Exercice 31 (PLNE et contraintes induites)

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire en nombres entiers suivant : $\max z = 3x_1 + 4x_2$ sous la contrainte $5x_1 + 8x_2 \leq 24$ avec $x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N}$.

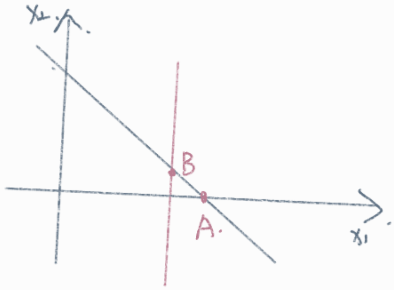
Q 31.1 Résoudre $\mathcal{P}$ par la méthode de séparation/évaluation vue en cours (on prendra soin de justifier les solutions des relaxations continues, soit en s'aidant d'une résolution graphique soit en explicitant un principe permettant d'obtenir facilement la solution fractionnaire optimale).

Q 31.2 Montrer que toute solution réalisable de $\mathcal{P}$ (et donc entière) vérifie les contraintes $x_1 + x_2 \leq 4$ et $2x_1 + 3x_2 \leq 9$. En déduire que le programme linéaire $\mathcal{P}'$ obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en ajoutant ces deux contraintes induites possède la même solution optimale que $\mathcal{P}$.

Q 31.3 Résoudre $\mathcal{P}'$ par la méthode de séparation/évaluation vue en cours, comparer la résolution à celle effectuée à la question 1 et commenter le résultat obtenu (pour résoudre une relaxation continue faire une résolution graphique).

(P). $\left\{ \max z = 3x_1 + 4x_2 \right.$
s.c. $5x_1 + 8x_2 \leq 24$
$x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \in \mathbb{N}$

①. (P') relaxation de P, comme P mais $x_1, x_2 \geq 0$ (tout sol° réalisable de (P) est de (P'))
On sait résoudre (P').

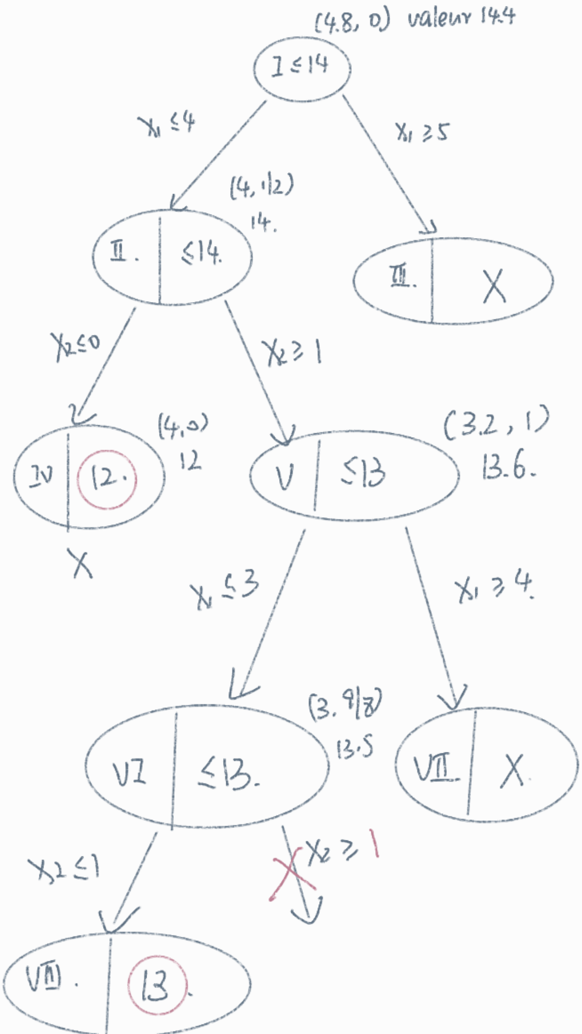


La solut° opt de P' est au pt A : $(\frac{24}{5}, 0)$ de valeur 14.4.

RQ. si sol° opt de (P') avec $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{N}$ alors opt de (P)

Ici, pas le cas. $x_1^* = 24/5 = 4.8$

Info : opt(P) $\leq$ 14.4 = OPT(P') OPT(P) $\in \mathbb{N}$ donc opt(P) $\leq$ 14.



III. $\left\{ \max z = 3x_1 + 4x_2 \right.$
s.c. $5x_1 + 8x_2 \leq 24$
$x_1 \geq 5$
$x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \in \mathbb{N}$

pas de s° réalisable.

II. $\left\{ \max z = 3x_1 + 4x_2 \right.$
s.c. $5x_1 + 8x_2 \leq 24$
$x_1 \leq 4$
$x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \in \mathbb{N}$

On sait résoudre (P_{II}') opt (P_{II}') = B $x_1^* = 4$ $x_2^* = 1/2$, valeur 14.
OPT (P_{II}) $\leq$ 14.

IV. (P_{IV}). $\left\{ \max z = 3x_1 + 4x_2 \right.$
s.c. $5x_1 + 8x_2 \leq 24$
$x_1 \leq 4$
$x_2 \leq 0$.
$x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \in \mathbb{N}$

P_{IV}': relaxat° du P_{IV} avec $x_1, x_2 \geq 0$. Donc P_{IV}' : $x_2 = 0$

donc $x_1 = 4$ $x_2 = 0$ est opt de valeur 12.

$x_1^* \in \mathbb{N}$ $x_2^* \in \mathbb{N}$ donc c'est une s° opt de P_{IV}.

V.) $\max z = 3x_1 + 4x_2$.

s.c. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$

P_V': relaxat° du P_V avec $x_1, x_2 \geq 0$. Solut° opt de P_V' $x_2^* = 1$ $x_1^* = \frac{16}{5} = 3.2$ de valeur 13.6 $\rightarrow$ opt $(P_V) \leq 13$

VI) $\max z = 3x_1 + 4x_2$.

s.c. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$

P_{VI}': relaxat° du P_{VI} avec $x_1, x_2 \geq 0$. $x_1^* = 3$ $x_2^* = 9/8$. opt de P_{V2}' de valeur $9 + 9/2 = 13.5$, opt $(P_{VI}) \leq 13$

VII) $\max z = 3x_1 + 4x_2$.

s.c. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 4 \\ x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$

$x_1^* = 4$ $x_2^* \geq 1$. donc $5x_1 + 8x_2 \geq 28$ pas de s° réalisable.

VIII. P_{VIII} $\max z = 3x_1 + 4x_2$.

S.C. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$

P_{VIII}' a comme une s° opt. $(3, 1)$

valeur : 13

$\rightarrow (3, 1)$ est opt de P_{VIII}.

2. cas où il n'est pas nécessaire de séparer / brancher :

- La solut° opt du pb relâché P_i' est réalisable de P_i (entière ici)
- La résolut° du relâché montre $OPT(P_i') \leq \lambda$ et on connaît déjà une solut° de (P) de valeur $\geq \lambda$

③ Si (x_1, x_2) réalisable de (P) alors $x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 + \frac{8}{5} x_2 \leq \frac{24}{5}$ (1) /5.

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ donc $x_1 + x_2 \leq x_1 + 8/5\, x_2 \leq 24/5 = 4.8$; $x_1 \in \mathbb{N}$ $x_2 \in \mathbb{N}$ donc $x_1 + x_2 \leq 4$.

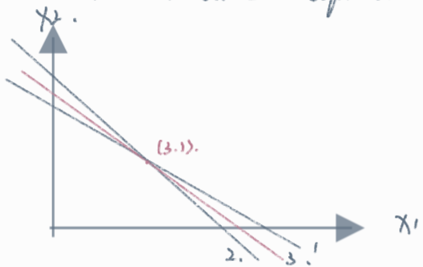
- De la m̂ manière : $2x_1 + \frac{16}{5} x_2 \leq \frac{48}{5} = 9.6$ (1) $\cdot \frac{2}{5}$

$x_1, x_2 \geq 0$ donc $2x_1 + 3x_2 \leq 9.6$; $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ donc $2x_1 + 3x_2 \leq 9$.

(P) est donc équivalent à Q.

$\max z = 3x_1 + 4x_2$.

S.C. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$



Q' relaxat° de Q avec $x_1, x_2 \geq 0$

OPT (Q') : (3, 1) entier. donc opt de (Q) donc de (P)

Exercice 32 (PL en variables mixtes)

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire suivant en variables mixtes (une variable est entière, la seconde réelle et la troisième booléenne).

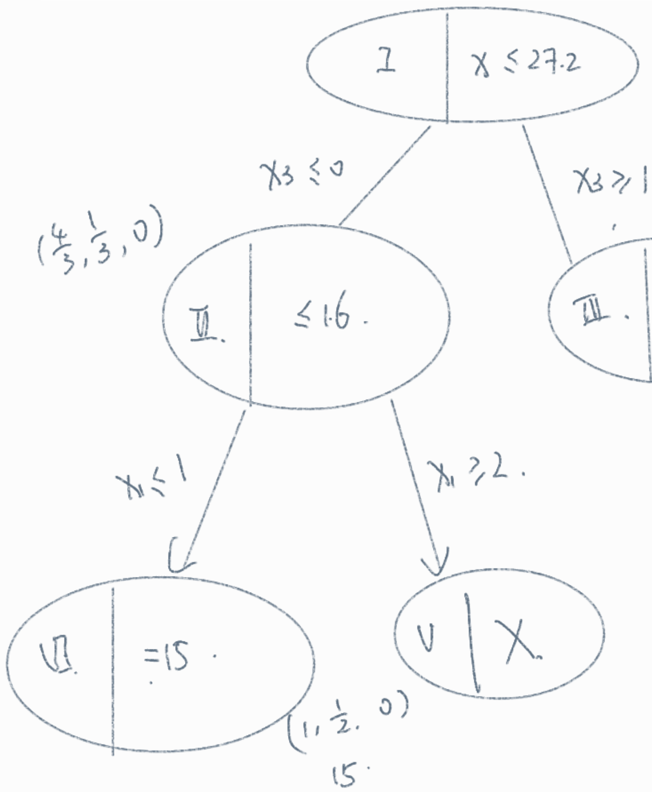
$$\max z = 9x_1 + 12x_2 + 2x_3$$

$$s.c. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 2 \end{cases}$$

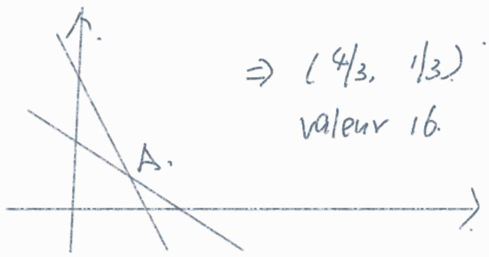
$$x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \geq 0, x_3 \in \{0, 1\}$$

Q 32.1 Sachant que la relaxation continue de $\mathcal{P}$ a pour solution optimale le vecteur $x = (0, \frac{11}{5}, \frac{2}{5})$, développer une procédure de séparation et évaluation pour résoudre ce problème.

$(0, \frac{11}{5}, \frac{2}{5})$ $\quad 0 + \frac{11\times 12}{5} + \frac{2\times 2}{5} = 27.2$.



II. P_{II}. $\begin{cases} \max z = 9x_1 + 12x_2 + 2x_3 \\ s.c. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$



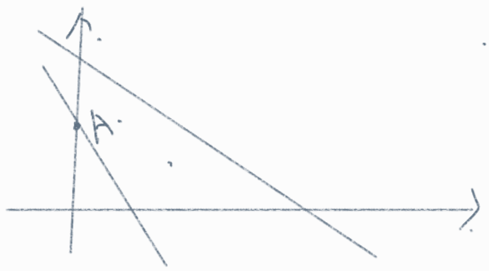
$\Rightarrow (4/3, \ 1/3)$ valeur 16.

P_{II}' : relaxat° de P_{II} avec $x_1 \geq 0$. opt(P_{II}') : pt(A)

VI. $\begin{cases} \max z = 9x_1 + 12x_2 \\ s.c. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow (1, 1/2, 0)$ valeur 15.

III P_{III}. $\begin{cases} \max z = 9x_1 + 12x_2 + 2 \\ s.c. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$



OPT(P_{III}') $(0, 1, 1)$ valeur 14.

$x_1^* \in \mathbb{N}$ donc $(0, 1)$ opt.

V. $\begin{cases} \max z = 9x_1 + 12x_2 \\ s.c. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \in \mathbb{N} \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow$ pas solut° opt

Solut° opt de P' est $(1, 1/2, 0)$ de valeur 15.