РЕШУ ЕГЭ — математика профильная

1. Тип 16 № 506958 *i*

Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

Решение. Пусть сумма кредита S у. е., процентная ставка банка x %.

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Антон взятую сумму возвращал в банк равными долями. Сумма, образованная применением процентной ставки, составляет:

$$0,01xS+0,01x\cdot\frac{5S}{6}+0,01x\cdot\frac{4S}{6}+\ldots+0,01x\cdot\frac{2S}{6}+0,01x\cdot\frac{S}{6}=$$
$$=0,01Sx\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)=$$
$$=0,01Sx\cdot\frac{1+\frac{1}{6}}{2}\cdot 6=0,01Sx\cdot\frac{6+1}{2}=0,035Sx. \text{(у. е.)}$$

Общая сумма, выплаченная Антоном за 6 месяцев: $S+0,035Sx=(1+0,035x)\cdot S$ (у. е.). А эта сумма по условию задачи равна $1,63S$ у. е. Решим уравнение:

$$(1+0,035x)S=1,63S\Leftrightarrow 1+0,035x=1,63\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,035x=0,63\Leftrightarrow x=18.$$

Ответ: 18.

2. Тип 16 № 509583 *i*

Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?

Решение. Пусть B_i — размер долга Жанны на конец месяца i, X_i — платеж Жанны в конце месяца i. Мы знаем, что имеет место соотношение $B_i = 1{,}02B_{i-1} - X_i$. Кроме того, мы знаем, что последовательность (B_i) является арифметической прогрессией. При этом $B_0 = 1200$ тыс. руб., а $B_{24} = 0$, так как в конце срока кредитования долг Жанны должен быть равен нулю. Этих двух точек достаточно, чтобы узнать всю последовательность B_i: $b_i=\frac{24-i}{24}\cdot 1200.$ Значит,

$$X_i=1,02B_{i-1}-B_i=$$
$$=\left(1,02\cdot\frac{25-i}{24}-\frac{24-i}{24}\right)\cdot 1200=\frac{1,5-0,02i}{24}\cdot 1200.$$

Поскольку X_i линейно зависит от i, последовательность X_i также является арифметической прогрессией. Значит,

$$X_1+X_2+\ldots+X_{12}=\frac{(X_1+X_{12})\cdot 12}{2}=$$
$$=6(50\cdot 1,48+50\cdot 1,26)=$$

$$= 300 \cdot (1,48 + 1,26) = 300 \cdot 2,74 = 822 \text{ тыс. рублей.}$$

Ответ: 822 тыс. рублей.

Приведём другое решение.

Ежемесячно Жанна возвращает банку по 1,2 млн : 24 = 50 тыс. руб. тела долга и выплачивает равномерно уменьшающуюся от максимального значения до нуля сумму процентов за пользование кредитом. За первый месяц это $0{,}02 \cdot 1{,}2$ млн = 24 тыс. руб. За второй месяц на 1/24 меньше то есть 23 тыс. руб., затем 22 тыс. руб. и так далее. Поэтому выплаты за 12 первых месяцев составят арифметическую прогрессию с первым членом 74, последним — 63 тыс. руб. Ее сумма равна 12(74 + 63)/2 = 822 тыс. руб.

3. Тип 16 № 511220

1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

Решение. Если первый платеж банку Аркадия составил x рублей, то второй составит $2x$ рублей, а третий — $3x$ рублей, всего $6x$ рублей, что равно 2 395 800, то есть $x = 2\,395\,800 : 6 = 399\,300$. Отсюда: $2x = 798\,600$, $3x = 1\,197\,900$.

Пусть в банке Аркадий взял в кредит S рублей.

Тогда его долг 01.03.2011 составил $1{,}1S$ рублей. После первого перечисления Аркадия долг снизился до $(1{,}1S - 399\,300)$ руб.

01.03.2012 банк начислил проценты на долг Аркадия. Долг Аркадия стал $(1{,}1S - 399\,300) \cdot 1{,}1 = 1{,}21S - 439\,230$ (руб.)

Аркадий перевел в банк 798 600 руб. Долг снизился до $1{,}21S - 439230 - 798600 = 1{,}21S - 1237830$ (руб.)

01.03.2013 банк начислил проценты на оставшийся долг Аркадия. Долг Аркадия стал $(1{,}21S - 1237830) \cdot 1{,}1 = 1{,}331S - 1\,361\,613$ (руб.)

Аркадий перевел в банк 1 197 900 руб. Кредит погашен полностью, долга у Аркадия нет.

Значит, $1{,}331S - 1\,361\,613 - 1\,197\,900 = 0 \Leftrightarrow 1{,}331S = 2\,559\,513 \Leftrightarrow S = 1\,923\,000$.

Ответ: 1 923 000 рублей.

4. Тип 16 № 511283

В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 рубль.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение. Если искомая сумма составляет S рублей, то при коэффициенте ежегодной процентной ставки q, равной 1,31, фиксированная сумма Φ, которую клиент ежегодно должен возвращать в банк в течение 3 лет, составляет $\Phi = \dfrac{Sq^3}{q^2+q+1}$, откуда $S = \dfrac{\Phi \cdot (q^2+q+1)}{q^3}$.

Заметим, что 69 690 821 кратно $1,31^3$. Действительно, $69\ 690\ 821 : 1,31 = 53\ 199\ 100;$

$$53\ 199\ 100 : 1,31 = 40\ 610\ 000; 40\ 610\ 000 : 1,31 = 31\ 000\ 000.$$

$$S = \frac{69\ 690\ 821 \cdot (1,31^2 + 1,31 + 1)}{1,31^3} =$$
$$= 31\ 000\ 000 \cdot 4,0261 = 40\ 261 \cdot 3\ 100 = 124\ 809\ 100.$$

Ответ: 124 809 100 рублей.

Замечания:

1. В мировой практике существует и работает два способа (схемы) погашения кредитов: *дифференцированная*, при которой периодический платеж включает постоянную сумма для погашения основного долга по кредиту, к которой прибавляются проценты на оставшуюся часть долга, и *аннуитетная* при которой долг гасится равными платежами, как в условии данной задачи.

2. При аннуитетной схеме, как правило, бывает кратным q^n либо фиксированная сумма, которую клиент обязан вносить в отчетный период, либо сумма взятого кредита. Возможен случай, когда та или другая сумма, указанная выше, кратна $q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1.$

3. Прежде чем приступить к решению задачи, лучше проверить ожидаемые кратности, что облегчит дальнейшие вычисления.

Приведём другое решение.

Заметим, что ежегодный платеж равен $69\,690\,821 = 31\,000\,000 \cdot 1{,}31^3$.

Если искомая сумма составляет x рублей, то:

Периоды	**Долг клиента (рублей)**		
	в начале отчетного периода с учетом возрастания долга	**частичное погашение**	**остаток к концу периода после частичного погашения**
Первоначальный	x	—	x
I год	$1{,}31x$	$31000000 \cdot 1{,}31^3$	$1{,}31x-1{,}31^3\cdot 31000000=$ $=1{,}31\cdot(x-1{,}31^2\cdot 31000000)$
II год	$1{,}31^2(x-1{,}31^2\cdot 31000000)$	$31000000 \cdot 1{,}31^3$	$1{,}31^2(x-1{,}31^2\cdot 31000000)-1{,}31^3\cdot 31000000)=$ $=1{,}31^2(x-1{,}31^2\cdot 31000000-1{,}31\cdot 31000000)$
III год	$1{,}31^3(x-1{,}31^2\cdot 31000000-$ $-1{,}31\cdot 31000000)$	$31000000 \cdot 1{,}31^3$	$1{,}31^3(x-1{,}31^2\cdot 31000000-1{,}31\cdot 31000000)-$ $-1{,}31^3\cdot 31000000=$ $=1{,}31^3(x-1{,}31^2\cdot 31000000-1{,}31\cdot 31000000-31000000)=$ $=0$

Решение уравнения:

$$1{,}31^3(x-1{,}31^2\cdot 31000000-1{,}31\cdot 31000000-31000000)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-1{,}31^2\cdot 31000000-1{,}31\cdot 31000000-31000000=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=1{,}31^2\cdot 31000000+1{,}31\cdot 31000000+31000000 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=31000000\cdot(1{,}31^2+1{,}31+1) \Leftrightarrow$$
$$x=3100\cdot 10000\cdot(1{,}7161+2{,}31) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=3100\cdot 10000\cdot 4{,}0261 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=31\cdot 40261\cdot 100 \Leftrightarrow x=124809100.$$

Ответ: 124 809 100 рублей.

5. Тип 16 № 512462

Анатолий решил взять кредит в банке 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Существуют две схемы выплаты кредита.

По первой схеме банк в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Анатолий переводит в банк фиксированную сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами (аннуитетные платежи).

По второй схеме тоже сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Анатолием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину (дифференцированные платежи). Какую схему выгоднее выбрать Анатолию? Сколько рублей будет составлять эта выгода?

Решение. Рассмотрим первую схему. Пусть x руб. – фиксированная сумма ежемесячных выплат.

Который отчетный месяц?	Долг к концу месяца с учетом начисленных процентов (руб.)	Анатолий переводит в банк (руб.)	Долг Анатолия на начало следующего месяца (руб.)
Первый	$331000\cdot 1,1=364100$	x	$364100-x$
Второй	$(364100-x)\cdot 1,1=400510-1,1x$	x	$400510-2,1x$
Третий	$(400510-2,1x)\cdot 1,1=440561-2,31x$	x	$440561-3,31x=0$

$$3,31x=440561\Leftrightarrow x=133100\Leftrightarrow 3x=399300.$$

Теперь рассмотрим вторую схему.

Который отчетный месяц?	Анатолий должен перевести в банк		
	Часть кредита по основному долгу (руб.)	Процентные ставки банка	Всего (руб.)
Первый	$\dfrac{331000}{3}$	$331000\cdot 0,1=33100$	$\dfrac{331000}{3}+33100=\dfrac{430300}{3}$
Второй	$\dfrac{331000}{3}$	$\dfrac{331000\cdot 0,1\cdot 2}{3}=\dfrac{66200}{3}$	$\dfrac{331000}{3}+\dfrac{66200}{3}=132400$
Третий	$\dfrac{331000}{3}$	$\dfrac{331000\cdot 0,1}{3}=\dfrac{33100}{3}$	$\dfrac{331000}{3}+\dfrac{33100}{3}=\dfrac{364100}{3}$

Итак, если Анатолий воспользуется второй схемой, то он в банк должен будет вернуть сумму, равную

$$\frac{430300}{3}+132400+\frac{364100}{3}=$$
$$=\frac{794400}{3}+132400=397200\ (\text{руб.})$$

А эта сумма меньше, чем 399300, на 2100 руб.

Замечание:

Эту разницу можно было бы вычислить и так:

1) $\Phi=\dfrac{331000\cdot 1,1^3}{1,1^2+1,1+1}=\dfrac{331000\cdot 1,331}{3,31}=$
$=1,331\cdot 100000=133100;$

2) $3\Phi=399300;$

3) $331000+331000\cdot 0,1\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=$
$=331000+33100\cdot 2=331000+66200=397200;$

4) $399300-397200=2100.$

Ответ: выгодна вторая схема. 2100 рублей.

6. Тип 16 № 506952

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{3}{4}$ от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение. Пусть сумма кредита составляет S у. е., а процентная ставка по кредиту $x\%.$ К концу первого года сумма долга фермера в банк с учетом начисленных процентов составила $(1+0,01x)S$ у. е.

После возвращения банку $\frac{3}{4}$ части от суммы долга долг фермера на следующий год составил $\frac{1}{4}(1+0,01x)S$ у. е.

На эту сумму в следующем году вновь начислены проценты. Сумма долга фермера к концу второго года погашения кредита с учетом процентной ставки составила $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S$ у. е. По условию задачи эта сумма равна $1,21S$ у. е.

Решим уравнение $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S=1,21S$ на множестве положительных чисел.

$$(1+0,01x)^2=4\cdot 1,21\Leftrightarrow 1+0,01x=2\cdot 1,1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,01x=1,2\Leftrightarrow x=120.$$

Ответ: 120%.

7. Тип 16 № 507278

1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?

Решение. Ясно, что за 8 месяцев Павел Витальевич не справится с выплатой долга, так как он вернет банку не более $125\,000\cdot 8=1\,000\,000$ рублей, а общий долг будет больше миллиона рублей, поскольку банк еще начисляет проценты.

Покажем, что на 9 месяцев кредит брать можно. Пусть ежемесячный платеж будет равен 125000 рублей. Через месяц задолженность Павла Витальевича перед банком составит 1010000 рублей, затем Павел Витальевич выплачивает 125000 и долг составляет 885000. Затем банк начисляет процент, но 1 процент от оставшейся суммы будет уже меньше, чем 10000 рублей, и в дальнейшем будет тем более меньше. Поэтому задолженность через два месяца будет меньше 895000, а после очередного платежа — меньше 770000 рублей.

Аналогично, через 3 месяца задолженность будет меньше 780000, а после платежа — меньше 655000 рублей. Через 4 месяца задолженность будет меньше 665000, а после платежа — меньше 540000 рублей. Через 5 месяцев задолженность будет меньше 550000, а после платежа - меньше 425000 рублей.

Через 6 месяцев задолженность будет меньше 435000, а после платежа — меньше 310000 рублей. Через 7 месяцев задолженность будет меньше 320000, а после платежа - меньше 195000 рублей. Через 8 месяцев задолженность будет меньше 205000, а после платежа - меньше 80000 рублей. Таким образом, через 9 месяцев задолженность заведомо не будет превышать 90000 рублей, и своим последним платежом Павел Витальевич полностью расплатится с банком.

Ответ: на 9 месяцев

Приведём другое решение.

За 8 месяцев Павел Витальевич не справится с выплатой долга, так как он вернет банку не более $125\,000 \cdot 8 = 1\,000\,000$ рублей, а общий долг будет больше миллиона рублей, поскольку банк еще начисляет проценты. За 9 месяцев сумма долга увеличится не более, чем на девять сумм процентов первого месяца, то есть не более, чем на 90 000 рублей. Следовательно, выплатить кредит можно за 9 месяцев.

8. Тип 16 № 507275

31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Валерий переводит очередной платеж. Валерий выплатил кредит за два платежа, переводя в первый раз 660 тыс рублей, во второй — 484 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Решение. Пусть x — это процент, под который банк выдал кредит. Из условия следует, что на 31 декабря 2015 года у Валерия был долг $1000(1+0,01x)$ тыс. руб., а затем он выплатил 660 тыс. рублей. На оставшуюся суммы был начислен процент, и перед вторым платежом долг составлял $(1000(1+0,01x)-660)(1+0,01x)$. Этот долг был погашен платежом, равным 484 тыс. руб.

Составим уравнение:

$$\begin{gathered}(1000(1+0,01x)-660)(1+0,01x)=484 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (340+10x)(1+0,01x)=484 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3400+34x+100x+1x^2=4840 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2+134x-1440=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10, \\ x=-144.\end{array}\right.\end{gathered}$$

Отсюда получаем, что банк выдал кредит под 10% годовых.

Ответ: 10%.

9. Тип 16 № 507284

31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Решение. Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b=1+0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1=Sb-X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2=S_1b-X=(Sb-X)b-X=Sb^2-(1+b)X.$$

После третей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3=Sb^3-(1+b+b^2)X=Sb^3-\frac{b^3-1}{b-1}\cdot X.$$

По условию тремя выплатами Тимофей погасил кредит полностью, поэтому

$$Sb^3-\frac{b^3-1}{b-1}\cdot X=0,$$

откуда $X = \dfrac{Sb^3(b-1)}{(b^3-1)}$.

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Тимофей гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год он должен был бы выплачивать $Y = \dfrac{Sb^2}{b+1}$ рублей. Значит, он отдал банку на $3X-2Y$ больше.

При $S = 7007000$ и $a = 20$, получаем: $b = 1,2$ и

$$X = \frac{7\,007\,000 \cdot 1,728 \cdot 0,2}{0,728} = 3\,326\,400 \text{ (рублей).}$$

$$Y = \frac{7\,007\,000 \cdot 1,44}{2,2} = 4\,586\,400 \text{ (рублей).}$$

Значит, $3X - 2Y = 806400.$

Ответ: 806400.

10. Тип 16 № 507212

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение. Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1+b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1+b+b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1} \cdot X.$$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1+b+b^2+b^3)X = Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1} \cdot X.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1} \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = \frac{Sb^4(b-1)}{b^4-1}$$

При $S = 6902000$ и $a = 12,5$, получаем: $b = 1,125 = \dfrac{9}{8}$ и

$$\text{X} = \frac{6\,902\,000 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^4 \cdot \frac{1}{8}}{\left(\frac{9}{8}\right)^4 - 1} = \frac{6\,902\,000 \cdot 9^4 \cdot 8^4}{8^5 \cdot (9^4 - 8^4)} =$$

$$= \frac{6\,902\,000 \cdot 9^4}{8 \cdot (9-8) \cdot (9+8) \cdot (9^2+8^2)} =$$

$$= \frac{6902000 \cdot 81 \cdot 81}{8 \cdot 17 \cdot 145} = 2296350 \,(\text{рублей})$$

Ответ: 2 296 350.

11. Тип 16 № 510054

31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть сумма кредита равна a, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют k %. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = \\ = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - \left(1 + m + m^2\right)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $am^3 - \frac{m^3-1}{m-1} \cdot x = 0,$ откуда $x = \frac{am^3(m-1)}{m^3-1}$. При $a = 9\,930\,000$ и $k = 10$, получаем: $m = 1{,}1$ и

$$x = \frac{9930000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3993000 \ (\text{рублей}).$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Приведём другое решение.

Пусть x — один из трёх разовых платежей. Тогда сумма долга после оплаты в первом году составит: $9930000 \cdot 1{,}1 - x$. После внесения второго платежа сумма долга станет равной $(9930000 \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x$. Сумма долга после третьего платежа: $((9930000 \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x$. Третьим платежом Сергей должен погасить долг, то есть долг станет равным нулю:

$$((9930000 \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9930000 \cdot 1{,}1^3 - 1{,}1(1{,}1x + x) - x = 0 \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow 9930000 \cdot 1{,}1^3 - 3{,}31x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{9930000 \cdot 1{,}1^3}{3{,}31} = 3993000 \ (\text{рублей}).$$

12. Тип 16 № 507208

31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

Решение. Пусть S — сумма кредита. Обозначим ежегодные платежи A_1 и A_2 соответственно. Сумма долга каждый год увеличивается на $a\%$, то есть сумма долга умножается на коэффициент $b=1+0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга станет равной $S_1=Sb-A_1$, после второй выплаты: $S_2=(Sb-A_1)b-A_1$, после третье выплаты: $S_3=((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1$, после четвёртой выплаты: $S_4=(((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1)b-A_1$. Причём долг будет погашен полностью, получаем, то есть $(((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1)b-A_1=0$. Аналогично получаем уравнение для случая, когда выплаты совершаются платежами размером $A_2: S'_2=(Sb-A_2)b-A_2$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} Sb^4-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0, \\ Sb^2-A_2b-A_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Sb^2\cdot b^2-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0, \\ Sb^2=A_2b+A_2. \end{cases}$$

Подставим выражение для Sb^2 в первое уравнение: $(A_2+A_2b)\cdot b^2-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0$. Преобразуем это уравнение:

$$(A_2-A_1)b^3+(A_2-A_1)b^2-A_1b-A_1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b^2(A_2-A_1)(b+1)-A_1(b+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+1)((A_2-A_1)b^2-A_1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1, \\ b^2=\dfrac{A_1}{A_2-A_1}. \end{array}\right.$$

Подставляя числовые значения получаем:

$$\left[\begin{array}{l} b=-1, \\ b=-1{,}2, \\ b=1{,}2. \end{array}\right.$$

Отрицательные корни не подходят по условию задачи, значит, $b=1{,}2$, откуда $a=20$, то есть Пётр взял деньги в банке под 20%.

Ответ: 20%.

13. Тип 16 № 507890

Ольга хочет взять в кредит 100 000 рублей под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 тысяч рублей?

Решение. Чтобы количество лет было минимальным необходимо, чтобы размер выплат был максимальным. Поэтому ежегодные выплаты должны составлять 24 тыс. руб. Тогда в конце года оставшаяся сумма долга умножается на величину 1,1, а после начисления процентов долг уменьшается на 24 тыс. руб. Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток доли после выплаты (руб.)
	100000	
1	110000	86000
2	94600	70600
3	77660	53660
4	59026	35026
5	38528,6	14528,6
6	15981,46	0

Ольга погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6.

14. Тип 16 № 506957

Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила сумма, уплаченная Сергеем банку сверх кредита?

Решение.

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Сергей взятую сумму, без учета процентов, возвращал равными долями.

Общая сумма, уплаченная Сергеем банку сверх кредита, обусловлена только применением процентной ставки.

В первом месяце эта часть заплаченной суммы составляла $0,12S$, во втором — $0,12 \cdot \frac{8}{9}S$, в третьем — $0,12 \cdot \frac{7}{9}S, \ldots$, в восьмом — $0,12 \cdot \frac{2}{9}S$, наконец, в последнем — $0,12 \cdot \frac{1}{9}S$.

Всего за 9 месяцев:

$$0,12S \cdot \left(1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \ldots + \frac{1}{9}\right) =$$

$$= 0,12S \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{9}\right)}{2} \cdot 9 = 0,12S \cdot \frac{9+1}{2} = 0,6S.$$

Искомое процентное отношение есть 60 $(0,6S : S \cdot 100)$.

Ответ: 60.

15. Тип 16 № 509589

Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r % этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13% больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть сумма кредита равна S. По условию долг Алексея должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{11S}{12},\ \ldots,\frac{2S}{12},\ \frac{S}{12},\ 0.$$

К концу каждого месяца к сумме долга добавляется $r\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$. Тогда последовательность сумм долга вместе с процентами такова:

$$kS,\ \frac{11kS}{12},\ \ldots,\frac{2kS}{12},\ \frac{kS}{12}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{12},\ \frac{11(k-1)S+S}{12},\ \ldots,\frac{2(k-1)S+S}{12},\ \frac{(k-1)S+S}{12}.$$

Всего следует выплатить:

$$S+S(k-1)\times\left(1+\frac{11}{12}+\ldots+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)=S\left(1+\frac{13(k-1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат оказалась на 13% больше суммы, взятой в кредит, поэтому:

$$13(k-1)=0,26\Leftrightarrow k=1,02.$$

Откуда получаем, что $r=2$.

Ответ: 2.

16. Тип 16 № 510103

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда переплата за первый месяц равна $\frac{r}{100}S_0$. По условию, ежемесячный долг перед банком должен уменьшиться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежемесячной выплаты, равной $S_0/19$, и ежемесячной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной

$$\frac{r}{100}S_0,\ \frac{18}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0,\ \ldots,\ \frac{2}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0,\ \frac{1}{19}\cdot\frac{r}{100}S_0.$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдём полную переплату по кредиту:

$$\frac{r}{100}S_0\left(1+\frac{18}{19}+\ldots+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)=\frac{r}{100}S_0\cdot\frac{1+\frac{1}{19}}{2}\cdot 19=\frac{r}{10}S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, тогда:

$$0,1rS_0 = 0,3S_0 \Leftrightarrow r = 3.$$

Ответ: 3.

Примечание Дмитрия Гущина.

Укажем общие формулы для решения задач этого типа. Пусть на n платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S, причём каждый платежный период долг сначала возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Тогда величина переплаты П и полная величина выплат В за всё время выплаты кредита даются формулами

$$\Pi = \frac{r}{100} \cdot \frac{n+1}{2} S_0, \qquad \text{B} =$$
$$= S_0 + \Pi = S_0 \left(1 + \frac{r(n+1)}{200}\right).$$

В условиях нашей задачи получаем: $\frac{r(n+1)}{200} S_0 = 0,3S_0$, откуда для n = 19 находим r = 3.

Доказательство формул (для получения полного балла его нужно приводить на экзамене) немедленно следует из вышеприведённого решения задачи путём замены 19 месяцев на n месяцев и использовании формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии.

17. Тип 16 № 513106

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Не снижая общности рассуждений, примем начальную сумму кредита за 100 руб. и будем считать, что выплаты производились 14 числа каждого месяца. Составим таблицу выплат:

Дата	14.02	14.03	14.04	14.05	14.06	14.07
Долг, руб.	105	94,5	84	73,5	63	52,5
Выплата, руб.	15	14,5	14	13,5	13	52,5
Остаток долга на день выплаты, руб.	90	80	70	60	50	0
Остаток долга на день выплаты, %	90%	80%	70%	60%	50%	0%

Тем самым, полная сумма выплат равна 15 + 14,5 +14 +13,5 +13 + 52,5 = 122,5 руб., переплата составила 22,5%.

Ответ: 22,5.

18. Тип 16 № 513923

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года.
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.
— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 6,1 млн. рублей.

Решение. Пусть банк начисляет r процентов, то есть умножает остаток долга на $x=1+\frac{r}{100}$. Тогда первые три платежа составляли $4,2x-4,2$ миллионов рублей. Пусть, далее, четвертый и пятый платежи составляли N миллионов рублей. Тогда $N=(4,2x-N)x$, откуда $N=\frac{4,2x^2}{1+x}$. По условию, общие выплаты составят 6,1 млн руб., откуда имеем:

$$3(4,2x-4,2)+2\cdot\frac{4,2x^2}{1+x}=6,1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(42x-42)+\frac{84x^2}{1+x}=61\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{84x^2}{1+x}=187-126x\Leftrightarrow 84x^2=(1+x)(187-126x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 210x^2-61x-187=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(10x-11)(21x+17)=0\underset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1,1.$$

Тогда $r=10$.

Ответ: 10.

Приведём другое решение.

График погашения кредита

Дата	Долг до выплаты, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг после выплаты, тыс. руб.
01.07.2016	4200		
01.01.2017	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2017		$42r$	
01.07.2017			4200
01.01.2018	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2018		$42r$	
01.07.2018			4200
01.01.2019	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		

01.02.2019		$42r$	
01.07.2019			4200
01.01.2020	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)=4200+42r$		
01.02.2020		x	
01.07.2020			$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)-x$
01.01.2021	$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-x\left(1+\frac{r}{100}\right)$		
01.02.2022		x	0

1) $4200\frac{r}{100}\cdot 3+2x=6100.$

2) $4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-x\left(1+\frac{r}{100}\right)=x$, откуда

$$4200\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-(3050-63r)\left(1+\frac{r}{100}\right)=3050-63r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21r^2+3590r-38\ 000=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r=10, \\ r=\dfrac{-3800}{21} \end{array}\right. \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r=10.$$

Расчеты будем вести в тыс. руб.

1. Поскольку в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг клиента будет равен сумме взятого кредита, то в течение первых трех из пяти лет клиент будет выплачивать кредитору лишь процентные начисления за первые три года. Общая сумма выплаченных денежных средств составит $3\cdot 4200\cdot 0{,}01r=126r$ (тыс. руб.) Следовательно, за последние два расчетных года клиент выплатит кредитору $(6100-126r)$ тыс. руб. А это значит, что суммы выплат 2020 года и аналогичная сумма 2021 года составят по $(3050-63r)$ (тыс. руб.) каждая.

2. По условию задачи к январю 2020 года долг клиента составит 4200 тыс. руб. В январе 2020 г этот долг возрастет до $4200\cdot(1+0{,}01r)=4200+42r$ (тыс. руб).

С февраля по июнь клиент выплатит кредитору сумму $(3050-63r)$ тыс. руб. Долг к июлю 2020 г. составит $4200+42r-3050+63r=1150+105r$ (тыс. руб.)

3. К январю 2021 года долг клиента составит $(1150+105r)$ тыс. руб. В январе 2020 г. этот долг возрастет до

$$(1150+105r)\cdot(1+0{,}01r)=$$
$$=1150+105r+11{,}5r+1{,}05r^2=$$
$$=1{,}05r^2+116{,}5r+1150\ (\text{тыс. руб.})$$

С февраля по июнь клиент выплатит кредитору сумму $(3050-63r)$ тыс. руб. Долг будет погашен полностью. Следовательно,

$$1{,}05r^2+116{,}5r+1150-3050+63r=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 105r^2+11650r+115000-305000+6300r=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 105r^2 + 17950r - 190000 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 21r^2 + 3590r - 38000 = 0.$$

$$r = \frac{-1795 \pm \sqrt{3222025 + 798000}}{21} =$$
$$= \frac{-1795 \pm \sqrt{4020025}}{21} = \frac{-1795 \pm 2005}{21}.$$

$$r_1 = \frac{-1795 + 2005}{21} = \frac{210}{21} = 10;$$

$$r_2 = \frac{-1795 - 2005}{21} < 0.$$

второй корень не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 10.

19. Тип 16 № 514029

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн.

Решение. Обозначим через S размер кредита. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0,2S$ млн. Всего $0,6S$за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-го года долг возрастёт до $1,2S$ млн. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1,2S-x$, а в середине 5-го года он равен $1,2(1,2S-x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1,2(1,2S-x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1,2(1,2S-x) = x \Leftrightarrow 2,2x = 1,44S \Leftrightarrow x = \frac{144}{220}S = \frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен $0,6S + \frac{2 \cdot 36}{55}S = \frac{105}{55}S = \frac{21}{11}S.$ По условию

$$\frac{21}{11}S > 10 \Leftrightarrow 21S > 110.$$

При $S = 6$ это неравенство верно, а при $S = 5$ оно неверно, как и при меньших S.

Ответ: 6 млн руб.

20. Тип 16 № 514450

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение. Пусть повышающий коэффициент $1+\frac{r}{100}=k.$ В соответствии с этим обозначением и условием задачи заполним таблицу.

Месяц	Долг на 1-е число, млн. руб	Выплата, млн. руб	Долг на 15-е число, млн. руб
Январь			1
Февраль	k	$k-0,6$	0,6
Март	$0,6k$	$0,6k-0,4$	0,4
Апрель	$0,4k$	$0,4k-0,3$	0,3
Май	$0,3k$	$0,3k-0,2$	0,2
Июнь	$0,2k$	$0,2k-0,1$	0,1
Июль	$0,1k$	$0,1k$	0

Найдём общую сумму выплат, сложив ежемесячные выплаты:

$$\begin{gathered}(k-0,6)+(0,6k-0,4)+(0,4k-0,3)+\\+(0,3k-0,2)+(0,2k-0,1)+0,1k=\\=k(1+0,6+0,4+0,3+0,2+0,1)-(0,6+0,4+0,3+0,2+0,1)=\\=2,6k-1,6\end{gathered}$$

По условию

$$2,6k-1,6<1,2 \Leftrightarrow 2,6k<2,8 \Leftrightarrow k<\frac{14}{13}.$$

Значит,

$$1+\frac{r}{100}<\frac{14}{13} \Leftrightarrow \frac{r}{100}<\frac{1}{13} \Leftrightarrow r<\frac{100}{13} \Leftrightarrow r<7\frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое значение $r=7.$ Тем самым ежемесячно остаток долга возрастал на 7%.

Ответ: $r=7$.

21. Тип 16 № 514477

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
− каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
− в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Решение. Долг перед банком (в млн рублей) на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ 0,7S,\ 0,4S,\ 0.$$

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 25%, значит, долг в январе каждого года равен:

$$1,25S,\ 0,875S,\ 0,5S.$$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$$0,55S,\ 0,475S,\ 0,5S.$$

По условию, каждая из выплат должна быть больше 5 млн рублей. Это будет верно, если минимальная из выплат больше 5 млн рублей то есть если $0,475S > 5.$ Тогда:

$$S > \frac{5}{0,475} = \frac{5000}{475} = \frac{200}{19} = 10\frac{10}{19}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 11. Значит, искомый размер кредита — 11 млн рублей.

Ответ: 11.

22. Тип 16 № 514523

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. руб. Условия его возврата таковы:
− каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
− в июле 2017,2018 и 2019 долг остаётся равным S тыс. руб.;
− выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. руб.;
− к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.
Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Решение. В июле 2017, 2018 и 2019 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют $0{,}2S$ тыс. руб.
В январе 2020 года долг (в тыс. руб.) равен $1{,}2S$, а в июле — $1{,}2S-360$.
В январе 2021 года долг будет равен $1{,}44S-432$, а в июле — $1{,}44S-792$.
По условию, долг будет выплачен полностью, значит, $1{,}44S-792=0$, откуда $S=550$. Таким образом, первые три выплаты составляют по 110 тыс. руб., а последние две — по 360 тыс. руб. Общая сумма выплат составляет:

$$3\cdot 110 + 2\cdot 360 = 1050\ (\text{тыс. руб.}).$$

Ответ: 1050 тыс. рублей.

23. Тип 16 № 515728

15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Решение. Пусть S — изначальная сумма. Остаток по кредиту на конец месяца:

$$S;\ \frac{17}{18}S;\ \ldots;\ \frac{2}{18}S;\ \frac{1}{18}S;\ 0.$$

В начале месяца долг увеличивается:

$$\frac{51}{50}S;\ \frac{17}{18}\cdot\frac{51}{50}S;\ldots;\ \frac{51}{18\cdot 50}S.$$

Выплаты составляют:

$$\left(\frac{51}{50}-\frac{17}{18}\right)S;\ \left(\frac{17}{18}\cdot\frac{51}{50}-\frac{16}{18}\right)S;\ldots;\ \frac{51}{18\cdot 50}S.$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{68}{50\cdot 18}S+$$
$$+\frac{1}{18\cdot 50}\left((17+16+\ldots+2+1)\cdot 51-50(16+15+\ldots+2+1)\right)S=$$
$$=(153\cdot 51-136\cdot 50)\cdot\frac{1}{18\cdot 50}S+\frac{68}{50\cdot 18}S=\frac{119}{100}S.$$

Ответ: 119%.

24. Тип 16 № 515804

15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку в первые 12 месяцев?

Решение. Долг на конец месяца:

$$2{,}4;\ 2{,}3;\ 2{,}2;\ \ldots;\ 0{,}1;\ 0.$$

Долг с учетом процентов:

$$2{,}4\cdot\frac{103}{100};\ 2{,}3\cdot\frac{103}{100};\ \ldots;\ 0{,}1\cdot\frac{103}{100}.$$

Выплаты за первые 12 месяцев:

$$2{,}4\cdot\frac{103}{100}-2{,}3;\ 2{,}3\cdot\frac{103}{100}-2{,}2;\ \ldots;\ 1{,}3\cdot\frac{103}{100}-1{,}2.$$

Их сумма равна:

$$\frac{1}{100}(2,4\cdot 103-2,3\cdot 100+2,3\cdot 103-2,2\cdot 100+\ldots+1,3\cdot 103-1,2\cdot 100)=$$

$$=\frac{1}{100}(2,4\cdot 103+3\cdot 2,3+3\cdot 2,2+\ldots+3\cdot 1,3-1,2\cdot 100)=$$

$$=\frac{1}{100}(2,4\cdot 103+3(2,3+2,2+\ldots+1,3)-1,2\cdot 100)=$$

$$=\frac{1}{100}(2,4\cdot 103+3\cdot 19,8-1,2\cdot 100)=\frac{186,6}{100}=1,866 \text{ млн руб.}$$

Ответ: 1 866 000 рублей.

25. Тип 16 № 516764

Дмитрий взял кредит в банке на сумму 270 200 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Дмитрий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Дмитрий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Дмитрий заплатил в первый раз? Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть S = 270 200 рублей — величина кредита, а x (руб.) — первый платеж Дмитрия. Тогда оставшиеся два платежа составляли $3x$ и $9x$ рублей соответственно.

В конце первого года долг Дмитрия после его платежа составлял $(1,1S-x)$ руб.; в конце второго года — $((1,1S-x)\cdot 1,1-3x)$ руб., а в конце третьего — $(((1,1S-x)\cdot 1,1-3x)\cdot 1,1-9x)$ руб., что составило 0 рублей, так как за три года кредит был погашен полностью. Далее имеем:

$$((1,1S-x)\cdot 1,1-3x)\cdot 1,1-9x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,331S=13,51x\Leftrightarrow x=\frac{1331}{13\ 510}S.$$

Подставляя в это выражение $S=270\ 200,$ получаем $x=26\ 620$ рублей.

Ответ: 26 620 руб.

26. Тип 16 № 516783

Георгий взял кредит в банке на сумму 804 000 рублей. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.

Решение. Обозначим исходную сумму 804 000 рублей через S, а третий платеж Георгия через x рублей. Тогда первые два платежа составляли $4x$ и $2x$ рублей соответственно.

В конце первого года долг Георгия после его платежа составлял $(1,1S-4x)$ рублей; в конце второго года — $((1,1S-4x)\cdot 1,1-2x)$ рублей, а в конце третьего — $(((1,1S-4x)\cdot 1,1-2x)\cdot 1,1-x)$ рублей, что составило 0 рублей, так как за три года кредит был погашен полностью. Имеем уравнение:

$$((1,1S-4x)\cdot 1,1-2x)\cdot 1,1-x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1,21S-6,4x)\cdot 1,1-x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,331S=8,04x\Leftrightarrow x=\frac{1331}{8040}S.$$

Подставляя в это выражение $S=804\ 000,$ получаем $x=133\ 100$ рублей.

Ответ: 133 100 руб.

27. Тип 16 № 517203

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r , если известно, что последний платёж будет не менее 0,819 млн рублей.

Решение. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$7;\ 6{,}3;\ 5{,}6;\ ...;\ 1{,}4;\ 0{,}7;\ 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на r %. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$7k;\ 6{,}3k;\ 5{,}6k;\ ...;\ 1{,}4k;\ 0{,}7k.$$

Следовательно, последний платеж составит $0{,}7k$ млн рублей.

Получаем $0,7k \geqslant 0,819,$ откуда $k \geqslant 1,17.$ Значит, $k=1,17,\ \ r=17.$

Ответ: 17.

28. Тип 16 № 517463

15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

Решение. По формуле для переплаты П при выплате суммы кредита S дифференцированными платежами имеем:

$$\Pi=\frac{n+1}{200}rS,$$

где n — искомое число месяцев, а $r=3$ — величина платежной ставка в процентах (см. Гущин Д. Д. «Встречи с финансовой математикой»; для получения полного балла доказательства этих формул необходимо приводить на экзамене). По условию, переплата П равна $0{,}3S$, тогда:

$$0,3S=\frac{n+1}{2}\cdot 0,03S,$$

откуда $n = 19$.

Приведем другое решение.

Пусть сумма кредита S выплачивается за n месяцев.

Долг уменьшается на 15-е число равномерно: $S,\ \ \frac{S}{n}(n-1),\ \ldots\frac{2S}{n},\ \frac{S}{n},\ 0.$

Первого числа долг возрастает на 3%, значит, он составляет: $1,03S,\ \ \frac{1,03S(n-1)}{n},\ \ldots\ \frac{2,06S}{n},\ \ \frac{1,03S}{n}.$

Выплаты:

$$0,03S+\frac{S}{n},\ \frac{0,03S(n-1)}{n}+$$
$$+\frac{S}{n},\ \dots\frac{0,06S}{n}+\frac{S}{n},\ \frac{0,03S}{n}+\frac{S}{n}.$$

Сумма выплат будет равна:

$$S+$$
$$+0,03S\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ \dots\ +\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=S\left(1+\frac{0,03(n+1)}{2}\right).$$

Тогда

$$S\left(1+\frac{0,03(n+1)}{2}\right)=1,3S\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{0,03(n+1)}{2}=0,3\Leftrightarrow n=19.$$

Ответ: 19.

29. Тип 16 № 517480

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3,6 млн рублей?

Решение. Ясно, что наибольшим является первый платёж, соответствующий максимальной сумме долга. Пусть кредит планируется взять на *n* лет. Первый платёж при выплате дифференцируемыми платежами равен $\frac{9}{n}+9\cdot 0,2$ млн руб. По условию эта величина равна 3,6 млн руб., откуда $n=5.$ По формуле для выплаты В при оплате кредита *S*, взятого под *r*% годовых, имеем:

$$\text{В}=S+\frac{n+1}{200}rS,$$

Поэтому

$$\text{В}=9+\frac{5+1}{200}\cdot 20\cdot 9=14,4 \text{ млн руб.}$$

О решении таких заданий см. Гущин Д. Д. «Встречи с финансовой математикой».

Приведём авторское решение.

Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$9,\ \frac{9(n-1)}{n},\ \dots,\ \frac{9\cdot 2}{n},\ \frac{9}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$10,8,\ \frac{10,8(n-1)}{n},\ \dots,\ \frac{10,8\cdot 2}{n},\ \frac{10,8}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1,8+\frac{9}{n},\ \frac{1,8(n-1)+9}{n},\ \ldots,\ \frac{1,8\cdot 2+9}{n},\ \frac{1,8+9}{n}.$$

Получаем $1,8+\frac{9}{n}=3,6,$ откуда $n=5.$ Значит, всего следует выплатить

$$9+1,8\left(1+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)=9+1,8\cdot 3=14,4 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 14,4 млн рублей.

30. Тип 16 № 517503

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 147 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами, то есть за два года.

Решение. В июле 2020 года долг составлял 147 тыс. руб. После начисления 10% он стал составлять 147 + 14,7 = 161,7 тыс. руб. Пусть первая выплата была равна x тыс. руб. Тогда долг на июль 2021 года стал составлять $161,7-x$ тыс. руб.

После второго начисления процентов сумма долга составила $(161,7 - x)1,1 = 177,87 - 1,1x$. Этот долг был погашен вторым платежом, равным x, откуда получаем уравнение $177,87 - 1,1x = x$. Из этого уравнения находим $x = 84,7$ тыс. руб. Поэтому банку было выплачено $2x = 169,4$ тыс. руб.

Приведём решение в общем случае.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a%. Тогда оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2=S_1b-X=(Sb-X)b-X=Sb^2-(1+b)X.$$

По условию кредит будет погашен двумя платежами, поэтому $Sb^2-(1+b)X=0,$ откуда $X=\frac{Sb^2}{b+1}.$

При $S = 147\,000$ и $a = 10$, получаем: $b = 1,1$ и

$$2X=2\cdot\frac{147000\cdot 1,21}{2,1}=169,4 \text{ (тыс. рублей).}$$

Ответ: 169 400 рублей.

31. Тип 16 № 517569

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

Решение. По формуле для переплаты П при выплате суммы кредита $S = 18$ млн рублей дифференцированными платежами имеем:

$$\Pi = \frac{n+1}{200} rS,$$

где n — искомое число лет, а $r = 10$ — величина платежной ставки в процентах (см. Гущин Д. Д. «Встречи с финансовой математикой»; для получения полного балла доказательство этих формул необходимо приводить на экзамене). По условию, переплата П равна $27 - 18 = 9$ млн рублей

$$9 = \frac{n+1}{2} \cdot 0,1 \cdot 18,$$

откуда $n = 9$.

Приведем другое решение.

Долг уменьшается каждый июль равномерно: $18,\ \frac{18}{n}(n-1),\ \ldots,\ \frac{2 \cdot 18}{n},\ \frac{18}{n},\ 0.$

В январе долг возрастает на 10%, значит, долг в январе:

$$1,1 \cdot 18,\ \frac{1,1 \cdot 18(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{2 \cdot 1,1 \cdot 18}{n},\ \frac{1,1 \cdot 18}{n}.$$

Выплаты:

$$0,1 \cdot 18 + \frac{18}{n},\ \frac{0,1 \cdot 18(n-1)}{n} + \\ + \frac{18}{n},\ \ldots,\ \frac{0,1 \cdot 18 \cdot 2}{n} + \frac{18}{n},\ \frac{0,1 \cdot 18}{n} + \frac{18}{n}.$$

Тогда

$$18 + 0,1 \cdot 18 \left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \ \ldots \ + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \right) = 18 + 18 \frac{0,1(n+1)}{2} = 27 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1,8 \frac{(n+1)}{2} = 9 \Leftrightarrow n = 9.$$

Ответ: 9.

32. Тип 16 № 517571

В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;

— с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 156 060 рублей больше суммы взятого кредита.

Решение. Пусть в кредит планируется взять S рублей, а ежегодный платеж по кредиту будет составлять x рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 30% или в $(1 + \frac{30}{100}) = 1,3$ раза и уменьшается на x рублей.

Тогда в первый год долг составит: $S \cdot 1,3,$ остаток будет равен $S \cdot 1,3 - x.$

После второго года остаток по кредиту составит: $(S \cdot 1,3 - x)1,3 - x.$

В конце третьего года он будет равен $((S \cdot 1,3 - x)1,3 - x)1,3 - x.$

По условию кредит был погашен за 3 года, а это значит, что остаток за третий год равен 0, то есть:

$$((S \cdot 1,3 - x)1,3 - x)1,3 - x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1,3^3 S - 3,99x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2,197S}{3,99}.$$

По условию общая сумма выплат на 156 060 рублей больше суммы взятого кредита, а значит:

$$3x = S + 156060 \Leftrightarrow \frac{2,197S}{1,33} = S + 156060 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S = \frac{1,33 \cdot 156060}{0,867} = 239400.$$

Ответ: 239 400 рублей.

33. Тип 16 № 519363

В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на r%;
— с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 56 595 рублей, или за два года равными платежами по 81 095 рублей.

Найдите r.

Решение. Пусть сумма кредита S , ежегодные выплаты x, $k = 1 + \frac{r}{100}$. По условию долг на июль меняется так:

$$S, kS - x, k^2S - kx - x, k^3S - k^2x - kx - x,$$

Если долг выплачен двумя равными платежами x_2, то

$$k^2S - kx_2 - x_2 = 0 \Leftrightarrow Sk^2 = kx_2 + x_2.$$

Если долг выплачен тремя равными платежами x_3, то

$$k^3S - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0$$

Подставим в это уравнение выражение для Sk^2, получаем:

$$k(kx_2 + x_2) - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0$$
$$k^2x_2 + kx_2 - k^2x_3 - kx_3 - x_3 = 0$$
$$k^2(x_2 - x_3) + k(x_2 - x_3) - x_3 = 0$$
$$(k^2 + k)(x_2 - x_3) - x_3 = 0$$
$$k^2 + k - \frac{x_3}{x_2 - x_3} = 0,$$

По условию $x_3 = 56595$, а $x_2 = 81095$, тогда:

$$\frac{x_3}{x_2 - x_3} = \frac{56595}{81095 - 56595} = \frac{56595}{24500} = 2,31$$

Откуда получаем для k:

$$k^2 + k - 2,31 = 0$$

Откуда получаем посторонний корень $k = -2,1$ и корень $k = 1,1$, а, следовательно, $r = 10$.

Ответ: 10.

Примечание.

Наш читатель Валерий Григорьев заметил, что сумма, взятая в кредит, не выражается конечной десятичной дробью. Хотя возможность взять такую сумму в кредит вызывает сильные сомнения, это не влияет на правильность приведенного решения и ответа.

34. Тип 16 № 519476

В июле 2018 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами, и банку будет выплачено 311 040 рублей?

Решение. Пусть x руб. — ежегодный платеж, выплачиваемый банку. Четырьмя равными платежами было выплачено 311 040 руб, поэтому $x = 311\ 040 : 4 = 77\ 760$ руб. Проследим за изменением величины долга.

Июль 2018 года: S.

Январь 2019 года: $1,2S$,

Февраль - июнь 2019 года: выплата x

Июль 2019 года: $(1,2S - x)$.

Январь 2020 года: $1,2(1,2S - x)$.

Февраль - июнь 2020 года: выплата x

Июль 2020 года: $1,2(1,2S - x) - x$.

Январь 2021 года: $1,2(1,2(1,2S - x) - x)$.

Февраль - июнь 2021 года: выплата x

Июль 2021 года: $1,2(1,2(1,2S - x) - x) - x$.

Январь 2022 года: $1,2(1,2(1,2(1,2S - x) - x) - x)$.

Февраль - июнь 2022 года: выплата x

Июль 2022 года: $1,2(1,2(1,2(1,2S - x) - x) - x) - x$.

Последняя величина равна нулю, тогда

$$S = \frac{1,2^3 + 1,2^2 + 1,2 + 1}{1,2^4}x = \frac{5,368}{2,0736} \cdot 77\,760 = 201\,300 \text{ руб.}$$

Ответ: 201 300 руб.

35. Тип 16 № 519518

Светлана Михайловна взяла кредит в банке на 4 года на сумму 4 420 000 рублей. Условия возврата кредита таковы: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 10%. Светлана Михайловна хочет выплатить весь долг двумя равными платежами — в конце второго и четвертого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

Решение. Пусть $S = 4420000$ рублей — сумма, взятая в кредит, x рублей — величина каждого из платежей, $k = 1,1$. Тогда после первого года долг в рублях составит kS, после второго — $(k^2S - x)$, после третьего — $(k(k^2S - x))$, после четвёртого — $(k^2(k^2S - x) - x)$. По условию, последнее выражение должно равняться нулю.

$$k^2(k^2S - x) - x = 0; \quad k^4S = x(k^2 + 1); x = \frac{k^4S}{k^2 + 1}.$$

Подставляя в последнее выражение значения S и k, получаем: $x = \frac{1,1^4 \cdot 4420000}{2,21} = 2\ 928\ 200.$

Ответ: 2 928 200 рублей.

36. Тип 16 № 519813

В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Решение. Пусть сумма кредита составляет $S = 1\ 342\ 000$ рублей, ежегодные выплаты в случае погашения кредита за 4 года составляют x рублей, а в случае погашения кредита за 2 года — y рублей. По условию долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ 1,2S-x;\ 1,2^2S-(1,2x+x);\ 1,2^3S-$$
$$-(1,2^2x+1,2x+x);\ 1,2^4S-$$
$$-(1,2^3x+1,2^2x+1,2x+x)=0,$$

откуда

$$x=\frac{1,2^4\cdot S}{1,2^3+1,2^2+1,2+1}=\frac{1,2^4\cdot(1,2-1)S}{(1,2^4-1)}=$$
$$=\frac{20736\cdot 0,2\cdot 1342000}{10736}=518400 \text{ рублей.}$$

В этом случае придётся отдать 2 073 600 рублей.

Если отдавать кредит двумя равными платежами, то долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ 1,2S-y;\ 1,2^2S-(1,2y+y)=0,$$

откуда $y=\dfrac{1,2^2S}{2,2}=\dfrac{1,44\cdot 1342000}{2,2}=878400$ рублей.

В этом случае придётся отдать 1 756 800 рублей, то есть на 316 800 рублей меньше, чем в предыдущем случае.

Ответ: 316 800 рублей.

37. Тип 16 № 520193

15 января планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 2,34 млн рублей?

Решение. Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{15S}{16};\ \ldots;\ \frac{2S}{16};\ \frac{S}{16};0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1,02S;\ 1,02\cdot\frac{15S}{16};\ \ldots;\ 1,02\cdot\frac{2S}{16};\ 1,02\cdot\frac{S}{16}.$$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$$0,02S+\frac{S}{16};\ \frac{15\cdot 0,02S+S}{16};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0,02S+S}{16};\ \frac{0,02S+S}{16}.$$

Всего следует выплатить:

$$S+S\cdot 0,02\left(1+\frac{15}{16}+\ldots+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}\right)=$$
$$=S\left(1+\frac{17\cdot 0,02}{2}\right)=1,17S.$$

Тогда $1,17S=2,34\ (\text{млн.руб})$, значит, сумма, взятая в кредит, равна 2 млн рублей.

Ответ: 2 млн рублей.

38. Тип 16 № 520499

В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение. Пусть сумма ежегодного платежа x рублей, а взятая в кредит сумма составляет a рублей. Получаем уравнение

$$((1,1a-x)\cdot 1,1-x)\cdot 1,1-x=0,$$

откуда

$$1,1^3a-(1,1^2+1,1+1)x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x=\frac{3\cdot 1,1^3a}{1+1,1+1,1^2}=\frac{3,993a}{3,31}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачи вали двумя р авными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y=\frac{2\cdot 1,1^2a}{1+1,1}=\frac{2,42a}{2,1}.$$

Подставляя a = 69 510, получаем

$$3x-2y=\frac{3,993\cdot 69510}{3,31}-\frac{2,42\cdot 69510}{2,1}=$$
$$=3,993\cdot 21000-2,42\cdot 33100=83853-80102=3751.$$

Ответ: 3751 руб.

39. Тип 16 № 520787

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
— к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Решение. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1000, 960, 920, ..., 240, 200, 0.$$

Значит, $n = \dfrac{1000-200}{40} = 20.$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r%. Пусть $k = 1 + \dfrac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1000k, 960k, ..., 240k, 200k.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$1000(k-1)+40,\ \ 960(k-1)+40,\ \ ..., 240(k-1)+40,\ \ 200k.$$

Всего следует выплатить

$$(k-1)\cdot\frac{20\cdot 1240}{2} + 800 + 200k = 12600k - 11600 \text{ (тыс. рублей)}.$$

Тогда $12\,600k - 11\,600 = 1378$, откуда $12\,600k = 12\,978$, и, следовательно, $k = 1{,}03$, то есть $r = 3$.

Ответ: 3.

40. Тип 16 № 520806

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

Решение. Пусть сумма кредита A тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$A,\ A-30,\ A-60,\ ...,\ A-570,\ A-600,\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03A,\ 1{,}03(A-30),\ ...,\ 1{,}03(A-570),\ 1{,}03(A-600).$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}03A+30,\ 0{,}03(A-30)+30,\ ...,\ 0{,}03(A-570)+30,\ 1{,}03(A-600).$$

Всего следует выплатить

$$20\cdot 0{,}03\cdot\frac{2A-570}{2} + 20\cdot 30 + \\ + 1{,}03(A-600) = 1{,}63A - 189 \text{ (тыс. рублей)}.$$

Откуда $1{,}63A - 189 = 1604 \Leftrightarrow 1{,}63A = 1793 \Leftrightarrow A = 1100.$

Значит, сумма, которую планируется взять в кредит равна 1100 тыс. рублей.

Ответ: 1 100 000 рублей.

41. Тип 16 № 520825

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение. По условию, за первые 20 месяцев долг должен равномерно уменьшиться на 300 − 100 = 200 (тыс. руб.), значит, долг перед банком (в тыс. руб.) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$300;\ 290;\ 280;\ ...\ 110;\ 100;\ 0.$$

Первое число каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. руб.) по состоянию на 1-е число такова:

$$306;\ 295{,}8;\ ...\ 112{,}2;\ 102.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. руб.) должны быть следующими:

$$\underset{(306-290)}{16;}\quad \underset{(295{,}8-280)}{15{,}8;}\quad ...\quad \underset{(112{,}2-100)}{12{,}2;}\quad \underset{(102-0)}{102.}$$

Значит, всего следует выплатить

$$\underbrace{(16+15{,}8+...+12{,}2)}_{\text{сумма 20-ти членов арифм. прогрессии}}+102=$$
$$=\frac{16+12{,}2}{2}\cdot 20+102=\frac{20\cdot 28{,}2}{2}+102=384 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 384 тысячи рублей.

42. Тип 16 № 520872

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 600 000 рублей на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

− 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
− со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
− 15-го числа с 1 по 25 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
− 15-го числа 26 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 25 месяца, если всего было выплачено 691 тысяч рублей?

Решение. Пусть 15-го числа 25-го месяца долг составит x тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$600;\quad \frac{24\cdot 600+x}{25};\quad \frac{23\cdot 600+2x}{25};\ ...\quad \frac{600+24x}{25};\quad x;\quad 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 1%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$606;\quad 1{,}01\cdot\frac{24\cdot 600+x}{25};\ ...\quad 1{,}01\cdot\frac{600+24x}{25};\quad 1{,}01x.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$6+\frac{600-x}{25};\quad 0,01\cdot\frac{24\cdot 600+x}{25}+$$
$$+\frac{600-x}{25};\quad \ldots\quad 0,01\cdot\frac{600+24x}{25}+\frac{600-x}{25};\quad 1,01x.$$

Всего следует выплатить

$$0,01\cdot\frac{26\cdot 600+24x}{2}+600-x+$$
$$+1,01x=0,13x+678\ \text{(тыс.рублей)},$$

откуда $0,13x+678=691\Leftrightarrow 0,13x=13\Leftrightarrow x=100.$ Значит, 15-го числа 25-го месяца долг составит 100 тыс. рублей.

Ответ: 100.

43. Тип 16 № 521008

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 700 тысяч рублей на (n+1) месяц. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа n-го месяца долг составит 300 тысяч рублей;
— к 15-му числу (n+1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 755 тысяч рублей.

Решение. Пусть S тысяч рублей — тело кредита, x тысяч рублей — сумма, на которую равномерно уменьшается долг ежемесячно, $r=0,01.$
Так как долг уменьшается равномерно, то

$$n=\frac{700-300}{x}\Leftrightarrow x\cdot n=400.$$

Тогда сумма выплат будут выглядеть следующим образом:

$$x\cdot n+S\cdot r+(S-x)\cdot r+(S-2x)\cdot r+\ldots+$$
$$+(S-x(n-1))\cdot r+(S-x\cdot n)\cdot(1+r)=755.$$

Подставив значения известных переменных и воспользовавшись формулой суммы арифметической прогрессии, получим уравнение

$$n\cdot x+7\cdot n-0,005\cdot n\cdot x(n-1)+707-1,01\cdot n\cdot x=755.$$

Так как $x\cdot n=400,$ то наше уравнение примет следующий вид:

$$400+7\cdot n-0,005\cdot 400(n-1)+707-1,01\cdot 400=755\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 400+5n+305=755\Leftrightarrow 5n=50\Leftrightarrow n=10.$$

Ответ: $n=10.$

44. Тип 16 № 525027

Андрей планирует 15-го декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 1 655 000 рублей. Сотрудник банка предложил Андрею два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

План 1	— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; — кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами.
План 2	— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца; — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; — 15-го числа каждого месяца с 1-го по 36-й долг должен быть меньше долга на 15-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; — 15-го числа 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрея банку по более выгодному плану погашения кредита?

Решение. Пусть X рублей — ежегодный платёж Андрея по плану 1. Тогда

$$\left(\left(1655000\cdot 1,1-X\right)\cdot 1,1-X\right)\cdot 1,1-X=0.$$

Отсюда получаем

$$X=\frac{1655000\cdot 1,1^3}{1,1^2+1,1+1}=\frac{1655000\cdot 1,331}{3,31}=665500.$$

Значит, по плану 1 Андрей заплатит банку всего $665500\cdot 3=1996500$ рублей.

Платежи Андрея по плану 2 составят:

$$Y_1=\frac{1655000}{36}+0,01\cdot 1655000,$$

$$Y_2=\frac{1655000}{36}+0,01\cdot\frac{35}{36}\cdot 1655000,$$

$$\ldots$$

$$Y_{36}=\frac{1655000}{36}+0,01\cdot\frac{1}{36}\cdot 1655000.$$

Тогда всего Андрей заплатит банку по плану 2:

$$Y_1+Y_2+\ldots+Y_{36}=$$
$$=1655000+16550\left(1+\frac{35}{36}+\ldots+\frac{1}{36}\right)=1961175 \text{ рублей.}$$

Значит, по плану 2 общая сумма выплат Андрея банку меньше на $1996500-1961175=35325$ рублей.

Ответ: 35 325.

Примечание.

Редакция Решу ЕГЭ отредактировала условие задачи. В авторской формулировке было: «15-го числа каждого месяца долг с 1-го по 35-й долг должен быть меньше долга на 15-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму». При таком условии возможны любые варианты равномерно уменьшающих долг сумм в первые 35 месяцев и последняя сумма в 36-й месяц, полностью гасящая задолженность.

45. Тип 16 № 525142

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее S, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн руб.

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу:

Год	Долг в январе после начисления процентов	Выплата	Долг в июле до начисления процентов
2026			S
2027	$1{,}2S$	$0{,}4S$	$0{,}8S$
2028	$0{,}96S$	$0{,}56S$	$0{,}4S$
2029	$0{,}48S$	$0{,}48S$	0

Для того, чтобы каждая из выплат была меньше 5 млн рублей, достаточно, чтобы наибольшая из выплат была меньше 5 млн руб.:

$$0,56S < 5 \Leftrightarrow 56S < 500 \Leftrightarrow S < \frac{125}{14} = 8\frac{13}{14}.$$

Наибольшее целое S, удовлетворяющее неравенству, равно 8.

Ответ: 8.

46. Тип 16 № 525411

15 января Антон взял в кредит 3 миллиона рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го февраля, апреля и июня долг должен быть на одну девятую часть от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца;
— 15-го марта, мая и июля долг должен быть на две девятых части от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 220 тысяч рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть исходная сумма, взятая в кредит, была равна S млн. руб. и пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Тогда ежемесячные выплаты были равны:

$$Sk - \frac{8}{9}S;\ \frac{8}{9}Sk - \frac{6}{9}S;\ \frac{6}{9}Sk- \\ -\frac{5}{9}S;\ \frac{5}{9}sk - \frac{3}{9}S;\ \frac{3}{9}sk - \frac{2}{9}S;\ \frac{2}{9}Sk.$$

Следовательно, общая сумма выплат составит: $Sk\left(1 + \frac{8}{9} + \frac{6}{9} + \frac{5}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9}\right) - S\left(\frac{8}{9} + \frac{6}{9} + \frac{5}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9}\right)$ или $\left(\frac{11}{3}Sk - \frac{8}{3}S\right)$.

По условию данное выражение на 220 тысяч рублей превышает S, следовательно, можно составить уравнение: $\left(\frac{11}{3}Sk-\frac{8}{3}S\right)-S=0,22.$

Подставляя в это уравнение $S=3$, получаем: $11k-11=0,22;\ k=1,02;\ r=2.$

Ответ: 2.

47. Тип 16 № 525414

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	0,8S	0,5S	0,1S	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу:

Год	Долг в январе после начисления процентов	Выплата	Долг в июле до начисления процентов
2016			S
2017	1,15S	0,35S	0,8S
2018	0,92S	0,42S	0,5S
2019	0,575S	0,475S	0,1S
2020	0,115S	0,115S	0

Найдем общую сумму выплат:

$$0,35S+0,42S+0,475S+0,115S=1,36S<50\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S<\frac{50}{1,36}=\frac{5000}{136}=\frac{625}{17}=36\frac{13}{17}.$$

Тем самым, максимальное возможное S = 36.

Ответ: 36.

48. Тип 16 № 526017

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн рублей)	S	0,8S	0,6S	0,4S	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу:

Год	Долг в январе после начисления процентов	Выплата	Долг в июле до начисления процентов
2020			S
2021	$1{,}25S$	$0{,}45S$	$0{,}8S$
2022	S	$0{,}4S$	$0{,}6S$
2023	$0{,}75S$	$0{,}35S$	$0{,}4S$
2024	$0{,}5S$	$0{,}5S$	0

Сумма всех выплат должна быть менее 50 млн рублей:

$$1,7S < 50 \Leftrightarrow S < \frac{500}{17} \Leftrightarrow S < 29\frac{7}{17}.$$

Наибольшее целое S, удовлетворяющее неравенству, равно 29.

Ответ: 29.

49. Тип 16 № 526219

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на x% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите x, если известно, что наибольший платёж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.

Решение. Наибольший платеж за пользование кредитом будет выплачен в первый год, а наименьший — в последний. Долг перед банком по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, ежегодно уменьшаясь на одну пятнадцатую. Поэтому первый платеж составит одну пятнадцатую от 6 миллионов (возврат первой части тела долга) и процент за их использование: $\frac{1}{15} \cdot 6 + \frac{x}{100} \cdot 6.$ Последний платеж также составит одну пятнадцатую от 6 миллионов (возврат последней части тела долга) и процент за использование этой суммы в течение последнего года: $\frac{1}{15} \cdot 6 + \frac{x}{100} \cdot \frac{6}{15}.$ Поскольку первая из найденных величин не больше 1,9 млн руб, а вторая не меньше 0,5 млн руб, получаем два линейных неравенства, откуда, соответственно, находим: $x \leqslant 25$ и $x \geqslant 25.$ Тогда $x = 25.$

Ответ: 25.

50. Тип 16 № 526594

15 января Алексей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,5 млн рублей. Условия его возврата следующие:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
— выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;
— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,5	1,2	1	0,7	0,5	0,3	0

Найдите наименьшее значение r, при котором Алексею в общей сумме придётся выплатить больше 2,2 млн рублей.

Решение. Пусть S_n — сумма, которую Алексей выплачивает в n-м месяце кредитования. Также для удобства произведём замену: $k=1+\frac{r}{100}$. Тогда $S_1=1{,}5\cdot k-1{,}2$ (изначальный долг в 1,5 млн рублей увеличится в k раз, а во втором месяце на счету должно остаться 1,2 млн рублей).

Аналогично: $S_2=1{,}2\cdot k-1;$ $S_3=1\cdot k-0{,}7;$ $S_4=0{,}7\cdot k-0{,}5;$ $S_5=0{,}5\cdot k-0{,}3;$ $S_6=0{,}3\cdot k.$

Общая сумма выплат S составляет

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=5{,}2k-3{,}7.$$

Вспомним, что $k=1+\frac{r}{100}$, и решим неравенство:

$$5{,}2+\frac{5{,}2r}{100}-3{,}7>2{,}2 \Leftrightarrow \frac{5{,}2r}{100}>0{,}7 \Leftrightarrow r>\frac{175}{13}.$$

Наименьшее целое решение: $r = 14$.

Ответ: 14.

51. Тип 16 № 526678

В июле 2022 года планируется взять кредит на сумму 419 375 рублей. Условия возврата таковы:
— в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;
— с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение. Пусть $S=419\ 375$ — сумма кредита, x руб. — ежегодный платеж, $k=1+\frac{20}{100}=1{,}2.$ Тогда схема выплаты кредита выглядит так:

$$\begin{gathered}(((S\cdot k-x)\cdot k-x)\cdot k-x)\cdot k-x=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Sk^4-k^3x-k^2x-kx-x=0.\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}x=\frac{Sk^4}{k^3+k^2+k+1} \Leftrightarrow x=\frac{419\ 375\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^4}{\frac{216}{125}+\frac{36}{25}+\frac{6}{5}+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=\frac{419375\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^4}{\frac{671}{125}} \Leftrightarrow x=5^3\cdot 6^4=162\ 000.\end{gathered}$$

Таким образом, общая сумма выплат банку равна $4\cdot 162\ 000=648\ 000$ руб.

Ответ: 648 000.

52. Тип 16 № 526728

В июле клиент планирует взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планирует клиент взять кредит, если наибольший годовой платёж составит $1{,}8$ млн рублей?

Решение. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$6,\ \frac{6(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{6\cdot 2}{n},\ \frac{6}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$7,2,\ \frac{7,2(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{7,2\cdot 2}{n},\ \frac{7,2}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1,2+\frac{6}{n},\ \frac{1,2(n-1)+6}{n},\ \ldots,\ \frac{1,2\cdot 2+6}{n},\ \frac{1,2+6}{n}.$$

Получаем $1,2+\frac{6}{n}=1,8,$ откуда $n=10.$

Ответ: 10.

53. Тип 16 № 526891

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 8 млн рублей.

Решение. Обозначим размер кредита за S млн рублей. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает по $0,2S.$ Всего $0,4S$ за два года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 3-го года долг возрастет до $1,2S.$ Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 3-го и 4-го годов. После выплаты в конце 3-го года долг равен $1,2S-x,$ в в середине 4-го года он равен $1,2(1,2S-x).$ В конце 4-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1,2(1,2S-x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1,2(1,2S-x)=x \Leftrightarrow 2,2x=1,44S \Leftrightarrow x=\frac{36S}{55},$$

и общий размер выплат равен

$$0,4S+2\cdot\frac{36S}{55}=\frac{94S}{55}.$$

По условию,

$$\frac{94S}{55}>8 \Leftrightarrow 94S>440 \Leftrightarrow S>4\frac{32}{47}.$$

Наименьшее целое $S = 5$.

Ответ: 5 млн руб.

54. Тип 16 № 527616

Александр Сергеевич взял ипотечный кредит суммой 2 млн рублей на 20 лет. Условия выплаты кредита таковы:
— в начале каждого года долг увеличивается на 10%;
— после начисления процентов выплачивается некоторая часть долга;
— после выплаты долг должен быть на одну и ту же величину меньше, чем в аналогичном периоде прошлого года.

После 8-й выплаты Александру Сергеевичу удалось произвести реструктуризацию кредита, в результате чего процент, начисляемый в последующие годы, уменьшился до 8%. Какую сумму сэкономил Александр Сергеевич?

Решение. Ежегодно долг должен уменьшаться равномерно на сумму $\frac{2\,000\,000}{20}=100\,000$ руб. Значит, после восьмой выплаты долг будет равен $2000-8\cdot 100=1200$ тыс. руб. После реструктуризации кредита экономия (в тыс. руб.) составит:

$$0,1\cdot(1200+1100+1000+\ldots+100)-$$
$$-0,08\cdot(1200+1100+1000+\ldots+100)=$$
$$=0,02\cdot\frac{1200+100}{2}\cdot 12=13\cdot 12=156 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 156 000 рублей.

Приведём другое решение.

Каждый год долг уменьшается на 100 000 рублей. Для этого Александр Сергеевич уплачивает набежавшие за последний год проценты и еще 100000 рублей. Выплаты уменьшатся, поскольку вместо выплат 10% от 1 200 000, 1 100 000, ..., 100 000 он будет выплачивать лишь 8% от этих же сумм. Значит, он выиграет 2% от суммы этих чисел. Итого он сэкономит

$$0,02\cdot\frac{1\,200\,000+100\,000}{2}\cdot 12=156\,000 \text{ руб.}$$

Ответ: 156 тысяч рублей.

55. Тип 16 № 530240

Андрей Петрович взял кредит на несколько лет и выплатил его равными ежегодными платежами по 200 000 руб. При этом в начале каждого года сумма кредита увеличивалась на 10%, а в конце года производился платёж. Если бы Андрей Петрович не делал платежей, то за это время вследствие начисления процентов сумма кредита составила бы 928 200 руб. На сколько лет был взят кредит?

Решение. Пусть кредит взят на n лет, сумма кредита равна S руб., ежегодные платежи составляют x руб., повышающий коэффициент $k=1+\frac{10}{100}=1,1.$ Составим таблицу по данным задачи.

Номер года	Долг в начале года (с учетом процентов), руб.	Платёж, руб.	Долг в конце года (после платежа), руб.
			S
1	kS	x	$kS-x$
2	k^2S-kx	x	$k^2S-kx-x$
...	...	...	...
n	$k^nS-k^{n-1}x-k^{n-2}x-\ldots-kx$	x	$k^nS-k^{n-1}x-k^{n-2}x-\ldots-kx-x$

Преобразуем выражение для долга в конце n-го года:

$$k^nS-k^{n-1}x-k^{n-2}x-\ldots-kx-x=$$
$$=k^nS-x(k^{n-1}+k^{n-2}+\ldots+k+1)=k^nS-x\cdot\frac{k^n-1}{k-1}.$$

Если бы заёмщик не делал платежей, то сумма кредита составила бы 928 200 руб.:

$$k^nS-0\cdot\frac{k^n-1}{k-1}=928\ 200,$$

откуда $k^nS=928\ 200.$

Кредит был выплачен равными ежегодными платежами по 200 000 руб., поэтому

$$k^nS-200\ 000\cdot\frac{k^n-1}{k-1}=0.$$

Подставляя $k^nS=928\ 200,$ находим:

$$928\ 200-200\ 000\cdot\frac{k^n-1}{k-1}=0\Leftrightarrow\frac{k^n-1}{k-1}=4,641\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1,1^n-1}{1,1-1}=4,641\Leftrightarrow 1,1^n-1=0,4641\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,1^n=1,4641\Leftrightarrow n=4.$$

Ответ: кредит был взят на 4 года.

Примечание редакции Решу ЕГЭ.

Читатель Иван Новиков заметил, что это задание из варианта Александра Ларина некорректно. Нет такой суммы, которую Андрей Петрович мог бы взять в кредит так, чтобы за n лет долг оказался равен 928 200 руб. Это число не делится на 11 и не могло быть получено умножением натурального числа на $1{,}1^n$. Данная в условии сумма кредита не выражается ни целым числом рублей, ни даже конечной десятичной дробью.

56. Тип 16 № 530386 *i*

1 февраля 2018 года планируется взять кредит на сумму 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
— 1 марта каждого года сумма долга увеличивается на 2% по сравнению с началом года;
— с 1 мая по 1 августа необходимо выплатить часть долга;
— 1 февраля каждого года долг должен равняться сумме в соответствии с таблицей.

Год	2018	2019	2020	...	2018+n	2019+n	2020+n	...	2018+2n	2019+2n
Долг (тыс. руб)	1000	985	970	...	$1000-15n$	$1000-15n-x$	$1000-15n-2x$	...	600	0

Первые n лет долг уменьшался равномерно на 15 тысяч рублей, а следующие n лет долг уменьшался равномерно на x тысяч рублей. В каком году планируется совершить последний платеж, если общая сумма выплат равна 1 346 000 рублей?

Решение. Пусть $S=1000000$ руб. Выплата за первый год составит $(0,02\cdot S+15)$ тыс. рублей. За второй год: $(0,02\cdot(S-15)+15)$ тыс. рублей. За n-й год: $(0,02\cdot(S-15(n-1))+15)$ тыс. рублей. В итоге за первые n лет выплаты составят:

$$n\cdot 15+0,02\cdot(S+S-15+\ldots+S-15(n-1))=$$
$$=n\cdot 15+0,02\cdot\frac{2S-15n+15}{2}\cdot n=$$
$$=n\cdot(15+20-0,15n+0,15)=n\cdot(35,15-0,15n)\text{ тыс. рублей.}$$

За следующие n лет выплаты составят:

$$n\cdot x+0,02(1000-15n+\ldots+1000-15n-(n-1)x)=$$
$$=n\cdot x+0,02\cdot\frac{1000-15n+1000-15n-nx+x}{2}\cdot n=$$
$$=n(x+20-0,3n-0,01nx+0,01x)=$$
$$=n(x(1,01-0,01n)+20-0,3n).$$

Кроме того, из условия следует, что

$$1000-15n-(nx)=600\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n(x+15)=400\Leftrightarrow x=\frac{400}{n}-15.$$

Последняя выплата, которая будет произведена с 1 мая по 1 августа (2018+2n)-го года составит $600+0,02\cdot600=612$ тыс. рублей. В итоге, получаем:

$$n(35,15-0,15n)+$$
$$+n\left(\left(\frac{400}{n}-15\right)(1,01-0,01n)+20-0,3n\right)+$$
$$+612=1346.$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$36n-0,3n^2+404=734\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^2-120n+1100=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=10,\\ n=110.\end{array}\right.$$

По смыслу задачи $1000-15n>0$, значит, $n=10$.

Ответ: в 2038 году.

Примечание Решу ЕГЭ.

Мы исправили в авторской формулировке задачи несколько неточностей, которые делали условие задачи противоречивым. Ниже приводим оригинальную формулировку задачи.

1 февраля 2018 года планируется взять кредит на сумму 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1 марта каждого года сумма долга увеличивается на 2% по сравнению с началом года;

— с 1 мая по 1 августа необходимо выплатить часть долга;

— 1 **марта** каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии с таблицей.

Год	**2018**	**2019**	**2020**	**...**	**2018+n**	**2019+n**	**2020+n**	**...**	**2018+2n**	**2019+2n**
Долг (тыс. руб)	1000	985	970	...	$1000-15n$	$1000-15n-x$	$1000-15n-2x$	...	600	0

Начиная с 2018 года долг уменьшался равномерно на 15 тысяч рублей, а **начиная с (2018+n)-го по (2018+2n)-й год, долг уменьшался** равномерно на x тысяч рублей. В каком году планируется совершить последний платеж, если общая сумма выплат равна 1 346 000 рублей?

57. Тип 16 № 530912

Наш добрый герой В. взял в банке кредит в размере 20 192 020 рублей по очень знакомой схеме:
— в конце очередного месяца пользования кредитом банк начисляет проценты за пользование заемными средствами по специальной ставке данного варианта 2,96%;
— в этот же день клиент выплачивает часть долга и сумму начисленных процентов;
— после выплаты долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего месяца.

Но дальше все пошло не по сценарию. Наш герой решил каждый месяц, начиная с первого, платить банку сверх прочего дополнительную сумму на погашение долга, при этом долг по-прежнему ежемесячно уменьшался на одну и ту же величину (бо́льшую, чем планировалось изначально) до полного погашения. В итоге срок кредита сократился на 52%. На какое наименьшее число процентов могла уменьшиться при этом переплата банку?

Решение. Введём обозначения: S — сумма кредита в рублях, $a=\dfrac{2,96}{100}$ — процентный коэффициент, n — первоначальный (планировавшийся) срок кредита в месяцах, k — реальный срок кредита в месяцах. Тогда по первоначальному плану на начало очередного месяца долг должен был уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ \frac{(n-1)S}{n};\ \frac{(n-2)S}{n};\ \ldots\ \frac{S}{n};\ 0,$$

а переплата банку, которая представляет собой сумму начисленных процентов за пользование кредитом, составила бы

$$aS+\frac{a(n-1)S}{n}+\frac{a(n-2)S}{n}+\ldots+\frac{aS}{n}=$$
$$=aS\left(1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{aS(n+1)}{2}.$$

При изменившемся сроке кредита переплата банку составила $\dfrac{aS(k+1)}{2}$, составим пропорцию, характеризующую запланированную и фактическую переплаты:

$$\text{План: }\frac{aS(n+1)}{2}\text{ — }100\%$$
$$\text{Факт: }\frac{aS(k+1)}{2}\text{ — }x\%$$

Отсюда $x=\dfrac{k+1}{n+1}\cdot 100$, а уменьшение переплаты составляет $\left(1-\dfrac{k+1}{n+1}\right)\cdot 100\%$. Требуется найти наименьшее значение этого выражения. Заметим, что по условию срок кредита сократился на 52%, значит, он составил 48% от первоначального. Тогда

$$k=0,48n \Leftrightarrow \frac{k}{n}=\frac{12}{25}\quad (*)$$

Рассмотрим функцию $f(n)=\left(1-\dfrac{0,48n+1}{n+1}\right)\cdot 100=52-\dfrac{52}{n+1}$. При $n>0$ она возрастает, значит, наименьшее значение принимает при наименьшем возможном значении n. По смыслу задачи k и n натуральные числа. С учётом равенства $(*)$ наименьшее возможное $n=25$. Тогда

$$f(25)=52-\frac{52}{25+1}=50.$$

Тем самым наименьшее число процентов, на которое могла уменьшиться переплата банку, равно 50.

Ответ: 50.

58. Тип 16 № 532056

15-го декабря 2018 года Саша и Паша взяли в банке одинаковые суммы в кредит на 12 месяцев. Банк предложил им похожие схемы погашения долга.

Условия возврата кредита у Саши оказались следующие:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплачивать одним платежом часть долга;

— на 15-е числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга, чем на 15-е число предыдущего месяца.

У Паши условия возврата кредита были таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплачивать одним платежом часть долга;

— на 15-е число каждого месяца с января по ноябрь включительно долг должен уменьшаться на 50 тыс. руб.;

— в декабре 2019 года весь оставшийся на тот момент долг должен быть полностью погашен.

Когда в декабре 2019 года Саша и Паша рассчитались со своими кредитами, выяснилось, что один из них выплатил за год банку на 429 тыс. руб. больше, нежели другой. Определите, какая сумма была взята каждым в кредит.

Решение. Пусть суммы кредитов равны S тыс. руб., повышающий коэффициент $k=1+\frac{10}{100}=1,1.$ Составим таблицу по данным задачи для Саши.

Номер месяца	Название месяца	Долг на 1 число (после начисления процентов), тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15 число (до начисления процентов), тыс. руб.
	декабрь			S
1	январь	kS	$kS-\frac{11}{12}S$	$\frac{11}{12}S$
2	февраль	$\frac{11}{12}kS$	$\frac{11}{12}kS-\frac{10}{12}S$	$\frac{10}{12}S$
…	…	…	…	…
11	ноябрь	$\frac{2}{12}kS$	$\frac{2}{12}kS-\frac{1}{12}S$	$\frac{1}{12}S$
12	декабрь	$\frac{1}{12}kS$	$\frac{1}{12}kS-0$	0

Сумма выплат для Саши равна:

$$\text{В}_\text{С}=$$
$$=\ kS-\frac{11}{12}S\ +\ \frac{11}{12}kS-\frac{10}{12}S\ +\ \dots\ +\ \frac{2}{12}kS-\frac{1}{12}S\ +\ \frac{1}{12}kS-0=$$
$$=\left(kS+\frac{11}{12}kS+\dots+\frac{2}{12}kS+\frac{1}{12}kS\right)-\left(\frac{11}{12}S+\frac{10}{12}S+\dots+\frac{1}{12}S+0\right)=$$
$$=\frac{13kS}{12\cdot 2}\cdot 12-\frac{11S}{12\cdot 2}\cdot 12=6,5kS-5,5S.$$

Подставив значение $k=1,1,$ получаем

$$\text{В}_\text{С} = 6,5 \cdot 1,1S - 5,5 \cdot S = 1,65S.$$

Составим аналогичную таблицу по данным задачи для Паши.

Номер месяца	Название месяца	Долг на 1 число (после начисления процентов), тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15 число (до начисления процентов), тыс. руб.
	декабрь			S
1	январь	kS	$kS - S + 50$	$S - 50$
2	февраль	$k(S-50)$	$k(S-50) - S + 100$	$S - 100$
…	…	…	…	…
11	ноябрь	$k(S-500)$	$k(S-500) - S + 550$	$S - 550$
12	декабрь	$k(S-550)$	$k(S-550) - 0$	0

Сумма выплат для Паши равна:

$$\begin{gathered}\text{В}_\text{П} = \\ = \; kS - S + 50 \; + \; k(S-50) - S + 100 \; + \; \ldots \; + \; k(S-500) - S + 550 \; + \; k(S-550) - 0 = \\ = (kS + k(S-50) + \ldots + k(S-500) + k(S-550)) - 11S + (50 + 100 + \ldots + 550) = \\ = \frac{kS + k(S-550)}{2} \cdot 12 - 11S + \frac{50+550}{2} \cdot 11 = \\ = 12kS - 3300k - 11S + 3300.\end{gathered}$$

Подставив значение $k = 1,1,$ получаем:

$$\text{В}_\text{П} = 12 \cdot 1,1 \cdot S - 3300 \cdot 1,1 - 11 \cdot S + 3300 = 2,2S - 330.$$

По условию один заплатил на 429 тыс. руб. больше другого. Значит,

$$|2,2S - 330 - 1,65S| = 429 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0,55S - 330 = 429, \\ 0,55S - 330 = -429 \end{array}\right. \underset{S>0}{\Leftrightarrow} \; S = 1380 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 1,38 млн руб.

Приведем замечание Ирины Шраго.

Взятые в кредит суммы равны, поэтому можно сравнивать не полные выплаты, а только переплаты по кредиту. Для Саши переплата составила

$$0,1\left(S + \frac{11}{12}S + \frac{10}{12}S + \ldots + \frac{1}{12}S\right) = 0,65S.$$

Переплата по кредиту для Паши составила

$$0,1(S + (S-50) + (S-100) + \ldots + (S-550)) = 1,2S - 330.$$

Осталось решить уравнение $|1,2S - 330 - 0,65S| = 429.$

59. Тип 16 № 539883

В июле планируется взять кредит на срок 6 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 12,5% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле первых трех лет погашения кредита долг должен быть в два раза меньше долга на июль предыдущего года;
— в июль последних трех лет долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

Чему был равен изначальный кредит, если общая сумма выплат равна 1,6 млн. рублей?

Решение. Пусть сумма кредита равна $8S$ млн руб. Повышающий коэффициент равен $1+\frac{12,5}{100}=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$. Составим таблицу по данным задачи.

Номер года	Долг в январе (с учетом процентов), млн руб.	Платёж, млн руб.	Долг в июле (после платежа), млн руб.
			$8S$
1	$\frac{9}{8}\cdot 8S$	$5S$	$4S$
2	$\frac{9}{8}\cdot 4S$	$\frac{5S}{2}$	$2S$
3	$\frac{9}{8}\cdot 2S$	$\frac{5S}{4}$	S
4	$\frac{9}{8}\cdot S$	$\frac{11S}{24}$	$\frac{2S}{3}$
5	$\frac{9}{8}\cdot \frac{2S}{3}$	$\frac{10S}{24}$	$\frac{S}{3}$
6	$\frac{9}{8}\cdot \frac{S}{3}$	$\frac{9S}{24}$	0

Суммируем все выплаты:

$$B=5S+\frac{5S}{2}+\frac{5S}{4}+\frac{11S}{24}+\frac{10S}{24}+\frac{9S}{24}=10S.$$

Из условия, что общая сумма выплат равна 1,6 млн руб., найдём S:

$$10S=1,6\Leftrightarrow S=0,16 \text{ млн руб.}$$

Тогда изначальная сумма кредита равна

$$8S=8\cdot 0,16=1,28 \text{ млн руб.}$$

Ответ: 1,28 млн руб.

60. Тип 16 № 541382

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

Решение. Пусть кредит взят на n лет, сумма кредита равна $S = 5$ млн руб. Составим таблицу по данным задачи.

Номер года	Долг в январе (с учетом процентов), руб.	Платёж, руб.	Долг в июле (после платежа), руб.
			S
1	$1,2S$	$0,2S+\frac{S}{n}$	$S-\frac{S}{n}$
2	$1,2\left(S-\frac{S}{n}\right)$	$0,2\left(S-\frac{S}{n}\right)+\frac{S}{n}$	$S-\frac{S}{n}-\frac{S}{n}$
...	...	...	...
$n-1$	...	...	$\frac{S}{n}$
n	$1,2\cdot\frac{S}{n}$	$0,2\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}$	0

Суммируем все выплаты:

$$B_n =$$

$$= \underbrace{\left(0,2S+\frac{S}{n}\right)}_{\text{первая выплата}} + \underbrace{\left(0,2\cdot\frac{(n-1)S}{n}+\frac{S}{n}\right)}_{\text{вторая выплата}} + \ldots + \underbrace{\left(0,2\cdot\frac{S}{n}+\frac{S}{n}\right)}_{n\text{−я выплата}} =$$

$$= n\cdot\frac{S}{n} + \underbrace{0,2\cdot\frac{S+\frac{S}{n}}{2}\cdot n}_{\text{сумма арифм. прогрессии}} = S + 0,1S\cdot(n+1).$$

По условию сумма выплат составит 7,5 млн рублей:

$$5 + 0,1\cdot 5\cdot(n+1) = 7,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,5\cdot(n+1) = 2,5 \Leftrightarrow n+1=5 \Leftrightarrow n=4$$

Значит, кредит планируется взять на 4 года.
Ответ: 4 года.

61. Тип 16 № 548818

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S тысяч рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет не больше 840 тысяч рублей.

Решение. Когда банк начисляет проценты на суммы S; $0{,}8S$; $0{,}4S$, то размер долга становится равным соответственно: $1,2S; 1,2 \cdot 0,8S = 0,96S$ и $1,2 \cdot 0,4S = 0,48S.$ Значит, размеры выплат составят $1,2S - 0,8S = 0,4S;$ $0,96S - 0,4S = 0,56S;$ и $0,48S - 0 = 0,48S.$ Наибольшей из них является вторая выплата. Эта выплата должна быть не больше 840 тыс. руб., поскольку лишь в таком случае остальные выплаты тоже будут не больше 840 тыс. руб. Получаем: $0,56S \leqslant 840,$ откуда

$$S \leqslant \frac{840}{0,56} = 1500.$$

Значит, максимальный размер кредита составит 1500 тыс. руб.

Ответ: 1500.

62. Тип 16 № 549675

Петр Иванович получил кредит в банке под определенный процент годовых. Ровно через год (после начисления процентов) Петр Иванович в счет погашения кредита вернул $\frac{2}{13}$ той суммы, которую задолжал к тому моменту. А еще через год он внес сумму, на 43% превышающую величину займа, и тем самым полностью погасил кредит. Каков был процент годовых?

Решение. Пусть S — сумма кредита, взятая под r% годовых, а $k = 1 + \frac{r}{100}$. Запишем в таблицу, как менялся долг Петра Ивановича.

Первоначальная сумма долга	S
Сумма долга после первого начисления процентов	kS
Сумма долга после первой выплаты	$kS - \frac{2}{13}kS = \frac{11}{13}kS$
Сумма долга после второго начисления процентов	$\frac{11}{13}k^2S$
Сумма долга после второй выплаты	$\frac{11}{13}k^2S - 1,43S = 0$

Решим полученное уравнение

$$\frac{11}{13}k^2S - 1,43S = 0 \Leftrightarrow \frac{11}{13}k^2 = 1,43 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1,43 \cdot 13}{11} \Leftrightarrow k^2 = 1,69 \underset{k>0}{\Leftrightarrow} k = 1,3.$$

Откуда

$$1+\frac{r}{100}=1,3 \Leftrightarrow r=30.$$

Ответ: кредит был взят под 30% годовых.

63. Тип 16 № 549977

Банк предоставляет кредит сроком на 10 лет под 19% годовых на следующих условиях: ежегодно заёмщик возвращает банку 19% от непогашенной части кредита и $\frac{1}{10}$ суммы кредита. Так, в первый год, заёмщик выплачивает $\frac{1}{10}$ суммы кредита и 19% от всей суммы кредита, во второй год заёмщик выплачивает $\frac{1}{10}$ суммы кредита и 19% от $\frac{9}{10}$ суммы кредита и т. д. Во сколько раз сумма, которую выплатит банку заёмщик, будет больше суммы кредита, если заёмщик не воспользуется досрочным погашением кредита?

Решение. Пусть сумма кредита будет равна $10S$. В соответствии с условием задачи заполним таблицу.

Номер года	Непогашенная часть кредита	Выплата	
		проценты	основная часть долга
1	$10S$	$10S\cdot 0,19$	S
2	$9S$	$9S\cdot 0,19$	S
3	$8S$	$8S\cdot 0,19$	S
...	...	...	...
10	S	$S\cdot 0,19$	S
	Сумма:	$\frac{10S+S}{2}\cdot 10\cdot 0,19$	$10S$

Таким образом, сумма выплат B равна

$$B=\frac{10S+S}{2}\cdot 10\cdot 0,19+10S=$$
$$=(55\cdot 0,19+10)S=20,45S,$$

а искомая величина $\frac{B}{10S}$ равна

$$\frac{B}{10S}=\frac{20,45S}{10S}=2,045.$$

Значит, если заёмщик не воспользуется досрочным погашением кредита, то сумма, которую выплатит банку заёмщик, будет больше суммы кредита в 2,045 раза.

Ответ: 2,045.

Приведем другое решение.

Пусть заемщик получил кредит в размере S ед. под 19% годовых. Тогда выплаты будут состоять из фиксированной суммы $\frac{1}{10}S$ и 19% от непогашенной части кредита. Поэтому заемщик выплатит банку

$$S+\frac{19}{100}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{8}{10}+\ldots+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)S=$$
$$=S+\frac{19}{100}\cdot\frac{11}{2}S=2{,}045S \text{ ед.}$$

Значит, сумма, которую выплатит банку заемщик, будет больше суммы кредита в 2,045 раза.

64. Тип 16 № 551191

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок. Условия возврата таковы:
— в январь n-го года после взятия кредита долг возрастает на $5(n-1)\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный и максимальный срок следует взять кредит, чтобы наибольший годовой платеж по кредиту не превысил 3 млн рублей?

Решение. Пусть кредит взят на k лет. Внесем в таблицу данные согласно условию.

Номер года	Долг в январе, после начисления процентов, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг в июле, млн руб.
$n-1$	...	...	$\frac{10(k-n+1)}{k}$
n	$\left(1+\frac{5(n-1)}{100}\right)\cdot\frac{10(k-n+1)}{k}$	$f(n)$	$\frac{10(k-n)}{k}$

Выплата в n-й год равна

$$f(n)=\left(1+\frac{5(n-1)}{100}\right)\cdot\frac{10(k-n+1)}{k}-\frac{10(k-n)}{k}=$$
$$=\frac{10}{k}+\frac{5(n-1)}{100}\left(10-\frac{10(n-1)}{k}\right)=$$
$$=-\frac{1}{2k}\cdot(n-1)^2+\frac{1}{2}\cdot(n-1)+\frac{10}{k}.$$

Рассматривая последнее выражение как квадратичную функцию $f(n)$ с отрицательным старшим коэффициентом, заключаем, что она достигает наибольшего значения в точке

$$n-1=-\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2k}\right)}=\frac{k}{2},$$

и оно равно

$$\max_{\mathbb{R}} f(n)=-\frac{1}{2k}\cdot\left(\frac{k}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2}+\frac{10}{k}=\frac{k}{8}+\frac{10}{k}.$$

Наибольший годовой платеж по кредиту не должен превышать 3 млн рублей, тогда

$$\frac{k}{8}+\frac{10}{k}\leqslant 3\underset{k>0}{\Leftrightarrow}k^2-24k+80\leqslant 0\Leftrightarrow 4\leqslant k\leqslant 20.$$

Значит, минимальный срок кредита — 4 года, а максимальный — 20 лет.

Ответ: 4 года и 20 лет.

65. Тип 16 № 552117

В июле 2019 года планируется взять кредит в банке в размере S тысяч рублей (S — натуральное число) сроком на 3 года. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 17,5% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии с таблицей:

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Решение. Первая выплата будет составлять $1,175S-0,9S=0,275S=\dfrac{275}{1000}S=\dfrac{11}{40}S$ тыс. руб.

Вторая выплата: $1,175\cdot 0,9S-0,4S=0,6575S=\dfrac{6575}{10\,000}S=\dfrac{263}{400}S$ тыс. руб.

Третья выплата: $1,175\cdot 0,4S-0=0,47S=\dfrac{47}{100}S$ тыс. руб.

Наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей, является наименьшим общим кратным чисел 40, 400 и 100, то есть числом 400.

Ответ: 400.

66. Тип 16 № 552514

В начале месяца Артем взял в банке кредит 2,4 млн рублей с месячной процентной ставкой 5% на 12 месяцев с погашением кредита по следующей схеме:
— в начале каждого месяца банк увеличивает долг на 5%;
— выплаты производятся в конце каждого месяца;
— каждая следующая выплата на 5% больше предыдущей.

Сколько рублей должна составлять первая выплата, чтобы Артем погасил свой кредит по указанной схеме за 12 месяцев?

Решение. Пусть первая выплата равна x млн руб. Заполним таблицу, начав со столбца «Выплаты», а затем заполняя строки от нижних к верхним.

Номер месяца	Долг после начисления процентов, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг после выплаты (до начисления процентов), млн руб.
1	$12\cdot x$	x	$11\cdot x$
2	$11\cdot 1,05\cdot x$	$1,05\cdot x$	$10\cdot 1,05\cdot x$
3	$10\cdot 1,05^2\cdot x$	$1,05^2\cdot x$	$9\cdot 1,05^2\cdot x$
...	...	...	...
10	$3\cdot 1,05^9\cdot x$	$1,05^9\cdot x$	$2\cdot 1,05^9\cdot x$
11	$2\cdot 1,05^{10}\cdot x$	$1,05^{10}\cdot x$	$1,05^{10}\cdot x$
12	$1,05^{11}\cdot x$	$1,05^{11}\cdot x$	0

Заметим, что в первый месяц после начисления процентов долг равен $12x$ млн руб. и в то же время он равен $1,05\cdot 2,4$ млн руб. Получаем:

$$12x = 1,05\cdot 2,4 \Leftrightarrow x = 0,21.$$

Таким образом, первая выплата составит 210 тыс. руб.

Ответ: 210 тыс. рублей.

67. Тип 16 № 555971

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн рублей

Решение. Обозначим размер кредита через S млн руб. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает по $0,2S$ млн — всего $0,6S$ за три года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 4-года долг возрастёт до $1,2S$ млн. Обозначим через x размер суммы, выплачиваемой в конце 4-го и 5-го годов. После выплаты в конце 4-го года долг равен $1,2S-x$, а в середине 5-го года он равен $1,2(1,2S-x)$. В конце 5-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1,2(1,2S-x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1,2(1,2S-x) = x \Leftrightarrow 2,2x = 1,44S \Leftrightarrow x = \frac{144}{220}S = \frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен

$$0,6S + \frac{72}{55}S = \frac{21}{11}S.$$

По условию

$$\frac{21}{11}S < 7 \Leftrightarrow 21S < 77.$$

По условию S целое, значит, наибольшее возможное значение $S = 3$.

Ответ: 3 млн рублей.

68. Тип 16 № 557246

15 июля планируется взять кредит 75 тысяч рублей на 15 месяцев. Условия погашения кредита таковы:

— с 1-го по 10-е число каждого месяца банк увеличивает долг, имеющийся на 1-е число, на 7,5%;

— с 11-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— долг на 15-е число каждого месяца должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько месяцев выплаты по погашению кредита будут меньше 6,25 тысячи рублей?

Решение. 15-го числа каждого месяца долг должен уменьшаться на $\frac{75}{15} = 5$ тыс. руб. Чтобы выплата, которая состоит из основного долга и набежавших процентов, была меньше 6,25 тыс. руб., нужно, чтобы проценты составляли меньше $6,25-5 = 1,25$ тыс. руб. Значит, сумма долга, на которую начисляются проценты, должна быть меньше $\frac{1,25\cdot 100\%}{7,5\%} = 16\frac{2}{3}$ тыс. руб. Это реализуется только в последние три месяца, когда сумма долга составляла 5, 10 и 15 тыс. руб. Таким образом, выплаты по погашению кредита будут меньше 6,25 тыс. рублей в течение трёх месяцев.

Ответ: 3.

69. Тип 16 № 558014

Мороз Иванович для покупки новогодних подарков планирует в декабре взять кредит на целое число тысяч рублей на четыре года на следующих условиях:
— в июле каждого года действия кредита долг Мороза Ивановича возрастает на 10% по сравнению с началом года;
— в конце первого и третьего годов Мороз Иванович выплачивает только проценты по кредиту, начисленные за соответствующий текущий год;
— в конце второго и четвертого годов Мороз Иванович выплачивает одинаковые суммы, погашая к концу четвертого года весь долг полностью.

Найдите наименьший размер кредита в тыс. руб., при котором общая сумма выплат превысит 2021 тыс. руб.

Решение. Пусть начальная сумма кредита равна S тыс. руб., а выплаты во второй и четвёртый год составят x тыс. руб. В соответствии с условием заполним таблицу:

Номер года	**Долг в июле, тыс. руб.**	**Выплата, тыс. руб.**	**Долг в декабре, тыс. руб.**
			S
1	$1,1S$	$0,1S$	S
2	$1,1S$	x	$1,1S-x$
3	$1,1(1,1S-x)$	$0,1(1,1S-x)$	$1,1S-x$
4	$1,1(1,1S-x)$	x	$1,1(1,1S-x)-x=0$

Выразим размер выплаты во второй год через сумму кредита:

$$1,1(1,1S-x)-x=0 \Leftrightarrow 1,21S-2,1x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,21S=2,1x \Leftrightarrow x=\frac{1,21S}{2,1}.$$

Найдём сумму выплат за четыре года:

$$B=0,1S+x+0,1(1,1S-x)+x=$$
$$=0,21S+1,9x=0,21S+\frac{1,9\cdot 1,21S}{2,1}=\frac{2,74S}{2,1}.$$

Найдём наименьший размер кредита в тыс. руб., при котором общая сумма выплат превысит 2021 тыс. руб.:

$$\frac{2,74S}{2,1}>2021 \Leftrightarrow 2,74S>4244,1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S>\frac{424\,410}{274} \Leftrightarrow S>\frac{212\,205}{137} \Leftrightarrow S>1548\frac{129}{137}.$$

Значит, наименьшее целое S равно 1549.

Ответ: 1549 тыс. руб.

70. Тип 16 № 559578

В июле 2021 года планируется взять кредит на сумму 21 млн рублей на 7 лет (последняя выплата запланирована в 2028 году). Условия его возврата таковы:
— пока долг больше половины, каждый январь он возрастает на p% по сравнению с концом предыдущего года;
— если долг не превышает половины исходной суммы, то каждый январь долг возрастает на 6% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь надо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите p, если общая сумма выплат составит 24,72 млн рублей.

Решение. Пусть первый повышающий коэффициент равен $a=1+\frac{p}{100}$, а второй повышающий коэффициент равен $b=1+\frac{6}{100}$. В июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года, эта сумма равна $\frac{21}{7}=3$ млн руб. Составим таблицу.

Год	**Долг в январе (после начисления процентов) млн руб.**	**Выплата млн руб.**	**Долг в июле (до начисления процентов) млн руб.**
2021			21
2022	$21a$	$21a-18$	18
2023	$18a$	$18a-15$	15
2024	$15a$	$15a-12$	12
2025	$12a$	$12a-9$	9
2026	$9b$	$9b-6$	6
2027	$6b$	$6b-3$	3
2028	$3b$	$3b$	0

Сумма выплат равна

$$B=$$
$$=21a-18+18a-15+15a-12+12a-9+9b-6+6b-3+3b=$$
$$=66a+18b-63 \text{ млн руб.}$$

Тогда

$$66a+18\cdot 1{,}06-63=24{,}72 \Leftrightarrow 66a=68{,}64 \Leftrightarrow a=1{,}04.$$

Значит,

$$1+\frac{p}{100}=1{,}04 \Leftrightarrow p=4.$$

Ответ: 4.

71. Тип 16 № 560141

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,25 млн руб.?

Решение. Пусть кредит взят на n лет. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$4, \frac{4(n-1)}{n}, \ldots, \frac{4 \cdot 2}{n}, \frac{4}{n}, 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 15%. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$4{,}6, \frac{4{,}6(n-1)}{n}, \ldots, \frac{4{,}6 \cdot 2}{n}, \frac{4{,}6}{n}.$$

Следовательно, наибольшая выплата составляет $0{,}6+\frac{4}{n}$. Получаем $0{,}6+\frac{4}{n} \leqslant 1{,}25$, а значит, $n \geqslant 7.$

Ответ: 7.

72. Тип 16 № 560433

В январе 2014 года Семён Маркович взял в банке кредит на сумму 6 млн руб. на покупку новой квартиры. Кредит ему выдали на 6 лет под 14% годовых, причём выплачивать его Семён Маркович должен был так, чтобы сумма долга каждый год уменьшалась на одну и ту же величину. В январе 2020 года Семён Маркович сразу после выплаты кредита продал квартиру по цене, превышающей первоначальную стоимость квартиры на 60%. Какую сумму в итоге заработал Семён Маркович?

Решение. Кредит на сумму 6 млн руб. взят на 6 лет, а сумма долга каждый год должна уменьшаться на одну и ту же величину. Значит, сумма долга ежегодно должна уменьшаться на 1 млн руб. Заполним таблицу:

Год	Долг после начисления процентов, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг до начисления процентов, млн руб.
2014			6
2015	$6 \cdot 1{,}14$	$6 \cdot 1{,}14-5$	5
2016	$5 \cdot 1{,}14$	$5 \cdot 1{,}14-4$	4
2017	$4 \cdot 1{,}14$	$4 \cdot 1{,}14-3$	3
2018	$3 \cdot 1{,}14$	$3 \cdot 1{,}14-2$	2
2019	$2 \cdot 1{,}14$	$2 \cdot 1{,}14-1$	1
2020	$1 \cdot 1{,}14$	$1 \cdot 1{,}14-0$	0

Найдём сумму выплат:

$$B=$$
$$=6 \cdot 1{,}14-5+5 \cdot 1{,}14-4+4 \cdot 1{,}14-3+3 \cdot 1{,}14-2+2 \cdot 1{,}14-1+1 \cdot 1{,}14=$$

$$= 1,14 \cdot (6+5+4+3+2+1) - (5+4+3+2+1) =$$
$$= 1,14 \cdot 21 - 15 = 8,94 \text{ млн руб.}$$

Будем считать, что первоначальная цена квартира была равна сумме, взятой в кредит. Тогда в январе 2020 года квартиру продали за сумму, превышающую первоначальную стоимость квартиры на 60%, т. е. за

$$S = 6 \cdot 1,6 = 9,6 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, Семёну Марковичу удалось заработать $9,6 - 8,94 = 0,66$ млн руб. или 660 тыс. руб.

Ответ: 660 тыс. рублей.

73. Тип 16 № 561179

В январе 2020 года Борис взял кредит в банке на сумму 4 200 000 рублей. По договору с банком Борис должен был погасить долг двумя равными платежами в феврале 2021 года и феврале 2022 года, при условии, что в январе 2021 года и январе 2022 года сумма оставшегося долга увеличивается на 10%. В феврале 2021 года Борис сделал первую выплату в соответствии с договором. После этого ему удалось договориться с банком о рефинансировании кредита и уменьшить процент, на который сумма долга вырастет в январе 2022 года, до 7%. Какую сумму сэкономит Борис на рефинансировании своего кредита?

Решение. Пусть x миллионов рублей составляла ежегодная выплата по изначальному договору, тогда по условию задачи

$$((4,2 \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2,42.$$

Величина долга после первой выплаты составляет $4,2 \cdot 1,1 - 2,42 = 2,2$ миллионов рублей. Согласно условию, выгода от рефинансирования составляет 3% этой суммы, что составляет $0,03 \cdot 2\,200\,000 = 66\,000$ рублей.

Ответ: 66 000 рублей.

74. Тип 16 № 561197

15-го января планируется взять кредит в банке в размере S рублей на n месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину A меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Найдите n, S, A и общую сумму выплат после погашения кредита D, если известно, что четвёртая выплата составит 17 700 рублей, а девятая выплата — 16 200 рублей.

Решение. Пусть $k = 0,02$. Составим таблицу.

Номер месяца	**Долг на 1 число месяца, с учетом процентов, руб.**	**Выплата, руб.**	**Долг на 15 число месяца, руб.**
			S
1	$(1+k)S$	$kS + \frac{S}{n}$	$S - \frac{S}{n}$
...	...	...	...
4	$(1+k)\left(S - \frac{3S}{n}\right)$	$k\left(S - \frac{3S}{n}\right) + \frac{S}{n}$	$S - \frac{4S}{n}$
...	...	...	...
9	$(1+k)\left(S - \frac{8S}{n}\right)$	$k\left(S - \frac{8S}{n}\right) + \frac{S}{n}$	$S - \frac{9S}{n}$

...	...	...	...
n	...	...	0

Найдём разность четвёртой и девятой выплат:

$$k\left(S-\frac{3S}{n}\right)+\frac{S}{n}-\left(k\left(S-\frac{8S}{n}\right)+\frac{S}{n}\right)=17\,700-16\,200 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{5kS}{n}=1500 \Leftrightarrow \frac{5\cdot 0,02\cdot S}{n}=1500 \Leftrightarrow \frac{S}{n}=15\,000.$$

Заметим, что $\frac{S}{n}=A$, значит, $A=15\,000$ руб.

Найдём S, подставив найденное значение A в уравнение для четвёртой выплаты:

$$0,02\,(S-3\cdot 15000)+15\,000=17\,700 \Leftrightarrow S=180\,000.$$

Тогда

$$\frac{180\,000}{n}=15\,000 \Leftrightarrow n=12.$$

Заметим, что выплаты представляют собой арифметическую прогрессию. Найдём сумму выплат D, используя формулу суммы арифметической прогрессии:

$$D=D_1+D_2+D_3+\ldots+D_{12}=\frac{D_1+D_{12}}{2}\cdot 12=$$
$$=\frac{D_4+D_9}{2}\cdot 12=(17\,700+16\,200)\cdot 6=203\,400 \text{ руб.}$$

Ответ: $n=12, S=180\,000, A=15\,000$ руб. и $D=203\,400$ руб.

75. Тип 16 № 561451

Андрей как начинающий предприниматель 31 декабря взял в кредит некоторую сумму в беспроцентном банке «Aliquot Bank». Он планирует погасить кредит в течение года, ежемесячно возвращая долг по следующей схеме: в январе Андрей возвращает банку половину взятой суммы, в феврале он возвращает треть остатка, в марте он возвращает четверть остатка и так далее в течение года, в том числе и в ноябре. В декабре Андрей возвращает банку 100 тыс. руб. и полностью погашает долг. Какую сумму денег (в тыс. руб.) Андрей взял в этом банке?

Решение. Пусть сумма, взятая в кредит, равна S.

В первый месяц (январь) Андрей возвращает сумму, равную $\frac{S}{2}$, и остаётся должен $S-\frac{S}{2}=\frac{S}{2}$.

Во второй месяц (февраль) Андрей возвращает сумму, равную $\frac{S}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{S}{6}$, и остаётся должен $\frac{S}{2}-\frac{S}{6}=\frac{S}{3}$.

В n-й месяц Андрей возвращает сумму, равную $\frac{S}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{S}{n(n+1)}$, и остаётся должен $\frac{S}{n}-\frac{S}{n(n+1)}=\frac{S}{n+1}$.

Значит, в одиннадцатом месяце (ноябре) после выплаты Андрей остаётся должен $\frac{S}{11+1}=\frac{S}{12}$.

Таким образом, в последний месяц (декабрь) Андрей выплачивает $\frac{S}{12}$ или 100 тыс. руб. Откуда

$S = 1200$ тыс. руб.

Ответ: 1200 тыс. рублей.

76. Тип 16 № 562005

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 600 тысяч рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько рублей увеличится сумма выплат, если взять кредит с такими же условиями на 30 месяцев?

Решение. Пусть сумма кредита равна $S = 600$ тыс. руб. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно в первом случае в течение 24 месяцев, во втором — 30 месяцев:

$$\textbf{1 случай: } S;\ \frac{23S}{24};\ \ldots;\ \frac{2S}{24};\ \frac{S}{24};\ 0.$$

$$\textbf{2 случай: } S;\ \frac{29S}{30};\ \ldots;\ \frac{2S}{30};\ \frac{S}{30};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$\textbf{1 случай: } 1{,}02S;\ 1{,}02\cdot\frac{23S}{24};\ \ldots;\ 1{,}02\cdot\frac{2S}{24};\ 1{,}02\cdot\frac{S}{24}.$$

$$\textbf{2 случай: } 1{,}02S;\ 1{,}02\cdot\frac{29S}{30};\ \ldots;\ 1{,}02\cdot\frac{2S}{30};\ 1{,}02\cdot\frac{S}{30}.$$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$$\textbf{1 случай: } 0{,}02S+\frac{S}{24};\ \frac{23\cdot 0{,}02S+S}{24};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}02S+S}{24};\ \frac{0{,}02S+S}{24}.$$

$$\textbf{2 случай: } 0{,}02S+\frac{S}{30};\ \frac{29\cdot 0{,}02S+S}{30};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}02S+S}{30};\ \frac{0{,}02S+S}{30}.$$

Всего следует выплатить

$$\textbf{1 случай: } S+S\cdot 0{,}02\left(1+\frac{23}{24}+\ldots+\frac{2}{24}+\frac{1}{24}\right)=$$

$$=S\left(1+\frac{25\cdot 0{,}02}{2}\right)=1{,}25S.$$

$$\textbf{2 случай: } S+S\cdot 0{,}02\left(1+\frac{29}{30}+\ldots+\frac{2}{30}+\frac{1}{30}\right)=$$

$$=S\left(1+\frac{31\cdot 0{,}02}{2}\right)=1{,}31S.$$

Значит, если взять кредит на 30 месяцев, то сумма выплат увеличится на

$$1{,}31S-1{,}25S=0{,}06S=0{,}06\cdot 600=36\ (\text{тыс. руб.})$$

Ответ: 36 000.

77. Тип 16 № 562761

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,25 млн рублей.

Решение. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$. Заполним таблицу.

Месяц	**Долг на 1-е число месяца, млн руб.**	**Выплата, млн руб.**	**Долг на 15-е число месяца, млн руб.**
Январь			1
Февраль	$1k$	$k - 0,6$	0,6
Март	$0,6k$	$0,6k - 0,4$	0,4
Апрель	$0,4k$	$0,4k - 0,3$	0,3
Май	$0,3k$	$0,3k - 0,2$	0,2
Июнь	$0,2k$	$0,2k - 0,1$	0,1
Июль	$0,1k$	$0,1k$	0

Сумма выплат равна:

$$k - 0,6 + 0,6k - 0,4 + 0,4k - 0,3 + 0,3k -$$
$$- 0,2 + 0,2k - 0,1 + 0,1k = 2,6k - 1,6 \text{ млн руб.}$$

По условию сумма выплат должна быть меньше 1,25 млн руб., тогда

$$2,6k - 1,6 < 1,25 \Leftrightarrow 2,6k < 2,85 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k < \frac{28,5}{26} \Leftrightarrow k < 1 + \frac{5}{52},$$
$$1 + \frac{r}{100} < 1 + \frac{5}{52} \Leftrightarrow \frac{r}{100} < \frac{5}{52} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r < \frac{500}{52} \Leftrightarrow r < 9\frac{32}{52}.$$

Значит, наибольшее возможное целое значение $r = 9$.

Ответ: 9.

78. Тип 16 № 562940

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составит общая сумма выплат после погашения кредита?

Решение. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

8; 7,2; ...; 1,6; 0,8; 0.

По условию каждый январь долг возрастает на 15%. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

9,2; 8,28; ...; 1,84; 0,92.

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

2; 1,88; ...; 1,04; 0,92.

Всего следует выплатить

$$2+1,88+...+1,04+0,92=\frac{10\cdot 2,92}{2}=14,6 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 14,6.

79. Тип 16 № 563111

4 декабря 2020 года Ваня взял кредит на сумму 3 млн рублей. Условия возврата кредита таковы:
— 3-го числа каждого месяца долг возрастает на 10%;
— с 4-го по 25-е число каждого месяца, начиная с января 2021 года, необходимо погасить часть долга одним платежом;
— в период с 04.01.2021 по 25.01.2021 необходимо заплатить x тыс. руб.;
— с февраля по ноябрь 2021 года 26-го числа каждого месяца долг (вместе с начисленными процентами) должен быть меньше долга на 26-е число предыдущего месяца на одну и ту же величину;
— в период с 04.12.2021 по 25.12.2021 необходимо заплатить x тыс. руб.;
— к 26.12.2021 кредит должен быть полностью погашен.

Общая сумма выплат составит 5,06 млн руб. Найдите x.

Решение. Заметим, что 26 января долг составлял $S=3000+0,1\cdot 3000-x=3300-x$ тыс. руб. Пусть с февраля по ноябрь долг уменьшался на a тыс. руб., а повышающий коэффициент $k=1+\frac{10\%}{100\%}=1,1.$ Заполним таблицу.

Месяц	Долг на 3 число месяца после начисления процентов, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 26 число месяца, тыс. руб.
Январь	3300	x	$3300-x=S$
Февраль	kS	$kS-(S-a)$	$S-a$
Март	$k(S-a)$	$k(S-a)-(S-2a)$	$S-2a$
...	...	...	...
Октябрь	...	...	$S-9a$
Ноябрь	$k(S-9a)$	$k(S-9a)-(S-10a)$	$S-10a$

Декабрь	$k(S-10a)$	$k(S-10a)=x$	0

Из равенства для последней выплаты выразим a:

$$k(S-10a)=x \Leftrightarrow kS-10ka=x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10ka=kS-x \Leftrightarrow a=\frac{kS-x}{10k} \Leftrightarrow a=\frac{S}{10}-\frac{x}{11}.$$

Найдём сумму выплат, заметив, что выплаты с февраля по ноябрь являются последовательными членами арифметической прогрессии:

$$B=x+k\cdot\frac{S+S-9a}{2}\cdot 10-\frac{S-a+S-10a}{2}\cdot 10+x=$$
$$=2x+10kS-45ka-10S+55a.$$

Подставим значения k, S и a:

$$B=2x+10\cdot 1,1S-45\cdot 1,1a-10S+55a=$$
$$=2x+S+5,5a=2x+3300-x+5,5\cdot\left(\frac{3300-x}{10}-\frac{x}{11}\right)=$$
$$=x+3300+1815-1,05x=5115-0,05x \text{ тыс. руб.}$$

По условию сумма выплат равна 5060 тыс. руб., тогда

$$5115-0,05x=5060 \Leftrightarrow x=1100.$$

Ответ: 1100.

80. Тип 16 № 563578

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
— в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года кредит должен быть погашен полностью.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение. Обозначим взятую в кредит сумму S (тыс. руб.) и составим таблицу по данным задачи.

Начисляемый процент	Платеж в банк	Оставшийся долг
19%	$\frac{S}{10}+0,19S$	$\frac{9}{10}S$
19%	$\frac{S}{10}+0,19\frac{9}{10}S$	$\frac{8}{10}S$
19%	$\frac{S}{10}+0,19\frac{8}{10}S$	$\frac{7}{10}S$
19%	$\frac{S}{10}+0,19\frac{7}{10}S$	$\frac{6}{10}S$

19%	$\frac{S}{10}+0,19\frac{6}{10}S$	$\frac{5}{10}S$
16%	$\frac{S}{10}+0,16\frac{5}{10}S$	$\frac{4}{10}S$
16%	$\frac{S}{10}+0,16\frac{4}{10}S$	$\frac{3}{10}S$
16%	$\frac{S}{10}+0,16\frac{3}{10}S$	$\frac{2}{10}S$
16%	$\frac{S}{10}+0,16\frac{2}{10}S$	$\frac{1}{10}S$
16%	$\frac{S}{10}+0,16\frac{1}{10}S$	0

По составленной таблице найдем общую сумму выплат:

$$S_{\text{общ}}=$$
$$=S+0,19\left(S+\frac{9}{10}S+\frac{8}{10}S+\frac{7}{10}S+\frac{6}{10}S\right)+0,16\left(\frac{5}{10}S+\frac{4}{10}S+\frac{3}{10}S+\frac{2}{10}S+\frac{1}{10}S\right)=$$
$$=S+0,19\cdot 4S+0,16\cdot 1,5S=2S=1400\text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 1 млн 400 тыс. руб.

Приведем решение Р. Г. Гилемханова (Москва).

Будем вести расчеты в тысячах рублей. Переплаты в первые 5 лет кредитования образуют арифметическую прогрессию (a_n), в которой $a_1=0,19\cdot 700=133,\ a_5=\frac{6}{10}a_1=79,8.$ Сумма первых 5 членов этой прогрессии равна

$$S_5=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5=\frac{133+79,8}{2}\cdot 5=532.$$

Переплаты за последние 5 лет кредитования, также образуют арифметическую прогрессию (b_n), с первым членом $b_1=0,16\cdot\frac{5}{10}\cdot 700=56$ и последним — пятым — членом, равным $\frac{56}{5}=11,2.$ Сумма этих переплат составляет

$$S_5=\frac{b_1+b_5}{2}\cdot 5=\frac{56+11,2}{2}\cdot 5=168.$$

Таким образом, общая сумма всех выплат заемщика окажется равной $700+532+168=1400$ (тыс. руб.).

Ответ: 1 млн 400 тыс. руб.

81. Тип 16 № 563598

В июле 2025 года планируется взять кредит на 600 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:
— в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно r, если общая сумма выплат составит 930 тысяч рублей?

Решение. Кредит погашается в течение 6 лет, причем долг уменьшается равномерно, значит, каждый год он уменьшается на 100 тыс. руб. Тогда первая выплата равна $\frac{r}{100}\cdot 600+100$ тыс. руб., вторая выплата равна $\frac{r}{100}\cdot(600-100)+100$ тыс. руб., третья выплата равна $\frac{r}{100}\cdot(600-200)+100$ тыс. руб. В следующие три года выплаты равны соответственно: $\frac{15}{100}\cdot 300+100$ тыс. руб., $\frac{15}{100}\cdot 200+100$ тыс. руб. и $\frac{15}{100}\cdot 100+100$ тыс. руб. Общая сумма выплат составляет:

$$600+\frac{r}{100}\cdot(600+500+400)+\frac{15}{100}\cdot(300+200+100)=$$
$$=600+15r+90=690+15r \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, что $690+15r=930,$ откуда $r=16.$

Ответ: 16.

82. Тип 16 № 563636

15 августа 2026 года планируется взять кредит в банке на на 1200 тысяч рублей на 11 месяцев. Условия возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й (с сентября 2026 года по июнь 2027 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15 июня 2027 года долг составит 400 тысяч рублей;
— 15 июля 2027 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение. Через 10 месяцев долг будет составлять 400 тыс. руб., поэтому за десять месяцев он уменьшится на 800 тыс. руб., при этом будет уменьшаться на одну и ту же сумму каждый месяц. Это означает, что каждый месяц долг будет уменьшаться на 80 тыс. руб., и на 15 число каждого месяца, начиная с августа, составит (в тыс. руб.):

1200, 1120, 1040, 960, 880, 800, 720, 640, 560, 480, 400, 0.

На первое число каждого месяца начиная с сентября долг (в тыс. руб.) будет составлять:

$$1200\cdot 1{,}01,\ 1120\cdot 1{,}01,\ 1040\cdot 1{,}01,\ \ldots,\ 560\cdot 1{,}01,\ 480\cdot 1{,}01,\ 400\cdot 1{,}01,\ 0.$$

Выплаты (в тыс. руб.) составят:

$$1200\cdot 1{,}01-1120,\ 1120\cdot 1{,}01-1040,\ 1040\cdot 1{,}01-$$
$$-960,\ \ldots,\ 560\cdot 1{,}01-480,\ 480\cdot 1{,}01-400,\ 400\cdot 1{,}01.$$

Найдем их сумму:

$$1200\cdot 1{,}01-1120+1120\cdot 1{,}01-1040+$$
$$+1040\cdot 1{,}01-960+\ldots+560\cdot 1{,}01-$$
$$-480+480\cdot 1{,}01-400+400\cdot 1{,}01=$$

$$= 1,01 \cdot \frac{1200+400}{2} \cdot 11 - \frac{1120+400}{2} \cdot 10 =$$
$$= 101 \cdot 88 - 7600 = 1288 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 1 млн 288 тыс. руб.

Приведем другое решение.

Общая сумма выплат состоит из основного долга 1200 тыс. руб. и начисленных процентов.

Через 10 месяцев долг будет составлять 400 тыс. руб., поэтому за десять месяцев он уменьшится на 800 тыс. руб., при этом будет уменьшаться на одну и ту же сумму каждый месяц. Это означает, что каждый месяц долг будет уменьшаться на 80 тыс. руб., и на 15 число каждого месяца, начиная с августа, составит (в тыс. руб.):

1200, 1120, 1040, 960, 880, 800, 720, 640, 560, 480, 400, 0.

Сумма начисленных за 11 месяцев процентов составит

$$0,01\,(1200 + 1120 + \ldots + 400) =$$
$$= 0,01 \cdot \frac{1200+400}{2} \cdot 11 = 88 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, общая сумма выплат составит 1200 + 88 = 1288 тыс. руб.

83. Тип 16 № 563899

15 декабря 2024 года планируется взять кредит в банке на 31 месяц. Условия возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й (с января 2025 года по июнь 2027 года включительно) долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15 июня 2027 года долг составит 100 тысяч рублей;
— 15 июля 2027 года долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 555 тысяч рублей?

Решение. Заполним таблицу в соответствии с условием задачи.

Номер месяца	**Долг после начисления процентов, тыс. руб.**	**Выплата, тыс. руб.**	**Долг до начисления процентов, тыс. руб.**
			$S = 100 + 30x$
1	$1,02 \cdot (100 + 30x)$	$2 + 1,6x$	$100 + 29x$
2	$1,02 \cdot (100 + 29x)$	$2 + 1,58x$	$100 + 28x$
...	...	...	...
29	$1,02 \cdot (100 + 2x)$	$2 + 1,04x$	$100 + x$
30	$1,02 \cdot (100 + x)$	$2 + 1,02x$	100
31	$1,02 \cdot 100$	$1,02 \cdot 100$	0

Найдём сумму выплат, воспользовавшись формулой суммы арифметической прогрессии:

$$B = 2 \cdot 30 + \frac{1,6x + 1,02x}{2} \cdot 30 + 1,02 \cdot 100 =$$
$$= 60 + 39,3x + 102 = 162 + 39,3x \text{ тыс. руб.}$$

По условию эта сумма равна 555 тыс. руб. Значит,

$$162 + 39,3x = 555 \Leftrightarrow 39,3x = 393 \Leftrightarrow x = 10.$$

Найдём сумму взятую в кредит:

$$S = 100 + 30 \cdot 10 = 400 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 400 000 рублей.

84. Тип 16 № 564705

15 декабря планируется взять кредит в банке на 480 тысяч рублей на 27 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа первые два месяца и последний долг должен уменьшиться на m тысяч рублей, все остальные месяцы долг должен быть меньше долга на 15-е число предыдущего месяца на n тысяч рублей.

Найдите отношение $\frac{m}{n}$, если всего банку будет выплачено 656,4 тысяч рублей?

Решение. Внесем в таблицу величину начисленных процентов и величину долга на 15 число каждого из месяцев.

Номер месяца	Сумма начисленных процентов, тыс. руб.	Долг на 15 число месяца, тыс. руб.
		$480 = 3m + 24n$
1	$A_1 = 0,03(3m + 24n)$	$2m + 24n$
2	$A_2 = 0,03(2m + 24n)$	$m + 24n$
3	$A_3 = 0,03(m + 24n)$	$m + 23n$
...	...	...
24	$A_{24} = 0,03(m + 3n)$	$m + 2n$
25	$A_{25} = 0,03(m + 2n)$	$m + n$
26	$A_{26} = 0,03(m + n)$	m
27	$A_{27} = 0,03m$	0

Общая сумма выплат складывается из суммы взятой в кредит и суммы начисленных процентов. Всего банку будет выплачено:

$$B = 480 + A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{27} =$$
$$= 480 + A_1 + A_2 + \frac{A_3 + A_{27}}{2} \cdot 25 =$$
$$= 480 + 0,03(3m + 24n) + 0,03(2m + 24n) + 0,03 \cdot \frac{m + 24n + m}{2} \cdot 25 =$$
$$= 480 + 0,9m + 10,44n \text{ тыс. руб.}$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3m + 24n = 480, \\ 480 + 0,9m + 10,44n = 656,4 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m + 72n = 1440, \\ 9m + 104,4n = 1764 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+24n=480, \\ 32,4n=324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=80, \\ n=10. \end{cases}$$

Найдём отношение $\frac{m}{n}$:

$$\frac{m}{n}=\frac{80}{10}=8.$$

Ответ: 8.

85. Тип 16 № 564905

В начале января 2022 года планируется взять кредит в банке на 4 года на S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый июль долг возрастает на 10% по сравнению с началом текущего года;
— с августа по декабрь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в январе каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Начало года	2022	2023	2024	2025	2026
Долг (в млн рублей)	S	0,8S	0,5S	0,3S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором сумма выплат банку за все 4 года составит не менее 10 миллионов рублей.

Решение. В соответствии с условием заполним таблицу.

Год	Долг на январь млн руб.	Долг на июль (с процентами) млн руб.	Выплата млн руб.
2022	S	1,1S	0,3S
2023	0,8S	0,88S	0,38S
2024	0,5S	0,55S	0,25S
2025	0,3S	0,33S	0,33S
2026	0		

Из таблицы находим, что сумма всех выплат составит

$$B=0,3S+0,38S+0,25S+0,33S=1,26S \text{ млн руб.}$$

Эта сумма должна быть не меньше 10 млн рублей, поэтому

$$1,26S \geqslant 10 \Leftrightarrow S \geqslant \frac{1000}{126} \Leftrightarrow S \geqslant 7\frac{118}{126}.$$

Значит, наименьшее целое значение S равно 8.

Ответ: 8.

86. Тип 16 № 621778

В июле планируется взять кредит на сумму 800 800 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Решение. Пусть сумма кредита составляет $S = 800\,800$ рублей, ежегодные выплаты в случае погашения кредита за 3 года составляют x рублей, а в случае погашения кредита за 2 года — y рублей. В случае погашения кредита за 3 года долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль будет уменьшаться следующим образом:

$$S;\ 1{,}2S-x;\ 1{,}2^2S-(1{,}2x+x);\ 1{,}2^3S-(1{,}2^2x+1{,}2x+x)=0,$$

следовательно,

$$x=\frac{1,2^3S\cdot(1,2-1)}{1,2^3-1}=\frac{1,2^3\cdot 800\,800\cdot 0,2}{0,728}=380\,160 \text{ рублей.}$$

В этом случае придётся отдать 1 140 480 рублей. Если отдавать кредит двумя равными платежами, то долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль будет уменьшаться следующим образом:

$$S;\ 1{,}2S-y;\ 1{,}2^2S-(1{,}2y+y)=0,$$

следовательно,

$$y=\frac{1,2^2S}{1,2+1}=\frac{1,2^2\cdot 800\,800}{2,2}=524\,160 \text{ рублей.}$$

В этом случае придётся отдать 1 048 320 рублей, то есть на 92 160 рублей меньше, чем в предыдущем случае.

Ответ: 92 160 рублей.

87. Тип 16 № 622380

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 3,6 миллионов рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько тыс. рублей увеличится сумма всех выплат, если взять кредит с такими же условиями на 72 месяца?

Решение. В первом случае долг ежемесячно должен уменьшаться на $3600:36=100$ тыс. руб., а во втором случае — на $3600:72=50$ тыс. руб. Суммы начисленных процентов будут представлять собой арифметическую прогрессию.

Найдём сумму выплат в первом случае:

$$B_{36}=3600+\frac{3600\cdot 0,01+100\cdot 0,01}{2}\cdot 36 \text{ (тыс. руб.).}$$

Найдём сумму выплат во втором случае:

$$B_{72}=3600+\frac{3600\cdot 0,01+50\cdot 0,01}{2}\cdot 72 \text{ (тыс. руб.).}$$

Найдём разность сумм:

$$B_{72}-B_{36}=$$
$$=\frac{3600\cdot 0,01+50\cdot 0,01}{2}\cdot 72-\frac{3600\cdot 0,01+100\cdot 0,01}{2}\cdot 36=$$
$$=0,36\cdot\left(3650-\frac{3700}{2}\right)=0,36\cdot 1800=648 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 648.

88. Тип 16 № 624025

17-го декабря 2021 года Дмитрий Иванович планирует взять кредит в банке на 1 100 000 рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

— 3-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— с 4-го по 16-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 17-го числа каждого месяца, с 1-го по n-й, долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 17-е число предыдущего месяца;

— к 17-му числу n-го месяца после получения кредита долг должен быть равен 380 000 рублей;

— к 17-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1 381 200 рублей.

Решение. Пусть каждый месяц с 1-го по n-й долг уменьшается на x тысяч рублей. Тогда ежемесячная выплата составит x тысяч рублей плюс 2% от суммы текущего долга. Заполним таблицу в соответствии с условием задачи.

Номер месяца	Долг после начисления процентов, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг до начисления процентов, тыс. руб.
			$1100=380+nx$
1	$1{,}02\cdot(380+nx)$	$7{,}6+0{,}02nx+x$	$380+(n-1)x$
2	$1{,}02\cdot(380+(n-1)x)$	$7{,}6+0{,}02nx+0{,}98x$	$380+(n-2)x$
...	...	...	...
$n-1$	$1{,}02\cdot(380+2x)$	$7{,}6+1{,}04x$	$380+x$
n	$1{,}02\cdot(380+x)$	$7{,}6+1{,}02x$	380
$n+1$	$1{,}02\cdot 380$	$1{,}02\cdot 380$	0

Из равенства $1100=380+nx$ получаем, что $nx=720$. Найдём сумму выплат, воспользовавшись формулой суммы арифметической прогрессии:

$$B=7{,}6n+\frac{0{,}02nx+x+1{,}02x}{2}\cdot n+1{,}02\cdot 380=$$
$$=7{,}6n+(0{,}01nx+1{,}01x)n+387{,}6=$$
$$=7{,}6n+0{,}01\cdot 720n+1{,}01\cdot 720+387{,}6=$$
$$=7{,}6n+7{,}2n+727{,}2+387{,}6=14{,}8n+1114{,}8 \text{ тыс. руб.}$$

По условию эта сумма равна 1381,2 тыс. руб. Значит,

$$14{,}8n+1114{,}8=1381{,}2 \Leftrightarrow 14{,}8n=266{,}4 \Leftrightarrow n=18.$$

Ответ: 18.

89. Тип 16 № 624083

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 14% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна сумма всех платежей после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж будет составлять 475 000 рублей?

Решение. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$5,\ \frac{5(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{5\cdot 2}{n},\ \frac{5}{n},\ 0.$$

По условию каждый январь долг будет возрастать на 14%. Найдём значения долга (в млн рублей) к концу каждого января:

$$5{,}7,\ \frac{5{,}7(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{5{,}7\cdot 2}{n},\ \frac{5{,}7}{n}.$$

Значит, платежи (в млн рублей) должны быть следующими:

$$0{,}7+\frac{5}{n},\ \frac{0{,}7(n-1)+5}{n},\ \ldots,\ \frac{0{,}7\cdot 2+5}{n},\ \frac{0{,}7+5}{n}.$$

Получаем $\frac{5{,}7}{n}=0{,}475,$ откуда находим $n = 12$. Сумма всех платежей будет равна

$$5+0{,}7\left(1+\frac{11}{12}+\ldots+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)=5+0{,}7\cdot\frac{13}{2}=9{,}55 \text{ млн рублей.}$$

Ответ: 9,55 млн рублей.

90. Тип 16 № 624297

15 декабря 2021 года Антон планирует взять кредит в размере 700 тысяч рублей на покупку машины. Условия его возврата, таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— с 10 числа по 14 число каждого месяца, необходимо выплатить одним платежом часть долга.

На какое минимальное количество месяцев Антон может взять кредит, чтобы каждая выплата не превышала 90 тысяч рублей?

Решение. Минимальное число месяцев соответствует максимальным ежемесячным выплатам. Значит, нужно чтобы все выплаты, кроме возможно последней, составляли 90 тыс. руб.

Срок кредита не может составлять менее 8 месяцев, так как за семь месяцев сумма выплат составит не более 630 тыс. руб., что меньше суммы кредита.

В первый месяц начисленные проценты составят $700\cdot 0{,}02=14$ тыс.руб., а во второй месяц — не менее $(714-90)\cdot 0{,}02=12{,}48$ тыс.руб. Значит, срок кредита не может составлять 8 месяцев, так как за восемь месяцев сумма выплат составит не более 720 тыс. руб., что меньше суммы кредита и суммы процентов за первые два месяца.

Приведем пример расчёта кредита и выплат на 9 месяцев.

Номер месяца	Долг с начисленными процентами тыс. руб.	Выплата тыс. руб.	Долг тыс. руб.
			700
1	714	90	624
2	$624\cdot 1{,}02 = 636{,}48$	89,48	547
3	$547\cdot 1{,}02 = 557{,}94$	89,94	468
4	$468\cdot 1{,}02 = 477{,}36$	89,36	388
5	$388\cdot 1{,}02 = 395{,}76$	89,76	306
6	$306\cdot 1{,}02 = 312{,}12$	89,12	223
7	$223\cdot 1{,}02 = 227{,}46$	89,46	138
8	$138\cdot 1{,}02 = 140{,}76$	89,76	51
9	$51\cdot 1{,}02 = 52{,}02$	52,02	0

Значит, минимальное количество месяцев, на которое Антон может взять кредит, равно 9.

Ответ: 9.

91. Тип 16 № 624491

В августе 2022-го года Казбек Эльбрусович для строительства резиденции Деда Мороза в Кисловодске собирается взять кредит на 5 лет в размере 210 миллионов рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— с февраля по июль каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в августе 2023, 2024 и 2025-го года долг остается равным 210 млн руб.;
— выплаты в 2026 и 2027-м году равны;
— к августу 2027-го года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общий размер выплат по погашению долга Казбека Эльбрусовича составит 305 млн руб.

Решение. Кредитор каждый январь начисляет r процентов, то есть умножает остаток долга на $x=1+\dfrac{r}{100}$. Тогда первые три платежа составляли $210x-210$ млн руб. Пусть, далее, четвертый и пятый платежи составляли N млн рублей. Тогда $N=(210x-N)x$, откуда $N=\dfrac{210x^2}{1+x}$. По условию, общие выплаты составили 305 млн руб., откуда имеем:

$$3(210x-210)+2\cdot\frac{210x^2}{1+x}=305\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(210x-210)+\frac{420x^2}{1+x}=305\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{420x^2}{1+x}=935-630x\Leftrightarrow 420x^2=(1+x)(935-630x)\Leftrightarrow$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=1,1.$$

Тогда $r=10$.

Ответ: 10.

92. Тип 16 № 624605

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на срок семь лет в размере S млн руб. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2021, 2022, 2023 и 2024 годов долг остаётся равным S руб.;
— выплаты 2025, 2026 и 2027 годах равны 2,16 млн руб.;
— к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r и S, если известно, что сумма всех выплат составит 10,12 млн руб.

Решение. Пусть $k=1+\dfrac{r}{100}$. Составим таблицу

Год	Долг с начисленными процентами на январь, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг на июль, млн руб.
2020			S
2021	kS	$kS-S$	S
2022	kS	$kS-S$	S

2023	kS	$kS-S$	S
2024	kS	$kS-S$	S
2025	kS	2,16	$kS-2,16$
2026	$k^2S-2,16k$	2,16	$k^2S-2,16k-2,16$
2027	$k^3S-2,16k^2-2,16k$	2,16	$k^3S-2,16k^2-2,16k-2,16=0$

Тогда получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases}4(k-1)S+3\cdot 2,16=10,12,\\ k^3S-2,16k^2-2,16k-2,16=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(k-1)S=0,91,\\ k^3S=\dfrac{2,16(k^3-1)}{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(k-1)S=0,91,\\ k^3(k-1)S=2,16(k^3-1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(k-1)S=0,91,\\ 0,91k^3=2,16(k^3-1)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(k-1)S=0,91,\\ k^3=\dfrac{216}{125}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=4,55,\\ k=\dfrac{6}{5}.\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{6}{5}=1+\frac{r}{100}\Leftrightarrow r=20.$$

Ответ: $r=20, S=4,55.$

93. Тип 16 № 625315

16 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— на 15-е число каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен уменьшаться на 6 тысяч рублей;

— к 15-му числу 21-го месяца долг должен быть погашен полностью.

Сколько тысяч рублей должен составлять долг на 15-е число 20-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 187,8 тысяч рублей?

Решение. Пусть на 15-е число 20-го месяца долг составляет S тыс. рублей, $k=1+\frac{2}{100}$ и $x=6$ тыс. рублей. Тогда начальная сумма кредита равна $S+20x$тыс. рублей. Заполним таблицу.

Номер месяца	Долг на 1 число (с учётом процентов) тыс. руб.	Выплата тыс. руб.	Долг на 15 число тыс. руб.
1	$kS+20kx$	$(k-1)S+20kx-19x$	$S+19x$
2	$kS+19kx$	$(k-1)S+19kx-18x$	$S+18x$
...	...	...	...
18	$kS+3kx$	$(k-1)S+3kx-2x$	$S+2x$

19	$kS+2kx$	$(k-1)S+2kx-x$	$S+x$
20	$kS+kx$	$(k-1)S+kx$	S
21	kS	kS	0

Для нахождения суммы выплат воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии:

$$B=\frac{(k-1)S+20kx-19x+(k-1)S+kx}{2}\cdot 20+kS=$$
$$=20(k-1)S+210kx-190x+kS.$$

Подставим значения k и x:

$$B=20(1,02-1)S+210\cdot 1,02\cdot 6-190\cdot 6+1,02S=$$
$$=1,42S+145,2\text{тыс. руб.}$$

По условию эта сумма равна 187,8 тыс. руб., тогда:

$$1,42S+145,2=187,8 \Leftrightarrow 1,42S=42,6 \Leftrightarrow S=30.$$

Ответ: 30.

94. Тип 16 № 626507

Банк предоставляет кредит на срок 3 года на следующих условиях: проценты начисляются в конце каждого полугодия из расчета: I год — по 10% за полугодие, II год — по 20% за полугодие, III год — по 25% за полугодие. Платежи вносятся равными суммами в конце каждого полугодия, кроме первого, после начисления процентов. Чему равен полугодовой платеж при кредите в 2,54 млн рублей?

Решение. Операции по данному кредиту приведем в следующей таблице (все единицы измерения приведены в тыс. руб.).

Полугодия	Долг в начале платежного полугодия	Выплата	Долг после очередной выплаты
1	$2540\cdot 1,1=2794$	—	2794
2	$2794\cdot 1,1=3073,4$	x	$3073,4-x$
3	$(3073,4-x)\cdot 1,2=3688,08-1,2x$	x	$3688,08-2,2x$
4	$(3688,08-2,2x)\cdot 1,2=4425,696-2,64x$	x	$4425,696-3,64x$
5	$(4425,696-3,64x)\cdot\frac{5}{4}=5532,12-4,55x$	x	$5532,12-5,55x$
6	$(5532,12-5,55x)\cdot\frac{5}{4}=6915,15-6,9375x$	x	$6915,15-7,9375x=0$

Решим уравнение:

$$6915,15-7,9375x=0 \Leftrightarrow 7,9375x=6915,15=871,2.$$

Ответ: 871,2 тыс. руб.

95. Тип 16 № 627409

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 400 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если к 15-му числу n-го месяца за первые n месяцев будет выплачено 424,8 тысячи рублей?

Решение. Пусть сумма кредита равна $S=400$тыс. руб., повышающий коэффициент равен $k=1+\frac{3\%}{100\%}=1,03,$ а величина, на которую ежемесячно уменьшается долг равна $b=40$тыс. руб. Заполним таблицу.

Номер месяца	**Долг с процентами тыс. руб.**	**Выплата тыс. руб.**	**Долг на 15 число тыс. руб.**
			S
1	kS	$a_1=(k-1)S+b$	$S-b$
2	$k(S-b)$	$a_2=(k-1)(S-b)+b$	$S-b-b$
3	$k(S-2b)$	$a_3=(k-1)(S-2b)+b$	$S-2b-b$
...	...	...	...
n	$k(S-(n-1)b)$	$a_n=(k-1)(S-(n-1)b)+b$	$S-(n-1)b-b$

Заметим, что выплаты в первые n месяцев представляют собой арифметическую прогрессию, где первый член $a_1=(1,03-1)400+40=52,$ второй член

$$a_2=(1,03-1)(400-40)+40=50,8.$$

Разность арифметической прогрессии равна $d=a_2-a_1=50,8-52=-1,2.$ Тогда

$$a_n=a_1+d(n-1)=52-1,2(n-1)=53,2-1,2n.$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{52+53,2-1,2n}{2}\cdot n=-0,6n^2+52,6n.$$

По условию, эта сумма равна 424,8 тысячи рублей, тогда

$$-0,6n^2+52,6n=424,8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^2-263n+2124=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=9, \\ n=\frac{236}{3}. \end{array}\right.$$

По смыслу задачи подходит только $n=9.$

Ответ: 9.

96. Тип 16 № 627640

Евгений взял 15 января кредит на сумму 1 млн руб. на 6 месяцев. Условия его возврата таковы. Каждый месяц 1-го числа долг возрастает на целое число r% по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга. Каждый месяц 15-го числа долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг, млн руб.	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найти наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн руб.

Решение. Обозначим сумму кредита буквой K, переплаты Евгения — буквой p. Выплаты по погашению основного долга в течение 6 платежных месяцев приведем в таблице.

Платежный месяц	1	2	3	4	5	6
Выплата по погашению основного долга, млн рублей	0,1K	0,1K	0,1K	0,1K	0,1K	0,5K

Из условия следует, что переплаты Евгения будут убывать как члены конечной арифметической прогрессии p_n с первым членом $p_1 = 0,01Kr$ и с шестым (последним) членом $p_6 = 0,005Kr.$ Сумма всех 6 членов этой прогрессии составляет

$$S_6 = \frac{p_1 + p_6}{2} \cdot 6 = 0,015rK \cdot 3 = 0,045rK.$$

Из условия следует, что:

$$0,045rK \geqslant 1,25K - K \Leftrightarrow 0,045r \geqslant 0,25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r \geqslant \frac{250}{45} \Leftrightarrow r \geqslant \frac{50}{9} \Leftrightarrow r \geqslant 5\frac{5}{9}.$$

Последнему неравенству удовлетворяют целочисленные значения r, равные 6, 7, 8,…, наименьшим из которых является число 6.

Ответ: 6.

97. Тип 16 № 627991

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 900 000 рублей на 13 месяцев. Условия его возврата таковы:

− 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
− со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
− 15-го числа с 1 по 12 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
− 15-го числа 13 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 12 месяца, если всего было выплачено 1134 тысяч рублей?

Решение. Пусть 15-го числа 12-го месяца долг составит x тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$900; \quad \frac{11 \cdot 900 + x}{12}; \quad \frac{10 \cdot 900 + 2x}{12}; \ \dots \quad \frac{900 + 11x}{12}; \quad x; \quad 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$927; \quad 1,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12}; \ \dots \quad 1,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12}; \quad 1,03x.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$27+\frac{900-x}{12};\quad 0,03\cdot\frac{11\cdot 900+x}{12}+$$
$$+\frac{900-x}{12};\quad \ldots\quad 0,03\cdot\frac{900+11x}{12}+\frac{900-x}{12};\quad 1,03x.$$

Всего следует выплатить

$$27+0,03\cdot\frac{900+x}{2}\cdot 11+900-x+$$
$$+1,03x=0,195x+1075,5\ \ (\text{тыс.рублей}),$$

откуда $0,195x+1075,5=1134\Leftrightarrow 0,195x=58,5\Leftrightarrow x=300.$ Значит, 15-го числа 12-го месяца долг составит 300 тыс. рублей.

Ответ: 300.

98. Тип 16 № 628038

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 16 месяцев. Условия возврата таковы:

− 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца (r — целое число);

− со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;

− 15-го числа каждого месяца с 1-го по 15-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

− 15-го числа 15-го месяца долг должен быть равен 500 тысяч рублей;

− к 15-му числу 16-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет составлять 1228 тысяч рублей.

Решение. За 15 месяцев долг должен уменьшится на $1100-500=600$ тыс. руб. Значит, ежемесячное уменьшение долга должно составлять $\frac{600}{15}=40$ тыс. руб. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

1100, 1060, 1020, ... 540, 500, 0.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r%. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$1100k$, $1060k$, ... $540k$, $500k$.

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$1100(k-1)+40$, $1060(k-1)+40$, ..., $540(k-1)+40$, 500k.

Всего следует выплатить

$$(k-1)\cdot\frac{15\cdot(1100+540)}{2}+$$
$$+15\cdot 40+500k=12800k-11700\ (\text{тыс. рублей}),$$

откуда $12800k-11700=1228,\ 12800k=$
$=12928,\ k=1,01,\ r=1.$

Ответ: 1.

99. Тип 16 № 628137

В июле 2022 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму сроком на 5 лет. Условия возврата таковы:
— в январе долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь необходимо внести единым платежом часть долга;
— в июле 2023, 2024 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга июля предыдущего года;
— в июле 2024 года долг составляет 80% от первоначальной суммы кредита;
— выплаты в 2025 и 2026 годах равны по 202 тыс. рублей;
— долг в июле 2026 года составляет 20% от суммы долга на июль 2024 года;
— в июле 2027 года долг должен быть полностью погашен.

Определите, чему равна общая сумма выплат.

Решение. Пусть начальная сумма кредита равна S тыс. руб., повышающий коэффициент $k=1+\frac{10\%}{100\%}=1,1.$ Составим таблицу:

Год	Долг в январе, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2022			S
2023	$1,1S$	$0,2S$	$0,9S$
2024	$0,99S$	$0,19S$	$0,8S$
2025	$0,88S$	202	$0,88S-202$
2026	$1,1\cdot(0,88S-202)$	202	$0,16S$
2027	$0,176S$	$0,176S$	0

По данным таблицы за 2026 год составим уравнение:

$$1,1\cdot(0,88S-202)-202=0,16S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,968S-222,2-202=0,16S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,808S=424,2 \Leftrightarrow S=525.$$

Следовательно, общая сумма выплат равна

$$B=0,2S+0,19S+202+202+0,176=$$
$$=0,566S+404=0,566\cdot 525+404=701,15 \text{тыс. руб.}$$

Ответ: 701,15 тыс. руб.

100. Тип 16 № 628244

В июле 2022 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

Решение. В январе 2023 года долг будет составлять $1,15S$ млн рублей, а в июле 2023 года — $0,7S$ млн рублей. Значит, выплата в 2023 году составит $0,45S$ млн рублей.

В январе 2024 года долг будет составлять $1,15\cdot 0,7S=0,805S$ млн рублей, а в июле 2024 года — $0,4S$ млн рублей. Значит, выплата в 2024 году составит $0,405S$ млн рублей.

В январе 2025 года долг будет составлять $1{,}15 \cdot 0{,}4S = 0{,}46S$ млн рублей, а в июле 2025 года — $0{,}2S$ млн рублей. Значит, выплата в 2025 году составит $0{,}26S$ млн рублей.

В январе 2026 года долг перед банком составит $1{,}15 \cdot 0{,}2S = 0{,}23S$ млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2026 году составит $0{,}23S$ млн рублей.

Решим систему:

$$\begin{cases} 0,45S < 3, \\ 0,405S < 3, \\ 0,26S < 3, \\ 0,23S < 3 \end{cases} \Leftrightarrow S < \frac{20}{3}.$$

Наибольшее целое решение этой системы — 6.

Ответ: 6.

101. Тип 16 № 628642

Индивидуальному предпринимателю 15 марта был выдан кредит на приобретение оборудования. В таблице указан график его погашения. Текущий долг указывается в процентах:

Дата	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07	15.08	15.09
Долг	100%	80%	65%	45%	30%	20%	0%

В конце каждого месяца, начиная с марта, банк увеличивает текущий долг на 5%. После этого в первой половине последующего месяца заемщик обязан внести в банк такую сумму, чтобы оставшийся долг стал равным указанному в таблице текущему долгу на 15 число этого месяца. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Пусть K — сумма кредита. $\frac{105}{100} = \frac{21}{20}$. Процесс погашения долга выразим в следующей таблице (данные приведем в у. е.).

Платежный месяц	Долг в начале платежного месяца	Выплата	Долг к концу платежного месяца
1	$\frac{21}{20}K$	$\left(\frac{21}{20} - \frac{4}{5}\right)K = \frac{21-16}{20}K = \frac{5}{20}K = \frac{1}{4}K$	$0,8K = \frac{8}{10}K = \frac{4}{5}K$
2	$\frac{4}{5}K \cdot \frac{21}{20} = \frac{21}{25}K$	$\left(\frac{21}{25} - \frac{13}{20}\right)K = \frac{84-65}{100}K = \frac{19}{100}K$	$0,65K = \frac{65}{100}K = \frac{13}{20}K$
3	$\frac{13}{20}K \cdot \frac{21}{20} = \frac{273}{400}K$	$\left(\frac{273}{400} - \frac{9}{20}\right)K = \frac{273-180}{400}K = \frac{93}{400}K$	$0,45K = \frac{45}{100}K = \frac{9}{20}K$
4	$\frac{9}{20}K \cdot \frac{21}{20} = \frac{189}{400}K$	$\left(\frac{189}{400} - \frac{3}{10}\right)K = \frac{189-120}{400}K = \frac{69}{400}K$	$0,3K = \frac{3}{10}K$
5	$\frac{3}{10}K \cdot \frac{21}{20} = \frac{63}{200}K$	$\left(\frac{63}{200} - \frac{1}{5}\right)K = \frac{63-40}{200}K = \frac{23}{200}K$	$0,2K = \frac{2}{10}K = \frac{1}{5}K$
6	$\frac{1}{5}K \cdot \frac{21}{20} = \frac{21}{100}K$	$\frac{21}{100}K$	

Найдем общую сумму выплат:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{19}{100}+\frac{93}{400}+\frac{69}{400}+\frac{23}{200}+\frac{21}{100}\right)\cdot K=$$
$$=\frac{100+76+93+69+46+84}{400}\cdot K=\frac{468}{400}K=1,17K.$$

Разность между общей суммой выплат и суммой взятого кредита составляет $1,17K-K=0,17K$, то есть 17% от K.

Ответ: 17.

102. Тип 16 № 628752

В июле планируется взять в банке некоторую сумму в кредит на три года. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года нужно внести платёж, равный 2,662 млн рублей.

Сколько рублей было взято в банке, если известно, что долг был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение. Пусть сумма кредита составляет S млн рублей, а ежегодные выплаты составляют $x = 2,662$ млн рублей. По условию долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;$$
$$1,1S-x;$$
$$1,1^2S-(1,1x+x);$$
$$1,1^3S-(1,1^2x+1,1x+x)=0,$$

и тогда $S=\dfrac{(1,1^3-1)x}{1,1^3\cdot(1,1-1)}=\dfrac{331\cdot 2,662}{1331\cdot 0,1}=6,62$ млн рублей.

Ответ: 6620000 рублей .

103. Тип 16 № 628917

В январе 2020 года был взят кредит в банке на 6 лет. Условия его возврата таковы:
— в феврале сумма долга увеличивается на 20% по сравнению с январем;
— с марта по октябрь необходимо выплатить часть долга;
— в ноябре каждого года, с первого по четвертый, долг должен быть на одну и ту же сумму меньше, чем в январе того же года;
— в декабре четвертого года долг клиента должен равняться половине суммы, взятой в кредит;
— в ноябре пятого и шестого годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на ноябрь предыдущего года.

На какую сумму был взят кредит, если первая выплата больше последней на 8000 рублей?

Решение. Пусть начальная сумма кредита равна $8S$ тыс. руб. Заполним таблицу:

Год	Долг на февраль	Выплата	Долг на конец года
2020 (1)	$1,2\cdot 8S$	$1,2\cdot 8S-7S$	$7S$
2021 (2)	$1,2\cdot 7S$	$1,2\cdot 7S-6S$	$6S$
2022 (3)	$1,2\cdot 6S$	$1,2\cdot 6S-5S$	$5S$
2023 (4)	$1,2\cdot 5S$	$1,2\cdot 5S-4S$	$4S$
2024 (5)	$1,2\cdot 4S$	$1,2\cdot 4S-2S$	$2S$

2025 (6)	$1,2 \cdot 2S$	$1,2 \cdot 2S$	0

Первая выплата больше последней на 8000 рублей, тогда

$$1,2 \cdot 8S - 7S = 1,2 \cdot 2S + 8 \Leftrightarrow 0,2S = 8 \Leftrightarrow 8S = 320.$$

Значит, кредит был взят на сумму 320 000 рублей.

Ответ: 320 000 рублей.

104. Тип 16 № 629506

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 8 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь с 2024 по 2027 год долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— каждый январь с 2028 по 2031 год долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тысяч рублей.

Решение. Схема возврата долга дифференцированная. Основной долг заемщика перед четвертым, пятым и восьмым платежными годами составит: 500 тыс. руб., 400 тыс. руб. и 100 тыс. руб. соответственно. Переплата заемщика за период первых 4 платежных года найдем как сумму первых 4 членов арифметической прогрессии:

$$S_1 = \frac{800 \cdot 0,01r + 500 \cdot 0,01r}{2} \cdot 4 = \\ = 13r \cdot 2 = 26r \ (\text{тыс. руб.}).$$

Аналогичная сумма за последние 4 платежных года равна

$$S_2 = \frac{0,15 \cdot 400 + 0,15 \cdot 100}{2} \cdot 4 = \\ = (60 + 15) \cdot 2 = 150 \ (\text{тыс. руб.}).$$

Общая сумма выплат заемщика в тыс. рублях составит $26r + 150 + 800$, что равно 1444. Решим уравнение:

$$26r = 1444 - 950 \Leftrightarrow 26r = 494 \Leftrightarrow r = 19.$$

Ответ: 19.

105. Тип 16 № 630037

В сентябре планируется взять кредит в банке на сумму 18 миллионов рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 2,5% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по август каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в сентябре каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на сентябрь предыдущего года.

Чему равна общая сумма выплат (в млн рублей) после полного погашения кредита, если сумма наибольшей годовой выплаты и наименьшей годовой выплаты долга составит 7,74 млн руб.?

Решение. Погашение кредита происходит по дифференцированной схеме. Следовательно, заемщик ежегодно будет выплачивать в счет погашения основного долга по $\frac{18}{n}$ млн руб. Кроме того, будут переплаты банку, которые образуют конечную убывающую арифметическую прогрессию p_n, первый член которой $p_1 = 18 \cdot \dfrac{1}{40} = \dfrac{9}{20}$ (млн руб.), а последний n-й член (наименьший из всех переплат) $p_n = \dfrac{p_1}{n} = \dfrac{9}{20n}$. Таким образом, сумма наибольшей и наименьшей годовых выплат долга составит

$$\left(\frac{18}{n} + \frac{9}{20}\right) + \left(\frac{18}{n} + \frac{9}{20n}\right),$$

что по условию задачи равно 7,74.

Решим уравнение:

$$\frac{18}{n} + \frac{9}{20} + \frac{18}{n} + \frac{9}{20n} = 7,74 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{36}{n} + \frac{9}{20n} = 7,74 - \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{720+9}{20n} = 7,74 - 0,45 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{729}{20n} = 7,29 \Leftrightarrow \frac{100}{20n} = 1 \Leftrightarrow 20n = 100 \Leftrightarrow n = 5.$$

Зная количество лет, найдем сумму всех переплат заемщика. Прежде заметим, что $p_1 = \dfrac{9}{20} = 0,45$. Найдем p_5:

$$p_5 = \frac{p_1}{5} = \frac{0,45}{5} = 0,09.$$

Теперь вычислим сумму всех переплат:

$$S_p = \frac{p_1 + p_5}{2} \cdot 5 = \frac{0,45 + 0,09}{2} \cdot 5 = 0,27 \cdot 5 = 1,35 \text{(млн рублей)}$$

Общая сумма выплат составляет $18 + 1,35 = 19,35$(млн рублей).

Ответ: 19,35 млн руб.

106. Тип 16 № 630110

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 3,3 млн руб. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2027, 2028 и 2029 годах долг остаётся равен 3,3 млн руб.;
— платежи в 2030 и 2031 годах должны быть равны;
— к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите разницу между первым и последним платежами.

Решение. Пусть платеж в 2030 и 2031 годах будет равен x млн руб., а сумма кредита $S = 3,3$ млн руб. Заполним таблицу в соответствии с условием задачи:

Год	Долг в январе, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг в июле, млн руб.
2026			S
2027	$S \cdot 1,2$	$0,2S$	S
2028	$S \cdot 1,2$	$0,2S$	S
2029	$S \cdot 1,2$	$0,2S$	S
2030	$S \cdot 1,2$	x	$1,2S - x$
2031	$(1,2S - x) \cdot 1,2$	x	0

Из последней строки таблицы получаем уравнение:

$$(1,2S-x)\cdot 1,2-x=0 \Leftrightarrow 1,44S-1,2x-x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2,2x=1,44S \Leftrightarrow x=\frac{0,72S}{1,1}.$$

Первый платёж меньше последнего, значит, разница между первым и последним платежом равна

$$\frac{0,72S}{1,1}-0,2S=\frac{0,5S}{1,1}=\frac{0,5\cdot 3,3}{1,1}=1,5 \text{млн руб.}$$

Ответ: 1,5 млн рублей.

107. Тип 16 № 630122

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равны;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году составит 833,8 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2027 году?

Решение. Пусть выплата в 2027 году будет равна x тыс. рублей. Заполним таблицу в соответствии с условием задачи:

Год	**Долг в январе, тыс. руб.**	**Выплата, тыс. руб.**	**Долг в июле, тыс. руб.**
2026			800
2027	$800\cdot 1,1$	x	$880-x$
2028	$(880-x)\cdot 1,1$	x	$968-2,1x$
2029	$(968-2,1x)\cdot 1,1$	833,8	0

Из последней строки таблицы получаем уравнение:

$$(968-2,1x)\cdot 1,1-833,8=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1064,8-2,31x=833,8 \Leftrightarrow 2,31x=231 \Leftrightarrow x=100.$$

Значит, платёж в 2027 году составит 100 тыс. рублей.

Ответ: 100 тыс. рублей.

108. Тип 16 № 630129

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— платёж в 2027 и 2028 годах должен быть по 400 тыс. рублей
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

Решение. В январе 2027 года долг составит $700\cdot 1,2=840$ тыс. руб. После первого платежа долг составит $840-400=440$ тыс. руб. В январе 2028 года долг составит $440\cdot 1,2=528$ тыс. руб. После второго платежа долг составит $528-400=128$ тыс. руб. В январе 2029 года долг составит $128\cdot 1,2=153,6$ тыс. руб. Значит, третий платеж должен равняться оставшейся сумме долга, 153,6 тыс. руб. Таким образом, сумма всех платежей после полного погашения составит $400+400+153,6=953,6$ тыс. руб. или 953 600 руб.

Ответ: 953,6 тыс. руб.

109. Тип 16 № 630197

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 500 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежам часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть 200 тыс. руб.;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Сколько рублей составит платёж в 2029 году?

Решение. В январе 2027 года долг (в тыс. руб.) будет равен 600, а в июле равен 400.

В январе 2028 года долг будет равен 480, а в июле равен 280.

В январе 2029 года долг будет равен 336.

По условию, к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году будет составлять 336 тыс. руб.

Ответ: 336 тыс. руб.

110. Тип 16 № 630219

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. руб.;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 417,6 тыс. руб. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение. Пусть сумма кредита равна S тыс. руб.

В январе 2027 года долг (в тыс. руб.) будет равен 1,2S, а в июле равен $1,2S-300.$

В январе 2028 года долг будет равен $1,44S-360,$ а в июле равен $1,44S-660.$

В январе 2029 года долг будет равен $1,728S-792.$

По условию, к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году должен быть равен $(1,728S-792)$ тыс. руб. Получаем:

$$1,728S-792=417,6 \Leftrightarrow 1,728S=1209,6 \Leftrightarrow S=700.$$

Планируется взять кредит в размере 700 тыс. руб.

Ответ: 700 тыс. руб.

111. Тип 16 № 632652

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:

− каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
− платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. руб.;
− к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году будет равен 417,6 тыс. руб. Какую сумму (в тыс. руб.) планируется взять в кредит?

Решение. Пусть планируется взять в кредит S тыс. руб. Заполним таблицу:

Год	Долг в январе, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2026			S
2027	$1,2S$	300	$1,2S-300$

2028	$1,2^2S-1,2\cdot 300$	300	$1,2^2S-1,2\cdot 300-300$
2029	$1,2^3S-1,2^2\cdot 300-1,2\cdot 300$	417,6	$1,2^3S-1,2^2\cdot 300-1,2\cdot 300-417,6$

Долг в июле 2029 года будет выплачен полностью, получаем уравнение:

$$1,2^3S-1,2^2\cdot 300-1,2\cdot 300-417,6=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,2^3S-300(1,44+1,2)=417,6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,2^3S=792+417,6\Leftrightarrow 1,728S=1209,6\Leftrightarrow S=700.$$

Ответ: 700.

Приведем решение Игоря Эльмана (Москва).

Пусть планируется взять в кредит S тыс. руб. Выданный под проценты кредит можно рассматривать как размещение банком депозита на счете заемщика. При отсутствии операций величина этого депозита за три года достигнет $1{,}2^3S$ тыс. руб. Выплаты банку, в свою очередь, можно рассматривать как открытие заемщиком в банке депозитного счета. За три года с учетом пополнений на этом счете накопится $1,2^2\cdot 300+1,2\cdot 300+417,6$ тыс. руб. Поскольку долг был выплачен полностью, получаем уравнение:

$$1,2^3S=1,2^2\cdot 300+1,2\cdot 300+417,6,$$

откуда $S = 700$.

112. Тип 16 № 632831

15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

− 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

− со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

− 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Решение. Пусть планируется взять в кредит $18S$ у. е. Заполним таблицу:

Месяц (номер месяца)	**Долг на 1-е число месяца, у. е.**	**Выплата, у. е.**	**Долг на 15-е число месяца, у. е.**
Январь			$18S$
Февраль (1)	$18S\cdot 1,02$	$S+18S\cdot 0,02$	$17S$
Март (2)	$17S\cdot 1,02$	$S+17S\cdot 0,02$	$16S$
Апрель (3)	$16S\cdot 1,02$	$S+16S\cdot 0,02$	$15S$
...	...	...	...
Июнь (17)	...	...	S
Июль (18)	$S\cdot 1,02$	$S+S\cdot 0,02$	0

Найдём сумму всех выплат:

$$B=$$
$$=S+18S\cdot 0,02+S+17S\cdot 0,02+S+16S\cdot 0,02+\ldots+S+2S\cdot 0,02+S+S\cdot 0,02=$$

$$= 18S + (18 + 17 + 16 + \ldots + 2 + 1)S \cdot 0,02 =$$
$$= 18S + 19 \cdot 9S \cdot 0,02 = 18S + 19 \cdot 0,18S = 18 \cdot 1,19S.$$

Тогда общая сумма, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, в процентах от суммы кредита составляет

$$\frac{18 \cdot 1,19S \cdot 100\%}{18S} = 119\%.$$

Ответ: 119.

113. Тип 16 № 633184

Предприниматель взял в банке кредит. Банк увеличивает долг предпринимателя ежегодно на p процентов $(p < 40)$. Через год его долг увеличился на 30 тыс. руб. Предприниматель вернул часть долга так, что остался должен банку половину первоначального долга, а ещё через два года его долг составил 108 тыс. руб. Найти годовую процентную ставку, по которой банк ежегодно увеличивал долг.

Решение. Пусть сумма кредита равна S тыс. руб., а $k = 1 + \frac{p}{100}$, тогда через год долг станет равен kS тыс. руб. или $S + 30$ тыс. руб. Приравняем эти значения и выразим S:

$$kS = S + 30 \Leftrightarrow kS - S = 30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S(k-1) = 30 \Leftrightarrow S = \frac{30}{k-1}.$$

После возврата части долга, долг стал равен $\frac{S}{2}$ тыс. руб., а еще через два года $\frac{Sk^2}{2}$ тыс. руб. или 108 тыс. руб. Приравняем эти значения, подставим $S = \frac{30}{k-1}$, получим уравнение на k:

$$\frac{30k^2}{2 \cdot (k-1)} = 108 \Leftrightarrow \frac{k^2}{k-1} = 7,2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^2 - 7,2k + 7,2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1,2, \\ k = 6. \end{array}\right.$$

По условию, $p < 40$, тогда $k < 1,4$. Значит, $k = 1,2$, откуда получаем

$$1 + \frac{p}{100} = 1,2 \Leftrightarrow p = 20.$$

Ответ: 20%.

114. Тип 16 № 633393

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тысячи рублей. Какую сумму (в тыс. руб.) нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

Решение. Пусть сумма кредита равна $24S$ тыс. руб. и $k = 1 + \frac{2}{100}$. Заполним таблицу:

Номер месяца	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число, тыс. руб.

			$24S$	
1	$24kS$	$24kS-23S$	$23S$	первый год
2	$23kS$	$23kS-22S$	$22S$	
...	...	...	...	
12	$13kS$	$13kS-12S$	$12S$	
13	$12kS$	$12kS-11S$	$11S$	второй год
...	...	...	...	
24	kS	$kS-0$	0	

Из таблицы находим сумму выплат в первые 12 месяцев:

$$B_{1-12}=\underbrace{24kS-23S}_{1\text{−й месяц}}+\underbrace{23kS-22S}_{2\text{−й месяц}}+\ldots+\underbrace{13kS-12S}_{12\text{−й месяц}}=$$
$$=\frac{24kS-23S+13kS-12S}{2}\cdot 12=(37kS-35S)\cdot 6,$$

По условию, эта сумма равна 2466 тыс. руб., откуда, подставляя $k=1,02,$ получаем:

$$(37\cdot 1,02\cdot S-35S)\cdot 6=2466\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2,74S=411\Leftrightarrow S=150.$$

Сумма выплат в последние 12 месяцев равна

$$B_{13-24}=\underbrace{12kS-11S}_{13\text{−й месяц}}+\underbrace{11kS-10S}_{14\text{−й месяц}}+\ldots+\underbrace{kS-0}_{24\text{−й месяц}}=$$
$$=\frac{12kS-11S+kS-0}{2}\cdot 12=(13kS-11S)\cdot 6.$$

Подставляя $k=1,02$ и $S=150,$ находим:

$$B_{13-24}=(13\cdot 1,02\cdot 150-11\cdot 150)\cdot 6=$$
$$=2,26\cdot 150\cdot 6=226\cdot 9=2034\text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 2034.

115. Тип 16 № 634245

В июле Анна планирует взять кредит на 3 года на целое число миллионов рублей. Два банка предложили Анне оформить кредит на следующих условиях:
— в январе каждого года действия кредита долг увеличивается на некоторое число процентов (ставка плавающая — может быть разной для разных годов);
— в период с февраля по июнь каждого года действия кредита выплачиваются равные суммы, причем последний платеж должен погасить долг по кредиту полностью.

В первом банке процентная ставка по годам составляет 10, 20 и 15 процентов соответственно, а во втором — 15, 10 и 20 процентов. Анна выбрала наиболее выгодное предложение. Найдите сумму кредита (в млн рублей), если эта выгода по общим выплатам по кредиту составила от 14 до 15 тысяч рублей.

Решение. Пусть S тыс. руб. — сумма кредита, x тыс. руб. — ежегодная выплата в первом банке, а y тыс. руб. — во втором. Тогда:

$$((1,1S-x)\cdot 1,2-x)\cdot 1,15-x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,1\cdot 1,15\cdot 1,2S-3,53x=0\Leftrightarrow 1,518S=3,53x$$

и

$$((1,15S-y)\cdot 1,1-y)\cdot 1,2-y=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,1\cdot 1,15\cdot 1,2S-3,52y=0 \Leftrightarrow 1,518S=3,52y.$$

Из равенства левых частей уравнений следует равенство правых частей, откуда находим:

$$3,53x=3,52y \Rightarrow y>x.$$

Значит, более выгодным является предложение первого банка. Тогда $14 \leqslant 3y-3x \leqslant 15$ или, поскольку $y=\dfrac{3,53x}{3,52}$:

$$14 \leqslant 3\cdot\frac{3,53x}{3,52}-3x \leqslant 15 \Leftrightarrow \frac{14}{3} \leqslant \frac{0,01x}{3,52} \leqslant 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1400\cdot 3,52}{3} \leqslant x \leqslant 500\cdot 3,52 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1400\cdot 3,52\cdot 3,53}{3} \leqslant 3,53x \leqslant 500\cdot 3,52\cdot 3,53.$$

Учитывая, что $1,518S=3,53x$ получаем:

$$\frac{1400\cdot 3,52\cdot 3,53}{3} \leqslant 1,518S \leqslant 500\cdot 3,52\cdot 3,53 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1400\cdot 3,52\cdot 3,53}{3\cdot 1,518} \leqslant S \leqslant \frac{500\cdot 3,52\cdot 3,53}{1,518}.$$

Заметим, что $8<\dfrac{3,52\cdot 3,53}{1,518}<9$, тогда

$$\frac{1398\cdot 8}{3} < \frac{1400\cdot 3,52\cdot 3,53}{3\cdot 1,518} \leqslant S \leqslant \frac{500\cdot 3,52\cdot 3,53}{1,518} < 500\cdot 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1398\cdot 8}{3} < S < 500\cdot 9 \Leftrightarrow 3728 < S < 4500.$$

По условию, сумма кредита составляет целое число миллионов рублей, значит, $S=4000$, а сумма кредита равна 4 млн руб.

Ответ: 4 млн руб.

116. Тип 16 № 635088

В июне 2023 года Валерий Анатольевич планирует взять кредит на сумму 709 800 рублей на 4 года (последняя выплата запланирована в 2027 году). Условия его возврата таковы:
— в январе 2024 и 2025 годов долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— в январе 2026 и 2027 годов долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по апрель необходимо выплатить часть долга (одну и ту же сумму каждый год);
— к маю 2027 года долг должен быть полностью погашен.

Определите размер ежегодной годовой выплаты в рублях.

Решение. Пусть размер ежегодной выплаты составит x рублей, тогда можно составить уравнение:

$$(((709\,800\cdot 1,2-x)\cdot 1,2-x)\cdot 1,25-x)\cdot 1,25-x=0.$$

Переведем десятичные дроби в обыкновенные и раскроем скобки:

$$709\,800\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2x-\left(\frac{5}{4}\right)^2x-\frac{5}{4}x-x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 709\,800\cdot\frac{9}{4}-x\cdot\frac{30+25+20+16}{16}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=709\,800\cdot\frac{9\cdot16}{4\cdot91}\Leftrightarrow x=7800\cdot9\cdot4\Leftrightarrow x=280\,800.$$

Ответ: 280 800 рублей.

117. Тип 16 № 635309

В июне 2025 года Анна Михайловна планирует взять кредит в банке на 3 года. Условия его возврата таковы:
— в январе каждого года долг увеличивается на 10% от суммы долга на конец предыдущего года;
— в период с февраля по июнь каждого из 2026 и 2027 годов необходимо выплатить часть долга, причём платёж 2027 года в 1,5 раза больше платежа предыдущего года;
— в период с февраля по июнь 2028 года выплачивается оставшаяся сумма по кредиту, равная 2 679 600 рублей.

Найдите сумму кредита, если сумма всех платежей составит 9 179 600 рублей.

Решение. Пусть сумма кредита равна S руб., выплата в 2026 году равна $2x$ руб. Заполним таблицу:

Год	Долг на январь, руб.	Выплата (фев - июн), руб.	Долг на декабрь, руб.
2025			S
2026	$1,1S$	$2x$	$1,1S-2x$
2027	$1,1\cdot(1,1S-2x)$	$2x\cdot1,5=3x$	$1,1\cdot(1,1S-2x)-3x$
2028	$1,1\cdot(1,1\cdot(1,1S-2x)-3x)$	2 679 600	0

По условию сумма всех платежей составит 9 179 600 рублей:

$$2x+3x+2\,679\,600=9\,179\,600\Leftrightarrow x=1\,300\,000.$$

Выразим величину кредита из уравнения:

$$1,1\cdot(1,1\cdot(1,1S-2x)-3x)-2\,679\,600=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,331S-5,72x=2\,679\,600\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,331S=2\,679\,600+5,72x\Leftrightarrow S=\frac{2\,679\,600+5,72x}{1,331}.$$

Подставим значение x, найденное ранее:

$$S=\frac{2\,679\,600+5,72\cdot1\,300\,000}{1,331}=7\,600\,000\text{руб.}$$

Ответ: 7 600 000 рублей.

118. Тип 16 № 635753 *i*

В июле 2023 года Иван Морозов планирует взять кредит на 8 лет в размере 800 000 рублей. Условия возврата таковы:
— каждый январь с 2024 по 2027 год долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— каждый январь с 2028 по 2031 год долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Определите r, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тыс. рублей.

Решение. Заполним таблицу в соответствии с условием задачи:

Год	Долг на январь, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на июль, тыс. руб.
2023			800
2024	$(1+0,01r)\cdot 800$	$100+0,01r\cdot 800$	700
2025	$(1+0,01r)\cdot 700$	$100+0,01r\cdot 700$	600
2026	$(1+0,01r)\cdot 600$	$100+0,01r\cdot 600$	500
2027	$(1+0,01r)\cdot 500$	$100+0,01r\cdot 500$	400
2028	$1,15\cdot 400$	$100+0,15\cdot 400$	300
2029	$1,15\cdot 300$	$100+0,15\cdot 300$	200
2030	$1,15\cdot 200$	$100+0,15\cdot 200$	100
2031	$1,15\cdot 100$	$100+0,15\cdot 100$	0

Найдём сумму выплат S:

$$S = 100\cdot 8 + r\cdot(8+7+6+5) + 15\cdot(4+3+2+1) = \\ = 950 + 26r \text{ тыс. руб.}$$

По условию сумма выплат равна 1444 тыс. руб., тогда

$$950 + 26r = 1444 \Leftrightarrow 26r = 494 \Leftrightarrow r = 19.$$

Ответ: 19.

119. Тип 16 № 636518 *i*

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 700 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа n-го месяца долг составит 300 тысяч рублей;
— к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 755 тысяч рублей.

Решение. За n месяцев долг должен равномерно уменьшиться с 700 тыс. руб. до 300 тыс. руб., т. е. на 400 тыс. руб. Значит, ежемесячно долг уменьшался на $x = \frac{400}{n}$ тыс. руб. Заполним таблицу.

Номер месяца	Долг на 1 число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15 число месяца, тыс. руб.
			700
1	$700\cdot 1,01$	$700\cdot 1,01-(700-x)$	$700-x$
2	$(700-x)\cdot 1,01$	$(700-x)\cdot 1,01-(700-2x)$	$700-2x$
...	...	...	...
$n-1$	$(300+2x)\cdot 1,01$	$(300+2x)\cdot 1,01-(300+x)$	$300+x$
n	$(300+x)\cdot 1,01$	$(300+x)\cdot 1,01-300$	300
$n+1$	$300\cdot 1,01$	$300\cdot 1,01-0$	0

Выплаты за первые n месяцев представляют собой арифметическую прогрессию. Найдём ее сумму:

$$S_n=\frac{700\cdot 1,01-(700-x)+(300+x)\cdot 1,01-300}{2}\cdot n=$$
$$=\frac{7+x+3+1,01x}{2}\cdot n=(5+1,005x)\cdot n.$$

С другой стороны, эта сумма равна $755-300\cdot 1,01=452$ тыс. руб. Учитывая, что $x=\frac{400}{n}$, получаем:

$$\left(5+1,005\cdot\frac{400}{n}\right)\cdot n=452\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5n+402=452\Leftrightarrow n=10.$$

Ответ: 10.

120. Тип 16 № 637087

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на 6 лет в размере S тысяч рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо одним платежом выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Дата	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в тыс. руб.)	S	0,9S	0,8S	0,7S	0,6S	0,5S	0

Найдите, на сколько процентов общая сумма платежей после полного погашения кредита превысит сумму взятого кредита.

Решение. Переплата по кредиту представляет собой сумму всех начисленных процентов и равна

$$S\cdot 0,16+0,9S\cdot 0,16+0,8S\cdot 0,16+0,7S\cdot 0,16+0,6S\cdot 0,16+0,5S\cdot 0,16=$$
$$=(1+0,9+0,8+0,7+0,6+0,5)S\cdot 0,16=0,72S.$$

Значит, общая сумма платежей после полного погашения кредита превысит сумму взятого кредита на 72%.

Ответ: 72.

121. Тип 16 № 638315

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— с 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 24-й долг должен быть на 45 тыс. руб. меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 25-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма платежей после полного его погашения составит 1830 тыс. руб.?

Решение. Пусть сумма кредита равна S тыс. руб., $x=45$ тыс. руб. и $k=1+\frac{2\%}{100\%}=1,02.$ Заполним таблицу.

Номер месяца	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
			S
1	kS	$kS-(S-x)$	$S-x$
2	$k(S-x)$	$k(S-x)-(S-2x)$	$S-2x$
3	$k(S-2x)$	$k(S-2x)-(S-3x)$	$S-3x$
...	...	...	...
24	$k(S-23x)$	$k(S-23x)-(S-24x)$	$S-24x$
25	$k(S-24x)$	$k(S-24x)$	0

Первые 24 выплаты представляют собой арифметическую прогрессию. Прибавив к сумме членов арифметической прогрессии 25-ю выплату, найдём общую сумму выплат:

$$B=$$
$$=\frac{kS-(S-x)+k(S-23x)-(S-24x)}{2}\cdot 24+k(S-24x)=$$
$$=25kS-24S+300x-300kx.$$

По условию сумма выплат составит 1830 тыс. руб. Составим и решим уравнение:

$$25\cdot 1,02\cdot S-24S+300\cdot 45-300\cdot 1,02\cdot 45=1830\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,5S-270=1830\Leftrightarrow S=1400.$$

Таким образом, в кредит планируется взять 1400 тыс. руб.

Ответ: 1 миллион 400 тысяч рублей.

122. Тип 16 № 638594

15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 900 тысяч рублей на 21 месяц. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг (в тыс. руб.) будет 15 числа 20-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1215 тыс. руб.?

Решение. Пусть долг ежемесячно уменьшается на x тыс. руб. Обозначим сумму кредита S (тыс. руб.) и положим

$$k = 1 + \frac{3\%}{100\%} = 1,03.$$

Заполним таблицу.

Номер месяца	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
			$900 = S$
1	kS	$kS-(S-x)$	$S-x$
2	$k(S-x)$	$k(S-x)-(S-2x)$	$S-2x$
...	...	...	...
19	$k(S-18x)$	$k(S-18x)-(S-19x)$	$S-19x$
20	$k(S-19x)$	$k(S-19x)-(S-20x)$	$S-20x$
21	$k(S-20x)$	$k(S-20x)$	0

Первые 20 выплат представляют собой арифметическую прогрессию, найдём ее сумму:

$$B = \\ = \frac{kS-(S-x)+k(S-19x)-(S-20x)}{2}\cdot 20 + k(S-20x) = \\ = 21kS - 20S + 210x - 210kx.$$

По условию $S = 900$, а сумма выплат составит 1215 тыс. руб. Составим и решим уравнение:

$$21\cdot 1,03\cdot 900 - 20\cdot 900 + 210x - 210\cdot 1,03\cdot x = 1215 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1467 - 6,3x = 1215 \Leftrightarrow 6,3x = 252 \Leftrightarrow x = 40.$$

Тогда долг на 15-е число 20-го месяца составит

$$900 - 20\cdot 40 = 100 \text{тыс. руб.}$$

Ответ: 100 тыс. руб.

123. Тип 16 № 639771

В сентябре 2025-го года планируется взять кредит на 5 лет в размере 315 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по август необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в сентябре 2026, 2027 и 2028 года долг остается равным 315 тыс. руб.;
— выплаты в 2029 и 2030-м году равны;
— к сентябрю 2030-го года долг должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общий размер выплат по погашению долга составит 457,5 тыс. руб.

Решение. Банк начисляет r процентов, то есть умножает остаток долга на $k = 1 + \frac{r}{100}$. Пусть четвертый и пятый платежи составляли x тыс. руб. Заполним таблицу.

Год	Долг в январе, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в сентябре, тыс. руб.
2025			315
2026	$315k$	$315k-315$	315
2027	$315k$	$315k-315$	315

2028	$315k$	$315k-315$	315
2029	$315k$	x	$315k-x$
2030	$(315k-x)k$	x	$(315k-x)k-x=0$

Из равенства $(315k-x)k-x=0$ получаем, что $x=\dfrac{315k^2}{1+k}$. По условию сумма выплат составит 457,5 тыс. руб., откуда имеем:

$$3(315k-315)+2\cdot\frac{315k^2}{1+k}=457,5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{630k^2}{1+k}=1402,5-945k\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1260k^2=(1+k)(2805-1890k)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 84k^2=(1+k)(187-126k)\Leftrightarrow 210k^2-61k-187=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-\dfrac{17}{21},\\ k=\dfrac{11}{10}\end{array}\right.\underset{k>0}{\Leftrightarrow}k=1,1.$$

Тогда $r=10$.

Ответ: 10.

124. Тип 16 № 639870

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 22% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (в млн рублей)	S	$0,6S$	$0,3S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждый платеж будет меньше 6 млн рублей.

Решение. В январе 2024 года долг будет составлять $1,22S$ млн рублей, а в июле 2024 года — $0,6S$ млн рублей. Значит, платёж в 2024 году составит $0,62S$ млн рублей.

В январе 2025 года долг будет составлять $1,22\cdot 0,6S=0,732S$ млн рублей, а в июле 2025 года — $0,3S$ млн рублей. Значит, платёж в 2025 году составит $0,432S$ млн рублей.

В январе 2026 года долг перед банком составит $1,22\cdot 0,3S=0,366S$ млн рублей, а в июле — 0 рублей. Значит, платёж в 2026 году составит $0,366S$ млн рублей.

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases}0,62S<6,\\ 0,432S<6,\\ 0,366S<6\end{cases}\Leftrightarrow S<\frac{300}{31}=9\frac{21}{31}.$$

Наибольшее целое решение этой системы неравенств — 9.

Ответ: 9 млн рублей.

125. Тип 16 № 640577

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на 6 лет в размере S млн рублей. Условия возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо одним платежом выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Дата	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите, на сколько процентов общая сумма платежей после полного погашения кредита превысит сумму взятого кредита.

Решение. Общая сумма выплат будет состоять из основной суммы долга S и начисляемых процентов. Значит, сумма выплат будет равна

$$B =$$
$$= S + 0,16 \cdot S + 0,16 \cdot 0,9S + 0,16 \cdot 0,8S + 0,16 \cdot 0,7S + 0,16 \cdot 0,6S + 0,16 \cdot 0,5S =$$
$$= S(1 + 0,16(1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5)) =$$
$$= S(1 + 0,16 \cdot 4,5) = 1,72S,$$

что на 72 % превысит сумму кредита.

Ответ: 72.

126. Тип 16 № 642337

В июле 2023 года планируется взять кредит на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь с 2024 по 2028 год долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
— каждый январь с 2029 по 2033 год долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2033 года долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1470 тысяч рублей?

Решение. Пусть S тысяч рублей — сумма кредита. Так как сумма ежегодно должна уменьшаться на одну и ту же величину, то каждый год она уменьшается на $\frac{S}{10}$ тысяч рублей. Каждая выплата состоит из суммы, на которую уменьшается долг, и суммы начисленных процентов. Составим таблицу.

Год	Начисленный процент в январе (тыс. руб.)	Выплата (тыс. руб.)	Сумма долга в июле (тыс. руб.)
2023			S
2024	$0,18 \cdot S$	$\frac{S}{10} + 0,18 \cdot S$	$\frac{9S}{10}$
2025	$0,18 \cdot \frac{9S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,18 \cdot \frac{9S}{10}$	$\frac{8S}{10}$
2026	$0,18 \cdot \frac{8S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,18 \cdot \frac{8S}{10}$	$\frac{7S}{10}$

2027	$0,18\cdot\dfrac{7S}{10}$	$\dfrac{S}{10}+0,18\cdot\dfrac{7S}{10}$	$\dfrac{6S}{10}$
2028	$0,18\cdot\dfrac{6S}{10}$	$\dfrac{S}{10}+0,18\cdot\dfrac{6S}{10}$	$\dfrac{5S}{10}$
2029	$0,16\cdot\dfrac{5S}{10}$	$\dfrac{S}{10}+0,16\cdot\dfrac{5S}{10}$	$\dfrac{4S}{10}$
2030	$0,16\cdot\dfrac{4S}{10}$	$\dfrac{S}{10}+0,16\cdot\dfrac{4S}{10}$	$\dfrac{3S}{10}$
2031	$0,16\cdot\dfrac{3S}{10}$	$\dfrac{S}{10}+0,16\cdot\dfrac{3S}{10}$	$\dfrac{2S}{10}$
2032	$0,16\cdot\dfrac{2S}{10}$	$\dfrac{S}{10}+0,16\cdot\dfrac{2S}{10}$	$\dfrac{S}{10}$
2033	$0,16\cdot\dfrac{S}{10}$	$\dfrac{S}{10}+0,16\cdot\dfrac{S}{10}$	0

Общая сумма выплат состоит из суммы кредита (Sтысяч рублей) и суммы начисленных процентов за каждый год и по условию равна 1470 тысяч рублей:

$$S+0,18\cdot S\cdot\left(1+\frac{9}{10}+\frac{8}{10}+\frac{7}{10}+\frac{6}{10}\right)+0,16\cdot S\cdot\left(\frac{5}{10}+\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\right)=$$
$$=S+0,18\cdot S\cdot\frac{16}{10}\cdot\frac{5}{2}+0,16\cdot S\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{2}=$$
$$=S+0,72S+0,24S=1,96S=1470,$$

следовательно,

$$S=\frac{1470}{1,96}=750\text{ тысяч рублей.}$$

Ответ: 750 тысяч рублей.

127. Тип 16 № 642376

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2030 года долг должен составлять 800 тыс. руб.;
— в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;

Найдите начальную сумму кредита, если сумма выплат по кредиту равна 2090 тысяч рублей.

Решение. Пусть Sтысяч рублей — сумма кредита. Так как сумма ежегодно должна уменьшаться на одну и ту же величину, то каждый год она уменьшается на $\dfrac{(S-800)}{5}$ тысяч рублей в первые 5 лет и на 160 тысяч рублей в последние 5 лет. Каждая выплата состоит из суммы, на которую уменьшается долг, и суммы начисленных процентов. Составим таблицу.

Год	Начисленный процент в январе (тыс. руб.)	Выплата (тыс. руб.)	Сумма долга в июле (тыс. руб.)

2025			S
2026	$0,1\cdot S$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot S$	$800+4\cdot\frac{(S-800)}{5}$
2027	$0,1\cdot\left(800+4\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot\left(800+4\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$800+3\cdot\frac{(S-800)}{5}$
2028	$0,1\cdot\left(800+3\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot\left(800+3\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$800+2\cdot\frac{(S-800)}{5}$
2029	$0,1\cdot\left(800+2\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot\left(800+2\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	$800+\frac{(S-800)}{5}$
2030	$0,1\cdot\left(800+\frac{(S-800)}{5}\right)$	$\frac{(S-800)}{5}+0,1\cdot\left(800+\cdot\frac{(S-800)}{5}\right)$	800
2031	$0,1\cdot 800$	$160+80$	640
2032	$0,1\cdot 640$	$160+64$	480
2033	$0,1\cdot 480$	$160+48$	320
2034	$0,1\cdot 320$	$160+32$	160
2035	$0,1\cdot 160$	$160+16$	0

Общая сумма выплат состоит из суммы кредита (S тысяч рублей) и суммы начисленных процентов за каждый год и по условию равна 2090 тысяч рублей:

$$S+0,1\cdot\left(S+800\cdot 4+\frac{(S-800)}{5}\cdot(4+3+2+1)\right)+80+64+48+32+16=$$
$$=S+0,1\cdot(S+3200+(S-800)\cdot 2)+240=$$
$$=S+0,1\cdot(3S+1600)+240=$$
$$=S+0,3S+160+240=1,3S+400=2090,$$

откуда $1,3S=1690.$ Таким образом, находим: $S=\frac{1690}{1,3}=1300$ тысяч рублей.

Ответ: 1300 тысяч рублей.

128. Тип 16 № 642734

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года (r — целое число);
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2030 года долг должен составлять 200 тыс. руб.;
— в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите r, если общая сумма выплат по кредиту составила 1480 тыс. руб.

Решение. Обозначим для удобства изначальную сумму кредита за $S=800$ тыс. руб. Пусть x — постоянная сумма на которую уменьшается долг каждый июль с 2026 по 2030 год, а y — с 2031 по 2035 года. Тогда суммы долга в июле по годам с 2025 по 2035 составят:

$$S,\quad S-x,\quad S-2x,\quad S-3x,\quad S-4x,\quad S-5x=200,\quad S-5x-y,\quad S-5x-2y,$$
$$S-5x-3y, S-5x-4y, S-5x-5y=0.$$

Из равенства за 2030 год следует, что $x=120$ тыс. руб., а из последнего равенства следует, что $x+y=160$ тыс. руб. откуда $y=40$ тыс. руб.

Пусть $k=\dfrac{r\%}{100\%}$, тогда проценты, начисленные с 2026 по 2035 год, составят:

$$kS,\quad k(S-x),\quad k(S-2x),\quad k(S-3x),\quad k(S-4x),\quad k(S-5x),\quad k(S-5x-y),$$
$$k(S-5x-2y), k(S-5x-3y), k(S-5x-4y),$$

а выплаты в соответствующие годы будут:

$$kS+x, k(S-x)+x, k(S-2x)+x, k(S-3x)+x, k(S-4x)+x, k(S-5x)+y,$$
$$k(S-5x-y)+y, k(S-5x-2y)+y, k(S-5x-3y)+y, k(S-5x-4y)+y.$$

Тогда сумма выплат является суммой двух различных арифметических прогрессий по пять членов в каждой, она равна:

$$\frac{kS+x+k(S-4x)+x}{2}\cdot 5+\frac{k(S-5x)+y+k(S-5x-4y)+y}{2}\cdot 5=1480 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10kS+5x-35kx+5y-10yk=1480 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8000k+600-4200k+200-400k=1480 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3400k=680 \Leftrightarrow k=0,2 \Leftrightarrow r=20.$$

Ответ: 20.

129. Тип 16 № 642744

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата тановы:
— в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
— в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года кредит должен быть погашен полностью.
Найти общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение. Так как сумма ежегодно должна уменьшаться на одну и ту же величину, то каждый год она уменьшается на 70 тысяч рублей.

Каждая выплата состоит из суммы, на которую уменьшается долг, и суммы начисленных процентов.

Год	Начисленный процент в январе (тыс. руб.)	Выплата (тыс. руб.)	Сумма долга в июле (тыс. руб.)
2025			700
2026	$0,19\cdot 700$	$70+0,19\cdot 700$	630
2027	$0,19\cdot 630$	$70+0,19\cdot 630$	560
2028	$0,19\cdot 560$	$70+0,19\cdot 560$	490
2029	$0,19\cdot 490$	$70+0,19\cdot 490$	420
2030	$0,19\cdot 420$	$70+0,19\cdot 420$	350
2031	$0,16\cdot 350$	$70+0,16\cdot 350$	280
2032	$0,16\cdot 280$	$70+0,16\cdot 280$	210

2033	$0,16\cdot 210$	$70+0,16\cdot 210$	140
2034	$0,16\cdot 140$	$70+0,16\cdot 140$	70
2035	$0,16\cdot 70$	$70+0,16\cdot 70$	0

Общая сумма выплат состоит из суммы кредита (700 тысяч рублей) и суммы начисленных процентов за каждый год:

$$700+0,19\cdot(700+630+560+490+420)+0,16\cdot(350+280+210+140+70)=$$
$$=700+0,19\cdot(700+420)\cdot 5/2+0,16\cdot(350+70)\cdot\frac{5}{2}=$$
$$=700+0,19\cdot 2800+0,16\cdot 1050=$$
$$=700+532+168=1400\text{ тысяч рублей.}$$

Ответ: 1400 тысяч рублей.

130. Тип 16 № 642751

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1400 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
— в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года долг должен быть полностью погашен.

Найдите платёж в 2026 году, если общая сумма выплат по кредиту составила 2120 тыс. рублей.

Решение. Обозначим для удобства изначальную сумму кредита за $S=1400$ тыс. руб. Пусть x тыс. руб. — постоянная сумма на которую уменьшается долг каждый июль с 2026 по 2030 год, а y тыс. руб. — с 2031 по 2035 года. Тогда суммы долга в июле по годам с 2025 по 2035 составят:

$$S,\ S-x,\ S-2x,\ S-3x,\ S-4x,\ S-5x,\ S-5x-y,\ S-5x-2y,\ S-5x-3y,$$
$$S-5x-4y, S-5x-5y=0.$$

Из последнего равенства следует, что $x+y=280$, откуда $y=280-x$.

Пусть $k=0{,}1$, тогда проценты начисленные с 2026 по 2035 год составят:

$$kS,\quad k(S-x),\quad k(S-2x),\quad k(S-3x),\quad k(S-4x),\quad k(S-5x),\quad k(S-5x-y),$$
$$k(S-5x-2y), k(S-5x-3y), k(S-5x-4y),$$

а выплаты в соответствующие годы будут:

$$kS+x, k(S-x)+x, k(S-2x)+x, k(S-3x)+x, k(S-4x)+x, k(S-5x)+y,$$
$$k(S-5x-y)+y, k(S-5x-2y)+y, k(S-5x-3y)+y, k(S-5x-4y)+y.$$

Тогда сумма выплат является суммой двух различных арифметических прогрессий по пять членов в каждой и составит:

$$\frac{kS+x+k(S-4x)+x}{2}\cdot 5+\frac{k(S-5x)+y+k(S-5x-4y)+y}{2}\cdot 5=2120\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10kS+5x-35kx+5y-10yk=2120\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1400+5x-3,5x+5y-y=2120\Leftrightarrow 1,5x+4y=720\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,5x+4(280-x)=720\Leftrightarrow x=160.$$

Тогда выплата за 2026 год составит: $kS+x=300$ тыс. руб.

Ответ: 300 тыс. руб.

131. Тип 16 № 642781

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 800 тыс. руб. на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
— в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
— к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен.

Известно, что сумма выплат по кредиту составит 1970 тыс. руб. Найдите, сколько рублей составит долг в июле 2030 года.

Решение. Пусть долг в июле 2030 года составит $5S$ тыс. рублей, тогда в первые пять лет долг должен уменьшаться на $\frac{800-5S}{5}=160-S$ тыс. рублей, а в следующие пять лет — на S тыс. рублей. Составим таблицу.

Год	Долг в январе (после начисления процентов) тыс. руб.	Выплата тыс. руб.	Долг в июле тыс. руб.
2025			800
2026	$1,3\cdot 800$	$1,3\cdot 800-(640+S)$	$640+S$
2027	$1,3(640+S)$	$1,3\cdot(640+S)-(480+2S)$	$480+2S$
2028	$1,3(480+2S)$	$1,3\cdot(480+2S)-(320+3S)$	$320+3S$
2029	$1,3(320+3S)$	$1,3(320+3S)-(160+4S)$	$160+4S$
2030	$1,3(160+4S)$	$1,3(160+4S)-5S$	$5S$
2031	$1,3\cdot 5S$	$1,3\cdot 5S-4S$	$4S$
...	...	...	...
2034	$1,3\cdot 2S$	$1,3\cdot 2S-S$	S
2035	$1,3\cdot S$	$1,3\cdot S-0$	0

Выплаты в первые пять лет представляют собой арифметическую прогрессию, найдём их сумму

$$B_{2026-2030}=$$

$$=\underbrace{1,3\cdot 800-(640+S)}_{1\text{–я выплата}}+\underbrace{1,3\cdot(640+S)-(480+2S)}_{2\text{–я выплата}}+\underbrace{1,3\cdot(480+2S)-(320+3S)}_{3\text{–я выплата}}+\underbrace{1,3(320+3S)-(160+4S)}_{4\text{–я выплата}}+$$

$$=\frac{1,3\cdot 800-(640+S)+1,3(160+4S)-5S}{2}\cdot 5=$$

$$=\frac{608-0,8S}{2}\cdot 5=(304-0,4S)\cdot 5=1520-2S.$$

Выплаты в последние пять лет также представляют собой арифметическую прогрессию, найдём их сумму

$$B_{2031-2035}=$$

$$=\underbrace{1,3\cdot 5S-4S}_{6\text{–я выплата}}+\ldots+\underbrace{1,3\cdot 2S-S}_{9\text{–я выплата}}+\underbrace{1,3\cdot S}_{10\text{–я выплата}}=$$

$$= \frac{1,3 \cdot 5S - 4S + 1,3 \cdot S}{2} \cdot 5 = \frac{3,8S}{2} \cdot 5 = 9,5S.$$

Сумма всех выплат по условию равна 1970 тыс. руб., тогда

$$1520 - 2S + 9,5S = 1970 \Leftrightarrow 7,5S = 450 \Leftrightarrow 5S = 300.$$

Таким образом, долг в июле 2030 года составит 300 тыс. рублей.

Ответ: 300 000.

132. Тип 16 № 642955

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 700 тыс. руб. на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (r — целое число);
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого из годов 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
— в июле 2030 года долг должен составлять 600 тыс. руб.;
— в июле каждого из годов 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше по сравнению с июлем предыдущего года;
— к июлю 2035 года кредит должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма выплат по кредиту составит 2230 тыс. руб. Найдите, сколько рублей составит платёж в 2035 году.

Решение. Поскольку сумма ежегодно должна уменьшаться на одну и ту же величину, то в первые 5 лет она каждый год уменьшается на $\frac{700-600}{5} = 20$ тысяч рублей и в последние 5 лет на $\frac{600}{5} = 120$ тысяч рублей. Каждая выплата состоит из суммы, на которую уменьшается долг, и суммы начисленных процентов. Составим таблицу.

Год	Начисленный процент в январе (тыс. руб.)	Выплата (тыс. руб.)	Сумма долга в июле (тыс. руб.)
2025			700
2026	$\frac{r}{100} \cdot 700$	$20 + 7r$	680
2027	$\frac{r}{100} \cdot 680$	$20 + 6,8r$	660
2028	$\frac{r}{100} \cdot 660$	$20 + 6,6r$	640
2029	$\frac{r}{100} \cdot 640$	$20 + 6,4r$	620
2030	$\frac{r}{100} \cdot 620$	$20 + 6,2r$	600
2031	$\frac{r}{100} \cdot 600$	$120 + 6r$	480
2032	$\frac{r}{100} \cdot 480$	$120 + 4,8r$	360
2033	$\frac{r}{100} \cdot 360$	$120 + 3,6r$	240

2034	$\frac{r}{100}\cdot 240$	$120+2,4r$	120
2035	$\frac{r}{100}\cdot 120$	$120+1,2r$	0

Найдём общую сумму выплат по кредиту

$$5\cdot 20+120\cdot 5+ \\ +(7+6,8+6,6+6,4+6,2+6+4,8+3,6+2,4+1,2)r=700+ \\ +51r,$$

по условию она равна 2230 тыс. руб., откуда

$$700+51r=2230\Leftrightarrow 51r=1530\Leftrightarrow r=30.$$

Найдём, сколько рублей составит платёж в 2035 году:

$$120+1,2\cdot 30=156\text{тыс. руб.}$$

Ответ: 156 000.

133. Тип 16 № 643163

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029	Июль 2030
Долг (в млн руб.)	S	0,7S	0,4S	0,2S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу.

Год	Долг в январе после начисления процентов, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг в июле до начисления процентов, млн руб.
2026			S
2027	1,2S	0,5S	0,7S
2028	0,84S	0,44S	0,4S
2029	0,48S	0,28S	0,2S
2030	0,24S	0,24S	0

Общая сумма выплат составит

$$0,5S+0,44S+0,28S+0,24S=1,46S \text{ млн рублей.}$$

Общая сумма выплат будет больше 10 млн руб., если

$$1,46S>10\Leftrightarrow S>\frac{1000}{146}\Leftrightarrow S>6\frac{124}{146}.$$

Наименьшее целое S, удовлетворяющее неравенству, равно 7.

Ответ: 7.

134. Тип 16 № 645666

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1500 тысяч рублей. Условия его возврата таковы
— каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2300 тысяч рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

Решение. Пусть долг в июле 2030 года составит $5S$ тыс. руб., тогда в первые пять лет долг должен уменьшаться на $\dfrac{1500-5S}{5}=300-S$ тыс. руб., а в следующие пять лет — на S тыс. руб. Составим таблицу.

Год	Долг в январе (после начисления процентов), тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2025			1500
2026	$1,1\cdot 1500$	$1,1\cdot 1500-(1200+S)$	$1200+S$
2027	$1,1(1200+S)$	$1,1\cdot(1200+S)-(900+2S)$	$900+2S$
2028	$1,1(900+2S)$	$1,1\cdot(900+2S)-(600+3S)$	$600+3S$
2029	$1,1(600+3S)$	$1,1(600+3S)-(300+4S)$	$300+4S$
2030	$1,1(300+4S)$	$1,1(300+4S)-5S$	$5S$
2031	$1,1\cdot 5S$	$1,1\cdot 5S-4S$	$4S$
...	...	...	...
2034	$1,1\cdot 2S$	$1,1\cdot 2S-S$	S
2035	$1,1\cdot S$	$1,1\cdot S-0$	0

Выплаты в первые пять лет представляют собой арифметическую прогрессию, найдём их сумму

$$B_{2026-2030}=$$

$$=\underbrace{1,1\cdot 1500-(1200+S)}_{1-\text{я выплата}}+\underbrace{1,1\cdot(1200+S)-(900+2S)}_{2-\text{я выплата}}+\underbrace{1,1\cdot(900+2S)-(600+3S)}_{3-\text{я выплата}}+\underbrace{1,1(600+3S)-(300+4.}_{4-\text{я выплата}}$$

$$=\frac{1,1\cdot 1500-(1200+S)+1,1(300+4S)-5S}{2}\cdot 5=$$

$$=\frac{780-1,6S}{2}\cdot 5=(390-0,8S)\cdot 5=1950-4S.$$

Выплаты в последние пять лет также представляют собой арифметическую прогрессию, найдём их сумму

$$B_{2031-2035}=$$

$$=\underbrace{1,1\cdot 5S-4S}_{6-\text{я выплата}}+\ldots+\underbrace{1,1\cdot 2S-S}_{9-\text{я выплата}}+\underbrace{1,1\cdot S}_{10-\text{я выплата}}=$$

$$= \frac{1,1 \cdot 5S - 4S + 1,1 \cdot S}{2} \cdot 5 = \frac{2,6S}{2} \cdot 5 = 6,5S.$$

Сумма всех выплат по условию равна 2300 тыс. руб., тогда

$$1950 - 4S + 6,5S = 2300 \Leftrightarrow 2,5S = 350 \Leftrightarrow 5S = 700.$$

Таким образом, долг в июле 2030 года составит 700 тыс. руб.

Ответ: 700000.

135. Тип 16 № 646084

15 декабря планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 48 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга,
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 24-й долг должен быть на 100 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
— 15-го числа каждого месяца с 25-го по 48-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
— к 15-му числу 48-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение. Всего планируется взять в кредит $S = 50 \cdot 24 + 100 \cdot 24 = 3600$ тыс. руб. Пусть $k = 1 + \frac{1\%}{100\%} = 1,01.$ Заполним таблицу:

Номер месяца	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
			S
1	kS	$kS - S + 100$	$S - 100$
2	$k(S-100)$	$k(S-100) - S + 200$	$S - 200$
3	$k(S-200)$	$k(S-200) - S + 300$	$S - 300$
...	...	...	...
24	$k(S-2300)$	$k(S-2300) - S + 2400$	$S - 2400$
25	$k(S-2400)$	$k(S-2400) - S + 2450$	$S - 2450$
26	$k(S-2450)$	$k(S-2450) - S + 2500$	$S - 2500$
27	$k(S-2500)$	$k(S-2500) - S + 2550$	$S - 2550$
...	...	...	...
48	$k \cdot 50$	$k \cdot 50$	0

Заметим, что выплаты в первые 24 месяца составляют арифметическую прогрессию, выплаты в последние 24 месяца тоже составляют арифметическую прогрессию. Тогда сумма всех выплат равна

$$B = \frac{B_1 + B_{24}}{2} \cdot 24 + \frac{B_{25} + B_{48}}{2} \cdot 24 =$$
$$= (B_1 + B_{24} + B_{25} + B_{48}) \cdot 12 =$$

$$= (\underbrace{kS - S + 100}_{B_1} + \underbrace{k(S-2300) - S + 2400}_{B_{24}} + \underbrace{k(S-2400) - S + 2450}_{B_{25}} + \underbrace{k \cdot 50}_{B_{48}}) \cdot 12 =$$

$$= (3kS - 3S - 4650k + 4950) \cdot 12 =$$
$$= (3S(k-1) - 4650(k-1) + 300) \cdot 12 =$$
$$= (3 \cdot 3600 \cdot 0,01 - 4650 \cdot 0,01 + 300) \cdot 12 =$$
$$= (108 - 46,5 + 300) \cdot 12 = 4338 \text{тыс. руб.}$$

Ответ: 4 млн 338 тыс. руб.

136. Тип 16 № 646760

Юрий Владимирович взял кредит в банке на 12 лет под 16% годовых. Условия возврата таковы: за первый год пользования кредитом он выплачивает $\frac{1}{12}$ часть тела кредита, за второй год — $\frac{1}{11}$ часть оставшегося тела кредита, за третий год — $\frac{1}{10}$ часть нового остатка тела кредита и т. д., за 12-й год выплачивает оставшуюся часть тела кредита.

Проценты за пользование кредитом выплачиваются в конце каждого года пользования кредитом солидарно с предприятием - работодателем Юрия Владимировича. При этом предприятие выплачивает четверть процентной ставки, а остальную часть процентной ставки выплачивает заемщик.

Какую сумму в тысячах рублей должен будет заплатить Юрий Владимирович за пятый год пользования кредитом вместе с долей процентной ставки (без доли предприятия), если общая сумма затрат предприятия составляет 624 тысячи рублей?

Решение. Пусть сумма кредита равна $12S$ тыс. рублей, тогда каждый год тело кредита должно уменьшаться на S тыс. рублей. Заполним таблицу:

Номер года	Выплата предприятия, тыс. руб.	Выплата заемщиком процентов, тыс. руб.	Выплата заемщиком тела кредита, тыс. руб.	Долг на конец года, тыс. руб.
1	$12S \cdot 0,04$	$12S \cdot 0,12$	S	$11S$
2	$11S \cdot 0,04$	$11S \cdot 0,12$	S	$10S$
...	...	...	...	...
5	$8S \cdot 0,04$	$8S \cdot 0,12$	S	$7S$
...	...	...	...	...
12	$S \cdot 0,04$	$S \cdot 0,12$	S	0

Выплаты предприятия составляют арифметическую прогрессию, сумма которой равна

$$B = \frac{12S \cdot 0,04 + S \cdot 0,04}{2} \cdot 12 = 0,04 \cdot 13S \cdot 6 \text{тыс. руб.}$$

По условию эта сумма равна 624 тыс. руб., откуда находим:

$$0,04 \cdot 13S \cdot 6 = 624 \Leftrightarrow 0,04 \cdot 13S = 104 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,01 \cdot 13S = 26 \Leftrightarrow 0,01S = 2 \Leftrightarrow S = 200.$$

Значит, за пятый год пользования кредитом Юрий Владимирович должен будет заплатить

$$8 \cdot 200 \cdot 0,12 + 200 = 392 \text{тыс. руб.}$$

Ответ: 392 тыс. рублей.

137. Тип 16 № 647167

15 января Пётр берёт кредит в банке на 6 месяцев в размере 600 тысяч рублей. Его условия таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 50% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с февраля по июнь долг должен быть на t тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца, где $0 \leqslant t \leqslant 40;$
— 15 июля кредит должен быть полностью погашен.

Какую наибольшую и наименьшую сумму может выплатить Пётр за всё время погашения кредита?

Решение. Пусть 15 февраля долг будет меньше долга на 15 января на t_1 тыс. руб., 15 марта — меньше долга на 15 февраля на t_2 тыс. руб. и т. д. Заполним таблицу.

Месяц	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
Январь			600
Февраль	$1,5 \cdot 600$	$300 + t_1$	$600 - t_1$
Март	$1,5 \cdot (600 - t_1)$	$300 - 0,5t_1 + t_2$	$600 - t_1 - t_2$
Апрель	$1,5 \cdot (600 - t_1 - t_2)$	$300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 + t_3$	$600 - t_1 - t_2 - t_3$
Май	$1,5 \cdot (600 - t_1 - t_2 - t_3)$	$300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 + t_4$	$600 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4$
Июнь	$1,5 \cdot (600 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4)$	$300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 - 0,5t_4 + t_5$	$600 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5$
Июль	$1,5 \cdot (600 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5)$	$900 - 1,5t_1 - 1,5t_2 - 1,5t_3 - 1,5t_4 - 1,5t_5$	0

Суммируем все выплаты:

$$300 + t_1 + 300 - 0,5t_1 + t_2 + 300 - 0,5t_1 -$$
$$- 0,5t_2 + t_3 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 +$$
$$+ t_4 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 - 0,5t_4 +$$
$$+ t_5 + 900 - 1,5t_1 - 1,5t_2 - 1,5t_3 - 1,5t_4 -$$
$$- 1,5t_5 = 2400 - 2,5t_1 - 2t_2 - 1,5t_3 - t_4 - 0,5t_5.$$

При $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0$ полученная сумма максимальна, она равна 2400 тыс. руб. При $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 40$ сумма минимальна, она равна $2400 - 7,5 \cdot 40 = 2100$ тыс. руб.

Ответ: 2,4 млн руб. и 2,1 млн руб.

Приведём другое решение.

Различие в сумме выплат будет обусловлено начисляемыми процентами. Поэтому наибольшую сумму Пётр выплатит, если в первые пять месяцев он будет выплачивать только проценты за пользование кредитом, то есть если $t = 0,$ а наименьшую — в случае ежемесячного максимального уменьшения долга, то есть если $t = 40.$

Приведем схему выплаты кредита для $t = 0.$

Месяц	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
Январь			600
Февраль	900	300	600
Март	900	300	600
Апрель	900	300	600

Май	900	300	600
Июнь	900	300	600
Июль	900	900	0

Сумма выплат в этом случае составит $300 \cdot 5 + 900 = 2400$ тыс. руб.

Приведем схему выплаты кредита для $t = 40.$

Месяц	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
Январь			600
Февраль	900	340	560
Март	840	320	520
Апрель	780	300	480
Май	720	280	440
Июнь	660	260	400
Июль	600	600	0

В этом случае сумма выплат равна

$$340 + 320 + 300 + 280 + 260 + 600 = 2100 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 2,4 млн руб. и 2,1 млн руб.

138. Тип 16 № 648422

Николай Сергеевич хочет взять кредит на один год в банке «Князь Николай». В начале каждого квартала банк увеличивает долг на некоторое количество процентов, а затем Николай Сергеевич будет вносить определенную сумму, которая каждый раз не превышает 84 тысячи рублей.

Определите максимально возможную величину кредита при этих условиях, если известно, что на протяжении первых трех кварталов банк каждый раз будет увеличивать сумму долга на 10%, а в последнем квартале — на 25%. Ответ округлите до целого числа тысяч рублей.

Решение. Максимально возможная величина кредита соответствует максимально возможным ежеквартальным выплатам. Поэтому необходимо рассчитать величину кредита в случае, когда каждая выплата составляет 84 тысячи рублей. Пусть сумма кредита равна S тыс. руб., ежеквартальная выплата — x тыс. руб. Заполним таблицу.

Квартал	Долг в начале квартала (после начисления процентов), тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в конце квартала (после выплаты), тыс. руб.
1	$1,1S$	x	$1,1S - x$
2	$1,1^2S - 1,1x$	x	$1,1^2S - 2,1x$
3	$1,1^3S - 1,1 \cdot 2,1x$	x	$1,1^3S - 3,31x$
4	$1,25 \cdot 1,1^3S - 1,25 \cdot 3,31x$	x	0

Составим уравнение и выразим из него S:

$$1,25 \cdot 1,1^3S - 1,25 \cdot 3,31x = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,25 \cdot 1,1^3S = 1,25 \cdot 3,31x + x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,1^3S = 3,31x + 0,8x \Leftrightarrow S = \frac{4,11x}{1,1^3},$$

откуда

$$S=\frac{4,11\cdot 84}{1,1^3}=\frac{4,11\cdot 84}{1,331}=\frac{345,24}{1,331}=259,3\ldots$$

Округляя до целого числа тысяч рублей, получаем, что максимально возможная величина кредита при этих условиях равна 259 тыс. руб.

Ответ: 259 тыс. руб.

139. Тип 16 № 652640

Для покупки автомашины Сергей скопил 2 780 000 рублей, а недостающую сумму он взял в банке в кредит под 25% годовых на три года. Выплачивать кредит он должен аннуитетными платежами (заёмщик каждый год выплачивает одну и ту же сумму). Сколько процентов от стоимости машины Сергею не хватало на её приобретение, если известно, что он переплатил по кредиту 655 000 рублей?

Решение. Пусть Сергей взял в кредит S руб., ежегодный платёж составлял x руб. и пусть $k=1,25=\frac{5}{4}$. Составим таблицу.

Год	Долг с процентами, руб.	Выплата, руб.	Долг после выплаты, руб.
1	kS	x	$kS-x$
2	k^2S-kx	x	$k^2S-kx-x$
3	k^3S-k^2x-kx	x	$k^3S-k^2x-kx-x=0$

Подставляя в полученное уравнение $k=\frac{5}{4}$, находим:

$$\frac{125}{64}S-\left(\frac{25}{16}+\frac{5}{4}+1\right)x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{125}{64}S=\frac{61}{16}x\Leftrightarrow x=\frac{125}{4\cdot 61}S.$$

Переплата по условию составляет 655 000 руб., значит, $3x-S=655\,000$, откуда

$$3\cdot\frac{125}{4\cdot 61}S-S=655\,000\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 131S=4\cdot 61\cdot 655\,000\Leftrightarrow S=1\,220\,000.$$

Следовательно, на приобретение машины Сергею не хватало

$$\frac{1\,220\,000}{1\,220\,000+2\,780\,000}\cdot 100\%=\frac{1\,220\,000}{4\,000\,000}\cdot 100\%=30,5\%$$

ее стоимости.

Ответ: 30,5

140. Тип 16 № 653515

Предприниматель взял в банке кредит 500 тысяч рублей на 4 года. Условия погашения кредита таковы: по прошествии каждого года банк начисляет 20% на долг, который имеет предприниматель на конец этого года. После этого предприниматель вносит ежегодный платёж, который одинаков во все годы, кроме четвёртого, в котором платёж равен 163,2 тыс. руб., и этим закрывается кредит. Какую сумму ежегодных платежей внёс предприниматель в банк при погашении этого кредита за 4 года?

Решение. Пусть $S = 500$ тыс. руб., ежегодные платежи в первые три года составляли по x тыс. руб. и $k = 1,2 = \frac{6}{5}$. Заполним таблицу.

Год	Долг с процентами, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг после выплаты, тыс. руб.
1	kS	x	$kS - x$
2	$k^2S - kx$	x	$k^2S - kx - x$
3	$k^3S - k^2x - kx$	x	$k^3S - k^2x - kx - x$
4	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$	163,2	$k^4S - k^3x - k^2x - kx - 163,2 = 0$

Подставляя значение k в полученное уравнение, находим:

$$\frac{1296}{625} \cdot 500 - \left(\frac{216}{125} + \frac{36}{25} + \frac{6}{5}\right)x - 163,2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{129\,600}{125} - 163,2 = \frac{546}{125}x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 129\,600 - 20\,400 = 182 \cdot 3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = \frac{109\,200}{182} \Leftrightarrow 3x = 600.$$

Значит, всего за 4 года предприниматель внёс в банк $600 + 163,2 = 763,2$ (тыс. руб.)

Ответ: 763,2 тыс. руб.

141. Тип 16 № 654108

В июле 2024 года планируется взять в кредит целое число N млн руб. сроком на 3 года. Условия возврата кредита таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027
Долг (млн руб.)	N	$0,6N$	$0,4N$	0

Найдите наименьшее значение N, при котором каждая из выплат будет составлять целое число миллионов рублей.

Решение. Заполним таблицу, представив выплаты в виде несократимых обыкновенных дробей.

Год	Долг в январе, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг в июле, млн руб.
2024			N
2025	$1,2N$	$0,6N = \frac{3}{5}N$	$0,6N$
2026	$0,72N$	$0,32N = \frac{8}{25}N$	$0,4N$
2027	$0,48N$	$0,48N = \frac{12}{25}N$	0

Чтобы все выплаты составляли целое число миллионов рублей, число N должно быть кратно 25. Значит, наименьшее значение N равно 25.

Ответ: 25.

142. Тип 16 № 655098

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на восемь лет в размере 400 тыс. руб. Условия его возврата таковы:
— каждый январь 2026, 2027, 2028, 2029 годов долг возрастает на $q\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— каждый январь 2030, 2031, 2032, 2033 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года — к июлю 2033 года долг будет выплачен полностью. Найдите q и r, если известно, что сумма всех выплат после полного погашения кредита составит 650 тыс. руб., а общая сумма выплат за первые четыре года больше общей суммы выплат за последние четыре года на 140 тыс. руб.

Решение. В течение 8 лет долг в июле каждого года должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, значит, ежегодно долг уменьшается на $\frac{400}{8}=50$ тыс. руб. Пусть $m=1+\frac{q\%}{100\%}, n=1+\frac{r\%}{100\%}$. Заполним таблицу.

Год	Долг в январе, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2025			400
2026	$400m$	$400m-350$	350
2027	$350m$	$350m-300$	300
2028	$300m$	$300m-250$	250
2029	$250m$	$250m-200$	200
2030	$200n$	$200n-150$	150
2031	$150n$	$150n-100$	100
2032	$100n$	$100n-50$	50
2033	$50n$	$50n-0$	0

Найдём из таблицы суммы выплат за первые и за последние четыре года:

$$S_{2026-2029}= \\ =400m-350+350m-300+300m-250+250m-200= \\ =1300m-1100; \\ S_{2030-2033}=200n-150+150n-100+100n-50+50n= \\ =500n-300.$$

Учитывая, что сумма всех выплат после полного погашения кредита составит 650 тыс. руб., а общая сумма выплат за первые четыре года больше общей суммы выплат за последние четыре года на 140 тыс. руб., получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1300m - 1100 + 500n - 300 = 650, \\ 1300m - 1100 - 500n + 300 = 140 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2600m - 2200 = 790, \\ 1000n - 600 = 510 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1,15, \\ n = 1,11. \end{cases}$$

Следовательно, $q = 15$ и $r = 11$.

Ответ: $q = 15, r = 11$.

143. Тип 16 № 655323

В декабре планируется взять кредит в банке на целое число миллионов рублей на срок 6 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый июнь долг возрастает на 10% по сравнению с началом данного года;

— с июля по декабрь 1-го, 2-го, 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг равным первоначальному;

— с июля по декабрь 5-го и 6-го годов необходимо выплатить одинаковые суммы так, чтобы весь долг был погашен полностью.

Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика будет не менее 14 млн руб.

Решение. Пусть сумма кредита составляет S млн руб., а выплаты в последние два года — по x млн руб. Составим таблицу.

Год	**Долг в январе млн руб.**	**Долг в июне млн руб.**	**Выплата млн руб.**
1	S	$1{,}1S$	$0{,}1S$
2	S	$1{,}1S$	$0{,}1S$
3	S	$1{,}1S$	$0{,}1S$
4	S	$1{,}1S$	$0{,}1S$
5	S	$1{,}1S$	x
6	$1,1S - x$	$(1,1S - x) \cdot 1,1$	x

К концу шестого года долг должен быть выплачен полностью, то есть:

$$(1,1S - x) \cdot 1,1 - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,21S - 2,1x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1,21S}{2,1}.$$

Общая сумма выплат будет не менее 14 млн руб., если

$$4 \cdot 0,1S + 2 \cdot \frac{1,21S}{2,1} \geqslant 14 \Leftrightarrow 0,84S + 2,42S \geqslant 29,4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3,26S \geqslant 29,4 \Leftrightarrow S \geqslant \frac{2940}{326} \Leftrightarrow S \geqslant 9\frac{6}{326}.$$

Значит, наименьшее целое значение S равно 10.

Ответ: 10 млн рублей.

144. Тип 16 № 656196

15 декабря планируется взять кредит в банке на S тысяч рублей на 32 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа первый и последний месяцы долг должен уменьшаться на 250 тысяч рублей, все остальные месяцы долг должен быть меньше долга на 15-е число предыдущего месяца на x тысяч рублей. Найдите S, если всего было выплачено банку 2061,5 тысяч рублей?

Решение. Пусть повышающий коэффициент $k = 1 + \frac{2\%}{100\%} = 1,02.$ Заполним таблицу:

Номер месяца	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
			$S = 500 + 30x$
1	$500k + 30xk$	$500k + 30xk - 250 - 30x$	$250 + 30x$
2	$250k + 30xk$	$250k + 30xk - 250 - 29x$	$250 + 29x$
3	$250k + 29xk$	$250k + 29xk - 250 - 28x$	$250 + 28x$
4-29	…	…	…
30	$250k + 2xk$	$250k + 2xk - 250 - x$	$250 + x$
31	$250k + xk$	$250k + xk - 250$	250
32	$250k$	$250k$	0

Найдём B — сумму всех выплат. Выплаты со 2-го по 31-й месяц представляют собой арифметическую прогрессию, поэтому

$$B = B_1 + B_{2-31} + B_{32} =$$
$$= (500k + 30xk - 250 - 30x) + \frac{(250k + 30xk - 250 - 29x) + (250k + xk - 250)}{2} \cdot 30 + 250k =$$
$$= 8250k + 495xk - 7750 - 465x.$$

По условию банку было выплачено 2061,5 тысяч рублей, тогда

$$8250 \cdot 1,02 + 495x \cdot 1,02 - 7750 - 465x = 2061,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8415 + 504,9x - 7750 - 465x = 2061,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 39,9x = 1396,5 \Leftrightarrow x = 35.$$

Значит, $S = 500 + 30 \cdot 35 = 1550.$

Ответ: 1550.

145. Тип 16 № 658425

20 мая 2024 года предприятие планирует взять в кредит S миллионов рублей на 4 года, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый июнь долг возрастает на 24% по сравнению со значением в конце мая;
— с сентября по декабрь необходимо выплатить часть долга;
— 20 мая каждого года, последующего за годом получения кредита, долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Дата	20.05.24	20.05.25	20.05.26	20.05.27	20.05.28
Долг	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором сумма наибольшей и наименьшей выплат не меньше 300 миллионов рублей.

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу:

Год	**Долг на 20 мая, млн руб.**	**Долг в июле, млн руб.**	**Выплата, млн руб.**
2024	S	$1{,}24S$	$0{,}44S$
2025	$0{,}8S$	$0{,}992S$	$0{,}492S$
2026	$0{,}5S$	$0{,}62S$	$0{,}42S$
2027	$0{,}2S$	$0{,}248S$	$0{,}248S$
2028	0		

Наибольшая и наименьшая выплаты равны соответственно $0{,}492S$ и $0{,}248S$. Тогда по условию задачи

$$0,492S + 0,248S \geqslant 300 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,74S \geqslant 300 \Leftrightarrow S \geqslant \frac{30000}{74} = 405\frac{30}{74}.$$

Наименьшее целое S, удовлетворяющее неравенству, равно 406.

Ответ: 406.

146. Тип 16 № 659591

В июле планируется взять кредит в банке на 12 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту в 2 раза больше наименьшего платежа.

Решение. Пусть сумма кредита равна S. Так как долг уменьшается равномерно на одну и ту же сумму, ежегодная выплата равна $\frac{S}{12}$ плюс начисленные проценты. Начисленные проценты за первый, второй, ..., двенадцатый день равны соответственно:

$$S \cdot \frac{r}{100}, \qquad \frac{11S}{12} \cdot \frac{r}{100}, \qquad \ldots \qquad \frac{S}{12} \cdot \frac{r}{100}.$$

Наибольшая выплата была в первый год, так как начисленные проценты за этот год наибольшие, а наименьшая — в двенадцатый год, так как начисленные проценты в этот год наименьшие. Тогда:

$$\frac{S}{12} + S \cdot \frac{r}{100} = 2\left(\frac{S}{12} + \frac{S}{12} \cdot \frac{r}{100}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{10S}{12} \cdot \frac{r}{100} = \frac{S}{12} \Leftrightarrow \frac{r}{10} = 1 \Leftrightarrow r = 10.$$

Ответ: 10.

147. Тип 16 № 660699

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 40% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение. Пусть $S = 545\ 000$ руб. — сумма кредита, x руб. — ежегодный платеж, $k = 1 + \frac{40}{100} = 1,4.$ Тогда схема выплаты кредита выглядит так:

$$k \cdot (k \cdot (k \cdot S - x) - x) - x = 0 \Leftrightarrow k^3 S - k^2 x - kx - x = 0.$$

Тогда

$$x = \frac{k^3 S}{k^2 + k + 1} \Leftrightarrow x = \frac{545\ 000 \cdot 1,4^3}{1,4^2 + 1,4 + 1} \Leftrightarrow x = 343\ 000.$$

Таким образом, общая сумма выплат банку будет равна $3 \cdot 343\ 000 = 1\ 029\ 000.$

Ответ: 1 029 000.

148. Тип 16 № 660700

В июле 2026 года планируется взять кредит на 3 года в размере 800 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:
— в январе 2027 и 2028 годов долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— в январе 2029 года долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Платежи в 2027, 2028 и 2029 годах должны быть равными; к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.

Решение. Пусть $S = 800\,000$ руб. — сумма кредита, x руб. — ежегодный платеж, $k_1 = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$ и $k_2 = 1 + \frac{20}{100} = 1,2.$ Тогда схема выплаты кредита выглядит так:

$$k_2\left(k_1\left(k_1 - x\right) - x\right) - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k_2(k_1^2 \cdot S - k_1 \cdot x - x) - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k_2 k_1^2 S - k_2 k_1 x - k_2 x - x = 0.$$

Тогда

$$x = \frac{k_2 k_1^2 S}{k_2 k_1 + k_2 + 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1,2 \cdot 1,1^2 \cdot 800000}{1,1 \cdot 1,2 + 1,2 + 1} \Leftrightarrow x = 330000.$$

Таким образом, общая сумма выплат банку будет равна $3 \cdot 330000 = 990000.$

Ответ: 990 000 рублей.

149. Тип 16 № 660760

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 720 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— в июле 2027, 2028, 2029 годов долг остается равным 720 тыс. руб.;
— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму платежей за пять лет.

Решение. Пусть $k=1+\frac{25}{100}=1,25$, а x тыс. руб. — платежи 2030 и 2031 годов. В июле 2027, 2028, 2029 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют $720(k-1)$ тыс. руб. В январе 2030 года долг (в тыс. руб.) будет равен $720k$, а в июле — $720k-x$. В январе 2031 года долг будет равен $720k^2-kx$, а в июле — $720k^2-(k+1)x$. По условию к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью, значит:

$$720k^2-(k+1)x=0 \Leftrightarrow 720k^2=(k+1)x \Leftrightarrow x=\frac{720k^2}{k+1}.$$

Таким образом, общая сумма выплат составляет $3\cdot720(k-1)+2x$, то есть:

$$3\cdot720(k-1)+2\cdot\frac{720k^2}{k+1}=$$
$$=3\cdot720\cdot0,25+2\cdot\frac{720\cdot1,5625}{2,25}=1540 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 1540 тыс. руб.

150. Тип 16 № 668208

В июле 2024 года планируется взять кредит на 4 года на сумму 500 тысяч рублей.

Условия возврата:

— в январе 2025 г сумма долга увеличится на 10%;
— каждый последующий январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить часть долга одним платежом;
— платежи 2025, 2026, 2027 годов должны быть равными;
— в июле 2028 г долг должен быть погашен полностью.

После погашения кредита сумма всех платежей составляет 676,8 тыс. руб. Сколько рублей составит платеж в 2025 году?

Решение. Пусть сумма кредита равна S тыс. руб. (по условию $S=500$), а выплата в 2025 году равна x тыс. руб. Составим таблицу:

Год	Долг в январе (с процентами), тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2024			S
2025	$1,1S$	x	$1,1S-x$
2026	$1,2(1,1S-x)$	x	$1,32S-2,2x$
2027	$1,2(1,32S-2,2x)$	x	$1,584S-3,64x$
2028	$1,2(1,584S-3,64x)$	$1,9008S-4,368x$	0

Сумма всех выплат по условию равна 676,8 тыс. руб., тогда:

$$x+x+x+1,9008\cdot 500-4,368x=676,8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 950,4-1,368x=676,8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,368x=273,6 \Leftrightarrow x=200.$$

Таким образом, в 2025 году платёж составит 200 тыс. руб.

Ответ: 200 000.

151. Тип 16 № 668798

Местный завод «Ширпотреб» взял кредит на сумму S рублей в банке сроком на 4 года. Платежи производятся раз в год так, что долг уменьшается на одну и ту же сумму. В конце года банк начисляет p процентов на сумму долга, а в начале следующего года завод производит платеж. В итоге разница между первым и заключительным платежами составила $0,15S$. Найдите p.

Решение. Так как долг завода уменьшается ежегодно на одну и ту же сумму, а кредит будет погашен за 4 года, долг ежегодно уменьшается на $0,25S$ следующим образом:

S $0,75S,$ $0,5S,$ $0,25S,$ $0.$

Пусть $r=\dfrac{p}{100}$, тогда начисленные проценты будут составлять:

$S\cdot r$ $0,75S\cdot r,$ $0,5S\cdot r,$ $0,25S\cdot r,$ $0.$

По условию разница между первым и заключительным платежами составила $0,15S$. Разница между начисленными процентами во время первого и заключительного платежа также равна $0,15S$, так как основной долг ежегодно уменьшается на одну и ту же сумму. Получаем уравнение:

$$S\cdot r-0,25S\cdot r=0,15S \Leftrightarrow 0,75S\cdot r=0,15S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,75r=0,15 \Leftrightarrow r=\frac{1}{5}.$$

Следовательно, $p=20.$

Ответ: 20.

152. Тип 16 № 670047

Евгений взял 16 января кредит на сумму 1 млн руб. на 6 месяцев. Условия его возврата таковы. Каждый месяц 1-го числа долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца. Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга. Каждый месяц 15-го числа долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг, млн руб	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн руб.

Решение. Пусть $k=1+\dfrac{r}{100}$. Заполним таблицу:

Месяц	Долг на 1-е число после начисления процентов, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число, тыс. руб.
Январь (1)			1000
Февраль (2)	$1000k$	$1000k-900$	900
Март (3)	$900k$	$900k-800$	800
Апрель (4)	$800k$	$800k-700$	700

Май (5)	$700k$	$700k-600$	600
Июнь (6)	$600k$	$600k-500$	500
Июль (7)	$500k$	$500k$	0

Общая сумма выплат составит:

$$S=$$
$$=1000k-900+900k-800+800k-700+700k-600+600k-500+500k=$$
$$=4500k-3500\text{тыс. руб.}$$

По условию сумма выплат должна быть больше 1250 тыс. руб., тогда

$$4500k-3500>1250 \Leftrightarrow 450k>475 \Leftrightarrow k>1\frac{5}{90},$$

откуда

$$\frac{r}{100}>\frac{5}{90} \Leftrightarrow r>\frac{50}{9} \Leftrightarrow r>5\frac{5}{9}.$$

Наименьшее целое решение полученного неравенства равно 6.

Ответ: 6.

153. Тип 16 № 671349

В июне 2028 года планируется взять кредит на 10 лет в размере 1500 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь с 2029 по 2033 год долг возрастает на 22% по сравнению с концом предыдущего года;
— каждый январь с 2034 по 2038 год долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по май каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июне каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июню 2038 года долг должен быть полностью погашен.

На сколько рублей последняя выплата будет меньше выплаты 2033 года?

Решение. Пусть S — сумма, которую планируется взять в кредит, $k_1=\frac{22}{100}, k_2=\frac{18}{100}$. Так как в июне каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года, сумма основного долга уменьшается ежегодно на $0{,}1S$. Ежемесячный платеж в таком случае состоит из части основного долга и процентов, которые начисляются на остаток основного долга. В 2033 году платеж будет равен $0,1S+0,6Sk_1$, а последняя выплата, которая будет произведена в 2038 году, будет равна $0,1S+0,1Sk_2$. Найдем разность между последней выплатой и выплатой 2033 года:

$$0,1S+0,6Sk_1-(0,1S+0,1Sk_2)=$$
$$=0,6Sk_1-0,1Sk_2=0,1S(6k_1-k_2).$$

Подставляя значения $S=1500$, $k_1=\frac{22}{100}, k_2=\frac{18}{100}$, получаем:

$$0,1\cdot 1500\left(6\cdot\frac{22}{100}-\frac{18}{100}\right)=150\cdot\frac{114}{100}=171.$$

Ответ: 171 000 рублей.