Ex11. Une firme fabrique deux produits A et B à l'aide des matières premières I, II et III. Le fonctionnement de l'usine est représenté par le tableau suivant :

	A	B
I	2	1
II	1	2
III	0	1

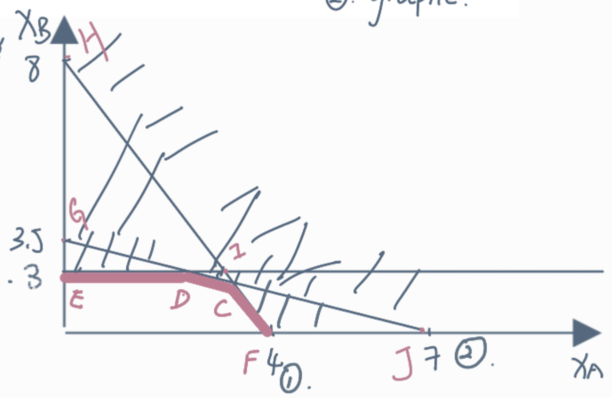
Cela signifie que pour produire 1 unité du produit A on utilise 2 unités de I et 1 unité de II et que pour produire 1 unité de B on utilise 1 unité de I, 2 unités de II et 1 unité de III. La direction de la firme dispose des matières premières I, II et III en quantités respectives 8, 7 et 3. Le profit dû à la fabrication d'une unité de produit A est égal à 4, de même le profit dû à la fabrication d'une unité de B est égal à 5. La tâche de la direction est de faire fonctionner cette usine de manière optimale, c'est-à-dire de rendre le profit maximum tout en respectant les contraintes de rareté sur les matières premières.

Q 11.1 Modéliser le problème comme un programme linéaire sous forme canonique, qu'on appellera (P).

① x_A : qualité de produit A fabriqué
x_B : B

$$\begin{cases} \text{Max } z = 4x_A + 5x_B \\ \text{s.c.} \begin{cases} 2x_A + x_B \leq 8 & \text{I.} \\ x_A + 2x_B \leq 7 & \text{II.} \\ x_B \leq 3. & \text{III.} \\ x_A, x_B \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

② graphe.



① ∩ ②. $\begin{cases} 2x_A + x_B = 8. \\ x_A + 2x_B = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ x_B = 2. \end{cases}$ C (3,2).

Q 11.3 Mettre le programme (P) sous forme standard. Nous appellerons ce programme (P').

On ajoute 3 variables d'écart e_1, e_2, e_3

$$\text{Max } z = 4x_A + 5x_B.$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x_A + x_B + e_1 = 8. & (\text{I}) \\ x_A + 2x_B + e_2 = 7 & (\text{II}) \\ x_B + e_3 = 3. & (\text{III}) \\ x_A, x_B, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Q 11.4 Mettre en correspondance les sommets du polygone convexe associé au programme linéaire (P) avec les solutions réalisables du programme linéaire (P').

Base		Point de la représentation.
$B = \{e_1, e_2, e_3\}$	$H_B = \{x_A, x_B\}$	O
$B = \{x_A, x_B, e_3\}$	$H_B = \{e_1, e_2\}$	C $\rightarrow$ ω $e_1 = 0$ ω $e_2 = 0$
$B = \{x_A, x_B, e_1\}$	$H_B = \{e_2, e_3\}$	D.
$B = \{x_B, e_1, e_2\}$	$H_B = \{x_A, e_3\}$	E.
$B = \{x_A, e_2, e_3\}$	$H_B = \{x_B, e_1\}$	F
$B = \{x_B, e_1, e_3\}$	$H_B = \{x_A, e_2\}$	G : non réalisable
$B = \{x_B, e_2, e_3\}$	$HB = \{x_A, e_1\}$	H : . . .
$B = \{x_A, x_B, e_2\}$	$HB = \{e_1, e_3\}$	I : . . .
$B = \{x_A, e_1, e_3\}$	$HB = \{x_B, e_2\}$	J : . . .

$e_1 = e_2 = 0$
$2x_A + x_B = 8$
$x_A + 2x_B = 7$
$x_B + e_3 = 0.$
$\Leftrightarrow$
$e_1 = e_2 = 0$
$x_A = 3.$
$x_B = 2.$
$e_3 = 1.$

sommets du polygone des solution réalisables

$\rightarrow$ $e_1 = 8 - 7/2 = 9/2$
$x_B = 7/2$
$e_3 = 3 - 7/2 = -1/2.$ $\leftarrow$ v. négative.

Rq : on ne peut pas mettre $H_B = \{e_3, x_B\}$ car le système n'a pas de solution, les droites III. et $x_B = 0$ sont par

Q 11.5 On prend l'origine comme solution de base de départ. Le programme linéaire associé s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Max } 4x_1 + 5x_2 \\ e_1 &= 8 - 2x_1 - x_2 \\ e_2 &= 7 - x_1 - 2x_2 \\ e_3 &= 3 - x_2 \\ x_1, x_2&, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{aligned}\right.$$

Conformément à la procédure de passage d'un sommet réalisable à un sommet réalisable adjacent, il faut atteindre un sommet adjacent à l'origine en lequel la fonction objectif est améliorée. Deux cheminements sont possibles : l'un sur l'axe des abscisses, l'autre sur l'axe des ordonnées. Si on effectuait le changement de base sur l'axe des abscisses, x_1 entrerait dans la base, passant d'une valeur nulle à $x_1 = 4$ et e_1 sortirait de la base, passant de $e_1 = 8$ à $e_1 = 0$. Si on effectuait le changement de base sur l'axe des ordonnées, x_2 entrerait dans la base, passant d'une valeur nulle à $x_2 = 3$ et e_3 sortirait de la base, passant de $e_3 = 3$ à $e_3 = 0$. Conformément au critère de Dantzig, on préfère faire entrer x_2 dans la base car $5 > 4$. D'où la nouvelle configuration suivante :

variables hors base : $e_3 = 0$, $x_1 = 0$
variables de base : $x_2 = 3$, $e_1 = 5$, $e_2 = 1$

Poursuivre le déroulement de l'algorithme du simplexe, en réécrivant à chaque itération le programme (P') comme l'expression des variables de base en fonction des variables hors base. Vous interpréterez également chaque itération sur le graphique de la question 2.

4

Base initiales : $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ $HB = \{X_A, X_B\}$ ⇒ pointe 0.

① $\max z = \boxed{4X_A + 5X_B}$ → HB

$$\left\{\begin{aligned} \text{s.c.} \quad e_1 &= 8 - 2X_A - X_B && 8/1 \\ e_2 &= 7 - X_A - 2X_B && 7/2 \\ e_3 &= 3 - X_B && \boxed{3/1}\ \text{min} \\ X_A, X_B&, e_i \geq 0 \end{aligned}\right.$$

solution associée : $(0, 0, 8, 7, 3)$

X_B va entrer dans la base. On peut augmenter jusqu'à $X_B = 3$ e_3 sort de la base

② $B = \{X_B, e_1, e_2\}$ $HB = \{X_A, e_3\}$

$\max z = 4X_A + 5(3 - e_3) = 15 + 4X_A - 5e_3$ positive.

variable de base

$$\left\{\begin{aligned} \text{s.c.} \quad e_1 &= 8 - 2X_A - (3 - e_3) = 5 - 2X_A + e_3 && 5 \\ e_2 &= 7 - X_A - 2(3 - e_3) = 1 - X_A + 2e_3 && 1 \\ X_B &= 3 - e_3 && 3 \\ X_A, X_B&, e_i \geq 0 \end{aligned}\right.$$

X_A. X_B e_1 e_2 e_3.
solution associée $(0, 3, 5, 1, 0)$

→ point E, En augmentant X_B on "bute" sur III → e_3

③ X_A entre la base. $\min \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 1$ e_2 sort de la base

$B = \{X_B, e_1, X_A\}$ $HB = \{e_2, e_3\}$

$\max z = 15 + 4(1 + 2e_3 - e_2) - 5e_3 = 19 + \boxed{3e_3} - 4e_2$

$$\left\{\begin{aligned} \text{s.c.} \quad X_A &= 1 + 2e_3 - e_2 && \infty \\ X_B &= 3 \boxed{-} e_3 && 3/1 \\ e_1 &= 5 - 2(1 + 2e_3 - e_2) - e_3 = 3 - 3e_3 + 2e_2 && 3/3 \\ X_A, X_B&, e_i \geq 0 \end{aligned}\right.$$

e_3 enter la base, e_1 sort de la base.

④ $B = \{x_B, e_3, x_A\}$ $\quad HB = \{e_2, e_1\}$

$\max z = 22 - e_1 - 2e_2$.

s.c. $\begin{cases} x_A = 1 + 2(1 - \frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2) - e_3 = 3 - \frac{2}{3} e_1 + \frac{1}{3} e_2. \\ x_B = 2 + \frac{1}{3} e_1 - \frac{2}{3} e_2. \\ e_3 = 1 - \frac{1}{3} e_1 + \frac{2}{3} e_2. \end{cases}$

solution optimale $(3, 2, 0, 0, 1)$

point C. $z = 22$.

Q 11.6 Résoudre à nouveau le problème (P'), cette fois-ci par la méthode des tableaux du simplexe.

①

	x_A	x_B	e_1	e_2	e_3	
e_1	2	1	1	0	0	8
e_2	1	2	0	1	0	7
e_3	0	1	0	0	1	3
	4	5	0	0	0	0

$e_1 + 2x_A + x_B = 8$

$e_2 + x_A + 2x_B = 7$

$e_3 + x_B = 3$

$\max z = 4x_A + 5x_B$

② x_B entre en base $\quad \mathrm{Min}(8/1, 7/2, 3/1) = 3/1 \quad e_3$ sort de la base

$B = \{x_B, e_1, e_2\}$ $\quad HB = \{x_A, e_3\}$

	x_A	x_B	e_1	e_2	e_3		
e_1	2	0	1	0	-1	5	$a - c$.
e_2	1	0	0	1	-2	1	$b - 2c$.
x_B	0	1	0	0	1	3	
	4	0	0	0	-5	-15	$d - 5c$.

③ x_A entre en base $\quad \mathrm{Min.}(5/2 \quad 1/1 \quad +\infty) = 1 \quad e_2$ sort de la base

$B = \{e_1, x_A, x_B\}$

	x_A	x_B	e_1	e_2	e_3		
e_1	0	0	1	-2	3	3	$a - 2b$
x_A	1	0	0	1	-2	1	
x_B	0	1	0	0	1	3	
	0	0	0	-4	3	-19.	$-4b$.

④. e_3 entre en base $\quad \mathrm{Min.}(3/3; \infty, 3/1) = 1 \quad e_1$ sort de la base.

	x_A	x_B	e_1	e_2	e_3		
e_3	0	0	1/3	-2/3	1	1	$a' = a/3$
x_A	1	0	2/3	-1/3	0	3	$b + 2a'$
x_B	0	1	-1/3	2/3	0	2	$b - a'$
	0	0	-1	-2.	0	-22.	$b - 3a'$

Il n'y a plus de coefficients strictement positif

la solution est optimale

$e_1 = e_2 = 0 \quad e_3 = 1 \quad x_A = 3 \quad x_B = 2$.

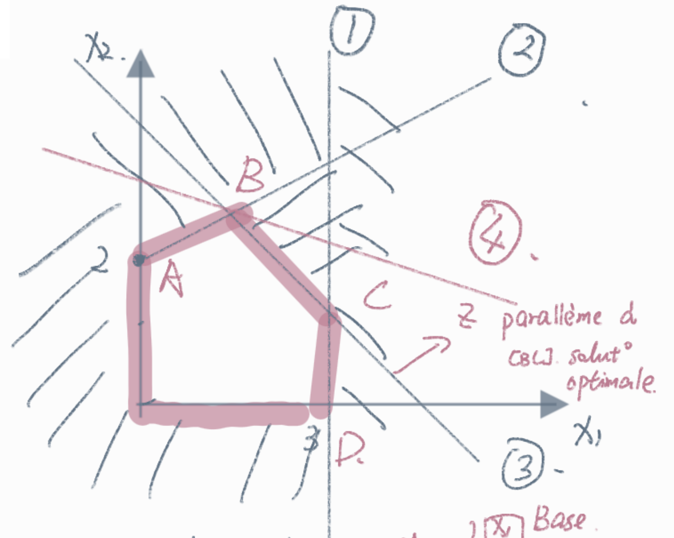
de valeur 22.

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Max } z = 6x_1 + 4x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 4 & (1) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 16 & (2) \\ x_1 \leq 3 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Q 13.1 Si on note $\boxed{x_3,\ x_4,\ x_5}$ les variables d'écart, déterminer le tableau du simplexe obtenu pour la base $\{x_1, x_2, x_5\}$ (sans faire d'itérations préalables !) et en déduire que cette base est optimale. Représenter les contraintes sur un graphique. La solution optimale est-elle unique ? Comment cela se traduit sur le tableau du simplexe correspondant ?

Q 13.2 On ajoute au PL la contrainte $x_1 + 4x_2 \leq 22$ et on prend comme objectif $z = x_1 + x_2$. Faire tourner l'algorithme du simplexe depuis la base $\{x_2, x_4, x_5, x_1\}$. Représenter les contraintes sur un graphique. Qu'observe-t-on ? Comment cela se traduit sur les tableaux du simplexe ?



Forme standard : $\begin{cases} \text{Max } z = 6x_1 + 4x_2. \\ \text{s.c} \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 16 \\ x_1 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0. \end{cases} \end{cases}$

Base : $\{x_1, x_2, x_5\}$ HB : $\{x_3, x_4\}$

Expressim des variables de base en f° des variables hors base. ✻ $\left\{ \boxed{x_1, x_2, x_5} \right.$ Base

$z = \boxed{\ldots}$ HB.

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 + x_4 = 20. \\ 6x_1 - x_3 + x_4 = 12. \\ x_1 + x_5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 - x_3/4 - x_4/4 \\ x_1 = 2 + x_3/6 - x_4/6 \\ x_5 = 1 - x_3/6 + x_4/6. \end{cases}$$

Solutim de base associée : $x_1 = 2$ $x_2 = 5$ $x_5 = 1$ $x_3 = x_4 = 0$

$$z = 6x_1 + 4x_2 = 12 + x_3 - x_4 + 20 - x_3 - x_4 = 32 - 2x_4.$$

pas de coeff strict positif. La solut° est optimale.

Tableau du simplexe correspond

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	$-1/6$	$1/6$	0	2
x_2	0	1	$1/4$	$1/4$	0	5
x_5	0	0	$1/6$	$-1/6$	1	1
	0	0	0	-2	0	-32.

✻ signe. $x_2 + x_3/4 + x_4/4 = 5.$

Si on a fait une itératim de plus en faisant x_3 en base : la valeur ne va pas changer. → sur le segement [BC].

(2)

Forme standard : $\begin{cases} \text{Max } z = 6x_1 + 4x_2. \\ \text{s.c} \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. & a. \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 16 & b. \\ x_1 + x_5 = 3 & c. \\ x_1 + 4x_2 + x_6 = 22 & d. \\ x_i \geq 0. \end{cases} \end{cases}$

Base : $\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ $\quad$ HB = $\{x_3, x_6\}$.

Expression des variables de base en fonction des v. hors base

$$\begin{cases} 14x_2 + x_3 + 3x_6 = 70. & a+3d. \\ 7x_1 - 2x_3 + x_6 = 14 & d-2a. \\ x_5 = 3x_1. & \\ x_4 = 16 - 3x_1 - 2x_2. & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 - x_3/14 - 3/14 \cdot x_6 \\ x_1 = 2 + 2/7 \cdot x_3 - 1/7 \cdot x_6. \\ x_5 = 3 - (2 + 2/7\, x_3 - 1/7\, x_6) = 1 - 2/7\, x_3 + 1/7\, x_6 \\ x_4 = 16 - 6 - 6/7\, x_3 + 3/7\, x_6 - 10 - x_3/7 + 3/7\, x_6 \\ \quad = -5/7\, x_3 + 6/7\, x_6 \end{cases}$$

$$z = 7 + 3/14\, x_3 - 5/14\, x_6$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	1/14	0	0	3/14	5
x_1	1	0	−2/7	0	0	1/7	2.
x_5	0	0	2/7	0	1	−1/7	1
x_4	0	0	5/7	1	0	−6/7	0
	0	0	3/14	0	0	−5/14	−7

Solut° de base associée.

$x_1 = 2$. $x_2 = 5$ $\quad x_3 = x_6 = 0$

$x_4 = 0$ $\quad x_5 = 1$.

une v. de base est nulle.

$x_3 = 0$ $\quad x_6 = 0$

Graphiquement pt (B) : intersect° 2 et 4

(B) est à l'intersect° de 3 droites

B est associé à plsrs base : $B_1 = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$ $\quad$ HB = $\{x_3, x_6\}$

$B_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ $\quad$ HB = $\{x_4, x_6\}$

$B_3 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ $\quad$ HB = $\{x_3, x_4\}$

L'algo n'est pas terminé. x_3 entre en base

$\text{Min}\{5/(1/14),\ 1/(2/7),\ 0/(5/7)\} = 0.$ $\quad x_4$ sorte

→ Nouvelle base : $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$.

Si on fait itérat°, on va trouver la m̂ solut°

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_2							5	
x_1							2	
x_5							1	
x_3							0	
	0	0	0	−3/10	0	−1/10	−7	$e - 3/10\, d$.

Solut° optimale

Ex 14.

On considère le programme linéaire $\mathcal{P}_k$ suivant :

$$\max z = x_1 + kx_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \\ -x_1 & +3x_2 & & = & -4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Q 14.1 Déterminer les bases réalisables associées au polyèdre des contraintes et les coordonnées des sommets associés.

Q 14.2 Discuter en fonction de k la ou les solutions optimales de $\mathcal{P}_k$

$B_1 = \{x_1, x_3\}$ $HB = \{x_2\}$. Solut° de base : $(4, 0, 1)$

$B_2 = \{x_1, x_2\}$ $HB = \{x_3\}$ $(13/4, -1/4, 0)$ } Non réalisable.

$B_3 = \{x_2, x_3\}$ $HB = \{x_1\}$ $(0, -4/3, -13/3)$

② Ecrivons P_k relativement à B_1

$$\begin{cases} \max z = 6 + (11+k)\, x_2 \\ \begin{cases} x_3 = -3 + x_1 + x_2 = 1 + 4x_2. \\ x_1 = 4 + 3x_2. \end{cases} \end{cases}$$

$(z = 4 + 3x_2 + kx_2 + 2 + 8x_2)$

	x_1	x_2	x_3	
x_1	1	-3	0	4
x_3	0	-4	1	1
	0	$11+k$	0	-6

$k < -11$ $11+k<0$ la solut° $(4,0,1)$ optimale

$k = -11$ une infinité de solut° opt $(4+3\lambda, \lambda, 1+4\lambda)$ $\lambda \geq 0$

$k > -11$. le pb est non borné

$(4+3\lambda, \lambda, 1+4\lambda)$ avec $\lambda \geq 0$. est réalisable de valeur $6 + (11+k)\lambda \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} +\infty$

Q 15.1 Donner une méthode permettant de prouver l'existence, et, si elle existe, de calculer une solution x *non négative*, c'est-à-dire satisfaisant $x \geq 0$, d'un système $Ax = b$ d'équations linéaires. On supposera que A est une matrice à p lignes et n colonnes avec $n > p$.

Q 15.2 Utiliser cette méthode pour trouver une solution *non négative* -si elle existe- aux systèmes ci-dessous. Expliciter *toutes* les solutions *non négatives* des deux systèmes.

$$\begin{cases} 3x_1 + 12x_2 + 12x_3 & = & 10 \\ 10x_1 + 8x_2 + 20x_3 & = & 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max } z = 0 \\ \text{s.c.} \begin{cases} Ax = b \\ x_i \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Pb: Demarrer le simplexe sans connaître base de départ

$$I = \begin{cases} A_1 x = b_1 \geq 0 \\ A_2 x = b_2 \geq 0 \\ \vdots \\ A_p x = b_p \geq 0 \end{cases}$$

$\sum a_i x_i = b_1$

(P) (II) $\min \sum_{i=1}^{p} e_i$

$$\text{S.C.} \begin{cases} A_1 x + \boxed{e_1} = b_1 \\ \vdots \\ A_p x + \boxed{e_p} = b_p \\ x_i \geq 0 \quad e_j \geq 0 \end{cases}$$

(x, e) solut° de II, x solut° de I $\Leftrightarrow e_1 \cdots e_p = 0$

I est une solut° ssi la valeur opt de (P) est 0 → Résoudre P

si opt > 0 I n'a pas solut°. Si on a une sol (x, e) de valeur 0, x solut° de I