TD 9 - Dynamique des fluides 1

Exercice 29 - Pression artérielle

Dans cet exercice, on suppose que le champ de pression moyenne dans le corps est décrit par la loi de l'hydrostatique pour un fluide incompressible. Cette hypothèse donne des prédictions très réalistes.

1) La pression cardiaque moyenne est d'environ 13,2 kPa au-dessus de la pression atmosphérique. Calculer la pression artérielle au niveau des pieds et de la tête pour une personne de 1,80 m (distance de 0,45 m entre le cœur et la tête et de 1,35 m entre le cœur et les pieds), en position allongée puis debout.
La masse volumique du sang est $\rho = 1050\,\mathrm{kg/m^3}$
2) Que se passe-t-il lorsque cette personne passe trop rapidement de la position allongée à la position debout ? Lorsqu'elle reste trop longtemps debout ?
3) On suppose que le diamètre intérieur des artères est à peu près le même dans tout le corps (environ 3 mm). Que peut-on conclure pour la vitesse du sang dans les artères ?

CORRECTION:

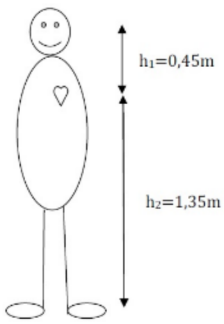
Loi de l'hydrostatique pour un fluide incompressible : z désignant l'altitude,

$$P(z_2) - P(z_1) = \rho g(z_1 - z_2)$$

1) La pression cardiaque est celle au niveau du cœur et elle vaut :

$$P_{\text{cœur}} = P_0 + P_c = (10^5 + 13.2 \times 10^3)\,\mathrm{Pa} = 113\,200\,\mathrm{Pa}.$$

En position allongée :
La différence d'altitude entre le coeur et la tête est très faible. De même entre le coeur et les pieds. Les pressions sont donc toutes identiques : $P_{\text{cœur}} = P_{\text{tête}} = P_{\text{pieds}}$.
En position debout :



$P_{\text{tête}} = P_{\text{cœur}} - h_t\rho g = (113200 - 0.45 \times 1050 \times 9.81)$ Pa$= (113200 - 4635)$ Pa$= 108\,475$ Pa
$P_{\text{pieds}} = P_{\text{cœur}} + h_p\rho g = (113200 + 1.35 \times 1050 \times 9.81)$ Pa$= (113200 + 13906)$ Pa $= 127\,106$ Pa

2) Lorsque cette personne passe trop rapidement de la position allongée à la position debout, sa pression artérielle diminue rapidement au niveau de la tête, ce qui peut provoquer étourdissements et vertiges. Si elle reste trop longtemps debout, la différence de pression entre les pieds et le coeur peut engendrer des difficultés de circulation sanguine.
3) Si le diamètre des artères est constant, la conservation du débit (vitesse x section) nous fait conclure que la vitesse du sang dans les artères est également constante.

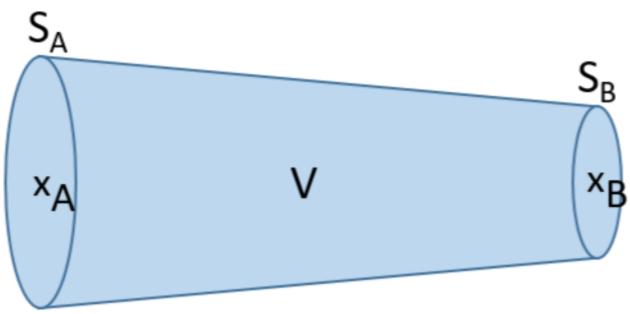
Exercice 30 - Ça coule

Un fluide de masse volumique ρ a priori non homogène s'écoule en régime permanent (stationnaire) dans un conduit de section circulaire variable passant progressivement d'une section S_A (au point fixe A) à une section $S_B < S_A$ (au point fixe B). Le fluide s'écoule de A vers B. On note V le volume fixe compris entre les surfaces S_A et S_B.

1) (a) Faire un schéma.
   (b) Comment varie la masse de fluide comprise dans le volume V ?
   (c) Représenter schématiquement les masses de fluide entrant et sortant de V pendant un intervalle de temps Δt donné.
   (d) Que peut-on dire de ces deux masses ?
   (e) Quelle relation peut-on en déduire entre les débits massiques entrant et sortant de V ?
2) (a) La masse volumique du fluide peut-elle dépendre du temps ? de la position dans le conduit ?
   (b) On mesure en A et B des vitesses (homogènes le long de chaque section) $v_A = 0{,}2$ m.s^{-1} et $v_B = 0{,}4$ m.s^{-1} et les rayons des sections $r_A = 10$ cm et $r_B = 5$ cm. Calculer les débits volumiques en A et B.
   (c) Le fluide est-il compressible ou incompressible ? Dit autrement, l'écoulement est-il isovolume ou non isovolume ?
   (d) Exprimer le rapport des masses volumiques du fluide en A et en B, ρ_A/ρ_B, en fonction de $D_V(A)$ et $D_V(B)$. Calculer sa valeur numérique.

CORRECTION:

1. (a) .



   (b) Le fluide s'écoule en régime permanent (stationnaire) donc la masse de fluide dans V est constante (indépendante du temps) : bien que le fluide dans V soit renouvelé en permanence, il y a dans V toujours la même quantité de fluide, qu'il soit d'ailleurs de masse volumique homogène ou inhomogène (qu'il soit considéré comme incompressible ou compressible).
   (c) Les masses Δm_A entrant à travers S_A et Δm_B sortant à travers S_B sont contenues dans deux petits volumes hachurés ΔV_A et ΔV_B sur la figure 1, l'un juste avant A, l'autre juste après B.
   (d) La masse de fluide dans V est constante donc la masse de fluide Δm_A entrant à travers S_A pendant Δt est égale à la masse de fluide Δm_B sortant à travers S_B.
   (e) $D_{mA} = \dfrac{\Delta m_A}{\Delta t} = \dfrac{\Delta m_B}{\Delta t} = D_{mB}$

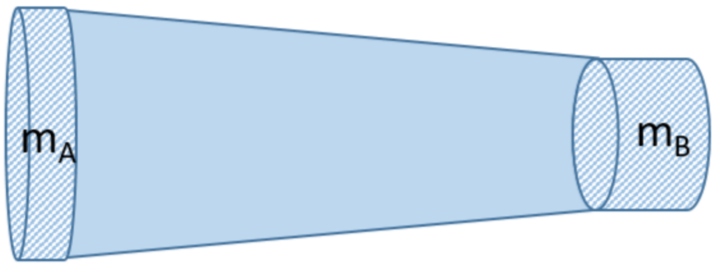


FIGURE 1 –

2. (a) Le régime est permanent (stationnaire) donc ρ peut dépendre de la position mais pas du temps. En particulier, la masse volumique en A, ρ_A, peut différer ce celle en B, ρ_B. Ceci explique pourquoi les volumes ΔV_A et ΔV_B sont de dimensions arbitraires sur la figure 1 : même si $\Delta m_A = \Delta m_B$, $\Delta V_A = \frac{\Delta m_A}{\rho_A}$ peut être différent de $\Delta V_B = \frac{\Delta m_B}{\rho_B}$.

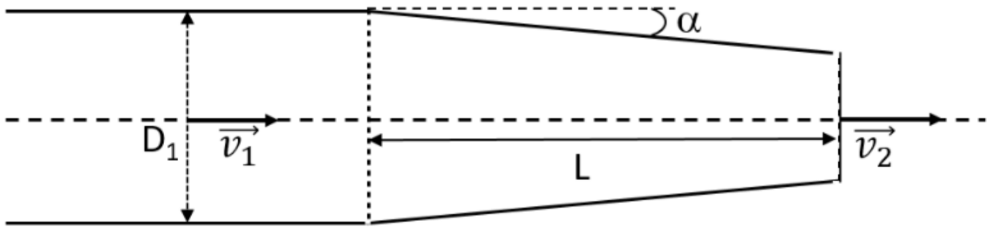
   (b) $D_{vA} = S_A v_A = \pi \times 2\,10^3 \ \ \mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$
   $D_{vB} = S_B v_B = \pi \times 1\,10^3 \ \ \mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$

   (c) Les débits volumiques ne sont pas égaux. Or $D_{mA} = D_{mB}$ et $D_m = \rho D_V$. Comme $D_{vA} \neq D_{vB}$, on en déduit $\rho_A \neq \rho_B$. Le fluide est compressible / l'écoulement n'est pas isovolume : le volume des particules fluides varie entre le point A et le point B.

   (d) $\dfrac{\rho_A}{\rho_B} = \dfrac{D_{vB}}{D_{vA}} = 0,5$.

Exercice 31 - On converge

On veut accélérer de l'eau dans une conduite de section partout circulaire de telle sorte que sa vitesse (supposée homogène le long de toute section droite de la conduite) soit multipliée par un facteur K. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle α. On suppose le fluide incompressible / l'écoulement isovolume et l'écoulement stationnaire.



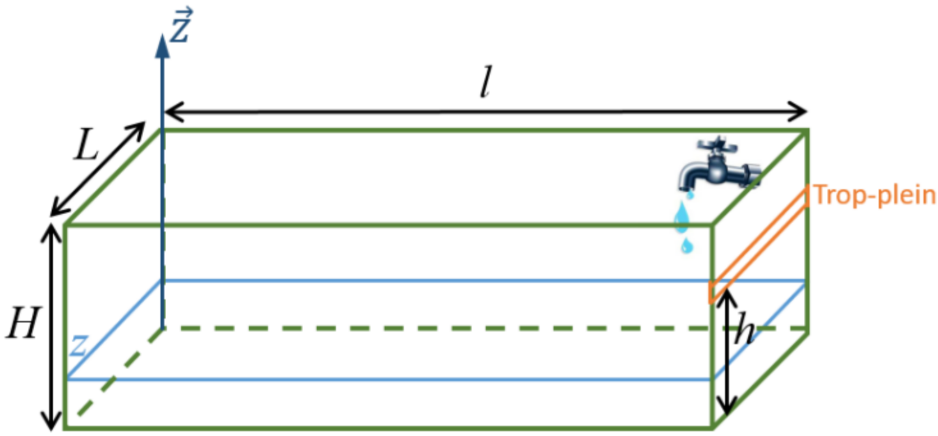
1) Quelle doit être la longueur L de ce convergent ?
2) Le convergent débouche à l'air libre, si bien que la pression en sortie de convergent est égale à la pression atmosphérique. En supposant l'écoulement parfait, calculez la pression en amont du convergent.
3) Application numérique de 1) et 2). On donne $K = 1.5$, D_1=200 mm, α=10°, $Q = 100\,\mathrm{L.s^{-1}}$.

CORRECTION:

1. Le débit massique est le même en amont et en aval du convergent et comme l'eau est supposée incompressible / l'écoulement est supposé isovolume, le débit volumique est le même en amont et en aval : $v_1 S_1 = v_2 S_2$ donc $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{v_2}{v_1} = K$
   On pose : $D_1 = 2R_1$ et $D_2 = 2R_2$
   $S_1 = \pi R_1^2$ et $S_2 = \pi R_2^2$ soit $\dfrac{R_1^2}{R_2^2} = k$
   or $R_2 = R_1 - L\tan\alpha$
   donc $\dfrac{R_1^2}{(R_1 - L\tan\alpha)^2} = k$
   $1 - \dfrac{L}{R_1}\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$
   La longueur du convergent doit être de $L = \dfrac{D_1}{2\tan\alpha}(1 - \dfrac{1}{\sqrt{k}})$
2. Soit p_1 la pression à l'entrée du convergent. L'écoulement étant stationnaire isovolume et parfait, on peut lui appliquer le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant constituée par l'axe de la conduite :
   $p_1 + \dfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \dfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$ avec ici :
   $z_1 = z_2$ (la conduite est horizontale)
   $v_2 = K v_1$ (hypothèse de l'énoncé)
   $p_2 = p_{atm}$ (le convergent débouche à l'air libre)
   On en déduit : $p_1 - p_{atm} = \dfrac{1}{2}\rho v_1^2 (K^2 - 1)$
3. Applications numériques :
   $Q = v_1 S_1 => v_1 = 3,18\,\mathrm{m/s}$
   $p_1 - p_{atm} = 6,33\,\mathrm{kPa}$
   $L = 104\,\mathrm{mm}$

Exercice 32 - Évitons le dégât des eaux

Afin d'éviter les débordements, les baignoires sont équipées d'un système de "trop plein", qui permet la vidange lorsque le niveau d'eau dans la baignoire atteint un niveau légèrement inférieur au bord, voir la figure. Malheureusement, dans certaines baignoires, cette vidange ne permet qu'un débit limité d'eau. On remplit un volume standard d'eau dans la baignoire V_s de 250 litres, le trop-plein est atteint pour $V_t = 300$ litres et la baignoire déborde à $V_b = 350$ litres. Le débit du robinet est $D_{ve} = 30$ L·min^{-1}.



1) Montrez que, tant que le niveau d'eau n'a pas atteint le trop-plein, le volume d'eau dans la baignoire $V(t)$ obéit à l'équation : $\frac{dV}{dt} = D_{ve}$
Exprimez le temps de remplissage de la baignoire t_1 jusqu'au niveau du trop-plein en fonction des dimensions de la baignoire et du débit à l'équilibre D_{ve}.
2) Le débit maximal de vidange $D_{vs\,max}$ dans le trop-plein est de 20 litres par minute. Montrer que la baignoire va finalement déborder.
3) On souhaite calculer le temps de début du débordement t_2. Le débit de vidange dans le trop-plein D_{vs} est proportionnel à la différence entre l'altitude de la surface de l'eau z et l'altitude du trop-plein h. Exprimez D_{vs} en fonction de $D_{vs\,max}$, z, h, H. Exprimez ensuite l'égalité que vérifie $\frac{dV}{dt}$ à partir du moment où le trop-plein fonctionne. Résoudre l'équation différentielle correspondante pour déterminer finalement t_2.

CORRECTION:

1. La baignoire se remplit sous l'effet d'un écoulement "entrant" par le robinet de débit D_{ve} qui est par définition égal au volume entrant par unité de temps. En intégrant par rapport au temps cette égalité :
$$\int_0^{t_1} \frac{dV}{dt}\,dt = V_t = \int_0^{t_1} D_{ve}\,dt = D_{ve}t_1 \text{ donc } t_1 = \frac{V_t}{D_{ve}}$$
Numériquement, avec $D_{ve} = 30\ \mathrm{L\cdot min^{-1}}$, $t_1 = 10$ min.
2. Une fois le trop-plein atteint par l'eau, une partie de l'eau versée par le robinet sort par le trop-plein. À partir de l'instant t_1, le bilan entrée-sortie s'écrit : $\frac{dV}{dt} = D_{ve} - D_{vs}(h)$. Or $D_{vs} \leq D_{vs\,max}$ donc $\frac{dV}{dt} = D_{ve} - D_{vs}(h) \geq D_{ve} - D_{vs\,max} = 10\ \mathrm{L\cdot min^{-1}} > 0$. Donc même lorsque le trop-plein vide la baignoire avec un débit volumique maximum, $\frac{dV}{dt} > 0$ c'est-à-dire le volume d'eau dans la baignoire augmente toujours, donc la baignoire finit par déborder.

3. Expértimentalement, on constate que le débit sortant augmente avec la hauteur de l'eau au-dessus du trop-plein. Par souci de simplicité mathématique, et malgré la caractère sur-simplifié de ce choix, on propose donc une relation de proportionnalité entre le débit sortant et la hauteur de l'eau au-dessus du trop-plein : $D_{vs} \propto z - h$. $D_{vs} = \frac{z-h}{H-h} D_{vs\,max}$ vérifie la proportionnalité entre D_{vs} et h et le fait que le débit à débordement ($h = H$) vaut $D_{vs\,max}$. Or $V = Llz$, donc $\dfrac{dV}{dt} = Ll\frac{dz}{dt} = D_{ve} - D_{vs}(h) = D_{ve} - \frac{z-h}{H-h} D_{vs\,max}$ avec $z(t_1) = h$. Posons $z' = \frac{z-h}{H-h}$ (z' est sans dimensions). On a $\frac{dz'}{dt} = \frac{1}{H-h}\frac{dz}{dt}$, donc :

$$\frac{dz'}{dt} + \frac{D_{vs\,max}}{(H-h)Ll} z' = \frac{D_{ve}}{(H-h)Ll} \text{ avec } z'(t_1) = 0$$

de solution :

$$z' = \frac{D_{ve}}{D_{vs\,max}} \left[1 - \exp\left(-\frac{D_{vs\,max}}{(H-h)Ll}(t - t_1)\right)\right]$$

soit :

$$z = h + \underbrace{(H-h)\frac{D_{ve}}{D_{vs\,max}}}_{>(H-h)} \underbrace{\left[1 - \exp\left(-\underbrace{\frac{D_{vs\,max}}{(H-h)Ll}}_{\alpha}(t - t_1)\right)\right]}_{\to 1 \text{ pour } t \to \infty}$$

Donc h tend à dépasser H aux temps longs. z atteint H pour $t_2 - t_1 = -\alpha^{-1} \ln\left(1 - \frac{D_{vs\,max}}{D_{ve}}\right)$. Sachant que $V_b = HLl = 350$ L et $V_t = hLl = 300$ L, $(H-h)Ll = 50$ L et $\alpha = 0,4$ min^{-1} soit $t_2 - t_1 = 2,75$ min $= 2$ min 45 s donc $t_2 = 12$ min 45 s.