Feuille Proba 3
Variables aléatoires discrètes [1]

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $0 \leqslant p \leqslant 1$
a) Loi de $U = 2X$.
b) Loi de $V = X + Y$.
c) Loi de $W = \max(X, Y)$.
d) Loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 2. Soit A un événement. On note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 sur A et 0 ailleurs (fonction indicatrice de A). Montrer que $E(\mathbb{1}_A) = \mathrm{P(A)}$.

Exercice 3. Un joueur joue à la roulette à 37 cases 10 euros sur le 19 et 100 euros sur "pair" : si la bille tombe sur 19 il touchera 36 fois sa mise (soit 360 euros) et si elle tombe sur "pair"(0 exclu), il touchera 2 fois sa mise ; dans tous les autres cas, sa mise va à la banque. Quelle est l'espérance de son gain ?

Exercice 4. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes, de lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 6. Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de l'expérience aléatoire qui consiste à répartir au hasard n boules dans N cases.
On note X le nombre de boules tombant dans la première case.
a) Expliciter les $p_k = \mathrm{P(X = k)}, 0 \leqslant \mathrm{k} \leqslant \mathrm{n}$, $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$
b) Donner la limite de p_k quand k étant fixé, n et N tendent vers l'infini de telle sorte que $\dfrac{n}{N} \to \lambda, 0 < \lambda < \infty$

Pour aller plus loin et applications

Exercice 7. Lorsqu'on chauffe un filament de tungstène, on obtient une cathode qui émet des électrons. En plaçant ce dispositif à une extrémité d'un tube cathodique (un tube en verre sous vide), les électrons se propagent alors en ligne droite et vont frapper l'autre extrémité du tube (ce qui produit de la lumière lorsque cette extrémité est recouverte de phosphore ou plus généralement d'un matériau phosphorescent). On suppose que le temps entre deux émissions d'électrons est tel que sur une

1. Version du 21 mars 2020

période donnée, le nombre total Z d'électrons qui ont été émis suit une loi de Poisson avec un certain paramètre $\lambda > 0$.
On suppose de plus qu'au milieu du tube cathodique se trouve une membrane, que chaque électron émis a une probabilité p de franchir. Le fait qu'un électron franchisse ou non la membrane est indépendant de ce que font les autres électrons. On note Y le nombre d'électrons émis qui ont franchi la membrane. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 8. A) Une usine produit des pièces détachées et cherche à mettre en place une procédure pour estimer la qualité de la production. On met à la disposition du service qualité un (grand) nombre N de pièces, numérotées de 1 à N, et le laboratoire fait un test en en sélectionnant n au hasard sans replacement ($n \leqslant N$).
a) Décrire l'espace de probabilités (Ω_1, P_1) (resp. (Ω_2, P_2)) associé à cette expérience aléatoire quand on regarde la suite (resp. l'ensemble) des numéros obtenus.
b) On suppose qu'une proportion p, $0 < p < 1$, des N pièces sont défectueuses, avec $pN > n$. On note X le nombre de pièces défectueuses figurant parmi les n pièces choisies.
(i) En considérant X définie sur Ω_2 expliciter les $p_k = \mathrm{P_2(X = k)}$.
(ii) En considérant X définie sur Ω_1 montrer que X peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$

$$X = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

Calculer les $E(Z_k), \mathrm{cov}(Z_k, Z_l)$. En déduire
$E(X) = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)(1 - \dfrac{n-1}{N-1})$
B) On considère les mêmes pièces, mais on en choisit n avec replacement (n peut être plus grand que N). On note Y le nombre de pièces défectueuses observées.
a)
Décrire l'espace de probabilité (Ω, P) associé à cette expérience aléatoire
b) Expliciter les $q_k = \mathrm{P(Y = k), 0 \leqslant k \leqslant n}$ et montrer que, pour k et n fixés, $p_k \to q_k$ quand $N \to \infty$. Commenter.

Exercice 9. Construire un exemple d'espace de probabilités et de variable aléatoire discrète non constante pour laquelle $\mathrm{Var}(X) = 0$. Formuler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable aléatoire discrète ait une variance nulle.

Exercice 10. Soit X une variables aléatoire à valeurs entières. On pose $p_k = \mathrm{P(X = k)}$ et $q_k = \sum_{j \geqslant k+1} p_j$
Montrer que $E(X) = \sum_{j \geqslant 0} q_j$

Encore plus exigeant (et plus excitant)

Deux applications fondamentales de la théorie des probabilités.

Exercice 11. (Ruine du joueur) Un joueur va au casino avec une fortune $a \in \mathbb{N}$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité p et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1 - p$.
Son but est de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $c \geqslant a, c \in \mathbb{N}$ mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre c avant la ruine).
a) Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$

b) Montrer, pour $a > 0$, en raisonnant sur ce qui s'est passé au premier coup, la relation

$$s_c(a) = ps_c(a+1) + qs_c(a-1)$$

c) Déduire la valeur de $s_c(a)$
d) Application numérique :
Calculer la valeur précédente avec $a = 900, c = 1000$; $a = 100, c = 20000$ dans les cas $p = 0,5$ et $p = \frac{18}{38}$.

Exercice 12. (Arrêt optimal) Une princesse a n prétendants numérotés par ordre de mérite décroissant 1,2,...,n. Elle doit en choisir un. Le problème est qu'ils défilent un par un au hasard devant elle et qu'elle ne peut revenir sur son choix si elle en a laissé partir un. Elle doit donc adopter une stratégie pour avoir le plus de chance de choisir le meilleur...
Soit Ω l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ω est muni de la probabilité uniforme.
$\sigma \in \Omega$ représente un tirage du hasard (les prétendants défilent dans l'ordre $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$).
Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on introduit la variable Y_k qui est le rang de $\sigma(k)$ dans l'ensemble $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ rangé en ordre décroissant : $Y_k = 1$ signifie que $\sigma(k)$ est le plus grand parmi l'ensemble $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$, $Y_k = 2$ signifie qu'il y a exactement un élément de $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ plus grand que $\sigma(k)$ etc...
Par convention, on pose $Y_{n+1} = 0$.
a) Montrer que

$$F : \sigma \to (Y_1(\sigma), \dots, Y_n(\sigma))$$

définit une bijection de Ω sur $\Pi = \{1\} \times \cdots \times \{1, 2, \dots, n\}$
b) En déduire que les variables Y_j sont indépendantes et que Y_k suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, k\}$.
c) Soit $\tau_r = \inf\{k \geqslant r, Y_k = 1\}$ ($= n + 1$ si cet ensemble est vide).
Calculer la probabilité pour qu'au temps τ_r, le prétendant qui se présente soit le meilleur (i.e. le numero 1). Comment choisir r^* pour maximiser la probabilité précédente ? Trouver un équivalent de r^* quand n tend vers l'infini.