Chapitre 4

Oscillateurs

Objectifs d'apprentissage

- Développer une énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre et déterminer l'équation dynamique linéarisée
- Modéliser la dynamique d'un système au voisinage d'une position d'équilibre
- Reconnaître l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti et déterminer sa période d'oscillation
- Résoudre une équation différentielle du 2^{nd} ordre linéaire à coefficients constants
- Donner la solution générale en fonction des conditions initiales
- Identifier les paramètres de l'oscillateur à partir de la donnée du déplacement au cours du temps
- Identifier les différents régimes d'oscillation en lien avec le facteur de qualité, tracer la solution
- Définir et utiliser le décrément logarithmique
- Interpréter l'évolution d'un oscillateur en terme énergétique (paysage énergétique)
- Décrire le système équivalent à un assemblage de ressorts en parallèle / série

4.1 Introduction

Un des mouvements le plus fréquent dans la nature est celui associé à des oscillations. Il correspond à la situation où un corps (que nous considérons par la suite comme un point matériel) est soumis à une force dite de rappel dont l'intensité est proportionnelle à l'élongation par rapport à une distance de référence et dont le sens est opposé à l'élongation du corps par rapport à une position d'équilibre. Cette force appelée loi de Hook est remarquablement suivie pour décrire par exemple l'élongation d'un ressort. Ce type de mouvement se retrouve dans de nombreuses situations physiques à des échelles différentes : par exemple, les mouvements de faible amplitude d'un atome au sein du cristal peuvent être décrits en utilisant une résultante des forces (exercées par l'ensemble des autres atomes) dont l'intensité est proportionnelle à la distance par rapport a la position d'équilibre de l'atome. À une échelle macroscopique, un amortisseur de voiture est un dispositif permettant aux passagers d'un véhicule de moins ressentir les aspérités de la route et son fonctionnement de base est bien décrit par l'étude que nous allons entreprendre. Dans un premier temps, nous allons ajouter à la simple force de rappel, une force de frottement fluide qui représente la force exercée par l'environnement sur le corps (par exemple, un liquide ou un gaz). Cette force supplémentaire a pour conséquence d'empêcher le corps de poursuivre indéfiniment le mouvement de vibration qui résulte de la seule force de rappel et un retour à la position d'équilibre est alors inéluctable. Le temps typique associé à un retour à l'équilibre dépend à la fois de l'intensité du frottement mais aussi des caractéristiques physiques de l'oscillateur.

Le modèle du système mécanique élémentaire considère le mouvement d'une masse par rapport à une partie fixe. On parle de système à 1 degré de liberté (1 ddl) quand la masse unique a un mouvement suivant une seule direction (translation ou rotation autour d'un axe fixe). Si une ou plusieurs masses ont des mouvements de translation et de rotation dans plusieurs directions, il s'agit d'un système à plusieurs degrés de liberté. Malgré sa simplicité, le système à 1 ddl peut représenter le comportement dynamique de systèmes très variés dans le domaine des basses fréquences. La modélisation considère une masse équivalente en mouvement qui possède des liaisons avec les parties fixes caractérisées par une raideur équivalente.

4.2 L'oscillateur harmonique : un modèle physique générique

D'un point de vue physique, l'intérêt d'une étude approfondie de l'oscillateur harmonique provient du fait qu'il permet de décrire la dynamique de la plupart des systèmes légèrement perturbé autour d'une position d'équilibre stable. À titre d'exemple, considérons une masse ponctuelle astreinte à un mouvement unidimensionnel le long de l'axe (Ox), soumise à des forces *quelconques* mais possédant une position d'équilibre stable en x_0. Nous considérerons que les forces sont conservatives. Comme vu au chapitre précédent, la position d'équilibre stable x_0 doit correspondre à un minimum de l'énergie potentielle, c'est-à-dire :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0 \tag{4.1}$$

Nous nous intéressons à un mouvement de petite amplitude autour de la position d'équilibre décrit par l'équation horaire $x(t) = x_0 + \epsilon(t)$ (ϵ très petit par rapport aux longueurs caractéristiques du problème). On peut alors exprimer l'énergie potentielle en $x(t)$ en faisant un développement limité au second ordre autour de x_0 :

$$E_p(x(t)) = E_p(x_0) + \frac{dE_p}{dx}(x_0)\ (x(t) - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)\ (x(t) - x_0)^2 \tag{4.2}$$

Soit, en notant $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) = k > 0$,

$$E_p(x(t)) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x(t) - x_0)^2 \tag{4.3}$$

La masse ponctuelle est donc soumise à la force :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{u}_x = -k(x(t) - x_0)\vec{u}_x \tag{4.4}$$

En appliquant la deuxième loi de Newton projetée sur l'axe Ox on trouve l'équation du mouvement suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) \tag{4.5}$$

En effectuant le changement de variable suivant $X(t) = x(t) - x_0$, c'est-à-dire que nous nous intéressons qu'aux petits mouvements autour de la position d'équilibre x_0, et en notant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, l'équation du mouvement devient :

Équation de l'oscillateur harmonique non amorti en régime libre

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \tag{4.6}$$

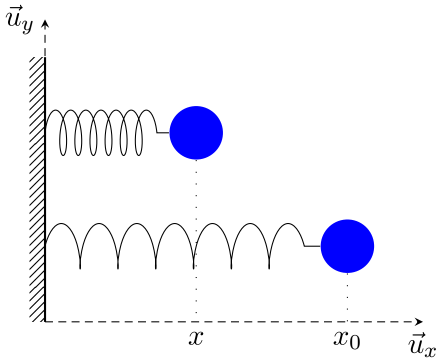
Hormis l'hypothèse de l'existence d'une position d'équilibre pour des forces conservatives, l'étude du mouvement conduit à chaque fois à la même équation différentielle. Il y a donc une grande universalité de ce phénomène.

Pour des perturbations de plus grande amplitude autour de la position d'équilibre, il est nécessaire d'aller au delà du développement limité au second ordre de l'énergie potentielle. On obtient alors l'équation du mouvement d'un oscillateur *anharmonique* qui tend vers celui de l'oscillateur harmonique quand l'amplitude de vibration tend vers zéro.

4.3 Oscillateur non amorti en régime libre

Dans cette section, nous nous intéressons à détailler la mise en équation et la résolution de l'oscillateur horizontal et l'oscillateur vertical. Dans les deux cas, nous ne prendrons pas en compte le frottement sur le support ou dans l'air (l'oscillateur est dit « non amorti » ou « conservatif ») et qu'aucune force excitatrice extérieure n'est considérée (l'oscillateur est dit « en régime libre » ou « homogène »).

4.3.1 Oscillateur horizontal



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé Galiléen
- Bilan des efforts extérieurs appliqués au système :
  - la force de rappel du ressort $\vec{F}_{res} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$
  - le poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$

En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Ox, il vient :

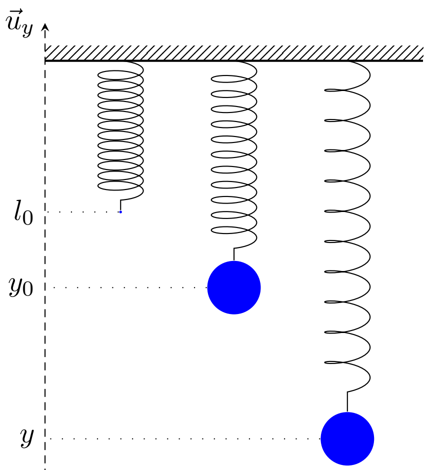
$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) \quad \text{ou encore} \quad m\ddot{x} + k(x - l_0) = 0 \tag{4.7}$$

En étudiant les mouvements autour de la position d'équilibre du système, $X = x - x_0$ et ici $x_0 = l_0$, on retrouve bien l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \tag{4.8}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la pulsation propre du système.

4.3.2 Oscillateur vertical



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé Galiléen
- Bilan des efforts extérieurs appliqués au système :
  - la force de rappel du ressort $\vec{F}_{res} = -k(y - l_0)\vec{u}_y$
  - le poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$

En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Oy, il vient :

$$m\ddot{y} = -k(y - l_0) - mg \quad \text{ou encore} \quad m\ddot{y} - k(y - l_0) - mg = 0 \tag{4.9}$$

La position d'équilibre du système est trouvée pour

$$\frac{dE_p}{d_y}(y_0) = 0 = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}k(y-l_0)^2 + mgy\right)_{y=y_0} = k(y_0 - l_0) + mg \Rightarrow y_0 = l_0 - \frac{mg}{k} \tag{4.10}$$

En étudiant les petits mouvements autour de la position d'équilibre du système, pour $Y = y - y_0$, il vient, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{Y} + \omega_0^2 Y = 0 \tag{4.11}$$

4.3.3 Solution de l'équation du mouvement

Au cours du premier semestre, vous avez appris que la solution de l'équation différentielle du mouvement est, pour $\omega_0^2 > 0$, une fonction périodique de la forme :

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \text{ou} \quad X(t) = C\sin(\omega t + \phi) \tag{4.12}$$

où A, B et C sont des amplitudes et ϕ [1] la phase à l'origine qui dépendent de l'état du système à l'instant initial. ω est la pulsation ou la fréquence angulaire. En partant d'une des formes possibles de $X(t)$, la vitesse est :

$$\dot{X}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \tag{4.13}$$

et l'accélération :

$$\ddot{X}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t. \tag{4.14}$$

L'équation (4.6) s'écrit alors :

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t + A\omega_0^2\cos\omega t + B\omega_0^2\sin\omega t = 0 \tag{4.15}$$

ou encore

$$A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\omega t + B\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\omega t = 0 \tag{4.16}$$

Si nous faisons l'hypothèse que l'oscillateur oscille (! !), les amplitudes A et B ne peuvent pas être toutes les deux nulles. Comme cette équation (4.16) est vraie pour tous les instants t, il vient donc que $\omega_0 = \omega$. ω_0 est donc la pulsation propre ou naturelle du système $\{masse - ressort\}$ considérée. À l'état initial, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$, le déplacement et la vitesse valent (grâce aux expressions 4.12 et 4.13) :

$$x_0 = X(0) = A \quad \text{et} \quad v_0 = \dot{X}(0) = B\omega_0. \tag{4.17}$$

Le mouvement de la masse s'écrit donc

$$X(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \quad \text{ou} \quad X(t) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\omega_0 x_0}{v_0}\right) \tag{4.18}$$

C'est une fonction harmonique à la pulsation ω_0 dont l'amplitude est imposée par les conditions initiales. Cette amplitude est constante car la modélisation n'a pas pris en compte la dissipation d'énergie présente dans tout système mécanique. Comme nous pouvons ainsi le voir dans les graphiques de la figure 4.1 qui décrivent le déplacement et la vitesse de la masse en fonction du temps et des conditions initiales. Dans la réalité, une décroissance de l'amplitude avec le temps est observée.

4.3.4 Étude énergétique de l'oscillateur harmonique

L'énergie mécanique de l'oscillateur est la suivante :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}kX^2 \tag{4.19}$$

1. On peut montrer avec les formules de trigonométrie usuelles que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et que $\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ ou encore que $A = C\sin\phi$ et que $B = C\cos\phi$.

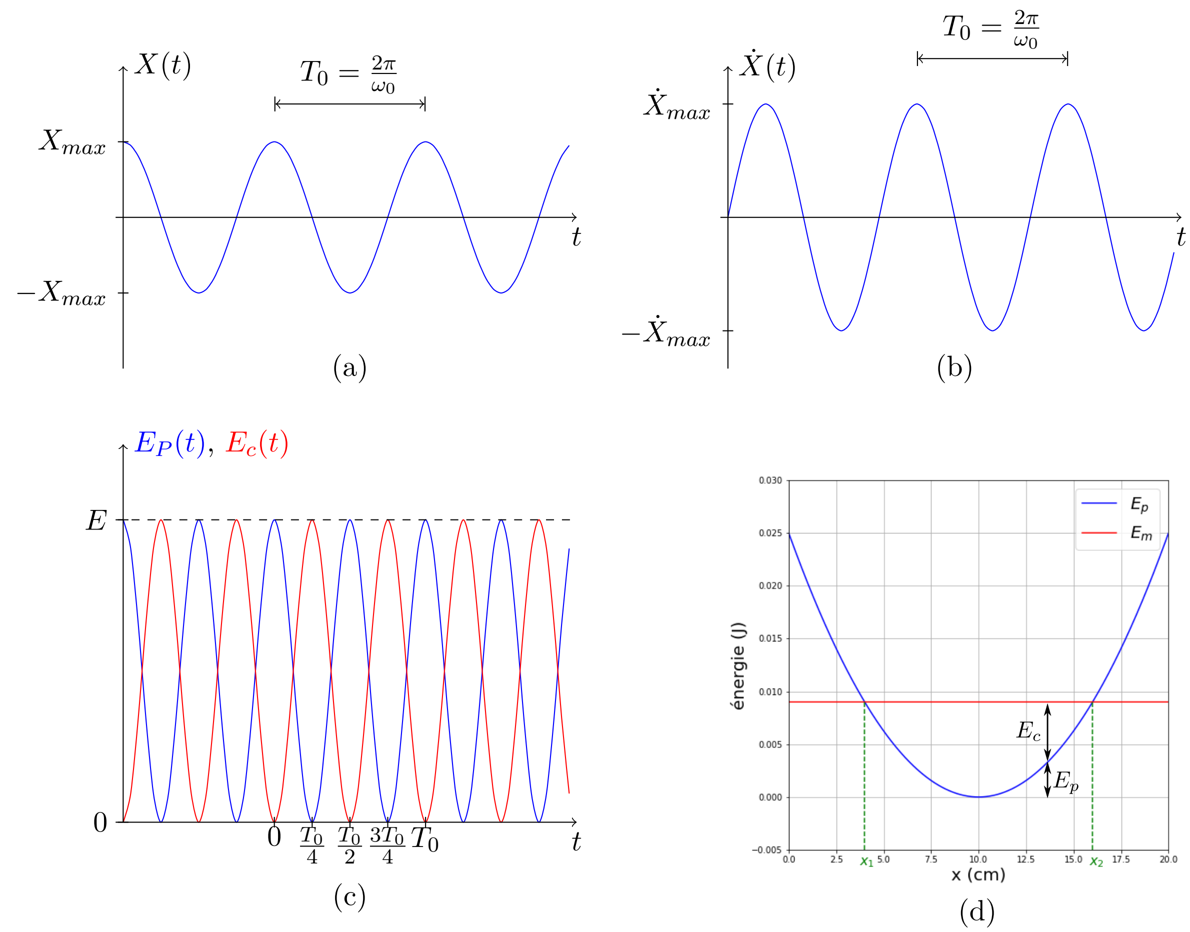


FIGURE 4.1 – (a) Déplacement et (b) Vitesse de la masse en oscillation en fonction du temps. La période d'oscillation T_0 est indiquée. (c) Énergie potentielle ($E_p(t)$), cinétique ($E_c(t)$) et mécanique (E). Les énergies potentielle et cinétique oscillent avec une période égale à la moitié de la période propre T_0 des oscillations de la masse $X(t)$. (d) Diagramme énergétique vu au chapitre 3.

En prenant en compte les expressions de $X(t)$ et de $\dot{X}(t)$ il vient :

$$E = \frac{1}{2} m \, C^2 \, \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} k \, C^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} k C^2 \tag{4.20}$$

où $C^2 = x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2$. Nous retrouvons ici le fait que l'énergie mécanique d'un système conservatif est constante au cours du temps. Il y a échange continuel entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. L'énergie potentielle est maximale lorsque $\sin(\omega_0 t + \phi) = 1$, c'est à dire lorsque $X(t) = \pm C$. On a ainsi $E_p = \frac{1}{2} k C^2$ et l'énergie cinétique est nulle. L'énergie cinétique est maximale lorsque la masse passe par sa position d'équilibre qui correspond à $E_p = 0$.

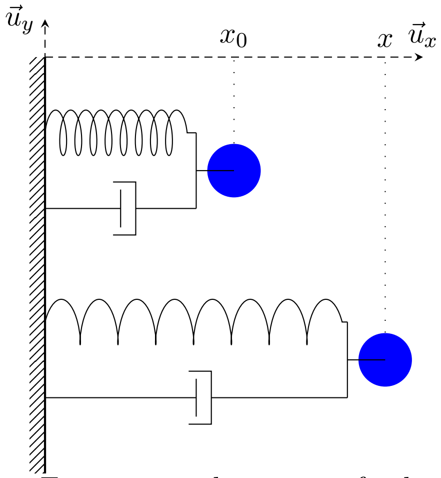
Au cours d'une oscillation complète, la masse passe 2 fois par la position d'équilibre et atteint 2 fois l'élongation maximale $+C$ et $-C$. Les énergies potentielle et cinétique oscillent donc deux fois plus vite, voir figure 4.1. La période des oscillations de ces énergies correspond à la moitié de la période T_0 des oscillations.

4.4 Oscillateur amorti en régime libre

Dans la section précédente, nous avons considéré des systèmes qui oscillent sans dissipation. Dans la réalité, des forces de frottement vont s'exercer sur la masse qui oscille comme l'air pour l'oscillateur vertical. Nous ne considérerons ici que les forces de frottement visqueuses qui exercent sur la masse un effort proportionnel à sa vitesse de la forme suivante :

$$\vec{F}_d = -\gamma \dot{x} \vec{u}_y \tag{4.21}$$

4.4.1 Équation du mouvement



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé Galiléen
- Bilan des efforts extérieurs appliqués au système :
  - la force de rappel du ressort $\vec{F}_{res} = -k(x - l_0)\vec{u}_y$
  - le poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$
  - la force de frottement $\vec{F}_d = -\gamma\dot{x}\vec{u}_x$

En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Oy, il vient :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) - mg - \gamma\dot{x} \tag{4.22}$$

La position d'équilibre du système est la même que celle trouvée précédemment. En effectuant le changement de variable $X = x - x_0$, il vient, sous forme canonique (ou normalisée),

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \tag{4.23}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la pulsation propre et $\xi = \frac{\gamma}{2m\omega_0}$ le taux d'amortissement de l'oscillateur.

4.4.2 Solution de l'équation du mouvement

En posant $x(t) = \alpha e^{rt}$, l'équation du mouvement de l'oscillateur devient :

$$\alpha\left(r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2\right)e^{rt} = 0 \tag{4.24}$$

Puisque αe^{rt} ne peut pas être nul quel que soit t, l'équation caractéristique suivante doit être vérifiée :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \tag{4.25}$$

dont les solutions sont :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{ou} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{4.26}$$

En fonction de la valeur de ξ, trois types de mouvement peuvent être observés :

- $0 < \xi < 1$, le mouvement sous-amorti (oscillations amorties). Dans ce cas, les racines de l'équation caractéristique deviennent :

  $$r_1 = -\xi\omega_0 + \jmath\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{ou} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \jmath\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \tag{4.27}$$

  La solution de l'équation du mouvement est de la forme

  $$x(t) = Ce^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\omega_d t + \phi\right) \tag{4.28}$$

  où C et ϕ dépendent des conditions initiales et ω_d est la pseudo pulsation

  $$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \tag{4.29}$$

  Les conditions initiales en déplacement x_0 et en vitesse v_0 permettent de déterminer C et ϕ de la manière suivante :

  $$C = \sqrt{\frac{(v_0 + \xi\omega_0 x_0)^2 + (x_0\omega_d)^2}{\omega_d^2}} \tag{4.30}$$

  $$\phi = \arctan\frac{x_0\omega_d}{v_0 + \xi\omega_0 x_0} \tag{4.31}$$

- $\xi > 1$, le mouvement sur-amorti (retour à la position d'équilibre sans oscillation). Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{ou} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{4.32}$$

La solution du déplacement est

$$x(t) = \left(a_1 e^{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t} + a_2 e^{-\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}\right) e^{-\xi\omega_0 t} \tag{4.33}$$

où a_1 et a_2 dépendent des conditions initiales de la manière suivante :

$$a_1 = \frac{v_0 + \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0 x_0}{2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{-v_0 + \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0 x_0}{2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}} \tag{4.34}$$

- $\xi = 1$, le mouvement avec amortissement critique, qui correspond à la limite entre les deux cas précédents où l'équation caractéristique admet une double racine :

$$r_1 = r_2 = -\xi\omega_0 = -\omega_0 \tag{4.35}$$

La solution générale de l'équation du mouvement est, dans ce cas,

$$x(t) = (a_1 + a_2 t)\, e^{-\omega_0 t} \tag{4.36}$$

en déterminant a_1 et a_2 en fonction des conditions initiales, il vient :

$$x(t) = (x_0 + \omega_0 x_0 t + v_0 t)\, e^{-\omega_0 t} \tag{4.37}$$

4.4.3 Régime pseudo-périodique

Dans la sous-section précédente, nous avons vu que lorsque le taux d'amortissement était faible, compris entre 0 et 1, la solution $x(t)$ du déplacement de la masse était de la forme (voir équation 4.28) :

$$x(t) = Ce^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_d t + \Phi) \tag{4.38}$$

La figure 4.2 représente l'allure du déplacement de la masse au cours du temps (avec un déplacement initial non nul et une vitesse initiale nulle).

Pseudo-période

Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.2, la masse oscille entre deux exponentielles ($Ce^{-\xi\omega_0 t}$ et $-Ce^{-\xi\omega_0 t}$) qui représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur. La décroissance des fonctions exponentielles est guidée par ξ qui traduit l'amortissement plus ou moins fort du mouvement. Lorsque ξ est nul, le mouvement est non amorti et nous retrouvons le cas de l'oscillateur vu dans la section 4.3.

Le terme $\sin(\omega_d t + \Phi)$ traduirait la périodicité du mouvement s'il n'y avait pas d'amortissement. Le mouvement n'est plus strictement périodique puisqu'au bout du temps T le mouvement de la masse n'a pas la même valeur : $x(t) \neq x(t + T)$ puisque l'amplitude des oscillations diminue avec le temps. On parle donc d'un mouvement *pseudo-périodique*, de pseudo-période T qui correspond à l'intervalle de temps qui sépare deux passages par la position d'équilibre en $x(t) = 0$ ou qui sépare deux maxima consécutifs (voir figure 4.2). Cette pseudo-période vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \tag{4.39}$$

La pseudo-période est supérieure à la période propre T_0. Du fait des frottements, la masse met un peu plus de temps pour faire un aller et un retour et l'amplitude de son mouvement diminue.

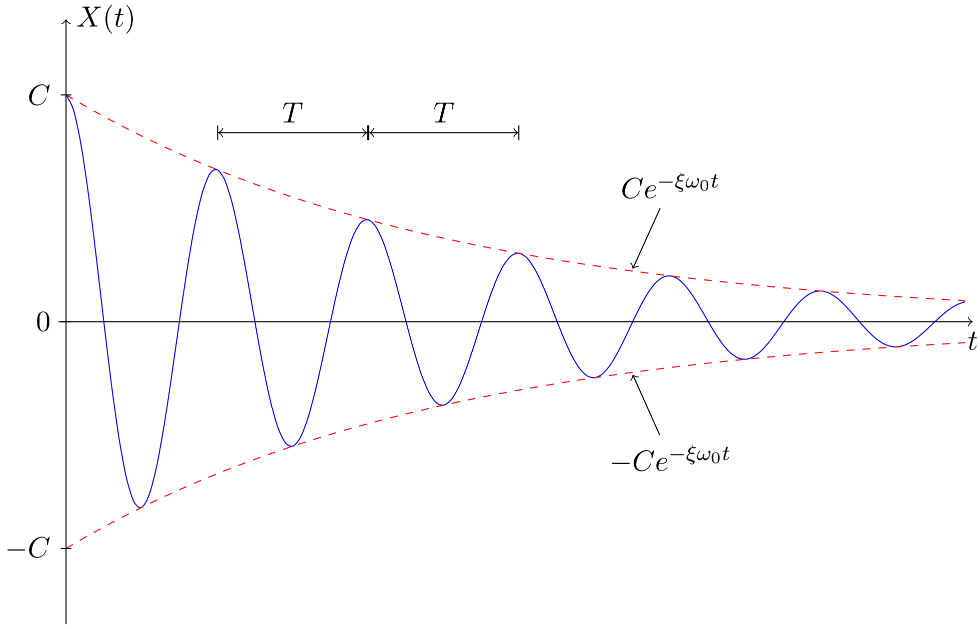


FIGURE 4.2 – Mouvement de la masse d'un oscillateur amorti pour un amortissement faible. L'amplitude décroît de manière exponentielle (traits pointillés rouge). Le régime est pseudo-périodique, T représente la pseudo période.

Décrément logarithmique

Il est bien souvent utile de mesurer avec précision le taux d'amortissement de l'oscillateur. Alors que pour la masse et la raideur une simple mesure statique permet d'estimer leur valeur (répétées pour plus de précision), l'amortissement nécessite une mesure dynamique. Une approche consiste à mesurer la décroissance de l'enveloppe pour un système sous-amorti : entre deux maxima aux instants t et $t+T$ qui correspondent aux amplitudes $Ce^{-\xi\omega_0 t}$ et $Ce^{-\xi\omega_0(t+T)}$. Cette approche conduit au concept de *décrément logarithmique*, défini comme suit :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} \tag{4.40}$$

or

$$\delta = \ln \frac{Ce^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_d t+\Phi)}{Ce^{-\xi\omega_0(t+T)}\sin(\omega_d(t+T)+\Phi)} \tag{4.41}$$

et comme $\omega_d T = 2\pi$, il vient :

$$\delta = \ln \frac{Ce^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_d t+\Phi)}{Ce^{-\xi\omega_0 t}e^{-\xi\omega_0 T}\sin(\omega_d t+\Phi)} = \ln e^{\xi\omega_0 T} = \xi\omega_0 T \tag{4.42}$$

En posant $T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$, le décrément logarithmique s'écrit $\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ et permet d'exprimer le taux d'amortissement

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} \tag{4.43}$$

Facteur de qualité

Contrairement à l'oscillateur harmonique, l'oscillateur amorti n'est pas un système conservatif. L'énergie du système n'est pas constante et sa variation au cours du temps va correspondre au travail négatif des forces de frottement. Cette énergie diminue et la perte correspondante est en général évacuée sous forme de chaleur.

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, on obtient :

$$dE = \delta W^{NC} = \vec{F}_d.dx\vec{u}_x = -\gamma\dot{x}\vec{u}_x.\dot{x}dt\vec{u}_x = -\gamma\dot{x}^2 dt \tag{4.44}$$

La variation d'énergie par unité de temps est donc égale à :

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \dot{x}^2 < 0 \tag{4.45}$$

On retrouve bien une variation négative de l'énergie, c'est-à-dire une perte d'énergie au cours du temps.

Dans le cas d'un amortissement très faible il est possible d'estimer la perte d'énergie au cours de chaque oscillation. Pour cela, il suffit de comparer les énergies mécaniques de l'oscillateur $E(t_n)$ à l'instant t_n correspondant au $n^{\text{ième}}$ maximum et $E(t_{n+1})$ à l'instant $t_{n+1} = t_n + T$ quand l'oscillateur atteint le maximum suivant après une durée correspondant à une pseudo-période. Pour ces deux positions l'énergie cinétique est nulle et l'énergie mécanique est donc égale à l'énergie potentielle du système. On peut écrire :

$$\begin{aligned} E(t_n) &= \frac{1}{2}kx^2(t_n) \\ E(t_{n+1}) &= \frac{1}{2}kx^2(t_{n+1}) = \frac{1}{2}k\left(x(t_n)e^{-\xi\omega_0 T}\right)^2 = \frac{1}{2}kx^2(t_n)e^{-2\xi\omega_0 T} \end{aligned}$$

Le rapport de ces deux énergies donne :

$$\frac{E(t_{n+1})}{E(t_n)} = \frac{\frac{1}{2}kx^2(t_n)e^{-2\xi\omega_0 T}}{\frac{1}{2}kx(t_n)} = e^{-2\xi\omega_0 T} \tag{4.46}$$

La variation relative d'énergie mécanique, en valeur absolue, au cours d'une pseudo-période est donnée par :

$$\frac{|\Delta E|}{E(t_n)} = \left|\frac{E(t_{n+1}) - E(t_n)}{E(t_n)}\right| \tag{4.47}$$

Sachant que l'énergie diminue avec le temps, on obtient :

$$\frac{|\Delta E|}{E(t_n)} = \frac{E(t_n) - E(t_{n+1})}{E(t_n)} = 1 - e^{-2\xi\omega_0 T} \tag{4.48}$$

Dans le cas d'un oscillateur très faiblement amorti : $\xi << 1$, la pseudo-période est voisine de la période propre T_0 de l'oscillateur non amorti. La perte relative d'énergie sur une période devient :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-2\xi\omega_0 T_0} \quad \text{avec} \quad 2\xi\omega_0 T_0 = 2\xi\omega_0\frac{2\pi}{\omega_0} = 4\pi\xi << 1 \tag{4.49}$$

Le coefficient de l'exponentielle étant très faible, il est possible de faire un développement limité au premier ordre de la fonction exponentielle, ce qui revient à

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-4\pi\xi} \approx 1 - (1 - 4\pi\xi) = 4\pi\xi \tag{4.50}$$

Facteur de qualité

Pour caractériser la dissipation d'énergie, il est pratique d'introduire un coefficient sans dimension appelé *facteur de qualité*, noté Q et défini par :

$$Q = 2\pi\frac{\text{énergie du système}}{\text{perte d'énergie par période}} \tag{4.51}$$

Plus ce facteur Q est important et plus la perte relative d'énergie est faible. Il sert à caractériser un oscillateur. Pour l'oscillateur très faiblement amorti, ce facteur vaut :

$$Q = \frac{1}{2\xi} \tag{4.52}$$

Dans le cas du système masse-ressort-amortisseur étudié dans cette section où $\xi = \frac{\gamma}{2m\omega_0}$ et $\omega_0 = \frac{k}{m}$, on a :

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{m\omega_0}{\gamma} = \frac{k}{\gamma\omega_0} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{mk} \tag{4.53}$$

Plus l'amortissement est faible (petite valeur du coefficient de frottement) et plus ce facteur Q est important (moins de perte relative d'énergie). Q augmente aussi avec la masse m et la raideur k de l'oscillateur.

Remarque 1 : le facteur de qualité peut s'exprimer en fonction du décrément logarithmique $\delta = \xi\omega_0 T$. La perte relative d'écrit :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-2\xi\omega_0 T} = 1 - e^{2\delta} \tag{4.54}$$

Si l'amortissement est très faible, on a $\delta \ll 1$ et on peut écrire :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{2\delta} \approx 2\delta \tag{4.55}$$

On obtient alors :

$$Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta} \tag{4.56}$$

Remarque 2 : On peut aussi interpréter le facteur de qualité comme le nombre de cycles qu'il faut à l'oscillateur pour que son amplitude diminue de $1/e^{\pi}$ de sa valeur initiale.

Remarque 3 : L'équation différentielle de l'oscillateur peut s'écrire en fonction du facteur de qualité Q, on a alors cette nouvelle forme canonique d'équation :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \tag{4.57}$$

On peut ainsi définir les différents régimes à l'aide de Q. Le régime pseudo-périodique est possible pour $Q > \frac{1}{2}$, le régime apériodique pour $Q < \frac{1}{2}$ et le régime critique pour $Q = \frac{1}{2}$.

4.4.4 Régime apériodique

Lorsque l'amortissement est fort, c'est-à-dire pour $\xi \geq 1$, l'allure de la fonction $x(t)$ est donnée dans la figure 4.3. Il n'y a plus d'oscillation : l'oscillateur retourne vers sa position d'équilibre sans osciller. Le régime est dit apériodique (absence de période).

Le temps que va mettre l'oscillateur à revenir à sa position d'équilibre est appelé temps de relaxation ou temps caractéristique et est obtenu à partir du temps mis par la décroissance de l'exponentielle d'un facteur e.[2] Après une durée de 5τ l'exponentielle est quasiment nulle. Pour le régime apériodique, la solution du déplacement admet deux exponentielles, définissant chacune un temps caractéristique :

$$\tau_+ = \frac{1}{|\omega_0\sqrt{\xi^2-1} - \xi\omega_0|} \quad \text{et} \quad \tau_- = \frac{1}{|-\omega_0\sqrt{\xi^2-1} - \xi\omega_0|} \tag{4.58}$$

Le temps le plus long est τ_+, c'est donc ce temps qui définira le temps de relaxation de l'oscillateur.

4.4.5 Régime critique

Lorsque l'amortissement est critique, le retour à la position d'équilibre se fait plus rapidement que pour le régime sur-amorti. Le temps de relaxation pour le régime critique est donc

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_0} \tag{4.59}$$

2. la décroissance d'une exponentielle du type $e^{-\lambda t}$ où $\lambda > 0$, est caractérisée par le temps $\tau = \frac{1}{\lambda}$ au bout duquel l'exponentielle est divisée par e.

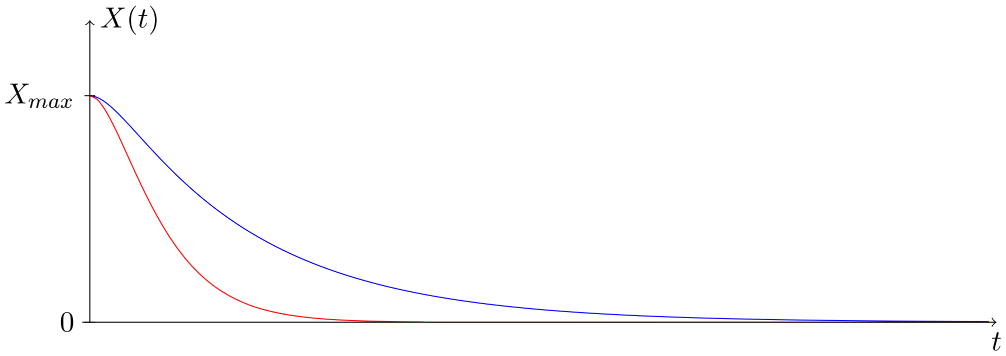


FIGURE 4.3 – Mouvement de la masse d'un oscillateur amorti pour un amortissement fort (en bleu) ou critique (en rouge). L'amplitude décroît de manière exponentielle sans aucune oscillation.

Ce temps est toujours plus petit que pour le régime apériodique. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\omega_0\sqrt{\xi^2-1}-\xi\omega_0|} &< \frac{1}{\omega_0} \\
\omega_0\sqrt{\xi^2-1}-\xi\omega_0 &> \omega_0 \\
\sqrt{\xi^2-1}-\xi &> 1 \\
\sqrt{1-\frac{1}{\xi^2}} &> 0
\end{aligned}$$

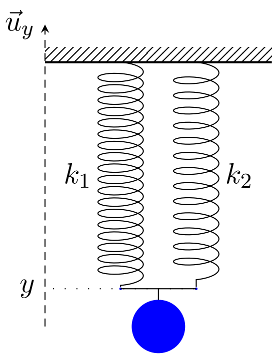
cette dernière expression étant toujours vérifié.

Contrairement à ce que l'on peut penser, un amortissement trop important retarde le retour à l'équilibre de l'oscillateur. Dans le cas où l'on souhaite régler un retour rapide à l'équilibre, comme pour un amortisseur de voiture, il est préférable de l'ajuster le plus proche possible du régime critique.

4.5 Raideurs équivalentes

Dans bon nombre d'applications ou de modélisations, plusieurs ressorts peuvent être associés pour fournir la raideur à l'oscillateur. Pour faciliter la résolution, il est bien souvent commode d'identifier une raideur équivalente à l'ensemble des ressorts de l'oscillateur. Dans la suite de cette section, nous rechercherons les raideurs équivalentes à l'association de ressorts en parallèle et en série.

4.5.1 Raideurs en parallèle



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé Galiléen
- Bilan des efforts extérieurs appliqués au système :
  - la force de rappel du ressort 1 $\vec{F}_{res1} = -k_1(y-l_{01})\vec{u}_y$
  - la force de rappel du ressort 2 $\vec{F}_{res2} = -k_2(y-l_{02})\vec{u}_y$
  - le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_y$

En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Oy, il vient :

$$m\ddot{y} = -k_1(y-l_{01}) - k_2(y-l_{02}) - mg \quad \text{ou encore} \quad m\ddot{y} + k_1(y-l_{01}) + k_2(y-l_{02}) + mg = 0 \tag{4.60}$$

La position d'équilibre du système est trouvée pour

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_p}{dy}(y_0) &= 0 \\
&= \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}k_1(y-l_{01})^2 + \frac{1}{2}k_2(y-l_{02})^2 + mgy\right)_{y=y_0} \\
&= k_1(y_0-l_{01}) + k_2(y_0-l_{02}) + mg \\
\Rightarrow y_0 &= \frac{k_1 l_{01} + k_2 l_{02} - mg}{k_1+k_2}
\end{aligned}
$$

En étudiant les petits mouvements autour de la position d'équilibre du système, pour $Y = y - y_0$, il vient :

$$\ddot{Y} + \omega_0^2 Y = 0, \tag{4.61}$$

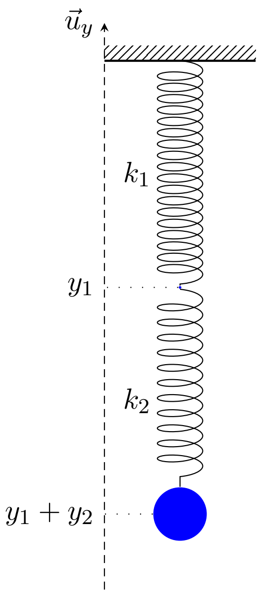
avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \tag{4.62}$$

On en déduit donc la raideur équivalente k_{eq} relative à l'association en parallèle de deux ressorts :

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \tag{4.63}$$

4.5.2 Raideurs en série



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé Galiléen
- Bilan des efforts extérieurs appliqués au système :
  - la force de rappel du ressort 2 $\vec{F}_{res1} = -k_2(y_2 - l_{02})\vec{u}_y$
  - le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_y$

D'après le PFD en projection suivant l'axe Ox, il vient :

$$m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = -k_2(y_2 - l_{02}) - mg \tag{4.64}$$

- Système d'étude : $\{masse\ nulle\}$
- Référentiel d'étude : référentiel terrestre supposé Galiléen
- Bilan des efforts extérieurs appliqués au système :
  - la force de rappel du ressort 1 $\vec{F}_{res1} = -k_1(y_1 - l_{01})\vec{u}_y$
  - la force de rappel du ressort 2 $\vec{F}_{res1} = k_2(y_2 - l_{02})\vec{u}_y$

$$0 = -k_1(y_1 - l_{01}) + k_2(y_2 - l_{02}) \tag{4.65}$$

En considérant les variations autour de la position d'équilibre $Y_1 = y_1 - y_{01}$ et $Y_2 = y_2 - y_{02}$, les équations 4.64 et 4.65 deviennent :

$$
\begin{aligned}
m(\ddot{Y}_1 + \ddot{Y}_2) + k_2 Y_2 &= 0 && (4.66)\\
k_1 Y_1 &= k_2 Y_2 && (4.67)
\end{aligned}
$$

Par un jeu d'écriture sur l'équation 4.67, nous pouvons trouver la relation entre les variables Y_1 et Y_2 comme suit

$$\Rightarrow k_2(Y_2 + Y_1 - Y_1) = k_1 Y_1 \Rightarrow Y_2 = \frac{k_1}{k_1+k_2}(Y_1 + Y_2) \tag{4.68}$$

et en réinjectant cette expression dans 4.66, il vient :

$$m(\ddot{Y}_1 + \ddot{Y}_2) + \frac{k_2 k_1}{k_1+k_2}(Y_1 + Y_2) = 0 \tag{4.69}$$

En posant $Y = Y_1 + Y_2$, le déplacement de la masse suivant l'axe Oy, il vient :

$$\ddot{Y} + \omega_0^2 Y = 0, \tag{4.70}$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \tag{4.71}$$

On en déduit donc que la raideur équivalente k_{eq} à l'association en série de deux ressorts :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{4.72}$$