}$ et soumis à une force $\vec{F}$. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du déplacement. On peut écrire le déplacement infinitésimal de M sous la forme $d\vec{r} = d\ell\,\vec{u}$ où $d\ell$ représente la distance parcourue par M entre t et $t+dt$. La force $\vec{F}$ peut s'écrire quant à elle :

$\vec{F} = F_{\parallel}\,\vec{u} + \vec{F}_{\perp}$ où $\vec{F}_{\perp}$ représente la composante de $\vec{F}$ perpendiculaire à $\vec{u}$ (voir figure 1.1). Le travail effectué par $\vec{F}$ au cours de ce déplacement s'écrit donc :

$$\delta W \;=\; \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; (F_{\parallel}\,\vec{u} + \vec{F}_{\perp})\cdot d\ell\,\vec{u} \;=\; F_{\parallel}\,d\ell$$

Le travail élémentaire d'une force est donc égal au produit de la composante de cette force parallèle au déplacement et de la distance parcourue au cours de ce déplacement.

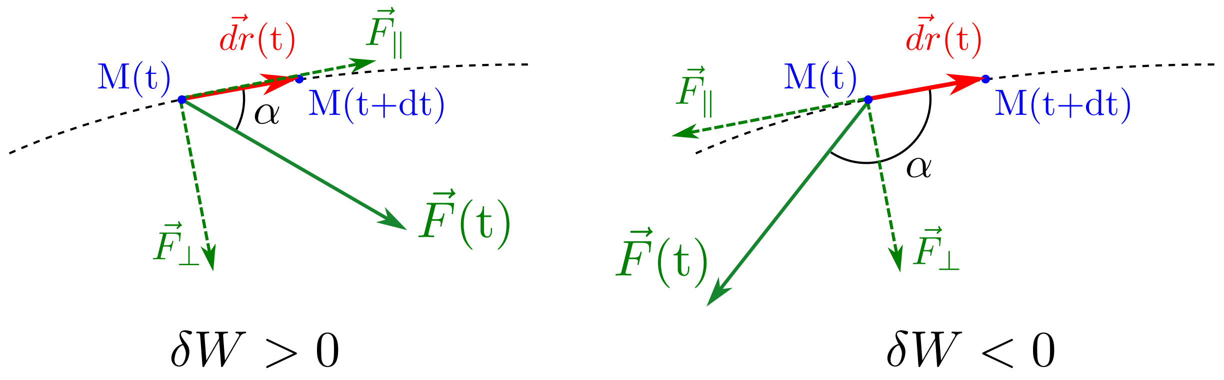


FIGURE 1.1 – A gauche : cas d'une force effectuant un travail positif. A gauche : cas d'une force effectuant un travail négatif.

Propriétés :

- dimension : $[\delta W] = [F].L = M.L^2.T^{-2}$ $\;\rightarrow$ le travail est homogène à une énergie
- unité : le Joule (J)
- La notation δW ne désigne pas une petite variation d'une grandeur W (que nous n'avons pas encore défini). Cette notation δW représente une quantité infinitésimale de travail définie par $\vec{F}.d\vec{r}$
- Cas où la force $\vec{F}$ est la résultante d'un ensemble de forces $\vec{F}_i$: $\;\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$

$$\delta W_{\vec{F}} \;=\; \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r} \;=\; \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N\right)\cdot d\vec{r} \;=\; \vec{F}_1\cdot d\vec{r} + \vec{F}_2\cdot d\vec{r} + ... + \vec{F}_N\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta W_{\vec{F}} \;=\; \sum_i \delta W_{\vec{F}_i}}$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel (2e forme)

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel au cours d'un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ est égale au travail de la résultante des forces $\vec{F}$, effectué au cours de ce déplacement :

$$dE_c \;=\; \delta W_{\vec{F}} \qquad \text{avec} \qquad \delta W_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Interprétation :

Sous cette forme, le théorème de l'énergie cinétique montre que le travail effectué par une force lors d'un déplacement infinitésimal correspond à la quantité d'énergie transmise au point matériel par l'intermédiaire de cette force au cours du déplacement.

Remarques :

- La première forme que nous avons donnée du théorème de l'énergie cinétique, $\dot{E}_c(t) = \mathcal{P}_{\vec{F}}(t)$, est une relation valable à chaque instant t. Elle relie la variation d'énergie cinétique par unité de temps à l'instant t, à la puissance de la résultante des forces à cet instant.
- La deuxième forme du théorème de l'énergie cinétique, $dE_c = \delta W_{\vec{F}}$, correspond à un bilan d'énergie au cours du déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ effectué entre les instant t et $t + dt$:
  - ☐ $dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t)$ est la variation d'énergie cinétique du point matériel entre les instants t et $t + dt$, c'est à dire au cours du déplacement
  - ☐ $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est le travail effectué par la résultante des forces au cours de ce déplacement

1.1.3 Forme intégrale du théorème de l'énergie cinétique

Nous allons maintenant intégrer cette 2e forme du théorème afin d'établir un bilan d'énergie pour un déplacement quelconque du point matériel le long d'une trajectoire. Pour illustrer le raisonnement que nous allons suivre sur un cas particulièrement simple, considérons tout d'abord un point matériel M qui se trouve successivement aux positions A, B et C aux instants t, $t+dt$ et $t+2dt$. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique pour les déplacements $A \to B$ et $B \to C$ on obtient les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} A \to B & E_c(t + dt) - E_c(t) = \delta W_{A\to B} \\ B \to C & E_c(t + 2dt) - E_c(t + dt) = \delta W_{B\to C} \end{array}$$

En additionnant ces deux relations on obtient : $E_c(t + 2dt) - E_c(t) = \delta W_{A\to B} + \delta W_{B\to C}$

La variation d'énergie cinétique entre A et C est donc égale à la somme des travaux effectués par la résultante des forces appliquées à M au cours de son déplacement. On peut reprendre ce raisonnement pour un déplacement quelconque entre deux points A et B le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$:

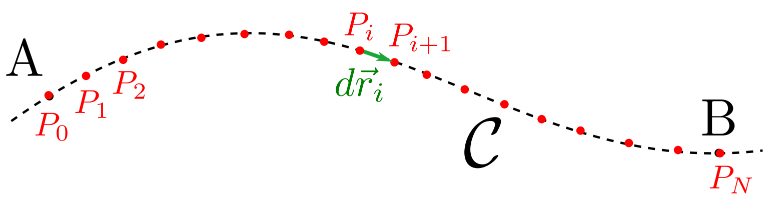


FIGURE 1.2 – Division du chemin entre A et B en segments infinitésimaux $[P_i, P_{i+1}]$.

1. on découpe le chemin parcouru par M en un ensemble de segments infinitésimaux $[P_i, P_{i+1}]$
2. sur chacun de ces segments on applique le théorème de l'énergie cinétique :

   $$dE_c(P_i \to P_{i+1}) = \delta W_{P_i\to P_{i+1}} \qquad \to \qquad E_c(P_{i+1}) - E_c(P_i) = \delta W_{P_i\to P_{i+1}}$$
3. on additionne toutes ces relations :

   $$[E_c(P_1) - E_c(P_0)] + [E_c(P_2) - E_c(P_1)] + ... \;=\; \delta W_{P_0\to P_1} + \delta W_{P_1\to P_2} + ...$$

   Dans le membre de gauche, tous les termes à l'exception du premier et du dernier s'annulent deux à deux. On obtient donc la relation :

   $$E_c(B) - E_c(A) \;=\; \sum_i \delta W_{P_i\to P_{i+1}}$$

   La variation d'énergie cinétique du point matériel est donc égale à la somme des travaux effectués par la résultante des forces au cours de son déplacement entre les points A et B.

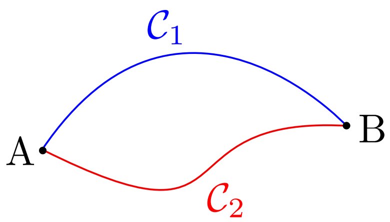
Comme le travail δW est une grandeur infinitésimale, la somme est une somme de grandeurs infinitésimales et on remplace alors le symbole de somme discrète $\displaystyle\sum_i$ par une intégrale $\displaystyle\int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}}$. Ce dernier symbole se lit : « intégrale entre A et B le long du chemin $\mathcal{C}$ ».

Définition : travail d'une force le long d'un chemin

Le travail total effectué par une force $\vec{F}$ appliquée sur point matériel au cours d'un déplacement entre 2 points A et B le long de la trajectoire $\mathcal{C}$ est égale à la somme des travaux effectués par cette force au cours de ce déplacement :

$$W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \;=\; \int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Il est important de préciser le chemin le long duquel est calculé le travail car il n'y a pas de raison a priori pour que la valeur du travail effectué par une force le long d'un chemin donné soit égale à celle effectué par cette même force le long d'un autre chemin. Si on considère 2 chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ reliant 2 points A et B, et un point matériel soumis à une force $\vec{F}$ lors de son déplacement entre ces 2 points, alors on a en général :



$$W_{\underset{\mathcal{C}_1}{A\to B}} \;\neq\; W_{\underset{\mathcal{C}_2}{A\to B}}$$

Avec cette notation pour le travail effectué par une force le long d'une trajectoire nous pouvons maintenant formuler le théorème de l'énergie cinétique pour un déplacement quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique (3$^{\text{e}}$ forme)

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel est égale au travail effectué par la résultante des forces le long de la trajectoire.

Pour un point matériel soumis à la résultante des forces $\vec{F}$ et se déplaçant le long de la trajectoire $\mathcal{C}$ entre 2 points A et B, on peut écrire :

$$\Delta E_c \;=\; E_c(B) - E_c(A) \;=\; W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}}$$

De manière plus formelle, le passage de la forme infinitésimale du théorème de l'énergie cinétique à sa forme intégrale peut s'écrire de la façon suivante :

$$dE_c = \vec{F}.d\vec{r} \qquad \text{pour un déplacement infinitésimal}$$

$$\Rightarrow \int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} dE_c = \int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \text{pour un déplacement entre A et B le long de } \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(A) = W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}}$$

Forces motrices / résistantes

Définitions :

- Une force est dite **motrice** si le travail qu'elle fournit le long d'un chemin donné est positif.
- Une force est dite **résistante** si le travail qu'elle fournit le long d'un chemin donné est négatif.
- On dit d'une force dont le travail est nul qu'elle ne travaille pas.

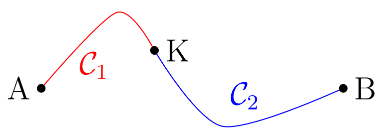
Remarques :

- D'après le théorème de l'énergie cinétique, une force motrice tend à augmenter la vitesse du point matériel sur lequel elle est appliquée. Au contraire, une force résistante tend à diminuer la vitesse du point matériel. Une force qui ne travaille pas ne modifie pas la norme de la vitesse ; elle tend seulement à courber la trajectoire.
- Une force n'est pas intrinsèquement motrice ou résistante, le caractère moteur ou résistant d'une force dépend du contexte dans lequel cette force est appliquée. Par exemple, pour un objet lancé vers le haut le poids sera une force résistante durant la phase d'ascension mais il sera moteur lors de la phase de descente.

1.1.4 Calcul du travail le long d'un chemin

Décomposition d'un chemin

Le travail total effectué par une force est défini comme la somme des travaux infinitésimaux effectués par cette force le long du chemin parcouru. Si l'on considère une trajectoire $\mathcal{C}$ entre 2 points A et B, et un 3^{e} point K situé entre A et B sur cette trajectoire, alors pour calculer le travail total $W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}}$ on peut calculer séparément la somme des travaux infinitésimaux entre les points A et K, et celle entre les points K et B, puis additionner les 2 résultats obtenus.



$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

$$\int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\underset{\mathcal{C}_1}{A\to K}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\underset{\mathcal{C}_2}{K\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

soit : $\boxed{W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \;=\; W_{\underset{\mathcal{C}_1}{A\to K}} \;+\; W_{\underset{\mathcal{C}_2}{K\to B}}}$

Une telle décomposition est utile si on doit par exemple calculer le travail effectué sur un point matériel se déplaçant sur une trajectoire constituée d'une portion rectiligne suivie d'une portion circulaire. On peut alors définir un repère cartésien bien adapté au calcul du travail sur la portion rectiligne, puis un repère polaire bien adapté au calcul sur la portion circulaire. Il ne reste alors plus qu'à ajouter les deux résultats pour obtenir le travail total. Nous allons maintenant montrer comment calculer le travail d'une force le long d'un chemin dans quelques situations simples.

Force ne travaillant pas :

Dans le cas d'une force $\vec{F}$ constamment perpendiculaire au déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ (où ce qui est équivalent perpendiculaire au vecteur vitesse), le travail infinitésimal $\delta W = \vec{F}.d\vec{r}$ est toujours nul et le travail total, égal à la somme des travaux infinitésimaux, est nul également. Exemples : réaction normale d'un support, tension d'un fil souple, composante magnétique de la force de Lorentz.

Force constante :

Si le vecteur force est constant le long du chemin suivi alors : $\displaystyle\int_{\substack{A\to B\\ \mathcal{C}}} \vec{F}.d\vec{r} \;=\; \vec{F}.\int_{\substack{A\to B\\ \mathcal{C}}} d\vec{r} \;=\; \vec{F}.\overrightarrow{AB}$

Exemple : poids, charge dans un champ électrostatique uniforme

Force de norme constante et colinéaire au déplacement :

On note $d\vec{r}(t) = d\ell(t)\,\vec{u}(t)$, où $d\ell$ représente la distance parcourue entre t et $t+dt$, et $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire orienté dans le sens du déplacement à cet instant. Si on considère une force de la forme $\vec{F}(t) = F\,\vec{u}(t)$ où F est constante, on a alors :

$$\int_{\substack{A\to B\\ \mathcal{C}}} \vec{F}.d\vec{r} \;=\; \int_{\substack{A\to B\\ \mathcal{C}}} F\,\vec{u}.d\ell\,\vec{u} \;=\; F\int_{\substack{A\to B\\ \mathcal{C}}} d\ell = F\,L$$

où L représente la distance parcourue entre les points A et B.

Force quelconque, déplacement rectiligne :

Nous allons illustrer ce cas à l'aide de l'exemple suivant. Une masse m pouvant glisser sans frottement sur une table est fixée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur k et longueur à vide ℓ_0. Le ressort, initialement étiré d'une longueur $\ell_0/2$ par rapport à sa longueur à vide, est lâché sans vitesse. On souhaite calculer le travail effectué par le ressort entre l'instant initial et l'instant où la masse passe par la position où le ressort n'est ni étiré ni comprimé.

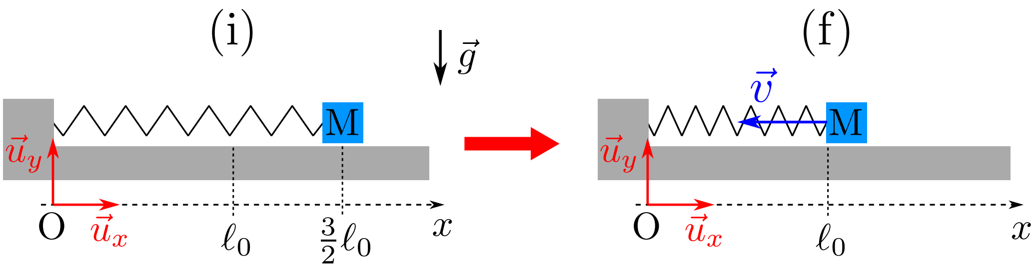


FIGURE 1.3

Force exercée par le ressort : $\vec{F} = -k(x-\ell_0)\,\vec{u}_x$

Déplacement infinitésimal de la masse : $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x$

$\Rightarrow$ travail infinitésimal effectué par le ressort : $\delta W = -k(x-\ell_0)\,dx$

Pour calculer le travail total il ne reste plus qu'à intégrer cette expression le long du trajet suivi :

$$W = \int_{x=\ell_0+\frac{\ell_0}{2}}^{x=\ell_0} -k(x-\ell_0)\,dx = \left[-\frac{k}{2}(x-\ell_0)^2\right]_{\frac{3\ell_0}{2}}^{\ell_0} = \frac{k\ell_0^2}{8}$$

On peut alors utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour en déduire la valeur de la vitesse de la masse lorsque le ressort passe en $x=\ell_0$. Dans cet exemple seul le ressort travaille puisque le poids et la réaction du support sont perpendiculaires au déplacement. Si on note A la position initiale, et B la position $x=\ell_0$ on peut donc écrire :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{ressort} \quad\rightarrow\quad \left.\begin{aligned} &E_c(B) = \frac{1}{2}mv_B^2\\ &E_c(A) = 0\\ &W_{ressort} = \frac{k\ell_0^2}{8}\end{aligned}\right\}\quad v(B) = \sqrt{\frac{k\ell_0^2}{4m}}$$

De manière plus générale :

On considère un point matériel en mouvement rectiligne entre 2 points A et B. On peut définir un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que l'axe (Ox) est orienté le long de la droite (AB). Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit alors $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x$. Si l'on suppose que la force $\vec{F}$ ne dépend pas explicitement du temps, on peut écrire :

$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\,\vec{u}_x + F_y(x,y,z)\,\vec{u}_y + F_z(x,y,z)\,\vec{u}_z$$

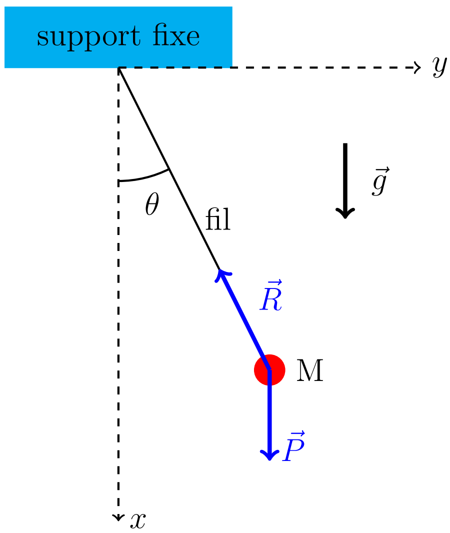
On a alors : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x,y,z)\,dx$ et donc :

$$W_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} = \int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y=0, z=0)\,dx = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)\,dx$$

On est donc ramené au calcul d'une intégrale d'une fonction d'une seule variable.

Force quelconque, déplacement circulaire :

Nous allons ici considérer un pendule de masse m et longueur ℓ lâché sans vitesse à partir d'un angle θ_0. On souhaite calculer la vitesse angulaire lorsque le pendule passe par la verticale. Au cours de son mouvement le pendule n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$ et à la tension du fil $\vec{R}$ qui ne travaille pas (car elle est perpendiculaire au déplacement).



Déterminons le travail effectué par le poids :

$\vec{P} = mg\,(\cos\theta\;\vec{u}_r - \sin\theta\;\vec{u}_\theta)$

$d\vec{r} = \ell\,d\theta\;\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \quad \delta W = -mg\ell\sin\theta\,d\theta$

$$\begin{aligned} W &= \int_{\theta=\theta_0}^{\theta=0} -mg\ell\sin\theta\,d\theta \\ &= [mg\ell\cos\theta]_{\theta_0}^{0} \\ &= mg\ell\,[1-\cos\theta_0] \end{aligned}$$

De manière plus générale

On considère un point matériel en mouvement circulaire, de rayon R, entre 2 points A et B. On peut définir un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que la trajectoire se trouve dans le plan (Oxy) avec son centre en O. Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit alors $d\vec{r} = R\, d\theta\, \vec{u}_\theta$. Si l'on suppose que la force $\vec{F}$ ne dépend pas explicitement du temps, on peut écrire en coordonnées cylindriques :

$$\vec{F} = F_r(r,\theta,z)\,\vec{u}_r + F_\theta(r,\theta,z)\,\vec{u}_\theta + F_z(r,\theta,z)\,\vec{u}_z$$

On a alors : $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_\theta(r,\theta,z)\,d\theta$ et donc :

$$W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} = \int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} F_\theta(r=R,\theta,z=0)\,d\theta = R\int_{\theta_A}^{\theta_B} F_\theta(\theta)\,d\theta$$

On est donc ramené au calcul d'une intégrale d'une fonction d'une seule variable.

1.2 Forces conservatives, énergie potentielle

1.2.1 Définitions

Nous avons souligné dans la partie précédente le fait que le travail effectué par une force entre 2 points A et B dépend en général du chemin suivi entre ces deux points. Cependant il existe un certain nombre de forces pour lesquelles ceci n'est pas vrai : ces forces sont dites *conservatives*.

Définition : force conservative

Une force $\vec{F}$ est dite **conservative** si et seulement si :

le travail effectué par $\vec{F}$ au cours d'un déplacement entre 2 points A et B ne dépend que des coordonnées de A et de B, et pas du chemin suivi entre ces 2 points ou de la façon dont ce chemin est parcouru

$\Leftrightarrow$ il existe une fonction $E_p(\vec{r})$, appelée **énergie potentielle**, telle que

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; -\,dE_p$$

c'est à dire si le travail élémentaire δW de cette force correspond à la différentielle d'une certaine fonction ne dépendant que des coordonnées de l'espace

L'énergie potentielle est donc une forme d'énergie associée à certaines forces particulières. L'intérêt d'introduire cette notion ainsi que la justification du signe négatif dans la relation $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$ apparaîtront plus clairement lorsque nous présenterons la notion d'énergie mécanique.

1.2.2 Travail d'une force conservative

On considère un point matériel se déplaçant le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$ et soumis à une force conservative $\vec{F}$ associée à l'énergie potentielle E_p. Au cours du déplacement entre 2 points A et B le long de cette trajectoire, le travail effectué par cette force est :

$$W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} = \int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} dE_p$$

Or l'intégrale de la différentielle d'une fonction est simplement égale à la variation de cette fonction entre le point de départ et le point d'arrivée, indépendemment du trajet parcouru entre ces deux points. On obtient donc le résultat important suivant :

Travail d'une force conservative

$$W_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} \;=\; -\Big[E_p(B) - E_p(A)\Big] \;=\; -\,\Delta E_p$$

1.2.3 Quelques forces conservatives importantes

Pour déterminer si une force $\vec{F}$ est conservative, il faut chercher s'il existe une fonction $E_p(\vec{r})$ telle que $dE_p = -\,\vec{F}\cdot d\vec{r}$. Si cette fonction existe, alors la force est bien conservative et on a du même coup déterminé l'énergie potentielle qui lui est associée. Les forces conservatives les plus courantes sont les suivantes :

Poids

On se place dans le référentiel terrestre muni d'un axe (Oz) orienté vers le haut. Une masse m est alors soumise au poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_z$. Considérons maintenant le travail infinitésimal effectué par cette force lors d'un déplacement infinitésimal quelconque $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$:

$$\delta W = \vec{P}\cdot d\vec{r} = -mg\,\vec{u}_z\cdot(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z) = -mg\,dz$$

On doit maintenant déterminer s'il existe $E_p(x,y,z)$ telle que : $\quad dE_p = -\delta W = mg\,dz$

soit : $\quad \dfrac{dE_p}{dz} = mg$

en intégrant on obtient : $\quad E_p(z) = mgz \;+\; \text{cte}$

Remarque :

Si on avait choisi un axe (Oz) orienté vers le bas on aurait : $\vec{P} = +mg\,\vec{u}_z$ $\quad$ et donc :

$$\delta W = \vec{P}\cdot d\vec{r} = mg\,\vec{u}_z\cdot(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z) = mg\,dz$$

On a alors $\quad dE_p = -\delta W = -mg\,dz \qquad \rightarrow \qquad E_p(z) = -\,mgz \;+\; \text{cte}$

$\Rightarrow$ le signe devant le terme mgz dépend de l'orientation de l'axe (Oz) !!!

Gravitation

On considère 2 masses m et m' situées à une distance r l'une de l'autre. Dans un repère ayant la masse m' pour origine la force exercée sur la masse m s'écrit :

$$\vec{F} = -\,\frac{Gmm'}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Au cours d'un déplacement infinitésimal on a (en coordonnées sphériques) $d\vec{r} = dr\;\vec{u}_r + rd\theta\;\vec{u}_\theta + r^2\sin\theta d\phi\vec{u}_\phi$ le travail effectué est :

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\,\frac{Gmm'}{r^2}\,\vec{u}_r\cdot(dr\;\vec{u}_r + rd\theta\;\vec{u}_\theta + r^2\sin\theta d\phi\vec{u}_\phi) = -\,\frac{Gmm'}{r^2}\,dr$$

Pour déterminer si cette force est conservative, on cherche une fonction $E_p(r,\theta,z)$ telle que :

$$dE_p = -\,\delta W = \frac{Gmm'}{r^2}\,dr \qquad \text{soit :} \qquad \frac{dE_p}{dr} = \frac{Gmm'}{r^2}$$

par intégration on obtient : $\qquad E_p(r) = -\,\dfrac{Gmm'}{r} \;+\; \text{cte}$

Électrostatique

On considère 2 charges électriques q et q' situées à une distance r l'une de l'autre. Dans un repère ayant la charge q' pour origine la force exercée sur la charge q s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{Kqq'}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Au cours d'un déplacement infinitésimal on a (en coordonnées sphériques) $d\vec{r} = dr\ \vec{u}_r + rd\theta\ \vec{u}_\theta + r^2 \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$ le travail effectué est :

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{Kqq'}{r^2}\,\vec{u}_r \cdot (dr\ \vec{u}_r + rd\theta\ \vec{u}_\theta + r^2 \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi) = \frac{Kqq'}{r^2}\,dr$$

Pour déterminer si cette force est conservative, on cherche une fonction $E_p(r, \theta, z)$ telle que :

$$dE_p = -\,\delta W = -\,\frac{Kqq'}{r^2}\,dr \qquad \text{soit :} \qquad \frac{dE_p}{dr} = -\,\frac{Kqq'}{r^2}$$

par intégration on obtient : $\qquad E_p(r) = \dfrac{Kqq'}{r} \;+\; \text{cte}$

Élastique

On considère un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 orienté suivant un axe (Ox) et dont une extrémité est fixée en O. La force exercée sur l'autre extrémité s'écrit : $\vec{F} = -k(x - \ell_0)\ \vec{u}_x$

Au cours d'un déplacement infinitésimal de cette extrémité $d\vec{r} = dx\ \vec{u}_x + dy\ \vec{u}_y + dz\ \vec{u}_z$ le travail effectué par cette force est :

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -k(x - \ell_0)\ \vec{u}_x \cdot (dx\ \vec{u}_x + dy\ \vec{u}_y + dz\ \vec{u}_z) = -k(x - \ell_0)\,dx$$

Pour déterminer si cette force est conservative, on cherche une fonction $E_p(x, y, z)$ telle que :

$$dE_p = -\,\delta W = k(x - \ell_0)\,dx \qquad \text{soit :} \qquad \frac{dE_p}{dx} = k(x - \ell_0)$$

par intégration on obtient : $\qquad E_p(x) = \dfrac{k}{2}\,(x - \ell_0)^2 \;+\; \text{cte}$

Puisque x correspond à la longueur du ressort on peut écrire cette relation sous la forme :

$$E_p(\ell) = \frac{k}{2}\,(\ell - \ell_0)^2 \;+\; \text{cte}$$

Forces conservatives les plus courantes

Interaction	Force	Énergie potentielle
pesanteur	$\pm\, mg\, \vec{u}_z$	$\pm\, mgz\ +\ \text{cte}$
gravitationnelle	$-\dfrac{Gmm'}{r^2}\,\vec{u}_r$	$-\dfrac{Gmm'}{r}\ +\ \text{cte}$
électrostatique	$\dfrac{Kqq'}{r^2}\,\vec{u}_r$	$\dfrac{Kqq'}{r}\ +\ \text{cte}$
élastique	$-k(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_x$	$\dfrac{k}{2}\,(\ell-\ell_0)^2\ +\ \text{cte}$

1.2.4 Propriétés de l'énergie potentielle

Choix de la constante d'intégration

La fonction énergie potentielle $E_p(\vec{r})$ est définie par la relation $dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$, donc par l'expression de sa différentielle. Pour obtenir $E_p(\vec{r})$ on doit donc intégrer cette relation, ce qui fait apparaître une constante d'intégration dans l'expression de E_p. L'énergie potentielle est donc définie à une constante additive près : si la fonction $E_p(\vec{r})$ vérifie la relation $dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$, alors la fonction $E_p(\vec{r}) + C$, avec C une constante, la vérifie aussi puisque $d[E_p(\vec{r}) + C] = d[E_p(\vec{r})] + dC = dE_p(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Le choix de la constante d'intégration est ici totalement arbitraire [1]. Cette liberté de choix vient du fait que toutes grandeurs mesurables en lien avec l'énergie potentielle correspondent en fait à une variation d'énergie potentielle entre 2 points. Or, une variation d'énergie potentielle est indépendante du choix de la constante :

$$E_p(\vec{r}) = f(\vec{r}) + C \quad \rightarrow \quad E_p(B) - E_p(A) = \Big[f(B) + C\Big] - \Big[f(A) + C\Big] = f(B) - f(A)$$

Puisque le choix de la constante est arbitraire, on choisit en général cette constante nulle.

1. Contrairement aux constante d'intégration qui apparaissent lorsqu'on intègre la 2ᵉ loi de Newton, dont la valeur est fixée par les conditions initiales.

Remarque : choix de l'origine des énergies potentielles

Choisir une valeur de la constante d'intégration revient en fait à choisir une position dans l'espace où l'énergie potentielle sera nulle. Cette position est appelée *origine de l'énergie potentielle*. Pour fixer la valeur de cette constante on choisit donc une position où il semble le plus naturel de considérer que l'énergie potentielle du système est nulle.

Dans le cas d'un point matériel soumis à la force de gravitation où à la force électrostatique, on choisit en général que l'énergie potentielle est nulle lorsque le point matériel est infiniment loin du système avec lequel il interagit (c'est à dire $r \to +\infty$), c'est à dire lorsque l'interaction entre les 2 objets est négligeable :

$$E_p = -\frac{Gmm'}{r^2} + cte \quad \to \quad E_p(r \to +\infty) = cte$$

En choisissant $E_p(r \to +\infty) = 0$ on obtient donc $cte = 0$.

Dans le cas d'un point matériel soumis à la force élastique, on choisit en général que l'énergie potentielle est nulle lorsque le ressort n'est ni étiré ni comprimé, c'est à dire lorsque la force exercée par le ressort est nulle :

$$E_p = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 + cte \quad \to \quad E_p(\ell = \ell_0) = cte$$

En choisissant $E_p(\ell = \ell_0) = 0$ on obtient donc $cte = 0$.

Pour les 3 cas que nous venons de citer (gravitation, électrostatique, élastique), le choix d'une énergie potentielle nulle à une position où la force est nulle ($E_p = 0 \Leftrightarrow$ interaction négligeable) conduit à une constante d'intégration nulle, et donc à l'expression la plus simple de la fonction énergie potentielle.

Dans le cas du poids il n'existe pas de position où l'interaction est négligeable [a]. Il n'y a donc pas ici de considération physique pour nous guider dans le choix de l'origine de l'énergie potentielle. Le choix le plus simple consiste à prendre l'énergie potentielle nulle à l'altitude qui a été choisie comme origine ($z = 0$), ce qui conduit là encore à prendre la constante d'intégration nulle.

Il peut être plus compliqué de choisir une constante d'intégration en lui donnant un sens physique dans le cas d'un objet soumis simultanément à plusieurs forces conservatives (voir paragraphe suivant). Mais même dans ces situation il ne faut pas oublier que le choix de la constante d'intégration est arbitraire et n'a aucune conséquence sur le comportement ou les propriétés du système étudié.

a. Lorsqu'on considère le poids, et non pas l'interaction gravitationnelle, on ne peut pas considérer une position infiniment loin de la Terre puisque la notion de poids n'a de sens qu'au voisinage de la surface de la Terre.

Additivité des énergies potentielles

On considère un point matériel soumis à une force conservative $\vec{F}_1$, associée à l'énergie potentielle $E_{p,1}$, et à une force conservative $\vec{F}_2$, associée à l'énergie potentielle $E_{p,2}$. Pour un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ on a donc les relations :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= -dE_{p,1} \\ \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} &= -dE_{p,2} \end{aligned}$$

En additionnant ces relations on obtient : $\quad (\vec{F_1} + \vec{F_2}).d\vec{r} \;=\; -\,d(E_{p,1} + E_{p,2})$

Cette relation montre que le travail infinitésimal de la résultante $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ est égal à l'opposé de la différentielle de la fonction $E_{p,1} + E_{p,2}$.

Conclusion : la résultante d'un ensemble de forces conservatives est une force conservative à laquelle on associe une énergie potentielle égale à la somme des énergies potentielles de ces différentes forces.

Expression de la force en fonction de E_p

Supposons que l'on connaisse une énergie potentielle $E_p(x)$ et que l'on cherche à déterminer l'expression de la force conservative $\vec{F}$ associée. Puisque par hypothèse E_p ne dépend que de la variable x on peut donc écrire :

$$dE_p \;=\; \frac{dE_p}{dx}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = F_x\,\vec{u}_x + F_y\,\vec{u}_y + F_z\,\vec{u}_z \\ d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z \end{array}\right\} \quad \delta W = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

Puisque $\vec{F}$ est la force associée à l'énergie potentielle E_p on doit donc vérifier la relation :

$$dE_p \;=\; -\,\delta W \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} F_x = -\,\dfrac{dE_p}{dx} \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{array}\right.$$

on en déduit donc : $\quad \vec{F} = -\,\dfrac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x$

De même, supposons que l'on connaisse une énergie potentielle $E_p(r)$ et que l'on cherche à déterminer l'expression de la force conservative $\vec{F}$ associée. Puisque par hypothèse E_p ne dépend que de la variable r on peut donc écrire :

$$dE_p \;=\; \frac{dE_p}{dr}\,dr$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = F_r\,\vec{u}_r + F_\theta\,\vec{u}_\theta + F_z\,\vec{u}_z \\ d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z \end{array}\right\} \quad \delta W = F_r\,dr + r\,F_\theta\,d\theta + F_z\,dz$$

Puisque $\vec{F}$ est la force associée à l'énergie potentielle E_p on doit donc vérifier la relation :

$$dE_p \;=\; -\,\delta W \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} F_r = -\,\dfrac{dE_p}{dr} \\ F_\theta = 0 \\ F_z = 0 \end{array}\right.$$

on en déduit donc : $\quad \vec{F} = -\,\dfrac{dE_p}{dr}\,\vec{u}_r$

Ces relations permettent, si l'on connaît l'expression d'une énergie potentielle $E_p(x)$ (ou $E_p(r)$), de déterminer l'expression de la force associée. Elles font apparaître la force comme une dérivée de l'énergie potentielle. C'est pour cette raison que l'on dit qu'une force conservative *dérive d'une énergie potentielle*. Ces relations peuvent être généralisées à l'aide de l'opérateur *gradient* (voir encadré ci-dessous).

Opérateur gradient

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

On note df la différentielle de cette fonction et $d\vec{r}$ un déplacement infinitésimal quelconque.

Le vecteur $\vec{A}$ tel que $\boxed{df = \vec{A} \cdot d\vec{r}}$ est appelé **gradient** de la fonction f

On le note $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$, ou $\vec{\nabla} f$

Gradient en coordonnées cartésiennes :

On considère la fonction $f(x, y, z)$. Puisque l'on travaille en coordonnées cartésiennes, on va exprimer le déplacement élémentaire et le vecteur $\vec{A}$ à l'aide de ces coordonnées :

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{r} = dx\, \vec{u}_x + dy\, \vec{u}_y + dz\, \vec{u}_z \\ \vec{A} = A_x\, \vec{u}_x + A_y\, \vec{u}_y + A_z\, \vec{u}_z \end{array}\right\} \to \vec{A} \cdot d\vec{r} = A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz$$

$$f = f(x, y, z) \quad \to \quad df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

Puisque la relation $df = \vec{A} \cdot d\vec{r}$ doit être vérifiée quels que soient dx, dy et dz, on a donc :

$$A_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad A_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\text{soit :} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\, \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\, \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\, \vec{u}_z$$

Gradient en coordonnées polaires :

On considère la fonction $f(r, \theta)$. Puisque l'on travaille en coordonnées polaires, on va exprimer le déplacement élémentaire et le vecteur $\vec{A}$ à l'aide de ces coordonnées :

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{r} = dr\, \vec{u}_r + r\, d\theta\, \vec{u}_\theta \\ \vec{A} = A_r\, \vec{u}_r + A_\theta\, \vec{u}_\theta \end{array}\right\} \to \vec{A} \cdot d\vec{r} = A_r\, dr + r\, A_\theta\, d\theta$$

$$f = f(r, \theta) \quad \to \quad df = \frac{\partial f}{\partial r}\, dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}\, d\theta$$

Puisque la relation $df = \vec{A} \cdot d\vec{r}$ doit être vérifiée quels que soient dr et $d\theta$, on a donc :

$$A_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad A_\theta = \frac{1}{r}\, \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\text{soit :} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r}\, \vec{u}_r + \frac{1}{r}\, \frac{\partial f}{\partial \theta}\, \vec{u}_\theta$$

Gradient de l'énergie potentielle :

Le gradient d'une fonction $f(\vec{r})$ est donc le vecteur $\vec{A}$ tel que $df = \vec{A} \cdot d\vec{r}$

Une force est dite conservative si et seulement si il existe une fonction $E_p(\vec{r})$ telle que $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$

Nous en déduisons immédiatement que pour une force conservative :

$$\vec{F} \;=\; -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_p$$

Cette relation permet de déterminer l'expression d'une force conservative, si l'on connaît celle de l'énergie potentielle associée.

1.2.5 Diagramme énergétique, positions d'équilibre

Nous allons maintenant montrer que lorsque l'énergie potentielle ne dépend que d'une seule variable x, l'observation du graphe $E_p(x)$ permet de repérer et de caractériser très simplement les positions d'équilibre du système.

Rappels : système à 1 degré de liberté, équilibre stable / instable

On appelle système à 1 degré de liberté un système pour lequel il existe une seule variable spatiale indépendante qui évolue au cours du temps.

Exemples simples :

- masse qui glisse le long d'un axe (Ox) $\quad\rightarrow\quad x(t)$
- pendule $\quad\rightarrow\quad \theta(t)$

Exemple un peu plus compliqué : point matériel glissant sur un support dans le plan (Oxy). Dans cet exemple, les coordonnées x et y du point matériel vont varier au cours du temps. Cependant, si on suppose que le point matériel reste en contact avec le support, alors les variations de x et de y sont liées par la géométrie du support. Ici le point matériel se déplace suivant une courbe $y(x)$ imposée par les conditions extérieures. Il n'y a donc qu'une seule variable spatiale variant indépendemment au cours du temps : si on connaît $x(t)$, alors on connaît automatiquement $y(t)$ puisque $y(x)$ est connu.

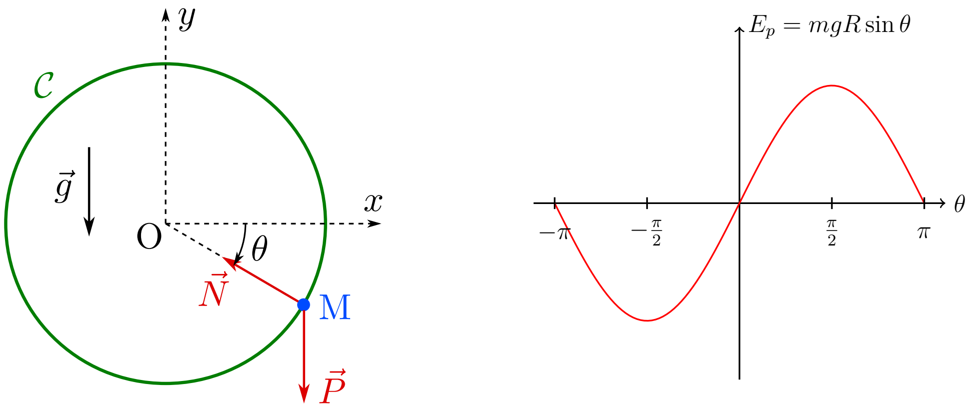
Définitions

Position d'équilibre : position telle que si on lâche le système sans vitesse dans cette position alors il reste immobile

- **équilibre stable** : si on écarte légèrement le système de cette position, alors il tend naturellement à y revenir
- **équilibre instable** : si on écarte légèrement le système de cette position, alors il tend naturellement à s'en écarter encore plus

Exemple : équilibre d'une masse coulissant sur un cercle

Dans cet exemple, on souhaite montrer comment l'étude de la fonction énergie potentielle permet de déterminer et caractériser les positions d'équilibre d'un système à 1 degré de liberté. On considère un anneau $\mathcal{C}$ de centre O et rayon R, immobile dans le référentiel terrestre. On souhaite déterminer les positions d'équilibre d'une masse m (repérée par le point M) pouvant coulisser sans frottement autour de cet anneau (comme une perle sur un fil). La masse est soumise au poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{N}$ de l'anneau. Dans cet exemple, l'objet étudié est donc soumis à une force conservative et à une force qui ne travaille pas. Puisque l'on veut déterminer les positions d'équilibre de M, on va supposer qu'on lâche M sans vitesse à un angle θ donné. Quelle condition doit vérifier θ pour que M reste immobile ?



(a) Représentation du problème. (b) Diagramme d'énergie potentielle.

FIGURE 1.4 – Masse coulissant sur un anneau.

La réaction $\vec{N}$ étant normale au cercle, elle ne tend pas à faire coulisser M dans un sens ou dans l'autre. En ce qui concerne le poids, on peut le décomposer sur la base polaire :

$$\vec{P} = P_r\,\vec{u}_r + P_\theta\,\vec{u}_\theta = -mg\sin\theta\,\vec{u}_r - mg\cos\theta\,\vec{u}_\theta$$

De même que la réaction $\vec{N}$, la composante P_r ne tend pas à faire coulisser M dans un sens ou dans l'autre. Il n'y a donc que la composante P_θ qui peut mettre M en mouvement lorsqu'on le lâche. Pour que M reste à l'équilibre il faut donc que P_θ soit nul, ce qui se produit en $\theta = \pm\pi/2$. Nous avons ainsi déterminé les positions d'équilibre à partir de l'étude des forces exercées sur M. Nous allons maintenant utiliser cette analyse pour montrer comment ces positions peuvent être obtenues à partir de l'énergie potentielle.

Dans cet exemple l'énergie potentielle de M est l'énergie potentielle de pesanteur. La position de M peut être repérée à l'aide d'une seule variable spatiale θ. On va donc écrire l'expression de l'énergie potentielle comme fonction uniquement de cette variable :

$$\left.\begin{aligned} E_p &= mgx \\ x &= R\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad\rightarrow\quad E_p(\theta) = mgR\sin\theta$$

Le poids étant la force conservative associé à cette énergie potentielle, la relation $\vec{P}.d\vec{r} = -dE_p$ doit être vérifiée pour un déplacement $d\vec{r}$ quelconque. Elle doit donc être vérifiée en particulier pour un déplacement de M le long de l'anneau $d\vec{r} = Rd\theta\,\vec{u}_\theta$:

$$(P_r\,\vec{u}_r + P_\theta\,\vec{u}_\theta).Rd\theta\,\vec{u}_\theta = -dE_p \quad\Rightarrow\quad P_\theta\,Rd\theta = -dE_p \quad\Rightarrow\quad P_\theta = -\frac{1}{R}\frac{dE_p}{d\theta}$$

On peut donc en déduire que : $\quad P_\theta = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{dE_p}{d\theta} = 0$

La condition d'équilibre que nous avions trouvé par l'analyse des forces peut donc se formuler de la façon suivante : les positions d'équilibre de M correspondent à des extremums de l'énergie potentielle ($\rightarrow$ E_p doit être minimale ou maximale). Dans l'exemple que nous traitons, E_p présente un maximum en $\theta = \pi/2$ et un minimum en $\theta = -\pi/2$. On retrouve donc bien le même résultat que celui obtenu par une analyse des forces.

Pour déterminer le caractère stable ou instable d'une position d'équilibre, il faut étudier le comportement du système lorsqu'on l'écarte légèrement de cette position.

Supposons tout d'abord qu'on lâche M sans vitesse à partir d'un angle $\theta = \frac{\pi}{2} + \delta$, avec $\delta > 0$ et petit. Puisque E_p est maximale en $\theta = \frac{\pi}{2}$, cela signifie que $\frac{dE_p}{d\theta}$ est une fonction décroissante au voisinage de cette position. Par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dE_p}{d\theta}(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0 \\ \frac{dE_p}{d\theta} \text{ décroissante au voisinage de } \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{dE_p}{d\theta}(\theta = \frac{\pi}{2} + \delta) < 0$$

Or puisque $P_\theta = -\dfrac{1}{R}\dfrac{dE_p}{d\theta}$, on en déduit que $P_\theta(\theta = \frac{\pi}{2} + \delta) > 0$, et donc que cette force va tendre à éloigner M de la position d'équilibre. Un raisonnement analogue en $\theta = \frac{\pi}{2} - \delta$ conduirait à un résultat identique. On peut donc en conclure que la position $\theta = \frac{\pi}{2}$ correspond à un équilibre instable.

On peut reprendre ce raisonnement pour étudier la stabilité de la position $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$. On trouvera alors que lorsqu'on écarte M de cette position, la composante P_θ tend à ramener M vers la position d'équilibre. La position $\theta = -\frac{\pi}{2}$ correspond donc à un équilibre stable.

Étude des positions d'équilibre à partir de l'énergie potentielle

Les extremums de l'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre. Pour un système à 1 degré de liberté caractérisé par la variable spatiale x on peut déterminer les positions d'équilibre x_e en résolvant l'équation

$$\frac{dE_p}{dx}(x_e) \ = \ 0$$

Parmi ces positions d'équilibre, celles pour lesquelles l'énergie potentielle est minimale (respectivement maximale) correspondent à des positions d'équilibre stable (respectivement instable). On peut donc écrire :

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) > 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{équilibre stable}$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) < 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{équilibre instable}$$

Complément : généralisation

On considère un point matériel M astreint à se déplacer sans frottement sur une trajectoire $\mathcal{C}$. Sur cette trajectoire, on repère un point particulier que l'on choisit comme origine O. On va également orienter cette trajectoire en choisissant un sens de parcours positif. On appelle *abscisse curviligne*, que l'on notera s, la position de M par rapport à O le long de $\mathcal{C}$. La valeur de s est donc égale à la distance entre O et M, le long de $\mathcal{C}$, comptée positivement si M s'est déplacé dans le sens positif, et négativement dans le cas contraire. s est donc la variable spatiale qui repère la position de M sur la courbe $\mathcal{C}$ [a].

On suppose que M est soumis à un ensemble de forces conservatives de résultante $\vec{F}$, associée à l'énergie potentielle E_p, ainsi qu'à la réaction du support $\vec{N}$, perpendiculaire à la trajectoire puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de frottements. L'énergie potentielle étant une fonction des coordonnées de l'espace, on va supposer qu'on peut l'écrire comme fonction uniquement de la variable s : $E_p = E_p(s)$.

On note $\vec{u}_{\|}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire. Le déplacement infinitésimal de M entre s'écrit donc $d\vec{r} = ds\,\vec{u}_{\|}$. La résultante des forces conservatives peut s'écrire sous la forme : $\vec{F} = F_{\|}\,\vec{u}_{\|} + \vec{F}_{\perp}$, où $\vec{F}_{\perp}$ est la composante de $\vec{F}$ perpendiculaire à $\vec{u}_{\|}$. La réaction du support $\vec{N}$ étant elle aussi perpendiculaire à $\vec{u}_{\|}$, la condition d'équilibre de M est la nullité de $F_{\|}$.

La relation $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$ devant être vérifiée pour le déplacement $d\vec{r} = ds\,\vec{u}_{\|}$ on peut écrire :

$$(F_{\|}\,\vec{u}_{\|} + \vec{F}_{\perp}).ds\,\vec{u}_{\|} = -dE_p \quad \Rightarrow \quad F_{\|}\,ds = -dE_p \quad \Rightarrow \quad F_{\|} = -\frac{dE_p}{ds}$$

L'équilibre de M correspond donc aux extrema de la fonction $E_p(s)$. Des raisonnement identiques à ceux que nous avons utilisés dans l'exemple de la masse coulissant sur un anneau permettent de montrer que les minima (resp. maxima) de E_p correspondent à des positions d'équilibre stable (resp. instable).

a. Dans l'exemple de la masse coulissant sur l'anneau, s correspondrait à $R\,\theta$.

1.3 Énergie mécanique d'un point matériel

1.3.1 Définition de l'énergie mécanique, théorème de l'énergie mécanique

On considère un point matériel de masse m en mouvement dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$ et soumis à un ensemble de forces (conservatives, non conservatives ou qui ne travailllent pas). On note :

- E_p l'énergie potentielle associée à la résultante des forces conservatives
- δW^c le travail effectué par les forces conservatives au cours d'un déplacement infinitésimal
- δW^{nc} le travail effectué par les forces non conservatives au cours d'un déplacement infinitésimal

Définition : énergie mécanique

On appelle énergie mécanique d'un point matériel la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p$$

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel inertiel, la variation d'énergie mécanique d'un point matétiel est égale au travail des forces non conservatives qui lui sont appliquées :

- pour un déplacement infinitésimal : $dE_m = \delta W^{nc}$

- pour un déplacement entre 2 points A et B le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$:

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W^{nc}_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}}$$

- à l'instant t : $\dfrac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc}$

Interprétation :

Le théorème de l'énergie mécanique montre que l'on peut définir une quantité, l'énergie mécanique, qui est constante pour un point matériel sur lequel aucune force non conservative ne travaille. Dans cette situation, l'évolution du système se traduit d'un point de vue énergétique par des phénomènes de conversion entre l'énergie cinétique (associée au mouvement de la masse) et l'énergie potentielle (associée aux forces conservatives).

Dans le cas d'un point matériel soumis à des forces non conservatives, l'énergie mécanique n'est pas constante et la variation de cette grandeur est égale au travail effectué par les forces non conservatives.

Démonstration :

D'après le théorème de l'énergie cinétique on peut écrire pour un déplacement infinitésimal du point matériel : $dE_c = \delta W^c + \delta W^{nc}$

Par définition de l'énergie potentielle (voir 1.2.1) on a $\delta W_c = -dE_p$

$\Rightarrow \; dE_c + dE_p = \delta W^{nc} \quad \Rightarrow \quad d(E_c + E_p) = \delta W^{nc} \quad \Rightarrow \quad dE_m = \delta W^{nc}$

Remarque : ce théorème n'est rien d'autre qu'une reformulation du théorème de l'énergie cinétique où l'on exprime W^c comme la variation d'énergie potentielle.

1.3.2 Diagramme énergétique

Considérons un point matériel possédant 1 seul degré de liberté soumis uniquement à des forces conservatives ou à des forces qui ne travaillent pas. Si on note x la variable spatiale caractérisant l'évolution du système, on peut écrire l'énergie potentielle comme fonction dépendant uniquement de cette variable : $E_p(x)$. L'énergie mécanique est quant à elle constante. On peut alors construire un diagramme énergétique sur lequel on trace la courbe $E_p(x)$ ainsi que la valeur de l'énergie mécanique E_m qui sera représentée par une droite horizontale [2].

Considérons par exemple une masse m pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal et fixée à l'extrémité d'un ressort horizontal dont l'autre extrémité est accrochée en point fixe du référentiel terrestre. L'énergie potentielle s'écrit : $E_p(x) = \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$, est représentée sur la figure 1.5. La valeur de l'énergie mécanique est fixée par les conditions initiale : si on suppose qu'à cet instant

2. Puisque $E_m = E_c + E_p$ et que $E_c \geq 0$, la valeur de l'énergie mécanique est nécessairement plus grande que le minimum de E_p.

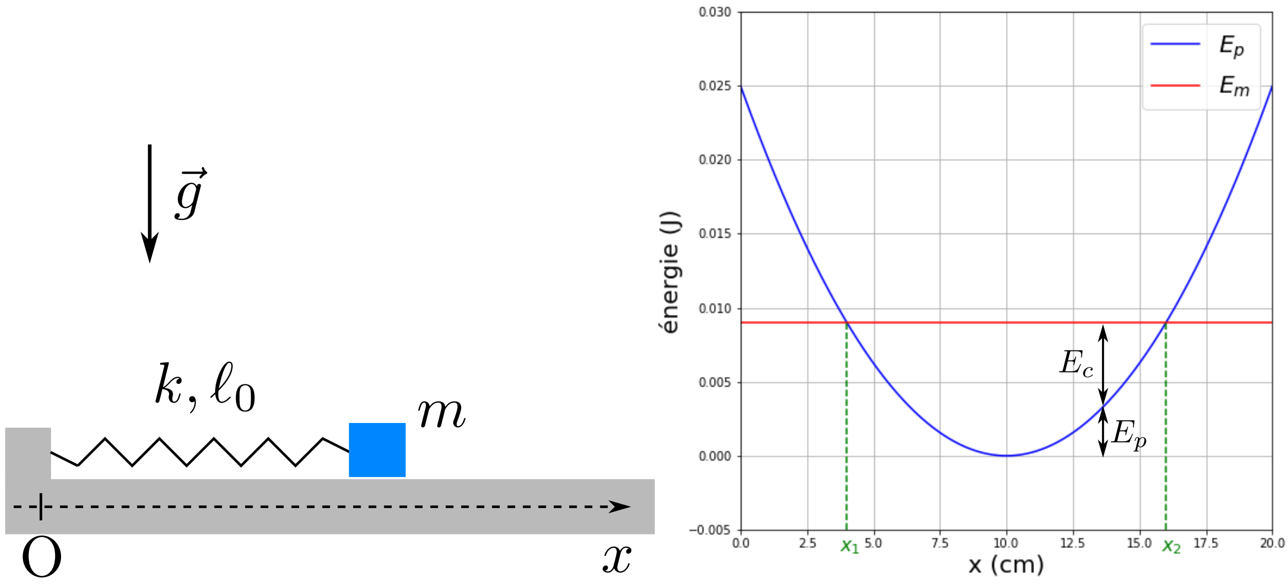


FIGURE 1.5 – Diagramme énergétique du système masse-ressort. Les valeurs indiquées sur le graphe correspondent aux paramètres suivants : $m = 100$ g, $k = 5$ N/m, $\ell_0 = 10$ cm, $x_0 = 12$ cm et $v_0 = 0.4$ m/s

la masse se trouve en $x = x_0$ avec une vitesse v_0 alors à tout instant l'énergie mécanique aura pour valeur : $\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{k}{2}(x_0 - \ell_0)^2$.

L'étude de ce type de diagramme permet notamment de déterminer la plage des valeurs de x accessible au système. En effet, puisque $E_m = E_c + E_p$ on peut écrire $E_m - E_p(x) = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$. On en déduit que la relation suivante doit nécessairement être vérifiée à tout instant :

$$E_p(x) \;\leq\; E_m$$

Cette relation implique que seules les valeurs de x pour lesquelles l'énergie potentielle est inférieure à la valeur de l'énergie mécanique sont accessibles au système. Dans notre exemple cela signifie que la masse ne peut se déplacer qu'entre les abscisses x_1 et x_2 représentées sur le graphe. De plus si on considère une position x située entre ces 2 abscisses, puisque $E_c + E_p = E_m$, alors la distance entre la courbe représentant $E_p(x)$ et la droite horizontale représentant E_m est égale à la valeur de l'énergie cinétique du point matériel (à cette abscisse). Dans notre exemple on peut ainsi constater graphiquement que l'énergie cinétique sera maximale lorsque l'énergie potentielle sera minimale, c'est à dire en $x = \ell_0$.

Montrons maintenant comment ce diagramme énergétique permet de décrire l'évolution du système :

- On suppose que la masse se trouve en $x = 12.5$ cm et se déplace vers la droite (x augmente)
- Au cours de cette phase la distance entre la courbe bleue et la droite rouge diminue, donc l'énergie cinétique aussi. Cette phase se poursuit jusqu'à ce que la masse atteigne la position x_2 où l'énergie cinétique (et donc la vitesse) s'annule.
- On se trouve alors dans la situation où la masse est immobile et soumise à la force $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x$, orientée suivant $-\vec{u}_x$ puisque $E_p(x)$ est croissante en x_2.
- La masse va donc se mettre en mouvement vers la gauche. Son énergie cinétique va augmenter jusqu'à être maximale lorsque la masse passe en $x = \ell_0$. L'énergie cinétique diminue ensuite et s'annule lorsque la masse atteint la position x_1.
- En x_1 la masse est donc immobile et soumise à la force $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x$, orientée suivant $+\vec{u}_x$ puisque $E_p(x)$ est décroissante en x_1. La masse repart alors vers la droite.

Remarque : dans cet exemple, l'énergie potentielle présentant un minimum en $x = \ell_0$, cette position est une position d'équilibre stable.

1.3.3 2e loi de Newton vs théorèmes énergétiques

Comment décider s'il vaut mieux utiliser la 2eloi de Newton ou un théorème énergétique pour résoudre un problème donné ?

- 2e loi de Newton : dans un référentiel inertiel $m\vec{a} = \vec{F}$

  Lorsqu'elle est possible, l'intégration de cette relation conduit à l'expression de la vitesse et de la position au cours du temps.

- théorèmes énergétiques : dans un référentiel inertiel $\Delta E_c = W$ et $\Delta E_m = W^{nc}$

  Ces théorèmes relient la variation de v^2 au travail des forces exercées au cours du déplacement.

Donc si l'on souhaite déterminer l'évolution du système au cours du temps il faut plutôt opter pour la 2e loi de Newton. En revanche si on s'intéresse seulement à la variation de v entre 2 points il faut plutôt choisir un théorème énergétique [3].

1.4 Introduction à l'étude énergétique des systèmes

Depuis le début de ce chapitre nous nous sommes restreint à l'étude énergétique d'un point matériel. Nous allons maintenant utiliser les relations que nous avons établies afin d'établir les théorèmes énergétiques applicables à un système. Dans cette partie nous considérerons un système $\mathcal{S}$ constitué de N points matériels M_i (i = 1 à N). On note m_i, $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ et $\vec{a}_i$ la masse, la position, la vitesse et l'accélération du point $M_i \in \mathcal{S}$. On note également $\vec{F}_{ji}$ la force exercée par le point $M_j \in \mathcal{S}$ sur le point $M_i \in \mathcal{S}$, et $\vec{F}_{ext,i}$ la résultante de toutes les forces exercées sur M_i par des objets qui ne font pas partie du système $\mathcal{S}$.

1.4.1 Énergie cinétique d'un système, théorème de l'énergie cinétique

Définition : énergie cinétique d'un système

On définit l'énergie cinétique d'un système comme la somme des énergies cinétiques de tous les points matériels qui constituent le système :

$$E_c(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} E_c(M_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Théorème de l'énergie cinétique pour 2 points matériels

Pour établir le théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un système, nous allons considérer tout d'abord un système constitué seulement de 2 points matériels M_1 et M_2 en mouvement dans un référentiel galiléen. Nous pouvons appliquer séparément le théorème de l'énergie cinétique à chacun de ces 2 points :

$$\left.\begin{aligned} dE_{c1} &= \vec{F}_{ext,1} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 \\ dE_{c2} &= \vec{F}_{ext,2} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad d(E_{c1} + E_{c2}) = \vec{F}_{ext,1} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{ext,2} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2$$

Or, d'après la 3e loi de Newton : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. On a donc :

3. En fait les théorèmes énergétiques permettent également d'obtenir une partie des équations du mouvement lorsqu'on les utilise sous la forme de relations instantanées : $\dot{E}_c = \mathcal{P}$ ou $\dot{E}_m = \mathcal{P}^{nc}$. Par rapport à la seconde loi de Newton, ils présentent la particularité de ne pas faire intervenir les forces qui ne travaillent pas. Selon le problème considéré cela peut être un avantage ou un inconvénient.

$$\vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{21} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{F}_{21} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_2M_1}$

$\Rightarrow$ $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ correspond au vecteur position de M_1 dans un repère ayant M_2 pour origine. Ce vecteur représente donc la position relative de M_1 par rapport à M_2.

$$\rightarrow \qquad dE_c(\mathcal{S}) \;=\; \vec{F}_{ext,1} \cdot d\vec{r}_1 \;+\; \vec{F}_{ext,2} \cdot d\vec{r}_2 \;+\; \vec{F}_{21} \cdot d\overrightarrow{M_2M_1}$$

- $\vec{F}_{ext,1} \cdot d\vec{r}_1$ et $\vec{F}_{ext,2} \cdot d\vec{r}_2$ correspondent au travail effectué par les forces que l'extérieur exerce sur le système.

$$\delta W^{ext} = \vec{F}_{ext,1} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{ext,2} \cdot d\vec{r}_2 \qquad \rightarrow \textbf{ travail des forces extérieures}$$

- $\vec{F}_{21} \cdot d\overrightarrow{M_2M_1}$ correspond au travail effectué par les forces qui s'exercent entre M_1 et M_2.

$$\delta W^{int} = \vec{F}_{21} \cdot d\overrightarrow{M_2M_1} \qquad \rightarrow \textbf{ travail des forces intérieures}$$

Le théorème de l'énergie cinétique pour le système $\mathcal{S} = \{M_1, M_2\}$ peut donc finalement s'écrire :

$$dE_c(\mathcal{S}) \;=\; \delta W^{ext} + \delta W^{int}$$

En divisant par dt on obtient : $\dfrac{dE_c}{dt} \;=\; \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{int}$

En intégrant le long d'un chemin : $E_c(B) - E_c(A) \;=\; W^{ext}_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} + W^{int}_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}}$

Cas d'un système de N points matériels

Le raisonnement précédent se généralise à un système de N points matériels (voir encadré).

Théorème de l'énergie cinétique pour un système

Dans un référentiel inertiel, la variation d'énergie cinétique d'un système est égale au travail effectué par les forces **extérieures et intérieures** :

- Pour une évolution infinitésimale entre t et $t + dt$: $dE_c \;=\; \delta W^{ext} \;+\; \delta W^{int}$
- Pour une évolution entre 2 intants t_A et t_B : $E_c(B) - E_c(A) \;=\; W^{ext}_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} + W^{int}_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}}$
- A l'instant t : $\dfrac{E_c}{dt}(t) \;=\; \mathcal{P}^{ext}(t) + \mathcal{P}^{int}(t)$

1.4.2 Énergie potentielle et énergie mécanique d'un système

Énergie potentielle extérieure / intérieure

- On définit l'**énergie potentielle extérieure** d'un système comme la somme de toutes les énergies potentielles associées aux forces extérieures conservatives appliquées au système.

  Exemple : énergie potentielle de pesanteur d'un système

  On considère un système $\mathcal{S} = \{M_i \;,\; i = 1..N\}$ soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. On cherche à déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de ce système. Cette énergie sera égale à la somme des énergies potentielles de pesanteur de chaque point M_i du système :

  $$E_{p,pes}(\mathcal{S}) = \sum_i m_i\, g\, z_i = g\left(\sum_i m_i z_i\right)$$

  or d'après la définition du centre de masse : $\vec{r}_c = \dfrac{1}{M}\sum\limits_i m_i\,\vec{r}_i$ $\qquad$ (M : masse totale de $\mathcal{S}$)

  on en déduit : $M z_c = \sum\limits_i m_i z_i$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{E_{p,pes}(\mathcal{S}) = M\, g\, z_c}$$

- Pour définir l'énergie potentielle intérieure, considérons à titre d'exemple 2 points matériels M_1 et M_2 pouvant se déplacer le long d'un axe (Ox) et reliés par un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0. Calculons le travail total effectué par le ressort (c'est à dire par la force d'interaction s'exerçant entre les 2 points matériels) au cours d'une évolution infinitésimale du système $\{M_1, M_2\}$:
  - au cours de cette évolution M_1 se déplace de dx_1 et M_2 se déplace de dx_2
  - forces exercées par le ressort sur M_1 et M_2 : $\vec{F}_1 = k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x \qquad \vec{F}_2 = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x$
  - travail exercé sur M_1 et M_2 : $\delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = k(\ell - \ell_0)\,dx_1 \qquad \delta W_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -k(\ell - \ell_0)\,dx_2$
  - travail total : $\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = -\,k(\ell - \ell_0)d(x_2 - x_1) = -\,k(\ell - \ell_0)d\ell$

  On peut donc définir une fonction $\quad E_p(\ell) = \dfrac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 \quad$ telle que $\delta W = -dE_p$.

  On voit sur cet exemple que l'énergie potentielle élastique $\frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2$ n'est pas l'énergie potentielle de M_1 ou de M_2. Cette énergie caractérise l'interaction entre M_1 et M_2, c'est l'énergie potentielle intérieure du système $\{M_1, M_2\}$. Par extension, on définit l'**énergie potentielle intérieure** du système comme la somme des énergies potentielles de chaque paire $\{M_i, M_j\}$.

Énergie mécanique d'un système

Définition : énergie mécanique d'un système

L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme de son énergie cinétique, son énergie potentielle extérieure et intérieure :

$$E_m \;=\; E_c + E_p \qquad \text{avec} \qquad E_p = E_p^{ext} + E_p^{int}$$

Théorème de l'énergie mécanique pour un système

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un système est égale au travail des forces non conservatives extérieures et intérieures :

$$\Delta E_m \;=\; W^{ext,nc} + W^{int,nc}$$

1.4.3 Application : mise en mouvement d'un véhicule à moteur

Roulement sans glissement

On considère un disque de centre C et rayon R qui roule sur un support solide horizontal fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$. On dit que le roulement s'effectue sans glissement si à tout instant la vitesse dans $\mathcal{R}$ du point du disque qui se trouve en contact avec le support est nulle.

Considérons le référentiel $\mathcal{R}'$, de centre C et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}$. Considérons également un point A à la périphérie du disque. Le mouvement de A dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est circulaire donc sa vitesse s'écrit : $\vec{v}_{A/\mathcal{R}'}(t) = R\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta(t)$. A l'instant t où A arrive en contact avec le support cette vitesse peut s'écrire : $\vec{v}_{A/\mathcal{R}'}(t) = -\,R\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_x$.

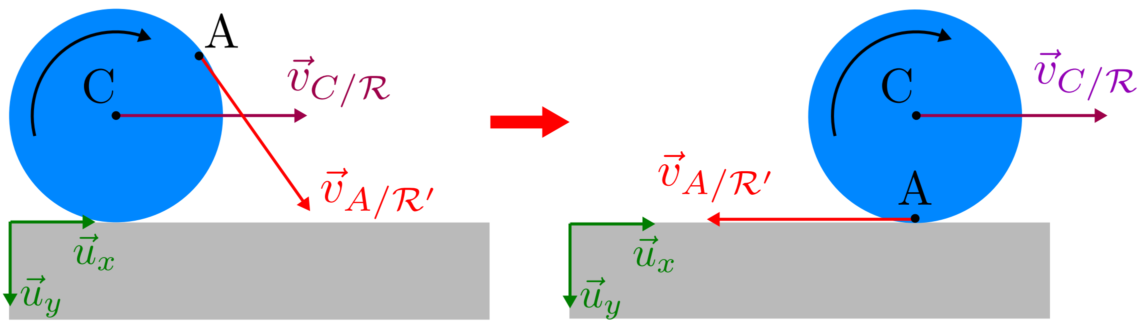


FIGURE 1.6 – Roulement sans glissement

En utilisant la loi de composition des vitesse on peut écrire : $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \vec{v}_{C/\mathcal{R}} + \vec{v}_{A/\mathcal{R}'}$ avec $\vec{v}_{C/\mathcal{R}} = v_c\,\vec{u}_x$. Donc à l'instant où A entre en contact avec le support on a la relation :

$$\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \left[v_c - R\dot{\theta}\right]\vec{u}_x$$

Si le roulement est sans glissement on a par définition $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et donc : $\boxed{v_c = R\,\dot{\theta}}$

En multipliant cette relation par dt on obtient : $dx_c = R\,d\theta$. On en déduit immédiatement que lorsque le disque effectue un tour complet ($\Delta\theta = 2\pi$), le centre du disque parcourt une distance égale à $2\pi R$.

Accélération d'une voiture

Considérons une voiture, initialement immobile, qui démarre et accélère en ligne droite. On choisit comme système étudié la voiture et on néglige le frottement de l'air. On supposera que toutes les roues sont motrices, comme c'est le cas pour un 4×4 [4]. Les forces extérieures exercées sur le système sont :

- le poids $\vec{P}$ vertical, appliqué au centre de masse
- la réaction normale du sol $\vec{N}$ verticale, appliquée au point de contact entre les roues et le sol

4. Cela nous permet de ne pas avoir à faire de distinction entre les roues avant et les roues arrières.

- la force de frottement solide exercée par le sol sur les roues $\vec{T}$ horizontale, appliquée au point de contact entre les roues et le sol

Si on applique le principe fondamental de la dynamique à ce système on conclut que la force qui met la voiture en mouvement est la force de frottement exercée par le sol sur les roues de la voiture puisqu'il n'y a pas d'autre force extérieure horizontale. Cette analyse est correcte du point de vue des forces. Cependant si on calcule la puissance fournie par cette force de frottement à la voiture on obtient que cette puissance est nulle. En effet la puissance est égale au produit scalaire du vecteur force et du vecteur vitesse du point d'application. Si l'on suppose que la voiture roule sans glisser, ce qui est généralement le cas, alors la vitesse du point de contact roue-sol est nulle et la puissance transmise par la force de frottement est donc nulle également.

Pour comprendre d'où vient l'énergie qui permet à la voiture d'augmenter sa vitesse il faut appliquer le théorème de l'énergie cinétique en considérant la voiture comme un système :

$$\Delta E_c = W^{ext} + W^{int}$$

Dans notre exemple, le travail des forces extérieures est nul : $\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont $\perp$ au déplacement et la vitesse du point d'application de la force de frottement du sol est nulle. En revanche il y a au niveau du moteur de la voiture des forces intérieures qui travaillent et qui vont permettre d'augmenter la vitesse de la voiture.

Résumé du chapitre

Travail et énergie cinétique :

On considère un point matériel M de masse m en mouvement dans un référentiel galiléen.

énergie cinétique de M : $E_c = \dfrac{1}{2}\, m\, v^2$

puissance exercée sur M à l'instant t par une force $\vec{F}$: $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

travail élémentaire effectué sur M par une force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement $\vec{dr}$: $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{dr}$

lien entre puissance et travail : $\mathcal{P} = \dfrac{\delta W}{dt}$

travail effectué sur M par une force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement entre les points A et B le long de la trajectoire $\mathcal{C}$:

$$W_{A \underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} B} = \int_{A \underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} B} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Théorème de l'énergie cinétique (on note $\vec{F}$ la résultante des forces appliquées à M) :

- à l'instant t : $\dot{E}_c(t) \;=\; \mathcal{P}_{\vec{F}}(t)$
- au cours d'un déplacement infinitésimal $\vec{dr}$: $dE_c \;=\; \delta W_{\vec{F}}$
- au cours d'un déplacement entre les points A et B le long de la trajectoire $\mathcal{C}$:

$$E_c(B) - E_c(A) \;=\; W_{A \underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} B}(\vec{F})$$

Interprétation : le travail d'une force correspond à la quantité d'énergie transférée à M par l'intermédiaire de cette force au cours du déplacement de M

Force motrice :	dont le travail est > 0 (tend à $\nearrow$ v)
Force résistante :	dont le travail est < 0 (tend à $\searrow$ v)

Forces conservatives, énergie potentielle :

On appelle *force conservative* une force dont le travail ne dépend que de la position des points de départ et d'arrivée, et pas du chemin suivi ou de la façon dont ce chemin est parcouru.

force $\vec{F}$ conservative $\Leftrightarrow$ $\exists$ une fonction $E_p(\vec{r})$ appelée *énergie potentielle*, telle que $dE_p = -\delta W_{\vec{F}}$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ une fonction $E_p(\vec{r})$ appelée *énergie potentielle*, telle que $\vec{F} \;=\; -\,\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$

Liste de forces conservatives à connaître :

poids	$\vec{P} = \pm mg\,\vec{u}_z$	$E_p = \pm mgz + cte$
élastique	$\vec{F}_{el} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x$	$E_p = \dfrac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 + cte$
gravitationnelle	$\vec{F}_{grav} = -\dfrac{Gmm'}{r^2}\,\vec{u}_r$	$E_p = -\dfrac{Gmm'}{r} + cte$
coulombienne	$\vec{F}_{coul} = \dfrac{Kqq'}{r^2}\,\vec{u}_r$	$E_p = \dfrac{Kqq'}{r} + cte$

remarque : la constante peut être choisie arbitrairement

Travail d'une force conservative : $W_{A \underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} B} = -\Big[E_p(B) - E_p(A)\Big]$

Les extremums de l'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre.
minimum de $E_p \quad \leftrightarrow$ équilibre stable
maximum de $E_p \quad \leftrightarrow$ équilibre instable

Pour un système possédant un seul degré de liberté et dont la position est repérée par la variable s :

- s_{eq} position d'équilibre stable : $\dfrac{dE_p}{ds}(s_{eq}) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{d^2E_p}{ds^2}(s_{eq} > 0$

- s_{eq} position d'équilibre instable : $\dfrac{dE_p}{ds}(s_{eq}) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{d^2E_p}{ds^2}(s_{eq} < 0$

Énergie mécanique d'un point matériel

énergie mécanique de M : $E_m \;=\; E_c + E_p$

théorème de l'énergie mécanique :

- $\dot{E}_m \;=\; \mathcal{P}^{nc}$
- $dE_m \;=\; \delta W^{nc}$
- $E_m(B) - E_m(A) \;=\; W^{nc}_{A \underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} B}$

avec $\mathcal{P}^{nc}$ la puissance des forces non conservatives appliquées à M, δW^{nc} le travail des forces non conservatives au cours d'un déplacement infinitésimal $\vec{dr}$ et $W^{nc}_{A \underset{\mathcal{C}}{\longrightarrow} B}$ le travail des forces non conservatives au cours d'un déplacement entre les points A et B le long de la trajectoire $\mathcal{C}$.

En l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique est conservée.

Énergie mécanique d'un système

énergie cinétique : $E_c \;=\; \sum_i \frac{1}{2} m_i \, v_i^2$

énergie potentielle extérieure : $E_p^{ext} = \sum_i E_p^{ext,i}$

énergie potentielle intérieure : $E_p^{int} = \sum_{\text{paires } (i,j)} E_p^{ij}$

énergie mécanique : $E_m \;=\; E_c + E_p^{ext} + E_p^{int}$

Lorsqu'on s'intéresse à un système il faut prendre en compte le travail des forces intérieures dans les théorèmes énergétiques :

théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c \;=\; W^{ext} + W^{int}$

théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m \;=\; W^{ext,nc} + W^{int,nc}$