MAPSI — cours 7 : Procédure(s) d'évaluation

Vincent Guigue, Thierry Artières
vincent.guigue@lip6.fr

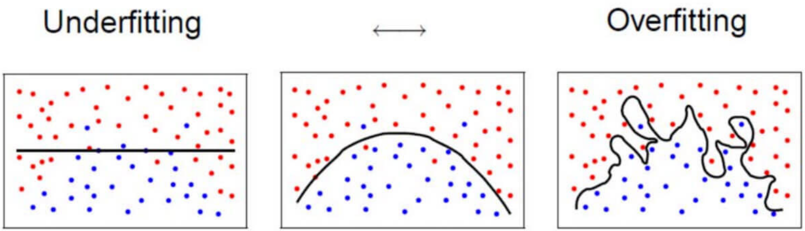
LIP6 – Université Paris 6, France

Retour TME : problématique de l'évaluation

Impossible d'évaluer les modèles sur les données qui ont servi à l'apprentissage ! ! !

$\Rightarrow$ Biais dans l'évaluation

- Pourtant : l'évaluation est aussi importante que le modèle lui-même
- $\Rightarrow$ il faut faire les deux, c'est à dire diviser les données
  - beaucoup de données en apprentissage... Evaluation pauvre !
  - beaucoup de données en test... Modèle pauvre !

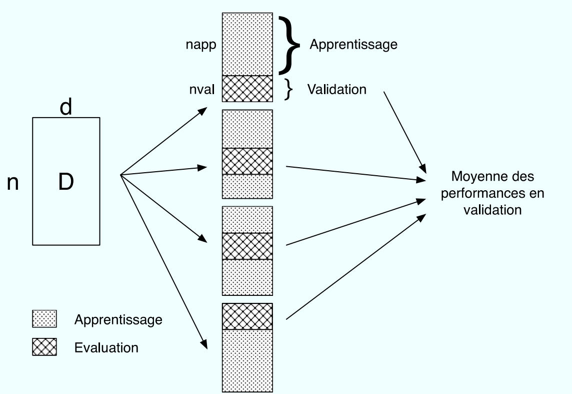


Comment évaluer les performances efficacement ?

- 3 Procédures :
  - **Beaucoup de données** (ou peu de temps) : Apprentissage/test

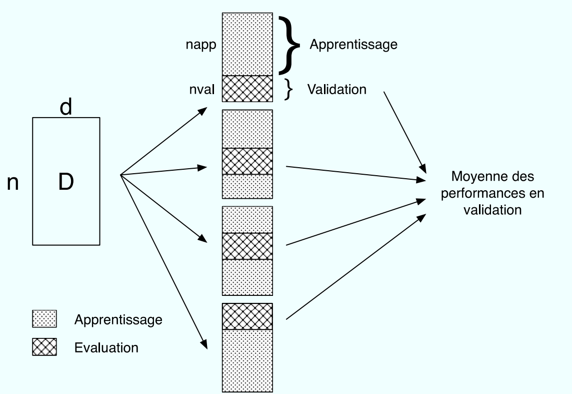
Comment évaluer les performances efficacement ?

- 3 Procédures :
  - **Beaucoup de données** (ou peu de temps) : Apprentissage/test
  - **Le plus souvent** Validation croisée



Comment évaluer les performances efficacement ?

- 3 Procédures :
  - **Beaucoup de données** (ou peu de temps) : Apprentissage/test
  - **Le plus souvent** Validation croisée



  - **Peu de données** Leave-one-out

Sous-apprentissage

Très **peu d'exemples** en apprentissage et/ou **beaucoup de paramètres** à apprendre...

$\Rightarrow$ Les *règles* apprises ne sont pas complètement fiable

Ex :

- La matrice de transition contient : $a_{11} = 0$
- Quelle est la vraisemblance de $S = \{\ldots, q_1, q_1, \ldots\}$?

Très **peu d'exemples** en apprentissage et/ou **beaucoup de paramètres** à apprendre...

$\Rightarrow$ Les *règles* apprises ne sont pas complètement fiable

Ex :

- La matrice de transition contient : $a_{11} = 0$
- Quelle est la vraisemblance de $S = \{\ldots, q_1, q_1, \ldots\}$?
- $\Rightarrow$ 0 même si le reste de la séquence ressemble...
- Est-ce le comportement attendu ?

Très **peu d'exemples** en apprentissage et/ou **beaucoup de paramètres** à apprendre...

$\Rightarrow$ Les *règles* apprises ne sont pas complètement fiable

Ex :

- La matrice de transition contient : $a_{11} = 0$
- Quelle est la vraisemblance de $S = \{\dots, q_1, q_1, \dots\}$?
- $\Rightarrow$ 0 même si le reste de la séquence ressemble...
- Est-ce le comportement attendu ? $\Rightarrow$ Ca dépend !
- Possibilité :

Sous-apprentissage

Très **peu d'exemples** en apprentissage et/ou **beaucoup de paramètres** à apprendre...

$\Rightarrow$ Les *règles* apprises ne sont pas complètement fiable

Ex :

- La matrice de transition contient : $a_{11} = 0$
- Quelle est la vraisemblance de $S = \{\ldots, q_1, q_1, \ldots\}$?
- $\Rightarrow$ 0 même si le reste de la séquence ressemble...
- Est-ce le comportement attendu ? $\Rightarrow$ Ca dépend !
- Possibilité : ajouter 1 dans la phase de comptage sur toutes les cases de A pour que toutes les transitions soient possibles

Sur-apprentissage

Définition

Le sur-apprentissage consiste à extraire des règles qui sont efficaces en apprentissage mais pas en test...

- apprentissage *par coeur*

Ex :

- Transitions erronées (transitions étranges, erreurs de mesure...)
  - Bonne règle en apprentissage (cette transition n'existe nulle part ailleurs)
  - Mauvaise règle en test
  - Proposition : dans le codage des N-grams, on ne prend pas en compte les mots qui apparaissent très peu et on élimine les transition associées.

NB : conclusion inverse du transparent précédent... Il reste de la place pour les experts

MAPSI — cours 7 :
Chaîne de Markov Cachée

Vincent Guigue, Thierry Artières
vincent.guigue@lip6.fr

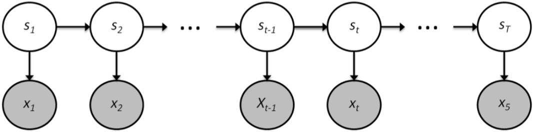
LIP6 – Université Paris 6, France

Limites du modèle de Markov standard

- Transition simple... Parfois simpliste
  - Transition directe sur les observations $\neq$ geste complexe
- Pas de caractérisation des états (limite applicative)
  - Analyse du texte
  - Analyse de l'état d'un véhicule
  - Diagnostic

Modèles de Markov Cachés (MMC = HMM)

- Séparation des **observations** et des **états**
  - Une chaîne = une séquence d'observations...
  - ... chaque observation ayant été générée par un état
- 2 composantes
  - Chaine de Markov d'états finis
  - Ensemble de lois de probabilité d'émission
- 2 points de vues
  - Génératif : la chaine génère des états qui entrainent des observations
  - Analytique : les observations fournissent de l'évidence sur la suite d'états (décodage) et sur le modèle (apprentissage)

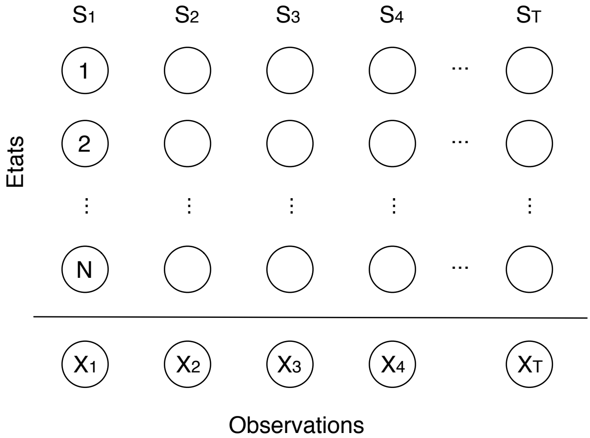


Notations

- La chaine de Markov est toujours composée de :
  - d'une séquence d'**états** $S = (s_1, \ldots, s_T)$
  - dont les valeurs sont tirées dans un ensemble fini $Q = (q_1, ..., q_N)$
  - Le modèle est toujours défini par $\{\Pi, A\}$
    - $\pi_i = P(s_1 = q_i)$
    - $a_{ij} = p(s_{t+1} = q_j | s_t = q_i)$
- Les **observations** sont modélisées à partir des s_t
  - séquence d'observation : $X = (x_1, \ldots, x_T)$
  - loi de probabilité : $b_j(t) = p(x_t | s_t = q_j)$
  - B peut être discrète ou continue
- MMC : $\lambda = \{\Pi, A, B\}$

Structure (combinatoire) d'un MMC

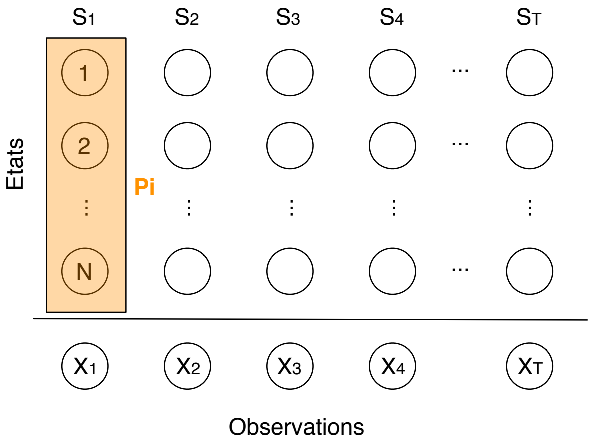
Constitution d'un MMC :



- Les états sont inconnus...

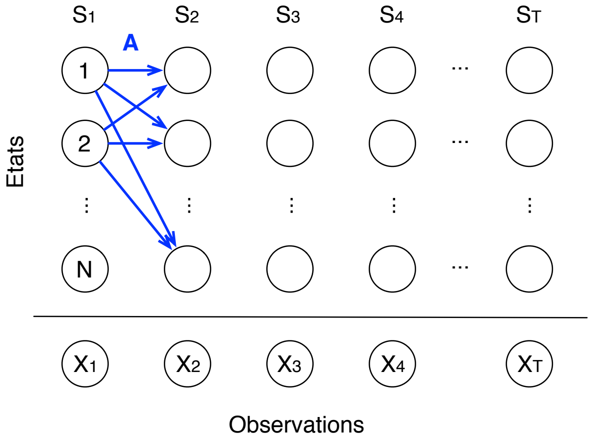
Structure (combinatoire) d'un MMC

Constitution d'un MMC :



- Les états sont inconnus...

Constitution d'un MMC :

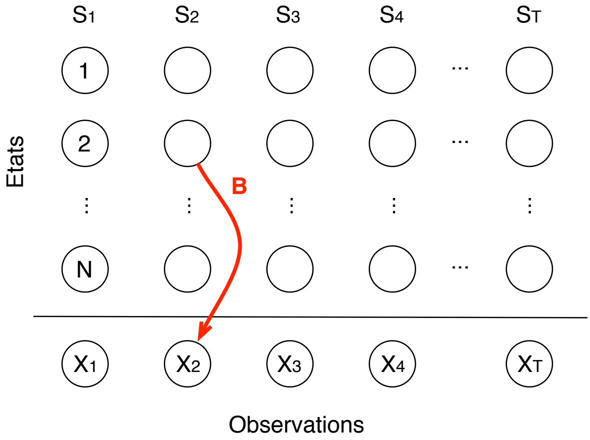


Hyp. Ordre 1 : chaque état ne dépend que du précédent

- Les états sont inconnus...
  La combinatoire à envisager est problématique !

Structure (combinatoire) d'un MMC

Constitution d'un MMC :



Hyp. Ordre 1 : chaque état ne dépend que du précédent

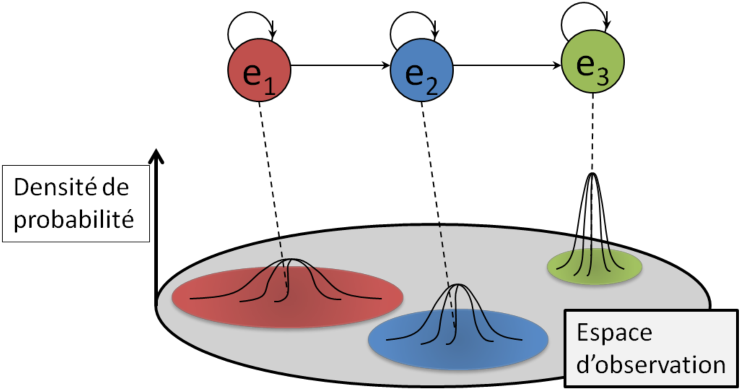
Chaque obs. ne dépend que de l'état courant

- Les états sont inconnus...

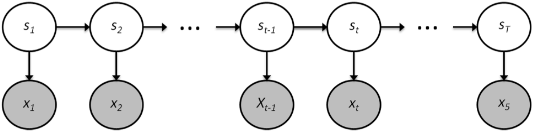
Ce que l'on manipule

- Séquence d'observations
  - $X = (x_1, \ldots, x_T)$
- Séquence d'états **(cachée = manquante)**
  - $S = (s_1, \ldots, s_T)$

MMC à lois d'observation continues



- Les états doivent être discrets... Les observations par forcément !



- CM d'ordre 1 :

$$p(s_t|s_1,\dots,s_{t-1}) = p(s_t|s_{t-1})$$

- Indépendance des observations :

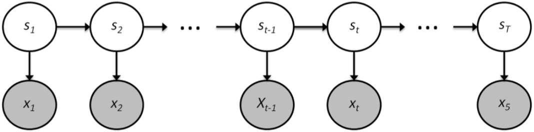
$$p(x_t|x_{t-1},s_t) = p(x_t|s_t)$$

i.e. : les observations successives sont indépendantes conditionnellement aux états !

Notations simplifiées (de *a* à *b*) :

$$s_1^t = s_1,\dots,s_t, \quad x_1^t = x_1,\dots,x_t$$

Validation...



Comment calculer probabilités suivantes ?

- Séquence d'états
- Séquence d'observations (connaissant les états)
- Séquences obs + états :

Point de vue génératif

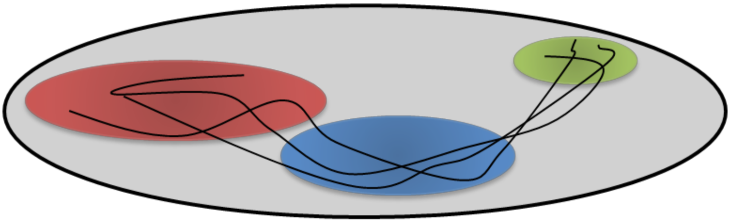
Algorithm 1: Génération d'une séquence $\{x_1, \ldots, x_T\}$

Data: A, B, Π
Result: x_1^T, s_1^T
$S \leftarrow []$;
$X \leftarrow []$;
Tirer s_1 en fonction de Π;
Tirer x_1 en fonction de B et s_1;
$s_t \leftarrow s_1$, $x_t \leftarrow x_1$, $t \leftarrow 1$;
$S \leftarrow [S,\ s_t]$, $X \leftarrow [X,\ x_t]$;
while s_t *n'est pas l'état final* **do**
  $s_{t+1} \leftarrow$tirage selon $(A(s_t, :))$;
  $x_{t+1} \leftarrow$tirage selon $(B(s_{t+1}, :))$;
  $s_t \leftarrow s_1$, $x_t \leftarrow x_1$;
  $S \leftarrow [S,\ s_t]$, $X \leftarrow [X,\ x_t]$;
  $t \leftarrow t + 1$;

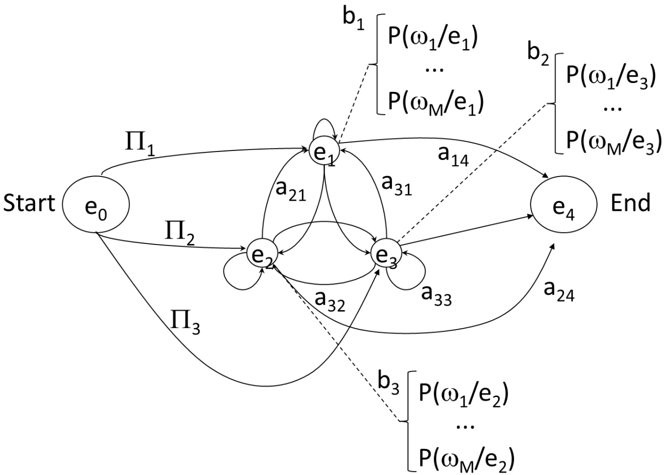
Représentation d'une trajectoire

- trajectoire d'états

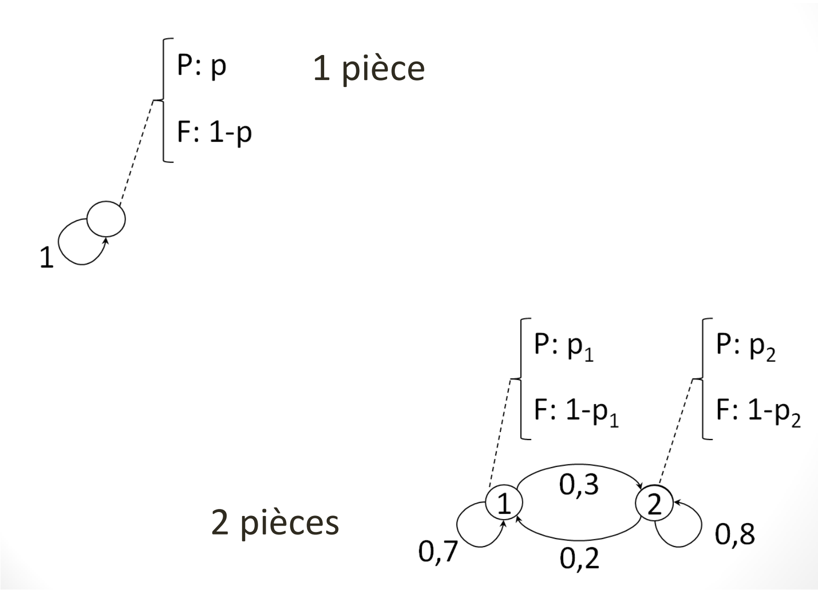
- trajectoire d'observations



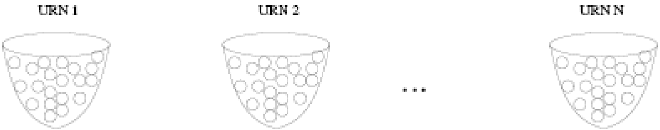
Représentation d'un MMC



Modélisation des pièces...



- N urnes (de Rabiner)
  - chaque urne = distribution spécifique des couleurs de boules
- On tire successivement des boules dans les différentes urnes et on note les couleurs des boules



$P(red) = b_1(1)$	$P(red) = b_2(1)$	$P(red) = b_N(1)$
$P(green) = b_1(2)$	$P(green) = b_2(2)$	$P(green) = b_N(2)$
$P(yellow) = b_1(3)$	$P(yellow) = b_2(3)$	$P(yellow) = b_N(3)$
$P(black) = b_1(4)$	$P(black) = b_2(4)$	$P(black) = b_N(4)$
...	...	...
$P(orange) = b_1(M)$	$P(orange) = b_2(M)$	$P(orange) = b_N(M)$

Usage des MMC

- Modélisation complexe
  - Tracé d'une ligne $\Leftrightarrow$ prise en compte de la position du poignet
- Mixture de sources émettrices
  - Séparation de sources
- Problèmes de sécançage des signaux
  - Parole, écrit,...
  - ADN,
  - Image

Les trois problèmes des MMC (Fergusson - Rabiner)

1. **Evaluation** : λ donné, calcul de $p(x_1^T|\lambda)$
2. **Décodage** : λ donné, quelle séquence d'états a généré les observations ?
3. **Apprentissage** : à partir d'une série d'observations, trouver $\lambda^\star$

Et les applications associées...

Les trois problèmes des MMC (Fergusson - Rabiner)

1. **Evaluation** : λ donné, calcul de $p(x_1^T|\lambda)$
2. **Décodage** : λ donné, quelle séquence d'états a généré les observations ?

$$s_1^{T\star} = \arg\max_{s_1^T} p(s_1^T|x_1^T, \lambda) = \arg\max_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T|\lambda)$$

3. **Apprentissage** : à partir d'une série d'observations, trouver $\lambda^\star$

Et les applications associées...

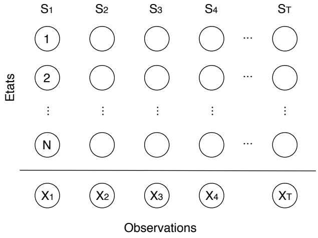
1. **Evaluation** : λ donné, calcul de $p(x_1^T|\lambda)$
2. **Décodage** : λ donné, quelle séquence d'états a généré les observations ?

$$s_1^{T\star} = \arg\max_{s_1^T} p(s_1^T|x_1^T, \lambda) = \arg\max_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T|\lambda)$$

3. **Apprentissage** : à partir d'une série d'observations, trouver $\lambda^\star$

$$\lambda^\star = \{\Pi^\star, A^\star, B^\star\} = \arg\max_{\lambda} p(x_1^T|\lambda)$$

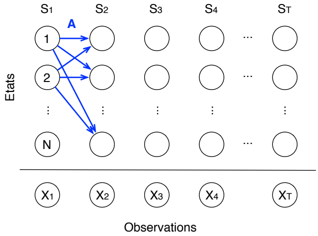
Et les applications associées...



- Quel point de départ ?

- Complexité ?

PB1 : évaluation $p(x_1^T|\lambda)$

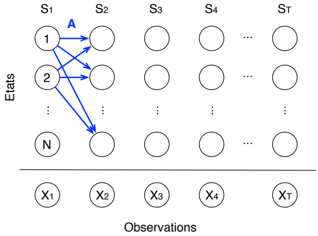


- Quel point de départ ? Proba totales

$$p(x_1^T|\lambda) = \sum_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T|\lambda)$$

- Complexité ?

PB1 : évaluation $p(x_1^T|\lambda)$

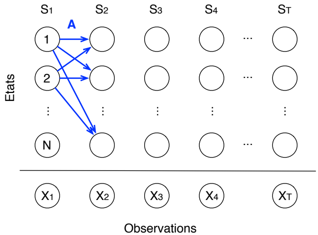


- Quel point de départ ? Proba totales

$$p(x_1^T|\lambda) = \sum_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T|\lambda)$$

- Simplifier la combinatoire...
- Complexité ?

PB1 : évaluation $p(x_1^T|\lambda)$



- Quel point de départ ? Proba totales

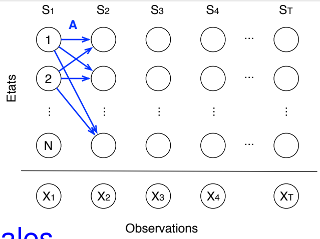
$$p(x_1^T|\lambda) = \sum_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T|\lambda)$$

- Simplifier la combinatoire... Hypothèse MMC ordre 1

$$p(x_1^T|\lambda) = \sum_{s_1^T} \prod_{t=1}^{T} p(s_t|s_{t-1})p(x_t|s_t)$$

- Complexité ?

A chaque pas de temps, envisager toutes les combinaisons d'états qui ont pu emmené ici...



- Quel point de départ ? Proba totales

$$p(x_1^T|\lambda) = \sum_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T|\lambda)$$

- Simplifier la combinatoire... Hypothèse MMC ordre 1

$$p(x_1^T|\lambda) = \sum_{s_1^T} \prod_{t=1}^{T} p(s_t|s_{t-1}) p(x_t|s_t)$$

- Complexité ? $\mathcal{O}(N^T)$

Calcul par récurrence :

- On pose :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i|\lambda)$$

- Que vaut alors $p(x_1^T|\lambda)$?

PB1 : évaluation $p(x_1^T|\lambda)$

Calcul par récurrence :

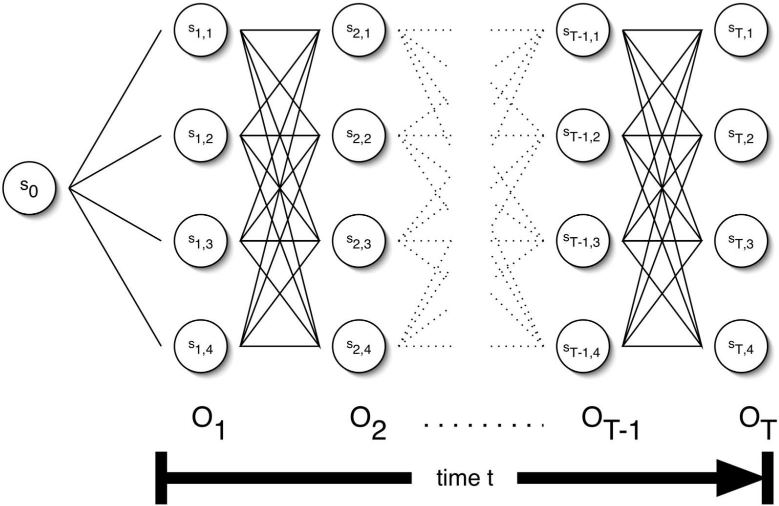
- On pose :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i|\lambda)$$

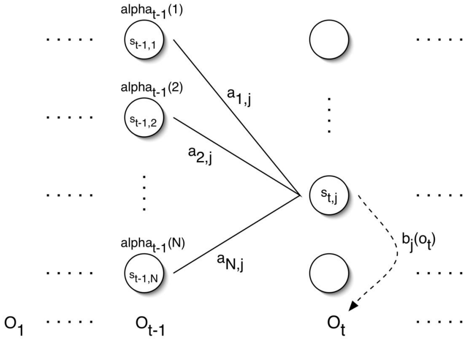
- Que vaut alors $p(x_1^T|\lambda)$?

$$p(x_1^T|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

Envisager tous les états à tous les pas de temps (+ transitions) = trellis d'hypothèses



PB1 : Algorithme *forward*

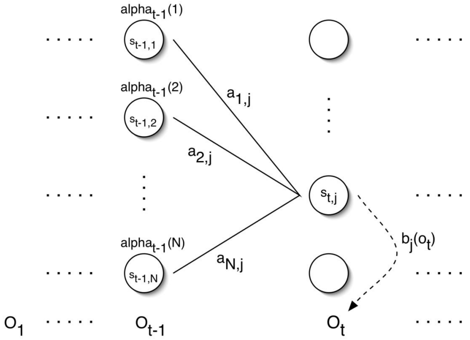


$$\alpha_t(j) = p(x_1^t, s_t = j|\lambda)$$

Exprimer en fonction des α_{t-1}

Formalisation récursive = briser la complexité

PB1 : Algorithme *forward*



$$\alpha_t(j) = p(x_1^t, s_t = j|\lambda)$$

$$\alpha_t(j) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_{t-1}(i) a_{ij}\right] b_j(x_t)$$

Formalisation récursive = briser la complexité

PB1 : Algorithme *forward*

- Initialisation :

$$\alpha_{t=1}(i) = p(x_1^1, s_1 = i|\lambda) = ...$$

PB1 : Algorithme *forward*

- Initialisation :

$$\alpha_{t=1}(i) = p(x_1^1, s_1 = i|\lambda) = \dots$$

$$= \pi_i b_i(x_1)$$

- Itération :

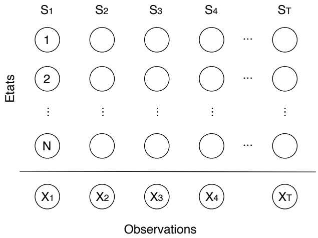
$$\alpha_t(j) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_{t-1}(i) a_{ij}\right] b_j(x_t)$$

- Terminaison :

$$p(x_1^T|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

- Complexité linéaire en T
  - Usuellement : $T >> N$

PB2 : décodage



$$s_1^{T\star} = \arg\max_{s_1^T} p(x_1^T|\lambda)$$

Avec la formule précédente (hyp. MMC ordre 1) :

$$s_1^{T\star} = \arg\max_{s_1^T} \prod_{t=1}^{T} p(s_t|s_{t-1})p(x_t|s_t)$$

- Même schéma que précédemment = **algorithme de Viterbi**

- On pose :
  Meilleur score pour un chemin au temps t, se terminant à l'état i :
  $$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t | \lambda)$$

A t, la probabilité du meilleur chemin est la combinaison :

- d'un des meilleurs chemins précédents...
- ... et de la transition vers s_j + observation de x_t à partir de s_j

- On pose :
  Meilleur score pour un chemin au temps t, se terminant à l'état i :
  $$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t|\lambda)$$

A t, la probabilité du meilleur chemin est la combinaison :

- d'un des meilleurs chemins précédents...
- ... et de la transition vers s_j + observation de x_t à partir de s_j

- Initialisation :
- Récurrence :

PB2 : Viterbi

- On pose :
  Meilleur score pour un chemin au temps t, se terminant à l'état i :
  $$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t | \lambda)$$

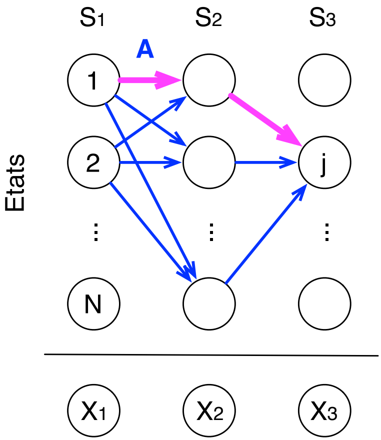
A t, la probabilité du meilleur chemin est la combinaison :

- d'un des meilleurs chemins précédents...
- ... et de la transition vers s_j + observation de x_t à partir de s_j

- Initialisation :
  $$\delta_1(i) = \pi_i b_i(x_1)$$
- Récurrence :
  $$\delta_t(j) = \left[\max_i \delta_{t-1}(i) a_{ij}\right] b_j(x_t)$$

PB2 : Viterbi (suite)

- δ = stockage de la probabilité de certaines situations...
- Ce qui nous intéresse c'est la séquence d'états associée $\Rightarrow$ stockage à prévoir



PB2 : Viterbi (suite)

- δ = stockage de la probabilité de certaines situations...
- Ce qui nous intéresse c'est la séquence d'états associée $\Rightarrow$ stockage à prévoir

- Stockage des indices des états dans un tableau Ψ

$$\Psi_t(j) = \arg \max_{i \in [1,\ N]} \delta_{t-1}(i) a_{ij}$$

Pour arriver en j à t, quel était le meilleur état à $t-1$? ? ?

- $\Rightarrow$ A parcourir à l'envers pour retrouver le chemin optimal !

PB2 : Viterbi (suite)

- δ = stockage de la probabilité de certaines situations...
- Ce qui nous intéresse c'est la séquence d'états associée $\Rightarrow$ stockage à prévoir

- Stockage des indices des états dans un tableau Ψ

$$\Psi_t(j) = \arg\max_{i \in [1,\, N]} \delta_{t-1}(i) a_{ij}$$

- Complexité en $\mathcal{O}(N^2 T)$

$$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t | \lambda)$$

1. Initialisation

$$\begin{aligned} \delta_1(i) &= \pi_i b_i(x_1) \\ \Psi_1(i) &= 0 \end{aligned}$$

2. Récursion

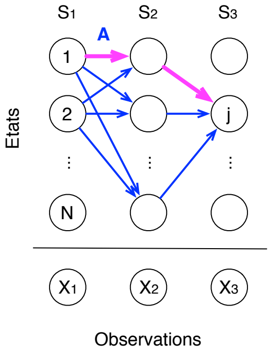
$$\begin{aligned} \delta_t(j) &= \left[\max_i \delta_{t-1}(i) a_{ij}\right] b_j(x_t) \\ \Psi_t(j) &= \arg \max_{i \in [1,\ N]} \delta_{t-1}(i) a_{ij} \end{aligned}$$

3. Terminaison

$$S^\star = max_i \delta_T(i)$$

4. Chemin

$$\begin{aligned} q_T^\star &= \arg\max_i \delta_T(i) \\ q_t^\star &= \Psi_{t+1}(q_{t+1}^\star) \end{aligned}$$



PB3 : Apprentissage des MMC

- **Version simplifiée** (*hard assignment*) : type *k*-means
- Nous disposons de :
  - **Evaluation** : $p(x_1^T|\lambda)$
  - **Décodage** : $s_1^{T\star} = \arg\max_{s_1^T} p(x_1^T|\lambda)$
- Proposition :

Algorithm 2: Baum-Welch simplifié pour l'apprentissage d'un MMC

Data: Observations : X, Structure= N, K
Result: $\tilde{\Pi}^\star, \tilde{A}^\star, \tilde{B}^\star$
Initialiser $\lambda_0 = \Pi^0, A^0, B^0$;
$\rightarrow$ finement si possible;
$t = 0$;
while *convergence non atteinte* **do**
  $S_{t+1} = decodage(X, \lambda_t)$;
  $\lambda_{t+1}^\star = \Pi^{t+1}, A^{t+1}, B^{t+1}$ obtenus par comptage des transitions ;
  $t = t + 1$;

Vous avez déjà tous les éléments pour faire ça !

Algorithm 3: Baum-Welch simplifié pour l'apprentissage d'un MMC

Data: Observations : X
Result: $\tilde{\Pi}^\star, \tilde{A}^\star, \tilde{B}^\star$
Initialiser $\lambda_0 = \Pi^0, A^0, B^0$;
$\rightarrow$ finement si possible;
$t = 0$;
while *convergence non atteinte* **do**
    Trouver les distributions de probabilité des variables manquantes (états);
    Ré-estimer les paramètres $\lambda_{t+1}^\star$;
    $t = t + 1$;

Affectation dure $\Rightarrow$ estimation des distributions d'appartenance
Algorithme type EM

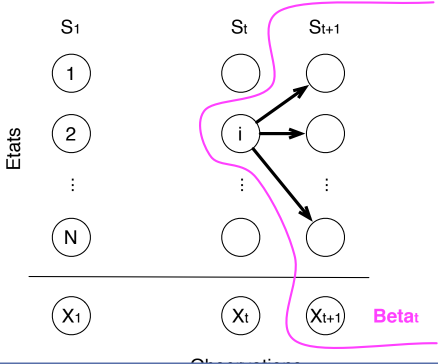
On a vu le calcul des α... Définissons maintenant les β :

$$\beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda), \qquad \text{(sym. des } \alpha\text{)}$$

- Initialisation (arbitraire) :

$$\forall i, \qquad \beta_{t=T}(i) = 1$$

- Récursion :



App. complet : avant propos (et révision)

On a vu le calcul des α... Définissons maintenant les β :

$$\beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda), \qquad \text{(sym. des } \alpha\text{)}$$

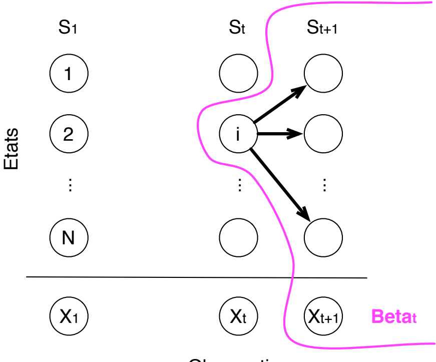
- Initialisation (arbitraire) :

$$\forall i, \qquad \beta_{t=T}(i) = 1$$

- Récursion :

Comment puis partir de l'état i à t et observer la suite des x_{t+1}^T ?

1. Transition de i vers n'importe quel j
2. Observation de x_{t+1} (à partir de j)
3. ... Puis on continue sur $\beta_{t+1}(j)$



On a vu le calcul des α... Définissons maintenant les β :

$$\beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda), \qquad \text{(sym. des } \alpha\text{)}$$

- Initialisation (arbitraire) :

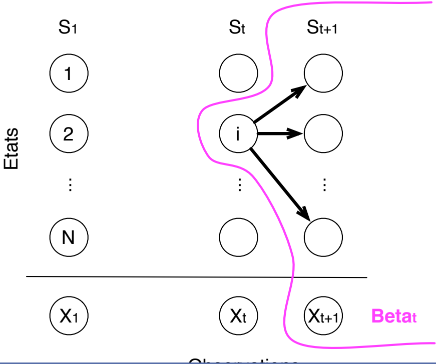
$$\forall i, \qquad \beta_{t=T}(i) = 1$$

- Récursion :

Comment puis partir de l'état i à t et observer la suite des x_{t+1}^T ?

1. Transition de i vers n'importe quel j
2. Observation de x_{t+1} (à partir de j)
3. ... Puis on continue sur $\beta_{t+1}(j)$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(x_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$



Critère : max de vraisemblance sur les observations

- Baum-Welsch **simplifié** : affectation en dur des états :
  + comptage

$$s_t^\star = \arg\max_i p(s_t = i | x_1^T)$$

- Pour la version **complète** :
  $\Rightarrow$ distributions sur les variables manquantes
  + comptage pondéré par les probabilités d'appartenance

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda)$$

$$\gamma_t(i,j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

App. complet : modélisation (2)

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i,j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- Les γ se calculent à partir des :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i | \lambda)$$

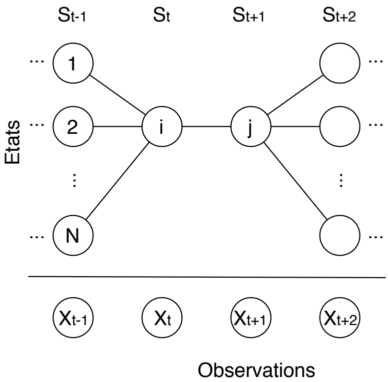
$$\beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda)$$

- Exprimer les γ en fonction des α et β ? ?

$$\gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

En fonction de :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i | \lambda), \quad \beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda)$$



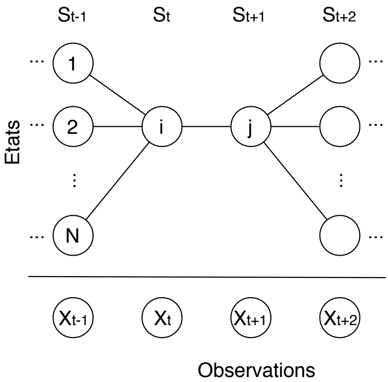
$$\gamma_t(i,j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

En fonction de :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i|\lambda), \quad \beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda)$$

Début ($p(A|B) = \frac{p(A,B)}{p(B)}$) :

$$\begin{aligned}
\gamma_t(i,j) &= p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda) \\
&= \frac{p(s_t = i, s_{t+1} = j, x_1^T | \lambda)}{p(x_1^T|\lambda)} \\
&= \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(x_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{p(x_1^T|\lambda)}
\end{aligned}$$



App. complet : Démo $\gamma(i)$

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i,j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- $\gamma_t(i)$ est une marginale par rapport à $\gamma_t(i,j)$!
- D'où :

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_t(i,j)$$

De γ aux paramètres du MMC

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i,j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- Quel est le lien entre γ et les paramètres du modèle ?
- Interprétation :

$$\sum_t \gamma_t(i,j) = \sum_t p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

$$\sum_t \gamma_t(i) = \sum_t p(s_t = i | x_1^T, \lambda)$$

De γ aux paramètres du MMC

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i,j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- Quel est le lien entre γ et les paramètres du modèle ?
- Interprétation :

$$\sum_t \gamma_t(i,j) = \sum_t p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

Espérance du nombre de transitions de *i* à *j*

$$\sum_t \gamma_t(i) = \sum_t p(s_t = i | x_1^T, \lambda)$$

De γ aux paramètres du MMC

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i,j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- Quel est le lien entre γ et les paramètres du modèle ?
- Interprétation :

$$\sum_t \gamma_t(i,j) = \sum_t p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

Espérance du nombre de transitions de *i* à *j*

$$\sum_t \gamma_t(i) = \sum_t p(s_t = i | x_1^T, \lambda)$$

Espérance du nombre de transitions issues de *i*

Mise à jour des paramètres de A

- Etant donné l'interprétation des γ :

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\sum_t \gamma_t(i,j)}{\sum_t \gamma_t(i)}$$

Il s'agit bien d'une sorte de comptage probabiliste des transitions

- Assez simple pour les π_i

$$\tilde{\pi}_i = \gamma_1(i), \qquad \text{(naturellement normalisé)}$$

- Un peu plus compliqué pour les probabilités d'émission :

$$\tilde{b_j(k)} = \frac{\displaystyle\sum_{t\ t.q.\ x_t=k} \gamma_t(j)}{\sum_t \gamma_t(j)}$$

Comptage probabiliste quand on est dans l'état j de générer l'observation k.

Algorithm 4: Baum-Welch pour l'apprentissage d'un MMC

Data: Observations : X, Structure= N, K

Result: $\tilde{\Pi}^\star, \tilde{A}^\star, \tilde{B}^\star$

Initialiser $\lambda_0 = \Pi^0, A^0, B^0$;

$\rightarrow$ finement si possible;

$t = 0$;

while *convergence non atteinte* **do**

Etape E

Forward/Backward : calcul des α, β;

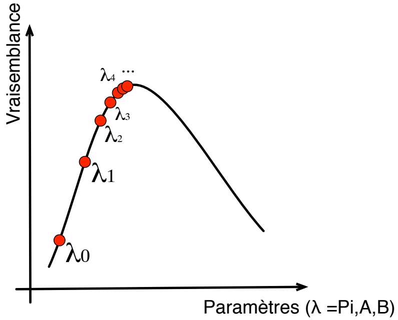
[OPT] Calcul des γ;

Etape M

Mise à jour de Π^t, A^t, B^t;

$t = t + 1$;

Convergence de la vraisemblance



Objectif de EM

Maximiser la vraisemblance
ie : faire coller un modèle à des observations

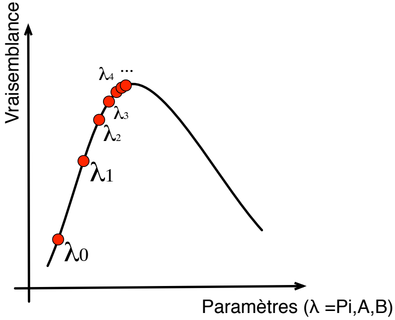
Critère de convergence : maximisation de la vraisemblance
Soit ensemble de séquence d'observations : $X = \{\mathbf{x_i}\}_{i=1,\dots,n}$

$$\log \mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \log(p(\mathbf{x_i}|\lambda))$$

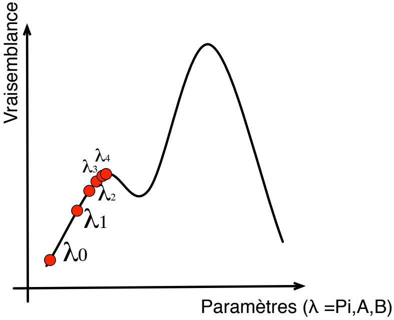
Note : les $\log(p(\mathbf{x_i}|\lambda))$ sont calculés par Viterbi ou la méthode des α, selon la stratégie d'optimisation choisie.

Convexité... Ou pas

Optimisation convexe :



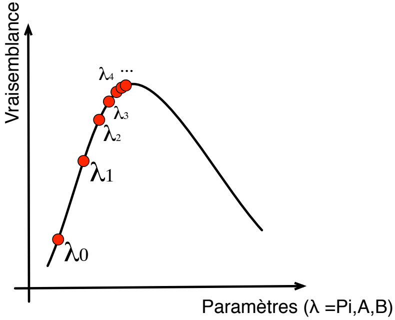
Optimisation non-convexe :



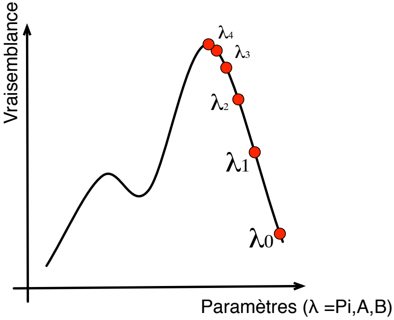
EM

Pas de garantie sur un optimum global dans le cas non-convexe...
MMC = problème non convexe en général

Optimisation convexe :

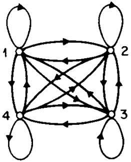


Optimisation non-convexe :

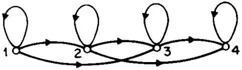


EM

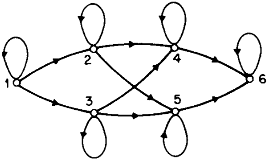
Pas de garantie sur un optimum global dans le cas non-convexe...
MMC = problème non convexe en général $\Rightarrow$**Bien choisir** λ_0 !



(a)



(b)



(c)

- (a) Modèle ergodique
  (= complètement connecté)
- Modèle gauche-droite
  - exhaustif (cf TME)
  - (b) avec saut possible

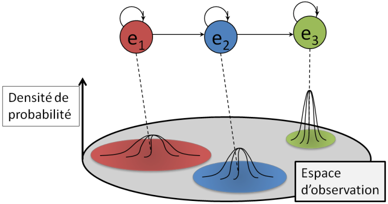
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}.$$

  - (c) chemins parallèles
- Modèle cyclique

Initialisation aléatoire + connaissance *a priori* sur le problème

Cas le plus simple :

- 1 état j = 1 gaussienne $\mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j)$
- Pas de changement pour Π, A



Une observation x_t appartient à toute les gaussiennes (avec une pondération) :

$$\tilde{\mu}_j = \frac{\sum_t \gamma_t(j) x_t}{\sum_t \gamma_t(j)} \qquad \sigma_j^2 = \frac{\sum_t \gamma_t(j)(x_t - \mu_j)^2}{\sum_t \gamma_t(j)}$$

Facilement extensible à une mixture de gaussiennes par état (cf Rabiner)

Variante : MMC sur distributions multi-variées

- Distribution des observations multi-variée = plusieurs observations à chaque pas de temps.

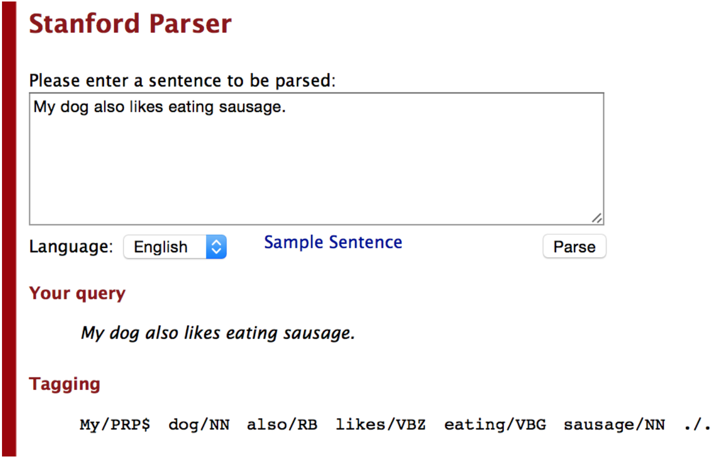
$$x_1^T \Rightarrow \mathbf{x}_1^T, \quad \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^d$$

  $\Rightarrow$ Il suffit de prendre une distribution multi-variée pour les émissions (eg : une gaussienne à D dimensions)

- Ca ne change rien au reste de la résolution

Exemple : étiquetage morpho-syntaxique par des modèles markoviens

- Etape de traitement intermédiaire pour des applications en **langage naturel** et en **recherche d'information.**
- But :
  - Associer à chaque terme d'une phrase une **étiquette morpho-syntaxique**
  - **Exemple :** *article, préposition, adjectif, nom commun singulier, nom propre, nom commun pluriel, pronom personnel, adverbe, verbe infinitif, verbe au présent ou au passé,* etc. (entre 30 et 150 étiquettes)
  - L'étiquetage doit déterminer les catégories syntaxiques des mots dans la phrase et doit en ce sens résoudre des problèmes d'ambiguïté.
  - **Performances :** autour de 95 % en anglais



Démo online : `http://nlp.stanford.edu:8080/parser/`

Historique : étiquetage morpho-syntaxique

- Information syntagmatique : utiliser les séquences d'étiquettes non ambiguës pour désambiguer : 1ers étiqueteurs (1971) 77% étiquettes correctes

Exemple wikipedia :
"*Papa aime Maman*" et "*Le boulanger fait son pain*" ont le même axe syntagmatique. "*Papa*" et "*le boulanger*" sont des paradigmes du sujet, "*aime*" et "*fait*" sont des paradigmes du verbe, "*Maman*" et "son *pain*" sont des paradigmes du complément.

- Information lexicale statistique : attribuer à un mot son étiquette la plus fréquente (1987) : 90 %
- Premiers étiqueteurs performants sont basés sur des modèles markoviens (1990)
- Actuellement bon étiqueteurs statistiques ou/et à base de règles : utiliser à la fois l'information lexicale et l'information sur les séquences d'étiquettes.

Modélisation (Markovienne)

w_i	$i$ème mot de la séquence
t_i	étiquette associée à w_i
$t(i)$	$i$ème étiquette parmi l'ensemble d'étiquettes
$w(i)$	$i$ème mot du corpus
$C(w(i))$	$\sharp$ occurrences de $w(i)$ dans le corpus
$C(t(i))$	$\sharp$ occurrences de $t(i)$ dans le corpus
$C(t(i), t(k))$	$\sharp$ occurrences du couple $t(i) - t(k)$ dans le corpus
$C(w(i), t(k))$	$\sharp$ occurrences de $w(i)$ étiquetées $t(k)$ dans le corpus
w_i^j, t_i^j	séquences de mots (étiquettes) $w_i \ldots w_j (t_i \ldots t_j)$

- On retrouve les notations markoviennes classiques.
- Subtilité : projection dans la séquence d'une part et sur un dictionnaire d'autre part.
- Questions :
  - Quels sont les états, les observations ?
  - Quelle hypothèse faire sur l'automate ?

Modélisation (2)

- On peut partir d'un modèle ergodique (complètement connecté)
- Modèle MMC (d'ordre 1)
  - Etats : étiquettes

$$p(t_{i+1}|t_1^i) = p(t_{i+1}|t_i), \quad p(t_i|t_j) = \frac{C(t_i, t_j)}{C(t_j)}$$

  - Observation : mots (par rapport aux états=étiquettes)

$$p(w(i)|t(j)) = \frac{C(w(i), t(j))}{C(t(j))}$$

  - Etiquetage optimal (= étiquettes les plus vraisemblables)

$$\begin{aligned}\arg\max_{t_1^n} p(t_1^n|w_1^n) &= \arg\max_{t_1^n} p(w_1^n|t_1^n)p(t_1^n)\\ &= \arg\max_{t_1^n} \prod_{i=1}^{n} p(w_i|t_i)p(t_i|t_{i-1})\end{aligned}$$

Différences avec les MMC classiques

- Différences :
  - ici, on utilisera des corpus étiquetés au niveau mot
  - ce sont donc des modèles de markov ≪ visibles ≫
  - on peut également mixer des données non étiquetées et des données étiquetées : apprentissage semi-supervisé
- Algorithme d'apprentissage
  - pour tous les tags $t(i), t(j)$, pour tous les mots $w(i)$:

$$p(t_i|t_j) = \frac{C(t_i, t_j)}{C(t_j)}, \quad p(w(i)|t(j)) = \frac{C(w(i), t(j))}{C(t(j))}$$

- Intérêt principal : le décodage
  - Utilisation de Viterbi, estimation des :

$$\delta_i(j) = \max_{t_1^{i-1}} p(t_1^{i-1}, t_i = j, w_1^i|\lambda), \quad \text{Init : } \delta_i(.) = 1,\ \delta_i(x \neq .) = 0$$

Quelle est la probabilité de l'étiquette j et de l'ensemble du passé (mots + étiquetage)

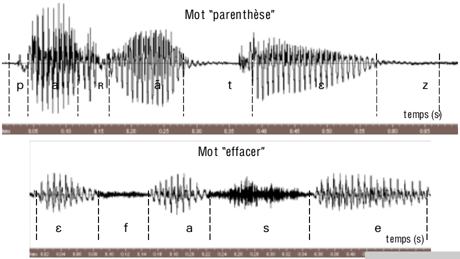


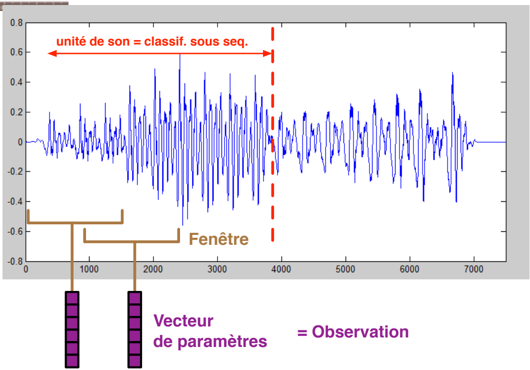
Fig. 1.2 Audiogramme de signaux de parole.

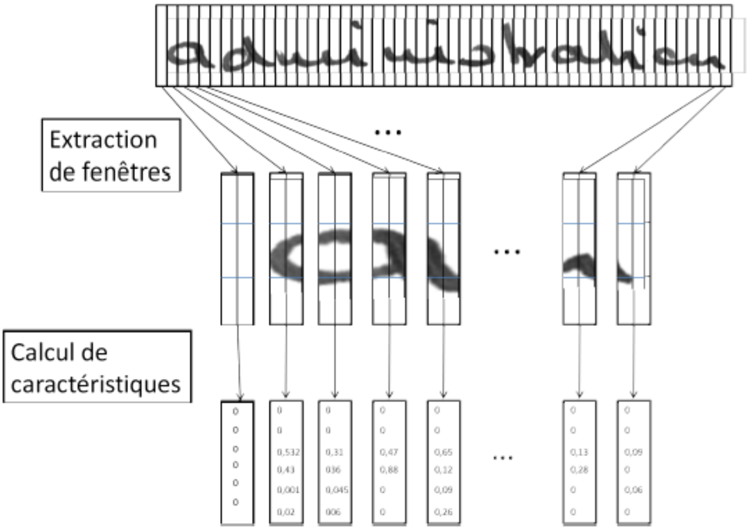
Crédit : Thierry Dutoit (Univ. Mons)

Tâche de segmentation
+ reconnaissance

Pré-traitements et mise en forme

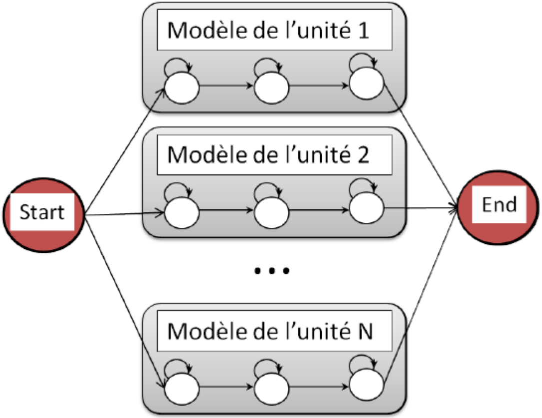
- Caractéristiques fréquentielles
- Puissance
- ...



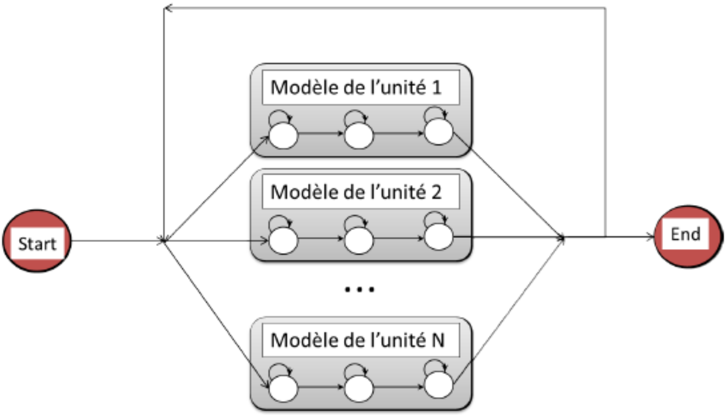

Extraction
de fenêtres
Calcul de
caractéristiques
...
0 0 0 0 0 0
0 0 0,532 0,43 0,001 0,02
0 0 0,31 036 0,045 006
0 0 0,47 0,88 0 0
0 0 0,65 0,12 0,09 0,26
0 0 0,13 0,28 0 0
0 0 0,09 0 0,06 0

Architecture

- 1 modèle par unité de son (e.g. dictionnaire phonétique)

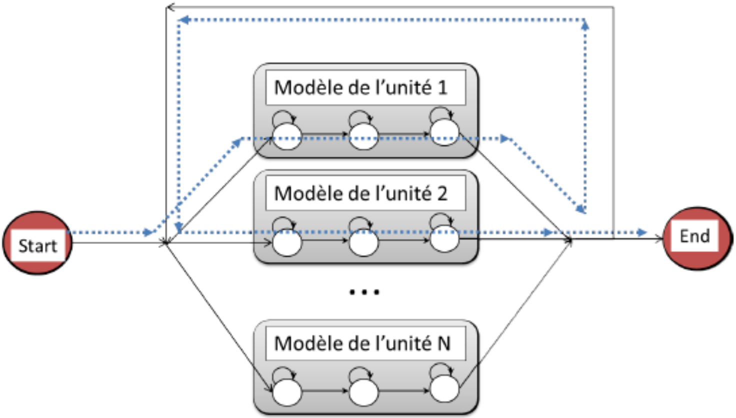


- ... Et re-bouclage après détection

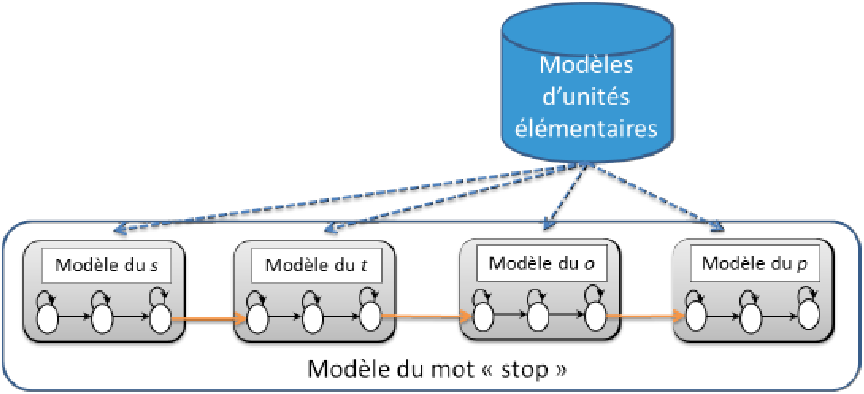


Architecture

- ... Modèle cyclique

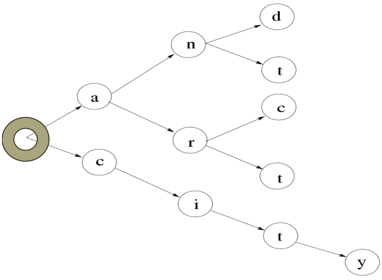


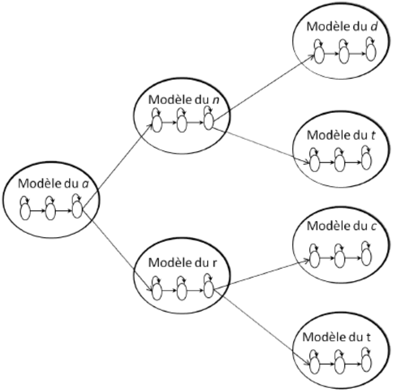
- Apprentissage classique :



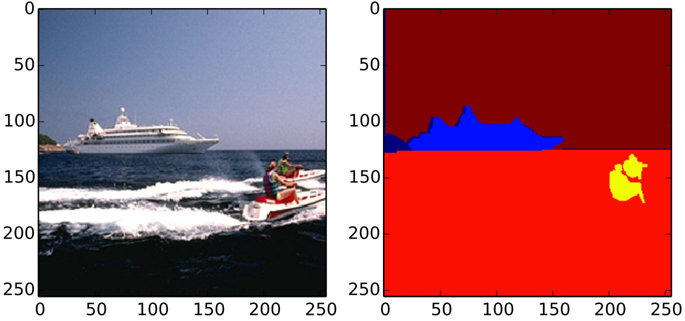
Post-processing (affinage)

- Soft
  - Stats d'enchainements de caractères (bi-trigrams)
- Hard
  - Utilisation d'une structure d'arbre préfixé
  - + Stratégie d'élagage Beam-search (autour du meilleur)
    - la valeur du beam (nb de faisceaux),



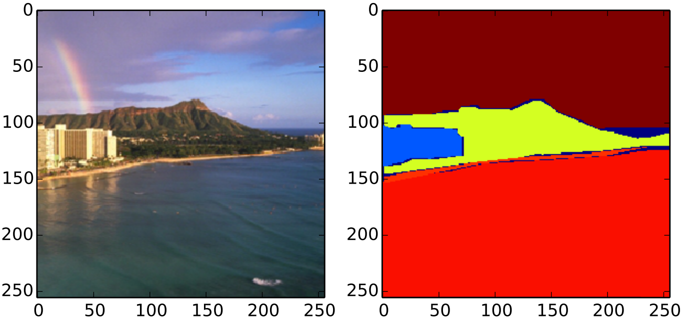


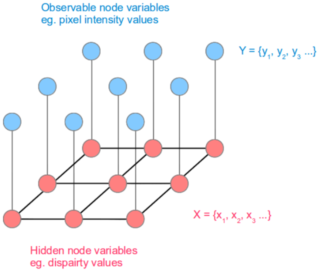
- Bases étiquetées : exemple Sift flow

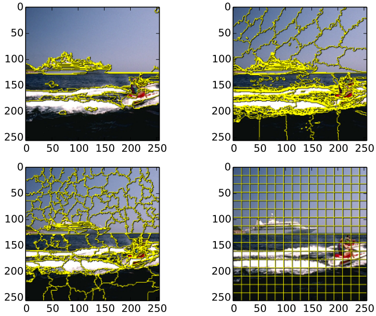


Segmentation image

- Bases étiquetées : exemple Sift flow

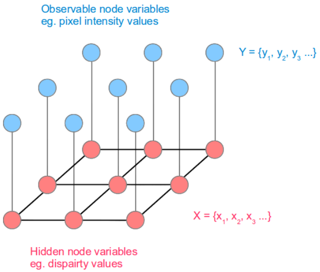


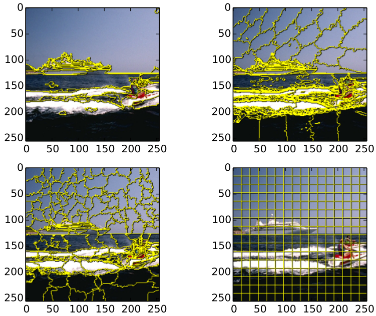




- Est-il possible de définir un modèle de markov 2D ?

Réseau de Markov (chaine 2D)





- Est-il possible de définir un modèle de markov 2D ?
  - Matrice de transition très complexe (même en simplifiant)
  - Viterbi ingérable

Proposition 1

- Utilisation de l'échantillonnage de Gibbs (cas particulier de MCMC, cf semaine prochaine)

1. Initialise $x_{0,1:n}$.
2. For $i = 0$ to $N-1$
   - Sample $x_1^{(i+1)} \sim p(x_1 | x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$.
   - Sample $x_2^{(i+1)} \sim p(x_2 | x_1^{(i+1)}, x_3^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$.

     $\vdots$
   - Sample $x_j^{(i+1)} \sim p(x_j | x_1^{(i+1)}, \ldots, x_{j-1}^{(i+1)}, x_{j+1}^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$.

     $\vdots$
   - Sample $x_n^{(i+1)} \sim p(x_n | x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \ldots x_{n-1}^{(i+1)})$.

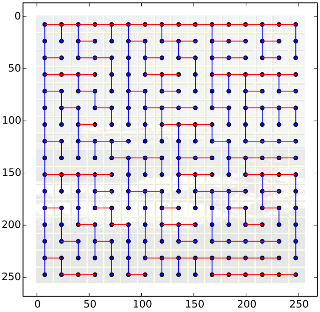
- Générer des points selon une distribution jointe complexe

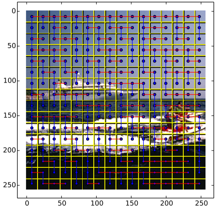
- Génération d'une population
- Statistique sur les états (avec une hypothèse d'indépendance pour relacher les contraintes)

An Introduction to MCMC for Machine Learning
Andrieu, De Freitas, Doucet, Jordan

Proposition 2

- Définir un arbre aléatoire dans l'image





- Utiliser une variante de viterbi dans les arbres...
- Et itérer le processus !

Proposition 3 : Conditional Random Fields

- Séquence/champs de mots/pixels $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_T\}$
- Sequence/champ d'étiquettes $\mathbf{s}$

Introduction de fonctions de scoring basées sur des descripteurs structurés :

$$score(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{t=1}^{T} \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1})$$

Si on préfère des probabilités (comme pour la régression logistique) :

$$p(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp(score(\mathbf{s}, \mathbf{x})) \text{ et : } p(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{\exp(score(\mathbf{s}, \mathbf{x}))}{\sum_{\mathbf{s}'} \exp(score(\mathbf{s}', \mathbf{x}))}$$

Mc callum `http://people.cs.umass.edu/~mccallum/papers/crf-tutorial.pdf`
`http://pages.cs.wisc.edu/~jerryzhu/cs838/CRF.pdf`

Apprentissage CRF

Critère à optimiser : vraisemblance conditionnelle (cf regression logistique)

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \exp\left\{ \sum_j \sum_{t=1}^{T} \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1}) \right\}$$

$$\mathcal{L}_{cond} = \sum_n \log p(\mathbf{s}^n|\mathbf{x}^n) = \sum_n \sum_j \sum_{t=1}^{T} \lambda_j f_j(\mathbf{x}^n, t, s_t^n, s_{t-1}^n) - \sum_n \log(Z(\mathbf{x}_n))$$

Comment optimiser ?

Apprentissage CRF

Critère à optimiser : vraisemblance conditionnelle (cf regression logistique)

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \exp\left\{\sum_j \sum_{t=1}^{T} \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1})\right\}$$

$$\mathcal{L}_{cond} = \sum_n \log p(\mathbf{s}^n|\mathbf{x}^n) = \sum_n \sum_j \sum_{t=1}^{T} \lambda_j f_j(\mathbf{x}^n, t, s_t^n, s_{t-1}^n) - \sum_n \log(Z(\mathbf{x}_n))$$

Comment optimiser ?
Montée de gradient $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j}$

$$\lambda_j \leftarrow \lambda_j + \sum_{n,t} f_j(\mathbf{x}^n, t, s_t^n, s_{t-1}^n) - \sum_{n,t} \sum_{s'_t, s'_{t-1}} f_j(\mathbf{x}^n, t, s'_t, s'_{t-1}) p(s'_t, s'_{t-1}|\mathbf{x}^n)$$

Critère à optimiser : vraisemblance conditionnelle (cf regression logistique)

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \exp \left\{ \sum_j \sum_{t=1}^{T} \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1}) \right\}$$

$$\mathcal{L}_{cond} = \sum_n \log p(\mathbf{s}^n|\mathbf{x}^n) = \sum_n \sum_j \sum_{t=1}^{T} \lambda_j f_j(\mathbf{x}^n, t, s_t^n, s_{t-1}^n) - \sum_n \log(Z(\mathbf{x}_n))$$

Comment optimiser ?

- La difficulté réside essentiellement dans le facteur de normalisation

CRF : bilan

- Un formalisme discriminant très performant...
- Mais un cout d'inférence élevé

$$score(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{t=1}^{T} \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1})$$

La fonction de scoring n'est pas triviale