Méthodes et outils de l'IA et de la RO (LU3IN025)

Cours 3 : Programmation Linéaire

Nawal Benabbou

Licence Informatique - Sorbonne Université

2021-2022

Un autre outil de résolution : la programmation linéaire

Dans le cours précédent

Nous avons vu que la théorie des graphes pouvait être utilisée pour déterminer des mariages efficaces/équitables.

Dans ce cours

Nous allons voir comment utiliser la programmation linéaire pour résoudre ces problèmes. Utiliser la programmation linéaire permettra d'ajouter d'autres types de contraintes au problème, sans avoir à changer la méthode de résolution.

Programmation linéaire

La programmation linéaire, aussi appelée optimisation linéaire, est la discipline qui étudie des problèmes d'optimisation dans lesquels la fonction à optimiser ainsi que les contraintes sont décrites par des fonctions linéaires en les variables du problème.

Un autre outil de résolution : la programmation linéaire

Un petit exemple introductif

Un étudiant à 2 examens à passer. Pour obtenir le diplôme, il doit avoir au moins $8/20$ à chaque examen, et une moyenne supérieure ou égale à $10/20$. Selon son programme de révision, il obtient les notes suivantes :

- $5/20$ au premier examen sans révision, puis $+2$ points par heure de révision, avec un maximum de 5h de révision.
- $6/20$ au second examen sans révision, puis $+1$ points par heure de révision, avec un maximum de 8h de révision.

Objectif : minimiser le temps de révision.

Modélisation du problème sous la forme d'un programme linéaire

Variables : x_i le nombre d'heures à réviser le $i^{\text{ème}}$ examen, avec $i \in \{1, 2\}$.
Fonction objectif :
Contraintes :

Un autre outil de résolution : la programmation linéaire

Un petit exemple introductif

Un étudiant à 2 examens à passer. Pour obtenir le diplôme, il doit avoir au moins 8/20 à chaque examen, et une moyenne supérieure ou égale à 10/20. Selon son programme de révision, il obtient les notes suivantes :

- 5/20 au premier examen sans révision, puis $+2$ points par heure de révision, avec un maximum de 5h de révision.
- 6/20 au second examen sans révision, puis $+1$ points par heure de révision, avec un maximum de 8h de révision.

Objectif : minimiser le temps de révision.

Modélisation du problème sous la forme d'un programme linéaire

Variables : x_i le nombre d'heures à réviser le $i^{\text{ème}}$ examen, avec $i \in \{1, 2\}$.
Fonction objectif : $\min \quad x_1 + x_2$
Contraintes :

Un autre outil de résolution : la programmation linéaire

Un petit exemple introductif

Un étudiant à 2 examens à passer. Pour obtenir le diplôme, il doit avoir au moins 8/20 à chaque examen, et une moyenne supérieure ou égale à 10/20. Selon son programme de révision, il obtient les notes suivantes :

- 5/20 au premier examen sans révision, puis $+2$ points par heure de révision, avec un maximum de 5h de révision.
- 6/20 au second examen sans révision, puis $+1$ points par heure de révision, avec un maximum de 8h de révision.

Objectif : minimiser le temps de révision.

Modélisation du problème sous la forme d'un programme linéaire

Variables : x_i le nombre d'heures à réviser le $i^{\text{ème}}$ examen, avec $i \in \{1, 2\}$.
Fonction objectif : $\min \quad x_1 + x_2$
Contraintes :

$$5 + 2x_1 \geq 8 \qquad \text{(au moins 8/20 au 1er examen)}$$

Un autre outil de résolution : la programmation linéaire

Un petit exemple introductif

Un étudiant à 2 examens à passer. Pour obtenir le diplôme, il doit avoir au moins 8/20 à chaque examen, et une moyenne supérieure ou égale à 10/20. Selon son programme de révision, il obtient les notes suivantes :

- 5/20 au premier examen sans révision, puis $+2$ points par heure de révision, avec un maximum de 5h de révision.
- 6/20 au second examen sans révision, puis $+1$ points par heure de révision, avec un maximum de 8h de révision.

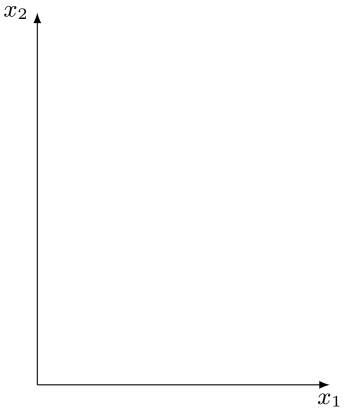
Objectif : minimiser le temps de révision.

Modélisation du problème sous la forme d'un programme linéaire

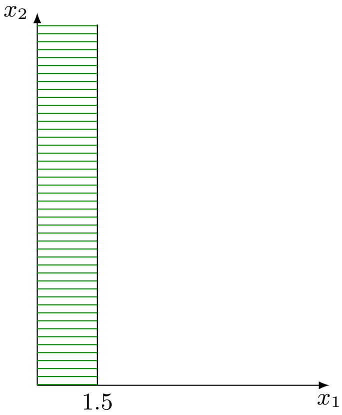
Variables : x_i le nombre d'heures à réviser le $i^{\text{ème}}$ examen, avec $i \in \{1, 2\}$.
Fonction objectif : $\min \quad x_1 + x_2$
Contraintes :

$$5 + 2x_1 \geq 8 \qquad \text{(au moins 8/20 au 1er examen)}$$
$$6 + x_2 \geq 8 \qquad \text{(au moins 8/20 au 2ème examen)}$$
$$(5 + 2x_1 + 6 + x_2)/2 \geq 10 \qquad \text{(au moins 10/20 de moyenne)}$$
$$0 \leq x_1 \leq 5, \;\; 0 \leq x_2 \leq 8 \qquad \text{(le nombre d'heures autorisé)}$$

Résolution graphique (cas avec seulement deux variables)



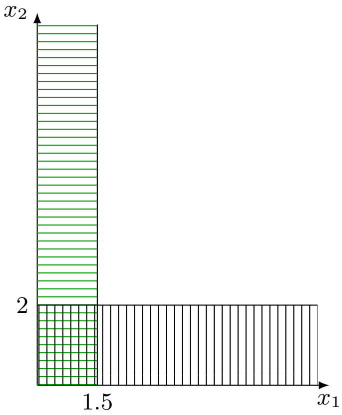
Résolution graphique (cas avec seulement deux variables)



Contraintes :

$$5 + 2x_1 \geq 8$$

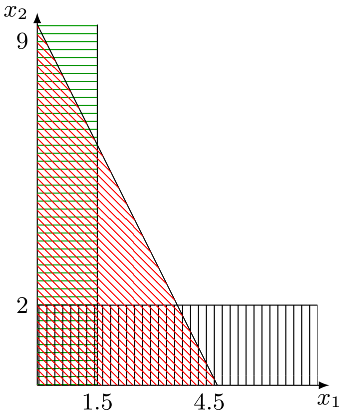
Résolution graphique (cas avec seulement deux variables)



Contraintes :

$$5 + 2x_1 \geq 8$$
$$6 + x_2 \geq 8$$

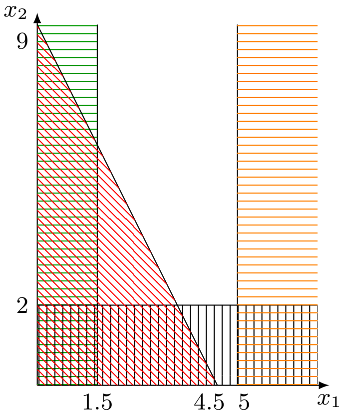
Résolution graphique (cas avec seulement deux variables)



Contraintes :

$$\begin{aligned} 5 + 2x_1 &\geq 8 \\ 6 + x_2 &\geq 8 \\ (5 + 2x_1 + 6 + x_2)/2 &\geq 10 \end{aligned}$$

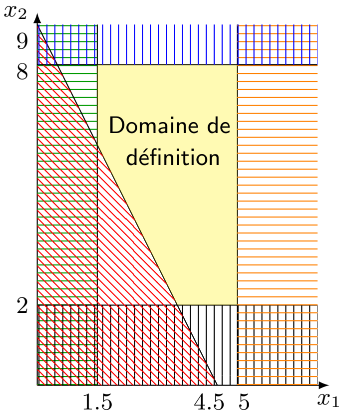
Résolution graphique (cas avec seulement deux variables)



Contraintes :

$$
\begin{aligned}
5 + 2x_1 &\geq 8 \\
6 + x_2 &\geq 8 \\
(5 + 2x_1 + 6 + x_2)/2 &\geq 10 \\
0 \leq x_1 &\leq 5
\end{aligned}
$$

Résolution graphique (cas avec seulement deux variables)



Contraintes :

$$5 + 2x_1 \geq 8$$

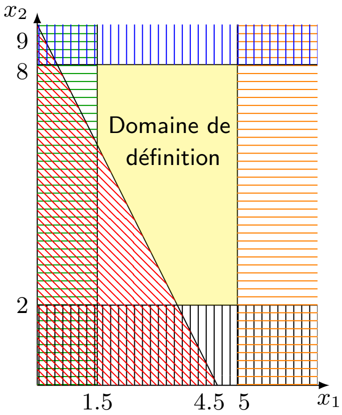
$$6 + x_2 \geq 8$$

$$(5 + 2x_1 + 6 + x_2)/2 \geq 10$$

$$0 \leq x_1 \leq 5$$

$$0 \leq x_2 \leq 8$$

Résolution graphique (cas avec seulement deux variables)



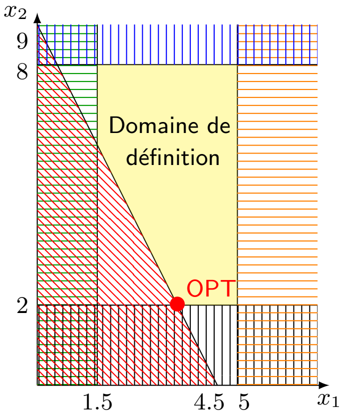
Contraintes :

$$5 + 2x_1 \geq 8$$
$$6 + x_2 \geq 8$$
$$(5 + 2x_1 + 6 + x_2)/2 \geq 10$$
$$0 \leq x_1 \leq 5$$
$$0 \leq x_2 \leq 8$$

Théorème

Si le programme linéaire admet une solution optimale, alors un des sommets du domaine de définition est optimal.

Résolution graphique (cas avec seulement deux variables)



Contraintes :

$$5 + 2x_1 \geq 8$$
$$6 + x_2 \geq 8$$
$$(5 + 2x_1 + 6 + x_2)/2 \geq 10$$
$$0 \leq x_1 \leq 5$$
$$0 \leq x_2 \leq 8$$

Théorème

Si le programme linéaire admet une solution optimale, alors un des sommets du domaine de définition est optimal.

Détermination d'une solution optimale pour un programme linéaire

On peut calculer la valeur de la fonction objectif de tous les sommets du domaine, et on retourne le sommet qui a la meilleure valeur.

$\rightarrow$ Ici, le sommet $(3.5, 2)$ à l'intersection des droites $(5 + 2x_1 + 6 + x_2)/2 = 10$ et $6 + x_2 = 8$ est une solution optimale.

Modélisation pour les mariages efficaces et équitables

Programme linéaire : formulation générale

Exprimer le problème sous la forme :

$$\max \text{ (ou } \min) \quad f(x)$$
$$\text{sous contraintes : } \quad x \in D$$

où $x = (x_1, \ldots x_m)$ sont des variables réelles, D est l'ensemble de définition caractérisé par des contraintes linéaires et $f(x)$ est la fonction objectif (linéaire).

Modélisation de la recherche du mariage maximisant l'utilité totale (efficacité)

Variables : Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la variable x_{ij} telle que $x_{ij} = 1$ si l'homme h_i est marié avec la femme f_j et $x_{ij} = 0$ sinon.

Fonction objectif :

Contraintes :

Modélisation pour les mariages efficaces et équitables

Programme linéaire : formulation générale

Exprimer le problème sous la forme :

$$\max \text{ (ou } \min) \quad f(x)$$
$$\text{sous contraintes : } \quad x \in D$$

où $x = (x_1, \ldots x_m)$ sont des variables réelles, D est l'ensemble de définition caractérisé par des contraintes linéaires et $f(x)$ est la fonction objectif (linéaire).

Modélisation de la recherche du mariage maximisant l'utilité totale (efficacité)

Variables : Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la variable x_{ij} telle que $x_{ij} = 1$ si l'homme h_i est marié avec la femme f_j et $x_{ij} = 0$ sinon.

Fonction objectif : $\max \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \; x_{ij}(u_{h_i}(f_j) + u_{f_j}(h_i))$

Contraintes :

Modélisation pour les mariages efficaces et équitables

Programme linéaire : formulation générale

Exprimer le problème sous la forme :

$$\max \text{ (ou } \min) \quad f(x)$$
$$\text{sous contraintes : } \quad x \in D$$

où $x = (x_1, \ldots x_m)$ sont des variables réelles, D est l'ensemble de définition caractérisé par des contraintes linéaires et $f(x)$ est la fonction objectif (linéaire).

Modélisation de la recherche du mariage maximisant l'utilité totale (efficacité)

Variables : Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la variable x_{ij} telle que $x_{ij} = 1$ si l'homme h_i est marié avec la femme f_j et $x_{ij} = 0$ sinon.

Fonction objectif : $\max \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \; x_{ij}(u_{h_i}(f_j) + u_{f_j}(h_i))$

Contraintes :

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (chaque homme est marié à une seule femme)

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ (chaque femme est mariée à un seul homme)

$x_{ij} \in \{0, 1\}, \; \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Remarque : tout est linéaire, sauf les contraintes "$x_{ij} \in \{0, 1\}$" (contraintes d'intégrité). Ce programme est un **programme linéaire en nombres entiers**.

Retour sur l'exemple

$u_h(f) + u_f(h)$:

	A	B	C
X	4	0	2
Y	1	4	0
Z	2	3	2

Programme linéaire en nombre entiers correspondant :

Retour sur l'exemple

$u_h(f) + u_f(h)$:

	A	B	C
X	4	0	2
Y	1	4	0
Z	2	3	2

Programme linéaire en nombre entiers correspondant :

$$\max \; 4x_{XA} + 2x_{XC} + x_{YA} + 4x_{YB} + 2x_{ZA} + 3x_{ZB} + 2x_{ZC}$$

Retour sur l'exemple

$u_h(f) + u_f(h)$:

	A	B	C
X	4	0	2
Y	1	4	0
Z	2	3	2

Programme linéaire en nombre entiers correspondant :

$$\begin{aligned}
\max \quad & 4x_{XA} + 2x_{XC} + x_{YA} + 4x_{YB} + 2x_{ZA} + 3x_{ZB} + 2x_{ZC} \\
\text{s.c.} \quad & x_{XA} + x_{XB} + x_{XC} = 1 \\
& x_{YA} + x_{YB} + x_{YC} = 1 \\
& x_{ZA} + x_{ZB} + x_{ZC} = 1 \\
& x_{XA} + x_{YA} + x_{ZA} = 1 \\
& x_{XB} + x_{YB} + x_{ZB} = 1 \\
& x_{XC} + x_{YC} + x_{ZC} = 1 \\
& x_{XA}, x_{XB}, x_{XC}, x_{YA}, x_{YB}, x_{YC}, x_{ZA}, x_{ZB}, x_{ZC} \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Modélisation pour les mariages efficaces et équitables

Recherche du mariage maximisant l'utilité la plus faible (équité)

On peut résoudre le problème intermédiaire par programmation linéaire. Soit E l'ensemble des paires (i, j) telles que h_i est dans les k premiers choix de f_j et f_j est dans les k premiers choix de h_i.

Variables :

Fonction objectif :

Contraintes :

Modélisation pour les mariages efficaces et équitables

Recherche du mariage maximisant l'utilité la plus faible (équité)

On peut résoudre le problème intermédiaire par programmation linéaire. Soit E l'ensemble des paires (i, j) telles que h_i est dans les k premiers choix de f_j et f_j est dans les k premiers choix de h_i.

Variables : Pour tout $(i, j) \in E$, on définit la variable x_{ij} telle que $x_{ij} = 1$ si l'homme h_i est marié avec la femme f_j et $x_{ij} = 0$ sinon.

Fonction objectif :

Contraintes :

Modélisation pour les mariages efficaces et équitables

Recherche du mariage maximisant l'utilité la plus faible (équité)

On peut résoudre le problème intermédiaire par programmation linéaire. Soit E l'ensemble des paires (i,j) telles que h_i est dans les k premiers choix de f_j et f_j est dans les k premiers choix de h_i.

Variables : Pour tout $(i,j) \in E$, on définit la variable x_{ij} telle que $x_{ij} = 1$ si l'homme h_i est marié avec la femme f_j et $x_{ij} = 0$ sinon.

Fonction objectif : $\max \ \sum_{(i,j)\in E} \ x_{ij}$

Contraintes :

Modélisation pour les mariages efficaces et équitables

Recherche du mariage maximisant l'utilité la plus faible (équité)

On peut résoudre le problème intermédiaire par programmation linéaire. Soit E l'ensemble des paires (i,j) telles que h_i est dans les k premiers choix de f_j et f_j est dans les k premiers choix de h_i.

Variables : Pour tout $(i,j) \in E$, on définit la variable x_{ij} telle que $x_{ij} = 1$ si l'homme h_i est marié avec la femme f_j et $x_{ij} = 0$ sinon.

Fonction objectif : $\max \ \sum_{(i,j)\in E} \ x_{ij}$

Contraintes :

$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} \leq 1, \, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ (un homme est avec au plus une femme)

$\sum_{(i,j)\in E}^{n} x_{ij} \leq 1, \, \forall j \in \{1,\ldots,n\}$ (une femme est avec au plus un homme)

$x_{ij} \in \{0,1\}, \, \forall (i,j) \in E$

Modélisation pour les mariages efficaces et équitables

Recherche du mariage maximisant l'utilité la plus faible (équité)

On peut résoudre le problème intermédiaire par programmation linéaire. Soit E l'ensemble des paires (i,j) telles que h_i est dans les k premiers choix de f_j et f_j est dans les k premiers choix de h_i.

Variables : Pour tout $(i,j) \in E$, on définit la variable x_{ij} telle que $x_{ij} = 1$ si l'homme h_i est marié avec la femme f_j et $x_{ij} = 0$ sinon.

Fonction objectif : $\max \ \sum_{(i,j)\in E} \ x_{ij}$

Contraintes :

$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij} \leq 1, \forall i \in \{1,\dots,n\}$ (un homme est avec au plus une femme)

$\sum_{(i,j)\in E}^{n} x_{ij} \leq 1, \forall j \in \{1,\dots,n\}$ (une femme est avec au plus un homme)

$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall (i,j) \in E$

Analyse du résultat :

Si la valeur de la fonction objectif à l'optimum est égale à n, alors il existe un mariage parfait tel que chaque personne est mariée avec quelqu'un dans ses k premiers choix. Si en revanche la valeur optimale est strictement inférieure à n, alors il n'existe pas de tel mariage parfait.

Retour sur l'exemple

Listes des hommes :

	1	2	3
X	A	C	B
Y	B	A	C
Z	B	A	C

Listes des femmes :

	1	2	3
A	X	Z	Y
B	Y	Z	X
C	Z	X	Y

Pour $k = 2$, on a $E =$

Retour sur l'exemple

Listes des hommes :

	1	2	3
X	A	C	B
Y	B	A	C
Z	B	A	C

Listes des femmes :

	1	2	3
A	X	Z	Y
B	Y	Z	X
C	Z	X	Y

Pour $k = 2$, on a $E = \{(X, A), (X, C), (Y, B), (Z, A), (Z, B)\}$, ce qui donne le programme linéaire en nombres entiers suivant :

Retour sur l'exemple

Listes des hommes :

	1	2	3
X	A	C	B
Y	B	A	C
Z	B	A	C

Listes des femmes :

	1	2	3
A	X	Z	Y
B	Y	Z	X
C	Z	X	Y

Pour $k = 2$, on a $E =\{(X, A), (X, C), (Y, B), (Z, A), (Z, B)\}$, ce qui donne le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_{XA} + x_{XC} + x_{YB} + x_{ZA} + x_{ZB} \\
\text{s.c.} \quad & x_{XA} + x_{XC} \leq 1 \\
& x_{YB} \leq 1 \\
& x_{ZA} + x_{ZB} \leq 1 \\
& x_{XA} + x_{ZA} \leq 1 \\
& x_{YB} + x_{ZB} \leq 1 \\
& x_{XC} \leq 1 \\
& x_{XA}, x_{XC}, x_{YB}, x_{ZA}, x_{ZB} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Remarques

Et pour le problème des colocataires ?

Pas de difficulté supplémentaire, on définit une variable x_{ij} pour tous les individus $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ tels que $i < j$ (pour éviter les redondances).

Résolution d'un programme linéaire

Pour les programmes linéaires avec deux variables, on peut utiliser la méthode de résolution graphique. Pour les cas avec au moins trois variables, il existe des méthodes de résolution très efficaces (comme le "simplexe"), et on peut utiliser des solveurs existants comme par exemple Gurobi, GLPK ou encore CPLEX (cf. TME).

Résolution d'un programme linéaire en nombres entiers

Quand certaines variables sont entières, la méthode graphique ne fonctionne pas toujours ; elle fonctionne uniquement si le meilleur sommet est entier. De manière générale, le problème est beaucoup plus compliqué, mais on peut utiliser des solveurs pour le résoudre.

$\rightarrow$ Ces méthodes seront vues en détail dans le master ANDROIDE.