bruno.escoffier@lip6.fr

1 Modélisation et résolution graphique

Exercice 1 (Optimisation du fret)

On souhaite tirer le meilleur rendement d'un avion transporteur qui rapporte 3000 € par tonne de fret transportée dans la cabine et 1000 € par tonne de fret transportée dans la soute, sachant que la capacité de la soute est de 20 tonnes et celle de la cabine est de 10 tonnes, que pour des raisons de sécurité, la charge maximale que peut accepter l'avion est de 28 tonnes et enfin que, pour des raisons d'équilibrage, le fret de la cabine amputé d'une tonne ne doit pas excéder les deux tiers du fret de la soute.

Q 1.1 Modéliser ce problème comme un programme linéaire.

Q 1.2 Effectuer une résolution graphique et en déduire le rendement optimal par vol.

Q 1.3 Quelle augmentation de rendement peut-on obtenir si l'on tolère deux tonnes de plus en cabine ?

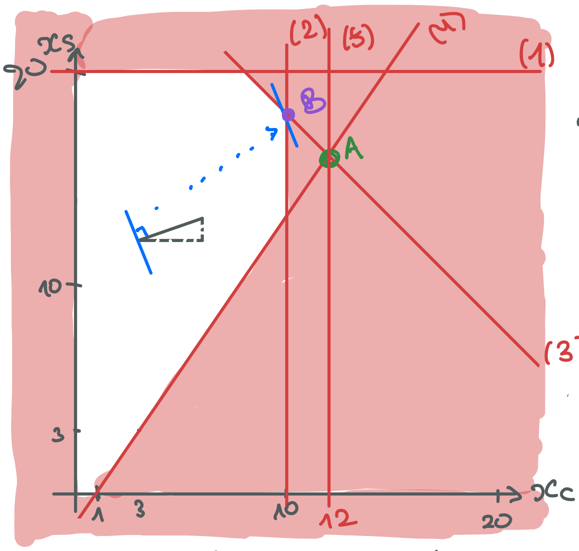
① Variables x_c : quantité (en tonnes) en cabine
x_s : quantité (en tonnes) en soute

Fonction objectif : Max $3000 x_c + 1000 x_s$ = revenu généré.

Contraintes :
$x_s \leq 20$ (capacité soute)
$x_c \leq 10$ (capacité cabine)
$x_s + x_c \leq 28$ (capacité avion)
$x_c - 1 \leq 2/3\, x_s$ (equilibrage)
$x_c \geq 0,\ x_s \geq 0$

On obtient le PL suivant

$$\begin{cases} \text{Max } 300 x_c + 1000 x_s \\ \text{S.C} \left| \begin{array}{ll} x_s \leq 20 & (1) \\ x_c \leq 10 & (2) \\ x_s + x_c \leq 28 & (3) \\ 3x_c - 2x_s \leq 3 & (4) \\ x_c, x_s \geq 0 & \end{array} \right. \end{cases}$$



• $\begin{cases} x_c + x_s = 28 \\ 3x_c - 2x_s = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x_c = 59 \\ x_s = 28 - x_c \end{cases}$

$\begin{cases} x_c = \frac{59}{2} & > 10 \\ x_s = 28 \cdot \frac{58}{5} \end{cases}$

②
La solution optimale correspond au pt B (intersection de (2) et (3))

$\begin{cases} x_c^* = 10 \\ x_s^* = 18 \end{cases}$, de valeur $3000 \times 10 + 1000 \times 18 = 48\,000$ €

③ La contrainte (2) devient $x_c \leq 12$. La nouvelle solution optimale correspont au pt A, à l'intersection de (3) et (4)

$\begin{cases} x_c^* = \frac{59}{5} \\ x_s^* = \frac{81}{5} \end{cases}$, de valeur $3000 \times \frac{59}{5} + 1000 \times \frac{81}{5} = 51600$.

Soit une augmentation de 3600 €

Exercice 2 (De l'importance du gradient)

On s'intéresse aux valeurs de x_1 et x_2 qui minimiseront la fonction économique $f_n(x_1, x_2) = nx_1 + 20x_2$ sous les contraintes suivantes :

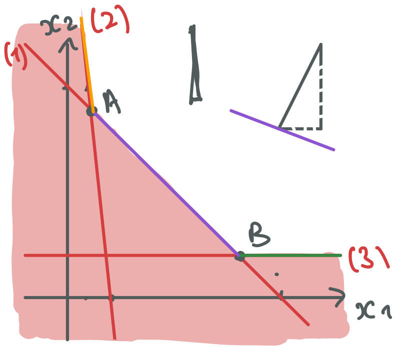
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 & \geq & 10 \\ 10x_1 + x_2 & \geq & 10 \\ x_2 & \geq & 1 \end{cases}$$

Q 2.1 Résoudre le problème graphiquement pour $n = 10$

Q 2.2 Déterminer l'ensemble N des valeurs de n pour lesquelles la solution trouvée en 1) est optimale pour f_n.

Q 2.3 Donnez la ou les solution(s) optimale(s) en fonction de n.

1



Pour $n = 10$, $f_{10}(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2$

L'optimum correspond au point (B), de coordonnées

$x_1 = 4$, $x_2 = 1$ (de valeur 60).

Min $-x_1 + 20x_2$
$(1000, 1) = -980$
$(10000, 1) = -9980$

2 et 3

- $n < 0$: $\exists$ solutions de valeurs aussi petite que l'on veut "opt $= -\infty$"
  $\rightarrow$ pas de solution optimale
  $(x_1, 1)$ réalisable $(x_1 \geq 4)$, de valeur $20 + nx_1 \xrightarrow[x \to \infty]{} -\infty$
  $\underbrace{(x_1, 1)}_{\text{sur } (3)}$ pour $x_1 \geq 4$
- $n = 0$: $f_0(x_1, x_2) = 20x_2$ solutions optimales $(x_1, 1)$ pour $x_1 \geq 4$.
- $0 < n < 20$ (B) est l'unique solution optimale
- $n = 20$: $f(x_1, x_2) = 20x_1 + 20x_2$ solutions optimales : segment $[A, B]$
- $20 < n < 200$ (A) est l'unique solution optimale
- $n = 200$: $f(x_1, x_2) = 20(10x_1 + x_2)$ solutions optimales : $\frac{1}{2}$ droite constituée des pt de (2) au-dessus de (A)
  $((x_1, 10x_1 - 10), \text{ pour } x_1 \in x^A)$
- $n > 200$ $\exists$ des solutions de valeurs arbitrairement petite, "opt $= -\infty$"
  $\rightarrow$ pas de solution optimale
  $\underbrace{(x_1, 10 - 10x_1)}_{\text{sur } (2)}$ pour $x_1 \leq x_A$: réalisable, de valeur $nx_1 + 20x_2$
  $= nx_1 + 20(10 - 10x_1)$
  $= (n - 200)x_1 + 200$
  $\xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ (car $n > 200$)

Exercice 3 (Un whisky sur mesure)

Il existe trois types de Scotch whisky : les "Malt", qui ne contiennent que de l'orge, les "Grain", qui sont produits à partir de plusieurs céréales, et les "Blend", qui sont une combinaison de Malt et de Grain whisky.

Les Blend sont avantageux économiquement par rapport aux Malt car la fabrication du Grain whisky est moins onéreuse que celle des Malt, et le mélange des deux permet d'obtenir des breuvages de meilleure qualité que les Grain. En principe, pour faire un blend, on mélange entre quinze et cinquante Malt différents et trois ou quatre Grain. En ce qui nous concerne, nous ne mélangerons que les 4 Malt et les 2 Grain du tableau qui suit.

Whisky	intensité	sensation	goût	prix unitaire
Laphroaig	fort 4	frais 1	tourbé 4	150
Bunnahabhain	moyen 2	frais 1	sucré 3	125
Ardberg	piquant 3	épais 2	salé 1	112
Glenfiddich	doux 1	sec 3	sucré 3	135
Grain I	moyen 2	frais 1	amer 2	55
Grain II	doux 1	sec 3	sucré 3	93

Le problème consiste à doser correctement les différents whiskies, de manière à ce que les qualités subtiles des différents Malt ne disparaissent pas, et que le prix de revient soit le meilleur possible. Pour cela on souhaite déterminer les proportions des différents whiskies pour obtenir un blend moyen, épais, à mi-chemin entre sucré et tourbé, et qui soit au meilleur prix de revient. On conviendra qu'un blend qui se respecte contient au moins 70% de Malt. De plus, on supposera que l'intensité, la sensation et le goût peuvent être représentés par les échelles numériques suivantes :

Intensité :	doux = 1	moyen = 2	piquant = 3	fort = 4
Sensation :	frais = 1	épais = 2	sec = 3	
Goût :	salé = 1	amer = 2	sucré = 3	tourbé = 4

et que l'on peut effectuer des opérations arithmétiques sur ces échelles : par exemple, mélanger 1 unité d'un whisky d'intensité 2 avec 1 unité d'un whisky d'intensité 3 donne 2 unités d'un whisky d'intensité 2,5. En outre, comme l'évaluation des whiskies est assez subjective, on admettra que les échelles données ci-dessus ont une tolérance de 0,3 ; autrement dit, tous les whiskies d'intensité comprises entre 1,7 et 2,3 sont moyens.

Q 3.1 Après avoir défini les variables de décision pertinentes, formaliser ce problème comme un programme linéaire.

Variables de décision

$x_1, \dots, x_6$ proportion du whisky i dans le mélange

· Fonction objectif $\min z = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = 150x_1 + 125x_2 + 112x_3 + 135x_4 + 55x_5 + 93x_6$.

↳ prix unitaire

· Contraintes :

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0,7$. (pourcentage de Malt)

$\sum x_i = 1$ (proportion totale)

$x_i \geq 0$

$1.7 \leq 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \leq 2,3$

$1.7 \leq x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 \leq 2,3$

$2,7 \leq 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 \leq 3,8$ → mi-chemin 3,5.

Exercice 10 (Ordonnancement)

Soit un projet qui se décompose en sept tâches numérotées de a à g. On s'intéresse à l'ordonnancement optimal des tâches du projet sur la base des données suivantes :

Tâches	a	b	c	d	e	f	g
Durée	6	3	6	2	4	3	1
Précédentes	–	–	–	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, d\}$	$\{c, e, f\}$

On précise que les tâches figurant comme précédentes d'une tâche donnée doivent être achevées avant que celle-ci ne commence.

Q 10.1 Ecrire un programme linéaire qui permette de déterminer un ordonnancement optimal. Un ordonnancement optimal est un calendrier de réalisation des tâches qui respecte les contraintes de précédence et conduise à une date finale du projet le plus tôt possible.

$x_A, \dots, x_g$: date de fin

y : date de fin projet

contrainte "bavant d" durée de d

contraintes

$x_d - x_b \geq p_d = 2$

$x_e - x_b \geq p_e = 4$

$x_f - x_a \geq p_f = 3$

$x_f - x_d \geq p_f = 3$

$x_g - x_c \geq p_g = 1$

$x_g - x_e \geq p_g = 1$

$x_g - x_f \geq p_g = 1$

$x_A, \dots, x_g \geq 0$

$x_A, \dots, x_g \leq y$

$x_A \geq 6$, $x_B \geq 3$, $x_C \geq 6$, $\vdots$, $(x_G \geq 1)$ date de fin d'une tache est au moins égale à sa durée.

Fonction objectif : min (y).

ou $z_A \dots z_G$: date de debut de chaque tâche   Fct obj : min y.

y : date de fin du projet.

$z_D \geq z_B + 3$ ← durée de B

$\vdots$) contraintes de précédence

$y \geq z_A + 6$ ← durée ; z_A ← debut

$\vdots$

$z_A, z_B \dots z_G \geq 0$.

Exercice 9 (Producteurs et consommateurs de blé)

Le blé est produit dans les régions Centre et Poitou-Charentes et consommé dans le Limousin et en Auvergne. Le Centre produit 740 milliers de tonnes par an et le Poitou-Charentes 305 milliers de tonnes. Dans le même temps, le Limousin consomme 540 milliers de tonnes et l'Auvergne 505 milliers de tonnes. L'émission de CO_2 liée au transport d'une tonne de blé du Centre vers le Limousin est de 26 kg, de 34 kg du Centre vers l'Auvergne, de 20kg du Poitou-Charentes vers le Limousin, et de 38 kg du Poitou-Charentes vers l'Auvergne.

Q 9.1 Ecrire un programme linéaire pour déterminer la quantité de blé (en tonnes et en fractions de tonnes) à transporter de chaque région productrice vers chaque région consommatrice, de façon à minimiser l'empreinte carbone.

Variables : x_{ij} quantité transportée de la région productrice i à la région consommatrice j

$x_{CL}, x_{CA}, x_{PL}, x_{PA}$

Fct objectif : min $26x_{CL} + 34x_{CA} + 20x_{PL} + 38x_{PA}$

Contraintes

$x_{CL} + x_{CA} \leq 740\,000$
$x_{PC} + x_{PA} \leq 305\,000$) contrainte sur les productions

$x_{CL} + x_{PL} \leq 540\,000$
$x_{CA} + x_{PA} \leq 505\,000$) contrainte sur les consommations

Pb de transport $x_{CL}, x_{CA}, x_{PL}, x_{PA} \geq 0$

Exercice 6 (Linéarisations)

On considère les points (x_i, y_i) $(i = 1, \dots, 7)$ du plan :

$$(1,3), (2,5), (3,7), (5,11), (7,14), (8,15), (10,19)$$

On cherche une droite qui passe approximativement par ces points (les points ne sont pas alignés).

Q 6.1 Ecrire un programme linéaire qui détermine la droite d'équation $y = ax + b$ minimisant la somme des valeurs absolues des écarts :

$$\sum_{i=1}^{7} |y_i - ax_i - b|$$

Q 6.2 Ecrire un programme linéaire qui détermine la droite d'équation $y = ax + b$ minimisant le maximum des valeurs absolues des écarts : max $|y_i - ax_i - b$

① $\text{Min} \sum_{i=1}^{7} |y_i - a x_i - b|$ x_i et y_i sont les données.

a et b sont les variables (ce qu'on cherche)

→ pas linéaire car valeurs absolues

(I) $\text{Min} \sum_{i=1}^{7} |z_i|$

$\text{I} - \text{II}$

(II) $\text{Min} \sum_{i=1}^{7} w_i$

s.c. $w_i = |z_i|$, $i = 1 \dots 7$

$\text{II} \Leftrightarrow \text{III}$ Dans le sens où les solutions optimales sont les mê

(III) $\text{Min} \sum_{i=1}^{7} w_i$

s.c. $w_i \geq |z_i|$

$\text{III} - \text{IV}$

→ Dans une sol° optimale on a $w_i = |z_i|$ (on minimise $\sum w_i$ pas d'autre contraintes)

(IV) $\text{Min} \sum_{i=1}^{7} w_i$

s.c. $w_i \geq z_i$

$w_i \geq -z_i$.

$w_i \geq z_i \iff w_i \geq |z_i|$

0 −1

$a \geq |b| \iff \begin{cases} a \geq b \\ a \geq -b \end{cases}$

1. $\text{Min} \sum_{i=1}^{7} |y_i - a x_i - b|$

$$\begin{cases} \text{Min} \sum_{i=1}^{7} w_i \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} w_i \geq y_i - a x_i - b_i \\ w_i \geq -(y_i - a x_i - b) \end{array} \right. \end{cases}$$

9 variables 7 w_i, a, b.

1.bis

$$\begin{cases} \text{Min } z_i^+ + z_i^- \\ \text{s.c.} \left| \begin{array}{l} z_i^+ - z_i^- = y_i - a x_i - b \\ z_i^+, z_i^- \geq 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

à l'optimum $z^+ = 0$ ou $z^- = 0$ et alors $z_i^+ + z_i^- = |y - a x_i - b|$

$a = a^+ - a^-$ $3 = 3 - 0$ $-2 = 0 - 2$

$|a| = a^+ + a^-$ $|3| = 3 + 0$ $|-2| = 0 + 2$

② I. $\text{Min} \max_{i=1..7} |y_i - a_i x_i - b|$

II. $\begin{cases} \text{Min } w \\ \text{s.c. } w \geq |y_i - a x_i - b| \quad i = 1..7. \end{cases}$

On enlève max

et introduit une variable

tq plus grand que chaque instance

$\text{Min} \max\{z_1, z_2\}$

Il minimise donc à l'optimum dans II. $w = \max|..|$

$\begin{cases} \text{Min } w \\ w \geq z_1 \\ w \geq z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Min } w \\ w \geq \max\{z_1, z_2\} \end{cases}$

III. $\begin{cases} \text{Min } w \\ \text{s.c.} \begin{array}{l} w \geq y_i - a x_i - b \\ w \geq -(y_i - a x_i - b) \end{array} \quad i = 1..7. \end{cases}$

Exercice 7 (Harvard)

Dans une université Américaine, pour obtenir le premier semestre du master d'informatique de l'option recherche opérationnelle, un étudiant doit valider au moins 2 UEs (unités d'enseignement) de mathématiques, au moins deux UEs de recherche opérationnelle et au moins 2 UEs d'informatique. L'UE de *calcul* est considérée comme une pure UE de mathématiques et ne compte que pour l'exigence portant sur le nombre d'UEs en mathématiques. De même l'UE de *programmation* est considérée comme une pure UE d'informatique et ne compte que pour l'exigence sur le nombre d'UEs en informatique. En revanche, certaines des UEs sont mixtes et peuvent être utilisées pour satisfaires plusieurs exigences. Ainsi, l'UE *optimisation* compte à la fois comme une UE de mathématiques et comme une UE de recherche opérationnelle, l'UE *structures de données* compte à la fois comme UE d'informatique et de mathématiques. L'UE *statistiques* compte à la fois comme une UE de mathématiques et comme une UE de recherche opérationnelle. L'UE de *simulation* compte à la fois comme UE de recherche opérationnelle et d'informatique. Enfin l'UE *prévision* compte à la fois comme une UE de recherche opérationnelle et de mathématiques.

Certains des cours figurent comme prérequis pour d'autres. Ainsi le cours dispensé dans l'UE *calcul* est un prérequis pour suivre l'UE de *statistiques*; l'UE de programmation est un prérequis pour suivre l'UE *simulation* ou l'UE *structures de données*; l'UE *statistiques* est un prérequis pour suivre l'UE *prévision*.

Q 7.1 Formuler un programme mathématique en variables binaires qui permette de trouver le nombre minimal d'UEs que l'on doit suivre pour être en mesure d'obtenir le premier semestre de l'option recherche opérationnelle.

		Info	RO	Maths
1	calcul			x
2	prog	x		
3	optim		x	x
4	sd	x		x
5	stat		x	x
6	simu	x	x	
7	prév		x	x

Variables : $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'UE est prise} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ 7 variables

Fct objectif $\quad \min \sum_{i=1}^{7} x_i$ (Nombre d'UE suivies)

$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 2$ (nb d'UE de maths suivies)

$x_2 + x_4 + x_6 \geq 2$ (——— info ———)

$x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 2$ (——— RO ———)

(Calcul prerequis pour stat, stat ⇒ calcul)

Calcul

$x_5 \leq x_1$ (si $x_1 = 0$ alors $x_5 = 0$ — si je ne suis pas calcul je ne peux pas suivre stat

$x_6 \leq x_2$ si $x_i = 1$ alors $x_5 = 1$ / 0 — si j'ai suivie calcul, je suis libre de suivre stat ou pas

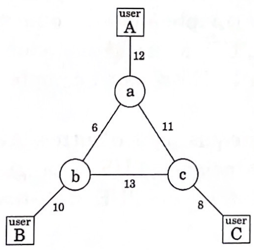
$x_4 \leq x_2$

$x_3 \leq x_5$

$x_i \in \{0,1\}$ Variables binaires → bcp plus complexe à résoudre

Exercice 5 (Affectation optimale de bande passante)

On considère dans cet exercice une version miniaturisée du type de problème qu'un fournisseur d'accès Internet peut rencontrer.
Supposons qu'on gère le réseau représenté sur la figure ci-dessous, où A, B, C représentent les utilisateurs finaux et a, b, c des noeuds intermédaires de transit. Les valeurs indiquées sur les connexions correspondent aux bandes passantes disponibles. On a besoin d'établir trois connexions : entre les utilisateurs A et B, entre B et C, et entre A et C. Chaque connexion nécessite au moins deux unités de bande passante, mais peut se voir allouée davantage. La connexion A-B rapporte 3 Euros par unité de bande passante, et les connexions B-C et A-C rapportent 2 Euros et 4 Euros respectivement.
Chaque connexion peut être routée de deux façons, via un long chemin ou un court chemin, ou par une combinaison des deux : par exemple, deux unités de bande passante via le court chemin, et une unité via le long chemin.



Q 5.1 Ecrire un programme linéaire permettant de déterminer les routages permettant de maximiser le revenu du réseau.

Q 5.2 Supposons qu'on relâche la contrainte imposant que chaque connexion doit se voir allouée au moins deux unités de bande passante. Est-ce que l'optimum change ?

Q 5.3 On rappelle qu'un programme de PL en variables continues peut se résoudre en temps polynomial en la taille de l'instance par les méthodes des points intérieurs (hors programme de MOGPL). Est-ce que le programme linéaire proposé permet de conclure à la polynomialité du problème d'affectation optimale de bande passante ?

Variables :

x_{AB}	BP sur	AabB
y_{AB}	—	AacbB
x_{AC}		AacC
y_{AC}		AabcC
x_{BC}		BbcC
y_{BC}		BbacC

Correcte mais inefficace si le réseau est grand

Fct obj

Max $z = 4x_{AC} + 4y_{AC} + 3x_{AB} + 3y_{AB} + 2x_{BC} + 2y_{BC}$

s.c. $x_{AB} + y_{AB} + x_{BC} + y_{BC} \leq 10$ (capacité de l'arête (Bb))

$x_{AB} + y_{AC} + y_{BC} \leq 6$ — ab

⋮

$x_{AB} + y_{AB} \geq 2$
$x_{BC} + y_{BC} \geq 2$ (au moins 2)
$x_{AC} + y_{AC} \geq 2$

si on enlève ces contraintes

$x_{AB}, y_{AB}, x_{AC}, y_{AC}, x_{BC}, y_{BC} \geq 0$

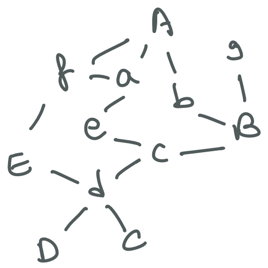
Solution optimale $\underbrace{x_{AB} = 0 \quad y_{AB} = 7}_{7}$ $\underbrace{x_{BC} = 1{,}5 \quad y_{BC} = 1{,}5}_{3}$ $\underbrace{x_{AC} = 0{,}5 \quad y_{AC} = 4{,}5}_{5}$

② Les contraintes ne sont pas actives / saturés à l'optimum

Si on les enlève, la valeur de l'optimum ne change pas.

③ Si on prend n'importe quel graphe

Ex.



$A \leq X \quad X \quad X \geq B$

pourquoi c'est pas idéal pour un schéma plus grand?

Car y a trop de combinaisons.

Pb: le nb de chaînes entre A et B peut croître très vite en fct du nb de sommets (de façon exp ou +)

On a une variable par chemin entre A et B