Sorbonne Université 16 Novembre 2018
MASTER ANDROIDE – MOGPL

Examen réparti 1 (version corrigée)

(notes de cours et TD autorisées)

Exercice 1 : modélisation (5 pts)

Une société vent 4 types de produits. Les ressources nécessaires pour produire une unité de chaque produit et les prix de vente sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Ressource	Produit 1	Produit 2	Produit 3	Produit 4
Unités de matériel brut	2	3	4	7
Heures de travail	3	4	5	6
Prix de vente unitaire (euros)	4	6	7	8

Actuellement, 4600 unités de matériel brut et 5000 heures de travail sont disponibles. Pour satisfaire le cahier des charges, la société doit produire exactement 950 unités (tout type de produit confondu) dont au moins 400 unités de produit 4. La société souhaite déterminer le plan de production qui génère le revenu maximum.

a) (2 pts) Formuler le problème énoncé ci-dessus comme un programme linéaire en nombres entiers.
x_i nombre d'unités de produit i fabriqué

$$\max 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4$$
$$s.c. \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 & \leq & 4600 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 & \leq & 5000 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 950 \\ x_4 & \geq & 400 \end{array} \right.$$
$$x_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, 3, 4.$$

b) (1.5 pts) Pour des raisons de cohérence de la production, si l'on ne produit pas de produit 1 alors on ne produit pas non plus de produit 2. Montrer comment le PLNE proposé à la question précédente peut être augmenté pour prendre en compte cette nouvelle contrainte.

Il suffit d'ajouter la contrainte : $Mx_1 \geq x_2$ (par exemple prendre $M = 1000$ vu la contrainte 3).

Une autre solution que (1) consiste à ajouter des variables Booléenes $y_i, i = 1, 2, 3, 4$ (qui serviront aussi pour la question suivante) qui valent 1 si et seulement si on produit au moins une unité de produit i. Du coup on pourrait écrire :

$$y_i \leq x_i, \quad x_i \leq My_i, \quad i = 1, \ldots, 4 \;\text{ et }\; y_1 \geq y_2$$

On remarque au passage que la contrainte $Mx_1 \geq x_2$ est induite par ce jeu de contraintes.

c) (1.5 pts) Pour des raisons de disponibilité des machines, on apprend que l'on ne peut pas fabriquer simultanément le produit 1 et le produit 3 et qu'au plus l'un des deux pourra être fabriqué. Montrer ici encore comment le PLNE peut être modifié pour prendre en compte cette nouvelle contrainte.

$y_1 + y_3 \leq 1$ et $x_i \leq My_i, i = 1, \ldots, 4$ ces dernières étant éventuellement déjà insérées pour b)

Exercice 2 : PL avec paramètres (6 pts)

Soit $\mathcal{P}(t)$ le programme linéaire défini pour tout $t \in]0, 10[$ de la manière suivante :

$$\max 2x_1 + 3x_2$$

$$s.c. \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 7 + t \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 - t \\ -x_1 + x_2 \leq 3 + 2t \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

1°) (2 pts) En utilisant l'algorithme du simplexe et en supposant que $t \in]7/3, 10[$, déterminer en fonction de t une solution optimale de $\mathcal{P}(t)$ et la valeur de la fonction objectif à l'optimum.

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	1	-2	1	0	0	$7+t$
e_2	2	1	0	1	0	$10-t$
e_3	-1	1	0	0	1	$3+2t$
	2	3	0	0	0	0

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
e_1	5	0	1	2	0	$27-t$
x_2	2	1	0	1	0	$10-t$
e_3	-3	0	0	-1	1	$-7+3t$
	-4	0	0	-3	0	$3t-30$

Premier tableau x_2 entre en base et e_2 sort. Deuxième tableau on est à l'optimum $x^* = (0, 10-t)$.

2°) (2 pts) Formuler le dual $\mathcal{D}(t)$ de $\mathcal{P}(t)$ et le mettre sous forme canonique. Sous les mêmes hypothèses que celles de la question précédente déterminer, en vous servant du théorème des écarts complémentaires, la solution optimale de $\mathcal{D}(t)$.

Le dual $\mathcal{D}(t)$ s'écrit :

$$\min z' = (7+t)y_1 + (10-t)y_2 + (3+2t)y_3$$

$$s.c. \begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 2 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

A l'optimum du primal on a $x_2^* > 0$ donc la solution optimale y^* du dual vérifie l'équation $-2y_1 + y_2 + y_3 = 3$. De plus à l'optimum du primal les contraintes 1 et 3 ne sont pas saturées, on a donc $y_1^* = y_3^* = 0$. On a alors $y_2^* = 3$ et donc $y^* = (0, 3, 0)$.

3°) (2 pts) On souhaite maintenant étudier le cas où $t \in]0, 7/3]$. Ecrire le problème $\mathcal{D}(t)$ sous forme standard et déterminer la base associée à la solution optimale trouvée à la question précédente. Montrer que cette solution n'est plus optimale dans le cas où $t \in]0, 7/3[$ et expliquer alors comment vous procéderiez pour determiner la nouvelle solution optimale en fonction de t (on ne demande pas de faire les calculs).

La forme standard du dual s'écrit :

$$\min z' = (7+t)y_1 + (10-t)y_2 + (3+2t)y_3$$

$$s.c. \begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 - s_1 = 2 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 - s_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$$

La solution trouvée en 2 donne est (0, 3, 0, 4, 0), les variables en base sont donc y_2 et s_1. Lorsque le domaine de t change, les contraintes de $\mathcal{D}(t)$ ne sont pas impactées et la base optimale trouvée en 2 correpond toujours à une solution réalisable. Le tableau du simplexe dans cette base (obtenu en exprimant les variables en bases en fonction des variables hors base puis la fonction objectif) est :

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	
s_1	-5	0	3	1	-2	4
y_2	-2	1	1	0	-1	3
	$27-t$	0	$3t-7$	0	$10-t$	$3t-30$

on n'est pas à l'optimum car $3t-7<0$. Il faut donc faire entrer y_3 en base et sortir s_1.

	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	
y_3	$-5/3$	0	1	$1/3$	$-2/3$	$4/3$
y_2	-2	1	0	0	-1	3
	$4t+46/3$	0	0	$-t+7/3$	$t+16/3$	$-t-62/3$

tous les profits marginaux des variables hors base sont positifs, on est à l'optimum. On peut alors en déduire la solution du problème primal en fonction de t. Il s'agit de $x^*(t) = (7/3-t, 16/3+t)$.

Exercice 3 : Branch and Bound (3 pts)

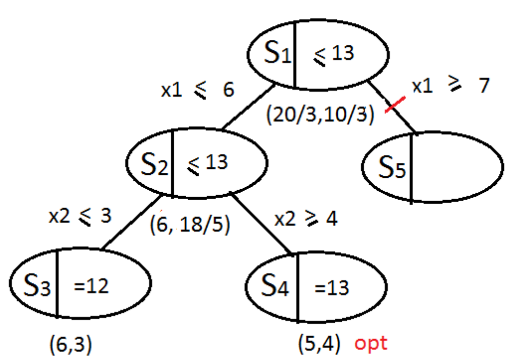
Résoudre le problème suivant par une méthode de séparation et évaluation. On calculera les bornes en résolvant graphiquement les relaxations continues du problème. Pour séparer on choisira la variable de plus grande partie fractionnaire. On utilisera une stratégie en profondeur d'abord, en commençant toujours par évaluer la branche où la variable de séparation est bornée supérieurement.

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t \left\{ \begin{array}{rcrl} x_1 & + & x_2 & \leq 10 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & \leq 30 \end{array} \right.$$

$$x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N}$$

L'arborescence de recherche est la suivante :



Exercice 4 : le lapin et le chasseur (6 pts)

Un lapin peut se cacher dans 5 trous numérotés de 1 à 5 positionnés comme indiqué dans la figure ci-dessous. Un chasseur qui ne dispose que d'une seule cartouche dans son fusil peut tirer sur l'une des quatre positions cibles A, B, C, D représentées également sur la figure. Le tir du chasseur tuera le lapin si celui-ci occupe une position adjacente à la cible choisie par le chasseur. Par exemple si le chasseur choisit la cible B il tuera le lapin s'il se situe dans le trou 2 ou 3 tandis que si le chasseur choisit la cible D il tuera le lapin si celui-ci est dans le trou 4 ou 5. On compte un “gain” de 1 pour le chasseur s’il tue le lapin et 0 sinon. Les “gains” du lapin sont l’opposé de ceux du chasseur.

1 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

1°) (1.5 pts) Donner la matrice des gains de ce “jeu” pour le chasseur en mettant en ligne les stratégies pures du chasseur et en colonne les stratégies pures du lapin.

La matrice des gains du chasseur est donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2°) (1 pt) Une stratégie pure s est dite *dominée* s’il existe une autre stratégie pure s' qui procure un gain supérieur ou égal à celui associé à s pour toute stratégie pure de l’adversaire ; s est dite *strictement dominée* s’il existe en outre une stratégie de l’adversaire telle que le gain associé à s' soit strictement supérieur à celui associé à s pour cette stratégie. Montrer que certaines stratégies pures du lapin sont strictement dominées.

Les gains du lapins sont l’opposé des gains du chasseur (jeu à somme nulle). Donc les stratégies strictement dominées pour le lapin sont les stratégies des colonnes 2 et 4.

3°) Supposons que le lapin choisisse la stratégie mixte qui consiste à se cacher la moitié du temps dans le trou 1, 25% du temps dans le trou 3 et 25% du temps dans le trou 5. Ecrire le PL à résoudre pour trouver une stratégie optimale pour le chasseur et déterminer une stratégie pure optimale.

Les espérances de gain des différentes stratégies pures du chasseur sont respectivement $0.5, 0.25$, $0.25, 0.25$, la stratégie optimale du chasseur est donc la solution du PL suivant :

$$\max 0.5p_1 + 0.25p_2 + 0.25p_3 + 0.25p_4$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, p_4 \geq 0$$

La solution optimale de ce PL est de manière évidente $p = (1, 0, 0, 0)$ donc de tirer sur A.

4°) Ecire les deux PL que les joueurs doivent résoudre pour jouer optimalement et montrer que les deux stratégies suivantes sont optimales pour chacun des joueurs respectivement :

• *stratégie du chasseur :* jouer A avec la probilité 1/3, B avec la probilité 1/6, C avec la probabilité 1/6, D avec la probabilité 1/3.

• *stratégie du lapin :* jouer 1 avec la probabilité 1/3, 3 avec la probabilité 1/3, 5 avec la probabilité 1/3.

Soit $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ la stratégie du chasseur et $q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$ celle du lapin. Les PL des deux joueurs sont :

$$\max z \quad \text{pour le chasseur}$$

$$\begin{aligned}
&z \leq p_1\\
&z \leq p_1 + p_2\\
&z \leq p_2 + p_3\\
&z \leq p_3 + p_4\\
&z \leq p_4\\
&p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1
\end{aligned}$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, p_4 \geq 0$$

$$\min z' \quad \text{pour le lapin}$$

$$\begin{aligned}
&z' \geq q_1 + q_2\\
&z' \geq q_2 + q_3\\
&z' \geq q_3 + q_4\\
&z' \geq q_4 + q_5\\
&q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 = 1
\end{aligned}$$

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0, q_4 \geq 0, q_5 \geq 0$$

Les deux PL sont duaux l'un de l'autre. On constate de plus que la stratégie $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ donne la valeur $z = \frac{1}{3}$ à l'objectif du premier PL. De même la stratégie $q = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$ donne la valeur $z' = \frac{1}{3}$ à l'objectif du second PL. Les valeurs des objectifs respectifs des PL duaux étant égales ces deux stratégies sont respectivement optimales pour le chasseur et pour le lapin respectivement.