

Chapitre 1

Dynamique des fluides

Objectifs d'apprentissage

- connaître les définitions de :
 - particule fluide (dimensions, propriétés)
 - libre parcours moyen
 - modèle de milieu continu trajectoire
 - écoulement stationnaire, instationnaire
 - ligne de courant
 - forces de pression
 - forces visqueuses
 - écoulement interne, externe
 - régimes d'écoulement
 - nombre de Reynolds
 - débit volumique, débit massique
 - écoulement isovolume
 - tube de courant charge d'un écoulement
- identifier un régime stationnaire, un régime instationnaire
- écrire et utiliser la conservation du débit pour un écoulement isovolume
- définir le nombre de Reynolds et le type d'écoulement et en déduire avec le régime d'écoulement
- énoncer et démontrer le théorème de Bernoulli
- énoncer et utiliser la loi de Poiseuille
- faire des bilans d'énergie pour des systèmes ouverts

Introduction

Dans l'UE Mécanique Physique 1, vous avez étudié les fluides au repos dans un référentiel galiléen sous l'effet de leur poids et des forces de pression. Dans ce chapitre, vous allez étudier l'écoulement de fluides sous l'effet de leur poids, des forces de pression et de forces visqueuses, ces dernières ne se manifestant que lorsque les fluides sont mis en mouvement.

Objets d'étude - Dans ce cours nous nous intéresserons à l'écoulement de **fluides simples**, c'est-à-dire formés de petites molécules. L'air et l'eau en sont deux exemples typiques d'une grande importance

dans la vie quotidienne. Tous les gaz purs et les mélanges gazeux, la plupart des solutions aqueuses peu concentrées ainsi que les huiles entrent dans la catégorie des fluides simples. Comme nous le détaillerons dans ce cours, l'écoulement de ces fluides peut être entièrement décrit dès lors que l'on connaît trois de leurs propriétés : leur masse volumique, leur compressibilité et leur viscosité. Ces fluides simples sont appelés des **fluides newtoniens**.

Par contraste, on appelle **fluides complexes** les fluides qui présentent une microstructure à des échelles intermédiaires entre l'échelle moléculaire et les échelles macroscopiques, qui résulte des interactions spécifiques entre entités (interactions électrostatiques, stériques, visco-élasticité, frottement solide) :

- fluides alimentaires et industriels (miel, ketchup, peintures, shampoings, savons liquides)
- fluides biologiques (sang, mucus)
- fluides géologiques (laves, boues, sables secs et humides, avalanches de neige...)

La description de leur écoulement n'obéit que de manière approchée au modèle newtonien car certains aspects de leur comportement sous écoulement sont dus à leur microstructure spécifique. L'étude de l'écoulement de ces fluides sort du cadre de ce cours.

Vocabulaire - L'aérodynamique concerne l'écoulement de l'air, tandis que l'hydrodynamique concerne l'écoulement de l'eau. L'usage de ces deux termes est principalement lié à leurs applications industrielles, les avions pour l'air, les bateaux et sous-marins pour l'eau. Mais les écoulements de l'air et de l'eau sont décrits par le même modèle, celui de la mécanique des milieux continus.

1.1 Propriétés des fluides

1.1.1 Solides, liquides, gaz

Point de vue macroscopique - D'un point de vue macroscopique, les solides possèdent une forme propre et ne s'écoulent pas, tandis que liquides et gaz n'ont pas de forme propre et s'écoulent. Liquides et gaz épousent la forme des récipients qui les contiennent mais les liquides n'occupent pas tout le volume qui leur est offert, tandis que les gaz occupent tout le volume qui leur est offert.

Point de vue microscopique - On rappelle que l'échelle microscopique correspond aux dimensions caractéristiques des atomes et molécules qui sont de l'ordre de l'Angström : $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m}$.

D'un point de vue microscopique, dans un solide, les atomes ou molécules qui le composent sont animés d'un mouvement vibratoire incessant (d'origine thermique) mais ne changent pas de voisins, ni lorsque le solide est non déformé, ni lorsque celui-ci est déformé dans le régime élastique.

Au contraire, au sein d'un fluide, les atomes ou molécules qui le composent sont en mouvement incessant (c'est l'agitation thermique) et désordonné à cause de leurs interactions (mouvement brownien) et changent en permanence de voisins, même lorsque le fluide ne s'écoule pas en présentant un mouvement d'ensemble. Il faut donc distinguer le mouvement moléculaire du mouvement macroscopique du fluide, qui est le mouvement d'ensemble observé à l'échelle d'observation humaine.

1.1.2 Phases condensées, phases diluées

Solides et liquides sont des phases condensées au sens où la distance inter-moléculaire est comparable à la taille des molécules. En conséquence, ils sont très faiblement compressibles car les molécules sont impénétrables. La masse volumique des phases condensées vaut $10^3 - 10^4\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Les gaz constituent une phase diluée, c'est-à-dire peu dense, au sens où la distance inter-moléculaire moyenne est bien plus grande que la taille des molécules. Dans l'air dans les CNTP, cette distance vaut 3 nm, soit de l'ordre d'une dizaine de fois la taille des molécules. En conséquence, la masse volumique des gaz varie fortement avec leur pression et leur température et. La masse volumique de l'air vaut $1,3\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ dans les **Conditions Normales de Température et de Pression (CNTP)** : $T = 300\text{ K}$, $P = 1\text{ bar}$.

1.1.3 Libre parcours moyen

Les interactions entre molécules étant attractives et décroissant rapidement en intensité avec la distance entre molécules, dans les phases condensées, les molécules sont en interaction attractive forte du fait de leur proximité.

Au contraire, dans les phases diluées, les molécules sont pratiquement sans interactions du fait de leur éloignement, sauf lors de collisions au cours desquelles elles échangent énergie et quantité de mouvement. Du fait de leurs interactions presque toujours nulles, les gaz dilués obéissent au modèle de gaz parfait étudié en Mécanique-Physique 1. La distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions est appelée **libre parcours moyen**. Il est de l'ordre de 100 nm dans l'air dans les CNTP.

1.2 Le modèle de milieu continu

1.2.1 Particule fluide

Expérimentalement, on constate que dans la plupart des écoulements rencontrés dans la vie courante (par exemple dans le cas de l'écoulement d'un robinet), le mouvement d'un fluide varie :

- sur des distances caractéristiques (le diamètre d'un robinet, de l'ordre du centimètre) très grandes devant (i) la distance moyenne entre deux molécules, (ii) le libre parcours moyen,
- sur des temps caractéristiques (le temps de chute de l'eau dans l'évier, de l'ordre de la seconde) très grands devant le laps de temps entre deux collisions.

Pour décrire le mouvement d'ensemble du fluide, on n'a donc pas besoin de décrire les trajectoires de toutes les molécules composant ce fluide, il suffit de décrire son mouvement moyenné sur un grand nombre de molécules. La modélisation du fluide qui tient compte de ces observations consiste à abandonner la description microscopique du fluide (fluide comme un ensemble de molécules) et d'adopter une description du fluide à une échelle l'échelle **mésoscopique**, intermédiaire entre l'échelle microscopique (la molécule) et l'échelle macroscopique (le diamètre du robinet) : le fluide est décrit comme un ensemble de **Particules Fluides**.

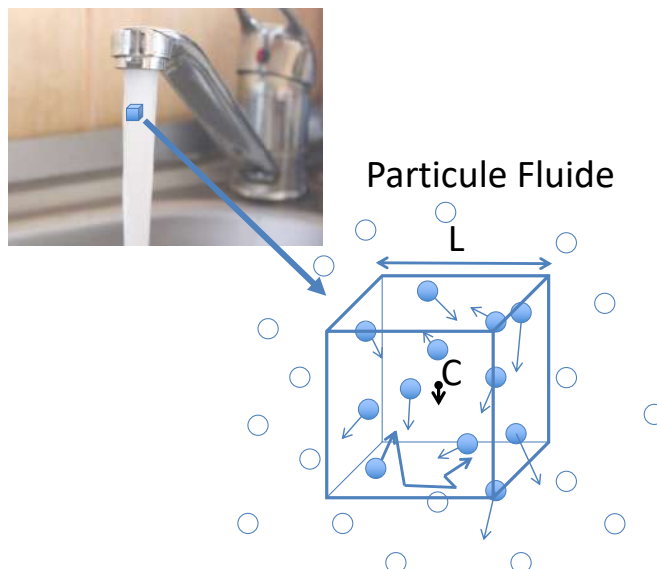


FIGURE 1.1

Particule Fluide (PF) : une Particule Fluide est un ensemble de molécules identifiées par la pensée (coloriées en bleu sur la figure 1.1) qui sont celles contenues initialement dans le volume $V \sim L^3$ où :

- L est **très petite** devant la distance caractéristique sur laquelle varie la vitesse du fluide (le diamètre du robinet) : la taille du "pixel" de résolution de l'image du mouvement du fluide est petite devant les détails de son mouvement. On décrit donc précisément le mouvement du fluide.
- L est **très grande** devant la distance moyenne entre molécules. Il y a donc dans V un grand nombre de molécules. Les grandeurs moyennées sur V que nous définirons sont donc calculées sur un grand nombre de molécules, ce qui permet d'utiliser les résultats de la thermodynamique.
- L est **très grande** devant le libre parcours moyen des molécules. Il y a donc dans la PF un grand nombre de molécules en interaction qui se transmettent de proche en proche les variations de vitesse et de température imposées par l'écoulement. Cela a donc un sens de définir une vitesse moyenne et une température moyenne de l'ensemble des molécules contenues dans la PF puisqu'elles y échangent quantité de mouvement et énergie lors de nombreuses collisions.

Remarques :

- Dans la pratique, une PF définie à un instant t donné se déforme rapidement dans un écoulement, ce qui empêche de la suivre longtemps (cf. film *incomp-fluid-element* : déformation des PF dans un resserrement¹). On pourra donc lui appliquer les principes de la mécanique et de la thermodynamique entre les instants t et $t + \delta t$, où δt est un laps de temps suffisamment court pour que la PF ne soit pas disloquée sur ce laps de temps.
- Comme les molécules d'une PF sont identifiées par la pensée, une PF est par définition un **système fermé**, c'est-à-dire qui n'échange pas de matière avec l'extérieur. Sa masse est donc constante. Seul son volume peut varier au cours de son déplacement.

1.2.2 Propriétés du fluide définies à l'échelle de la PF

Pour décrire le mouvement et les propriétés du fluide, on définit donc des grandeurs définies à l'échelle de la particule fluide :

- vitesse, accélération
- masse volumique
- pression, température...

Position d'une PF : c'est le centre de masse C de l'ensemble des molécules $\{M_i\}$ de masses $\{m_i\}$ composant la particule fluide (voir la figure 1.1) :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}$$

Vitesse \vec{v} de la PF : c'est la moyenne des vitesses \vec{V}_i des molécules composant la particule fluide, c'est-à-dire la vitesse de leur centre de masse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i}$$

Accélération \vec{a} de la PF : c'est l'accélération de son CM :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OC}}{dt^2}$$

1. Dans ce film d'un écoulement plan dans un canal présentant un resserrement en aval vu du dessus, les PF sont matérialisées par de toutes petites bulles de gaz créées en amont dans l'eau par oxydo-réduction qui réfléchissent la lumière en direction de la caméra, d'où leur aspect blanc. Ces bulles permettent de visualiser les PF au sein desquelles elles sont transportées. On constate que les PF sont bien observables, qu'elles peuvent être suivies dans leur mouvement, et qu'elles se déforment dans le resserrement.

Remarque : Compte tenu de ces définitions, dans un **fluide au repos** :

- toutes les particules fluides sont immobiles.
- Par contre, les molécules sont toujours individuellement en mouvement rapide (agitation thermique).

Masse volumique : La masse volumique ρ d'un fluide au point M à l'instant t est la masse de la PF centrée sur M à l'instant t divisée par le volume V de la PF (voir la figure 1.1).

$$\rho = \frac{\sum_i m_i}{V}$$

Pression, température : Un fluide en écoulement ne se trouve globalement pas en équilibre thermodynamique puisqu'il échange de l'énergie avec l'extérieur. Mais l'expérience montre que dans la plupart des écoulements rencontrés dans la vie courante, chacune des PF évolue sans jamais s'écarter notablement d'un état d'équilibre thermodynamique si bien qu'on peut considérer que tout se passe comme si chaque PF se déplaçait en restant à l'équilibre thermodynamique : c'est l' **hypothèse d'équilibre thermodynamique local** (ETL). En conséquence :

- On peut alors attribuer à chaque PF une température et une pression, dont la définition requiert l'hypothèse d'équilibre thermodynamique, au contraire de l'énergie et de la masse de la PF, qui sont définies à l'équilibre et hors équilibre. Ces valeurs de la température et de la pression possèdent une signification locale et sont susceptibles de varier au cours du mouvement des PF.
- les transformations que subissent les PF sont considérées comme **quasistatiques**.
- La masse volumique, la pression et la température d'un fluide sont liées entre elles par l'équation d'état du fluide $\rho = \rho(P, T)$.

Modèle de milieu continu - Dans le cadre de cette description de l'écoulement d'un fluide à l'échelle mésoscopique, en tout point d'un fluide repéré par le vecteur \vec{r} et à tout instant t il est donc possible de définir la masse volumique, la vitesse, la pression, la température du fluide comme celles de la PF située en \vec{r} à cet instant t . Les propriétés de fluide ne sont donc plus celles des molécules discrètes mais des champs des variables continues d'espace et de temps². Le fluide est donc décrit comme un **milieu continu**.

1.3 Cinématique des fluides

Le mot cinématique a pour étymologie grecque *kinēmaticos* qui signifie mouvement. La cinématique est l'étude du mouvement indépendamment de ses causes.

Pour illustrer la cinématique des fluides, considérons un écoulement particulier, celui d'une rivière, schématisée sur la figure 1.2.

1.3.1 Points de vue eulérien et lagrangien

Trajectoire d'une PF : La trajectoire d'une PF est l'ensemble des positions occupées successivement par la PF. C'est la même notion que la trajectoire d'une fusée matérialisée par sa traînée de fumée.

Point de vue lagrangien - L'écoulement d'un fluide peut être décrit comme l'ensemble des trajectoires de toutes PF constituant le fluide. C'est le point de vue lagrangien.

Décrire l'écoulement de la rivière du point de vue lagrangien consisterait à enregistrer les variations temporelles de la vitesse, la température, la pression mesurées par un grand nombre d'observateurs

2. En physique et en mécanique, un champ est une fonction de plusieurs variables, souvent de l'espace (donc de 3 variables a priori) et du temps. Cette fonction peut être un scalaire (on parle alors d'un champ scalaire), par exemple la température $T(x, y, z, t)$, ou vectorielle (on parle alors d'un champ vectoriel), par exemple la vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$.

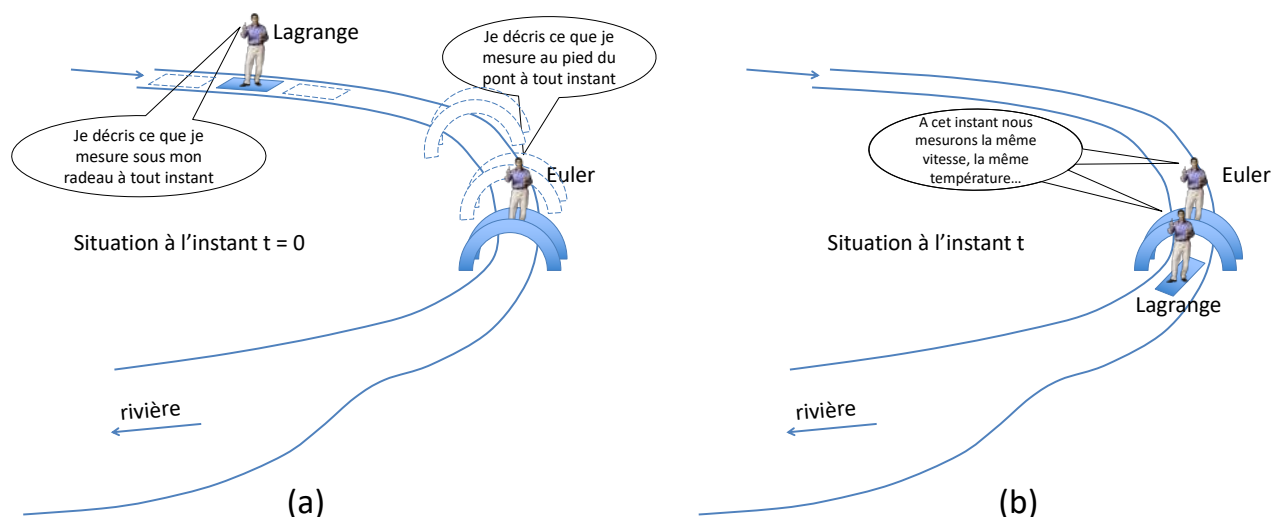


FIGURE 1.2 – Points de vue lagrangien et eulérien.

embarqués chacun sur un radeau différent emporté par le courant, c'est-à-dire lié à une PF en écoulement, voir la figure 1.2 a. L'écoulement serait parfaitement décrit par la lecture de l'ensemble des journaux de bord tenus par chacun des observateurs embarqués, dans lesquels seraient consignées leurs mesures.

Point de vue eulérien - L'écoulement d'un fluide peut aussi être décrit comme l'ensemble des valeurs de la vitesse du fluide mesurées en chaque point fixe de l'espace. C'est le point de vue eulérien.

Décrire l'écoulement de la rivière du point de vue eulérien consisterait à enregistrer les variations temporelle de la vitesse, de la température, de la pression mesurées par un grand nombre d'observateurs postés chacun sur un pont différent, c'est-à-dire possédant chacun une position fixe par rapport à la rive, voir la figure 1.2 a. L'écoulement serait parfaitement décrit par l'ensemble des cartes (autant de cartes que d'instant) représentant la vitesse mesurée au pied de chaque pont par ces observateurs à chaque instant : cartes du champ des vitesses, températures, pressions...

Equivalence et complémentarité - Point de vue eulérien et point de vue lagrangien sont deux points de vue différents sur une même réalité, l'écoulement du fluide. Ainsi, la vitesse mesurée à l'instant t par Euler s'identifie à la vitesse de la PF se trouvant à l'instant t au pied de son pont, c'est-à-dire celle que mesure Lagrange sur son radeau à l'instant où celui-ci passe sous le pont, voir la figure 1.2 b.

Ces deux points de vue sont complémentaires. Le point de vue lagrangien est utile pour appliquer les principes généraux de la mécanique (lois de Newton) et de la thermodynamique (premier principe). En effet, de ce point de vue on considère le fluide comme une collection de PF, qui sont des systèmes fermés auxquels les énoncés des théorèmes généraux s'appliquent naturellement. Le point de vue eulérien est utile pour se représenter mentalement et visuellement les écoulements sous forme de cartes représentant la vitesse, la température du fluide en fonction de la position à chaque instant.

Les cartes de courant de marée dans le Golfe du Morbihan reproduites sur la figure 1.3 sont un exemple typique de représentation eulérienne du champ des vitesses des eaux marines utile aux plaisanciers pour anticiper les conditions de navigation dans le golfe.

1.3.2 Ecoulement stationnaire, instationnaire

Ecoulement stationnaire : un écoulement stationnaire est tel que la vitesse mesurée en chaque point du fluide fixe par rapport au référentiel d'étude est indépendante du temps. Pour reprendre l'exemple de la rivière, l'écoulement de la rivière est stationnaire si Euler mesure une vitesse constante

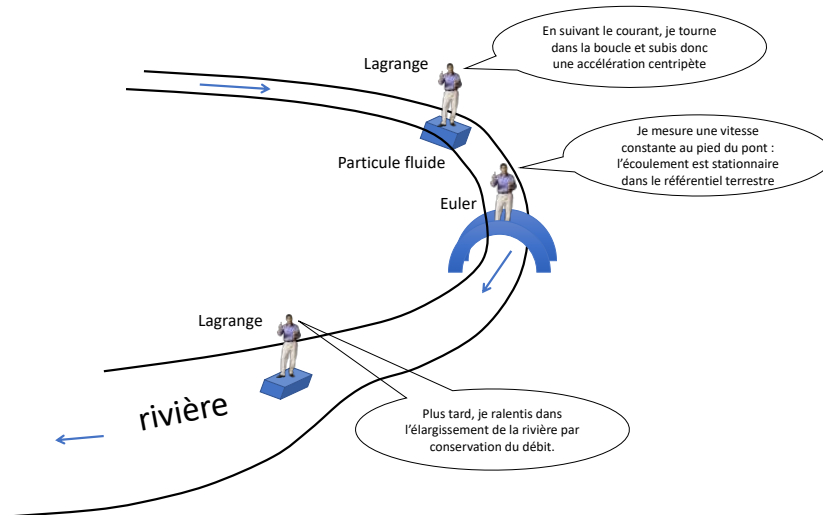


FIGURE 1.4 – Une PF peut parfaitement subir des accélérations au sein d’un écoulement stationnaire.

1.3.3 Lignes de courant

Lignes de courant : quel que soit l’écoulement, et que celui-ci soit stationnaire ou instationnaire, à tout instant on peut définir des lignes caractéristiques de l’écoulement que l’on appelle lignes de courant. Une ligne de courant est une courbe tangente en tout point au vecteur vitesse en ce point et orientée dans le sens du vecteur vitesse.

Les lignes de courant sont les lignes de champ du champ de vitesse. Elles sont pour le champ des vitesses ce que sont les lignes de champ pour le champ électrique en électrostatique.

Les lignes de courant renseignent visuellement sur la structure de l’écoulement. Deux lignes de courant sont représentées sur la carte des courants sur la figure 1.3 b. La ligne de courant ouverte indique un courant sortant qui traduit la vidange du golfe dans la mer au jusant, tandis que la ligne de courant fermée indique une recirculation dans la baie au Nord de Locmariaquer.

Au sein d’un écoulement stationnaire, les lignes de courant sont invariantes.

Au contraire, au sein d’un écoulement instationnaire, les lignes de courant peuvent dépendre du temps. C’est le cas des courants de marées représentés sur la figure 1.3.

Les lignes de courant sont fondamentalement différentes des trajectoires des PF. En particulier une ligne de courant est définie à tout instant et passe par plusieurs PF, alors qu’une trajectoire est l’ensemble des positions occupées par une PF au cours du temps.

Propriété fondamentale des écoulements stationnaires : on admettra sans démonstration qu’au sein d’un écoulement stationnaire, les lignes de courant et les trajectoires coïncident.

1.4 Dynamique des fluides

Le mot dynamique a pour étymologie grecque *dynamis* : puissance. La dynamique est l’étude des forces qui sont les causes du mouvement, comme l’exprime le Principe Fondamental de la Dynamique.

Les forces qui s’exercent au sein des fluides peuvent être classées en deux catégories :

- les forces s’exerçant à distance : nous ne considérerons que le poids, c’est-à-dire l’attraction gravitationnelle de la Terre³.
- les forces de contact, c’est-à-dire des forces qui n’existent qu’entre des corps en contact l’un avec l’autre. Dans les fluides, les corps en contact peuvent être deux PF voisines ou une PF et une paroi solide. Ces forces de contact se subdivisent en trois types :

3. Il n’est en effet pas nécessaire d’être en contact avec la Terre pour subir son attraction : voir la chute libre !

- les forces de pression, déjà présentées dans l'UE Mécanique Physique 1 : elles sont présentes que le fluide soit au repos ou qu'il s'écoule.
- les forces visqueuses, qui n'apparaissent qu'au sein d'un fluide en écoulement. Ces forces s'ajoutent aux forces de pression.
- les forces exercées par une paroi solide sur le fluide à son contact.

1.4.1 Rappel : forces de pression

Définition : au sein de tout fluide, au repos ou en mouvement, la PF 1 en contact avec la PF 2 le long de la surface d'aire dS (voir la figure 1.5 a) exerce sur celle-ci une force $\vec{dF}_{1 \rightarrow 2}$:

- normale à cette surface (donc parallèle à $\vec{dS}_{1 \rightarrow 2}$)
- orientée de l'intérieur vers l'extérieur de la PF 1
- d'intensité $\|\vec{dF}\| = P dS$. P est la pression du fluide le long de la surface de contact entre PF1 et PF2.

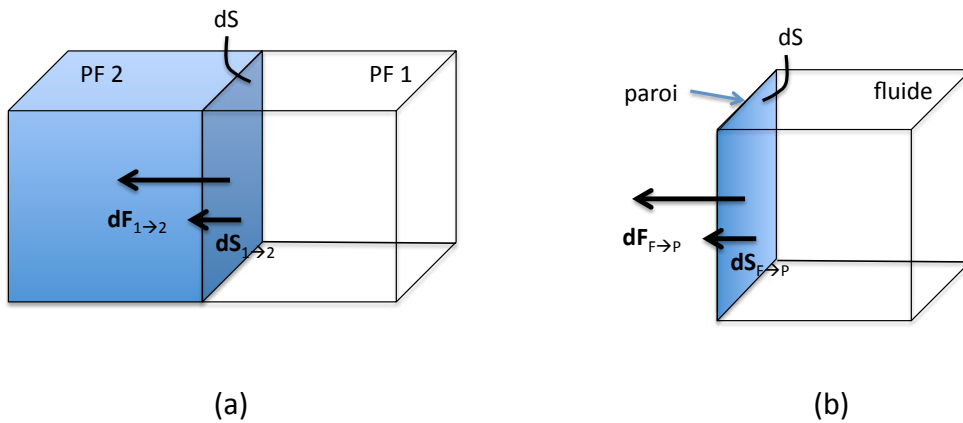


FIGURE 1.5 – (a) Force de pression exercée par une PF sur une autre PF à son contact. (b) Force de pression exercée par une PF sur une paroi solide à son contact.

P est homogène à une force par unité de surface. Elle s'exprime en $N \cdot m^{-2}$, ou de manière équivalente en Pascal (Pa) : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot m^{-2}$.

Remarques :

- ces forces de pression ont pour origine les collisions entre des molécules de la PF 1 et des molécules de la PF2 qui se produisent au très proche voisinage de leur surface de contact.
- La pression peut être non seulement inhomogène, c'est-à-dire dépendre de la position dans le fluide, mais aussi instationnaire lorsque le fluide s'écoule, c'est-à-dire dépendre aussi du temps : $P = P(\vec{r}, t)$.
- Compte tenu de l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local, la pression vérifie en permanence et partout l'équation d'état du fluide, que celui-ci soit au repos ou en mouvement : $P = P(\rho, T)$.
- La pression est la même de part et d'autre d'une interface entre deux fluides⁴.
- La pression de l'air atmosphérique vaut environ $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$ au niveau de la mer.

4. Ceci est vrai tant que l'interface n'est pas trop courbée, ce que nous considérerons comme toujours vérifié dans le cadre de cette UE.

Propriété : Considérons une portion de paroi solide d'aire dS en contact avec une PF à la pression P (voir la figure 1.5 b). La paroi subit de la part de la PF une force de pression $\vec{dF}_{F \rightarrow P}$:

- normale à cette surface
- orientée de la PF vers la paroi
- d'intensité $\|\vec{dF}_{F \rightarrow P}\| = PdS$.

Par principe action-réaction, la paroi exerce sur la PF à son contact la force opposée : $\vec{dF}_{P \rightarrow F} = -\vec{dF}_{F \rightarrow P}$.

1.4.2 Forces visqueuses

Les forces visqueuses n'apparaissent qu'au sein d'un fluide en écoulement. Elles sont mises clairement en évidence par l'expérience de l'écoulement de Couette plan.

Écoulement de cisaillement de Couette plan - Une plaque de surface S se déplace à vitesse \vec{U} constante parallèlement à une paroi immobile (voir Figure 1.6).

- Au bout d'un certain temps⁵, un profil de vitesse stationnaire parallèle⁶ linéaire s'établit dans le fluide :

$$\vec{v}(y) = \frac{Uy}{a} \vec{e}_x : \text{écoulement de cisaillement}$$

- On constate que la vitesse du fluide au contact de chaque paroi est égale à la vitesse de la paroi.
- Pour maintenir la plaque en mouvement stationnaire, il faut lui appliquer une force horizontale. Cette force compense la force de frottement visqueux \vec{F} exercée par le fluide sur la plaque et qui est opposée à \vec{U} :

$$\vec{F} = -\eta S \frac{\vec{U}}{a}$$

- η est appelée **viscosité dynamique du fluide**⁷
 $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$, s'exprime en Pa.s dans le système international.
 $\eta_{\text{eau}} = 10^{-3}$ Pa.s, $\eta_{\text{air}} = 2.10^{-5}$ Pa.s dans les CNTP
- La paroi en mouvement est freinée par le fluide. Par principe action-réaction, la paroi exerce sur le fluide à son contact la force $-\vec{F}$: elle entraîne le fluide dans la direction de son mouvement.
- Force visqueuses et adhérence aux parois sont deux conséquences de la viscosité du fluide.

Forces visqueuses au sein du fluide

- Des forces visqueuses s'exercent aussi localement au sein du fluide en écoulement quel que soit son profil de vitesse : considérons deux PF en contact au sein d'un écoulement parallèle de cisaillement : la force visqueuse exercée par la PF 1 sur la PF 2 à son contact le long de la surface d'aire dS , représentées sur la figure 1.7, lorsque deux PF glissent l'une sur l'autre est :

$$\vec{dF}_{1 \rightarrow 2} = -\eta \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{d_{1-2}} dS$$

La PF1 freine la PF2, tandis que par principe action-réaction, la PF2 entraîne la PF1 dans son mouvement.

- Comme les forces de pression, les forces visqueuses ont pour origine microscopique les collisions entre les molécules le long de la surface de contact entre PF ou le long de la paroi solide en contact avec les fluide, cf figure 1.7.
- Les forces visqueuses s'ajoutent aux forces de pression.

5. La durée du régime transitoire est d'autant plus courte que la viscosité du fluide est grande. Le régime transitoire s'observe sur les films 1_04010, 1_04015.

6. Un écoulement parallèle est un écoulement dont les lignes de courant sont parallèles.

7. La viscosité dynamique (du grec dynamis : puissance, force) relie une force à une vitesse.

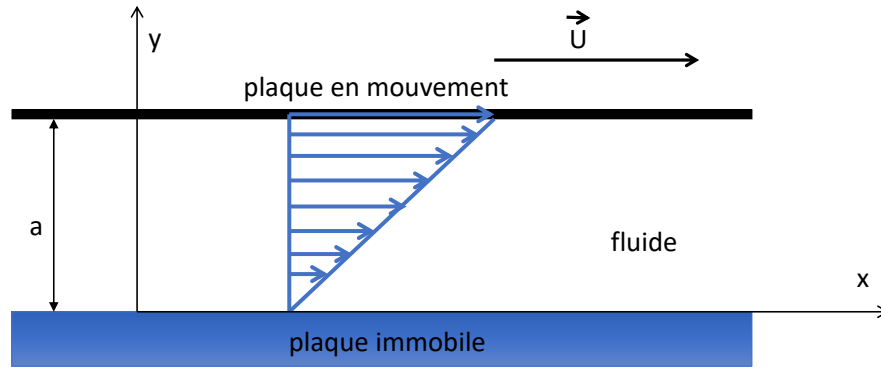


FIGURE 1.6 – Écoulement de cisaillement de Couette plan

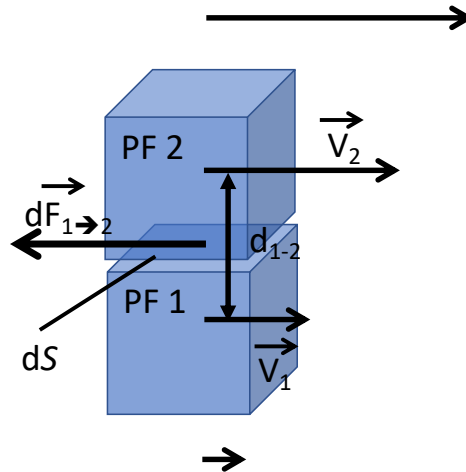


FIGURE 1.7 – Forces visqueuses s'exerçant entre deux PF en contact au sein d'un écoulement.

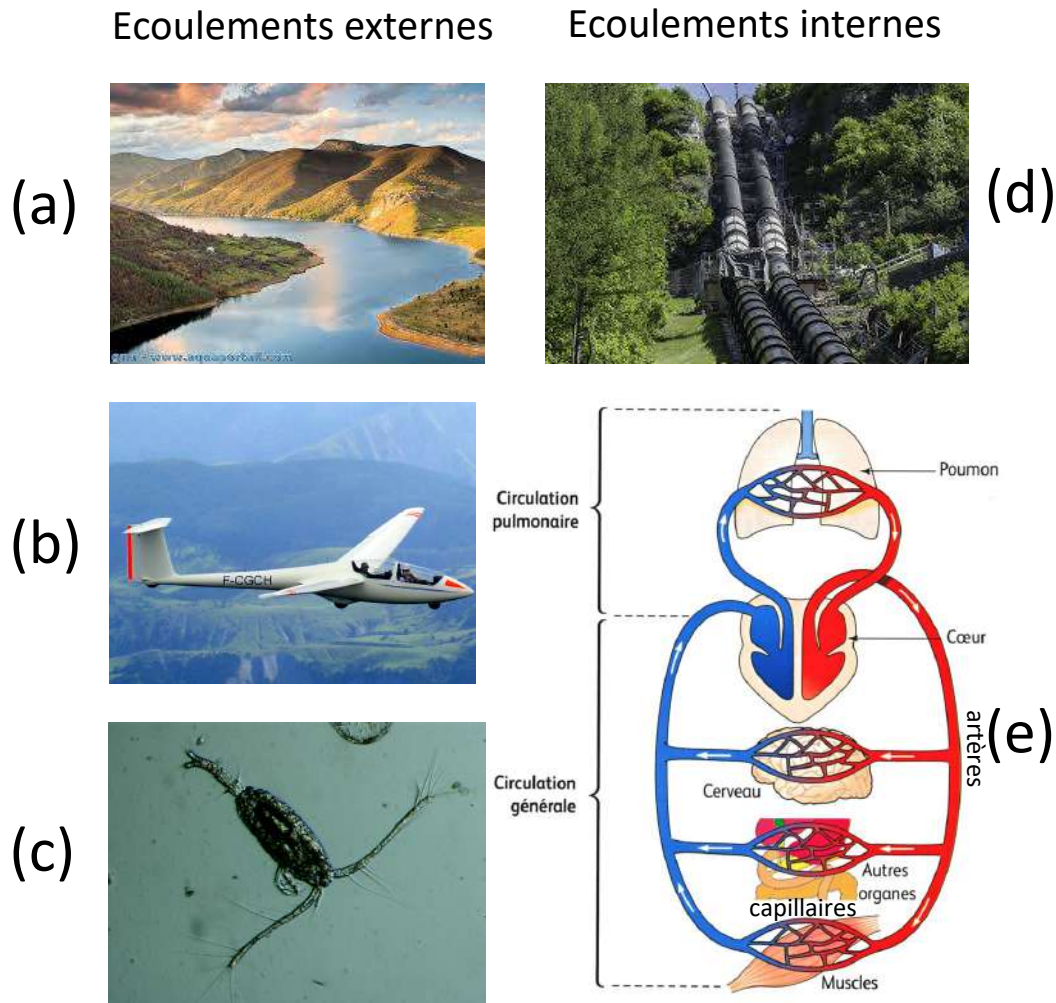
1.5 Écoulements

1.5.1 Types d'écoulements

Les écoulements se classent en deux catégories selon ce qui leur est imposé au fluide à sa frontière :

- les **écoulements externes** :
 - un objet solide (ex : avion, voiture, bateau, oiseau, poisson, plancton, hélice, maison, montagne, cf. figure 1.8 b, c) de dimension caractéristique d est en mouvement relatif à la vitesse U par rapport à un fluide illimité (la mer, la rivière, l'atmosphère, le vent).
 - un liquide (ex : de l'eau) de profondeur caractéristique d s'écoule avec la vitesse caractéristique U et est en contact avec un gaz (ex : l'air) à une pression au repos homogène (ex : la pression atmosphérique) le long d'une surface qu'on appelle **surface libre** (fleuve, rivière, mer, cf. figure 1.8 a). Le long de la surface libre, l'air est entraîné par le liquide mais la masse volumique et la viscosité du gaz sont tellement plus faibles que celles du liquide en écoulement que tout se passe comme si l'air était au repos et n'exerçait aucune autre force que des forces de pression homogènes dues à sa pression au repos.
- les **écoulements internes** : un fluide s'écoule à la vitesse caractéristique U à l'intérieur d'une conduite cylindrique de diamètre caractéristique d (canalisation d'eau, gazoduc, oéلودuc, circu-

lation sanguine, cf. figure 1.8 d, e) : le fluide est toujours entouré de parois immobiles auxquelles il adhère par viscosité.



On peut montrer que ce **nombre sans dimension** a pour expression :

$$\text{Re} = \frac{\rho U d}{\eta} = \frac{U d}{\nu}$$

où $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ est la **viscosité cinématique** du fluide.

- Comme le montre le tableau 1.1, les écoulements usuels présentent une grande diversité de valeurs du nombre de Reynolds.

objet	type d'écoulement	dimension caractéristique	vitesse caractéristique	fluide	Re
planeur	externe	longueur 10 m	$20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	air	10^7
fleuve	externe	profondeur 10 m	$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	eau	10^7
plancton <i>copépode</i>	externe	1 mm	$1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$	eau	1
conduite hydro-électrique	interne	diamètre 1 m	$10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	eau	10^7
artère	interne	diamètre 2,5 cm	$10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$	sang ($\eta = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$)	40
capillaire sanguin	interne	diamètre 10 μm	$0,5 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$	sang	10^{-6}

TABLE 1.1 – Caractéristiques d'écoulements usuels.

- L'observation a permis de mettre en évidence que l'allure d'un écoulement, appelée aussi le **régime d'écoulement**, dépend essentiellement de la valeur du nombre de Reynolds :

- **Écoulements à nombre de Reynolds petit à modéré :**

Pour $\text{Re} \lesssim 1$, c'est-à-dire lorsque les forces visqueuses dominent l'inertie du fluide, les écoulements, qu'ils soient internes ou externes, sont **laminaires** : les trajectoires des PF sont parallèles et régulières (cf. film *circle1* : écoulement à $\text{Re} \lesssim 1$ autour d'un cylindre⁸). Si l'écoulement en amont est stationnaire, l'écoulement reste stationnaire. Les forces visqueuses jouent un rôle déterminant dans l'écoulement. Dans la limite $\text{Re} \ll 1$, ces écoulements sont décrits exactement par l'équation de Stokes.

- **Écoulements à grand nombre de Reynolds :**

Pour $\text{Re} \gg 1$, c'est-à-dire lorsque l'inertie du fluide domine les forces visqueuses :

- + dans le cas d'écoulements externes à surface libre ou autour d'obstacles **profilés** (qui présentent une dimension d face à l'écoulement bien plus petite que leur longueur L , par ex : aile, avion, oiseau, la plupart des poissons : voir la figure 1.9 a, b) : si l'écoulement en amont est laminaire, l'écoulement reste laminaire presque partout autour de l'obstacle, sauf dans un fin **sillage** derrière l'obstacle (cf. film *air_foil_00_deg* : écoulement à $\text{Re} \gg 1$ autour d'un profil d'aile d'avion à angle d'incidence nul⁹). Les forces visqueuses ont un effet négligeable dans presque tout l'écoulement (hors sillage) : tout se passe comme si le fluide possédait une viscosité nulle et glissait le long des parois solides au lieu d'adhérer : **glissement apparent**. On modélise ces écoulements à l'aide du **modèle d'écoulement parfait**¹⁰ : écoulement d'un fluide sans viscosité et qui glisse le long des parois solides.

8. Dans ce film, l'écoulement stationnaire laminaire d'un liquide visqueux autour d'un cylindre est matérialisé par des particules solides qui suivent les PF, ce qui permet de visualiser des trajectoires, et par du colorant injecté continuellement en amont, qui dessine des lignes d'émission. Trajectoires, lignes d'émission et lignes de courant coïncident.

9. Dans ce film, l'écoulement stationnaire laminaire d'air autour du profil d'aile est matérialisé par de la fumée injectée continuellement en amont, qui dessine des lignes d'émission.

10. Appellation usuelle : "modèle d'écoulement de fluide parfait". Cette expression semble relier ce modèle à une propriété intrinsèque du fluide, alors que l'expression "modèle d'écoulement parfait" met l'accent sur une propriété de l'écoulement résultant de son nombre de Reynolds élevé.

- + dans le cas d'écoulements externes autour d'obstacles **non profilés** (qui présentent une dimension face à l'écoulement comparable à leur longueur, : voir la figure 1.9 c), par ex : ballon de football, boulet de canon, aile à fort angle d'incidence (cf. films *air_foil_25_deg* et *276* : écoulement à $Re \gg 1$ autour d'un profil d'aile d'avion à un angle d'incidence de 25° , d'un cylindre)) : le sillage occupe un volume bien plus important que dans le cas des obstacles profilés. Dans le sillage, l'écoulement est **turbulent** : l'écoulement est fortement instationnaire et présente de nombreux tourbillons ; les trajectoires des PF sont de forme complexe, enchevêtrées. De ce fait, l'écoulement présente deux zones distinctes, l'écoulement laminaire rapide, qui est bien décrit par le modèle d'écoulement parfait, et le sillage turbulent, dans lequel les forces visqueuses ont un rôle déterminant. La modélisation complète de l'écoulement est donc plus délicate.
- + dans le cas d'écoulements internes (par ex dans une conduite cylindrique), malgré la grande valeur du nombre de Reynolds, le fait que les PF évoluent toujours au voisinage de parois qui les freinent par viscosité implique que les forces visqueuses ne peuvent jamais être négligées. Dans une canalisation droite, il existe de deux régimes d'écoulements :
 - pour $Re < 2000$, l'écoulement est laminaire (film *laminar2_ovrly*) et est précisément décrit par le modèle d'écoulement de Poiseuille.
 - entre $Re = 2000$ et $Re = 3000$, l'écoulement présente une transition laminaire-turbulent (film *reynolds2*) qui fait encore aujourd'hui l'objet de recherche active.
 - pour $Re > 3000$, l'écoulement est turbulent (film *reynolds*). Sa modélisation est de niveau Master.

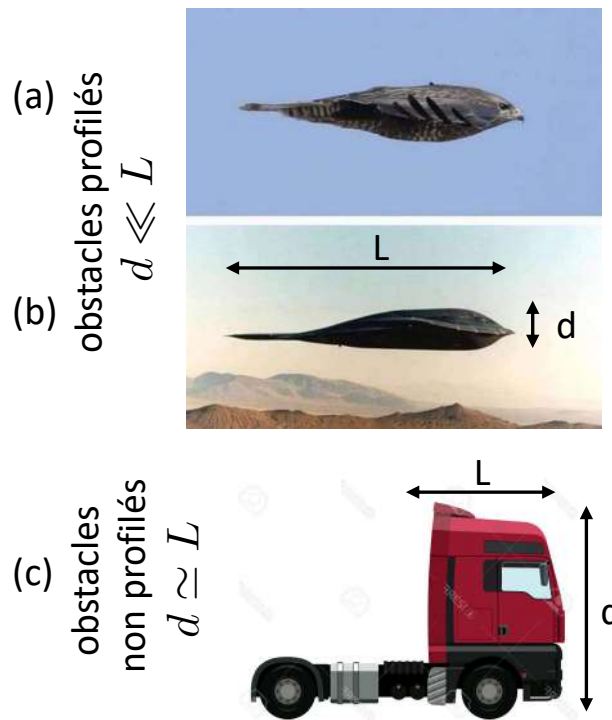


FIGURE 1.9 – Obstacles profilés : (a) rapace, (b) bombardier B2. (c) Obstacle non profilé : camion.

Ces différents cas de figure sont résumés dans le tableau 1.2.

Re	type d'écoulement	régime d'écoulement généralement observé	réponse du fluide dominante	modèle
$\gg 1$	externe autour d'obstacle profilé ou à surface libre	laminaire partout	inertie	écoulement parfait
$\gg 1$	externe autour d'obstacle non profilé	laminaire + sillage turbulent	inertie inertie & visc.	écoulement parfait + turbulence
< 2000	interne	laminaire	effets visqueux	écoulement de Poiseuille
> 3000	interne	turbulent	inertie et effets visqueux	turbulence
$\lesssim 1$	externe ou interne	laminaire	effets visqueux	équation de Stokes valable pour $\text{Re} \ll 1$

TABLE 1.2 – Régimes d'écoulements et modélisation associée

1.6 Bilans

1.6.1 Généralités

Dans cette partie nous allons effectuer des bilans de matière et d'énergie pour un fluide en écoulement. La méthode employée effectuer ces bilans est très générale en mécanique, en physique et dans beaucoup d'autres domaines, comme la démographie, l'économie...

Méthode pour faire un bilan :

- on définit le système d'étude (une baignoire, une entreprise, la population en France)
- on identifie la grandeur G qui fait l'objet du bilan (la quantité d'eau, l'argent, le nombre d'habitants)
- on définit une durée d'étude (entre un temps initial t_i et un temps final t_f)
- on évalue ce qui quelle quantité de G est entrée (notée E) et est sortie du système (notée S) pendant le laps de temps correspondant à la durée d'étude (l'apport du robinet et la vidange par le fond de la baignoire ; les dépenses et les recettes ; les flux migratoires)
- on évalue la variation P de la grandeur G à l'intérieur du système pendant ce même laps de temps :

- s'il n'y a ni création ni disparition, le bilan s'écrit :

$$\Delta G = G(t_f) - G(t_i) = E - S$$

C'est le cas de la baignoire, dans laquelle il n'y a ni création ni disparition d'eau, mais conservation de la matière ; c'est aussi le de l'entreprise, dans laquelle il n'y a ni création ni destruction d'argent (sauf si l'entreprise fabrique des faux billets!).

- si G est créée et/ou détruite, on peut avoir $P \neq 0$ et le bilan s'écrit alors :

$$\Delta G = E - S + P$$

avec $P > 0$ ou $P < 0$. C'est le cas d'un pays dans lequel les naissances et les décès font varier le nombre d'habitants, résultant en un solde naturel sur le laps de temps considéré P .

Remarque : si l'on considère un laps de temps très court (on dit aussi "infinitésimal"), que l'on note alors dt , les quantités E et S ainsi que la variation de G sont alors aussi très petites. On note alors dG la variation infinitésimale de G , et on note δE et δS les petites quantités (on dit aussi quantités élémentaires) E et S .

Système - Le système est l'objet d'étude. Il s'agit en général d'un système matériel, c'est-à-dire contenant de la matière. Définir le système conduit à identifier sa frontière, c'est-à-dire la surface de séparation entre le système et le reste de l'univers, ce qui définit l'intérieur et l'extérieur du système. Cette surface de séparation ne doit pas forcément être matérialisée, il suffit de la définir par la pensée : c'est ce que l'on fait couramment lorsque l'on étudie une PF. On distingue :

- les **systèmes fermés** : systèmes qui n'échangent pas de matière avec l'extérieur. Leur masse est donc constante. ex : PF. Ces systèmes peuvent échanger de l'énergie avec l'extérieur.
- les **systèmes ouverts** : systèmes susceptibles d'échanger de la matière et de l'énergie avec l'extérieur. ex : le fluide contenu entre deux sections d'un tube dans lequel s'écoule du fluide.

1.6.2 Bilans de matière

Conservation de la matière

En absence de réaction nucléaire conduisant à la création ou à l'annihilation de matière, la matière, donc sa masse, est conservée au cours de l'écoulement d'un fluide. Nous allons établir les conséquences de cette propriété de **conservation de la matière**.

Débit massique, débit volumique

Considérons un écoulement d'un fluide de masse volumique ρ de la gauche vers la droite à la vitesse v et une surface immatérielle plane d'aire S perpendiculaire à l'écoulement, appelée **section droite de l'écoulement**, schématisés sur la figure 1.10 (on suppose que la masse volumique et la la vitesse du fluide sont homogènes le long de S).

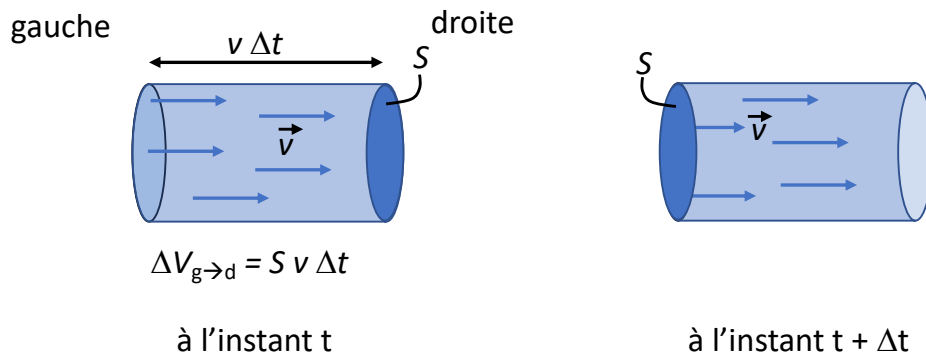


FIGURE 1.10 – Débit d'un écoulement de vitesse \vec{v} à travers une section droite S .

Quel est le volume de fluide traversant cette surface de la gauche vers la droite $\Delta V_{g \rightarrow d}$? Le fluide traversant cette surface durant Δt est celui qui aura le temps d'atteindre et de traverser S entre les instants t et $t + \Delta t$, il est donc contenu dans un cylindre de base S et de longueur $v \Delta t$ ¹¹. Le **débit volumique à travers S de la gauche vers la droite** $D_{v, g \rightarrow d}$ est par définition le volume de fluide traversant cette surface de la gauche vers la droite par unité de temps :

$$D_{v, g \rightarrow d} = \frac{\Delta V_{g \rightarrow d}}{\Delta t} = Sv$$

La masse de fluide traversant cette surface de la gauche vers la droite $\Delta m_{g \rightarrow d}$ vaut :

$$\Delta m_{g \rightarrow d} = \rho \Delta V_{g \rightarrow d}$$

11. Faisons une analogie avec une file d'attente au cinéma. Le film commençant dans $\Delta t = 10$ min et la caisse ayant une vitesse de traitement de $v = 2$ clients par minute, les spectateurs qui entreront dans la salle avant le début du film sont inclus dans une file d'attente devant la caisse de longueur $dN = v \Delta t = 20$ personnes.

par conséquent, le **débit massique à travers S de la gauche vers la droite** $D_{m, g \rightarrow d}$ est donc :

$$D_{m, g \rightarrow d} = \frac{\Delta m_{g \rightarrow d}}{\Delta t} = \rho D_{v, g \rightarrow d} = \rho S v$$

Remarques :

- Le débit est une grandeur algébrique. En effet, si le fluide s'écoule de la droite vers la gauche, le débit de la gauche vers la droite est négatif.
- Si S était parallèle à l'écoulement (si S était horizontale sur la figure 1.10), aucune matière ne traverserait S et le débit à travers S serait nul.
- Toutes ces propriétés sont contenues dans la définition plus générale du débit volumique : le débit volumique D_v à travers S dans le sens donné par celui du vecteur surface \vec{S} ¹² est défini comme le **flux** du vecteur vitesse à travers S , c'est-à-dire :

$$D_v = \vec{v} \cdot \vec{S}$$

De même, le débit massique D_m à travers S dans le sens donné par celui du vecteur surface \vec{S} est défini comme le flux du vecteur $\rho \vec{v}$ à travers S , c'est-à-dire :

$$D_m = \rho \vec{v} \cdot \vec{S}$$

La PF de vitesse \vec{v} , de volume V et de masse m étant $\vec{p} = m\vec{v}$, le vecteur $\rho \vec{v}$ vérifie $\rho \vec{v} = \frac{m}{V}\vec{v} = \frac{\vec{p}}{V}$: **$\rho \vec{v}$ est la quantité de mouvement par unité de volume du fluide.**

Écoulement isovolume

Compte tenu de l'hypothèse d'ETL, au sein d'un écoulement, la pression, la masse volumique et la température d'un fluide sont liées entre elles par l'équation d'état du fluide $\rho = \rho(P, T)$, que celui-ci soit liquide ou gazeux. Or au sein d'un fluide en écoulement, la pression n'est pas homogène, donc sa masse volumique n'est a priori pas non plus homogène : en employant le point de vue lagrangien, la masse volumique d'une PF peut varier le long de sa trajectoire ; en employant le point de vue eulérien, la masse volumique du fluide peut dépendre de la position et du temps.

On peut montrer qu'en absence de source de chaleur au sein du fluide (élément chauffant, réaction chimique exothermique), tant que la vitesse d'écoulement d'un fluide est petite dans la vitesse de propagation du son c dans ce fluide, les particules fluides évoluent presque sans changer de volume, donc presque sans changer de masse volumique : c'est **l'approximation d'écoulement isovolume** (du grec isos qui signifie égal)¹³. Dans ce cas, si la masse du fluide mis en mouvement est initialement homogène, elle reste approximativement homogène au cours de son écoulement, bien que la pression du fluide soit inhomogène¹⁴. Comme $c_{\text{air}} = 340 \text{ m.s}^{-1}$ dans les CNTP et $c_{\text{eau}} = 1,5 \text{ km.s}^{-1}$, pour la plupart des écoulements de la vie courante et de l'industrie n'impliquant pas de sources de chaleur, on peut considérer la masse volumique du fluide en écoulement comme une constante.

Dans la suite de cette UE, nous considérerons toujours des écoulements suffisamment lents pour que cette approximation d'écoulement isovolume soit valable. Les fluides de composition homogènes seront donc considérés comme de masse volumique constante.

Conséquences de la conservation de la matière

(a) Illustration sur un réservoir - Considérons le cas d'un réservoir d'eau muni d'une entrée e et d'une sortie s , voir la figure 1.11 a. Si le niveau d'eau dans le réservoir ne change pas, le volume

12. Rappel : le vecteur surface \vec{S} associé à la surface plane S est $\vec{S} = S\vec{n}$ où \vec{n} est un vecteur unitaire perpendiculaire à S (deux orientations sont possibles)

13. Une condition supplémentaire est que le volume total du fluide ne soit pas fixé par le dispositif : par exemple, un fluide contenu dans une chambre et comprimé par un piston subit une diminution de volume, que la vitesse du piston soit petite ou grande devant la vitesse du son dans le fluide.

14. Dans le cadre de cette approximation, tout se passe donc comme si la masse volumique du fluide ne variait pas avec la pression, c'est-à-dire comme si le fluide était de compressibilité nulle ; c'est la raison pour laquelle on qualifie souvent cette situation d'approximation de fluide incompressible, bien que cette approximation soit une conséquence du régime d'écoulement plutôt que des propriétés intrinsèques du fluide.

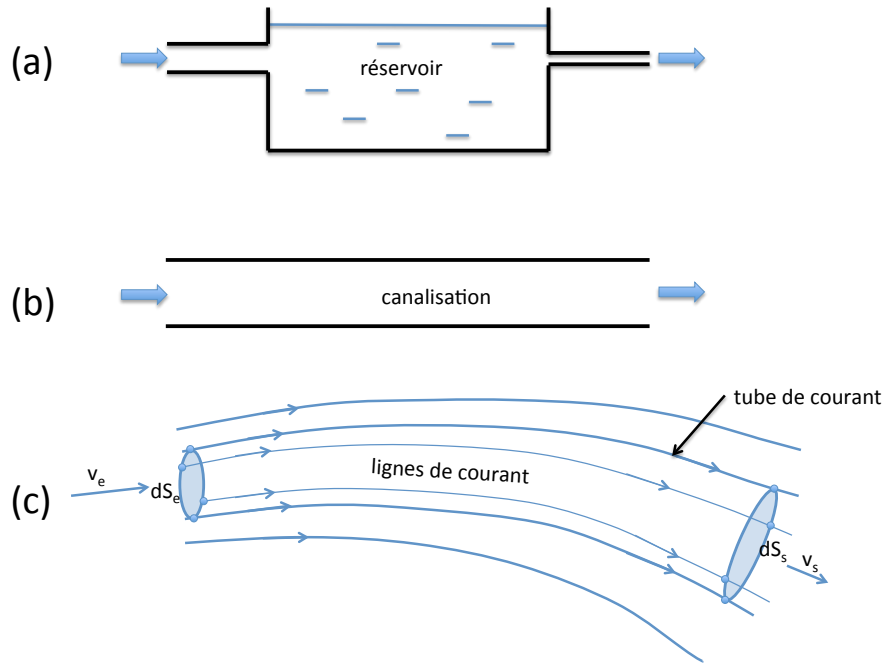


FIGURE 1.11

du liquide dans le réservoir est constant, et comme l'eau ne disparaît pas et n'apparaît pas dans le réservoir, le volume d'eau entrant par l'entrée pendant la durée dt est égal au volume sortant par la sortie pendant la même durée, donc les débits volumiques entrant et sortant sont égaux :

$$D_v \text{ entrant} = D_v \text{ sortant}$$

Dans l'approximation d'écoulement isovolume, l'eau étant un fluide homogène, $\rho_e = \rho_s = \rho$ donc :

$$D_m \text{ entrant} = \rho_e D_v \text{ entrant} = \rho D_v \text{ entrant} = \rho D_v \text{ sortant} = \rho_s D_v \text{ sortant} = D_m \text{ sortant}$$

les débits massiques entrant et sortant sont donc aussi égaux.

(b) Généralisation à une canalisation

Ce même raisonnement peut être généralisé à une canalisation rigide limitée par son entrée et sa sortie, voir la figure 1.11 b. En effet, comme le volume de cette canalisation est constant, le débit volumique de fluide entrant est égal au débit volumique sortant : $D_v \text{ entrant} = D_v \text{ sortant}$. Dans l'approximation d'écoulement isovolume pour un fluide homogène, $D_m \text{ entrant} = D_m \text{ sortant}$. **Cette égalité est d'ailleurs valable que l'écoulement soit stationnaire ou dépendant du temps.**

(c) Généralisation à un tube de courant pour un écoulement stationnaire

Enfin, considérons un écoulement **stationnaire**. Les lignes de courant sont donc immobiles. Considérons une surface immatérielle élémentaire d'aire dS_e au sein de l'écoulement. Le tube formé par les lignes de courant qui passent par le bord de dS_e et limité par dS_e en amont et par la surface élémentaire d'aire dS_s en aval est appelée **tube de courant**, voir la figure 1.11 c. Comme le tube de courant est limité par des lignes de courant qui sont tangentes au vecteur vitesse du fluide en tout point de chaque ligne de courant, le long du tube la vitesse du fluide est tangente à la surface du tube, donc il n'y a pas de fluide qui traverse les parois du tube de courant : le fluide n'entre et ne sort du tube qu'à travers les sections d'entrée et de sortie du tube. Les lignes de courant étant immobiles, le volume du fluide contenu à tout instant dans le tube de courant est constant : tout se passe comme si le tube de courant était un tuyau matériel avec des parois solides et imperméables. Donc on peut raisonner de

la même manière sur un tube de courant que sur un tube avec des parois solides, une entrée et une sortie fixes (canalisation) et poser l'égalité des débits volumiques élémentaires entrant et sortant :

$$dD_v \text{ entrant} = dD_v \text{ sortant}$$

dS_e et dS_s étant petits, la vitesse du fluide est homogène le long de dS_e et dS_s , donc, en supposant que les sections d'entrée et de sortie sont des sections droites :

$$\begin{aligned} dD_v \text{ entrant} &= v_e dS_e \\ dD_v \text{ sortant} &= v_s dS_s \end{aligned}$$

Donc :

$$v_e dS_e = v_s dS_s$$

Dans l'approximation d'écoulement isovolume pour un fluide homogène, on a donc aussi égalité des débits élémentaires massiques entrant et sortant :

$$dD_m \text{ entrant} = dD_m \text{ sortant}$$

1.6.3 Bilan d'énergie mécanique

Bilan d'énergie pour un tube de courant

Considérons un écoulement isovolume stationnaire d'un fluide homogène de masse volumique ρ . Considérons un tube de courant limité par la surface-frontière Σ , représentée en traits pointillés rouges sur la figure 1.12, qui est formée en amont par une section d'entrée dS_e d'altitude z_e , par une surface latérale formée de lignes de courant passant par le pourtour de la section d'entrée, et en aval par la section de sortie dS_s d'altitude z_s . La vitesse du fluide traversant dS_e est notée \mathbf{v}_e . La vitesse du fluide traversant dS_s est noté \mathbf{v}_s . On suppose les sections d'entrée et de sortie droites (perpendiculaires à l'écoulement).

La conservation de la matière implique :

$$dD_v \text{ entrant} = dD_v \text{ sortant}$$

soit :

$$v_e dS_e = v_s dS_s = dD_v$$

Comme du fluide s'écoule dans le tube de courant, le système constitué du fluide contenu à tout instant dans Σ est un système ouvert, noté \mathcal{S} : en permanence du fluide entre et sort du tube en traversant Σ . Pourtant, comme l'écoulement est stationnaire, le fluide situé à l'intérieur de Σ possède à chaque instant la même masse et la même énergie mécanique élémentaire, notée E . Le bilan d'énergie pour ce système ouvert entre deux instants proches t et $t + dt$ s'écrit donc :

$$E(t + dt) = E(t) \tag{1.1}$$

Considérons maintenant le fluide situé dans Σ à l'instant t , entouré en traits continus bleus et noté \mathcal{S}^* . Suivons-le durant le laps de temps dt . Ce fluide constitue donc un système fermé. Notons E^* son énergie mécanique, éventuellement dépendante du temps. A l'instant t , ce système fermé \mathcal{S}^* est entièrement contenu dans Σ , il coïncide avec le système ouvert \mathcal{S} . On a donc :

$$E^*(t) = E(t) \tag{1.2}$$

A l'instant $t + dt$, une partie du fluide appartenant à \mathcal{S}^* , d'énergie dE_s , est sorti de Σ par l'aval à travers dS_s , tandis que du fluide nouveau, d'énergie dE_e , a pris sa place en amont en entrant par dS_e dans Σ . Relions l'énergie du système ouvert \mathcal{S} constitué du fluide contenu dans la surface de contrôle Σ représentée en rouge à celle du système fermé \mathcal{S}^* constitué du fluide limité par la surface mobile représentée en traits continus bleus :

$$E^*(t + dt) = E(t + dt) + dE_s - dE_e \tag{1.3}$$

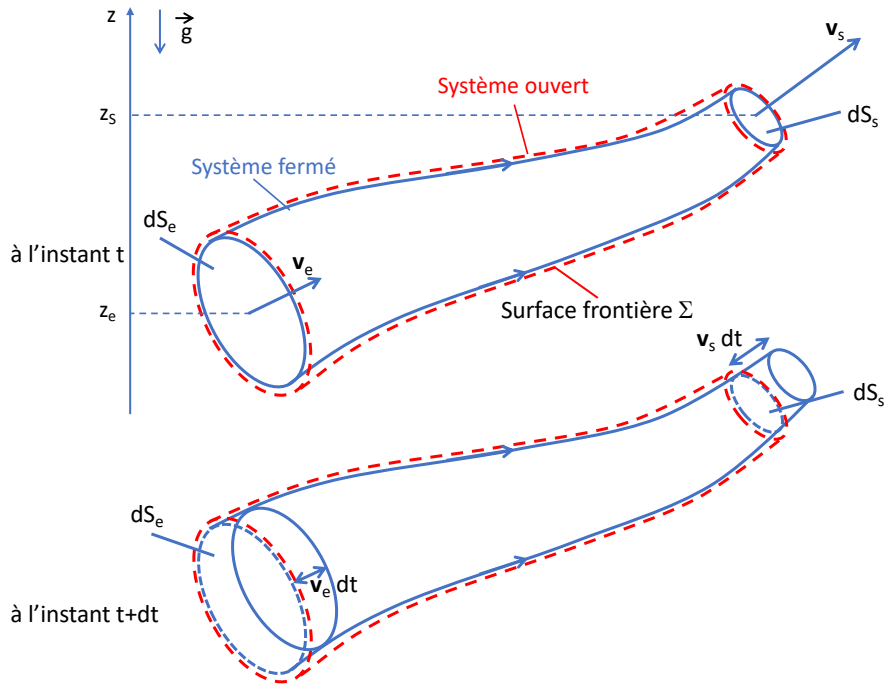


FIGURE 1.12

En soustrayant (1.2) à (1.3) et compte tenu de (1.1) :

$$E^*(t + dt) - E^*(t) = dE_s - dE_e \quad (1.4)$$

Cette égalité relie l'énergie d'un système fermé, auquel nous pourrions appliquer le théorème de l'énergie cinétique, à celle d'un système ouvert fixe dans les référentiel d'étude.

Application du théorème de l'énergie mécanique

Energie mécanique : Faisons l'inventaire des forces intérieures et extérieures qui s'exercent sur le fluide en écoulement formant le système fermé \mathcal{S}^* :

- son poids : force extérieure (exercée par la Terre sur le fluide)
- les forces de pression :
 - forces de pression extérieures exercées par le fluide extérieur à \mathcal{S}^* sur \mathcal{S}^* le long de la surface délimitant \mathcal{S}^*
 - forces de pression intérieures à \mathcal{S}^* , c'est-à-dire exercées par les PF de \mathcal{S}^* les unes sur les autres
- les forces visqueuses :
 - forces visqueuses extérieures exercées par le fluide extérieur à \mathcal{S}^* sur \mathcal{S}^* le long de la surface délimitant \mathcal{S}^*
 - forces visqueuses intérieures à \mathcal{S}^* , c'est-à-dire exercées par les PF de \mathcal{S}^* les unes sur les autres

La seule force conservative étant le poids, l'énergie mécanique du fluide a pour expression :

$$E = \text{énergie cinétique} + \text{énergie potentielle gravitationnelle}$$

On rappelle que l'énergie mécanique d'un système fermé de masse m , de vitesse v et d'altitude z est :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = m \left(\frac{1}{2}v^2 + gz \right) \text{ à une constante près}$$

Exprimons l'énergie dE_e du fluide entrant dans Σ pendant la durée dt . Son volume étant $d^2V_e = dS_e v_e dt$ (voir la figure 1.12), sa masse élémentaire d^2m_e a pour expression :

$$d^2m_e = \rho dV_e = \rho dS_e v_e dt$$

L'énergie mécanique de cette masse de fluide a donc pour expression :

$$dE_e = d^2m_e \left(\frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) = \rho dS_e v_e dt \left(\frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) = \rho dD_v dt \left(\frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) \quad (1.5)$$

De même, l'énergie mécanique dE_s du fluide sortant de Σ pendant la durée dt s'écrit :

$$dE_s = d^2m_s \left(\frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) = \rho dS_s v_s dt \left(\frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) = \rho dD_v dt \left(\frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) \quad (1.6)$$

Théorème de l'énergie mécanique : \mathcal{S}^* étant un système fermé, l'évolution de son énergie mécanique E^* entre les instants t et $t + dt$ obéit au théorème de l'énergie mécanique :

$$E^*(t + dt) - E^*(t) = \delta W_P^{\text{int}} + \delta W_P^{\text{ext}} + \delta W_V^{\text{int}} + \delta W_V^{\text{ext}} \quad (1.7)$$

où :

- δW_P^{int} est le travail élémentaire des forces de pression intérieures
- δW_P^{ext} est le travail élémentaire des forces de pression extérieures
- δW_V^{int} est le travail élémentaire des forces visqueuses intérieures
- δW_V^{ext} est le travail élémentaire des forces visqueuses extérieures

Evaluation de W_P^{int} : les forces de pression intérieures sont les forces exercées par des PF intérieures sur d'autres PF intérieures avec lesquelles elles sont en contact. L'écoulement étant supposé isovolume, les PF ne changent pas de volume; on admet que cela entraîne que le travail des forces de pression intérieures est nul (démonstration rigoureuse de niveau L3) :

$$\delta W_P^{\text{int}} = 0 \quad (1.8)$$

Evaluation de W_P^{ext} :

La force de pression exercée par le fluide extérieur à la pression P sur le fluide de \mathcal{S} le long d'une portion de la surface Σ d'aire élémentaire dS est :

$$d\mathbf{F} = P dS \mathbf{n}$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à dS orienté de l'extérieur vers \mathcal{S} . Si le point d'application de cette force qui est la PF sur laquelle s'exerce cette force se déplace du vecteur déplacement $d\mathbf{x}$ pendant la durée dt , le travail élémentaire $\delta^2 W$ de cette force est :

$$\delta^2 W = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

Décomposons δW_P^{ext} en l'écrivant comme :

$$\delta W_P^{\text{ext}} = \delta W_P^{\text{ext, lat}} + \delta W_P^{\text{ext, e}} + \delta W_P^{\text{ext, s}}$$

où $\delta W_P^{\text{ext, lat}}$ est le travail des forces de pression le long de la partie latérale de Σ formée par des lignes de courant, $\delta W_P^{\text{ext, e}}$ celui le long de la section d'entrée du tube de courant et $\delta W_P^{\text{ext, s}}$ celui le long de sa section de sortie.

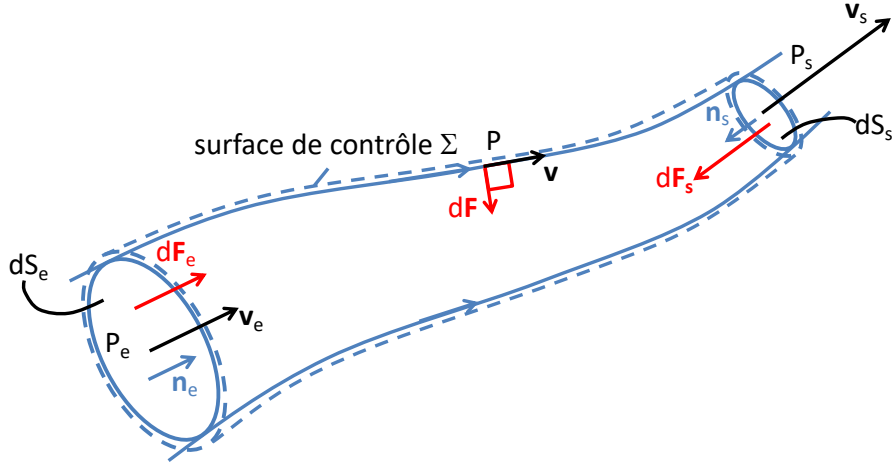


FIGURE 1.13

- le long de la partie latérale de Σ formée par des lignes de courant : par définition d'une ligne de courant, le fluide s'écoule parallèlement à la ligne de courant donc parallèlement à la paroi latérale, donc les points d'application des forces de pression extérieures se déplacent parallèlement à la paroi latérale, voir la figure 1.13 : durant la durée dt , leur déplacement $d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt$ est parallèle à la paroi. Or les force de pression sont perpendiculaires à la paroi donc $\delta^2 W = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0$. Par conséquent :

$$\delta W_P^{\text{ext, lat}} = 0$$

- le long de la section d'entrée du tube de courant : en notant P_e la pression du fluide le long de la section d'entrée d'aire élémentaire dS_e , la force de pression est $d\mathbf{F} = P_e dS_e \mathbf{n}_e$ où \mathbf{n}_e est le vecteur unitaire normal à la section d'entrée orienté de l'extérieur vers \mathcal{S} , c'est-à-dire dans le sens de l'écoulement, voir la figure 1.13 . Durant la durée dt , le déplacement du point d'application de cette force de pression est $d\mathbf{x} = \mathbf{v}_e dt$. La section d'entrée étant droite, \mathbf{n}_e et \mathbf{v}_e sont colinéaires de mêmes sens. Donc finalement :

$$\delta W_P^{\text{ext, e}} = P_e dS_e \mathbf{n}_e \cdot \mathbf{v}_e dt = P_e dS_e v_e dt = P_e v_e dS_e dt = P_e dD_v dt$$

$\delta W_P^{\text{ext, e}} > 0$: la force de pression amont est orientée dans le même sens que la vitesse du fluide, donc la pression amont constitue un moteur du mouvement du fluide en le poussant.

- le long de la section de sortie du tube de courant : en notant P_s la pression du fluide le long de la section de sortie d'aire élémentaire dS_s , la force de pression est $d\mathbf{F} = P_s dS_s \mathbf{n}_s$ où \mathbf{n}_s est le vecteur unitaire normal à la section de sortie orienté de l'extérieur vers \mathcal{S} , c'est-à-dire dans le sens **opposé à l'écoulement**, voir la figure 1.13. Durant la durée dt , le déplacement du point d'application de cette force de pression est $d\mathbf{x} = \mathbf{v}_s dt$. La section d'entrée étant droite, \mathbf{n}_s et \mathbf{v}_s sont colinéaires de sens opposés. Donc finalement :

$$\delta W_P^{\text{ext, s}} = P_s dS_s \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{v}_s dt = P_s dS_s v_s dt = -P_s v_s dS_s dt = -P_s dD_v dt$$

$\delta W_P^{\text{ext, s}} < 0$: la force de pression aval est orientée dans le sens opposé à la vitesse du fluide, donc la pression aval constitue un frein du mouvement du fluide.

Finalement :

$$\delta W_P^{\text{ext}} = dD_v (P_e - P_s) dt$$

Evaluation de δW_V^{int} et δW_V^{ext} : De manière générale, l'évaluation de ces travaux des forces visqueuses nécessite une connaissance détaillée de l'écoulement. Les forces visqueuses intérieures sont les forces visqueuses exercées par des PF intérieures sur d'autres PF intérieures en contact. Par analogie

avec les frottements internes à un vélo, dont on sait d'expérience qu'ils induisent toujours un effort supplémentaire, on peut comprendre que le travail des forces visqueuses intérieures est toujours négatif (démonstration rigoureuse de niveau L3) :

$$\delta W_V^{\text{int}} < 0 \quad (1.9)$$

Forme finale du bilan d'énergie mécanique : En combinant (1.4), (1.5), (1.6) (1.7), (1.8), (1.9) :

$$dD_v \left[\left(\frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s + P_s \right) - \left(\frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e + P_e \right) \right] = \frac{\delta W_V^{\text{int}} + \delta W_V^{\text{ext}}}{dt} = \delta \mathcal{P}_V^{\text{int}} + \delta \mathcal{P}_V^{\text{ext}} \quad (1.10)$$

où $\mathcal{P}_V^{\text{int}}$ est la puissance des forces visqueuses intérieures et $\mathcal{P}_V^{\text{ext}}$ la puissance des forces visqueuses extérieures.

Charge : on définit la charge infinitésimale $d\mathcal{C}$ de l'écoulement dans le tube de courant comme :

$$\boxed{d\mathcal{C} = dD_v \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P \right)} \quad (1.11)$$

La charge est le débit volumique d'énergie mécanique associée à l'écoulement. Le bilan d'énergie mécanique (1.10) se réécrit :

$$d\mathcal{C}_s - d\mathcal{C}_e = \delta \mathcal{P}_V^{\text{int}} + \delta \mathcal{P}_V^{\text{ext}} \quad (1.12)$$

1.6.4 Cas des écoulements parfaits

Dans les situations où l'écoulement est bien décrit par le modèle d'écoulement parfait, cela signifie que les effets visqueux sont négligeables. Par conséquent, $\delta \mathcal{P}_V^{\text{int}} = \delta \mathcal{P}_V^{\text{ext}} = 0$ et le bilan d'énergie mécanique pour un tube de courant s'écrit :

$$d\mathcal{C}_s = d\mathcal{C}_e : \text{conservation de la charge}$$

qui se réécrit :

$$\frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s + P_s = \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e + P_e$$

Ceci constitue la démonstration du théorème de Bernoulli :

Théorème de Bernoulli - Au sein d'un écoulement isovolume stationnaire parfait,

- la charge $d\mathcal{C} = dD_v \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P \right)$ de l'écoulement est conservée le long de tout tube de courant.
- de manière équivalente : la quantité $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + P$ est constante le long de toute ligne de courant. La valeur de la constante dépend a priori de la ligne de courant considérée.

1.7 Exemples d'écoulements parfaits

1.7.1 Ecoulement de Torricelli

Considérons un réservoir rempli d'eau en contact avec l'air atmosphérique le long d'une surface libre, voir la figure 1.14a. Le réservoir se vide lentement en un jet à travers un trou situé au fond du réservoir. Le jet débouche à l'air libre, voir la figure 1.14a et la photo b pour le cas particulier d'un barrage hydro-électrique subissant un lâcher d'eau. Quel est le temps de vidange du réservoir ?

Le réservoir cylindrique a la surface $S_R = 1 \text{ km}^2$. Le trou, de section $S_T = 1 \text{ m}^2$, se trouve à l'altitude zéro. La surface libre de l'eau se trouve à l'altitude $h = h(t)$ qui est lentement variable.

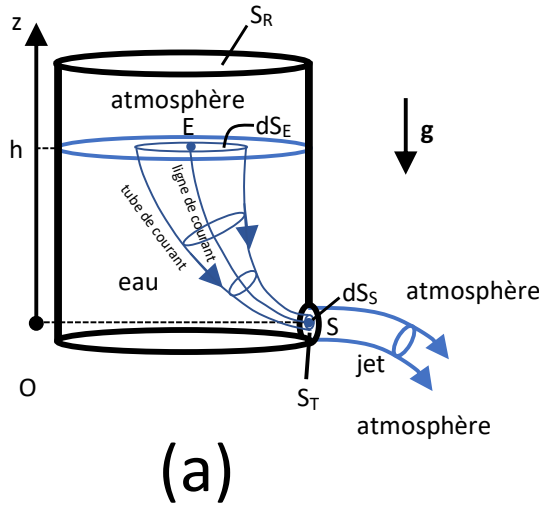


FIGURE 1.14 – (a) Schéma du réservoir. (b) Barrage hydro-électrique subissant un lâcher d'eau.

Pour déterminer le temps de vidange du réservoir T , connaissant sa contenance initiale en eau $V_0 = h(0)S_R$, il faut déterminer le débit volumique à travers le trou D_v . Connaissant la section de trou S_T , il reste donc à déterminer la vitesse de l'eau sortant à travers le trou V_T , sachant que $D_v = V_T S_T$.

Au sens strict du terme, l'écoulement n'est pas stationnaire, puisqu'il commence à $t = 0$ et se termine à $t = T$, et que le niveau d'eau baisse continûment. Néanmoins, l'écoulement est lent, si bien qu'il peut être considéré comme quasi-stationnaire.

On anticipe que le nombre de Reynolds associé à l'écoulement à travers de trou est grand devant l'unité (à vérifier a posteriori). L'eau débouchant à l'air libre sans être contrainte de s'écouler dans une canalisation, l'écoulement est assimilable à un écoulement à surface libre ce qui permet donc de le supposer parfait, voir le tableau 1.2. Enfin, on le suppose suffisamment lent pour être isovolume de masse volumique ρ (à vérifier aussi a posteriori). Ces hypothèses permettent d'appliquer le théorème de Bernoulli à une ligne de courant/un tube de courant bien choisis.

La surface libre descendant continûment, toute PF d'eau en contact avec la surface libre est en mouvement à la même vitesse $\dot{h}\vec{u}_z$ avec $\dot{h} < 0$. L'eau sortant par le trou, quel que soit le point E considéré de la surface libre, il existe une ligne de courant reliant ce point à un point S de la section du trou de sortie, voir la figure 1.14a. Un tube de courant centré sur cette ligne de courant, représenté sur la figure 1.14a, s'affine jusqu'au trou : sa section d'entrée dS_E est bien plus grande que sa section de sortie dS_S . En effet, toute ligne de courant partant de la surface libre, de surface $S_R \gg S_T$, converge vers le trou. Les débits volumiques d'eau étant identiques en entrée et en sortie du tube de courant, les vitesses en entrée v_E et en sortie v_S du tube de courant vérifient :

$$v_E dS_E = v_S dS_S = dD_v$$

donc $v_E = \frac{dS_S}{dS_E} v_S \ll v_S$.

D'après le théorème de Bernoulli appliqué à la ligne de courant ES :

$$\frac{1}{2}\rho v_E^2 + \rho g z_E + P_E = \frac{1}{2}\rho v_S^2 + \rho g z_S + P_S$$

soit :

$$\frac{1}{2}\rho(v_S^2 - v_E^2) = \underbrace{\rho g(z_E - z_S)}_h + P_E - P_S$$

La pression étant la même de part et d'autre des interfaces eau-air,

- la pression de l'eau en E est égale à la pression de l'air atmosphérique P_a

- S étant situé à l'intérieur d'un jet d'eau très fin débouchant à l'air libre, il n'est pas au contact d'une interface eau-air mais est très proche de l'interface eau-air, donc la pression de l'eau en S est aussi égale à P_a .

. Donc $P_E = P_S = P_a$.

Comme $V_E \ll v_S$, $\frac{1}{2}\rho(v_S^2 - v_E^2) \simeq \frac{1}{2}\rho v_S^2$. Donc :

$$\frac{1}{2}\rho v_S^2 \simeq \rho gh \text{ soit : } v_S \simeq \sqrt{2gh}$$

C'est la formule de Torricelli.

Comme v_S ne dépend pas de la position de S le long de la section du trou, la vitesse de sortie de l'eau est homogène le long de la section du trou. On en déduit le débit volumique sortant D_v :

$$D_v = S_T v_S = S_T \sqrt{2gh}$$

Par définition du débit volumique, le volume d'eau sortant pendant le durée infinitésimale dt est :

$$dV = D_v dt$$

Cette sortie d'eau conduit à un abaissement $-dh$ de la surface de l'eau dans le réservoir correspondant au même volume :

$$dV = S_R(-dh) = D_v dt.$$

Donc h vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{S_T}{S_R} \sqrt{2gh}$$

En séparant les variables :

$$\frac{dh}{h} = -\frac{S_T}{S_R} \sqrt{2g} dt$$

puis en intégrant cette égalité entre l'instant $t = 0$ auquel $h = h(0) = \frac{V_0}{S_R}$ et l'instant T auquel $h = 0$:

$$\int_{V_0/S_R}^0 h^{-1/2} dh = -\frac{S_T}{S_R} \sqrt{2g} T$$

on obtient :

$$[2h^{1/2}]_{V_0/S_R}^0 = -\frac{S_T}{S_R} \sqrt{2g} T$$

soit finalement :

$$T = \sqrt{\frac{2V_0 S_R}{g S_T^2}}$$

1.7.2 Effet Venturi

Un écoulement d'eau que l'on suppose isovolume et laminaire pour simplifier, stationnaire et de nombre de Reynolds suffisamment grand pour pouvoir être considéré comme parfait, est établi dans une conduite cylindrique horizontale de section S_1 qui est localement rétrécie jusqu'à atteindre $S_2 = S_1/4$ (diamètre divisé par 2), voir la figure 1.15a. La pression de l'eau en amont de la constriction vaut la pression atmosphérique. On constate que l'eau se vaporise (ce phénomène s'appelle la cavitation) en aval de la constriction à partir d'une certaine vitesse d'écoulement v_S , voir la la figure 1.15b. On sait que la cavitation se produit lorsque la pression de l'eau dans la constriction s'approche de zéro. Que vaut v_S ?

Le débit volumique D_v est le même en tout point de la canalisation. En supposant la vitesse du fluide homogène le long de toute section droite de la canalisation, D_v s'écrit :

$$D_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

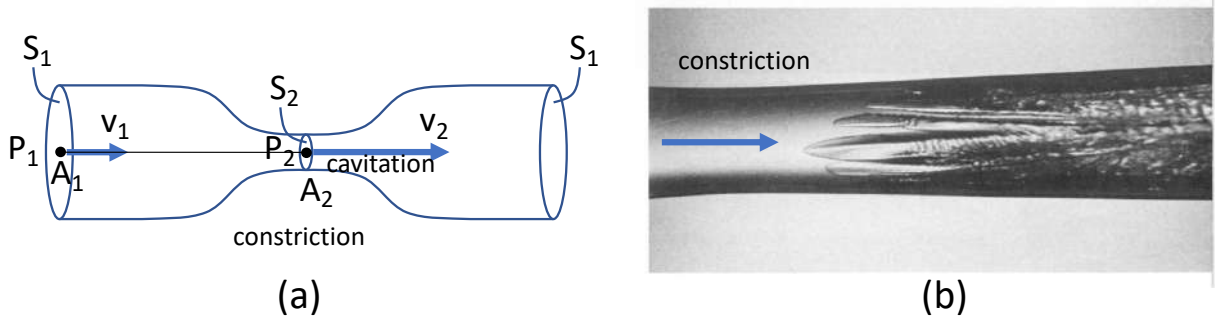


FIGURE 1.15 – (a) Conduite avec constriction. (b) Cavitation d’eau du robinet à température ambiante dans une constriction et en aval (extrait de *An Album of Fluid Motion*, de M. Van Dyke, Parabolic Press, 1982).

donc :

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 > v_1$$

L’écoulement vérifie les hypothèses du théorème de Bernoulli. Considérons la ligne de courant confondue avec l’axe de révolution de la conduite. Au point A_1 situé en amont de la constriction, la vitesse du fluide vaut v_1 et la pression vaut la pression atmosphérique : $P_1 = P_a$. Donc :

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_a = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2$$

La conduite étant horizontale, $z_1 = z_2$. Donc :

$$P_a - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)$$

La cavitation se produit lorsque $P_2 \simeq 0$, c’est-à-dire pour :

$$v_1 = v_S = \sqrt{\frac{2P_a}{\rho}} \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)^{-1/2}$$

Pour $S_1/S_2 = 4$, $v_S = 3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La cavitation peut causer de nombreux problèmes : elle génère de fortes fluctuations de pression dans les circuits hydrauliques et est une source importante de bruit. Par ailleurs, les bulles d’air abîment les surfaces internes des canalisations.

1.8 Écoulements internes : perte de charge en conduite droite

Considérons l’écoulement stationnaire et isovolume d’un fluide dans une conduite droite horizontale cylindrique de section S , de diamètre d et de longueur $L \gg d$, représentée sur la figure 1.16. Nous supposons que le nombre de Reynolds associé à cet écoulement soit inférieur à 2000, si bien que l’écoulement est laminaire. Pour effectuer un bilan d’énergie mécanique, choisissons comme système ouvert l’intégralité de la veine de fluide en écoulement, voir la figure 1.16. La différence entre le tube de courant étudié dans la partie 1.6.3 et la veine de courant étudiée ici est que la veine est latéralement en contact avec une paroi intérieure de la conduite. Par conséquent, en plus des forces de pression et des forces visqueuses, la veine subit aussi des forces de contact de la part d’une paroi solide immobile dont le travail W_S intervient a priori dans le bilan d’énergie mécanique analogue à (1.7) :

$$E^*(t + dt) - E^*(t) = dE_s - dE_e = W_P^{\text{int}} + W_P^{\text{ext}} + W_V^{\text{int}} + W_V^{\text{ext}} + W_S$$

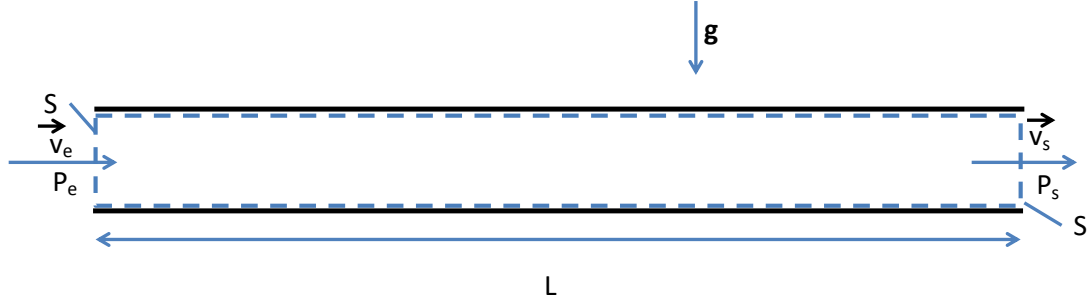


FIGURE 1.16

Les parois de la conduite étant immobiles, à cause de sa viscosité, le fluide adhère à la paroi. Par conséquent, au contact de la paroi, il est immobile. En conséquence, les points d'application des forces exercées par le solide sur le fluide à son contact sont immobiles, donc ces forces ne travaillent pas :

$$W_S = 0 \quad (1.13)$$

Par ailleurs, on admet que :

- la pression est homogène le long de toute section droite de l'écoulement
- bien que la vitesse puisse varier le long d'une section droite de l'écoulement, la méthode mise en oeuvre pour établir le bilan d'énergie mécanique (1.10) est applicable en remplaçant v par la vitesse moyenne de l'écoulement $\langle v \rangle = \frac{D_v}{S}$.

Les mêmes arguments que ceux développés pour le tube de courant conduisent à :

$$dE_e = \rho D_v dt \left(\frac{1}{2} \langle v_e \rangle^2 + g z_e \right)$$

$$dE_s = \rho D_v dt \left(\frac{1}{2} \langle v_s \rangle^2 + g z_s \right)$$

La conservation de la matière permet d'écrire :

$$S D_v = \langle v_e \rangle = S \langle v_s \rangle = S \langle v \rangle$$

soit :

$$\langle v_e \rangle = \langle v_s \rangle = \langle v \rangle$$

De plus, la conduite étant horizontale, $z_e = z_s$, donc :

$$E^*(t + dt) = E(t + dt) = dE_s - dE_e = 0$$

Par ailleurs,

$$W_P^{\text{int}} = 0,$$

$$W_P^{\text{ext}} = D_v (P_s - P_e) dt$$

$$W_V^{\text{int}} < 0$$

donc le bilan d'énergie mécanique (1.10) s'écrit :

$$D_v (P_s - P_e) = \mathcal{C}_s - \mathcal{C}_e = \mathcal{P}_V^{\text{int}} + \mathcal{P}_V^{\text{ext}}$$

Comme l'écoulement est le même tout le long de la canalisation, la puissance des forces visqueuses extérieures exercées en amont compense celle des forces visqueuses extérieures exercées en aval, si bien que $\mathcal{P}_V^{\text{ext}} = 0$. On en déduit :

$$\mathcal{C}_s - \mathcal{C}_e = \mathcal{P}_V^{\text{int}} < 0 : \text{il y a perte de charge entre l'amont et l'aval}$$

qui se récrit :

$$P_s - P_e = \frac{\mathcal{P}_V^{\text{int}}}{D_v} < 0 : \text{baisse de pression entre amont et aval}$$

Le fluide en écoulement subit donc une perte de charge essentiellement due aux frottements visqueux internes dans les conduites longues, et qui est donc *a priori* proportionnelle à la longueur de la canalisation. La valeur de cette perte de charge dépend crucialement du régime d'écoulement, mais aussi marginalement de la rugosité des parois de la canalisation. Sa prédiction théorique faisant toujours l'objet de recherches, pour l'évaluer on utilise plutôt des mesures de référence. La différence de pression entre l'amont et l'aval d'une canalisation caractérisée par des rugosités de hauteur moyenne ε a pour expression :

$$P_e - P_s = \lambda L \frac{\rho V^2}{2d} : \text{loi de Poiseuille} \quad (1.14)$$

où $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/d$ est la rugosité adimensionnée et λ le "facteur de friction", nombre sans dimension qui est fonction de Re et de $\tilde{\varepsilon}$. Les variations de λ avec Re et ε/d sont représentées sur la figure 1.17. Ces variations peuvent être approximativement décrites par intervalles comme suit :

- pour $Re \lesssim 2000$, λ décroît avec Re selon la loi $\lambda = \frac{64}{Re}$: régime de Poiseuille : le seul régime dont la description théorique soit exacte
- entre $Re \simeq 2000$ et $Re \simeq 3000$ se produit la transition laminaire-turbulent, qui consiste en l'apparition au sein de l'écoulement laminaire de zones turbulentes d'extension spatiale et de durée restreintes, de plus en plus fréquentes et envahissantes au fur et à mesure que Re augmente. Dans cet intervalle de Re , λ , qui est de l'ordre de 0,03, augmente d'un facteur 2 environ.
- pour $Re > 3000$, l'écoulement est partout et toujours turbulent : λ décroît faiblement avec Re puis sature à une valeur qui croît avec la rugosité de la conduite, et qui est de l'ordre de 10^{-2} dans la pratique. Ceci indique que la perte de charge au sein d'un écoulement turbulent en conduite est bien plus importante que celle qui se produirait si l'écoulement était laminaire à la même valeur de Re : la turbulence induit une forte dissipation d'énergie par frottements visqueux.

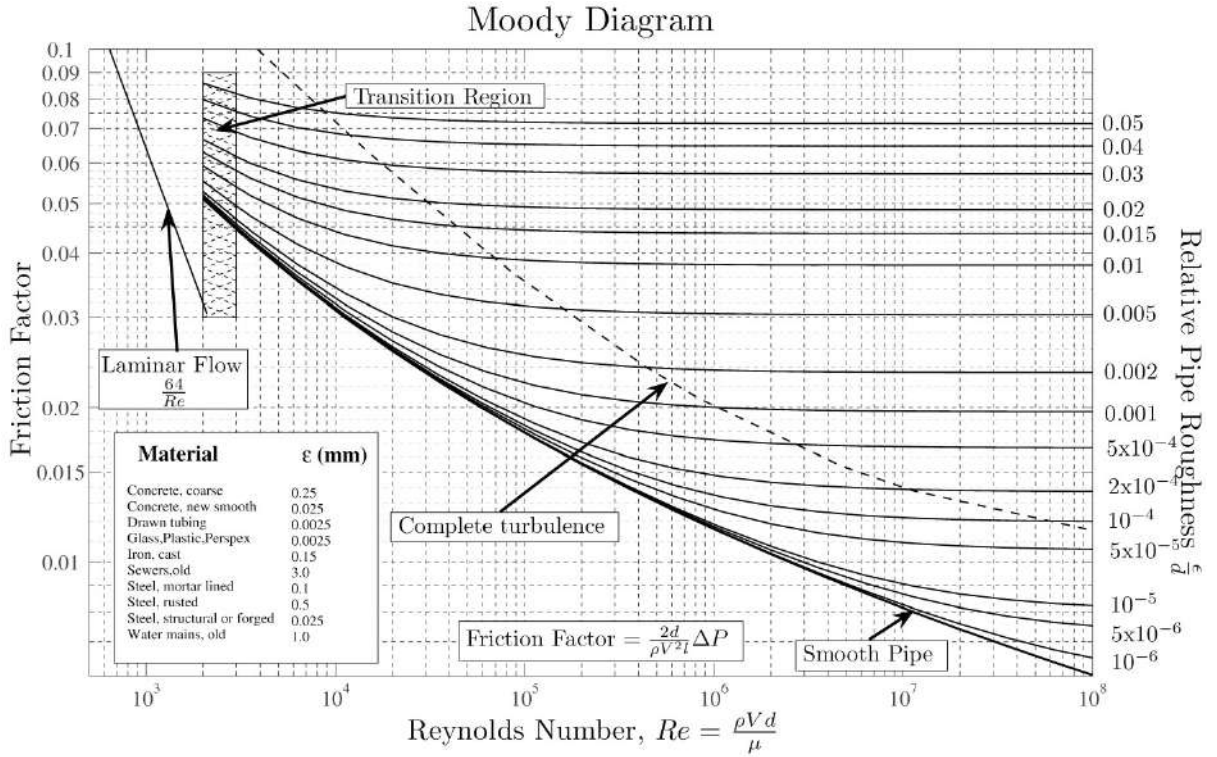


FIGURE 1.17