Sorbonne Université 15 Novembre 2019

MASTER ANDROIDE – MOGPL

Examen réparti 1

(2h00 – notes de cours et TD autorisées – barême indicatif)

Exercice 1 : modélisation (4 pts)

On souhaite optimiser le déplacement de certaines machines des usines A, B et C aux entrepôts X, Y et Z. La demande est de 5 machines en X, 4 en Y et 3 en Z. Or 8 machines sont disponibles en A, 5 en B et 3 en C. On cherche à minimiser le coût global du déplacement sachant que les coûts unitaires de transport entre les usines et les entrepôts sont donnés dans le tableau suivant :

	X	Y	Z
A	50	60	30
B	60	40	20
C	40	70	30

1) Modéliser ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers.

2) On apprend maintenant qu'il y a un accroissement des coûts de transports de 10 euros par unité pour les machines prises en B, au delà de la troisième machine (c'est-à-dire pour la 4ème et pour la 5ème) et ce quelle que soit la destination (X, Y ou Z). Comment peut-on adapter le modèle précédent pour tenir compte de cette nouvelle donnée ?

Exercice 2 : PLNE (5 pts)

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire en nombres entiers suivant : $\max z = 3x_1 + 4x_2$ sous la contrainte $5x_1 + 8x_2 \leq 24$ avec $x_1 \in \mathbb{N}, x_2 \in \mathbb{N}$.

1) Résoudre $\mathcal{P}$ par la méthode de séparation/évaluation vue en cours (on prendra soin de justifier les solutions des relaxations continues, soit en s'aidant d'une résolution graphique soit en explicitant un principe permettant d'obtenir facilement la solution fractionnaire optimale).

2) Montrer que toute solution réalisable de $\mathcal{P}$ (et donc entière) vérifie les contraintes $x_1 + x_2 \leq 4$ et $2x_1 + 3x_2 \leq 9$. En déduire que le programme linéaire $\mathcal{P}'$ obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en ajoutant ces deux contraintes induites possède la même solution optimale que $\mathcal{P}$.

3) Résoudre $\mathcal{P}'$ par la méthode de séparation/évaluation vue en cours, comparer la résolution à celle effectuée à la question 1 et commenter le résultat obtenu (pour résoudre une relaxation continue faire une résolution graphique).

Exercice 3 : PL et Dualité (6 pts)

Soit $\mathcal{P}$ le programme linéaire suivant :

$$\max z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$s.c. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

1) En vous servant des contraintes de $\mathcal{P}$, exprimer x_1, x_2 en fonction de x_3 puis z en fonction de x_3 et en déduire la solution optimale de $\mathcal{P}$.

2) On considère une version modifiée de $\mathcal{P}$ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ dans laquelle la fonction objectif est désormais $\max z = 3x_1 - \lambda x_2 - x_3$ où λ est un réel positif ou nul. Pour quelles valeurs de λ la solution optimale de $\mathcal{P}$ est optimale pour $\mathcal{P}(\lambda)$.

3) On revient au problème intial $\mathcal{P}$. Ecrire le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ et le résoudre graphiquement.

4) On relâche les deux contraintes de $\mathcal{P}$ en contraintes de type inférieur, c'est-à-dire qu'on remplace les contraintes par $4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40$ et $x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 30$. En vous servant de la dualité, déterminer quelle amélioration de la fonction objectif obtient-on suite à cette relaxation puis déterminer la solution optimale du primal ainsi relaxé.

Exercice 4 : PL et jeux (5 pts)

On considère un jeu répété à deux joueurs (notés 1 et 2) dans lequel à chaque tour les joueurs choisissent simultanément un entier positif compris entre 1 et 100. Si les deux nombres choisis sont égaux, il n'y a pas de gain. Si un joueur choisit un nombre x strictement plus grand que le nombre y choisi par son adversaire alors cet adversaire lui donne 1 euro si $x - y = 1$ et lui prend 2 euros si $x - y > 1$ (par exemple, lorsque le joueur 2 joue 40, le joueur 1 gagne 1 s'il a joué 41 alors qu'il perd 2 s'il a joué 42 ou plus).

1) Soit G la matrice des gains du joueur 1 pour ce jeu (matrice de taille 100×100 qu'on s'abstiendra d'écrire en extension). Donner la sous matrice de G correspondant aux 5 premieres lignes et 5 premières colonnes (nombres de 1 à 5 pour chaque joueur).

2) Pour un joueur donné, une stratégie pure s est dite *dominée* s'il existe une autre stratégie pure s' qui procure un gain supérieur ou égal à celui associé à s pour toute stratégie pure de l'adversaire et qu'il existe en outre une stratégie pure de l'adversaire telle que le gain associé à s' soit strictement supérieur à celui associé à s pour cette stratégie. Montrer que toutes les stratégies pures du joueur 1 qui consistent à jouer un nombre strictement supérieur à 3 sont dominées. Montrer qu'il en est de même pour les stratégies du joueur 2.

Dans la suite de l'exercice, on admettra qu'on peut négliger de considérer les stratégies pures dominées pour chacun des joueurs. On notera alors $p = (p_1, p_2, p_3)$ et $q = (q_1, q_2, q_3)$ les vecteurs de probabilités qui caractérisent les stratégies mixtes des joueurs 1 et 2 (on a $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ et $q_1 + q_2 + q_3 = 1$).

3) Ecrire le programme linéaire que doit résoudre le joueur 1 si la stratégie du joueur 2 est connue et caractérisée par $\hat{q} = (1/3, 1/3, 1/3)$. En déduire une stratégie optimale pour le joueur 1 face à la stratégie $\hat{q}$.

4) On se place maintenant dans le cas où aucun joueur ne connaît a priori la stratégie de l'adversaire. Ecrire les programmes linéaires (duaux l'un de l'autre) que doivent résoudre respectivement les joueurs 1 et 2 pour jouer optimalement l'un contre l'autre.

5) Pour éviter d'être trop prévisible, le joueur 2 utilise une stratégie optimale qui combine les 3 stratégies pures à sa disposition (on suppose donc qu'il existe une stratégie optimale telle que $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ et $q_3 > 0$). Dans cette hypothèse déterminer la stratégie optimale du joueur 1.

Corrigé Exercice 1 : modélisation (2.5 +1.5 = 4 pts)

1) Variables x_{ij}, $i \in \{A,B,C\}, j \in \{X,Y,Z\}$ nb d'unités prises en i pour les placer en j. En notant c_{ij} le coût de déplacement d'une unité de i vers j.

$$\text{Min} \sum_{i\in\{A,B,C\}} \sum_{j\in\{X,Y,Z\}} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} x_{AX}+x_{BX}+x_{CX} & = & 5 \\ x_{AY}+x_{BY}+x_{CY} & = & 4 \\ x_{AZ}+x_{BZ}+x_{CZ} & = & 3 \\ x_{AX}+x_{AY}+x_{AZ} & \leq & 8 \\ x_{BX}+x_{BY}+x_{BZ} & \leq & 5 \\ x_{CX}+x_{CY}+x_{CZ} & \leq & 3 \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{N}, i \in \{A,B,C\}, j \in \{X,Y,Z\}$$

2) Il y a désormais deux types de pièces B, celles qu'on transporte au prix initial, et celles qu'on transporte au prix majoré. Il faut donc dédoubler B en insérrant un B', en raison des coûts majorés pour les pièces B' et de la fonction objectif, les pièces B' ne seront utilisées que quand les pièces de type B sont épuisées. En posant $c_{B'j} = c_{Bj} + 10$ pour $j \in \{X,Y,Z\}$, on obtient le PL suivant :

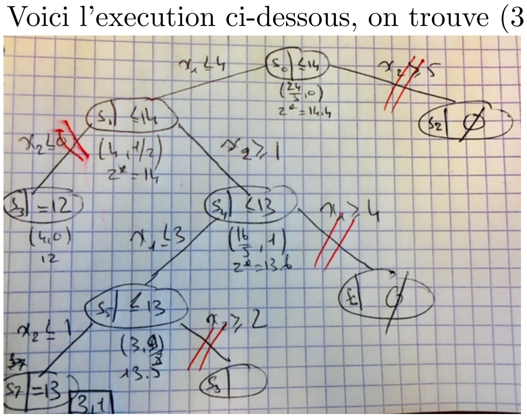
$$\text{Min} \sum_{i\in\{A,B,B',C\}} \sum_{j\in\{X,Y,Z\}} c_{ij}x_{ij}$$

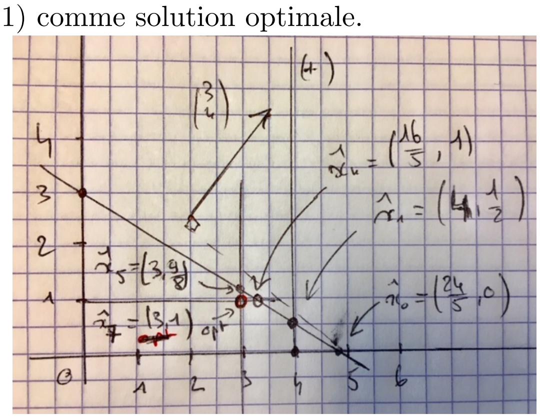
$$\begin{cases} x_{AX}+x_{BX}+x_{B'X}+x_{CX} & = & 5 \\ x_{AY}+x_{BY}+x_{B'Y}+x_{CY} & = & 4 \\ x_{AZ}+x_{BZ}+x_{B'Z}+x_{CZ} & = & 3 \\ x_{AX}+x_{AY}+x_{AZ} & \leq & 8 \\ x_{BX}+x_{BY}+x_{BZ} & \leq & 3 \\ x_{B'X}+x_{B'Y}+x_{B'Z} & \leq & 2 \\ x_{CX}+x_{CY}+x_{CZ} & \leq & 3 \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{N}, i \in \{A,B,B',C\}, j \in \{X,Y,Z\}$$

Corrigé Exercice 2 (2.5 + 1 + 1.5 = 5 pts)

1°) Voici l'execution ci-dessous, on trouve $(3,1)$ comme solution optimale.





2) [0.5 pt pour chaque contrainte redondante] Si l'on divise l'unique contrainte du problème par 5 on obtient : $x_1 + \frac{8}{5}x_2 \leq \frac{24}{5}$ de là comme $x_2 \geq 0$ on a : $x_1 + x_2 \leq x_1 + \frac{8}{5}x_2 \leq \frac{24}{5}$. Mais comme

x_1 et x_2 sont entiers on en déduit que : $x_1 + x_2 \leq 4$, ce qui établit la première contrainte induite. Pour la seconde on procède de manière analogue en multipliant la contrainte initiale par $\frac{2}{5}$; on obtient : $2x_1 + \frac{16}{5}x_2 \leq \frac{48}{5}$, de là comme $x_2 \geq 0$ on a : $2x_1 + 3x_2 \leq x_1 + \frac{16}{5}x_2 \leq \frac{48}{5}$ mais comme x_1 et x_2 sont entiers on en déduit que : $2x_1 + 3x_2 \leq 9$ ce qui établit la deuxième contrainte induite.

3) Après insertion des 2 contraintes induites, la résolution graphique de la relaxation continue donne directement une solution entière donc on a directement l'optimum (on obtient directement (3, 1)) [1 pt] + [0.5 pt pour le constat que l'ajout de contraintes redondantes sur les entiers peut accélérer la résolution]

Corrigé Exercice 3 (1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = 6 pts)

1) Le système d'equations exprimé en fonction de x_3 donne :

$$\max z = 10 - x_3$$
$$s.c. \begin{cases} x_1 &= 6 - \frac{1}{10}x_3 \\ x_2 &= 8 - \frac{3}{10}x_3 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

La solution optimale est donc (6, 8, 0) de valeur 10.

2) Si on exprime la fonction objectif en fonction de λ dans la base optimale de la question précédente on obtient :

$$z = (18 - 8\lambda) + \left(\frac{3\lambda - 13}{10}\right) x_3$$

La base reste optimale si et seulement si $3\lambda - 13 \leq 0$ soit $\lambda \leq \frac{13}{3}$. Comme l'énoncé indique que $\lambda \geq 0$ la réponse est donc $\lambda \in [0, \frac{13}{3}]$.

3) Le dual est :

$$\min z' = 40y_1 + 30y_2$$
$$s.c. \begin{cases} 4y_1 + y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq -1 \\ y_1 + y_2 \geq -1 \end{cases}$$
$$y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \in \mathbb{R}$$

La résolution graphique donne $(1, -1)$ de valeur 10.

4) Dans le dual les variables doivent maintenant être positives ou nulles. La résolution graphique donne alors $y^* = (\frac{3}{4}, 0)$ de valeur 30. Donc on obtient une amélioration de 20. Maintenant si l'on veut la solution optimale associée dans le primal, on utilise le TEC qui donne : $x^* = (10, 0, 0)$.

Corrigé Exercice 4 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 pts)

1) La matrice de gain pour le joueur 1 est donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Les lignes 4 et 5 de la matrice des gains (et toutes les suivantes) sont dominées par la ligne 1. De même pour le joueur 2 (en considérant l'opposé des gains du joueur 1) les colonnes 4 et 5 (et toutes les suivantes) sont dominées par la colonne 1. On peut donc se restreindre aux 3 premières lignes et colonnes de G.

3) Les espérances de gains des 3 politiques pures du joueur 1 sont respectivement de $\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}$. La politique optimale est donc la solution du PL qui consiste à maximiser $\frac{1}{3}p_1 - \frac{1}{3}p_3$ sous les contraintes $p_1 + p_2 + p_3 = 1, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0$. La solution optimale est $p = (1, 0, 0)$ ce qui revient à jouer constamment 1.

4) Les joueurs 1 et 2 doivent respectivement résoudre les programme PL1 et PL2 suivants :

$$\max z \qquad (PL_1) \begin{cases} z \leq p_2 - 2p_3 \\ z \leq -p_1 + p_3 \\ z \leq 2p_1 - p_2 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \qquad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_3 \geq 0$$

$$\min z' \qquad (PL_2) \begin{cases} z' \geq -q_2 + 2q_3 \\ z' \geq q_1 - q_3 \\ z' \geq -2q_1 + q_2 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases} \qquad q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0$$

5) Soit $q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*)$ la politique optimale du joueur 2. Comme $q_i^* > 0$ pour $i = 1, 2, 3$, on sait grâce au TEC que les contraintes du duale sont actives à l'optimum. Ainsi, si $p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ et z^* désignent les valeurs des variable de PL$_1$ à l'optimum on a donc :

$$\begin{aligned} z^* &= p_2^* - 2p_3^* \\ z^* &= -p_1^* + p_3^* \\ z^* &= 2p_1^* - p_2^* \end{aligned}$$

En raison du théorème de dualité et comme il s'agit d'un jeu à somme nulle, on a $z^* = 0$. De là on tire : $p_2^* = 2p_3^*$, $p_1^* = p_3^*$ et $2p_1^* = p_2^*$; de plus $p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1$ donc $p^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.