РЕШУ ЕГЭ — математика профильная

1. Тип 16 № 508585

В банк был положен вклад под 10% годовых. Через год, после начисления процентов, вкладчик снял со счета 2000 рублей, а еще через год (опять после начисления процентов) снова внес 2000 рублей. Вследствие этих действий через три года со времени открытия вклада вкладчик получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций со вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы он получил?

Решение. Пусть вкладчик в банк первоначально положил x рублей. Тогда за 3 года хранения этих денег вклад вырос бы до $1,1^3x$ рублей.

За первый год хранения вклада он вырос до $1,1x$ рублей. Когда через год вкладчик снял 2000 рублей, на счете осталось $1,1x-2000$ рублей. В конце второго года хранения вклада на эту сумму были начислены проценты, вклад стал $(1,1x-2000)\cdot 1,1$ рублей. Когда вкладчик снова внес 2000 рублей, сумма вклада стала равна

$$(1,1x-2000)\cdot 1,1+2000 \text{ рублей.}$$

К концу третьего года хранения вклада сумма увеличилась до

$$((1,1x-2000)\cdot 1,1+2000)\cdot 1,1=1,1^3x-$$
$$-2000\cdot 1,1^2+2000\cdot 1,1 \text{ рублей.}$$

Эту сумму снял вкладчик в итоге вместо первоначально запланированной $1,1^3x$ рублей.

Найдем искомую разность.

$$1,1^3x-1,1^3x+2000\cdot 1,1^2-2000\cdot 1,1=$$
$$=2000\cdot 1,1\cdot(1,1-1)=2000\cdot 1,1\cdot 0,1=220 \text{ рублей.}$$

Ответ: на 220 рублей.

Примечание.

Решение можно несколько упростить, заметив, что запланированный и фактический проценты за первый год не отличаются. Пусть к началу второго года после начисления процентов на счете было x руб. Тогда запланированный процент равен $1,1^2x$ руб., а фактический процент равен $1,1^2(x-2000)+1,1\cdot 2000=1,1^2x-220$ руб. Искомая разность равна 220 руб.

2. Тип 16 № 511255

Миша и Маша положили в один и тот же банк одинаковые суммы под 10% годовых. Через год сразу после начисления процентов Миша снял со своего счета 5000 рублей, а еще через год снова внес 5000 рублей. Маша, наоборот, через год доложила на свой счет 5000 рублей, а еще через год сразу после начисления процентов сняла со счета 5000 рублей. Кто через три года со времени первоначального вложения получит большую сумму и на сколько рублей?

Решение. Пусть для определенности Миша и Маша 15.01.12 положили в банк x рублей. Подготовим выписки из лицевых счетов Маши и Миши.

Выписка из лицевого счета Маши.

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	x	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1,1x$
15.01.13	Принято от клиента	5000	$1,1x + 5000$

15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x+5500$
15.01.14	Выдано клиенту	5000	$1{,}1^2x+500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x+550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x+550$	0

Выписка из лицевого счета Миши.

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	x	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Выдано клиенту	5000	$1{,}1x-5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x-5500$
15.01.14	Принято от клиента	5000	$1{,}1^2x-500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x-550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x-550$	0

Итак, Маша получила на 1100 руб. больше, чем Миша.

Ответ: Маша, на 1100 рублей.

3. Тип 16 № 511880

Близнецы Саша и Паша положили в банк по 50 000 рублей на три года под 10% годовых Однако через год и Саша, и Паша сняли со своих счетов соответственно 10% и 20% имеющихся денег. Еще через год каждый из них снял со своего счета соответственно 20 000 рублей и 15 000 рублей. У кого из братьев к концу третьего года на счету окажется большая сумма денег? На сколько рублей?

Решение. 1) Табличный вариант решения:

Годы хранения вклада	Динамика роста (падения) суммы вкладов	
	Саша	Паша
04.12.14	50 000	50 000
К 04.12.15	$50\,000\cdot1{,}1=55\,000$	$50\,000\cdot1{,}1=55\,000$
04.12.15	$55\,000\cdot0{,}9=49\,500$	$55\,000\cdot0{,}8=44\,000$
К 04.12.16	$49\,500\cdot1{,}1=54\,450$	$44\,000\cdot1{,}1=48\,400$
04.12.16	$54\,450-20\,000=34\,450$	$48\,400-15\,000=33\,400$
К 04.12.17	$34450\cdot1{,}1=37895$	$33400\cdot1{,}1=36740$
Ответ на главный вопрос задачи		37 895 – 36 740 = 1 155

2) Вариант решения с помощью выражения:

$$\begin{gathered}\Delta=\\=(50000\cdot1,1\cdot0,9\cdot1,1-20000)1,1-(50000\cdot1,1\cdot0,8\cdot1,1-15000)\cdot1,1=\\=1,1\cdot(50000\cdot1,21\cdot0,9-20000-50000\cdot1,21\cdot0,8+15000)=\\=1,1\cdot(50000\cdot1,21\cdot0,9-50000\cdot1,21\cdot0,8-5000)=\\=1,1\cdot(50000\cdot1,21\cdot(0,9-0,8)-5000)=\\=1,1\cdot(5000\cdot1,21-5000)=1,1\cdot5000\cdot(1,21-1)=\\=11\cdot500\cdot0,21=105\cdot11=1155.\end{gathered}$$

3) Если бы ни Саша, ни Паша не снимали со счетов… их вклады выросли бы за 3 года до $50000 \cdot 1{,}331 = 1331 \cdot 100 : 2 = 133100 : 2 = 66550$ (р).

Что помешало Саше?

$50000 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}1 = 5000 \cdot 1{,}1 = 5500$ р., что он снял со счета 04.12.15 привело к уменьшению ожидаемой суммы, включая процентные начисления в течение 2 лет! А этот поступок Саши исчисляется суммой $5500 \cdot 1{,}21 = 5500 \cdot 121 = 1331 \cdot 5 = 13310 : 2 = 6655$ (р).

Те 20 000 р., которые он снял 04.12.16, привело к уменьшению ожидаемой суммы на $20\,000 \cdot 1{,}1 = 22\,000$ (р.). Итого: 28 655 р.

В конечном итоге ему причиталось 66 550 − 28 655=37895 (р.)

Что помешало Паше?

$50\,000 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}2 = 10\,000 \cdot 1{,}1 = 11000$ р., что он снял со счета 04.12.15, привело к уменьшению ожидаемой суммы, включая процентные начисления в течение 2 лет! А это исчисляется суммой $11\,000 \cdot 1{,}21 = 1{,}1 \cdot 1{,}21 \cdot 10\,000 = 1{,}331 \cdot 10\,000 = 13\,310$ (р).

15 000 р., которые он снял в конце 04.12.16, привело к уменьшению ожидаемой суммы на $15000 \cdot 1{,}1 = 16500$(р.). Итого: 29 810 р.

В окончательный расчет на руки Паше выдали: 66 550 − 29 810 = 36 740 (р.)

Саша получил на 1155 р. больше, чем Паша (37895 − 36740).

Ответ: у Саши, на 1155 рублей.

4. Тип 16 № 512434

Василий кладет в банк 1 000 000 рублей под 10% годовых на 4 года (проценты начисляются один раз после истечения года) с правом докладывать три раза (в конце каждого года после начисления процентов) на счет фиксированную сумму 133 000 рублей. Какая максимальная сумма может быть на счете у Василия через 4 года?

Решение. Максимальная сумма на счетё будет в случае, если Василий все три раза воспользуется правом дополнительно внести 133 000 рублей на счёт.

1. После первого года хранения вклада:
Сумма вклада возрастает до $1\,000\,000 \cdot 1{,}1 = 1\,100\,000$ (руб.);
Дополнительное пополнение счета $1\,100\,000 + 133\,000 = 1\,233\,000$ (руб.);
2. После второго года хранения вклада:
Сумма вклада возрастает до $1\,233\,000 \cdot 1{,}1 = 1\,356\,300$ (руб.);
Дополнительное пополнение счета $1\,356\,300 + 133000 = 1\,489\,300$ (руб.);
3. После третьего года хранения вклада:
Сумма вклада возрастает до $1\,489\,300 \cdot 1{,}1 = 1\,638\,230$ (руб.);
Дополнительное пополнение счета $1\,638\,230 + 133\,000 = 1\,771\,230$ (руб.);
4. После четвертого года хранения вклада:
Сумма вклада возрастает до $1\,771\,230 \cdot 1{,}1 = 1\,948\,353$ (руб.).

Ответ: 1 948 353 рубля.

5. Тип 16 № 513208

Саша положил некоторую сумму в банк на 4 года под 10% годовых. Одновременно с ним Паша такую же сумму положил на два года в другой банк под 15% годовых. Через два года Паша решил продлить срок вклада еще на 2 года. Однако к тому времени процентная ставка по вкладам в этом банке изменилась и составляла уже p% годовых. В итоге через четыре года на счету у Паши оказалась большая сумма, чем у Саши, причем эта разность составила менее 10% от суммы, вложенной каждым первоначально. Найдите наибольшее возможное целое значение процентной ставки.

Решение. Предположим, что Саша и Паша первоначально положили в банк S руб.

Динамика прироста вклада Саши. К концу 4 года хранения денежных средств на счету Саши оказалось $1{,}1^4 S = 1{,}4641S$ руб.

Динамика прироста вклада Паши.

К концу второго года на счету Паши оказалось $1{,}15^2 S = 1{,}3225S$ руб. А к концу же четвертого года — $1{,}3225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 S$ руб.

Разность образованных сумм обоих вкладов составила $1,3225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 S-1,4641S$ руб., что меньше числа $0,1S$.

Решим неравенство:

$$1,3225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 S-1,4641S<0,1S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-14641<1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13225\left(1+\frac{p}{100}\right)^2<15641 \Leftrightarrow \left(1+\frac{p}{100}\right)^2<\frac{15641}{13225}.$$

$$1+\frac{p}{100}<\frac{125,06...}{115}=\frac{25,01...}{23}=1,087... \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{p}{100}<1,087...-1=0,087... \Leftrightarrow p<8,7...$$

Поскольку условием задачи требуется найти наибольшее возможное целое значение процентной ставки, таким значением будет число 8.

Ответ: 8%.

6. Тип 16 № 506949

В начале года 5/6 некоторой суммы денег вложили в банк А, а то, что осталось — в банк Б. Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определённый процент, величина которого зависит от банка. Известно, что к концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у. е., к концу следующего — 749 у. е. Если первоначально 5/6 суммы было бы вложено в банк Б, а оставшуюся вложили бы в банк А, то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у. е. Определите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

Решение. Пусть в банк А, у которого исходя из годовой процентной ставки коэффициент повышения вклада равен y, вложено $5x$ у. е. денег. Тогда в банк Б, у которого аналогичный коэффициент равен t, вложено x у. е. денег.

В соответствии с условием задачи будем иметь:

$$\begin{cases} 5xy+xt=670, & (1) \\ 5xy^2+xt^2=749. & (2) \end{cases}$$

Если бы те же суммы были вложены в банки Б и А соответственно, то имели бы уравнение $xy+5xt=710.$ (3)

А искомая сумма будет равна значению выражения xy^2+5xt^2.

Рассмотрим систему уравнений (1) и (3):

$$\begin{cases} 5xy+xt=670, \\ xy+5xt=710 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25xy-5xt=-3350, \\ xy+5xt=710 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24xy=2640, \\ xy+5xt=710 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=110, \\ 5xt=710-110 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=110, \\ 5xt=600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=110, \\ xt=120. \end{cases}$$

Отсюда: $\dfrac{y}{t}=\dfrac{11}{12}\Leftrightarrow y=\dfrac{11t}{12}.$

Подставим найденное значение y в уравнение (2):

$$5x\cdot\frac{121t^2}{144}+xt^2=749\Leftrightarrow 605xt^2+144xt^2=749\cdot 144\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 749xt^2=749\cdot 144\Leftrightarrow xt^2=144.$$

$$5xy^2+xt^2=749\Leftrightarrow 5xy^2=749-xt^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5xy^2=749-144\Leftrightarrow 5xy^2=605\Leftrightarrow xy^2=121.$$

Искомая сумма имеет вид: $xy^2+5xt^2=121+5\cdot 144=841.$

Ответ: 841.

7. Тип 16 № 506950

В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

Решение. Общая сумма, причитающаяся вкладчику, включая дополнительные вклады в течение четырех лет и все процентные начисления, к концу пятого года хранения денег составляет 825 (100+725) процентов от первоначального (3900 тыс. руб.). Эта сумма равна:

$$3900\cdot 8,25=39\cdot 825=$$
$$=3\cdot 13\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 11=3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 13 \text{ (тыс.руб.)}$$

Некоторая часть найденной суммы образована хранением первоначально вложенной суммы (3900 тыс.руб.) Вычислим эту часть. Поскольку процентная надбавка начислялась в размере 50% годовых, то за 5 лет хранения этой части вклада вложенная сумма увеличилась в $1,5^5=\dfrac{3^5}{2^5}$ раза. То есть стала:

$$\frac{3900\cdot 3^5}{2^5}=\frac{3\cdot 13\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 3^5}{2^5}=\frac{3^6\cdot 5^2\cdot 13}{2^3} \text{ (тыс. руб.)}$$

Теперь найдем другую часть образованной суммы с учетом дополнительных вкладов в течение четырех лет, а также процентных начислений на эту сумму. Эта часть равна разности двух сумм, вычисленных выше.

$$3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 13-\frac{3^6\cdot 5^2\cdot 13}{2^3}=$$
$$=\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 13-3^6\cdot 5^2\cdot 13}{2^3}=$$
$$=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 13\cdot(2^3\cdot 11-3^4)}{2^3}=$$
$$=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 13\cdot(88-81)}{2^3}=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13}{2^3} \text{ (тыс. руб.)}$$

Это — с одной стороны. С другой же стороны эта сумма образовалась так:

Пусть вкладчик в конце года и еще три раза в следующие годы вносил дополнительный вклад в сумме x тыс. руб.

В конце первого года хранения этой суммы (к концу второго года от открытия вклада) она выросла до $\frac{3}{2}x$ тыс. руб.

Вкладчик дополнительно внес еще x тыс. руб. На начало следующего календарного года эта часть суммы стала:

$$\frac{3}{2}x+x=\frac{5}{2}x \text{ (тыс.руб.)}$$

Через год эта сумма выросла до:

$$\frac{5}{2}x\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}x \text{ (тыс.руб.)}$$

Но вкладчик внес на счет еще x тыс.руб. Сумма стала:

$$\frac{15}{4}x+x=\frac{19}{4}x \text{ (тыс. руб.)}$$

Через год эта сумма выросла до:

$$\frac{19}{4}x\cdot\frac{3}{2}=\frac{57}{8}x \text{ (тыс. руб.)}$$

Вкладчик вновь внес на счет x тыс. руб. Часть вклада становится равной:

$$\frac{57}{8}x+x=\frac{65}{8}x \text{ (тыс.руб.)}$$

К концу последнего года хранения всего вклада эта часть вырастает до:

$$\frac{65}{8}x\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\cdot5\cdot13}{2^4}x \text{ (тыс. руб.)}$$

Теперь решим уравнение:

$$\frac{3\cdot5\cdot13}{2^4}\cdot x=\frac{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot13}{2^3}\Leftrightarrow x=\frac{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot13\cdot2^4}{2^3\cdot3\cdot5\cdot13}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=3\cdot5\cdot7\cdot2\Leftrightarrow x=210.$$

Итак, искомая сумма равна 210 тыс. руб.

Ответ: 210 тыс. руб.

8. Тип 16 № 506959 *i*

Баба Валя, накопив часть своей пенсии, решила улучшить свое материальное положение. Она узнала, что в Спёрбанке от пенсионеров принимают вклады под определенный процент годовых и на этих условиях внесла свои сбережения в ближайшее отделение Спёрбанка. Но через некоторое время соседка ей рассказала, что недалеко от той местности, где проживают пенсионеры, есть коммерческий банк, в котором процент годовых для пенсионеров-вкладчиков в 20 раз выше, чем в Спёрбанке. Баба Валя не доверяла коммерческим банкам, но стремление улучшить свое материальное положение взяло верх. После долгих колебаний и ровно через год после открытия счета в Спёрбанке Баба Валя сняла половину образовавшейся суммы от ее вклада, заявив: «Такой навар меня не устраивает!» и открыла счет в том коммерческом банке, о котором говорила ее соседка, не теряя надежды на значительное улучшение своего материального благосостояния.

Надежды оправдались: через год сумма Бабы Вали в коммерческом банке превысила ее первоначальные кровные сбережения на 65%. Сожалела Баба Валя, что год назад в Спёрбанке сняла не всю сумму, а лишь половину, однако, подумала: «А где же мы не теряли?..» Гендиректор коммерческого банка оказался хорошим: не оставил Бабу Валю без денег.

А каков в Спёрбанке процент годовых для пенсионеров?

Решение. Пусть Баба Валя внесла в Спёрбанк S у. е. под $x\%$ годовых. Тогда за год хранения вклада внесенная сумма выросла до $S(1+0,01x)$ у. е. Баба Валя сняла со счета $\dfrac{S}{2}(1+0,01x)$ у. е. и поместила эту сумму в коммерческий банк. За год хранения вклада в коммерческом банке сумма выросла до $\dfrac{S}{2}(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)$ у. е. А эта сумма по условию задачи составляет $1,65S$ у. е.

Решим уравнение $\dfrac{S}{2}(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)=1,65S$:

$$\begin{gathered}(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)=3,3\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(100+x)\cdot(10+2x)=3300\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow 2x^2+210x+1000-3300=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x^2+105x-1150=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-115,\\ x=10.\end{array}\right.\end{gathered}$$

По условию задачи нам подходит только положительный корень $x=10.$ Значит, в Спёрбанке процент годовых для пенсионеров равен 10.

Ответ: 10.

9. Тип 16 № 506951

Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку a% до (a+40)%). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение. Пусть банк первоначально принял вклад в размере S у. е. под $x\%$ годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $S(1+0,01x)$ у. е.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось $\dfrac{3S}{4}(1+0,01x)$ у. е.

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3S}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot0,01)\text{ у. е.}$$

По условию задачи эта сумма равна $1,44S$ у. е.

Решим уравнение $\dfrac{3S}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot0,01)=1,44S.$

$$\begin{gathered}\frac{3S}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot0,01)=1,44S\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot0,01)=1,92\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(100+x)\cdot(100+(x+40))=19200\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow(100+x)\cdot(140+x)=19200\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow x=-120\pm\sqrt{19600}\Leftrightarrow x=-120\pm140\underset{x>0}{\Leftrightarrow}x=20.\end{gathered}$$

После повышения на 40 процентных пунктов ставка достигла (20 + 40)% = 60%.

Ответ: 60.

10. Тип 16 № 507714

Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2008 года в банке счёт, на который он ежегодно кладет 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счёте. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2014 года он открыл в другом банке счёт, на который ежегодно кладёт по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

Решение. Через n лет 1 сентября на первом счёте будет сумма (суммируем $n+1$ член геометрической прогрессии)

$$1000+1000\cdot 1,2+\ldots+1000\cdot 1,2^n=$$
$$=1000(1+1,2+\ldots+1,2^n)=$$
$$=1000\cdot\frac{1,2^{n+1}-1}{1,2-1}=5000(1,2^{n+1}-1)\ (\text{руб.}).$$

В это же время на втором счёте будет сумма

$$2200+2200\cdot 1,44+\ldots+2200\cdot 1,44^{n-6}=$$
$$=2200\cdot\frac{1,44^{n-5}-1}{1,44-1}=5000(1,44^{n-5}-1)\ (\text{руб.}).$$

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1,2^{n+1}-1)=5000(1,44^{n-5}-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,2^{n+1}=1,44^{n-5}\Leftrightarrow 1,2^{n+1}=1,2^{2(n-5)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n+1=2n-10\Leftrightarrow n=11.$$

Таким образом, суммы на счетах сравняются через 11 лет после открытия первого вклада, то есть в 2019 году.

Ответ: 2019.

11. Тип 16 № 508682

Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент, свой для каждого банка. В начале года Степан положил 60% некоторой суммы денег в первый банк, а оставшуюся часть суммы во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 000 руб., а к концу следующего года 701 000 руб. Если бы Степан первоначально положил 60% своей суммы во второй банк, а оставшуюся часть в первый, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 610 000 руб. Какова была бы сумма вкладов в этом случае к концу второго года?

Решение. Пусть у Степана было x тыс. руб., первый банк дает a% годовых, второй — b% годовых. Тогда в конце года сумма вклада в первом банке увеличится в $m=1+0,01a$ раз, а во втором банке в $n=1+0,01b$ раз.

Степан положил в первый и второй банк 60% и 40% своего капитала, по прошествии одного года на счетах в банках было $0,6xm+0,4xn=590$ тыс. руб. соответственно. Если бы Степан первоначально положил 40% капитала в первый банк, а 60% капитала во второй банк, то через год на счетах было бы $0,4xm+0,6xn=610$ тыс. руб.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases}0,6xm+0,4xn=590,\\0,4xm+0,6xn=610,\end{cases}$$

относительно xm и xn находим: $xm=550,\quad xn=650,\quad \dfrac{m}{n}=\dfrac{11}{13},\quad m=\dfrac{11}{13}n.$

К концу второго года сумма вкладов достигла величины

$$0,6xm^2+0,4xn^2=0,6\cdot 550\cdot m+0,4\cdot 650\cdot n=$$
$$=330\cdot\frac{11}{13}n+260n=\frac{3630n}{13}+260n=\frac{7010}{13}n.$$

По условию, она равна 701 тыс. руб., откуда имеем:

$$\frac{7010}{13}n=701\Leftrightarrow n=1,3.$$

Тогда $m=1,1,\ x=500$, а искомая величина суммы вклада к концу второго года при вложении 40% капитала в первый банк и 60% во второй равна

$$0,4xm^2+0,6xn^2=0,4\cdot 500\cdot 1,1^2+0,6\cdot 500\cdot 1,3^2=$$
$$=242+507=749 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 749 000 руб.

12. Тип 16 № 512360

По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение. Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, т. е. умножается на коэффициент 1,1. Через три года сумма на вкладе «А» станет равна $1{,}1^3S=1{,}331S$. На вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$$1,11^2\left(1+\frac{n}{100}\right)S=1,2321\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — натуральное число.

Требуется найти наименьшее целое решение неравенства

$$1,2321\left(1+\frac{n}{100}\right)S>1,331S\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n>100\cdot\frac{13\,310-12\,321}{12\,321}=8,02...\Leftrightarrow n=9.$$

Ответ: 9.

13. Тип 16 № 513350

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение. Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, то есть умножается на коэффициент 1,1. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1,1^3S=1,331S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1,05\left(1+\frac{n}{100}\right)^2S,$$

где n — некоторое натуральное число.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1,05\cdot(1+\frac{n}{100})^2S>1,331S,\qquad \left(1+\frac{n}{100}\right)^2>\frac{1331}{1050}=1,26...$$

При $n = 13$ неравенство

$$1,13^2>1,26...;\quad 1,2769>1,26...$$

верно, а при $n = 12$ неравенство

$$1,12^2>1,26...;\quad 1,2544>1,26...$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 13.

14. Тип 16 № 513431

По бизнес-плану предполагается изначально вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по целому числу n млн рублей в первый и второй годы, а также по целому числу m млн рублей в третий и четвёртый годы.

Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

Решение. К началу 2-го года получится $1,15\cdot10+n=11,5+n$ млн вложений, а к началу 3-го года —

$$1,15(11,5+n)+n=13,225+2,15n.$$

По условию $13,225+2,15n\geqslant20.$ Наименьшее целое решение $n = 4$. Тогда к началу 3-го года получится

$$13,225+8,6=21,825\text{ млн.}$$

К началу 4-года имеем $1,15\cdot21,825+m$ млн, а в конце проекта

$$1,15(1,15\cdot21,825+m)+m=$$
$$=1,3225\cdot21,825+2,15m=28,8635625+2,15m.$$

По условию $28,8635625+2,15m\geqslant30.$ Получаем, что $m = 1$ — наименьшее целое решение.

Ответ: 4 и 1 млн руб.

15. Тип 16 № 514509

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Решение. В конце первого года вклад составит 11 млн рублей, а в конце второго — 12,1 млн рублей. Пусть искомая сумма равна x (млн рублей). Тогда в начале третьего года вклад составит $12,1+x$, а в конце — $13,31+1,1x.$ В начале четвёртого года вклад составит $13,31+2,1x,$ а в конце — $14,641+2,31x.$

По условию, нужно найти наименьшее целое x, для которого выполнено неравенство

$$14,641+2,31x\geqslant30\Leftrightarrow x\geqslant6\frac{1499}{2310}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства — число 7. Значит, искомая сумма — 7 млн рублей.

Ответ: 7 млн рублей.

16. Тип 16 № 516335

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором общая сумма средств вкладчика за два года станет больше 125 миллионов, а за четыре года станет больше 200 миллионов рублей.

Решение. Пусть S миллионов рублей — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1,2S+20$ миллионов рублей, а к началу 3-го года — $1,2(1,2S+20)+20=1,44S+44.$ По условию $1,44S+44>125,$ откуда $S>\frac{81}{1,44}>56,25.$

К началу 4-го года имеем $1,2(1,44S+44)+10=1,728S+62,8,$ а в конце проекта

$$1,2(1,2(1,44S+44)+10)+10=$$
$$=2,0736S+63,36+22=2,0736S+85,36.$$

По условию $2,0736S+85,36>200,$ откуда $S>\frac{114,64}{2,0736}>55,2.$

А значит, минимальное возможное целое число, удовлетворяющее условию (в том числе на два года) $S=57$.

Ответ: 57 миллионов руб.

17. Тип 16 № 529734

1 апреля 2017 г. Андрей Петрович положил 10 000 рублей на банковский вклад сроком на 1 год с ежемесячным начислением процентов и капитализацией под a% годовых. Это означает, что первого числа каждого месяца сумма вклада увеличивается на одно и то же количество процентов, рассчитанное таким образом, что за 12 месяцев она увеличится ровно на a%. Через 6 месяцев сумма вклада составила 10 500 рублей. Найдите a.

Решение. Пусть каждый месяц сумма вклада увеличивается на k процентов, а $K=1+\frac{k}{100}.$ Тогда через шесть месяцев сумма вклада будет равна $10000\cdot K^6,$ а через двенадцать месяцев — $10000\cdot K^{12}.$ Справедливы следующие равенства:

$$10000\cdot K^6=10500,$$
$$10000\cdot K^{12}=10000\cdot\left(1+\frac{a}{100}\right).$$

Выразим a из второго равенства:

$$a=(K^{12}-1)\cdot 100=\Big((K^6)^2-1\Big)\cdot 100,$$

подставим значение K^6 из первого равенства:

$$a=\left(\left(\frac{10500}{10000}\right)^2-1\right)\cdot 100=$$
$$=(1,05^2-1)\cdot 100=(1,1025-1)\cdot 100=10,25.$$

Ответ: 10,25.

Приведём решение Валентина Евстафьева (Санкт-Петербург).

За первые 6 месяцев на начальную сумму 10 тыс. руб. была начислена прибыль 500 руб. Поскольку процент за месяц постоянен, то и за вторые 6 месяцев на эту начальную сумму была начислена такая же прибыль. А на прибыль первого полугодия, равную 500 руб., была начислена прибыль 25 руб. (поскольку 500 руб. в 20 раз меньше 10 тыс. руб., то и прибыль от 500 руб. в 20 раз меньше прибыли от 10 тыс. руб.). Тем самым, общая прибыль за год была равна 500 + 500 + 25 = 1025 руб., что составляет 10,25% от вложенной суммы.

18. Тип 16 № 530067 *i*

1 апреля 2019 г. Андрей Петрович положил 10 000 рублей на банковский вклад сроком на 1 год с ежемесячным начислением процентов и капитализацией под 21% годовых. Это означает, что первого числа каждого месяца сумма вклада увеличивается на одно и то же количество процентов, рассчитанное таким образом, что за 12 месяцев она увеличится ровно на 21%. Через сколько месяцев сумма вклада впервые превысит 11 000 рублей?

Решение. Пусть каждый месяц сумма вклада увеличивается на k процентов, а $K=1+\frac{k}{100}$. Тогда через двенадцать месяцев сумма вклада будет равна $10\,000\cdot K^{12}$. Справедливо равенство

$$10\,000\cdot K^{12}=10\,000\cdot\left(1+\frac{21}{100}\right),$$

откуда $K^{12}=1,21.$

Требуется найти наименьшее целое n, при котором будет выполнено неравенство

$$10\,000\cdot K^{n}>11\,000.$$

Имеем:

$$K^n>1,1\Leftrightarrow K^n>\sqrt{1,21}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow K^n>\sqrt{K^{12}}\Leftrightarrow K^n>K^6\underset{K>1}{\Leftrightarrow}n>6.$$

Наименьшим целым решением полученного неравенства является $n=7.$

Ответ: 7.

19. Тип 16 № 548804 *i*

Планируется открыть вклад на 4 года, положив на счет целое число миллионов рублей. В конце каждого года сумма, лежащая на вкладе, увеличивается на 10%, а в начале третьего и четвертого года вклад пополняется на 3 миллиона рублей. Найдите наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 5 миллионов рублей.

Решение. Пусть в банк был положено x миллионов рублей. После двух лет сумма вклада составит:

$$1,1\cdot 1,1x=1,21x.$$

В начале третьего года вклад пополняется на 3 миллиона. Затем банк начисляет проценты и сумма вклада станет равна:

$$1,1(1,21x+3)=1,331x+3,3.$$

В начале четвертого года вклад пополняется еще раз на 3 миллиона. После начисления процентов за четвертый год сумма вклада станет равна:

$$1,1(1,331x+6,3)=1,4641x+6,93.$$

Это превосходит внесенную вкладчиком сумму $x+3+3$ млн руб. на $0,4641x+0,93$ млн руб.

По условию задачи

$$0,4641x+0,93>5,$$

откуда

$$x > \frac{4,07}{0,4641} = \frac{40700}{4641} = 8,7\ldots$$

Наименьшее целое решение неравенства равно 9. Тем самым наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 5 миллионов рублей, составляет 9 миллионов рублей.

Ответ: 9 млн руб.

20. Тип 16 № 548855

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года банк увеличивает вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на 10 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад меньше 15 млн рублей.

Решение. Пусть первоначальный вклад равен S (млн рублей). Тогда в конце первого года вклад составит $1{,}1S$. а в конце второго — $1{,}21S$. В начале третьего года вклад составит $1{,}21S+10$, а в конце — $1{,}331S+11$. В начале четвёртого года вклад составит $1{,}331S+21$, а в конце — $1{,}4641S+23{,}1$.

По условию, нужно найти наибольшее целое S, для которого выполнено неравенство

$$(1,4641S+23,1)-S-20<15 \Leftrightarrow S<25\frac{25}{39}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 25. Значит, размер первоначального вклада составляет 25 млн руб.

Ответ: 25 миллионов рублей.

21. Тип 16 № 551503

5 января 2020 года Андрей планирует открыть вклад на сумму 3 миллиона рублей. Первые три года 2 января банк будет начислять 10% на сумму вклада, а в последующие годы банк будет начислять 5% на сумму вклада.

4 января каждого года Андрей будет делать дополнительный взнос на вклад так, чтобы после этого величина вклада на 5 января была больше величины вклада на 5 января прошлого года на одно и то же число. Определите общий размер начислений банка, если 3 января 2031 года на вкладе будет лежать 24,15 миллиона рублей.

Решение. 2 января 2031 года банк увеличит сумму вклада на 5%, после чего на вкладе окажется 24,15 миллиона рублей. Тогда 5 января 2030 года сумма вклада составляла $\frac{24,15}{1,05}=23$ млн руб. По условию, величина вклада на 5 января была больше величины вклада на 5 января прошлого года на одно и то же число и за 10 лет выросла на 20 млн руб., значит, каждый год величина вклада увеличивалась на 2 млн руб. Заполним таблицу.

Год	Величина вклада 2 января, после начисления процентов, млн руб.	Величина вклада 5 января, млн руб.
2020		3
2021	$3+3\cdot 0,10$	5
2022	$5+5\cdot 0,10$	7
2023	$7+7\cdot 0,10$	9
2024	$9+9\cdot 0,05$	11
2025	$11+11\cdot 0,05$	13
...	...	...

2030	$21+21\cdot 0,05$	23
2031	$23+23\cdot 0,05=24,15$	

Суммируя величины ежегодных начислений, указанные в первом столбце таблицы, находим общий размер начислений банка:

$$3\cdot 0,10+5\cdot 0,10+7\cdot 0,10+9\cdot 0,05+11\cdot 0,05+$$
$$+13\cdot 0,05+\ldots+21\cdot 0,05+23\cdot 0,05=$$
$$=1,5+\frac{9+23}{2}\cdot 8\cdot 0,05=1,5+6,4=7,9 \text{ млн руб.}$$

Ответ: 7,9 млн руб.

22. Тип 16 № 552934

3 января 2020 года Георгий планирует положить на депозит вклад размером 2 миллиона рублей. 1 января каждого года банк начисляет 10% на сумму вклада, 2 января каждого года Георгий делает дополнительный взнос на вклад так, чтобы после этого разности между величиной вклада на 3 января и величиной вклада на 3 января прошлого года образовывали арифметическую прогрессию с разностью 1 млн руб. Определите общий размер начислений банка, если 3 января 2027 года на вкладе будет лежать 30 млн руб.

Решение. Пусть 3 января 2021 года величина вклада будет составлять $2+x$ млн руб. Тогда изменение величины вклада будет происходить согласно таблице.

Год	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Размер вклада 3 января, млн руб.	2	$2+x$	$2+2x+1$	$2+3x+3$	$2+4x+6$	$2+5x+10$	$2+6x+15$	$2+7x+21$

По условию, 3 января 2027 года на вкладе будет лежать 30 млн руб., тогда $2+7x+21=30,$ откуда $x=1.$

Составим таблицу начислений.

Год	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
Размер начисления , млн руб.	$2\cdot 0,1$	$3\cdot 0,1$	$5\cdot 0,1$	$8\cdot 0,1$	$12\cdot 0,1$	$17\cdot 0,1$	$23\cdot 0,1$

Из таблицы находим, что общий размер начислений банка к 3 января 2027 года составит

$$0,1\cdot(2+3+5+8+12+17+23)=0,1\cdot 70=7 \text{ млн руб.}$$

Ответ: 7 млн руб.

23. Тип 16 № 553316

Егор положил в банк некоторую сумму денег. Через год, после начисления процентов, он добавил на свой счет сумму, составляющую 0,9 исходной, в результате чего остаток на счете стал равен 3,4 миллиона рублей. А еще через год, после начисления процентов, остаток на его счете увеличился 2,2 раза по сравнению с исходной суммой. Какую сумму (в млн руб.) Егор положил в банк первоначально, если в конце каждого года банк начислял один и тот же процент годовых?

Решение. Пусть первоначально Егор положил в банк S млн руб., процент, ежегодно начисляемый банком, равен r, а повышающий коэффициент $k=1+\dfrac{r}{100}$. Тогда через год сумма на счёте будет $Sk+0,9S$ и она по условию равна 3,4 млн руб.: $Sk+0,9S=3,4.\ (*)$ Ещё через год сумма на счёте составит $S(k+0,9)k$ и будет равна $2,2S.$ Получаем уравнение:

$$S(k+0,9)k=2,2S \underset{S>0}{\Leftrightarrow} k^2+0,9k=2,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2+0,9k-2,2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1,1, \\ k=-2 \end{array}\right. \underset{k>0}{\Leftrightarrow} k=1,1.$$

Подставляя найденное значение k в уравнение ($*$), получаем:

$$1,1S+0,9S=3,4 \Leftrightarrow 2S=3,4 \Leftrightarrow S=1,7.$$

Таким образом, первоначально Егор положил в банк 1,7 млн рублей.

Ответ: 1,7 млн рублей.

24. Тип 16 № 556538

По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

Решение. Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, т. е. умножается на коэффициент 1,1. Тогда через три года сумма на вкладе «А» будет равна $1,1^3S=1,331S.$ Аналогично, на вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$$1,11^2\left(1+\frac{n}{100}\right)S=1,2321\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — натуральное число.

По условию требуется найти наибольшее натуральное решение неравенства

$$1,2321\left(1+\frac{n}{100}\right)S<1,331S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n<100\cdot\frac{13310-12321}{12321}=100\cdot\frac{989}{12321}=8,02... \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=8.$$

Ответ: 8.

25. Тип 16 № 558932

Марина и Надежда открыли вклады одинакового размера в одном из банков на четыре года. Ежегодно в течение первых трёх лет банк увеличивал каждый вклад на 10%, а в конце четвёртого года на 12% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов Марина ежегодно пополняла вклад на x рублей, где x — натуральное число. Надежда пополняла свой вклад только в начале третьего года, но на сумму $2x$ рублей. Найдите наименьшее значение x, при котором через четыре года на счету Надежды стало на целое число десятков рублей больше, чем у Марины.

Решение. Пусть первоначальная сумма вклада равна S руб. Заполним таблицу.

Номер года	Марина		Надежда	
	Вложение в начале года, руб.	Сумма с учётом процентов в конце года, руб.	Вложение в начале года, руб.	Сумма с учётом процентов в конце года, руб.
1	S	$1,1S$	S	$1,1S$
2		$1,1^2S$		$1,1^2S$
3	$+x$	$1,1\left(1,1^2S+x\right)$	$+2x$	$1,1\left(1,1^2S+2x\right)$
4	$+x$	$1,12\left(1,1\left(1,1^2S+x\right)+x\right)$		$1,12\cdot1,1\left(1,1^2S+2x\right)$

Найдем разность сумм на счетах в конце четвёртого года:

$$1,12\cdot 1,1\left(1,1^2S+2x\right)-1,12\left(1,1\left(1,1^2S+x\right)+x\right)=$$
$$=1,12\left(1,1^3S+2,2x-1,1^3S-2,1x\right)=$$
$$=1,12\cdot 0,1x=0,112x.$$

По условию задачи, эта разность должна составлять натуральное число десятков рублей, то есть $10n$ руб., где $n\in\mathbb{N}.$ Следовательно, должно быть справедливо равенство

$$0,112x=10n\Leftrightarrow x=\frac{10n\cdot 1000}{112}\Leftrightarrow x=\frac{5n\cdot 125}{7}.$$

Наименьшее натуральное значение x достигается при наименьшем n, кратном 7, то есть при $n = 7$. Тогда

$$x=\frac{5\cdot 7\cdot 125}{7}=625.$$

Ответ: 625.

26. Тип 16 № 560734

По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 7% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение. Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, т. е. увеличивается в 1,1 раза. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1,1^3\cdot S=1,331\cdot S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1,07\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2\cdot S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов. По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1,07\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2\cdot S>1,331\cdot S\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{n}{100}\right)^2>\frac{1331}{1070}=1,24\ldots$$

При $n = 12$ неравенство

$$1,12^2>1,24\cdots\Leftrightarrow 1,2544>1,24\ldots$$

верно, а при $n = 11$ неравенство

$$1,11^2>1,24\cdots\Leftrightarrow 1,2321>1,24\ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 12.

27. Тип 16 № 562071

Вкладчик внёс некоторую сумму в Сбербанк под определённый процент годовых. Через год он взял половину получившейся суммы и переложил её в коммерческий банк, процент годовых которого в 32 раза выше, чем в Сбербанке. Ещё через год сумма вкладчика в коммерческом банке превысила вложенную туда первоначальную сумму на 4%. Каков процент годовых в Сбербанке?

Решение. Пусть первоначальная сумма вклада равна K у. е., процент вознаграждения Сбербанка — r% годовых. Тогда через год сумма вклада составит $K(1+0,01r)$ у. е., а её половина $\frac{K}{2}(1+0,01r)$ у. е. Эту сумму вкладчик перекладывает в коммерческий банк. Через год вклад в коммерческом банке составит

$$\frac{K}{2}(1+0,01r)\cdot(1+0,32r)\ \text{у. е.}$$

Приращение вклада в коммерческом банке составит

$$\frac{K}{2}(1+0,01r)\cdot(1+0,32r)-\frac{K}{2}(1+0,01r)=$$
$$=\frac{K}{2}(1+0,01r)\cdot(1+0,32r-1)=\frac{K}{2}(1+0,01r)\cdot 0,32r\ (\text{у. е.}).$$

Полученная сумма составляет 4% или $\frac{1}{25}$ часть от суммы $\frac{K}{2}\cdot(1+0,01r)$, составим и решим относительно r уравнение:

$$\frac{K}{2}\cdot(1+0,01r)\cdot 0,32r=\frac{1}{25}\cdot\frac{K}{2}\cdot(1+0,01r)$$

откуда получаем:

$$r=\frac{1}{25\cdot 0,32}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: 0,125.

Приведем решение Сабины Орлянской.

Вклад в коммерческом банке за год увеличился на 4%, значит, 4% это годовая процентная ставка коммерческого банка. Годовая процентная ставка Сбербанка в 32 раза меньше. Следовательно, она равна 4% : 32 = 0,125%.

Ответ: 0,125.

28. Тип 16 № 563301

Семен и Матвей открыли вклады одинакового размера в одном из банков на три года. Ежегодно в течение первых двух лет банк увеличивал каждый вклад на 10%, а в конце третьего года — на 5% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале второго и третьего годов Семен ежегодно пополнял вклад на x тысяч рублей, где x — натуральное число. Матвей пополнял свой вклад только в начале третьего года, но на сумму $2x$ тысяч рублей. Найдите наименьшее значение x, при котором через три года на счету Семена стало на четное число тысяч рублей больше, чем у Матвея.

Решение. Пусть первоначальный размер вклада равен S тыс. рублей, тогда через три года на счету Семёна будет

$$((S\cdot 1,1+x)\cdot 1,1+x)\cdot 1,05\ \text{тыс. рублей.}$$

А на счету Матвея будет

$$(S\cdot 1,1\cdot 1,1+2x)\cdot 1,05\ \text{тыс. рублей.}$$

Найдём разность:

$$((S\cdot 1,1+x)\cdot 1,1+x)\cdot 1,05-(S\cdot 1,1\cdot 1,1+2x)\cdot 1,05=$$
$$=0,105x=\frac{21x}{200}\text{ тыс. руб.}$$

Наименьшее значение x, при котором $\frac{21x}{200}$ является чётным числом, равно 400.

Ответ: 400.

29. Тип 16 № 620218

Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов он дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму (в тысячах рублей) Владимир ежегодно добавлял к вкладу?

Решение. Пусть Владимир изначально поместил в банк $S=3600$ тыс. руб., а в конце каждого из первых двух лет дополнительно вносил x тыс. руб. В соответствии с условием заполним таблицу.

Год	Сумма на начало года тыс. руб.	Сумма на конец года (с процентами) тыс. руб.	Дополнительное вложение тыс. руб.
1	S	$1,1S$	x
2	$1,1S+x$	$1,1^2S+1,1x$	x
3	$1,1^2S+2,1x$	$1,1^3S+2,31x$	

К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%, значит,

$$1,1^3S+2,31x=1,485S\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2,31x=0,154S\Leftrightarrow x=\frac{0,154S}{2,31}.$$

Учитывая, что $S=3600,$ получаем

$$x=\frac{0,154\cdot 3600}{2,31}=240.$$

Ответ: 240 тыс. руб.

30. Тип 16 № 620478

Вкладчик разместил в банке 32 тысячи рублей. Несколько лет он получал то 5%, то 10% годовых, а за последний год получил 25% годовых. При этом проценты начислялись в конце каждого года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 53 361 рублю. Сколько лет пролежал вклад?

Решение. Пусть x лет банк начислял 5% годовых, а y лет банк начислял 10% годовых. Тогда

$$32000\cdot 1,05^x\cdot 1,1^y\cdot 1,25=53361\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^5\cdot 10^3\cdot\left(\frac{21}{20}\right)^x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^y\cdot\frac{5}{4}=3^2\cdot 7^2\cdot 11^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{21}{20}\right)^x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^y=\frac{21^2\cdot 11^2}{2^2\cdot 10^4}.$$

Значит, $x=2$ и $y=2,$ и всего вклад пролежал в банке 5 лет.

Ответ: 5 лет.

Примечание.

Более сложные варианты этой задачи см. в номерах 620778, 635568, 532959 и 506948.

31. Тип 16 № 620778

Билл несколько лет назад вложил деньги в акции некоего предприятия. Ежегодно он получал прибыль по акциям сначала $9\frac{1}{11}\%$ в год, потом 37,5% в год и, наконец, $6\frac{2}{3}\%$ в год и сразу же вкладывал деньги в те же акции. Известно, что одинаковые процентные ставки сохранялись равное число лет, в результате стоимость акций увеличилась на 156%. Определите, сколько лет Билл получал прибыль по акциям.

Решение. Пусть изначально вложенная сумма равны S, а каждая из процентных ставок держалась x лет. Тогда через $3x$ лет прибыль по акциям составляла

$$S\cdot\left(1+\frac{9\frac{1}{11}}{100}\right)^x\cdot\left(1+\frac{37,5}{100}\right)^x\cdot\left(1+\frac{6\frac{2}{3}}{100}\right)^x=$$
$$=S\cdot\left(\frac{12}{11}\right)^x\cdot\left(\frac{11}{8}\right)^x\cdot\left(\frac{16}{15}\right)^x=2^{3x}\cdot5^{-x}S.$$

По условию в результате стоимость акций увеличилась на 156%, то есть стала равна

$$S\cdot\left(1+\frac{156}{100}\right)=S\cdot\frac{256}{100}=2^6\cdot5^{-2}S.$$

Решим в целых числах уравнение:

Not match begin/end

Таким образом, Билл получал прибыль по акциям 6 лет.

Ответ: 6.

Приведём общий подход к решению этой задачи.

Если прибыль по акциям меняется с течением времени, задачу можно свести к системе уравнений. Покажем, как это сделать.

Пусть x лет прибыль по акциям составляла $9\frac{1}{11}\%$ в год, y лет — 37,5% в год, z лет — $6\frac{2}{3}\%$ в год, а начальная стоимость акций составляла S. Тогда через $(x+y+z)$ лет стоимость акций будет составлять

$$S\cdot\left(1+\frac{9\frac{1}{11}}{100}\right)^x\cdot\left(1+\frac{37,5}{100}\right)^y\cdot\left(1+\frac{6\frac{2}{3}}{100}\right)^z=$$
$$=S\cdot\left(\frac{12}{11}\right)^x\cdot\left(\frac{11}{8}\right)^y\cdot\left(\frac{16}{15}\right)^z=$$
$$=S\cdot2^{2x+4z-3y}\cdot11^{y-x}\cdot3^{x-z}\cdot5^{-z}.$$

По условию в результате стоимость акций увеличилась на 156%, то есть стала равна

$$S\cdot\left(1+\frac{156}{100}\right)=S\cdot\frac{256}{100}=S\cdot2^6\cdot5^{-2}.$$

Решим в целых числах уравнение:

$$2^{2x+4z-3y}\cdot 11^{y-x}\cdot 3^{x-z}\cdot 5^{-z}=2^6\cdot 5^{-2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4z-3y=6,\\ y-x=0,\\ x-z=0,\\ -z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=2,\\ z=2.\end{cases}$$

Таким образом, Билл получал прибыль по акциям 6 лет.

Ответ: 6.

Примечание.

Более сложные варианты этой задачи см. в номерах 635568, 532959 и 506948. Более простой: 620478

32. Тип 16 № 622099

Трейдер потратил треть своих денег на приобретение акций одного акционерного общества (АО), а остальные деньги — на акции второго АО. Спустя три месяца цены акций обоих АО выросли на определенные для каждого АО проценты, а еще через три месяца цены акций выросли на столько же процентов, что и в предыдущий период. В результате за полгода общая стоимость акций трейдера выросла на 98%. Если бы после первых трех месяцев трейдер продал все акции первого АО по новой цене и на все полученные деньги приобрел бы акции второго АО, то общий прирост инвестиций за полгода составил бы 110%. Какой процент прибыли получит трейдер за полгода, вложив всю сумму в акции первого АО?

Решение. Пусть общая сумма инвестированных денег равна $3S$, и пусть каждые три месяца акции первого АО росли на a%, а акции второго АО — на b%. Обозначим повышающие коэффициенты $x=1+\dfrac{a}{100}$ и $y=1+\dfrac{b}{100}$. Тогда

$$\begin{cases}Sx^2+2Sy^2=3S\cdot 1,98,\\ Sxy+2Sy^2=3S\cdot 2,1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2y^2=5,94,\\ xy+2y^2=6,3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=0,36+x^2,\\ 2y^2=5,94-x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2y^2=2(0,36+x^2)^2,\\ 2y^2=5,94-x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2(5,94-x^2)=0,2592+1,44x^2+2x^4,\\ 2y^2=5,94-x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-1,5x^2+0,0864=0,\\ 2y^2=5,94-x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=0,06,\\ x^2=1,44\end{array}\right.\\ 2y^2=5,94-x^2.\end{cases}\underset{x>1,y>1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=1,2,\\ y=1,5.\end{cases}$$

Если трейдер вложит всю сумму в акции первого АО, то вложенная сумма увеличится в x^2 раз, т. е. в 1,44 раза или на 44%

Ответ: 44.

33. Тип 16 № 627046

Пенсионерка положила некоторую сумму на счет в банке на полгода. По этому вкладу установлен «плавающий» процент, то есть число начисленных процентов зависит от числа полных месяцев нахождения вклада на счете. В таблице представлены условия начисления процентов.

Срок вклада	1−2 месяца	3−4 месяца	5−6 месяцев
Ставка в % годовых	6%	18%	12%

Какой процент от суммы первоначального вклада составляет сумма, начисленная банком в качестве процентов, если каждый месяц, за исключением последнего, после начисления процентов банком она добавляет на счет такую сумму, чтобы за месяц вклад увеличился на 10% от первоначального вклада?

Решение. В условии задачи приведены годовые процентные ставки. Месячные ставки пропорционально меньше: за два месяца хранения денег будет начислено $6:12=0{,}5\,(\%)$ от суммы вклада, за 4 месяца будет начислено $18:12=1{,}5\,(\%)$, а за 6 месяцев будет начислено $12:12=1\,(\%)$. Заметим, что условие задачи непротиворечиво, поскольку 10% больше, чем каждая из надбавок в размере 0,5%, 1% и 1,5%.

Пусть первоначально сумма вклада была равна K у. е., составим таблицу по данным задачи.

Месяцы	**Начисление банка, (у. е.)**	**Величина вклада к началу следующего месяца с учетом дополнительного взноса (у. е.)**
1	$K\cdot 0,005=0,005K$	$1{,}1K$
2	$1,1K\cdot 0,005=0,0055K$	$1{,}2K$
3	$1,2K\cdot 0,015=0,018K$	$1{,}3K$
4	$1,3K\cdot 0,015=0,0195K$	$1{,}4K$
5	$1,4K\cdot 0,01=0,014K$	$1{,}5K$
6	$1,5K\cdot 0,01=0,015K$	$1,5K+0,015K=1,515K$ (дополнительного вклада не было)

За полгода банк начислил

$$(0,005+0,0055+0,018+0,0195+0,014+0,015)K=0,077K\ \text{(у. е.)},$$

то есть $\dfrac{0,077K}{K}\cdot 100\%=7,7\%.$

Ответ: 7,7.

34. Тип 16 № 627927

В банк помещен вклад 64 000 рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трех лет после начисления процентов вкладчик дополнительно клал на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвертого года после начисления процентов оказалось, что вклад составляет 385 000 рублей. Какую сумму в рублях ежегодно добавлял вкладчик?

Решение. Пусть начальная сумма вклада равна $S=64\,000$ руб., повышающий коэффициент равен $k=1+\dfrac{25}{100}=\dfrac{5}{4}$, а сумма, которую ежегодно добавлял вкладчик, равна x руб. Тогда в конце первого года после начисления процентов и внесения дополнительной суммы вклад составлял (в рублях):

$$kS+x.$$

В конце второго года:

$$k^2S+kx+x.$$

В конце третьего года:

$$k^3S+k^2x+kx+x.$$

В конце четвертого года:

$$k^4S+k^3x+k^2x+kx.$$

По условию полученная сумма равна 385 000 руб. Составим уравнение:

$$k^4S+k^3x+k^2x+kx=385\,000,$$

Следовательно,

$$x=\frac{385\,000-k^4S}{k^3+k^2+k}=\frac{385\,000-k^4S}{k(k^2+k+1)}=$$
$$=\frac{(385\,000-k^4S)(k-1)}{k(k^3-1)}.$$

Вычислим x, подставив числовые значения переменных:

$$x=\frac{\left(385\,000-\left(\frac{5}{4}\right)^4\cdot 64\,000\right)\left(\frac{5}{4}-1\right)}{\frac{5}{4}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^3-1\right)}=$$
$$=\frac{385\,000-\frac{625}{64\cdot 4}\cdot 64\,000}{5\left(\frac{125}{64}-1\right)}=\frac{385\,000-625\cdot 250}{5\cdot\frac{61}{64}}=$$
$$=\frac{(77\,000-31\,250)\cdot 64}{61}=48\,000.$$

Ответ: 48 000 рублей.

35. Тип 16 № 630664

По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение — 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты планируется оставлять вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов потребуются дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и во второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

Решение. К началу 2-го года получится $1,1\cdot 12+n=13,2+n$ млн рублей вложений, а к началу 3-го года —

$$1,1(13,2+n)+n=14,52+2,1n.$$

По условию $14,52+2,1n\geqslant 24$, откуда следует, что $n\geqslant 4\frac{18}{35}$. Наименьшее целое значение $n = 5$.

Тогда к началу 3-го года получится

$$14,52+10,5=25,02 \text{ млн рублей.}$$

К началу 4-года получим $1,1\cdot 25,02+m$ млн рублей, а к концу проекта —

$$1,1(1,1\cdot 25,02+m)+m=30,2742+2,1m.$$

По условию $30,2742+2,1m \geqslant 36$, откуда следует, что $m \geqslant 2\frac{2543}{3500}$. Наименьшее целое значение $m = 3$.

Ответ: $n = 5$ млн рублей и $m = 3$ млн рублей.

36. Тип 16 № 633754

Первый банк предлагает открыть вклад с процентной ставкой 10%, а второй — 11%. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Клиент сделал одинаковые вклады в оба банка. Через два года второй банк уменьшил процентную ставку по вкладу с 11% до P%. Еще через год клиент закрыл оба вклада и забрал все накопившиеся средства, и оказалось, что второй банк принес ему больший доход, чем первый. Найдите наименьшее целое P, при котором это возможно.

Решение. Пусть первоначальный вклад равен S у. е., тогда через три года в первом банке сумма вклада составит $S \cdot 1,1^3$ у. е., а во втором банке — $S \cdot 1,11^2 \cdot (1+0,01P)$ у. е. По условию, второй банк принес больший доход, чем первый, значит,

$$S \cdot 1,1^3 - S < S \cdot 1,11^2 \cdot (1+0,01P) - S \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,1^3 < 1,11^2 \cdot (1+0,01P) \Leftrightarrow 1+0,01P > \frac{1,1^3}{1,11^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1+0,01P > \frac{1,331}{1,2321} \Leftrightarrow 1+0,01P > \frac{13310}{12321} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1+0,01P > 1\frac{989}{12321} \Leftrightarrow P > \frac{98900}{12321} \Leftrightarrow P > 8\frac{332}{12321}.$$

Значит, наименьшее целое P, при котором это возможно, равно 9.

Ответ: 9.

37. Тип 16 № 635155

По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает на 22% в конце каждого года из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение. Пусть начальная сумма вклада равна S ед, а процентная ставка по вкладу «Б» на третий год равна x%. Тогда через три года по вкладу «А» на счету будет сумма $1,2^3S$, а по вкладу «Б» — сумма $1,22^2(1+0,01x)S$. Вклад «Б» выгоднее вклада «А», если

$$1,22^2(1+0,01x)S > 1,2^3S \Leftrightarrow 1+0,01x > \frac{1,2^3}{1,22^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{1,2^3-1,22^2}{1,22^2} \cdot 100 \Leftrightarrow x > \frac{1,728-1,4884}{1,4884} \cdot 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{23,96}{1,4884} \Leftrightarrow x > 16\frac{1456}{14884}.$$

Таким образом, наименьшее целое число процентов равно 17.

Ответ: 17.

38. Тип 16 № 635568

Павел положил 1 миллион рублей на счет в банк на некоторое количество лет. В конце каждого года его вклад увеличивается на 15%. Потом Павел переложил все деньги в другой банк. Во втором банке вклад увеличивался на 20% в конце каждого года. Через несколько лет вклад Павла составил 2 285 280 рублей. Сколько лет вклад Павла хранился во втором банке?

Решение. Пусть во втором банке вклад хранился n лет. В первом банке вклад ежегодно увеличивался в 1,15 раза, а во втором банке — в 1,2 раза. Разделим итоговую сумму 2 285 280 руб. на 1,15, получим 1 987 200. Раздели еще раз, получим 1 728 000. Третье деление на 1,15 даёт периодическую дробь, в, значит, в первом банке вклад лежал ровно два года. Оставшееся время вклад лежал вот втором банке, увеличиваясь в 1,2 раза ежегодно. Последовательно деля 1 728 000 на 1,2, за три деления получим исходную сумму в 1 миллион рублей. Таким образом, во втором банке вклад лежал три года.

Приведем другое решение.

В первом банке вклад ежегодно увеличивался в 1,15 раза, то есть в $\frac{23}{20}$ раза. Если в первом банке вклад лежал k лет, а во втором — n лет, то

$$1\,000\,000 \cdot 1,15^k \cdot 1,2^n = 2\,285\,280 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1\,000\,000 \cdot \left(\frac{23}{20}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^n = 2\,285\,280.$$

Число 23 — простое, правая часть делится на 23^2, откуда получаем:

$$1\,000\,000 \cdot \frac{23^2}{20^2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^n = 2\,285\,280 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^n = \frac{2\,285\,280}{2500 \cdot 529} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^n = \frac{432}{250} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^n = \frac{216}{125} \Leftrightarrow n = 3.$$

Ответ: 3.

Примечание.

См. также задачи в номерах 620478, 620778, 506948 и 532959.

39. Тип 16 № 636745

Игнат 7 марта 2022 года положил на вклад в банке 400 000 рублей. Условия этого вклада таковы:
— в течение года запрещается выполнять какие-либо операции с этим вкладом;
— через каждые 3 месяца (до 7 марта 2023 года) банк увеличивает сумму, к тому моменту находящуюся на вкладе, на 0,25 r%.

Андрей 7 марта 2022 года положил на вклад в банке 410 700 рублей под 20% годовых. Условия этого вклада таковы:
— в течение года запрещается выполнять какие-либо операции с этим вкладом;
— 7 марта 2023 года банк увеличит вклад на 20%.

Известно, что Игнат через год получит со счета больше, чем Андрей. Найдите наименьшее целое значение r.

Решение. Пусть $k = 1 + \frac{0,25r}{100}$, тогда через год сумма на счету Игната составит $400\,000 \cdot k^4$ рублей. В то же время сумма на счету Андрея составит $410\,700 \cdot 1,2$ рублей, что по условию меньше суммы на счету Игната. Получаем:

$$400\,000 \cdot k^4 > 410\,700 \cdot 1,2 \Leftrightarrow 4000 \cdot k^4 > 4928,4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k^4 > 1,2321 \Leftrightarrow k^2 > 1,11.$$

Вернёмся к переменной r:

$$\left(1+\frac{0,25r}{100}\right)^2>1,11\Leftrightarrow(400+r)^2>444\cdot400\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(400+r)^2>177\,600.\qquad(*)$$

При всех неотрицательных значениях r функция $y(r)=(400+r)^2$ является возрастающей, поэтому можно найти наименьшее целое решение неравенства $(*)$ подбором. Для $y(21)=421^2=177\,241$ неравенство не выполняется, а для $y(22)=422^2=178\,084$ неравенство верно. Значит, оно верно для всех $r\geqslant22,$ и число 22 является его наименьшим целым решением.

Ответ: 22.

Примечание.
Условие задачи изменено редакцией сайта РЕШУ ЕГЭ. В оригинальной формулировке первое предложение «Игнат 7 марта 2022 года положил на вклад в банке 400 000 рублей под r% годовых» противоречило дальнейшему условию задачи.

40. Тип 16 № 643203

Вклад в размере 10 млн руб. планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает размер вклада на 10%. Кроме того в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн руб., где x — целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн руб.

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу:

Номер года	**Размер вклада в начале года млн руб.**	**Начисления банка, млн руб.**	**Размер вклада после начисления процентов, млн руб.**
1	10	$10\cdot0{,}1=1$	$10+1=11$
2	11	$11\cdot0{,}1=1{,}1$	$11+1{,}1=12{,}1$
3	$12{,}1+x$	$(12{,}1+x)\cdot0{,}1=1{,}21+0{,}1x$	$12{,}1+x+1{,}21+0{,}1x=13{,}31+1{,}1x$
4	$13{,}31+2{,}1x$	$(13{,}31+2{,}1x)\cdot0{,}1=1{,}331+0{,}21x$	

Общая сумма начислений банка составляет

$$1+1,1+1,21+0,1x+1,331+$$
$$+0,21x=4,641+0,31x\text{ млн руб.}$$

Общая сумма начислений банка будет больше 7 млн руб., если

$$4,641+0,31x>7\Leftrightarrow0,31x>2,359\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{2359}{310}\Leftrightarrow x>7\frac{189}{310}.$$

Наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству, равно 8.

Ответ: 8.

41. Тип 16 № 645891

Банк предлагает два типа вкладов — «Удачный» и «Прибыльный». По вкладу «Удачный» предоставляется 5% годовых; по вкладу «Прибыльный» — 2% за первый год и p%, начиная со второго года. Проценты по обоим вкладам начисляются в конце года и прибавляются к текущей сумме вклада. При каком наименьшем целом значении p трехлетний вклад «Прибыльный» окажется выгоднее трехлетнего вклада «Удачный» при условии, что первоначально вклады были равны?

Решение. Пусть начальные суммы вкладов равны S. Тогда

	Вклад «Удачный»	**Вклад «Прибыльный»**
Начальная сумма вклада	S	S
Сумма вклада в конце первого года, после начисления процентов	$1,05S$	$1,02S$
Сумма вклада в конце второго года, после начисления процентов	$1,05^2S$	$1,02\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)S$
Сумма вклада в конце третьего года, после начисления процентов	$1,05^3S$	$1,02\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^2S$

Трехлетний вклад «Прибыльный» окажется выгоднее трехлетнего вклада «Удачный» при выполнении неравенства

$$1,05^3S<1,02\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2S\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 105^3<102\cdot(100+p)^2\Leftrightarrow 105\cdot105^2<102\cdot(100+p)^2.$$

Заметим, что при $0<p\leqslant5$ неравенство не выполняется. Проверим целые значения p большие 5.

При $p=6$ получаем:

$$1\,157\,625<102\cdot106^2=1\,146\,072 \text{ — неверно,}$$

значит, $p=6$ не подходит. При $p=7$ получаем:

$$1\,157\,625<102\cdot107^2=1\,167\,798 \text{ — верно.}$$

Значит, 7 — наименьшее целое значение p, при котором трехлетний вклад «Прибыльный» окажется выгоднее трехлетнего вклада «Удачный».

Ответ: 7.

42. Тип 16 № 649748

В начале года у Ивана есть 90 тысяч рублей, которые он может положить целиком либо на банковский, либо на инвестиционный счёт. Сумма на инвестиционном счёте на конец любого года вычисляется по формуле $S=1,1\cdot S_0-2000,$ где S_0 — сумма на инвестиционном счёте на начало года в рублях. На банковском счёте сумма увеличивается за год на 8%. В начале любого года Иван может переложить всю сумму с одного счёта на другой. Какая наибольшая сумма может быть у Ивана через четыре года? Ответ дайте в рублях.

Решение. Выясним, при каких значениях S_0 инвестиционный счёт выгоднее банковского, решив неравенство:

$$1,1S_0-2000>1,08S_0\Leftrightarrow0,02S_0>2000\Leftrightarrow S>100\,000.$$

Значит, 90 тысяч рублей рублей выгоднее сначала положить на банковский счёт, и переложить её на инвестиционный, когда сумма на банковском счету превысит 100 тысяч рублей. Вычислим наибольшую сумму.

Номер года	**Тип счёта**	**Сумма на счету в начале года, руб.**	**Сумма на счету в конце года, руб.**
1	Банковский	$90\,000$	$90\,000\cdot1,08=97\,200$
2	Банковский	$97\,200$	$97\,200\cdot1,08=104\,976$
3	Инвестиционный	$104\,976$	$104\,976\cdot1,1-2000=113\,473,6$
4	Инвестиционный	$113\,473,6$	$113\,473,6\cdot1,1-2000=122\,820,96$

Таким образом, наибольшая сумма, которая может быть у Ивана через четыре года, равна 122 820,96 рубля.

Ответ: 122 820,96 рубля.

43. Тип 16 № 659133

Константин Константинович хочет положить сумму денег в банк под проценты. Треть этой суммы он помещает на вклад «Радостный» под $r\%$ годовых, а оставшуюся часть — на вклад «Надежный» под $q\%$ годовых. Проценты начисляются в конце года и добавляются к сумме вклада. Через год сумма вкладов с учетом процентов увеличилась на $\frac{2}{15}$ от первоначального значения, а через два года составила 463 200 рублей. Если бы изначально треть суммы была положена на вклад «Надежный», а оставшиеся средства — на вклад «Радостный», то через год сумма вкладов с учетом добавленных процентов увеличилась бы на $\frac{1}{6}$ от первоначальной. Чему в этом случае была бы равна сумма вкладов через 2 года?

Решение. Пусть начальный капитал равен S тыс. руб., а суммы на депозитах ежегодно увеличиваются в $k_1 = 1 + \frac{r}{100}$ и $k_2 = 1 + \frac{q}{100}$ раз. По прошествии первого года после начисления процентов на счетах было $\frac{1}{3}Sk_1 + \frac{2}{3}Sk_2 = S\left(1 + \frac{2}{15}\right)$ тыс. руб. соответственно. Если бы вкладчик первоначально положил $\frac{2}{3}$ капитала на вклад «Радостный», а $\frac{1}{3}$ капитала на вклад «Надежный», то через год на счетах было бы $\frac{2}{3}Sk_1 + \frac{1}{3}Sk_2 = S\left(1 + \frac{1}{6}\right)$ тыс. руб.

Решая систему уравнений относительно k_1 и k_2, находим:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}Sk_1 + \frac{2}{3}Sk_2 = \frac{17}{15}S, \\ \frac{2}{3}Sk_1 + \frac{1}{3}Sk_2 = \frac{7}{6}S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 = \frac{17}{5}, \\ 2k_1 + k_2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 2\left(\frac{7}{2} - 2k_1\right) = \frac{17}{5}, \\ k_2 = \frac{7}{2} - 2k_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k_1 = \frac{18}{5}, \\ k_2 = \frac{7}{2} - 2k_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{6}{5}, \\ k_2 = \frac{11}{10}. \end{cases}$$

К концу второго года сумма вкладов достигла величины $\frac{1}{3}Sk_1^2 + \frac{2}{3}Sk_2^2$. По условию она равна 463 200 руб., откуда получаем:

$$\frac{1}{3}Sk_1^2 + \frac{2}{3}Sk_2^2 = 463\,200 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{36}{25}S + \frac{2}{3} \cdot \frac{121}{100}S = 463\,200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{463200 \cdot 300}{386} \Leftrightarrow S = 360\,000.$$

Искомая величина суммы вкладов к концу второго года при вложении $\frac{1}{3}$ капитала на вклад «Надежный» и $\frac{2}{3}$ на вклад «Радостный» равна:

$$360\,000 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{36}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{121}{100}\right) = 490\,800 \text{ руб.}$$

Ответ: 490 800 рублей.

Примечание Решу ЕГЭ.

Не совсем понятно, зачем вкладчик поместил большую часть своего капитала под меньший процент.

44. Тип 16 № 660093

Валерий открыл вклад в банке, по которому банк выплачивает 8% годовых. По договору вклада он может снимать со счёта деньги не чаще одного раза в год после начисления банком процентов. В конце второго года Валерий снял со счёта 229 000 рублей, а в конце третьего года он снял со счёта 350 000 рублей, после чего сумма на счёте составила 190 000 рублей. Какую сумму вносил Валерий при открытии счёта?

Решение. Пусть S тыс. руб. — внесенная Валерием сумма. Тогда в конце второго года на вкладе стало $1{,}08^2S$ тыс. руб. После снятия осталось $(1{,}08^2S-229)$ тыс. руб., и в конце третьего года стало $1{,}08(1{,}08^2S-229)$ тыс. руб. После последнего снятия на вкладе осталось $1{,}08(1{,}08^2S-229)-350$ тыс. руб. По условию эта сумма равна 190 тыс. руб., тогда:

$$\begin{gathered}1{,}08(1{,}08^2S-229)-350=190 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1{,}08(1{,}08^2S-229)=540 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 108(1{,}08^2S-229)=54\,000 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1{,}08^2S-229=500 \Leftrightarrow 1{,}08^2S=729,\end{gathered}$$

а потому

$$\begin{gathered}S=\frac{729\cdot 10\,000}{108\cdot 108}=\frac{9^3\cdot 10\,000}{9\cdot 3\cdot 4\cdot 9\cdot 3\cdot 4}= \\ =\frac{10\,000}{4\cdot 4}=\frac{2500}{4}=625.\end{gathered}$$

Ответ: 625 тыс. руб.