РЕШУ ЕГЭ — математика профильная

1. Тип 16 № 508581

В одной стране в обращении находилось 1 000 000 долларов, 20% из которых были фальшивыми. Некая криминальная структура стала ввозить в страну по 100 000 долларов в месяц, 10% из которых были фальшивыми. В это же время другая структура стала вывозить из страны 50 000 долларов ежемесячно, из которых 30% оказались фальшивыми. Через сколько месяцев содержание фальшивых долларов в стране составит 5% от общего количества долларов?

Решение. Ежемесячное увеличение валютной массы, находящейся в обращении, составляет $100-50=50$ тыс. долларов, поэтому через n месяцев в стране будет $(1000+50n)$ тыс. долларов.

Количество фальшивых долларов ежемесячно уменьшается на $50\cdot 0,3-100\cdot 0,1=15-10=5$ тыс. долларов. Изначально их было $1\,000\,000\cdot 0,2=200\,000$, поэтому через n месяцев в стране будет $(200-5n)$ тыс. фальшивых долларов.

Через n месяцев фальшивые доллары составили 5% от общего количества долларов. Имеем:

$$(1000+50n)\cdot 0,05=200-5n\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50+2,5n=200-5n\Leftrightarrow 7,5n=150\Leftrightarrow n=20.$$

Ответ: через 20 месяцев.

2. Тип 16 № 508582

Банк планирует вложить на 1 год 30% имеющихся у него средств клиентов в акции золотодобывающего комбината, а остальные 70% — в строительство торгового комплекса. В зависимости от обстоятельств первый проект может принести банку прибыль в размере от 32% до 37% годовых, а второй проект — от 22 до 27% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться в пределах от 10% до 20% годовых. Определите, какую наименьшую и наибольшую чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в покупку акций и строительство торгового комплекса может при этом получить банк.

Решение. Пусть сумма находящихся в банке средств клиентов составляет S денежных единиц. Банк получит наименьшую прибыль, если его доходы по обоим вложениям окажутся минимальными, а выплаты клиентам максимальными. Величина минимальных доходов составляет

$$0,3S\cdot 1,32+0,7S\cdot 1,22-S=$$
$$=0,396S+0,854S-S=0,25S.$$

Выплата клиентам по высшей ставке (20%) составляет 0,2. Следовательно, наименьшая возможная чистая прибыль равна

$$\frac{0,25S-0,2S}{S}\cdot 100\%=0,05\cdot 100\%=5\%.$$

Банк получит наибольшую прибыль, если его доходы по обоим вложениям окажутся максимальными, а выплаты клиентам минимальными. Величина максимальных доходов составляет

$$0,3S\cdot 1,37+0,7S\cdot 1,27-S=$$
$$=0,411S+0,889S-S=0,3S.$$

Выплата клиентам по низшей ставке (10%) составляет 0,1. Поэтому наибольшая возможная чистая прибыль равна

$$\frac{0,3S-0,1S}{S}\cdot 100\%=0,2\cdot 100\%=20\%.$$

Ответ: 5%; 20%.

Примечание.

Эта задача, взятая нами из вариантов А. Ларина № 93 и № 239, впервые, по-видимому, была предложена на вступительном экзамене по математике для поступающих на отделение менеджмента экономического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в июле 1997 года. Составляя парную задачу к этой, авторы, по всей вероятности, допустили ошибку, распространенную потом при цитировании в методических публикациях. Интересующемуся читателю рекомендуем самостоятельно решить эту (несложную) задачу, а затем проверить себя.

> Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% — проект Y. Проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y — от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможные уровни процентной ставки, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

.

Решение и комментарии приведены в задании 621856.

3. Тип 16 № 508659

При рытье колодца глубиной свыше 10 м за первый метр заплатили 1000 руб., а за каждый следующий на 500 руб. больше, чем за предыдущий. Сверх того за весь колодец дополнительно было уплачено 10 000 руб. Средняя стоимость 1 м оказалась равной 6250 руб. Определите глубину колодца.

Решение. Пусть x м — глубина колодца. Тогда часть выплат, зависящих от глубины колодца, образует арифметическую прогрессию с разностью 500, первый член которой равен 1000. Найдем сумму первых x членов прогрессии, последний член которой равен $1000+500(x-1)$. Она (сумма) будет равна

$$\frac{(1000+1000+500(x-1))x}{2}=$$
$$=\frac{2000x+500x^2-500x}{2}=250x^2+750x.$$

Поскольку, кроме указанной суммы, было выплачено еще 10 000 руб, а средняя стоимость 1 м при этом составила 6250 руб, то имеет место уравнение, которое решим, имея в виду, глубина колодца свыше 10 м.

$$\begin{cases}x>10,\\250x^2+750x+10000=6250x\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>10,\\250x^2-5500x+10000=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>10,\\x^2-22x+40=0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>10,\\x^2-22x+40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>10,\\\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=20\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=20.$$

Ответ: 20.

4. Тип 16 № 508664

Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на телефон?

Решение. При удорожании коммунальных услуг на 100%, общая сумма увеличилась бы на 70%. А если бы электричество подорожало на 100%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 20%. Значит, в общем платеже на коммунальные услуги приходится 70%, а на электричество — 20%. Поэтому на телефон приходятся оставшиеся 10%.

Приведём другие решения.

1. Алгебраический подход.

Пусть плата за коммунальные услуги и электричество составляет x руб. в месяц, а за телефон — y руб. Если плата и за коммунальные услуги, и за электричество увеличится на 50%, эта часть оплаты составит $1{,}5x$ руб, что повлечет увеличение общей суммы платежа на 35%+10% = 45%. Тогда

$$1,5x+y=1,45\cdot(x+y)\Leftrightarrow 1,5x+y=1,45x+1,45y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,05x=0,45y\Leftrightarrow x=9y.$$

Следовательно, $x+y=10y$, откуда $\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{1}{10}$. Это означает, что на телефон приходится $\dfrac{1}{10}$ часть от общей суммы платежа, а это составляет 10%.

2. Арифметика помогает алгебре.

Если все три вида предоставляемых услуг подорожают на 50%, то общая сумма платежа увеличится на 50%. Но из-за того, что платеж за услуги телефонии останется неизменным, общая сумма платежа после подорожания по остальным двум видам услуг будет на 50% − 35% −10% = 5% меньше. Эти 5% — доля телефонии в числе 50% оплаты за все услуги. Тем самым, доля оплаты за телефон составляет 5/50 или 10% от общей суммы.

3. Система линейных уравнений.

Обозначим за x долю общей оплаты, приходящейся на коммунальные услуги, за y — на электричество и за z — на телефон. Составим систему уравнений. Сумма всех оплат $x+y+z=1$ — первое уравнение. Увеличиваем в 1,5 раза коммунальные услуги: $1,5x+y+z=1,35$ — второе уравнение. Увеличиваем в 1,5 раза оплату за электричество: $x+1,5y+z=1,1$ — третье уравнение. Затем вычитаем из третьего уравнения первое, получаем $0,5y=0,1,$ отсюда $y=0,2.$ Затем вычитаем из второго уравнения первое, получаем $0,5x=0,35,$ отсюда $x=0,7.$ Подставляем в первое уравнение: $0,7+0,2+z=1,$ отсюда $z=0,1$ или 10%.

Ответ: 10%.

5. Тип 16 № 511919

Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта – по 30 руб., третьего сорта – по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Решение. Пусть x кг — масса яблок 1-го сорта, y кг — масса яблок 2-го сорта, оставшиеся 91 − (x + y) кг — масса яблок 3-го сорта. Для величины выручки имеем:

$$40x+30y+20\cdot(91-x-y)=2170\Leftrightarrow 2x+y=35,$$

откуда $y=35-2x$ (*).

Поскольку масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта имеем:

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{91-(x+y)}.$$

Подставим условие (*) в полученную пропорцию и решим ее:

$$\frac{x}{35-2x}=\frac{35-2x}{x+56}\underset{0<x<17,5}{\Leftrightarrow} x(x+56)=(35-2x)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-196x+1225=0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=7,\\&x=\frac{175}{3}\end{aligned}\right.\underset{x<17,5}{\Leftrightarrow} x=7.$$

Тем самым, садовод продал 7 кг яблок первого сорта и, следовательно, 35 − 14 = 21 кг яблок второго сорта.

Ответ: 21.

Приведём другое решение.

Пусть x кг — масса яблок первого сорта, проданных садоводом, а масса яблок второго сорта составляет tx кг. Тогда масса проданных яблок третьего сорта составит $tx \cdot t = t^2x$ кг. По условию задачи:

$$t^2x+tx+x=91 \Leftrightarrow (t^2+t+1)x=91 \qquad (1)$$
$$20t^2x+30tx+40x=2170 \Leftrightarrow (2t^2+3t+4)x=217 \qquad (2)$$

Поделив почленно равенство (2) на равенство (1), получим:

$$\frac{2t^2+3t+4}{t^2+t+1}=\frac{217}{91} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2+\frac{t+2}{t^2+t+1}=2+\frac{35}{91} \Leftrightarrow \frac{t+2}{t^2+t+1}=\frac{5}{13} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5t^2+5t+5-13t-26=0 \Leftrightarrow 5t^2-8t-21=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{16+105}}{5} \Leftrightarrow t=\frac{4\pm 11}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=-\frac{7}{5}. \end{array}\right.$$

Значение $t=-\frac{7}{5}$ не подходит по смыслу задачи. Значение x найдем из уравнения $(t^2+t+1)x=91.$

$$x=\frac{91}{9+3+1}=7. \qquad tx=21.$$

Ответ: 21 кг.

6. Тип 16 № 506954

В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена барреля сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

Решение. Пусть сумма, которой первоначально располагала администрация края, составляла S у. е., а цена барреля сырой нефти M у. е. Тогда первоначально возможный объем закупок составлял S/M баррелей. Этот объем примем за 100 процентов. За 2 месяца хранения в банке положенная сумм выросла до $1,26^2S$ у. е., а цена барреля сырой нефти за это же время убыла до $0,9^2M$ у. е. Следовательно, 1 ноября 2001 г. руководство края на эту сумму могла закупить $\frac{1,26^2S}{0,9^2M}$ баррелей сырой нефти. Процентное отношение этого объема к первоначально возможному объему закупок составит:

$$\frac{1,26^2S}{0,9^2M}:\frac{S}{M}\cdot 100\,\% \text{ то есть } 1,4^2\cdot 100\,\% = 196\,\%.$$

Значит, руководство края смогло пополнить 1 ноября 2001 г. нефтяные запасы края на 96% больше, чем 1 сентября того же года.

Ответ: 96.

7. Тип 16 № 506955

Транснациональная компания Amako Inc. решила провести недружественное поглощение компании First Aluminum Company (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Amako было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на 1/3. В результате второго предложения Amako сумела увеличить число выкупленных акций на 20% (после второй скупки общее число выкупленных акций увеличилось на 20%), а в результате скупки по третьей цене — еще на 20%. Найдите цену за одну акцию при третьем предложении и общее количество скупленных акций, если начальное предложение составляло $27 за одну акцию, а по второй цене Amako скупила 15 тысяч акций.

Решение.

Предложения	Цена одной акции ($)	Количество выкупленных акций	
		При данном предложении	Общее количество выкупленных акций
1	**27**		**75 000** $15000:0,2=75000$
2	**36** $27+\frac{1}{3}\cdot 27=27+9=36$	**15 000**	**90 000** $75000+15000=90000$
3	**48** $36+\frac{1}{3}\cdot 36=36+12=48$		**108 000** $90000\cdot 1,2=108000$

Ответ: цена третьего предложения составила $48 за одну акцию; всего было выкуплено 108 000 акций.

8. Тип 16 № 506956

Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

Решение. Первый способ (близкий к арифметическому решению).

Пусть первый брокер купил x акций, а второй — y акций. Тогда первый продал $0,75x$ акций, второй — $0,8y$ акций.

То, что сумма от продажи акций, полученных вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером, означает: сумма, полученная вторым брокером, больше суммы, полученной первым, в 2,4 раза:

$$\frac{100+140}{100}=2,4.$$

Так как цена одной акции у обоих брокеров одинакова, а полученные суммы прямо пропорциональны количеству акций, проданных каждым брокером, то

$$\frac{0,8y}{0,75x}=2,4 \Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{2,4\cdot 0,75}{0,8}=\frac{1,8}{0,8}=\frac{9}{4}.$$

Если k — коэффициент пропорциональности количества акций, купленных брокерами, то ими приобретено $13k$ акций на сумму 3640 р. Следовательно, на тот момент цена каждой акции составляла:

$$\frac{3640}{13k}=\frac{280}{k}\text{ р.}$$

Первый брокер продал $0,75\cdot 4k=3k$ акций, второй $0,8\cdot 9k=7,2k$ акций. Всего было продано $10,2k$ акций. К моменту продажи цена одной акции стала

$$\frac{3927}{3k+7,2k}=\frac{3927}{10,2k}=\frac{385}{k}\text{(р), т. е. на }\frac{385-280}{k}=\frac{105}{k}\text{ (р) выше.}$$

Значит, цена одной акции возросла на 37,5%

$$\left(\frac{105}{k}:\frac{280}{k}\cdot 100=37,5\right).$$

Второй способ (преобладает алгебраический подход).

Пусть x р. — первоначальная цена одной акции, y — количество акций, купленных первым брокером, z — количество акций, купленных вторым брокером. И пусть цена одной акции возросла на t %. Тогда: $x\cdot(y+z)=3640$ (1)

Со временем цена одной акции выросла до $x\cdot(1+0,01t)$ рублей.

Первый брокер продал акций на сумму $0,75xy(1+0,01t)$ рублей, а второй брокер — на $0,8xz(1+0,01t)$ рублей.

Согласно условию задачи имеем: $0,75xy(1+0,01t)+0,8xz(1+0,01t)=3927$, т. е.

$$x(0,75y+0,8z)\cdot(1+0,01t)=3927\ (2)$$

Так как сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером, то

$$0,8xz(1+0,01t)=2,4\cdot 0,75xy(1+0,01t)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,8z=1,8y\Leftrightarrow z=2,25y.$$

Подставив полученное значение z в уравнение (1), будем иметь:

$$3,25xy=3640\Leftrightarrow xy=1120.$$

Подставим то же значение z в уравнение (2):

$$2,55xy(1+0,01t)=3927\Leftrightarrow xy\cdot(1+0,01t)=1540.$$

А значение xy нами найдено выше.

Следовательно, $1120\cdot(1+0,01t)=1540\Leftrightarrow 1+0,01t=1,375\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0,01t=0,375\Leftrightarrow t=37,5.$

Ответ: 37,5.

9. Тип 16 № 513687

Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн.руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 180% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды — 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Решение. Пусть Вася купил квартиру в кредит. Тогда он должен погасить кредит за 20 лет, то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Сумма, которую он должен выплатить банку, по условию на 180% превышает исходные 3 млн. руб., то есть равна $3000 \cdot 2{,}8 = 8400$ тыс. руб. Разделив эту сумму на 240, получаем ежемесячный платеж, равный 35 тыс. руб.

Далее, если вместо этого Вася снимал квартиру, то после оплаты аренды у него будет оставаться ежемесячно 20 тыс. руб. Тогда 3 млн. руб. Вася накопит за $3000 : 20 = 150$ месяцев или за 12,5 лет.

Ответ: 12,5 лет.

10. Тип 16 № 519586

Цена производителя на некоторое изделие составляет 25 рублей. Прежде чем попасть на прилавок магазина, изделие проходит через несколько фирм-посредников, каждая из которых увеличивает цену в 1,5 или 2 раза, осуществляя услуги по хранению и транспортировке изделий. Магазин делает наценку 20%, после чего изделие поступает в продажу по цене 405 рублей. Сколько посредников было между магазином и производителем?

Решение. Магазин приобрёл у последнего посредника по цене $\dfrac{405}{1,2} = 337,5$ рублей. Тогда за счёт посредников цена возросла в $\dfrac{337,5}{25} = 13,5$ раз. Пусть x посредников увеличивали цену в 1,5 раза, y посредников — в 2 раза. Тогда $1,5^x \cdot 2^y = 13,5,$ тогда $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x \cdot 2^y = \dfrac{27}{2},$ откуда $3^x \cdot 2^{y-x} = 3^3 \cdot 2^{-1}.$ Учитывая, что числа 2 и 3 взаимно простые, получаем, что $x = 3,\ y - x = -1,$ то есть $x = 3, y = 2.$ Отсюда общее количество посредников равно $x + y = 5$.

Ответ: 5.

11. Тип 16 № 519662

В регионе A среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 43 740 рублей и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе B среднемесячный доход на душу населения в 2014 году составлял 60 000 рублей. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона B увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на m% ежегодно. В 2017 году среднемесячный доход на душу населения в регионах A и B стал одинаковым. Найдите m.

Решение. Пусть в регионе B в 2014 году проживало n человек.

Составим таблицу изменения среднемесячного дохода на душу населения по данным задачи.

	2014	**2015**	**2016**	**2017**
Регион *A*				
Среднемесячный доход на душу населения	43740	$43740 \cdot 1{,}25$	$43740 \cdot 1{,}25^2$	$43740 \cdot 1{,}25^3$
Регион *B*				
Среднемесячный суммарный доход жителей	$60\,000n$	$60\,000n \cdot 1{,}17$	$60\,000n \cdot 1{,}17^2$	$60\,000n \cdot 1{,}17^3$
Число жителей	n	$n \cdot (1 + \frac{m}{100})$	$n \cdot (1 + \frac{m}{100})^2$	$n \cdot (1 + \frac{m}{100})^3$
Среднемесячный доход на душу населения	60 000	$\dfrac{60000 \cdot 1,17}{1 + \frac{m}{100}}$	$\dfrac{60000 \cdot 1,17^2}{(1 + \frac{m}{100})^2}$	$\dfrac{60000 \cdot 1,17^3}{(1 + \frac{m}{100})^3}$

По условию $43740 \cdot 1,25^3 = 60000 \cdot \dfrac{1,17^3}{(1 + \frac{m}{100})^3}$, откуда

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)^3=\frac{60000\cdot 1,17^3}{43740\cdot 1,25^3}=\frac{1000\cdot 1,17^3}{729\cdot 1,25^3}=$$
$$=\left(\frac{10\cdot 1,17}{9\cdot 1,25}\right)^3=\left(\frac{1170}{1125}\right)^3=\left(\frac{26}{25}\right)^3.$$

Следовательно, $1+\frac{m}{100}=\frac{26}{25}$, откуда $m=4$. Тем самым, население региона В росло на 4% в год.

Ответ: 4.

12. Тип 16 № 527512

В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в 1-й сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли (по массе) в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором — в q раз. О числах p и q известно, что $pq=9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

Решение. Пусть в первом сосуде было x кг соли, а во втором y кг. Тогда доля соли в первом сосуде составляла $\frac{x}{5}$, а во втором — $\frac{y}{20}$. После испарения части воды доли будут равны $\frac{px}{5}$ и $\frac{yq}{20}$, Поскольку масса соли осталась неизменной, масса растворов уменьшилась в p и q раз соответственно.

Наибольшей массе испарившейся воды соответствует наименьшая масса оставшихся растворов. Значит, нужно определить наименьшее значение выражения $\frac{5}{p}+\frac{20}{q}$. Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел $(a+b\geqslant 2\sqrt{ab})$, получаем

$$\frac{5}{p}+\frac{20}{q}\geqslant 2\sqrt{\frac{100}{pq}}=2\cdot\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$$

Это значение достигается, если $\frac{5}{p}=\frac{20}{q}$, то есть $q=4p$. Если взять $p=1,5$ и $q=6$, то все условия будут выполнены (в том числе то, что $p,q>1$, то есть вода и правда испарялась).

Значит, могло испариться максимум $25-\frac{20}{3}=\frac{55}{3}$ кг воды.

Ответ: $\frac{55}{3}$ кг.

13. Тип 16 № 531309

В аграрной стране A производство пшеницы на душу населения в 2015 году составляло 192 кг и ежегодно увеличивалось на 20%. В аграрной стране B производство пшеницы на душу населения в 2015 году составляло 375 кг. В течение трех лет производство зерна в стране B увеличивалось на 14% ежегодно, а ее население увеличивалось на m% ежегодно. В 2018 году производство зерна на душу населения в странах A и B стало одинаковым. Найдите m.

Решение. Пусть производство пшеницы на душу населения в 2015 году в стране A равнялось A_{2015}, а в 2018 году — A_{2018}. Пусть также производство пшеницы на душу населения в 2015 году в стране B равнялось B_{2015}, а в 2018 году — B_{2018}. Тогда $A_{2018}=A_{2015}\cdot 1,2^3$,

$$B_{2018}=B_{2015}\cdot\frac{1,14^3}{\left(1+\frac{m}{100}\right)^3}.$$

По условию, в 2018 году производство зерна на душу населения в странах A и B стало одинаковым. Значит,

$$A_{2015}\cdot 1,2^3=B_{2015}\cdot\frac{1,14^3}{\left(1+\frac{m}{100}\right)^3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{m}{100}\right)^3=\frac{B_{2015}\cdot 1,14^3}{A_{2015}\cdot 1,2^3}.$$

Подставим значения A_{2015} и B_{2015}, получим:

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)^3=\frac{375\cdot 1,14^3}{192\cdot 1,2^3}=$$
$$=\frac{5^3\cdot 3\cdot 1,14^3}{4^3\cdot 3\cdot 1,2^3}=\left(\frac{5\cdot 1,14}{4\cdot 1,2}\right)^3=1,1875^3.$$

Следовательно, $1+\frac{m}{100}=1,1875$, откуда $m=18,75.$

Ответ: 18,75.

14. Тип 16 № 550265

Борис и Иван вложили деньги в общий бизнес. После этого один из них добавил ещё 1 миллион рублей, в результате чего его доля в бизнесе увеличилась на 0,05, а когда он добавил ещё 1 миллион рублей, его доля увеличилась ещё на 0,04. Сколько миллионов рублей ему ещё нужно добавить, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,06?

Решение. Пусть один из бизнесменов вложил в дело a млн руб., а вместе они вложили b млн руб., тогда доля этого бизнесмена равна $\frac{a}{b}$. Пусть этот бизнесмен после дополнительно вложил t млн руб., тогда его доля вырастет на

$$\Delta(t)=\frac{a+t}{b+t}-\frac{a}{b}=\frac{t(b-a)}{b(b+t)}.$$

Тогда

$$\begin{cases}\Delta(1)=0,05,\\ \Delta(2)=0,05+0,04\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{b-a}{b(b+1)}=0,05,\\ \dfrac{2(b-a)}{b(b+2)}=0,09\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{b-a}{b}=0,05(b+1),\\ \dfrac{b-a}{b}=0,09(0,5b+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4,4,\\ b=8.\end{cases}$$

Изначально доля этого бизнесмена составляла $\frac{4,4}{8}=0,55.$ После внесения первого дополнительного миллиона его доля составила $\frac{4,4+1}{8+1}=\frac{5,4}{9}=0,60,$ после внесения второго — $\frac{5,4+1}{9+1}=\frac{6,4}{10}=0,64.$ Пусть в третий раз он внёс дополнительно x млн руб. Для ответа на вопрос задачи решим уравнение

$$\frac{6,4+x}{10+x}=0,64+0,06 \Leftrightarrow 6,4+x=7+0,7x \Leftrightarrow x=2.$$

Чтобы увеличить свою долю еще на 0,06, бизнесмену нужно ещё добавить 2 млн рублей.

Ответ: 2.

15. Тип 16 № 559411

Евгений хочет купить пакет акций компании. 15 февраля он отложил определённую сумму денег и планирует откладывать такую же сумму денег 15 числа каждого месяца. Первого февраля пакет акций стоил 195 000 рублей. Первого числа каждого месяца пакет акций дорожает на 40%. Какую наименьшую сумму нужно Евгению откладывать каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение. Пусть Евгений откладывает в середине каждого месяца x рублей. К середине n-го месяца у Евгения скопится nx рублей, а акции будут стоить не более $195\,000\cdot 1,4^{n-1}$ рублей. Для того чтобы Евгений смог купить пакет акций в этом месяце, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $x \geqslant \frac{195\,000\cdot 1,4^{n-1}}{n}.$ Положим $a_n=\frac{195\,000\cdot 1,4^{n-1}}{n}.$ Для того что бы Евгений смог через некоторое время купить пакет акций, необходимо и достаточно откладывать сумму, большую либо равную наименьшему из чисел $a_n.$ Сравним два последовательных таких числа. Для этого вычислим их отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1,4\cdot n}{n+1}=\frac{7n}{5n+5}.$$

Отсюда получаем, что при $n<3$ выполнено неравенство $a_{n+1}<a_n,$ а при $n\geqslant 3$ выполнено неравенство $a_{n+1}\geqslant a_n.$ Значит, наименьшим из чисел a_n будет число

$$a_3=\frac{195\,000\cdot 1,4^2}{3}=127\,400.$$

Поэтому наименьшая сумма, которую нужно откладывать Евгению, равна 127 400 рублям.

Ответ: 127 400 рублей.

16. Тип 16 № 562954

Страховая компания положила в банк некоторую сумму денег под 10% годовых для обеспечения страховых выплат. Какова была эта сумма (в рублях), если она оказалась полностью истрачена за три года на следующие выплаты: 880 000 рублей в конце первого года, 605 000 рублей в конце второго года и 1 331 000 рублей в конце третьего года (все выплаты производились после начисления банком процентов).

Решение. Пусть искомая сумма равна K тысячам рублей. Составим таблицу по данным задачи (все единицы измерения приведены в тысячах рублей).

Отчетный год	Сумма вклада		Страховая выплата	Переходящий остаток по истечении года
	в начале года	в конце года		

1	K	$1{,}1K$	880	$1{,}1K-880$
2	$1{,}1K-880$	$(1{,}1K-880)\cdot 1{,}1 = 1{,}21K-968$	605	$1{,}21K-968 = 1{,}21K-1573$
3	$1{,}21K-968$	$(1{,}21K-968)\cdot 1{,}1 = 1{,}331K-1730{,}3$	1331	$1{,}331K-1730{,}3-1331 = 1{,}331K-3061{,}3=0$

Решим уравнение:

$$1,331K-3061,3=0 \Leftrightarrow K=2300 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Ответ: 2 300 000.

17. Тип 16 № 621856

Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект X, а остальные 60% в проект Y. Проект X может принести прибыль в размере от 19% до 24% годовых, а проект Y — от 29% до 34% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наименьший и наибольший возможные уровни процентной ставки, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых от суммарных вложений в проекты X и Y.

Решение. Пусть сумма средств, о которых идет речь, равна S у. е. Наименьшая прибыль, которую банку могут принести оба проекта, равна

$$0,4S\cdot 1,19+0,6S\cdot 1,29-S= \\ =0,476S+0,774S-S=0,25S.$$

Банк получит наименьшую чистую прибыль $0{,}1S$, если он выплатит своим клиентам проценты по высшей ставке. Пусть она равна a%, тогда:

$$0,25S-0,01aS=0,1S \Leftrightarrow a=15.$$

Наибольшая прибыль, которую банку могут принести оба проекта равна

$$0,4S\cdot 1,24+0,6S\cdot 1,34-S= \\ =0,496S+0,804S-S=0,3S.$$

Банк получит наибольшую чистую прибыль $0{,}15S$, если он выплатит клиентам проценты по низшей ставке. Пусть она равна b%, тогда:

$$0,3S-0,01bS=0,15S \Leftrightarrow b=15.$$

Значит, и наименьший, и наибольший возможные уровни процентной ставки равны и составляют 15%. То есть при ставке 15% банк получит от 10 до 15 процентов чистой прибыли.

Ответ: 15%.

Примечание.

Эта задача, взятая нами из варианта А. Ларина № 366, впервые была предложена на вступительном экзамене по математике для поступающих на отделение менеджмента экономического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в июле 1997 года и позже цитировалась в методических публикациях для абитуриентов и учителей. См., например, *Сергеев И. Н., Мельников И. И., Олехник С. Н.* Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями (1993−1997гг.) на стр. 72, или журнал Математика в школе № 2 за 1998 год. В последней публикации приведено решение, дающее другой ответ: наименьший возможный уровень процентной ставки составляет 10%, а наибольший — 20%. Приводим его ниже (в решении опечатка: дважды указано p_x, второй раз должно быть p_y).

Пусть S — объем суммарных вложений в оба проекта. По условию задачи к концу года прибыли p_x и p_y от вложений в проекты X и Y будут находиться в пределах

$$\frac{19}{100}\cdot\frac{40}{100}S \le p_x \le \frac{24}{100}\cdot\frac{40}{100}S,$$

$$\frac{29}{100}\cdot\frac{60}{100}S \le p_x \le \frac{34}{100}\cdot\frac{60}{100}S,$$

а чистая прибыль банка $p_б$ — в рамках

$$\frac{10}{100}S \le p_б \le \frac{15}{100}S.$$

При этом часть прибыли, подлежащая возврату клиентам, составит в процентном выражении $\frac{p_x + p_y - p_б}{S}\cdot 100\%$ и будет находиться в пределах от 10 до 20%.

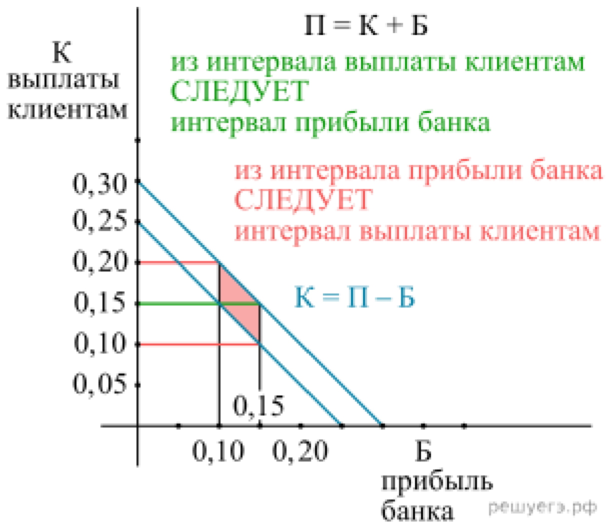
Решение, по сути, состоит в последовательном получении следующих оценок:

$$\frac{76}{1000}S < p_x < \frac{96}{1000},$$
$$\frac{174}{1000}S < p_y < \frac{204}{1000}.$$
$$-\frac{150}{1000}S < -p_б < -\frac{100}{1000}S,$$
$$\frac{76+174-150}{1000}S < p_x + p_y - p_б < \frac{96+204-100}{1000}S,$$

а это означает, что

$$\frac{10}{100}S < p_x + p_y - p_б < \frac{20}{100}S.$$

Действия с неравенствами выполнены верно. Но почему же отличается ответ?



Дело в построении математической модели — в переводе условия с русского на язык математических соотношений. В первом решении фраза «Определить наименьший и наибольший возможные уровни процентной ставки, при которых чистая прибыль банка составит не менее 10% и не более 15% годовых» понимается следующим образом: необходимо определить уровень процентной ставки, при котором чистая прибыль банка НЕ ВЫЙДЕТ ЗА ПРЕДЕЛЫ от 10% до 15%.

Второе решение соответствует такому условию: «Известно, что чистая прибыль банка составила от 10% до 15%, какой при этом могла быть процентная ставка?». Другими словами, авторами рассматривается вопрос о том, при каком значении процентной ставки чистая прибыль МОЖЕТ ОКАЗАТЬСЯ В ПРЕДЕЛАХ от 10% до 15% (но может и выйти за эти пределы).

Различие между двумя приведенными вопросами иллюстрирует приведенная справа схема: если отложенная на вертикальной оси процентная ставка для клиентов $К$ лежит от 10 до 20 процентов, то прибыль банка $Б$ может оказаться оказаться от 10 до 15 процентов, но может быть и 5%, и 20%. (Аналогично из условия $x = 2$, следует, что $x > 0$, но обратное неверно.) Так и здесь: если $0{,}1 < Б < 0{,}15$, то $0{,}10 < К < 0{,}20$, но обратное неверно. Действительно, если $0{,}10 < К < 0{,}20$, то $0{,}05 < Б < 0{,}20$, а последнее включает в себя значения $0{,}10 < Б < 0{,}15$, но содержит и иные значения.

Повторим сказанное другими словами: в первом решении мы ищем все такие $К$, чтобы для каждого из них было верно неравенство $0{,}10 < Б < 0{,}15$. Во втором решении авторы ищут все такие $К$, которые возможны при $0{,}10 < Б < 0{,}15$. На этот вопрос авторы отвечают верно. Но это другая задача.

18. Тип 16 № 657011

Два инвестора вложили деньги в общий бизнес. После этого один из них добавил еще 1 миллион рублей, в результате чего его доля в общем бизнесе увеличилась на 0,05, а когда он добавил еще 1 миллион рублей, его доля увеличилась еще на 0,04. Сколько миллионов рублей ему надо добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0,06?

Решение. Пусть общая сумма инвестиций равна x млн руб., а доля первого инвестора в общем бизнесе составляла ω. По условию задачи должна выполняться система

$$\begin{cases} \dfrac{\omega x+1}{x+1}=\omega+0,05, \\ \dfrac{\omega x+2}{x+2}=\omega+0,09 \end{cases} \underset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega x+1=\omega x+\omega+0,05x+0,05, \\ \omega x+2=\omega x+2\omega+0,09x+0,18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2=2\omega+0,1x+0,1, \\ 2=2\omega+0,09x+0,18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=0,01x-0,08, \\ 1=\omega+0,05x+0,05 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8, \\ \omega=0,55. \end{cases}$$

После дополнительных вложений в 2 млн руб. доля первого инвестора стала равна $0,55+0,05+0,04=0,64,$ а общая сумма инвестиций достигла $8+2=10$ млн руб. Чтобы доля первого инвестора увеличилась ещё на 0,06, ему дополнительно нужно внести y млн руб., а потому:

$$\frac{10\cdot 0,64+y}{10+y}=0,64+0,06 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6,4+y=7+0,7y \Leftrightarrow 0,3y=0,6 \Leftrightarrow y=2.$$

Ответ: 2.