РЕШУ ЕГЭ — математика профильная

1. Тип 16 № 508321

В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение. Решение 1. Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю девочек — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждая девочка в классе из 22 человек составляет $\frac{1}{22}$ от общего числа учащихся в этом классе, а в классе из 23 человек — $\frac{1}{23}$ от общего числа учащихся. Значит, если поменять местами девочку из большего класса и мальчика из меньшего, суммарный процент девочек вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда меньший класс полностью состоит из девочек, а в большем классе — 3 девочки и 20 мальчиков.

Решение 2. Пусть в меньший класс распределено x девочек (где $2 \leqslant x \leqslant 22$), тогда в больший класс попало $(25-x)$ девочек. Значит, суммарная доля девочек в двух классах равна $\frac{x}{22}+\frac{25-x}{23}=\frac{x}{506}+\frac{25}{23}$ и представляет собой линейную функцию с положительным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка [2; 22], то есть при $x=22$. Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из девочек, а в большем классе должно быть 3 девочки и 20 мальчиков.

Ответ: В одном классе — 22 девочки, в другом — 3 девочки и 20 мальчиков.

2. Тип 16 № 511227

В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение. Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, суточная зарплата которых составит $f_1(x)=4x^2$. Тогда на второй объект будет направлено $(24-x)$ рабочих — суточная заработная плата составит $f_2(x)=(24-x)^2=576-48x+x^2$. В день начальник будет должен платить рабочим $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=5x^2-48x+576$ у. е.

Рассмотрим функцию $f(x)$ при $0<x<24,\ x\in\mathbb{N}$. Это квадратичная функция, старший коэффициент положителен, следовательно, она имеет наименьшее значение при $x_0 = 4{,}8$. Заметим, что точка минимума не является натуральным числом, поэтому исследуемая функция достигает наименьшего значения в точке 4 или в точке 5. Найдем и сравним эти значения:

$$f(4)=5\cdot16-48\cdot4+576=16(5-12+36)=$$
$$=16\cdot29=16\cdot30-16=464,$$

$$f(5)=125-240+576=461.$$

Тем самым, на множестве натуральных значений аргумента наименьшее значение функции достигается в точке 5. Поэтому необходимо направить 5 рабочих на первый объект, 19 рабочих — на второй объект. Зарплата рабочих составит 461 у. е.

Ответ: 5 рабочих на 1-й объект, 19 рабочих на 2-й объект; 461 у. е.

3. Тип 16 № 511234

Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние? *Считайте, что перекресток не Т-образный, обе дороги продолжаются за перекрестком.*

Решение. Обозначим буквой t время, прошедшее с начального момента времени. Поскольку каждый велосипедист движется по взаимно перпендикулярным дорогам, то расстояние между ними может быть вычислено по теореме Пифагора. Рассмотрим $f(t)$ — квадрат длины в каждый момент времени, тогда:

$$f(t) = (5-40t)^2 + (3-30t)^2 =$$
$$= 25 - 400t + 1600t^2 + 9 - 180t + 900t^2 =$$
$$= 2500t^2 - 580t + 34.$$

Итак, $f(t) = 2500t^2 - 580t + 34,\ t \geqslant 0.$ У данной квадратичной функции есть наименьшее значение, которое достигается при $t_0 = \dfrac{580}{2\cdot 2500} = \dfrac{29}{250}$ ч. $= \dfrac{29}{250}\cdot 60$ мин $= 6\dfrac{24}{25}$ мин. Найдем его:

$$f\left(\frac{29}{250}\right) = \left(5 - 40\cdot\frac{29}{250}\right)^2 + \left(3 - 30\cdot\frac{29}{250}\right)^2 =$$
$$= \left(5 - \frac{116}{25}\right)^2 + \left(3 - \frac{87}{25}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{9}{25}\right)^2 + \left(-\frac{12}{25}\right)^2 = \left(\frac{15}{25}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Таким образом, минимальное расстояние между велосипедистами равно $\sqrt{f\left(\dfrac{29}{250}\right)} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$ км, и будет достигнуто через $6\dfrac{24}{25}$ мин.

Ответ: $6\dfrac{24}{25}$ мин, $\dfrac{3}{5}$ км.

Примечание.

Условие уточнено редакцией Решу ЕГЭ.

4. Тип 16 № 511887

Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью υ км/ч. После того, как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение υ, при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

Решение. Скорость сближения Алексея и Жучки (разность скоростей) $\Delta\upsilon = 9$ км/ч. Первоначальная разность расстояний между хозяином и собакой составляет $\Delta S = 6$ км. Найдем разностное отношение $t = \Delta S/\Delta\upsilon = 2/3$ часа. Это и есть время, которое потребовалось Жучке, чтобы догнать Алексея.

С того времени, как Жучка бежала за хозяином, Алексей прошел расстояние, равное $\dfrac{2}{3}\upsilon$ км. В соответствии с условием задачи Алексей прошел еще 6 км пока Жучка была дома. Значит, в направлении от дома Алексей, будучи на прогулке, прошел $6+\frac{2}{3}\upsilon$ км. Такой же путь Алексей прошел после того, как Жучка догнала его, но в обратном направлении. На преодоление этого пути (со скоростью 4 км/ч) потребовалось $\frac{6+\frac{2}{3}\upsilon}{4}=\frac{3}{2}+\frac{\upsilon}{6}$ часа. Итак, вся прогулка Алексея продлилась

$$\left(\frac{6}{\upsilon}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{\upsilon}{6}\right)=\left(\frac{6}{\upsilon}+\frac{\upsilon}{6}\right)+\frac{13}{6}\text{ часа.}$$

Эта сумма будет наименьшей, когда сумма двух взаимно обратных положительных выражений $\frac{6}{\upsilon}$ и $\frac{\upsilon}{6}$ примет наименьшее значение. И эта наименьшая сумма заведомо известна, она равна 2 (классическое неравенство $\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqslant 2$ — наименьшее значение достигается при $a = 1$). Следовательно, в нашем случае должно выполняться равенство $\frac{6}{\upsilon}=\frac{\upsilon}{6}=1$, то есть $\upsilon = 6$ км/ч. Время всей прогулки Алексея составляет $2+\frac{13}{6}=\frac{25}{6}$ часа.

Ответ: 6 км/ч, $\frac{25}{6}$ часа.

Приведем решение Андрея Анатольевича.

Пусть v — скорость Алексея, и S — расстояние,на котором он находился в тот момент, когда его догнала Жучка. Время движения Алексея до того момента, когда из дому выбежала Жучка, равно $\frac{6}{v}$, время движения от этого момента до встречи с Жучкой равно $\frac{S-6}{v}$, время движения до возвращения домой $\frac{S}{4}$, тогда общее время составит

$$t(v)=\frac{6}{v}+\frac{S-6}{v}+\frac{S}{4}=\frac{S(v+4)}{4v}.$$

С другой стороны, время движения Жучки до встречи с Алексеем составит $\frac{S}{v+9}$. Тогда

$$\frac{S-6}{v}=\frac{S}{v+9}\;\Leftrightarrow\; S=\frac{6(x+9)}{9}.$$

Подставив данное выражение для S в первое уравнение, получим

$$t(v)=\frac{6(v+9)(v+4)}{9\cdot 4v}=\frac{v^2+13v+36}{6v}.$$

Для нахождения минимального времени исследуем функцию *f(v)* на максимум и минимум с помощью производной:

$$f'(v)=\left(\frac{v^2}{6v}\right)'+\left(\frac{13v}{6v}\right)'+\left(\frac{36}{6v}\right)'=\frac{1}{6}-\frac{6}{v^2}.$$

Учитывая, что $v > 0$, найдем, что производная обращается в 0 при $v = 6$.

При $v = 6$ км/ч функция $f(v)$ принимает наименьшее значение, равное $\frac{25}{6}$ часа, или 4 часа 10 минут.

5. Тип 16 № 511894

В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 м^3 воды в час. Вторая труба наливает в час на $3V$ м^3 меньше, чем первая ($0 < V < 10$), а третья труба наливает в час на $10V$ м^3 больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 30% бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,7 бассейна. При каком значении V бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

Решение. Примем объем бассейна за 1. Пусть вначале первая и вторая трубы, работая вместе t_1 ч, налили $(30+30-3V)\cdot t_1 = (60-3V)t_1 = 0,3$ бассейна, далее все три трубы, работая вместе t_2 ч, налили $(30+30-3V+30+10V)\cdot t_2 = (90+7V)t_2 = 0,7$ бассейна. Тогда время наполнения бассейна

$$t(V) = t_1 + t_2 = \frac{0,1}{20-V} + \frac{0,7}{90+7V} = \frac{23}{(20-V)(90+7V)}.$$

Найдем, при каком V полученное выражение наименьшего значения. Графиком функции $y = (20-V)(90+7V)$ является парабола, пересекающая ось абсцисс в точках 20 и $-\frac{90}{7}$, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины этой параболы равна $\frac{20+\left(-\frac{90}{7}\right)}{2} = \frac{25}{7}$. Эта величина лежит в интервале (0; 10), а значит, наибольшее значение квадратного трехчлена на данном интервале и достигается при $V = \frac{25}{7}$. Осталось заметить, что наибольшее значение знаменателя положительно, поэтому оно соответствует наименьшему значению $t(V)$.

Ответ: $\frac{25}{7}$.

Примечание.

В общем случае можно исследовать функцию при помощи производной. Необходимо найти наименьшее значение этой функции на интервале $(0; 10)$. Найдем производную:

$$t'(V) = \frac{0,1}{(20-V)^2} - \frac{4,9}{(90+7V)^2}.$$

Решим уравнение $t'(V) = 0$, используя равносильность $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$:

$$\frac{0,1}{(20-V)^2} - \frac{4,9}{(90+7V)^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (90+7V)^2 = 49(20-V)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 90+7V = 7(20-V) \quad \text{или} \quad 90+7V = -7(20-V) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 14V - 50 = 0 \Leftrightarrow V = \frac{25}{7}.$$

Нетрудно показать, что это точка минимума, в которой функция достигает наименьшего значения на исследуемом промежутке.

Приведем другое решение.

Пусть объем бассейна равен A м^3. Первая и вторая трубы, работая вместе t_1 ч, налили $(30+30-3V)\cdot t_1=(60-3V)t_1=0,3A$ м^3 бассейна, далее все три трубы, работая вместе t_2 ч, налили $(30+30-3V+30+10V)\cdot t_2=(90+7V)t_2=0,7A$ м^3 бассейна. В результате бассейн был налит полностью.

Известно, что для любых двух положительных чисел t_1 и t_2 верно неравенство $t_1+t_2\geqslant 2\sqrt{t_1\cdot t_2}$ (неравенство Коши).

Рассмотрим произведение $t_1\cdot t_2$.

$$t_1\cdot t_2=\frac{0,1A}{20-V}\cdot\frac{0,7A}{90+7V}=$$
$$=\frac{0,7A^2}{1800-90V+140V-7V^2}=\frac{0,7A^2}{-7V^2+50V+1800}.$$

Ясно, что знаменатель полученной дроби имеет наибольшее значение в точке $V=\frac{50}{14}=\frac{25}{7}$. А это значит: $t_1\cdot t_2$ имеет наименьшее значение в точке $V=\frac{25}{7}$ (значение V принадлежит заданному промежутку). Следовательно, выражение $2\sqrt{t_1\cdot t_2}$ также будет иметь аналогичное значение в той же точке $V=\frac{25}{7}$. При этом:

$$2\sqrt{t_1\cdot t_2}=2\sqrt{\frac{0,1A}{20-\frac{25}{7}}\cdot\frac{0,7A}{90+7\cdot\frac{25}{7}}}=$$
$$=2A\cdot\sqrt{\frac{1}{200-\frac{250}{7}}\cdot\frac{0,7}{115}}=$$
$$=2A\sqrt{\frac{7}{1150}\cdot\frac{7}{1150}}=\frac{14A}{1150}=\frac{7A}{575}.$$
$$t_1+t_2=\frac{0,1A}{20-\frac{25}{7}}+\frac{0,7A}{90+7\cdot\frac{25}{7}}=$$
$$=A\cdot\left(\frac{1}{200-\frac{250}{7}}+\frac{0,7}{115}\right)=$$
$$=A\cdot\left(\frac{7}{1400-250}+\frac{7}{1150}\right)=$$
$$=7A\cdot\left(\frac{1}{1150}+\frac{1}{1150}\right)=\frac{14A}{1150}=\frac{7A}{575}.$$

Итак, при $V=\frac{25}{7}$ получим $t_1+t_2=2\sqrt{t_1\cdot t_2}$. А это значит, что в точке $V=\frac{25}{7}$ выражение t_1+t_2 также примет наименьшее значение.

6. Тип 16 № 512441 *i*

Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов A и B. Количество загруженных на баржу контейнеров типа B не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа A. Вес и стоимость одного контейнера типа A составляет 2 тонны и 5 млн. руб., контейнера типа B – 5 тонн и 7 млн. руб.соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн. руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Решение. Пусть x — количество перевозимых контейнеров типа A, y — количество контейнеров типа B, $x,\ \ y \in \mathbb{N}.$ Тогда вес контейнеров типа A составит $2x$ т, типа B — $5y$ т. В соответствии с условием задачи $2x+5y \leqslant 134.$ Кроме того, должно выполняться условие: $y \geqslant \dfrac{5}{4}x.$

Пусть S — суммарная стоимость всех контейнеров. Тогда $S = 5x + 7y$. Нам предстоит исследовать функцию $S(x, y)$ на наибольшее значение при заданных условиях.

Имеем: $S=5x+7y \Leftrightarrow x=\dfrac{S-7y}{5}$, значит,

$$\begin{cases} \dfrac{2(S-7y)}{5}+5y \leqslant 134, \\ y \geqslant \dfrac{5(S-7y)}{4 \cdot 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S-14y+25y \leqslant 670, \\ 4y \geqslant S-7y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y \leqslant 670-2S, \\ 11y \geqslant S \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{S}{11} \leqslant y \leqslant \dfrac{670-2S}{11}.$$

Найдем, при каком значении y выполняется неравенство $\dfrac{S}{11} \leqslant \dfrac{670-2S}{11}.$

$$3S \leqslant 670 \Leftrightarrow S \leqslant 223\frac{1}{3}.$$

Поскольку $x, y,$ а также стоимости контейнеров — числа натуральные, то $S \in \mathbb{N}.$ Значит, $S \leqslant 223.$

Если $S=223,$ то $\dfrac{223}{11} \leqslant y \leqslant \dfrac{670-446}{11} \Leftrightarrow 20\dfrac{3}{11} \leqslant y \leqslant 20\dfrac{4}{11}.$ Натуральных решений нет.

Если $S=222,$ то $\dfrac{222}{11} \leqslant y \leqslant \dfrac{670-444}{11} \Leftrightarrow 20\dfrac{2}{11} \leqslant y \leqslant 20\dfrac{6}{11}.$ Натуральных решений нет.

Если $S=221,$ то $\dfrac{221}{11} \leqslant y \leqslant \dfrac{670-442}{11} \Leftrightarrow 20\dfrac{1}{11} \leqslant y \leqslant 20\dfrac{8}{11}.$ Натуральных решений нет.

Если $S=220,$ то $\dfrac{220}{11} \leqslant y \leqslant \dfrac{670-440}{11} \Leftrightarrow 20 \leqslant y \leqslant 20\dfrac{10}{11}.$ Натуральное решение: $y=20.$

Вычислим значение x при $y=20. x=\dfrac{220-140}{5}=16 \in \mathbb{N}.$

Итак, искомое значение 220 млн. руб.

Ответ: 220 млн. руб.

Приведём арифметическое решение.

Заметим, что контейнер типа A приносит 2,5 млн руб. за тонну, а контейнер типа B — 1,4 млн руб. за тонну, поэтому контейнеров типа A должно быть как можно больше, а контейнеров типа B как можно меньше. По условию, на каждые 4 контейнера типа A должно приходиться не менее 5 контейнеров типа B. Пусть контейнеров типа A будет $4x$, а контейнеров типа B — $5x$, их общий вес составит $8x+25x = 33x$ тонн. Грузоподъёмность баржи 134 тонны, поэтому наибольшее возможное целое значение $x = 4$.

Если $x = 4$, то на баржу можно загрузить 16 контейнеров типа A и 20 контейнеров типа B, их стоимость составит $80+140 = 220$ млн руб. При этом баржа будет недогружена на 2 тонны. Заменим два контейнера типа A одним контейнером типа B. Стоимость 14 контейнеров типа A и 21 контейнера типа B составляет $70+147=217$ млн руб., при этом баржа недогружена на 1 тонну. Можно было бы загрузить баржу полностью, заменив ещё два контейнера типа A одним контейнером типа B, но при этом общая стоимость контейнеров снова бы снизилась на 3 млн руб. Из этого следует, что оптимально не загружать баржу полностью, а загрузить на неё 16 контейнеров типа A и 20 контейнеров типа B общей стоимостью 220 млн руб.

Примечание.

Проверять изменение стоимости при дозагрузке не полностью нагруженной баржи — обязательная часть решения. Например, если бы контейнер типа B стоил 11 млн руб., а другие данные задачи не поменялись бы, то стоимость 16 контейнеров типа A и 20 контейнеров типа B составила бы $80+220=300$ млн руб. (недогружено 2 тонны), стоимость 14 контейнеров типа A и 21 контейнера типа B составила бы $70+231=301$ млн руб. (недогружена 1 тонна), а стоимость 12 контейнеров типа A и 22 контейнеров типа B составила бы 302 млн руб. — баржа загружена полностью, прибыль максимальна, дальнейшая замена контейнеров типа A на контейнеры типа B приводит к уменьшению прибыли.

См. так же решение задания 513295.

7. Тип 16 № 512665

Леонид является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование.

В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они производят t приборов.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Леонид платит рабочему 1 тысячу рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение. Пусть рабочие первого завода за неделю производят x приборов, второго завода — y приборов, и пусть выполнено условие. $x+y=20$. Тогда доля человеко-часов, затраченных на первом заводе, составит $4x^3$, а на втором — y^3. Таким образом, Леониду придется запланировать на оплату труда рабочих обоих заводов $1\cdot(4x^3+y^3)=S$ тысяч рублей в неделю. Так как $y=20-x$, то $S(x)=4x^3+(20-x)^3, 0\leqslant x\leqslant 20.$

Найдем наименьшее значение функции $S(x)=4x^3+(20-x)^3$ на $[0;20]$:

$$S(x)=4x^3+8000-3\cdot 400x+3\cdot 20x^2-x^3=$$
$$=3x^3+60x^2-1200x+8000.$$
$$S'(x)=9x^2+120x-1200;$$
$$S'(x)=0\Leftrightarrow 9x^2+120x-1200=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+40x-400=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{400+1200}}{3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{1600}}{3}\Leftrightarrow x=\frac{-20\pm 40}{3}.$$

Искомый корень положителен, он равен $\frac{20}{3}$. Заметим, что на $[0;\ 20]$ это единственная точка экстремума. Если она окажется точкой минимума функции, то функция именно в этой точке и достигает наименьшего значения. Найдем

$$S'(6)=9\cdot 36+120\cdot 6-1200=$$
$$=36(9+20)-1200=1044-1200<0;$$

$$S'(7) = 9 \cdot 49 + 120 \cdot 7 - 1200 =$$
$$= 441 + 840 - 1200 = 1281 - 1200 > 0.$$

Итак, критическая точка функции точка $x = \dfrac{20}{3}$ является точкой минимума функции $S(x)$.

Поскольку количество изготовленных приборов будет выражаться числом натуральным, то наименьшая сумма, необходимая для выплаты рабочим, будет достигнута либо при $x = 6$, либо при $x = 7$. Сравним эти значения:

$$S(6) = 4 \cdot 216 + 14^3 = 864 + 2744 = 3608 \text{ (тыс. руб.);}$$
$$S(7) = 4 \cdot 343 + 13^3 = 1372 + 2197 = 3569 \text{ (тыс. руб.)}$$

Итак, искомая сумма 3 569 000 рублей.

Ответ: 3 569 000 рублей.

8. Тип 16 № 513301

В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая — никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0{,}1 = 80$ кг металла.

Пусть во второй области алюминий добывают t рабочих, а никель — $160-t$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-t)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(t) = \sqrt{5t} + \sqrt{800-5t}$ для натуральных t, не больших 160. Имеем:

$$f'(t) = \frac{5}{2\sqrt{5t}} - \frac{5}{2\sqrt{800-5t}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{800-5t} - \sqrt{5t}}{\sqrt{5t} \cdot \sqrt{800-5t}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800-5t} = \sqrt{5t} \underset{t \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 800 - 5t = 5t \Leftrightarrow t = 80.$$

При t меньших 80 производная положительна, а при t больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max} = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Тем самым, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 120 кг металла.

Ответ: 120 кг.

9. Тип 16 № 513302

На каждом из двух заводов работает по 100 человек. На первом заводе один рабочий изготавливает за смену 3 детали A или 1 деталь B. На втором заводе для изготовления t деталей (и A, и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба завода поставляют детали на комбинат, где собирают изделие, причем для его изготовления нужна 1 деталь A и 3 детали B. При этом заводы договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

Решение. Первое решение:

Из условия «на втором заводе для изготовления t деталей (и A, и B) требуется t^2 человеко-смен» следует, что работающие на заводе 100 человек за смену смогут произвести максимум 10 деталей одного типа.

Пусть на первом комбинате x рабочих заняты на производстве детали A, а остальные $100-x$ рабочих производят детали типа B, и пусть на втором комбинате из 10 деталей производится y деталей типа A и $10-y$ деталей типа B. Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь *A*		**Деталь *B***	
	Количество человек	**Количество деталей**	**Количество человек**	**Количество деталей**
Первый комбинат	x	$3x$	$100-x$	$100-x$
Второй комбинат		y		$10-y$
Всего		$3x+y$		$100-x+10-y$

Для производства изделий деталей типа B должно быть в три раза больше деталей типа A:

$$3(3x+y)=100-x+10-y \Leftrightarrow x=11-0,4y \quad (*)$$

Пусть s шт. — количество изделий, оно равно количеству деталей типа A: $s=3x+y.$ Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s=3x+y=3\cdot(11-0,4y)+y=33-0,2y.$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y)=33-0,2y$ при неотрицательных целых значениях y, не больших 10.

Функция $f(y)=33-0,2y$ – убывающая. Наибольшее значение на отрезке $[0;\ 10]$ она принимает при $y=0,$ при этом $x=11,$ а $f(0)=33.$

Таким образом, максимальное количество изделий за смену будет собрано, если на втором заводе будут изготавливать только детали типа B (100 рабочих изготовят 10 деталей типа B), а на первом заводе 11 человек изготовят 33 детали типа A, а остальные 89 рабочих изготовят 89 деталей типа B. Итого получим 33 детали типа A и 99 деталей типа B, на производстве которых были заняты все 200 человек.

Значит, комбинат сможет собрать за смену 33 изделия.

Ответ: 33 изделия.

Замечание.

Вначале мы прочли условие иначе и полагали, что на втором заводе для изготовления t деталей каждого типа (и A, и B независимо друг от друга) требуется t^2 человеко-смен. Приведём решение и примечания к нему для такого понимания условия. К этому же пониманию условия относятся комментарии читателей.

Второе решение:

Пусть на первом комбинате x рабочих, а на втором комбинате y рабочих заняты на производстве детали A. Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь *A*		**Деталь *B***	
	Количество человек	**Количество деталей**	**Количество человек**	**Количество деталей**
Первый комбинат	x	$3x$	$100-x$	$100-x$
Второй комбинат	y	$\sqrt{y}$	$100-y$	$\sqrt{100-y}$
Всего		$3x+\sqrt{y}$		$100-x+\sqrt{100-y}$

Для производства изделий деталей типа B должно быть в три раза больше деталей типа A:

$$3(3x+\sqrt{y})=100-x+\sqrt{100-y}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=10+0,1\sqrt{100-y}-0,3\sqrt{y}\quad (*)$$

Пусть s шт — количество изделий, оно равно количеству деталей типа A: $s=3x+\sqrt{y}$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s=3x+\sqrt{y}=3(10+0,1\sqrt{100-y}-0,3\sqrt{y})+\sqrt{y})=$$
$$=30+0,1(\sqrt{y}+3\sqrt{100-y}).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y)=\sqrt{y}+3\sqrt{100-y}$ при натуральных значениях y не больших 100. Имеем:

$$f'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{3}{2\sqrt{100-y}}=\frac{\sqrt{100-y}-3\sqrt{y}}{2\sqrt{100-y}\cdot\sqrt{y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{100-y}=3\sqrt{y}\underset{y\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}100-y=9y\Leftrightarrow y=10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области, равным $f(10)=\sqrt{10}+3\sqrt{90}=10\sqrt{10}$, при этом $s=30+\sqrt{10}$. Количество деталей должно быть натуральным числом, $3<\sqrt{10}<4$, поэтому рабочие могут произвести, самое большее, 33 детали типа A.

Из (*) находим $x=10$ чел. Это означает, что 10 рабочих первого комбината и 10 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве детали A, за сутки они произведут их 33 шт, оставшиеся 90 рабочих первого комбината и 90 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве деталей B, за сутки они произведут их 99 шт.

Ответ: 33 изделия.

Примечание 1.

Внимательный читатель мог бы задать вопрос о том, почему в равенстве (*) предполагается, что деталей производится ровно в отношении 1:3. Ведь можно произвести, например, 11 деталей типа B и 34 детали типа A, из них получится собрать 33 изделия, а одна деталь типа A останется лишней. Ответим на этот вопрос.

Если есть лишние детали, то уменьшим их число до соотношения 1:3 и отправим на обед людей, производивших лишние детали. Тогда получим решение задачи для меньшего числа людей, но с тем же выходом продукта и соотношением деталей 1:3. Теперь вернём людей с обеда. Меньшего количества изделий мы не получим, поскольку зависимость между числом деталей и количеством людей неубывающая. Большего количества изделий тоже не достичь, поскольку из лишних деталей целого изделия собрать не получится. Поэтому наибольшее количество изделий совпадет с найденным.

Примечание 2.

Заметим, что если рабочие второго комбината будут производить только детали типа B, то они произведут их 10 шт. Пусть при этом 89 рабочих первого комбината произведут 89 деталей типа B, а оставшиеся 11 рабочих первого комбината произведут 33 детали типа A. Тогда всего будет произведено 33 детали типа A и 99 деталей типа B. Из них также можно собрать 33 изделия. Таких вариантов довольно много (см. таблицу в конце).

Примечание 3.

Можно было бы спросить, почему не образовать из рабочих второго завода 100 независимых групп, каждая из которых состоит из одного рабочего.

Приведём решение Евгения Обухова.

Пусть первый завод выпускает x деталей B, а второй завод выпускает y деталей B. Тогда на первом заводе деталь B выпускает x рабочих, а деталь A выпускает $100-x$ рабочих. Поэтому первый завод выпускает $300-3x$ деталей A.

На втором заводе деталь B выпускает y^2 рабочих, деталь A выпускает $100-y^2$ рабочих. Поэтому второй завод выпускает $[\sqrt{100-y^2}]$ деталей А. Здесь $[\ldots]$ — целая часть числа.

Пусть комбинат выпускает k изделий. Имеем следующие необходимые и достаточные условия:

$$\begin{cases}300-3x+[\sqrt{100-y^2}]\geqslant k,\\ x+y\geqslant 3k.\end{cases}$$

Рассмотрим $y=10.$ Тогда получим:

$$\begin{cases}300-3x\geqslant k,\\ x+10\geqslant 3k.\end{cases}$$

Домножим второе неравенство на 3 и сложим с первым, получим: $330\geqslant 10k\Leftrightarrow k\leqslant 33.$ Заметим, что $x=89, k=33$ (при $y=10$) удовлетворяют исходному неравенству. То есть комбинат может изготовить 33 изделия.

Проверим, может ли он изготовить больше. Пусть $k\geqslant 34,$ тогда:

$$\begin{cases}300-3x+[\sqrt{100-y^2}]\geqslant 34,\\ x+y\geqslant 102.\end{cases}$$

Поскольку теперь мы можем считать $y\leqslant 9,$ из второго неравенства находим $x\geqslant 93.$ Тогда оценим: $300-3x+[\sqrt{100-y^2}]\leqslant 300-3\cdot 93+10=31.$ Получили противоречие с первым неравенством.

Следовательно, максимальное число изделий, которое может произвести комбинат, равно 33.

Приведём таблицу других вариантов, также дающих 33 изделия

B2 =МИН(3*B$1+ЦЕЛОЕ(КОРЕНЬ($A2));ЦЕЛОЕ((100-B$1+ЦЕЛОЕ(КОРЕНЬ(100-$A2)))/3))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	0	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29
3	1	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
4	2	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
5	3	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
6	4	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
7	5	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
8	6	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
9	7	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
10	8	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
11	9	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
12	10	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
13	11	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
14	12	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
15	13	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
16	14	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
17	15	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
18	16	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
19	17	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
20	18	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
21	19	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28
22	20	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
23	21	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
24	22	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
25	23	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
26	24	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
27	25	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
28	26	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
29	27	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
30	28	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
31	29	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
32	30	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
33	31	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
34	32	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
35	33	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
36	34	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
37	35	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
38	36	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28
39	37	6	9	12	15	18	21	24	27	30	32	32	32	31	31	31	30	30	30	29	29	29	28	28	28

10. Тип 16 № 509426

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость (за 1 тонну)	Отпускная цена (за 1 тонну)	Производственные возможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

Решение. Пусть x — доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а y — доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом блинчиков с ягодной начинкой производится $90x$ тонн, а с творожной начинкой — $75y$ тонн. Кроме того, из условия ассортиментности следует, что $90x \geqslant 15$ откуда $x \geqslant \frac{1}{6}$, а $75y \geqslant 15$, откуда $y \geqslant \frac{1}{5}$. Прибыль завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна $100 - 70 = 30$ тыс. руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна 135 − 100 = 35 тыс. руб., общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна $S(x,\ y)=30\cdot 90x+35\cdot 75y=$ $=2700x+2625y=75\cdot(36x+35y)$. Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции $S(x, y) = 75\cdot(36x + 35y)$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x\geqslant \dfrac{1}{6},\ y\geqslant \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x, \\ \dfrac{1}{6}\leqslant x\leqslant \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $36x + 35y$, получаем: $36x + 35(1 - x) = x + 35$. Наибольшее значение этого выражения при условии $\dfrac{1}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{4}{5}$ достигается при $x=\dfrac{4}{5}$, тогда $y=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$.

Поэтому максимально возможная прибыль завода за месяц равна:

$$75\cdot\left(36\cdot\frac{4}{5}+35\cdot\frac{1}{5}\right)=75\cdot\frac{179}{5}=2685\ \text{тыс.руб.}$$

при этом фабрика производит 72 тонны блинчиков с ягодной начинкой и 15 тонн блинчиков с творожной начинкой.

Ответ: 2685 тыс. руб.

Приведём решение Дмитрия Гущина.

Тонна блинчиков с творожной начинкой приносит 35 тыс. руб., а тонна блинчиков с ягодной — 30 тыс. руб. При этом 1 тонне блинчиков с творожной начинкой соответствует 1,2 тонны блинчиков с ягодной начинкой. Заметим, что $1\,\text{т}\cdot 35$ тыс. руб. $<1{,}2\,\text{т}\cdot 30$ тыс. руб. $=36\,\text{т}\cdot 1\,\text{тыс. руб.}$, поэтому более выгодно производить блинчики с ягодной начинкой. Значит, блинчиков с творожной начинкой необходимо производить 15 тонн, а блинчиков с ягодной начинкой — $90-15\cdot 1{,}2=72$ тонны, что даст $15\cdot 35+72\cdot 30=2685$ тыс. руб. прибыли.

11. Тип 16 № 509485

Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации, $25 < t < 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гбайт?

Решение. Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2+y^2=3364$, а обработано будет $20x+21y$ Гбайт информации. Требуется найти максимум суммы $20x+21y$ при условии

$$x^2+y^2=3364,\quad 25<x<55,\quad 25<y<55.$$

Так как $3364=58^2$, то $x=58\cos\alpha,\ y=58\sin\alpha$ для некоторого угла $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Так как $20^2+21^2=29^2$, то

$$20x+21y=58(20\cos\alpha+21\sin\alpha)=$$
$$=58\cdot 29\left(\frac{20}{29}\cos\alpha+\frac{21}{29}\sin\alpha\right)=58\cdot 29\sin(\alpha+\varphi)$$

для некоторого вспомогательного угла φ с $\cos\varphi=\dfrac{21}{29}$, $\sin\varphi=\dfrac{20}{29}$. Следовательно, наибольшее значение суммы $20x+21y=58\cdot 29=1682.$ Оно достигается при

$\cos\alpha = \dfrac{20}{29},\ \sin\alpha = \dfrac{21}{29},\ x = 40,\ y = 42,$ то есть для значений, удовлетворяющих условиям $25 < x < 55, 25 < y < 55.$

Приведём другое решение.

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364,$ а обработано будет $20x + 21y$ Гбайт информации. Выразим y через $x : y = \sqrt{3364 - x^2}.$ Требуется найти наибольшее значение функции $f(x) = 20x + 21\sqrt{3364 - x^2}.$

$$f'(x) = 20 - \frac{21x}{\sqrt{3364 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 400 = \frac{441x^2}{3364 - x^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{400 \cdot 3364}{841} = 1600 \Leftrightarrow x = 40.$$

Нетрудно заметить, что $x = 40$ — точка максимума функции, при этом $y = \sqrt{3364 - 1600} = 42.$ Условия $25 < x < 55,\ 25 < y < 55$ выполнены. Значит, $f_{\text{наиб}} = f(40) = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682.$

Приведём третий вариант решения.

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2 + y^2 = 3364,$ а обработано будет $C = 20x + 21y$ Гбайт информации.

Так как $3364 = 58^2$, то уравнение $x^2 + y^2 = 3364$ задает окружность радиуса 58 с центром в начале координат. Заметим, что уравнение $C = 20x + 21y$ задает семейство параллельных прямых. Мы ищем наибольшее значение C такое, что прямая $C = 20x + 21y$ имеет общие точки с окружностью. Из всех прямых семейства пересекающих окружность, наибольшее значение C будет достигаться в случае касания.

Проведем из начала координат в первый координатный квадрант вектор $\vec{a}(20; 21)$ перпендикулярный прямым $20x + 21y = C.$ Луч, коллинеарный вектору $\vec{a},$ пересечёт окружность ω в точке $A(40; 42).$ Это и будет точка касания в которой достигается наибольшее значение $C.$ Условия $25 < x < 55, 25 < y < 55$ для точки $A(40; 42)$ выполнены. Значит, $C_{\text{наиб}} = 20 \cdot 40 + 21 \cdot 42 = 1682.$

Ответ: 1682.

12. Тип 16 № 509824

Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей.

Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на оплату труда рабочих первого завода выделено x руб., а второго — оставшиеся (900 000 − x) руб. Тогда на первом заводе можно оплатить $\dfrac{x}{250}$ часов работы, а на втором —

$\dfrac{900000-x}{200}$ часов работы. Количество произведённого за неделю товара равно квадратным корням из этих величин, поэтому для ответа на вопрос задачи требуется найти наибольшее целое значение функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{250}}+\sqrt{\frac{900000-x}{200}}=$$
$$=\frac{\sqrt{10x}}{50}+\frac{\sqrt{1800000-2x}}{20}=$$
$$=\frac{1}{100}(2\sqrt{10x}+5\sqrt{1800000-2x})$$

на отрезке $0\leqslant x\leqslant 900000.$ Найдём ее производную:

$$f'(x)=\frac{1}{100}\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}}-\frac{5}{\sqrt{1800000-2x}}\right)=$$
$$=\frac{1}{100}\frac{\sqrt{18000000-20x}-5\sqrt{x}}{\sqrt{1800000-2x}\sqrt{x}}.$$

Решая уравнение $f'(x)=0,$ получаем:

$$\sqrt{18000000-20x}-5\sqrt{x}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 18000000-20x=25x\Leftrightarrow x=400000.$$

Поскольку производная непрерывной функции $f(x)$ положительна на интервале $(0;\ 400000)$, равна нулю в точке 400000 и отрицательна на интервале $(400000; 900000)$, функция $f(x)$ достигает наибольшего на отрезке $[0; 900000]$ значения в точке 400000. Найдём его:

$$f(400000)=\sqrt{\frac{400000}{250}}+\sqrt{\frac{500000}{200}}=$$
$$=\sqrt{1600}+\sqrt{2500}=40+50=90.$$

Тем самым, наибольшее возможное количество товара, которое могут произвести рабочие за неделю при заданном размере оплаты труда, равно 90 единицам.

Ответ: 90.

13. Тип 16 № 509505

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе работают суммарно x^2, а на втором — y^2 часов в неделю. Требуется найти максимум суммы $s=3x+4y$ при условии

$$500(x^2+y^2)=5000000\Leftrightarrow x^2+y^2=10000.\quad (*)$$

Выразим y из первого соотношения: $y=\frac{1}{4}(s-3x)$, подставим в (*), получим уравнение:

$$x^2+\left(\frac{1}{4}(s-3x)\right)^2=10000\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25x^2-(6s)x+(s^2-160000)=0.\quad (**)$$

Полученное уравнение имеет решения, если неотрицателен его дискриминант, а значит, и четверть дискриминанта:

$$\frac{D}{4}=9s^2-25(s^2-160000)\geqslant 0\Leftrightarrow -500\leqslant s\leqslant 500.$$

Тем самым, наибольшее возможное значение $s=3x+4y$ равно 500. Покажем, что оно достигается при натуральных значениях переменных: действительно, из (**) находим, что значению $s=500$ соответствует $x=60,$ а тогда $y=80.$

Ответ: 500 единиц товара.

14. Тип 16 № 512339

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=0{,}5x^2+x+7$ млн руб. в год. При цене p тыс. руб. за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн руб.) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн руб.?

Решение. Прибыль (в млн рублей) за один год выражается величиной

$$px-(0{,}5x^2+x+7)=-0{,}5x^2+(p-1)x-7.$$

Квадратный трехчлен с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x_0=-\frac{b}{2a}=p-1$. Подставляя, находим, что наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2}-7.$ Прибыль составит не менее 75 млн руб., если

$$\frac{(p-1)^2}{2}-7\geqslant\frac{75}{3}\Leftrightarrow(p-1)^2\geqslant 64\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(p-9)(p+7)\geqslant 0,$$

то есть при $p\geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p=9$, искомая наименьшая цена 9 тыс. руб.

Ответ: $p=9$.

Примечание.

Можно было сразу воспользоваться тем, что экстремум квадратного трехчлена ax^2+bx+c равен $-\frac{D}{4a}$.

Приведем замечание Елизаветы Несмеяновой.

При цене 9 тыс. рублей за единицу продукции прибыль составит 75 млн рублей только в том случае, если будет произведено 8 тыс. единиц продукции. Если количество произведенной продукции будет другим, то прибыль будет меньше. Следовательно, вопрос задачи следовало бы сформулировать так: «При каком наименьшем значении p прибыль *может* составить не менее 75 млн рублей?»

Заметим, что во всех задачах подобного типа предполагается, что предприятие производит продукцию в таком количестве, чтобы при заданной цене прибыль была максимальна.

15. Тип 16 № 513288

Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0,5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение. Чтобы прибыль за три года была не меньше 78 млн руб. необходимо, чтобы ежегодная прибыль была не меньше 26 млн руб., то есть, чтобы выполнялось неравенство

$$px-(0,5x^2+2x+6)\geqslant 26,$$

откуда, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$p\geqslant\frac{0,5x^2+2x+32}{x}=$$
$$=0,5x+\frac{32}{x}+2\geqslant 2\sqrt{0,5x\cdot\frac{32}{x}}+2=2\sqrt{16}+2=10.$$

Удостоверимся, что это значение параметра достигается, то есть существует количество продукции x, при котором достигается эта цена.

$$10x-(0,5x^2+2x+6)\geqslant 26\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-16x+64\leqslant 0\Leftrightarrow (x-8)^2\leqslant 0\Leftrightarrow x=8.$$

Тем самым, при p = 10 (цене 10 тыс. руб) и x = 8 (производстве 8 тыс. единиц продукции), завод окупится за три года.

Ответ: p = 10.

Примечание.

Напомним, что среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Иными словами, если $a,\ b\geqslant 0$, то $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ или $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, причем неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда числа равны. Последним неравенством мы и воспользовались в решении: $0,5x+\frac{32}{x}\geqslant 2\sqrt{0,5x\cdot\frac{32}{x}}=8.$

Приведем решение Тофига Алиева.

Чтобы прибыль за три года была не меньше 78 млн руб., необходимо, чтобы ежегодная прибыль была не меньше 26 млн руб., то есть, чтобы выполнялось неравенство

$$px-(0,5x^2+2x+6)\geqslant 26,\text{ или }-0,5x^2+(p-2)x-32\geqslant 0.\quad (*)$$

Левая часть неравенства задает параболу с ветвями, направленными вниз, наибольшее значение достигается в вершине при

$$x_0=\frac{-(p-2)}{2\cdot(-0,5)}=p-2.$$

Таким образом, завод будет выпускать продукцию в количестве x_0, при этом цена составит $p=x_0+2$, и наименьшему значению x_0 будет соответствовать наименьшее значение p. Подставив выражение для p в неравенство $(*)$, получим

$$-0,5x_0^2+x_0^2-32\geqslant 0,$$

откуда $|x_0|\geqslant 8.$ Количество выпускаемой продукции должно быть положительной величиной, поэтому минимальное значение x_0 равно 8, при этом цена будет равна 8 + 2 = 10.

16. Тип 16 № 513292

У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га.

Фермер может продать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение. Продавать свеклу более выгодно, поэтому второе поле, где ее урожайность выше, следует засеять только свеклой. Она принесет доход 10 га · 500 ц/га · 8000 руб/ц = 40 млн руб.

На первом поле урожайность свеклы составляет 300/500 = 0,6 урожайности картофеля, а стоимость свеклы 8000/5000 = 1,6 стоимости картофеля. Произведение этих показателей меньше 1, поэтому выращивать свеклу невыгодно: потери от меньшей урожайности не компенсируются более высокой выручкой. Следовательно, все поле следует засадить картофелем, он принесет доход 10 га · 500 ц/га · 5000 руб/ц = 25 млн руб.

Тем самым, наибольший возможный доход фермера равен 65 млн руб.

Ответ: 65 млн руб.

17. Тип 16 № 513295

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 квадратных метров и номера «люкс» площадью 40 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 квадратных метров. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 5000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Решение. Пусть в отеле будет x номеров площадью 30 кв. м и y номеров площадью 40 кв. м. Тогда $30x+40y\leqslant 940$ или $3x+4y\leqslant 94$ (*). Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна $4000x+5000y$ или $1000(4x+5y)$. Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $4x+5y.$ Пусть $s=4x+5y,$ тогда $x=0,25(s-5y),$ откуда, подставляя в (*), получаем:

$$0,75(s-5y)+4y\leqslant 94\Leftrightarrow 3s\leqslant 376-y.$$

В случае точного равенства $3s=376-y$ наибольшему значению суммы s соответствовало бы наименьшее значение величины y. В случае строгого неравенства необходимо найти наименьшее возможное значение y и проверить большие значения, уменьшающие количество пустого пространства.

Наименьшее возможное значение y равно 0. Поскольку $940=30\cdot 31+10,$ в гостинице можно открыть 31 стандартный номер и не открывать номера люкс. В этом случае номера будут приносить предпринимателю доход $4000\cdot 31=124\ 000$ руб. в сутки, и при этом останется 10 кв. м незанятого пространства. Уменьшим на 1 количество стандартных номеров. Если в гостинице 30 стандартных номеров и 1 люкс, незанятого пространства не остается: $940=30\cdot 30+40.$ В этом случае доход будет равен $4000\cdot 30+5000=125\ 000$ руб. Дальнейшее уменьшение количества стандартных номеров в пользу люксов приведет к уменьшению прибыли.

Ответ: 125 000 руб.

Приведем другое решение.

Найдем доходность на единицу занимаемой площади. Для номера «люкс» она составляет $\dfrac{5000}{40}=125$ руб./кв. м. Для обычного номера доходность равна $\dfrac{4000}{30}>133$ руб./кв. м. Таким образом, обычный номер приносит больший доход с квадратного метра площади, поэтому размещать обычные номера выгоднее, чем номера «люкс».

На площади 940 кв. м можно разместить 31 обычный номер, при этом доход составит $31 \cdot 4000 = 124\,000$ руб., и останется 10 кв. м свободной площади.

Будем уменьшать количество остающейся свободной площади, размещая номера «люкс» и уменьшая количество обычных номеров. Для одного номера «люкс» и 30 обычных занимаемая площадь 940 кв. м., доход 125 000 руб. Для двух номеров «люкс» и 28 обычных занимаемая площадь 920 кв. м, доход 122 000 руб. Размещать три и более номера «люкс» нет смысла, поскольку на той площади (120 кв. м), где могут разместиться три номера «люкс», приносящие доход $3 \cdot 5000 = 15000$ руб., можно разместить четыре обычных номера с доходом $4 \cdot 4000 = 16000$ руб.

Таким образом, максимальный доход будет получен при размещении 30 обычного номера и 1 номера «люкс», которые займут всю доступную площадь 940 кв. м. Этот максимальный доход составляет 125 000 руб. в сутки.

18. Тип 16 № 513299

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть в первой шахте на добыче алюминия за день будет затрачено x человеко-часов, а во второй шахте − y человеко-часов. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Количество металла за день, кг	Количество человеко-часов	Количество металла за день, кг
Шахта 1	x	x	$100-x$	$2(100-x)$
Шахта 2	y	$2y$	$500-y$	$500-y$
Всего		$x+2y$		$700-2x-y$

Поскольку алюминия необходимо добывать вдвое больше никеля, имеем:

$$x+2y=2(700-2x-y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x=1400-4y \Leftrightarrow x=280-0,8y. \qquad (*)$$

Пусть s — масса сплава, она втрое больше массы добытого никеля: $s=3(700-2x-y)$. Найдем наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него $(*)$:

$$s=3(700-2x-y)=$$
$$=3(700-2(280-0,8y)-y)=3(140+0,6y).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение y. Из $(*)$ ясно, что наибольшее возможное значение y равно 350, при этом $x=0$, $s=3(140+0,6\cdot 350)=1050.$ Это означает, что 350 человеко-часов во второй шахте должны быть затрачены для добычи алюминия, а оставшиеся 150 человеко-часов во второй шахте и все 100 человеко-часов в первой шахте должны быть затрачены для добычи никеля. При этом будет добыто 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса сплава будет равна 1050 кг.

Ответ: 1050 кг.

Приведем другое решение.

На первой шахте наиболее эффективно добывают никель. Пусть все 100 человеко-часов в первой шахте будут затрачены для добычи никеля, тогда его добудут на ней 200 кг. Для получения с сплава с добытым на первой шахте никелем на второй шахте необходимо добыть 400 кг алюминия, с этим справятся 40 рабочих, работая по 5 часов каждый. Из оставшихся 60 рабочих второй шахты можно половину направить на добычу алюминия, а вторую половину — на добычу никеля. Они произведут 150 кг никеля и 300 кг алюминия. При этом всего будет добыто 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса общая сплава будет равна 1050 кг.

Покажем, что лучшей производительности не достичь: действительно, рабочие не простаивают, металла не добывается с избытком. Если же на первой шахте за kn человеко-часов вместо $2kn$ кг никеля добудут kn кг алюминия, то для производства сплава на второй шахте потребуется добыть $0{,}5kn$ никеля вместо возможных kn кг алюминия. При таком распределении усилий рабочих вместо возможных $3kn$ кг сплава будет произведено $1{,}5kn$ кг сплава, то есть труд будет неэффективным.

19. Тип 16 № 513289

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. В каждой области в сутки может быть затрачено 200 человеко-часов труда. При этом в первой области будет добыто $0{,}2 \cdot 200 = 40$ кг металлов. Пусть в ней будет добыто y кг алюминия, тогда никеля будет добыто $(40 - y)$ кг. Пусть во второй области будет добыто x кг алюминия, тогда никеля будет добыто $\sqrt{200-x^2}$ кг.

Для производства сплава заводу необходимо получить равное количество алюминия и никеля, поэтому должно выполняться равенство

$$x+y=\sqrt{200-x^2}+40-y. \qquad (*)$$

При этом масса сплава будет равна сумме масс всех металлов:

$$m(x)=x+\sqrt{200-x^2}+40.$$

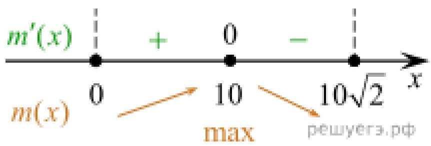
Найдём наибольшее значение функции $m(x)$, где $0 \leqslant x \leqslant 10\sqrt{2}$. Для этого найдем производную функции:

$$m'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{200-x^2}}=\frac{\sqrt{200-x^2}-x}{\sqrt{200-x^2}}.$$

Найдем нули производной:

$$m'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{200-x^2}-x=0 \Leftrightarrow x=10.$$

Укажем знаки производной и поведение функции на рисунке:



Наибольшее значение функции достигается в точке максимума при $x=10$. Из равенства (*) для $x=10$ находим $y=20$. Таким образом, наибольшее значение функции $m(x)$ равно

$$m(10)=10+\sqrt{200-10^2}+40=60.$$

Тем самым, завод сможет производить 60 кг сплава ежедневно.

Ответ: 60.

20. Тип 16 № 513294

В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая — никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть в первой области x рабочих заняты на добыче алюминия, а $20-x$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, один рабочий добывает 1 кг алюминия или 1 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут x кг алюминия и $(20-x)$ кг никеля.

Пусть во второй области y рабочих заняты на добыче алюминия, а $20-y$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, n рабочих добывают $\sqrt{10 \cdot n}$ кг любого из металлов, поэтому вместе бригады добудут $\sqrt{10y}$ кг алюминия и $\sqrt{10(20-y)}$ кг никеля.

Всего будет произведено $x+\sqrt{10y}$ кг алюминия (1) и $20-x+\sqrt{200-10y}$ кг никеля (2). Поскольку алюминия необходимо добывать втрое больше никеля, имеем:

$$x+\sqrt{10y}=3(20-x+\sqrt{200-10y}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x=60+3\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y} \quad (*)$$

Количеству никеля $s=20-x+\sqrt{200-10y}$ соответствует количество сплава $4s$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$4s=80-4x+4\sqrt{200-10y}=$$
$$=80-(60+3\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y})+4\sqrt{200-10y}=$$
$$=20+\sqrt{10y}+\sqrt{200-10y}.$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение функции $f(y)=\sqrt{10y}+\sqrt{200-10y}$ при натуральных y не больших 20.

Имеем:

$$f'(y)=\frac{5}{\sqrt{10y}}-\frac{5}{\sqrt{200-10y}}=5\cdot\frac{\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}}{\sqrt{200-10y}\cdot\sqrt{10y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y} \underset{y\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 200-10y=10y \Leftrightarrow y=10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области.

Далее имеем: $f(10)=20, s=10,$ из (*) $x=20.$ Это означает, что все рабочие первой области должны быть заняты на производстве алюминия, за сутки они произведут его 20 кг, а рабочие второй области бригадами по 10 и 10 человек должны быть заняты на добыче алюминия и никеля, они добудут их по 10 кг. Всего будет добыто 30 кг алюминия и 10 кг никеля, из них будет произведено 40 кг сплава.

Ответ: 40 кг.

Приведем решение Ольги Тыньяновой.

Найдем максимальное количество металла, которое может быть добыто в двух областях.

В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг металла (алюминия или никеля), поэтому общее количество добытого металла равно $0{,}1 \cdot 20 \cdot 10 = 20$ кг.

Пусть во второй области добыто x кг алюминия, тогда на его добычу будет затрачено x^2 часов, и на добычу никеля можно будет затратить $200 - x^2$ часов, при этом будет добыто $\sqrt{200-x^2}$ кг никеля.

Общее количество добытого во второй области металла составит $f(x) = x + \sqrt{200-x^2}$.

Имеем:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{200-x^2}}$$

Найдем нули производной:

$$\frac{x}{\sqrt{200-x^2}} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 10.$$

При $x = 10$ функция $f(x)$ достигает максимального значения, равного 20.

Таким образом, во второй области максимальное количество добытого металла составляет 20 кг при условии, что добывается 10 кг алюминия и 10 кг никеля.

Следовательно, общее количество металла, добытого в двух областях, не может быть больше 40 кг, а следовательно, количество произведенного заводом сплава также не может быть больше 40 кг.

Покажем, что количество сплава может быть равно 40 кг.

При максимальном производстве металла во второй области там будет добыто 10 кг алюминия и 10 кг никеля. Если в первой области все рабочие будут заняты на добыче алюминия, то его будет добыто 20 кг. Следовательно, всего будет добыто 30 кг алюминия, и на 1 кг никеля будет приходится 3 кг алюминия, как и требуется для производства сплава.

Таким образом, максимальное количество сплава, которое может произвести завод, равно 40 кг.

21. Тип 16 № 513297

В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. В каждой области в день может быть затрачено 1000 человеко-часов труда.

Пусть в первой области на добыче алюминия ежедневно будет затрачено x человеко-часов, а во второй области – y^2 человеко-часов. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Масса металла за день, кг	Количество человеко-часов	Масса металла за день, кг
Первая область	x	$0{,}3x$	$1000 - x$	$0{,}1 \cdot (1000 - x)$
Вторая область	y^2	y	$1000 - y^2$	$\sqrt{1000 - y^2}$
Всего		$0{,}3x + y$		$100 - 0{,}1x + \sqrt{1000 - y^2}$

Для производства сплава масса добытого алюминия должна быть равна массе добытого никеля:

$$0{,}3x + y = 100 - 0{,}1x + \sqrt{1000-y^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}4x = 100 - y + \sqrt{1000-y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,2x = 50 - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{1000-y^2}}{2}. \qquad (*)$$

Пусть m — масса сплава, она равна сумме масс добытых металлов:

$$m = (0,3x + y) + \left(100 - 0,1x + \sqrt{1000-y^2}\right) = \\ = 0,2x + y + 100 + \sqrt{1000-y^2}.$$

Учитывая равенство $(*)$, имеем:

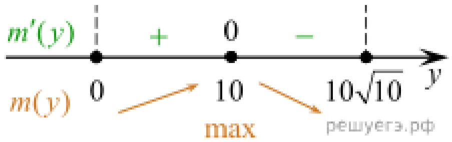
$$m(y) = \\ = \left(50 - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{1000-y^2}}{2}\right) + y + 100 + \sqrt{1000-y^2} = \\ = \frac{y}{2} + \frac{3\sqrt{1000-y^2}}{2} + 150.$$

Найдём наибольшее значение функции $m(y)$, где $0 \leqslant y \leqslant 10\sqrt{10}.$ Для этого исследуем функцию с помощью производной.

$$m'(y) = \frac{1}{2} + \frac{3\cdot(-2y)}{2\cdot 2\sqrt{1000-y^2}} = \frac{\sqrt{1000-y^2} - 3y}{2\sqrt{1000-y^2}}.$$

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

$$m'(y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1000-y^2} - 3y = 0 \Leftrightarrow y = 10$$



Заметим, что при $y = 10$ равенство $(*)$ выполняется, если $x = 300.$

Таким образом, наибольшее значение функции *m(y)* равно $m(10) = \frac{10}{2} + \frac{3\sqrt{1000-10^2}}{2} + 150 = 200.$ Значит, завод сможет производить 200 кг сплава ежедневно.

Ответ: 200.

22. Тип 16 № 513298 *i*

В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая — никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, необходимо, чтобы в каждой области независимо от другой было добыто наибольшее количество металла. Поэтому все рабочие первой области должны быть направлены на добычу никеля, который они добывают втрое более эффективно, чем алюминий. За сутки ими будет добыто $160\cdot 5\cdot 0,3 = 240$ кг никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают y рабочих, а никель — $160-y$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5y}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-y)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции

$$f(y)=\sqrt{5y}+\sqrt{800-5y}$$

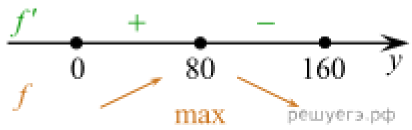
для неотрицательных целых y, не больших 160. Имеем:

$$f'(y)=\frac{5}{2\sqrt{5y}}-\frac{5}{2\sqrt{800-5y}}=\frac{5}{2}\,\frac{\sqrt{800-5y}-\sqrt{5y}}{\sqrt{5y}\cdot\sqrt{800-5y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800-5y}=\sqrt{5y}\underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow}800-5y=5y\Leftrightarrow y=80.$$



При y меньших 80 производная положительна, а при y больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max}=40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Тем самым, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 280 кг металла.

Ответ: 280 кг.

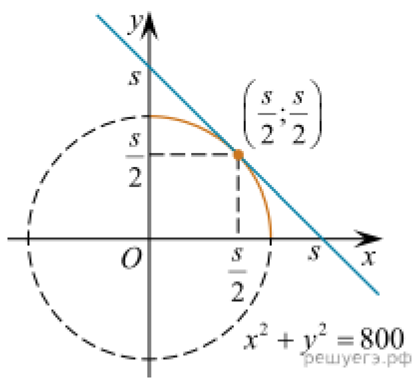
Примечание.

Можно было обойтись без производной. Напомним, что наибольшее значение функции $y(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}$, на отрезке $[a;\ b]$ достигается в точке $\frac{a+b}{2}$ и равно $\sqrt{2(b-a)}$. Доказательство можно получить, например, возведением в квадрат.

В нашем случае $f(x)=\sqrt{5x}+\sqrt{800-5x}$, $a=0$, $b=800$, поэтому искомое наибольшее значение $f_{\text{наиб}}=\sqrt{1600}=40$, достигается в точке, где $5x=400$ то есть при $x=80$.

Приведём геометрическое решение.

Пусть во второй области на добычу алюминия будет отведено x^2 человеко-часов, а на добычу никеля — y^2 человеко-часов. Всего рабочих 160, работая по 5 часов, они вырабатывают 800 человеко-часов в сутки, поэтому $x^2+y^2=800$. Для таких значений переменных требуется определить наибольшее значение количества добытого металла $s=x+y$. Тем самым, необходимо определить наибольшее значение параметра s при котором прямая, задаваемая уравнением $y=s-x$, будет иметь с окружностью $x^2+y^2=800$ общие точки, лежащие в первой координатной четверти.



Из рисунка видно, что точка касания является серединой гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника. Координаты точки касания $(0,5s;\,0,5s)$ должны удовлетворять уравнению окружности. Тогда $0,25s^2+0,25s^2=800$, откуда $s=40$. при $x=y=20$.

23. Тип 16 № 509468

Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение. Так как цена бумаги каждый год возрастает на тысячу, а куплена она в первый год за 8 тыс. руб, то на k-ый год бумага будет стоить $8+1\cdot(k-1)=k+7$ тыс. рублей. Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через двадцать пять лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(k+7)\cdot(1{,}08)^{25-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(k+7)\cdot(1{,}08)^{25-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 25. Рассмотрим приращение

$$b_k=a_k-a_{k-1}=(1{,}08)^{25-k}(k+7-1{,}08\cdot((k-1)+7))=$$
$$=(1{,}08)^{25-k}(0{,}52-0{,}08k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\leqslant 6$ и $b_k<0$ при $k>6$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=6$.

Ответ: в течение шестого года.

Приведем другое решение.

Продать ценную бумагу нужно в тот момент, когда 8% от стоимости станут составлять не меньше чем 1 тыс. рублей, что возможно при стоимости бумаги не менее 12,5 тыс. рублей. Это произойдет через пять лет после покупки ценной бумаги (8 + 5·1 = 13). Таким образом, ценную бумагу нужно продать в течение шестого года (сразу по прошествии пяти лет).

24. Тип 16 № 515652

В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, необходимо, чтобы в каждой области независимо от другой было добыто наибольшее количество металла. Для этого рабочие в каждой из областей должны работать по 5 часов в сутки. Всех рабочих первой области необходимо направить на добычу алюминия: за единицу времени они добывают его в три раза больше, чем никеля. За сутки в первой области добудут $0{,}3\cdot 5\cdot 90=135$ кг алюминия.

Во второй области 90 рабочих, работая по 5 часов, затратят на добычу металла 450 человеко-часов. Пусть x человеко-часов они затратят на добычу алюминия, тогда $450-x$ часов будет затрачено на добычу никеля. Всего будет добыто $\sqrt{x}$ кг алюминия и $\sqrt{450-x}$ кг никеля. Найдем наибольшее на значение функции $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{450-x}$ на отрезке $[0;450]$. Применяя неравенство между средним арифметичесим и средним квадратичным, получаем:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{450-x}}{2}\leqslant\sqrt{\frac{\sqrt{x}^2+\sqrt{450-x}^2}{2}}=\sqrt{225}=15.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\sqrt{x}=\sqrt{450-x}$, откуда $x=225$. При найденном значении x будет добыто $2\cdot 15=30$ кг металла (15 кг алюминия и 15 кг никеля).

Общая масса металлов составляет 135 + 30 = 165 кг.

Ответ: 165 кг.

25. Тип 16 № 515709

В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором 1 кг алюминия приходится на 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. В каждой области в день может быть затрачено 500 человеко-часов труда.

Пусть в первой области на добыче алюминия ежедневно будет затрачено x человеко-часов, а во второй области − y^2 человеко-часов. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		**Никель**	
	Количество человеко-часов	Масса металла за день, кг	Количество человеко-часов	Масса металла за день, кг
Первая область	x	$0{,}2x$	$500-x$	$0,1\cdot(500-x)$
Вторая область	y^2	y	$500-y^2$	$\sqrt{500-y^2}$
Всего		$0,2x+y$		$50-0,1x+\sqrt{500-y^2}$

Для производства сплава масса добытого алюминия должна быть вдвое меньше массы добытого никеля:

$$2\cdot(0,2x+y)=50-0,1x+\sqrt{500-y^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,5x=50-2y+\sqrt{500-y^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,1x=10-\frac{2y}{5}+\frac{\sqrt{500-y^2}}{5}. \qquad (*)$$

Пусть m — масса сплава, она равна сумме масс добытых металлов:

$$m=(0,2x+y)+\left(50-0,1x+\sqrt{500-y^2}\right)=$$
$$=0,1x+y+50+\sqrt{500-y^2}.$$

Учитывая равенство $(*)$, имеем:

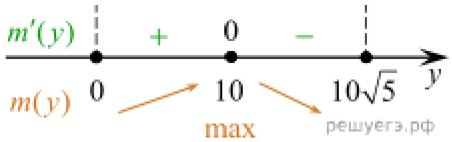
$$m(y)=\left(10-\frac{2y}{5}+\frac{\sqrt{500-y^2}}{5}\right)+y+50+\sqrt{500-y^2}=$$
$$=\frac{3y}{5}+\frac{6\sqrt{500-y^2}}{5}+60.$$

Найдём наибольшее значение функции $m(y)$, где $0\leqslant y\leqslant 10\sqrt{5}$. Для этого исследуем функцию с помощью производной.

$$m'(y)=\frac{3}{5}+\frac{6\cdot(-2y)}{5\cdot 2\sqrt{500-y^2}}=\frac{3\sqrt{500-y^2}-6y}{5\sqrt{500-y^2}}.$$

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

$$m'(y)=0\Leftrightarrow 3\sqrt{500-y^2}-6y=0\Leftrightarrow y=10$$



Заметим, что при $y=10$ равенство $(*)$ выполняется, если $x=100$.

Таким образом, наибольшее значение функции *m(y)* равно $m(10)=\frac{3\cdot 10}{5}+\frac{6\sqrt{500-10^2}}{5}+60=90.$ Значит, завод сможет производить 90 кг сплава ежедневно.

Ответ: 90.

26. Тип 16 № 516053

Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. руб. (т. е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго — 4 тыс. руб. и т. д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

Решение. Пусть акции проданы в конце года t за t^2 тыс. руб., и полученная сумма положена в банк на оставшиеся $20-t$ лет под 25% годовых. Тогда цена акций на конец срока составит $s(t)=t^2\cdot 1{,}25^{20-t}$ тыс. руб. Найдём наибольшее значение полученной функции на множестве натуральных t, не превосходящих 20. Имеем:

$$s'(t)=2t\cdot 1{,}25^{20-t}+t^2\cdot 1{,}25^{20-t}\ln 1{,}25\cdot(-1)=$$
$$=1{,}25^{20-t}t(2-t\ln 1{,}25).$$

Найденная производная обращается в нуль в точке $\frac{2}{\ln 1{,}25}=2\log_{1{,}25}e$ и меняет в ней знак с плюса на минус. Следовательно, это точка максимума. Заметим, что

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4<e<\left(\frac{5}{4}\right)^5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{1{,}25}\left(\frac{5}{4}\right)^4<\log_{1{,}25}e<\log_{1{,}25}\left(\frac{5}{4}\right)^5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4<\log_{1{,}25}e<5\Leftrightarrow 8<2\log_{1{,}25}e<10.$$

Из полученной оценки следует, что точка максимума лежит на интервале (8; 10). Сравним значения функции в точках 8, 9 и 10. Поскольку

$$\frac{s(9)}{s(8)}=\frac{81\cdot 1{,}25^{11}}{64\cdot 1{,}25^{12}}=\frac{81\cdot 4}{64\cdot 5}=\frac{324}{320}>1,$$
$$\frac{s(9)}{s(10)}=\frac{81\cdot 1{,}25^{11}}{100\cdot 1{,}25^{10}}=\frac{81\cdot 5}{100\cdot 4}=\frac{405}{400}>1,$$

наибольшее значением функции на множестве натуральных аргументов достигается в точке 9. Продавать акции необходимо в конце девятого года.

Ответ: в конце девятого года.

Примечание.

Без сравнения значений функции в точках 8, 9 и 10 не обойтись. Например, если точка максимума достаточно близка к точке 8, значение в точке 8 может оказаться больше, чем значение в точке 9.

Приведём другое решение.

Перекладывать деньги в банк имеет смысл, когда доход в 25% годовых, то есть ежегодное увеличение суммы в 1,25 раза, будет превосходить ежегодный квадратичный рост цен. Проследим за доходностью:

$$\text{2-й год: } \frac{4}{1}, \text{ 3-й год: } \frac{9}{4}, \text{ 4-й год: } \frac{16}{9}, \text{ 5-й год: } \frac{25}{16}, \text{ 6-й год: } \frac{36}{25}, \text{ 7-й год: } \frac{49}{36}, \text{ 8-й год: } \frac{64}{49}, \text{ 9-й год: } \frac{81}{64},$$
$$\text{10-й год: } \frac{100}{81}.$$

Коэффициент доходности k за 9-й год больше 1,25, а за 10-й год меньше 1,25. Покажем, что в следующие годы он будет далее уменьшаться. Действительно, в силу тождеств

$$k = \frac{(t+1)^2}{t^2} = \frac{t^2+2t+1}{t^2} = 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$$

получаем, что коэффициент k монотонно убывает с увеличением t.

Теперь можно сделать вывод о том, что в конце девятого года целесообразно переложить деньги в банк.

27. Тип 16 № 516802

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t\ \ (t = 1, 2, \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Решение. Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце кода k, то в конце двадцать пятого года на его счёте будет $S(k) = k^2(1+r)^{25-k}$ тыс. рублей.

Найдем производную полученного выражения:

$$S'(k) = 2k(1+r)^{25-k} - k^2(1+r)^{25-k}\ln(1+r) =$$
$$= k(1+r)^{25-k}(2 - k\ln(1+r)).$$

Заметим, что найденная производная равна нулю в единственной точке $k_{\max} = \dfrac{2}{\ln(1+r)}$, положительна при $k < k_{\max}$ и отрицательна при $k > k_{\max}$. Следовательно, $S(k)$ возрастает на $[1;\ k_{\max}]$ и убывает на $[k_{\max};\ 25]$. Из условия известно, что продавать бумаги необходимо в конце 21 года, следовательно, доход, полученный при продаже бумаг в конце 21 года, больше, чем доход, который мог бы получить фонд при продаже бумаг в конце 20-го года и в конце 22 года. Из выясненного выше характера монотонности функции $S(k)$ можно заключить, что выполнение неравенств $S(21) > S(20)$ и $S(21) > S(22)$ гарантирует, что $S(21) > S(k)$ для всех значений k, отличных от 21. А значит, необходимо и достаточно найти решения системы неравенств:

$$\begin{cases} S(21) > S(20), \\ S(21) > S(22) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 441(1+r)^4 > 400(1+r)^5, \\ 441(1+r)^4 > 484(1+r)^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+r < \dfrac{441}{400}, \\ 1+r > \dfrac{484}{441} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}. (*)$$

Примечание. В решении нельзя ограничиться только решением неравенств (*). Из того, что доход при продаже бумаг в конце 21 года больше, чем доход при их продаже в конце 20 и 22 годов не следует, что этот доход больше, чем при продаже в любой другой год, а именно это оговорено в условии. Однако можно обойтись без производной.

Например, рассмотрим разность предполагаемых доходов от продажи ценных бумаг в конце года $k+1$ и года k:

$$S(k+1) - S(k) = (k+1)^2 \cdot (1+r)^{24-k} - k^2 \cdot (1+r)^{25-k} =$$
$$= (1+r)^{24-k}(-rk^2 + 2k + 1).$$

Первый множитель положителен, второй может менять знак. Положительность произведения означает, что $S(k+1) > S(k)$: доход, который получит фонд, продав ценные бумаги в конце года k, меньше дохода при их продаже в следующем году. Отрицательность произведения означает, что $S(k+1) < S(k)$: доход, который получит фонд, продав ценные бумаги в конце года k, больше дохода, который можно получить при продаже бумаг в следующем году.

Пусть $f(x) = -rx^2 + 2x + 1$. Поскольку $f(0) > 0$, квадратный трёхчлен имеет единственный корень на положительной полуоси, и потому если для некоторого натурального числа k выполнено неравенство $f(k) < 0$, то для любого $n > k$ выполнено неравенство $f(n) < 0$. Из этого следует, что если доход при продаже акций в какой-то год оказался менее выгодным, чем доход при их продаже в предыдущий год, то и во все последующие годы продавать акции будет менее выгодно.

Поскольку ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать первого года, должны быть одновременно выполнены неравенства $S(21) - S(20) > 0$ и $S(22) - S(21) < 0$ то есть $f(20) > 0$ и $f(21) < 0$. Значит, $-400r + 41 > 0$ и $-441r + 43 < 0$, откуда $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}$.

Приведём другое рассуждение. Определим, во сколько раз увеличивается стоимость ценных бумаг по сравнению с их стоимостью в предыдущий год, если фонд не продает ценные бумаги, а хранит их:

$$\frac{(k+1)^2}{k^2} = 1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}.$$

Полученное отношение монотонно убывает с ростом k, поэтому если фонд хранит ценные бумаги, не продавая их, с течением лет прирост дохода падает, приближаясь к единице. В силу показанного убывания, если момент продажи наступил в конце 21 года, то он не мог наступить ни раньше, ни позже. Поэтому решения двойного неравенства

$$\frac{22^2}{21^2} < 1 + r < \frac{21^2}{20^2}$$

дадут искомые значения r. Первое из этих неравенств $\dfrac{22^2}{21^2} < 1 + r$ означает, что доход от хранения ценных бумаг в течение 22-го года принесет меньше прибыли, чем в случае их продажи в конце 21-го года, — ждать не имеет смысла, поскольку доходность стала меньше банковской и будет меньше во все следующие годы. Второе неравенство $\dfrac{21^2}{20^2} > 1 + r$, означает, что раньше продавать тоже не имело смысла — доход от хранения ценных бумаг в 21-м году превышает доход, который был бы получен от банка, и так было все предыдущие годы.

Осталось заметить, что

$$\frac{22^2}{21^2} < 1+r < \frac{21^2}{20^2} \Leftrightarrow \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$

28. Тип 16 № 518147

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t ($t = 1, 2, ...$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 24%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

Решение. Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце года k, то в конце двадцатого года на его счёте будет $a_k = 10k \cdot 1,24^{20-k}$ тыс. руб. Чтобы найти наибольший член последовательности $\{a_k\}$, рассмотрим разность последовательных членов:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k = 10(k+1) \cdot 1,24^{20-k-1} - 10k \cdot 1,24^{20-k} = \\ = 10 \cdot 1,24^{20-k-1}(-0,24k+1). \end{aligned}$$

Уравнение $-0,24k+1=0$ имеет корень $k = 4\frac{1}{6}$. Таким образом, $a_{k+1} > a_k$ при $k \leqslant 4$, и $a_{k+1} < a_k$ при $k \geqslant 5$, то есть

$$a_1 < a_2 < ... < a_5 \quad \text{и} \quad a_5 > a_6 > ... > a_{20}.$$

Следовательно, наибольшим членом последовательности является a_5, то есть ценные бумаги надо продавать в конце пятого года.

Ответ: 5.

29. Тип 16 № 520984

Зависимость количества Q (в шт., $0 \leqslant Q \leqslant 20000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Решение. Поскольку $P = 20000 - Q$, прибыль фирмы составляет

$$\begin{aligned} (20000-Q)Q - 6000Q - 4000000- \\ -tQ = (14000-t)Q - Q^2 - 4000000 \text{ (рублей)}. \end{aligned}$$

Эта величина является квадратичной функцией от Q, а её максимум достигается при $Q = 7000 - \frac{t}{2}$. Значит, общая сумма налогов, собранных государством, будет равна $7000t - \frac{t^2}{2}$ рублей. Эта величина является квадратичной функцией от t, а её максимум достигается при $t = 7000.$

Ответ: 7000.

30. Тип 16 № 520998

Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15\ 000 - P,\ 1000 \leqslant P \leqslant 15\ 000.$ Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5\ 000\ 000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение. Прибыль фирмы выражается как $f(P) = PQ - (3000Q + 5\ 000\ 000) =$ $= -P^2 + 18\ 000P - 50\ 000\ 000,$ то есть квадратично зависит от цены P. Пусть первоначальная цена равнялась P_0. После снижения цена стала равняться $0{,}8P_0$. Наибольшая прибыль достигается при значении P, для которого $f(P)$ достигает максимума. График функции $y = f(P)$ — парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому максимум $f(P)$ достигается в вершине параболы. Поскольку $f(P_0) = f(0{,}8P_0)$, вершина параболы находится в точке $\dfrac{P_0 + 0{,}8P_0}{2} = 0{,}9P_0$. Значит, нужно увеличить цену с $0{,}8P_0$ до $0{,}9P_0$, то есть на 12,5%.

Ответ: 12,5.

31. Тип 16 № 525381

Строительство нового завода стоит 159 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При этом в первый год $p = 10$, а далее каждый год возрастает на 1. За сколько лет окупится строительство?

Решение. Найдем прибыль за первый год после окончания строительства. При $p = 10$ для прибыли получаем величину $10x - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$ или $-0{,}5x^2 + 8x - 6$. Наибольшее значение данного выражения достигается при производстве $x = 8$ тыс. ед. продукции и составляет $-0{,}5 \cdot 8^2 + 8 \cdot 8 - 6 = 26$ млн. руб. Продолжая вычисления для $p = 11$, 12 и 13, можно найти прибыль в последующие годы и убедиться, что через 4 года общая прибыль составит 159 млн. руб.

Приведем решение в чуть более общем виде.

Ежегодно максимальная прибыль является наибольшим значением квадратичной функции $f(x) = -0{,}5x^2 + (p-2)x - 6$, достигается в точке $p - 2$ и равна

$$f(p-2) = -0{,}5(p-2)^2 + (p-2)(p-2) - 6 = \\ = 0{,}5(p-2)^2 - 6.$$

Тогда общая прибыль за n первых лет составит:

1 год: $0{,}5 \cdot 8^2 - 6 = 26$ млн. руб.,

2 год: $0{,}5 \cdot 9^2 - 6 = 34{,}5$ млн. руб. (общая 60,5 млн. руб.),

3 год: $0{,}5 \cdot 10^2 - 6 = 44$ млн. руб. (общая 104,5 млн. руб.),

4 год: $0{,}5 \cdot 11^2 - 6 = 54{,}5$ млн. руб. (общая 159 млн. руб.).

Тем самым, строительство окупится за 4 года.

Ответ: за 4 года.

32. Тип 16 № 530703

Для перевозки 500 маленьких и 26 больших блоков был выделен автомобиль грузоподъемностью 9,75 т. По техническим условиям он может перевозить не более 38 маленьких блоков. Габариты блоков таковы, что перевозка одного большого блока приравнивается к перевозке 18 маленьких. Большой блок весит 3,5 т, а маленький 0,25 т. Какое минимальное количество перевозок потребуется для перемещения всех блоков?

Решение. Для совершения минимального количества поездок загрузка автомобиля должна быть максимальной. С учётом грузоподъёмности и габаритных размеров возможны три способа максимальной загрузки автомобиля:

а) 2 больших блока и 2 маленьких блока (масса 7,5 т, но ограничение по количеству блоков);

б) 1 большой блок и 20 маленьких блоков (масса 8,5 т, но ограничение по количеству блоков);

в) 38 маленьких блоков (масса 9,5 т, но ограничение по количеству блоков).

Пусть первым способом будет совершено x перевозок, вторым — y перевозок, третьим — z перевозок. Требуется найти минимальное значение суммы $x+y+z,$ при выполнении условий

$$\begin{cases} 2x+y\geqslant 26, \\ 2x+20y+38z\geqslant 500. \end{cases}$$

Домножим первое неравенство на 18 и сложим со вторым неравенством. Получаем:

$$38x+38y+38z\geqslant 968 \Leftrightarrow x+y+z\geqslant 25\frac{9}{19}.$$

Значит, минимальное число перевозок больше 25.

Приведём пример, при котором можно перевезти все блоки за 26 перевозок: если 25 перевозок будут осуществлены вторым способом, то будут перевезены все 500 маленьких блоков и 25 больших блоков, и на 26-ю перевозку останется только один большой блок.

Ответ: 26.

33. Тип 16 № 531025

Эпицентр циклона, движущийся прямолинейно, во время первого измерения находился в 24 км к северу и 5 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения находился в 20 км к северу и $3\frac{1}{2}$ км к западу от метеостанции. Определите наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

Решение. Введём прямоугольную систему координат с началом координат в точке, где находится метеостанция, ось абсцисс направим на восток, ось ординат — на север. Тогда в момент первого измерения эпицентр циклона находился в точке с координатами $(-5;\ 24),$ а во время второго измерения — в точке с координатами $(-3,5;\ 20).$ По условию, эпицентр двигается прямолинейно. Пусть эта прямая задана уравнением $y=kx+b.$ Найдём коэффициенты k и b в уравнении этой прямой:

$$\begin{cases} 24=-5k+b, \\ 20=-3,5k+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=-1,5k, \\ b=24+5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\dfrac{8}{3}, \\ b=\dfrac{32}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение прямой $y=-\frac{8}{3}x+\frac{32}{3}$ или $8x+3y-32=0.$ Тогда наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции, будет равно расстоянию от точки $(0;\ 0)$ до прямой $8x+3y-32=0$:

$$\rho=\frac{|8\cdot 0+3\cdot 0-32|}{\sqrt{8^2+3^2}}=\frac{32}{\sqrt{73}}\ (\text{км}).$$

Ответ: $\dfrac{32}{\sqrt{73}}$ км.

34. Тип 16 № 531561

Завод закупает станки двух типов, на приобретение которых выделено 34 миллиона рублей. Станок первого типа занимает площадь 7 м^2 (с учетом проходов), производит за смену 5000 единиц продукции и стоит 4 миллиона рублей. Станок второго типа занимает площадь 4 м^2 (с учетом проходов), производит за смену 3000 единиц продукции и стоит 3 миллиона рублей. Станки должны быть размещены на площади, не превышающей 50 м^2. Сколько станков каждого типа нужно приобрести, чтобы производить за смену наибольшее количество продукции?

Решение. Пусть завод закупит x станков первого типа и y станков второго типа. Тогда, справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} 4x+3y \leqslant 34, \\ 7x+4y \leqslant 50. \end{cases} \quad (*)$$

Требуется найти, при каких значениях x и yдостигается наибольшее значение выражения $5x+3y$.

Заметим, что x и y — неотрицательные целые числа. При этом наибольшее возможное значение x равно 7: в противном случае второе неравенство системы не выполняется. При каждом значении x значение выражения $5x+3y$ тем больше, чем больше значение y. Решим задачу перебором. Для каждого значения x найдём наибольшее возможное значение y, при котором верна система (*), а также значение выражения $5x+3y$.

Значение x	Наибольшее возможное значение y	Значение $5x+3y$
0	11	33
1	10	35
2	8	34
3	**7**	**36**
4	5	35
5	3	34
6	**2**	**36**
7	0	35

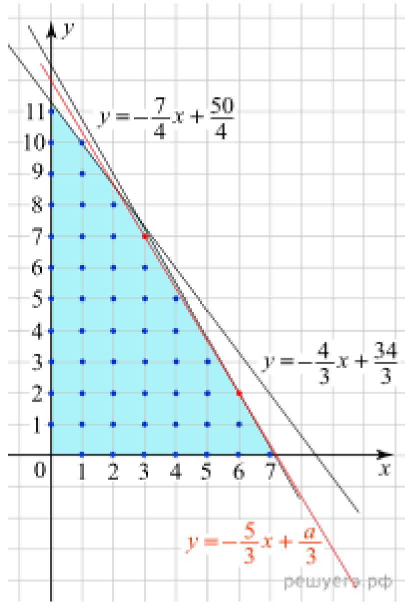
Таким образом, чтобы производить за смену наибольшее количество продукции, заводу необходимо закупить 3 станка первого типа и 7 станков второго типа или 6 станков первого типа и 2 станка второго типа. Заметим также, что вторая комбинация обойдётся заводу дешевле на 3 млн руб.

Ответ: 3 станка первого типа и 7 станков второго типа или 6 станков первого типа и 2 станка второго типа.

Примечание:

Перебор можно заменить графическим исследованием. Изобразим решение системы (*) и семейство прямых $5x+3y=a$ (см. рис., целочисленные решения системы изображены цветными точками).

Наибольшему возможному значению a соответствует такое положение прямой, при котором прямая проходит хотя бы через одно целочисленное решение системы, и нет целочисленных решений, лежащих выше прямой (изображено красным цветом). Из рисунка видно, что искомые значения переменных соответствуют либо 3 станкам первого типа и 7 станкам второго типа, либо 6 станкам первого типа и 2 станкам второго типа.



35. Тип 16 № 531832

В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определите минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Решение. Пусть в контейнере находятся x изделий первого типа, y изделий второго типа и z изделий третьего типа, тогда верно равенство

$$12x+16y+15z=326. \quad (*)$$

Правая часть полученного уравнения делится на 2, значит, и левая часть должна делиться на 2. Поэтому z — чётное число. Кроме того, заметим, что $\frac{600}{15}>\frac{400}{12}>\frac{500}{16}$, значит, изделия третьего типа имеют самую большую удельную цену (цена на 1 кг изделия), а изделия второго типа — самую маленькую.

Наибольшая суммарная стоимость находящихся в контейнере изделий будет соответствовать решению уравнения (*) в натуральных числах при наибольшем количестве самых дорогих изделий z. Если $z\geqslant 22$, то $15z\geqslant 330$, а значит, уравнение (*) не имеет решений в натуральных числах. Будем проверять чётные числа, меньшие 22, в порядке убывания. Если $z=20$, то $12x+16y=26$ — это уравнение не имеет решений в натуральных числах. Если $z=18$, то $12x+16y=56$, полученное уравнение имеет единственное решение $x=y=2$. Следовательно, наибольшая суммарная стоимость находящихся в контейнере изделий равна

$$S_{max}=400\cdot 2+500\cdot 2+600\cdot 18=12\ 600 \text{ тыс. руб.}$$

Наименьшая суммарная стоимость находящихся в контейнере изделий будет соответствовать решению уравнения (*) в натуральных числах при наибольшем количестве самых дешёвых изделий y. Если $y\geqslant 20,\ z\geqslant 2$ то $16y+15z\geqslant 340$, а значит, уравнение (*) не имеет решений в натуральных числах. Проверим значения y, меньшие 20. Если $y=19$, то $12x+15z=22$ — нет решений в натуральных числах. Если $y=18$, то $12x+15z=38$ — нет решений в натуральных числах. Если $y=17$, то $12x+15z=54$, — есть единственное решение $x=z=2$. Следовательно, наименьшая суммарная стоимость находящихся в контейнере изделий равна

$$S_{min}=400\cdot 2+500\cdot 17+600\cdot 2=10\ 500 \text{ (тыс. руб.)}$$

Ответ: 10,5 млн руб. и 12,6 млн руб.

36. Тип 16 № 543777

Правительство решило закрыть нерентабельные шахты и построить новые фабрики и заводы. В результате закрытия одной шахты увольняется 180 человек, при этом на консервацию шахты и выплату пособий увольняемым тратится 52 миллиона рублей. Строительство одного нового завода с персоналом 170 человек стоит 43 млн руб., а одной фабрики с персоналом 110 человек — 20 млн руб. Чему равно максимально возможное увеличение суммарного числа новых рабочих мест, если известно, что сумма всех затрат правительства составила ровно 714 млн руб.?

Решение. Пусть будет закрыто x шахт, построено y заводов и z фабрик, где x — натуральное число, а y и z — целые неотрицательные числа. Тогда $52x+43y+20z=714,$ значит, y — чётное, но не кратное 4. Пусть $y=4k-2,$ где $k\in\mathbb{N},$ тогда

$$26x+43\cdot 2k-43+10z=357 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 26x+43\cdot 2k+10z=400 \Leftrightarrow 13x+43k+5z=200 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13x+13k+30k+5z=200 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13(x+k)+30k+5z=200.$$

Заметим, что $k<5,$ и что $x+k$ — кратно 5. Пусть $x+k=5n,$ где $n\in\mathbb{N},$ имеем:

$$13\cdot 5n+30k+5z=200 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13n+6k+z=40 \Leftrightarrow z=40-6k-13n.$$

Для увеличения суммарного числа S новых рабочих мест получаем:

$$S=170y+110z-180x=$$
$$=10\cdot(17\cdot(4k-2)+11\cdot(40-6k-13n)-18\cdot(5n-k))=$$
$$=10\cdot(20k-233n+406)\leqslant 10\cdot(20\cdot 4-233\cdot 1+406)=$$
$$=2530.$$

Это значение достигается при $x=1,$ $y=14$ и $z=3.$

Ответ: 2530.

37. Тип 16 № 544253

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими начинками: ягодная, творожная и мясная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	**Себестоимость за тонну**	**Отпускная цена за тонну**	**Производственные возможности**
Ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 тонн в мес.
Творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 тонн в мес.
Мясо	145 тыс. руб.	145 тыс. руб.	60 тонн в мес.

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

Решение. Пусть x — доля всех мощностей фабрики за месяц, которые выпускают блинчики с ягодами, y — доля всех мощностей фабрики за месяц, которые выпускают блинчики с творогом, z — доля всех мощностей фабрики, которые выпускают блинчики с мясом. Значит, $x+y+z=1.$ При этом для выполнения условий ассортиментности должны быть выполнены условия:

$$90x\geqslant 15 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{1}{6};$$

$$75y \geqslant 15 \Leftrightarrow y \geqslant \frac{1}{5};$$
$$60z \geqslant 15 \Leftrightarrow z \geqslant \frac{1}{4}.$$

Прибыль в тыс. руб., которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц равна

$$\begin{gathered}\Pi = \\ = (100-70)\cdot 90x + (135-100)\cdot 75y + (145-145)\cdot 60z = \\ = 30\cdot 90x + 35\cdot 75y = \\ = 75(36x+35y) = 75(35(x+y)+x) = \\ = 75(35(1-z)+x) = 75(35-35z+x)\end{gathered}$$

Прибыль возрастает с уменьшением z и с увеличением x. Заметим, что

$$y+z \geqslant \frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20} \Leftrightarrow x = 1-(y+z) \leqslant 1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}.$$

Значит,

$$\begin{gathered}\Pi = 75(35-35z+x) \leqslant 75\cdot\left(35-35\cdot\frac{1}{4}+\frac{11}{20}\right) = \\ = \frac{75\cdot(35\cdot 15+11)}{20} = 2010 \text{ тыс. руб.,}\end{gathered}$$

причем равенство достигается при $x = \frac{11}{20},\ y=\frac{1}{5},\ z=\frac{1}{4}.$

Ответ: 2010 тыс. руб.

Примечание.

Рекомендуем сравнить это задание с заданием 509426 одного из пробных экзаменов.

38. Тип 16 № 556487

Необходимо произвести отделку здания, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда объемом 432 м^3. Отделка стены здания, примыкающей к внутреннему строению, обходится в 1000 руб. за квадратный метр. Отделка трех фасадных стен обходится в 2000 руб. за квадратный метр. А заливка крыши, форма которой является квадратом, обходится в 7000 руб. за квадратный метр. Найдите размеры здания, отделочные работы которого при данных условиях являются наименьшими по стоимости.

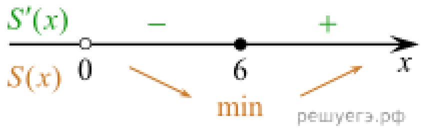
Решение. По условию форма крыши является квадратом, значит, длина и ширина здания равны. Пусть длина и ширина здания равны x м ($x > 0$), тогда высота здания равна $\frac{432}{x^2}$ м. Стоимость отделки здания в тысячах рублей равна

$$S(x) = 7\cdot x^2 + 1\cdot x\cdot\frac{432}{x^2} + 3\cdot 2\cdot x\cdot\frac{432}{x^2} = 7\cdot\left(x^2+\frac{432}{x}\right).$$

С помощью производной найдём значение x, при котором $S(x)$ принимает наименьшее значение:

$$\begin{gathered}S'(x) = 7\cdot\left(2x-\frac{432}{x^2}\right) = \\ = 14\cdot\left(x-\frac{216}{x^2}\right) = 14\cdot\frac{x^3-216}{x^2},\end{gathered}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 216 = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$



Точка минимума $x = 6$ является единственной точкой экстремума непрерывной на луче $(0;+\infty)$ функции $S(x)$, поэтому в данной точке эта функция принимает наименьшее значение. Значит, длина и ширина здания равны 6 м, а высота здания равна $\frac{432}{6^2} = 12$ м.

Ответ: 6 м, 6 м, 12 м.

39. Тип 16 № 560937 *i*

Сергей хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Сергея не было денег на покупку акций, а пакет стоил 160 000 рублей. В середине каждого месяца Сергей откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 25%. Какую наименьшую сумму (в рублях) нужно откладывать Сергею каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение. Обозначим начальную цену пакета акций $S = 160\ 000$ рублей, ежемесячный повышающий коэффициент стоимости пакета акций $k = 1,25$, и пусть ежемесячно откладываемая сумма составляет a рублей. Тогда в конце $(n-1)$-го месяца пакет акций будет стоить не больше Sk^{n-1} рублей. К середине n-го месяца Сергей накопит сумму an рублей. Чтобы иметь возможность купить этот пакет акций во второй половине n-го месяца необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$an \geqslant Sk^{n-1} \Leftrightarrow a \geqslant \frac{Sk^{n-1}}{n}.$$

Минимальное значение будет соответствовать равенству $a = \frac{Sk^{n-1}}{n}$.

Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{Sk^{n-1}}{n}$ и найдем наименьший член этой последовательности. Для этого исследуем, как меняется частное двух соседних членов последовательности в зависимости от n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{Sk^n}{n+1} : \frac{Sk^{n-1}}{n} = k \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Полученное выражение монотонно возрастает с ростом n, оно меньше 1 при $n < 4$, равно 1 при $n = 4$ и больше 1 при $n > 4$. Это означает, что наименьшим членом последовательности является a_4, а потому искомая наименьшая сумма равна

$$\frac{Sk^{4-1}}{4} = \frac{160000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3}{4} = \frac{40000 \cdot 5^3}{4^3} =$$

$$= \frac{10000 \cdot 125}{16} = 25 \cdot 25 \cdot 125 = 78125 \text{ рублей.}$$

Ответ: 78 125 рублей.

Примечание.

Чтобы найти наименьшее значение суммы, можно было рассмотреть не частное, а разность последовательных сумм:

$$a_n-a_{n+1}=\frac{Sk^{n-1}}{n}-\frac{Sk^n}{n+1}=\frac{(n+1)Sk^{n-1}-nSk^n}{n(n+1)}=$$
$$=\frac{Sk^{n-1}(n+1-nk)}{n(n+1)}=\frac{Sk^{n-1}\left(n(1-k)+1\right)}{n(n+1)}.$$

Знак разности a_n-a_{n+1} совпадает со знаком выражения $n(1-k)+1,$ которое при подстановке $k=1,25$ принимает вид $-0,25n+1.$ Это выражение положительно при $n<4,$ равно нулю при $n=4$ и отрицательно при $n>4.$ Это означает, что

$$a_1>a_2>a_3>a_4=a_5<a_6<a_7\ldots<a_n.$$

Значит, наименьшая сумма, которую необходимо ежемесячно откладывать, равна

$$a_4=\frac{Sk^{4-1}}{4}=\frac{160000\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3}{4}=\frac{40000\cdot5^3}{4^3}=$$
$$=\frac{10000\cdot125}{16}=25\cdot25\cdot125=78\,125\text{рублей.}$$

40. Тип 16 № 561733

В начале года Алексей приобрёл ценные бумаги на сумму 9 тыс. рублей. В середине каждого года стоимость ценных бумаг возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать ценные бумаги и положить вырученные деньги на банковский счёт. В середине каждого года сумма на счёте будет увеличиваться на 9%. В начале какого года после покупки Алексей должен продать ценные бумаги, чтобы через двадцать лет после покупки ценных бумаг сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение. Пусть при продаже ценных бумаг Алексей получит за них S тыс. рублей. Чтобы ему выгодно было продавать ценные бумаги, ежегодные начисления по вкладу должны превышать 2 тыс. рублей, т. е. должно выполняться неравенство

$$0,09S>2\Leftrightarrow S>22,22\ldots$$

В конце n-го года после покупки ценных бумаг их стоимость будет равна $9+2n$ тыс. рублей. Так как неравенство $9+2n>22,22\ldots$ выполняется при $n=7$ и не выполняется при меньших значениях n, Алексей должен продать ценные бумаги в начале восьмого года после их покупки.

Ответ: 8.

41. Тип 16 № 562008

Алексей планирует 15 декабря взять в банке кредит на 2 года в размере 1 806 000 рублей. Сотрудник банка предложил Алексею два различных варианта погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

Вариант 1	− Каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года; − с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; − кредит должен быть полностью погашен за два года двумя равными платежами.
Вариант 2	−1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца; − со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; − 15 числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца; − к 15-му числу 24 месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат банку по более выгодному для Алексея варианту погашения кредита?

Решение. Пусть S — размер кредита, он равен 1806 тысячам рублей. Срок погашения кредита n составляет 2 года или 24 месяца. Процентная ставка r составляет в первом варианте 15% годовых, а во втором 2% ежемесячно.

В первом варианте долг x выплачен двумя платежами, поэтому $(S\cdot 1,15-x)1,15-x=0,$ откуда

$$S\cdot 1,3225-2,15x=0 \Leftrightarrow x=\frac{S\cdot 1,3225}{2,15} \underset{S=1806}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{S=1806}{\Leftrightarrow} x=\frac{1806\cdot 1,3225}{2,15}=1110,9 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма выплат составляет $1110,9\cdot 2=2221,8$ тыс. руб.

Во втором варианте суммы долга составляют арифметическую прогрессию:

$$S\cdot 1,02,\ S\cdot 1,02\cdot\frac{23}{24},\ S\cdot 1,02\cdot\frac{22}{24},\ \ldots,\ S\cdot 1,02\cdot\frac{1}{24}.$$

а выплаты равны

$$+\frac{S}{24},\ \frac{S\cdot 0,02\cdot 23+S}{24},\ \frac{\begin{gathered}S\cdot 0,02+\\ S\cdot 0,0,02\cdot 22+S\end{gathered}}{24},\ \ldots,\ \frac{S\cdot 0,02+S}{24}.$$

Поэтому для суммы выплат получаем:

$$S+S\cdot 0,02\left(1+\frac{23}{24}+\frac{22}{24}+\ldots+\frac{1}{24}\right)=$$
$$=S+S\cdot 0,02\left(\frac{1+\frac{1}{24}}{2}\cdot 24\right)=$$
$$=S+S\cdot 0,02\cdot\frac{25}{2}=S+\frac{S}{4}=1,25S$$

или $1,25\cdot 1806=2257,5$ тыс. руб.

Следовательно, более выгоден кредит, описанный в варианте 1; разность сумм выплат составит

$$2257,5-2221,8=35,7\ (\text{тыс. руб.})=35\,700\ \text{руб.}$$

Ответ: 35 700 рублей.

42. Тип 16 № 562180

Цена ценной бумаги на конец года вычисляется по формуле $S=1,1S_0+2000$, где S_0 — цена ценной бумаги на начало года в рублях. Максим может приобрести ценную бумагу, а может положить деньги на банковский счёт, на котором сумма увеличивается за год на 12%. В начале любого года Максим может продать бумагу и положить все вырученные деньги на банковский счёт, а также снять деньги с банковского счёта и купить ценную бумагу. В начале 2021 года у Максима было 80 тысяч рублей, которые он может положит на банковский счёт или может приобрести на них ценную бумагу. Какая наибольшая сумма может быть у Максима через четыре года? Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть S_0 — сумма денег у Максима в какой-то момент времени, тогда при вложении денег на банковский депозит S_0 будет увеличиваться: $S_2=1,12S_0$. Необходимо понять, в какой момент времени стоит продать ценную бумагу и положить деньги на банковский счет, для этого решим неравенство:

$$S_2>S_1\Leftrightarrow 1,12S_0>1,1S_0+2000\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,02S_0>2000\Leftrightarrow S_0>100000.$$

Найдем сумму денег через 4 года:

$x_1 = 1,1 \cdot 80000 + 2000 = 90000 < 100000$: нужно снова вложиться в ценную бумагу;
$x_2 = 1,1 \cdot 90000 + 2000 = 101000$: откладываем деньги в банк;
$x_3 = 1,12 \cdot 101000 = 113120$: повторяем последнее действие.
$x_4 = 1,12 \cdot 113120 = 126694,4.$

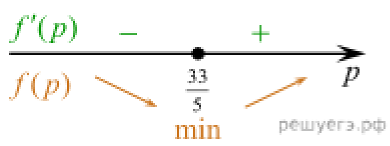
Ответ: 126 694,4 рублей.

43. Тип 16 № 562190

Бригаду из 30 рабочих нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $200p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $(50p+300)$ руб. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная суточная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придётся заплатить за сутки всем рабочим?

Решение. Составим таблицу по данным задачи.

	Количество рабочих	Заработная плата (руб/сут) на 1 рабочего
Первый объект	p	$200p$
Второй объект	$30-p$	$50(30-p)+300$
Всего:	30	$200p^2+(50(30-p)+300)\times$ $\times(30-p)=250p^2-3300p+54000$



Пусть $f(p)=250p^2-3300p+54000$. Квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $p=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{33}{5}$. По условию p — это натуральное число. Найдем и сравним значения функции при $p=6$ и $p=7$:

$$f(6)=250\cdot(6)^2-3300\cdot(6)+54000=43200,$$
$$f(7)=250\cdot(7)^2-3300\cdot(7)+54000=43150.$$

Наименьшая суточная зарплата всем рабочим, достигается при $p=7$. Следовательно, на первый объект следует отправить 7 рабочих, а на второй — 23 рабочих.

Ответ: 1-й объект — 7 человек, 2-й объект — 23 человека; 43 150 рублей.

44. Тип 16 № 562253

В январе 2005 года ставка по депозитам в банке «Фантазия» составила x% годовых, а в январе 2006 года — y% годовых, причем известно, что $x+y=30$. В январе 2005 года вкладчик открыл депозитный счёт в банке «Фантазия», положив на него некоторую сумму. В январе 2006 года, по прошествии года со дня открытия счёта, вкладчик снял со счёта пятую часть этой суммы. Укажите значение x, при котором сумма на счёте вкладчика в январе 2007 года является максимально возможной.

Решение. Пусть первоначальный вклад составил $5S$, тогда через год (после начисления процентов) величина вклада составит $5S\left(1+\dfrac{x}{100}\right)$. После снятия со счёта пятой части первоначальной суммы величина вклада составит $5S\left(1+\dfrac{x}{100}\right)-S$. Ещё через год (после начисления процентов) величина вклада составит

$$\left(5S\left(1+\frac{x}{100}\right)-S\right)\left(1+\frac{30-x}{100}\right)=$$
$$=S\left(4+\frac{x}{20}\right)\left(1+\frac{30-x}{100}\right)=\frac{S(80+x)(130-x)}{2000}.$$

Наибольшее значение этого выражения достигается в той же точке, что и наибольшее значение квадратичной функции $f(x)=(80+x)(130-x)$ на интервале $(0;30)$. Графиком этой функции является парабола с ветвями, направленными вниз, вершина параболы равна среднему арифметическому абсцисс точек пересечения параболы с осью абсцисс: $x_0=\dfrac{-80+130}{2}=25.$ Значит, наибольшее значение $f(x)$ на интервале $(0;30)$ достигается в точке $x_0=25.$

Ответ: 25.

45. Тип 16 № 621228

Строительство нового завода стоит 140 млн руб. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}2x^2+3x+1$ млн руб. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн руб.) за один год составит $px-(0{,}2x^2+3x+1)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки завода цена на продукцию $p=7$ тыс. руб. за единицу. Каждый последующий год цена увеличивается на 2 тыс. руб. за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Решение. Найдем наибольшее значение прибыли, т. е. наибольшее значение функции

$$f(x)=px-(0,2x^2+3x+1)=-\frac{1}{5}x^2+(p-3)x-1,$$

где $p>0$ и $x>0.$ Квадратичная функция с отрицательным коэффициентом при старшем члене достигает наибольшего значения в точке

$$x_0=\frac{p-3}{2\cdot 0,2}=\frac{5}{2}\cdot(p-3).$$

Найдем это значение:

$$f(x_0)=-\frac{1}{5}\cdot\frac{25(p-3)^2}{4}+(p-3)\cdot\frac{5}{2}(p-3)-1=$$
$$=-\frac{5}{4}\cdot(p-3)^2+\frac{5}{2}(p-3)^2-1=\frac{5}{4}(p-3)^2-1.$$

Теперь посчитаем прибыли завода.

Год после постройки завода	Значение p	Сумма прибыли	Сумма прибыли с 1-го года функционирования завода (в млн руб.)
1	7	$\frac{5}{4}\cdot(7-3)^2-1=\frac{5}{4}\cdot 16-1=19$	19
2	9	$\frac{5}{4}\cdot(9-3)^2-1=\frac{5}{4}\cdot 36-1=44$	$19+44=63$
3	11	$\frac{5}{4}\cdot(11-3)^2-1=\frac{5}{4}\cdot 64-1=79$	$63+79=142>140$

Ответ: 3.

46. Тип 16 № 621471

В начале 1977 года Алишер положил в пустой сейф 1 млн руб. В начале каждого последующего года он вынимает из сейфа *m*% имеющихся там рублей. При каком значении *m* он вынет из сейфа в начале 1982 года максимальную сумму?

Решение. Обозначим исходную сумму 1 млн рублей буквой *K*. В начале 1978-го, 1979-го, 1980-го, 1981-го годов в сейфе Алишера в результате 4-х изъятий сумм по *m*% оставалось $(1-0{,}01m)^4K$ руб.

В начале 1982-го года Алишер вновь вынул *m*% остатка денег, эта сумма должна иметь возможное наибольшее значение. Она равна $(1-0{,}01m)^4\cdot 0{,}01m\cdot K$ руб. Достаточно найти значение *m*, при котором функция $f(m)=(m-100)^4\cdot m$ достигает наибольшего значения.

По смыслу задачи $0<m<100.$ Функция определена при всех значениях *m*, таких, что $0\leqslant m\leqslant 100.$ Исследуем эту функцию на наибольшее значение на отрезке [0; 100]. Найдем критические точки, не совпадающие с концами отрезка. Получим:

$$f'(m)=4(m-100)^3\cdot m+(m-100)^4\cdot 1=$$
$$=(m-100)^3(4m+m-100)=(m-100)^3(5m-100).$$

Решим уравнение $5m-100=0,$ найдем $m=20.$ Число 20 делит промежуток (0; 100) на промежутки знакопостоянства производной: интервалы (0; 20) и (20; 100). Найдем эти знаки, взяв пробные точки:

$$f'(10)=(10-100)(10-20)>0, f'(30)=(30-100)(30-20)<0.$$

Таким образом, производная функции при переходе в положительном направлении через точку 20 меняет знак с плюса на минус, следовательно, в этой точке согласно достаточному признаку максимума функции, достигается максимум функции. Этот максимум на интервале (0; 100) единственный. Поэтому в точке 20 функция *f*(*m*) достигает наибольшего значения на интервале (0; 100).

Ответ: 20.

47. Тип 16 № 622984

Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа *A* и 2010 деталей типа *B*. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа *A* время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа *B*. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

Решение. Заменим мысленно каждую деталь типа *B* двумя деталями типа *A*, время работы от этого не изменится. Получим, что первая бригада рабочих должна изготовить 1005 деталей типа типа *A*, а вторая бригада должна изготовить 4020 деталей типа *A*, то есть в 4 раза больше. Значит, количество рабочих в бригадах необходимо разделить в соотношении 1 : 4. Поэтому в первой бригаде должно быть 193 : 5 = 38,6 чел., а во второй — в 4 раза больше, то есть 154,4 чел.

Дробное число рабочих изготавливать детали не может, поэтому найденные значения необходимо округлить. Если в первой бригаде будет 38 рабочих, а во второй — 154 рабочих (в 4,05 раза больше), то первая бригада закончит работу позже второй. Если же в первой бригаде будет 39 рабочих, а во второй 153 рабочих (в 3,92 раза больше), то вторая бригада закончит позже первой. Для каждого из этих случаев оценим время выполнения заказа. Другие варианты разбиения рабочих по бригадам (37 на 155 чел., 40 на 152 чел. и т. д.) не могут дать меньшего времени, по сравнению с первыми двумя, поскольку чем дальше отношение числа рабочих в бригадах от соотношения 1 : 4, тем дольше будет работать более медленная из бригад, в то время как уже закончившая свою часть заказа бригада будет простаивать.

Пусть одна деталь делается рабочим за 1 единицу времени; не ограничивая общности, положим эту единицу равной 1 минуте. Тогда бригада из 38 человек на изготовление 1005 деталей затратит $\dfrac{1005}{38}=26{,}45\ldots$ мин., а бригада из 154 человек затратит на изготовление 2010 деталей $2\cdot\dfrac{2010}{154}=26{,}1\ldots$ мин. В этом случае заказ будет закончен больше чем за 26,4 мин. Если же в первой бригаде 39 чел., то на изготовление 1005 деталей они затратят $\frac{1005}{39} = 25,8\ldots$ мин., в то время как вторая бригада из 153 человек затратит на изготовление 2010 деталей $2 \cdot \frac{2010}{153} = 26,27\ldots$ мин. В этом случае заказ будет закончен меньше чем за 26,3 мин. Значит, в первой бригаде должно быть 39 рабочих, а во второй бригаде — 153 рабочих.

Ответ: 39 и 153.

Примечание.

Эта задача из варианта Александра Ларина впервые предлагалась абитуриентам экономического факультета МГУ в 1992 году под номером 3 из шести задач в варианте. Авторское решение аналогичной задачи мы привели в задаче 632165.

48. Тип 16 № 623660

В растворе *X* содержится 30% вещества *A* и 50% вещества *B*, в растворе *Y* содержится 50% вещества *A* и 40% вещества *B*, в растворе *Z* содержится 80% вещества *A* и 10% вещества *B*. В результате смешивания получился раствор, содержащий 60% вещества *A*. Найдите наименьшее возможное содержание вещества *B* в получившемся растворе.

Решение. Будем считать, что для смешивания использовали *a* кг раствора *X*, *b* кг раствора *Y* и *c* кг раствора *Z*. Тогда для вещества *A* имеем:

$$0,3a+0,5b+0,8c=0,6(a+b+c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,3a+0,1b=0,2c \Leftrightarrow b=2c-3a.$$

Пусть $c=1$, тогда $b=2-3a$, где, с учетом неотрицательности масс, $0 \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}$.

Для вещества *B* получаем:

$$0,5a+0,4b+0,1c=\omega \cdot (a+b+c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{0,5a+0,4b+0,1c}{a+b+c}.$$

Подставив $c=1$, и $b=2-3a$, получим функцию

$$\omega(a) = \frac{0,5a+0,4(2-3a)+0,1\cdot 1}{a+(2-3a)+1} =$$
$$= \frac{0,9-0,7a}{3-2a} = \frac{0,15}{2a-3}+0,35.$$

Функция $\omega(a)$ — убывающая, значит, принимает своё наименьшее значение при наибольшем значении аргумента.

$$\omega_{min}(a) = \omega\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{0,15}{2\cdot\frac{2}{3}-3}+0,35=0,26.$$

Значит, наименьшее возможное содержание вещества *B* в полученном растворе равно 26%. Это достигается если смешать 2 порции раствора *X* и 3 порции раствора *Z*, а раствор *Y* не использовать.

Ответ: 26%.

Приведем другое решение:

Пусть *a* — доля раствора *X*, *b* — доля раствора *Y* и *c* — доля раствора *Z* в смеси, тогда *a* + *b* + *c* = 1, то есть *c* = 1 – *a* – *b*. Для концентрации вещества *A* в смеси имеем

$$0,6=0,3a+0,5b+0,8c=0,3a+0,5b+0,8(1-a-b) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0,5a+0,3b=0,2 \Leftrightarrow a=0,4-0,6b.$$

Для концентрации ω вещества B в смеси получаем

$$\omega(b) = 0,5a + 0,4b + 0,1c = \\ = 0,5(0,4 - 0,6b) + 0,4b + 0,1(1 - 0,4 - 0,4b) = \\ = 0,26 + 0,06b.$$

Очевидно, что минимум этой функции достигается при $b = 0$ и равен $\omega(0) = 0,26$. Заметим, что при этом $a = 0,4$, $c = 0,6$.

Ответ: 26%.

49. Тип 16 № 625653

Шарона Абрамовна планирует взять кредит на некоторую сумму и выбирает между двумя банками. Первый банк предлагает кредит на 10 лет под 3% годовых, второй — на 6 лет под 9% годовых, причем в обоих банках применяется дифференцированная съема погашения кредита (ежегодно долг уменьшается каждый год на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим годом). В какой банк выгоднее обратиться Шароне Абрамовне и сколько процентов от кредита составит эта выгода?

Решение. Пусть планируемая сумма кредита равна K у. е. Это значит, что Шарона Абрамовна будет обязана вернуть банку эту сумму равными платежами по $\frac{K}{10}$ у. е. в каждый платежный год если она обратится в первый банк (случай первый), или по $\frac{K}{6}$ у. е., если Шарона Абрамовна воспользуется услугами второго банка (случай второй).

Кроме того Шарона Абрамовна будет должна ежегодно выплачивать банку комиссию в размере 3% от остатка очередного долга в первом случае и 9% от аналогичного остатка долга во втором случае, которые мы условно назовем переплатами банку. В обоих случаях переплаты образуют конечную убывающую арифметическую прогрессию, суммы которых можно вычислить, зная первый и последний их члены.

В контексте данной задачи переплата в соответствующий платежный год составит:

По условиям банка №	Платежный год		Сумма первых n членов арифметической прогрессии
	первый	второй	
1	$0,03K$	$0,03K:10 = 0,003K$	$\frac{0,03K + 0,003K}{2} \cdot 10 = 0,033K \cdot 5 = 0,165K$
2	$0,09K$	$0,09K:6 = 0,015K$	$\frac{0,09K + 0,015K}{2} \cdot 6 = 0,105K \cdot 3 = 0,315K$

Заметим, что общая сумма выплат Шарона Абрамовны по возврату основного долга одна и та же в обоих случаях, она равна K у. е. Разные лишь переплаты, их разность составляет

$$\Delta = 0,315K - 0,165K = 0,15K \text{ (у. е.)},$$

то есть 15%.

Ответ: 15.

50. Тип 16 № 629117

Зависимость количества Q (в шт., $0 \leqslant Q \leqslant 30\,000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 30\,000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $5\,000Q + 3\,000\,000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей $(0 < t < 15\,000)$ с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 5\,000Q - 3\,000\,000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.

Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Решение. По условию $P = 30\,000 - Q$. Прибыль фирмы равна

$$(30\,000 - Q)Q - 5\,000Q - 3\,000\,000 - \\ - tQ = -Q^2 + (25\,000 - t)Q - 3\,000\,000.$$

Старший коэффициент полученного квадратного трехчлена относительно Q отрицателен, поэтому он достигает наибольшего значения в точке

$$Q_0 = -\frac{25\,000 - t}{-2 \cdot 1} = -\frac{t}{2} + 12\,500.$$

Сумма налогов, собранных государством, составляет

$$t \cdot Q_0 = t \cdot \left(-\frac{t}{2} + 12\,500\right) = -\frac{1}{2} \cdot t^2 + 12\,500t.$$

Наибольшее значение этой функции достигается в точке

$$t_0 = -\frac{12\,500}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 12\,500.$$

Ответ: 12 500.

51. Тип 16 № 629308

Инвестору предлагаются два проекта для вложения денежных средств. В каждом проекте зависимость прибыли y (в тысячах рублей) от вложений x (тыс. руб.) определяется квадратичной функцией $y(x) = ax^2 + bx$ с коэффициентами a и b, зависящими от проекта. Известно, что при инвестировании средств только в первый проект максимальная прибыль в 200 тыс. руб. достигается при вложении 100 тыс. руб., а при инвестировании только во второй проект максимальная прибыль в 150 тыс. руб. достигается при вложении 150 тыс. руб. Инвестор решил вложить 290 тыс. рублей в оба проекта. Какую сумму ему следует вложить в каждый из проектов, чтобы общая прибыль была максимальной? Найдите эту максимальную общую прибыль.

Решение. Рассмотрим случай вложения денег только в первый проект, в этом случае $y = ax^2 + bx$, при этом $x = -\frac{b}{2a}$. По условию $b = 200$, если $x = 100$. Значит, $b = -200a$. Тогда

$$y(100) = a \cdot 100^2 - 200 \cdot a \cdot 100 = \\ = 10\,000a - 20\,000a = 200,$$

откуда

$$-10\,000a = 200 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{50}.$$

При таком a найдется значение b:

$$b=-200a=-200\cdot\left(-\frac{1}{50}\right)=4.$$

Функция имеет вид $y=-\frac{1}{50}x^2+4x.$

Рассмотрим вложение денежных средств только во второй проект. Аналогично получаем: $y=ax^2+bx,$ при этом $x=-\frac{b}{2a}$. По условию $b=150,$ если $x=150.$ Значит, $b=-300a.$ Тогда

$$y(150)=150^2\cdot a-300\cdot a\cdot 150=150,$$

откуда

$$150a-300a=1\Leftrightarrow -150a=1\Leftrightarrow a=-\frac{1}{150}.$$

При полученном значении a:

$$b=-300\cdot\left(-\frac{1}{150}\right)=2.$$

Функция имеет вид $y=-\frac{1}{150}x^2+2x.$

Рассмотрим вложение в оба проекта суммы 290 тыс. руб. Пусть в первый проект было вложено x тыс. руб, тогда второй проект вложено $(290-x)$ тыс. руб. Составим сумму ранее найденных функций для этих значений аргументов и найдем ее наибольшее значение. Имеем:

$$f(x)=-\frac{1}{50}x^2+4x-\frac{1}{150}(290-x)^2+2\,(290-x)\,.$$

Полученная функция квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом, она достигает своего наибольшего значения в точке максимума. Найдем производную:

$$f'(x)=-\frac{2}{50}x+4-\frac{2}{150}\cdot(290-x)\cdot(-1)+2\cdot(-1).$$

Решим уравнение $f'(x)=0$:

$$-\frac{1}{25}x+2+\frac{290-x}{75}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3x+290-x+150=0\Leftrightarrow 4x=440\Leftrightarrow x=110.$$

Итак, в первый проект следует вложить 110 тыс. руб., во второй 180 тыс. руб. При этом максимальная общая прибыль составит

$$f(110)=-\frac{1}{50}\cdot 12\,100+440-\frac{1}{150}\cdot 180^2+2\cdot 180=$$
$$=-242+440-216+360=342(\text{тыс. руб.}).$$

Ответ: 110 тыс. руб. в первый проект, 180 тыс. руб. во второй проект; максимальная общая прибыль 342 тыс. руб.

52. Тип 16 № 629865

Паром грузоподъёмностью 109 тонн перевозит джипы и грузовики. Количество перевозимых на пароме грузовиков не менее чем на 20% превосходит количество перевозимых джипов. Вес и стоимость перевозки одного джипа составляют 3 тонны и 600 рублей, грузовика — 5 тонн и 700 рублей соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость перевозки всех джипов и грузовиков при данных условиях.

Решение. Пусть паром способен перевозить x джипов и y грузовиков одновременно. Необходимо найти наибольшее возможное значение суммы $S(x, y) = 600x + 700y,$ зная, что числа x и y натуральные, причем

$$\begin{cases} y \geqslant 1,2x, \\ 3x + 5y \leqslant 109 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y \geqslant 6x, \\ 5y \leqslant 109 - 3x. \end{cases}$$

Вычтем почленно из первого неравенства системы второе, получим следствие системы:

$$0 \geqslant 6x - 109 + 3x \Leftrightarrow 9x \leqslant 109 \Leftrightarrow x \leqslant 12\frac{1}{9}.$$

Таким образом. x — натуральное число, не превосходящее 12.

Если $x = 12,$ то должно выполняться неравенство $y \geqslant 1,2x$ или $y \geqslant 14,4.$ Наименьшее натуральное решение y равно 15. Но тогда грузоподъемность парома равна

$$3x + 5y = 3 \cdot 12 + 5 \cdot 15 = 36 + 75 = 111,$$

а это на 2 превосходит заданную грузоподъемность.

Если $x = 11,$ то $y \geqslant 11 \cdot 1,2,$ то есть $y \geqslant 13,2.$ При $y = 14$ получаем:

$$3x + 5y = 3 \cdot 11 + 5 \cdot 14 = 33 + 70 = 103 < 109.$$

При $y = 15$ получаем:

$$3x + 5y = 3 \cdot 11 + 5 \cdot 15 = 33 + 75 = 108 < 109.$$

Большие значения y не подойдут, поэтому для $x = 11$ наибольшее значение суммарной стоимости есть

$$S(11, 15) = 600 \cdot 11 + 700 \cdot 15 = \\ = 6600 + 10\,500 = 17\,100 \text{ руб.}$$

Осталось проверить случай $x \leqslant 10.$ Для таких значений переменной, используя неравенство $3x + 5y \leqslant 109,$ получаем следующую оценку:

$$S(x, y) = 600x + 700y = \\ = 140(3x + 5y) + 180x \leqslant 140 \cdot 109 + 180 \cdot 10 = \\ = 15\,260 + 1800 = 17\,060,$$

что меньше $S(11, 15).$ Следовательно, наибольшее возможная стоимость перевозки равна 17 100 руб.

Ответ: 17 100 руб.

53. Тип 16 № 632968

Цена за единицу товара зависит от объема заказа и определяется следующим образом:

1. Если объём заказа не превышает 4000 единиц товара, то цена единицы товара равна 300 рублей.

2. Если объём заказа превышает 4000 единиц товара, то на каждую единицу товара от цены 300 рублей предоставляется скидка в размере $\dfrac{x - 4000}{50}$ рублей, где x — количество единиц товара в заказе.

При каком объёме заказа фирма, продающая товар, получит наибольшую выручку при условии, что объём заказа не может превышать 16 000 единиц товара?

Решение. 1. Если объём заказа не превышает 4000 единиц товара, то выручка фирмы не превышает $4000 \cdot 300 = 1\,200\,000$ руб.

2. Если объём заказа $4000 < x \leqslant 16\,000$, где x — количество единиц товара в заказе, то выручка S (в руб.) равна

$$S(x) = \left(300 - \frac{x-4000}{50}\right) \cdot x = \frac{1}{50}(19\,000 - x)x.$$

Найдём, при каком значении x выражение $S(x)$ принимает наибольшее значение.

Если раскрыть скобки, то $S(x)$ окажется квадратичной функцией с отрицательным старшим коэффициентом. Она принимает своё наибольшее значение в точке $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$:

$$x_0 = \frac{19\,000 - 0}{2} = 9500.$$

Найденное число удовлетворяет требуемому объёму заказа. Найдём $S(x_0)$:

$$S(x_0) = \frac{1}{50}(19\,000 - 9500) \cdot 9500 =$$
$$= 190 \cdot 9500 = 1\,805\,000 \text{ (руб.)}.$$

Найденная сумма превышает максимальную выручку при $0 < x \leqslant 4000$, значит, наибольшую выручку фирма получит при объёме заказа в 9500 единиц товара.

Ответ: 9500.

54. Тип 16 № 633982

Строительство нового цеха по производству роботов-пылесосов стоит 300 миллионов рублей. Затраты на производство x тысяч единиц продукции на такой линии равны $0,1x^2 + 3x + 100$ млн руб. в год. Если продукцию продавать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн руб.) за один год составит $px - (0,1x^2 + 3x + 100)$ млн руб. Когда цех будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. В первый год после постройки цеха цена продукции $p = 12$ тыс. руб. за единицу, каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. руб. за единицу. За сколько лет окупится строительство цеха?

Решение. Строительство цеха окупится, когда суммарная прибыль за первые несколько лет окажется не меньше 300 млн руб. Прибыль фирмы (в млн руб.) за первый год составит

$$P_1 = 12x - (0,1x^2 + 3x + 100) = -0,1x^2 + 9x - 100 =$$
$$= \frac{-x^2 + 2 \cdot 45 \cdot x - 45^2 + 45^2 - 1000}{10} =$$
$$= \frac{-(x-45)^2 + 1025}{10} \leqslant 102,5.$$

Из полученной оценки следует, что максимальная прибыль в первый год равна 102,5 млн руб. Она достигается при выпуске 45 тыс. единиц продукции. Максимальная прибыль в первый год меньше потраченных на строительство 300 млн руб., поэтому за первый год строительство не окупится.

Прибыль фирмы (в млн руб.) за второй год составит

$$P_2 = 13x - \left(0,1x^2 + 3x + 100\right) = -0,1x^2 + 10x - 100 =$$
$$= \frac{-x^2 + 2 \cdot 50 \cdot x - 50^2 + 50^2 - 1000}{10} =$$

$$= \frac{-(x-50)^2+1500}{10} \leqslant 150.$$

Таким образом, максимальная прибыль во второй год равна 150 млн руб. Она достигается при выпуске 50 тыс. единиц продукции. Суммарная максимальная прибыль в первые два года равна

$$102,5+150=252,5 \text{ млн руб.},$$

что меньше 300 млн руб., значит, за два года строительство не окупится.

Прибыль фирмы (в млн рублей) за третий год составит

$$P_3 = 14x - \left(0,1x^2+3x+100\right) = -0,1x^2+11x-100 =$$
$$= \frac{-x^2+2\cdot 55\cdot x-55^2+55^2-1000}{10} =$$
$$= \frac{-(x-55)^2+2025}{10} \leqslant 202,5.$$

Следовательно, максимальная прибыль равна 202,5 млн руб. Она достигается при выпуске 55 тыс. единиц продукции. Суммарная максимальная прибыль в первые три года равна

$$102,5+150+202,5=455 \text{ млн руб.},$$

что превышает потраченные на строительство 300 млн руб. Тем самым строительство окупится за три года.

Ответ: за три года.

55. Тип 16 № 634663

У инвестора есть 50 миллионов рублей. Часть денег он планирует вложить в проект. Если он вложит в проект $\frac{5x^2}{144}$ млн руб., то по завершении проекта он получит x млн руб. Невложенные в проект деньги инвестор планирует разместить на банковском счете. По завершении проекта инвестор получит из банка сумму, увеличенную на 20%.

Инвестор собирается распределить деньги так, чтобы общая сумма полученных им денег от вложения в проект и размещения в банке оказалась наибольшей. Прибыль от проекта — это разность между полученной от проекта и вложенной в проект суммами денег. Найдите, сколько процентов составит прибыль от проекта от вложенной в него суммы денег.

Решение. Пусть в проект будет вложено $\frac{5x^2}{144}$ млн руб., тогда на банковском счете будет размещено $50-\frac{5x^2}{144}$ млн руб., а сумма, полученная инвестором по завершении проекта, будет равна $x+1,2\cdot\left(50-\frac{5x^2}{144}\right)$ млн руб., где $0\leqslant x\leqslant 12\sqrt{10}$.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=x+1,2\cdot\left(50-\frac{5x^2}{144}\right)=-\frac{x^2}{24}+x+60.$$

Она квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом и достигает своего наибольшего значения в точке

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{24}\right)}=12,$$

удовлетворяющей условию $0 \leqslant x \leqslant 12\sqrt{10}$. Значит, в проект будет вложено $\frac{5 \cdot 12^2}{144} = 5$ млн руб., а прибыль от проекта составит $12 - 5 = 7$ млн руб., что составляет $\frac{7}{5} \cdot 100\% = 140\%$.

Ответ: 140.

56. Тип 16 № 634876

Предприниматель взял в кредит под 20% годовых сумму *S* на целое число лет. Кредит должен быть погашен равными ежегодными платежами. Через некоторое целое число лет после исполнения очередного платежа предприниматель обнаружил, что выплатил банку сумму, большую *S*, при этом сумма оставшихся платежей также была больше *S*. Найдите минимальный срок, на который предприниматель мог взять кредит.

Решение. Пусть размер ежегодной выплаты составляет x у. е., а срок кредитования составляет n лет, тогда можно составить уравнение:

$$1,2^nS - 1,2^{n-1}x - 1,2^{n-2}x - 1,2^{n-3}x - \ldots - 1,2^2x - 1,2x - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,2^nS - x(1,2^{n-1} + 1,2^{n-2} + \ldots + 1,2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1,2^nS}{1,2^{n-1} + 1,2^{n-2} + \ldots + 1,2 + 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1,2^nS \cdot (1,2 - 1)}{1,2^n - 1} \Leftrightarrow x = \frac{1,2^nS}{5 \cdot (1,2^n - 1)}.$$

Сумма всех выплат равна

$$nx = \frac{1,2^nS \cdot n}{5 \cdot (1,2^n - 1)},$$

а половина этой суммы должна быть больше суммы кредита, то есть должно выполняться неравенство

$$\frac{1,2^nS \cdot n}{10 \cdot (1,2^n - 1)} > S \Leftrightarrow \frac{1,2^n \cdot n}{1,2^n - 1} > 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,2^n \cdot (10 - n) < 10.$$

Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = 1,2^n \cdot (10 - n)$. Пусть

$$k = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{6(10 - n)}{5(11 - n)}.$$

Заметим, что:

$k = 1$ при $n = 5$ значит, $a_4 = a_5$,
$k > 1$ при $n < 5$, значит, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$,
$k < 1$ при $n > 5$, значит, $a_5 > a_6 > a_7 \ldots$

Первый член этой последовательности $a_1 = 1,2 \cdot 9 = 10,8$, тогда наименьшее решение неравенства $1,2^n \cdot (10 - n) < 10$ следует искать при $n \geqslant 6$. Находим, что:

$$a_6 = 1,2^6 \cdot 4 = 1,44 \cdot 1,44 \cdot 1,44 \cdot 4 > 10;$$
$$a_7 = 1,2^7 \cdot 3 = 1,44 \cdot 1,44 \cdot 1,44 \cdot 3,6 > 10;$$
$$a_8 = 1,2^8 \cdot 2 = 1,44 \cdot 1,44 \cdot 1,44 \cdot 1,44 \cdot 2 < 10.$$

Значит, наименьшим целым решением неравенства $1,2^n \cdot (10 - n) < 10$ является число $\mathrm{n} = 8$.

Ответ: 8.

57. Тип 16 № 635754

Предприятие производит детские санки и является убыточным. Известно, что при изготовлении x санок в месяц расходы предприятия на выпуск одних санок составляют

$$\left(\frac{168\,000}{x}+36-\left|12-\frac{72\,000}{x}\right|\right) \text{ тыс. руб.},$$

а цена реализации каждой единицы продукции равна $72-\frac{3x}{1000}$ тыс. руб. Определите ежемесячный объем производства (в тысячах санок), при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего возможного уровня.

Решение. Пусть ежемесячный объём производства составит $1000y$ санок. Тогда расходы на их производство составят

$$\left(\frac{168\,000}{1000y}+36-\left|12-\frac{72\,000}{1000y}\right|\right)\cdot 1000y=168\,000+\\+36\,000y-|12\,000y-72\,000| \text{ тыс. руб.},$$

а выручка от реализации $1000y$ санок составит

$$\left(72-\frac{3\cdot 1000y}{1000}\right)\cdot 1000y=72\,000y-3000y^2 \text{ тыс. руб.}$$

Ежемесячный убыток при этом составит

$$168\,000+36\,000y-|12\,000y-72\,000|-(72\,000y-3000y^2)=\\=168\,000-36\,000y+3000y^2-|12\,000y-72\,000|=\\=3000\cdot\left(56-12y+y^2-|4y-24|\right) \text{ тыс. руб.}$$

Найдём, при каком положительном значении y выражение $56-12y+y^2-|4y-24|$ принимает наименьшее значение.

При $0<y\leqslant 6$ при раскрытии модуля получаем:

$$56-12y+y^2+4y-24=y^2-8y+32=\\=y^2-8y+16+16=(y-4)^2+16.$$

Наименьшее значение этого выражения достигается при $y=4$ и равно 16.

При $y\geqslant 6$ при раскрытии модуля получаем:

$$56-12y+y^2-4y+24=y^2-16y+80=\\=y^2-16y+64+16=(y-8)^2+16.$$

Наименьшее значение этого выражения достигается при $y=8$ и равно 16.

Значения выражения $56-12y+y^2-|4y-24|$ при $y=4$ и $y=8$ одинаковы, значит, наименьшие ежемесячные убытки могут быть получены в двух случаях, а именно при ежемесячном объёме производства 4000 и 8000 санок, и составят 48 млн руб.

Ответ: 4 или 8.

58. Тип 16 № 637856

На каждом из двух комбинатов изготавливают детали A и B. На первом комбинате работает 500 человек, и один рабочий изготавливает за смену 8 деталей A или 2 детали B. На втором комбинате работает 200 человек, и один рабочий изготавливает за смену 2 детали A или 8 деталей B. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, на котором собирают изделие, для изготовления которого нужна 1 деталь A и 3 детали B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

Решение. Пусть на первом комбинате x человек заняты изготовлением деталей A, где $0 \leqslant x \leqslant 500$, тогда $500-x$ человек заняты изготовлением деталей B. Пусть на втором комбинате y человек заняты изготовлением деталей A, где $0 \leqslant y \leqslant 200$, тогда $200-y$ человек заняты изготовлением деталей B. Всего на двух комбинатах будет изготовлено $8x+2y$ деталей A и $2(500-x)+8(200-y)$ деталей B. Для изготовления изделия нужна 1 деталь A и 3 детали B. Чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий, должно выполняться равенство

$$3\cdot(8x+2y)=2\cdot(500-x)+8\cdot(200-y),$$

откуда $x=100-\dfrac{7y}{13}$.

Количество изделий S будет равно количеству деталей A:

$$S(x;y)=8x+2y=8\cdot\left(100-\frac{7y}{13}\right)+2y=800-\frac{30y}{13}.$$

Наибольшее значение убывающей линейной функции $f(y)=800-\dfrac{30y}{13}$ достигается при наименьшем возможном значении y, то есть при $y=0$. При этом $x=100$, а потому на первом комбинате будет изготовлено 800 деталей A и $400\cdot 2=800$ деталей B, а на втором комбинате — только 1600 деталей B.

Ответ: 800.

59. Тип 16 № 638058

Наталья Дмитриевна владеет облигациями, которые стоят n^2 тысяч рублей в конце года n $(n=1,\,2,\,\ldots)$. В конце любого года Наталья Дмитриевна может их продать и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1+m$ раз.

Наталья Дмитриевна хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать восьмого года сумма на ее счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце двадцать третьего года. При каких положительных значениях m это возможно?

Решение. В год с номером n стоимость облигации вырастает в $f(n)=\dfrac{n^2}{(n-1)^2}$ раз. Заметим, что

$$f(n)=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2=\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^2=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^2.$$

При $n>1$ функция $f(n)$ убывает. Значит, для того, чтобы облигации было выгодно продать именно в конце n-го года, необходимо и достаточно выполнения следующего двойного неравенства:

$$\frac{(n+1)^2}{n^2}<1+m<\frac{n^2}{(n-1)^2}.$$

По условию ценные бумаги нужно продавать в конце двадцать третьего года, значит,

$$\frac{(23+1)^2}{23^2} < 1+m < \frac{23^2}{(23-1)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(23+1)^2}{23^2} < 1+m < \frac{(22+1)^2}{22^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{46}{23^2}+\frac{1}{23^2} < 1+m < 1+\frac{44}{22^2}+\frac{1}{22^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{47}{529} < m < \frac{45}{484}.$$

Ответ: $\left(\frac{47}{529}; \frac{45}{484}\right)$

60. Тип 16 № 639336

При налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $12\,000-2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 60% (до величины $1{,}6t_0$) сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов?

Решение. Сумма отличных от нуля налоговых сборов равна произведению величины налога за единицу продукции на количество произведенных единиц, то есть дается функцией $f(t)=(12000-2t)t$, где $0<t<6000.$ Функция $f(t)$ — квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом. На интервале $(0; 6000)$ она достигает наибольшего значения в точке максимума t_{max}. По условию $f(t_0)=f(1,6t_0)$, значит,

$$t_{max}=\frac{t_0+1,6t_0}{2}=1,3t_0.$$

Составим пропорцию:

налог $1{,}6t_0$, — 100%
налог $1{,}3t_0$, — x%

откуда

$$x=\frac{1,3t_0\cdot 100}{1,6t_0}=\frac{1300}{16}=81,25.$$

Значит, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, государству следует уменьшить налог на $100-81,25=18,75\%$.

Ответ: 18,75.

61. Тип 16 № 640282

Харитон хочет взять кредит на некоторую сумму и выбирает между двумя банками. Первый банк предлагает кредит на 10 лет под 7% годовых, второй — на 6 лет под 9% годовых. В обоих банках применяется дифференцированная система платежей по кредиту, то есть долг перед банком уменьшается каждый год на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим годом. Определите, в каком банке переплата по кредиту будет меньше и на сколько процентов.

Решение. Пусть в кредит будет взято $30S$ (условных единиц). Тогда в первом банке долг будет ежегодно уменьшаться на величину $3S$, следующим образом:

$$30S, 27S, 24S, \ldots, 6S, 3S, 0.$$

Начисленные проценты будут составлять:

$$0,07\cdot 30S, 0,07\cdot 27S, 0,07\cdot 24S, \ldots, 0,07\cdot 6S, 0,07\cdot 3S.$$

Поэтому переплата по кредиту составит

$$\Pi_1 = \\ = 0,07\cdot 30S + 0,07\cdot 27S + 0,07\cdot 24S + \ldots + 0,07\cdot 6S + 0,07\cdot 3S = \\ = 0,07\cdot \frac{30S+3S}{2}\cdot 10 = 11,55S.$$

Во втором банке долг ежегодно будет уменьшаться на $5S$, а сам долг будет уменьшаться так:

$$30S, 25S, 20S, 15S, 10S, 5S, 0.$$

Начисленные проценты будут составлять:

$$0,09\cdot 30S, 0,09\cdot 25S, 0,09\cdot 20S, 0,09\cdot 15S, 0,09\cdot 10S, 0,09\cdot 5S.$$

Переплата по кредиту составит

$$\Pi_2 = \\ = 0,09\cdot 30S + 0,09\cdot 25S + 0,09\cdot 20S + 0,09\cdot 15S + 0,09\cdot 10S + 0,09\cdot 5S = \\ = 0,09\cdot \frac{30S+5S}{2}\cdot 6 = 9,45S.$$

Переплата меньше во втором банке. Разность переплат составляет

$$\Pi_1 - \Pi_2 = 11,55S - 9,45S = 2,1S = 0,07\cdot 30S,$$

то есть 7% от суммы кредита.

Ответ: во втором банке переплата будет меньше на 7% от суммы кредита.

62. Тип 16 № 641100

Фирма планирует взять в январе кредит на целое число миллионов рублей на 4 года на следующих условиях:
— в июле каждого года долг фирмы возрастает на 10% по сравнению с началом года;
— в конце 1-го и 3-го годов фирма выплачивает только проценты по кредиту, начисленные за соответствующий текущий год;
— в конце 2-го и 4-го годов фирма выплачивает одинаковые суммы, погашая к концу 4-го года весь долг полностью.

Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат превысит 100 миллионов рублей.

Решение. Пусть сумма кредита равна S млн руб., а выплаты в конце 2-го и 4-го годов равны x млн руб. Составим таблицу по данным задачи.

Номер года	Долг в январе, млн руб.	Долг в январе (с начисленными процентами), млн руб.	Выплата, млн руб.
1	S	$1,1S$	$0,1S$
2	S	$1,1S$	x
3	$1,1S-x$	$1,1(1,1S-x)$	$0,1(1,1S-x)$
4	$1,1S-x$	$1,1(1,1S-x)$	x

В конце четвёртого года долг будет погашен полностью, значит,

$$1,1(1,1S-x)-x=0 \Leftrightarrow 1,21S-2,1x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1,21S}{2,1}.$$

Сумма всех выплат превысит 100 млн руб., тогда:

$$0,1S+x+0,1(1,1S-x)+x>100 \Leftrightarrow 0,21S+1,9x>100.$$

Подставим значение x, найденное выше, получим:

$$0,21S+1,9\cdot\frac{1,21S}{2,1}>100 \Leftrightarrow 2,74S>210 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow S>\frac{210}{2,74} \Leftrightarrow S>76\frac{176}{274}.$$

Сумма кредита должна быть целым числом миллионов рублей, поэтому наименьшая сумма равна 77 млн руб.

Ответ: 77 млн руб.

63. Тип 16 № 641415

У владельца фабрики есть два станка. Оба станка используются для изготовления одинаковых деталей, но второй станок более современный. За m^2 часов первый станок изготавливает $6m$ деталей, а второй станок — $8m$ деталей. За каждый час работы (на каждом из станков) рабочим платят 250 руб. в час.

На оплату труда рабочих выделено 25 000 руб. Какое наибольшее количество деталей можно изготовить на эти деньги с помощью двух станков?

Решение. Всего может быть оплачено $\frac{25\,000}{250}=100$ часов работы. Пусть первый станок будет работать x^2 часов, тогда второй станок будет работать $100-x^2$ часов. При этом суммарно будет изготовлено $6x+8\sqrt{100-x^2}$ деталей. Исследуем функцию $f(x)=6x+8\sqrt{100-x^2}$, где $0\leqslant x\leqslant 10$ на наибольшее значение. Находим:

$$f'(x)=6+\frac{8\cdot(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}=6-\frac{8x}{\sqrt{100-x^2}}.$$

Найдём критические точки:

$$6-\frac{8x}{\sqrt{100-x^2}}=0 \Leftrightarrow 3\sqrt{100-x^2}=4x \underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} 900-9x^2=16x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25x^2=900 \Leftrightarrow x^2=36 \underset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow} x=6.$$

Наибольшего значения функция $f(x)$ может достигнуть в одной из трёх точек $x=0$, $x=6$ или $x=10$. Вычислим значения функции в этих точках:

$$f(0)=6\cdot 0+8\sqrt{100-0}=80, \qquad f(6)=6\cdot 6+8\sqrt{100-36}=100,$$
$$f(10)=6\cdot 10+8\sqrt{100-100}=60.$$

Наибольшее значение функции $f(x)$ достигается при $x=6$ и равно 100. Значит, наибольшее количество деталей, которое можно изготовить при заданных условиях, равно 100.

Ответ: 100.

64. Тип 16 № 645374

Клиент открыл в банке депозитный вклад сроком на 1 год под p_1 процентов годовых. По окончании срока действия вклада и начисления процентов он добавил к выданной сумме денег дополнительно сумму, составляющую 3% от внесенной год назад при открытии вклада, и переоформил вклад еще на год под p_2 процентов годовых. Известно, что $p_1+p_2=25$. При каком значении p_2 через год при закрытии вклада и начислении процентов клиент получит максимальную сумму денег?

Решение. Пусть начальная сумма вклада равна S_1, а ставка $p_2 = x$, где $0 < x < 25$, тогда $p_1 = 25 - x$. Запишем сумму $S(x)$, которую в итоге получит клиент:

$$S(x) = \left(S_1 \cdot \left(1 + \frac{25 - x}{100}\right) + S_1 \cdot \frac{3}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) =$$

$$= S_1 \cdot \left(1 + \frac{28 - x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) =$$

$$= \frac{S_1}{10000} \cdot (128 - x)(100 + x).$$

Наибольшего значения $S(x)$ достигает в точке максимума квадратичной функции $f(x) = (128 - x)(100 + x)$, то есть в точке

$$x_0 = \frac{128 - 100}{2} = 14.$$

Значит, при $p_2 = 14$ клиент получит максимальную сумму денег.

Ответ: 14.

65. Тип 16 № 646297

Сергей владеет двумя цехами, расположенными в разных районах города. В цехах производятся абсолютно одинаковая продукция, но в первом цехе используется более современное оборудование. В результате, если рабочие второго цеха трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц продукции. Если же рабочие первого цеха трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $4t$ единиц продукции. В обоих цехах за каждый час работы рабочему платят 450 рублей. Сергей готов платить рабочим 1 640 250 рублей в неделю. На какое максимальное число единиц продукции он может рассчитывать?

Решение. Всего в неделю Сергей готов оплачивать $\frac{1\,640\,250}{450} = 3645$ часов работы. Пусть в первом цехе рабочие суммарно будут трудится x^2 часов в неделю, при этом они будут производить $4x$ единиц продукции. Тогда во втором цехе рабочие суммарно смогут трудится $3\,645 - x^2$ часов в неделю, при этом они будут производить $2\sqrt{3645 - x^2}$ единиц продукции. Значит, всего за неделю будет произведено $4x + 2\sqrt{3\,645 - x^2}$ единиц продукции.

Рассмотрим функцию $f(x) = 4x + 2\sqrt{3645 - x^2}$, где $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3\,645}$, и найдём её наибольшее значение. Возьмем производную:

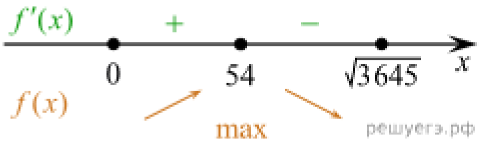
$$f'(x) = 4 + \frac{2 \cdot (-2x)}{2\sqrt{3645 - x^2}} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{3645 - x^2}}.$$

Приравняв производную к нулю, найдём стационарные точки и исследуем функцию на монотонность:

$$4 - \frac{2x}{\sqrt{3645 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3645 - x^2} = x, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5x^2 = 4 \cdot 3645 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot 729 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 2 \cdot 27 \Leftrightarrow x = 54.$$



В точке $x = 54$ функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения. Найдём его:

$$f(54) = 4 \cdot 54 + 2\sqrt{3645 - 54^2} =$$
$$= 4 \cdot 54 + 2\sqrt{5 \cdot 729 - 4 \cdot 729} = 8 \cdot 27 + 2 \cdot 27 = 270.$$

Таким образом, максимальное число единиц продукции, на которое Сергей может рассчитывать, равно 270.

Ответ: 270.

66. Тип 16 № 648774 *i*

Планируется построить новый завод, который ежегодно будет выпускать x тыс. ед. продукции, причем затраты на производство этого количества продукции составят $0,25x^2 + 5x$ млн руб. в год. Кроме того планируется, что транспортные расходы на доставку продукции до места реализации составят $x+24$ млн руб. в год. После продажи продукции (x тыс. ед.) по цене p тыс. руб. (где p — целое число) за единицу ежегодная прибыль завода (в млн руб.) составит разность между полученной суммой денег и суммарных затрат по производству продукции и транспортных расходов. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 6 лет, если расходы по его строительству оцениваются в размере 150 млн руб.?

Решение. Составим неравенство и преобразуем его:

$$6(px - x - 24 - 0,25x^2 - 5x) \geqslant 150 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -0,25x^2 + (p-6)x - 24 \geqslant 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (p-6)x \geqslant 49 + \frac{x^2}{4} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} p \geqslant \frac{49}{x} + \frac{x}{4} + 6.$$

Чтобы оценить правую часть, применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{49}{x} + \frac{x}{4} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{49}{x} \cdot \frac{x}{4}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{49}{4}} = 7.$$

Неравенство обращается в равенство, если $\frac{49}{x} = \frac{x}{4}$, то есть, поскольку $x > 0$, при $x = 14$. Следовательно, наименьшее значение p равно 13.

Ответ: 13.

Примечание.

Найти требуемую оценку можно было, используя известный факт о том, что сумма взаимно обратных неотрицательных чисел не меньше двух. Получаем:

$$p \geqslant \frac{49}{x} + \frac{x}{4} + 6 = \frac{7}{2} \cdot \left(\frac{14}{x} + \frac{x}{14}\right) + 6 \underset{x>0}{\geqslant} \frac{7}{2} \cdot 2 + 6 = 13.$$

Неравенство обращается в равенство, если взаимно обратные числа равны, то есть если $\frac{14}{x} = \frac{x}{14}$, что возможно при $x = 14$. Следовательно, оценка точная, а потому наименьшее значение p равно 13.

67. Тип 16 № 649380

У инвестора есть 50 млн руб. Часть денег он планирует вложить в проект. Если он вложит в проект $\frac{5x^2}{144}$ млн руб., то по завершении проекта он получит x млн руб. Невложенные в проект деньги инвестор планирует разместить на банковском счете. По завершении проекта инвестор получит из банка сумму, увеличенную на 20%. Инвестор собирается распределить деньги так, чтобы общая сумма полученных им денег от вложения в проект и размещения в банке оказалась наибольшей. Прибыль от проекта — это разность между полученной от проекта и вложенной в проект суммами денег. Найдите сколько процентов составит прибыль от проекта от вложенной в него суммы денег.

Решение. Пусть в проект будет вложено $\frac{5x^2}{144}$ млн руб., тогда суммарная прибыль будет равна

$$S(x) = x - \frac{5x^2}{144} + \frac{1}{5}\cdot\left(50 - \frac{5x^2}{144}\right) =$$
$$= -\frac{6x^2}{144} + x + 10 = -\frac{x^2}{24} + x + 10 =$$
$$= -\frac{1}{24}(x^2 - 24x + 144) + 16 = -\frac{(x-12)^2}{24} + 16.$$

Наибольшего значения $S(x)$ достигает при $x = 12.$

Значит, в проект нужно вложить $\frac{5\cdot 12^2}{144} = 5$ млн руб. (эта сумма меньше 50 млн руб., что соответствует условию задачи). Это позволит получить прибыль от проекта $12 - 5 = 7$ млн руб., что составит $\frac{7}{5}\cdot 100\% = 140\%$ от вложенной в проект суммы.

Ответ: 140.

68. Тип 16 № 652138

У фермера есть два комбайна. Оба комбайна используются для уборки зерновых, но второй комбайн более современный. В результате, если первый комбайн работает m^2 часов, то за это время он собирает $8m$ т зерновых; если второй комбайн работает m^2 часов, то за это время он собирает $15m$ т зерновых. За каждый час работы фермер платит каждому комбайнеру 200 рублей. Фермер готов выделять 20 000 рублей на оплату труда комбайнеров. Какое наибольшее количество тонн зерновых можно собрать на эти деньги с помощью двух комбайнов?

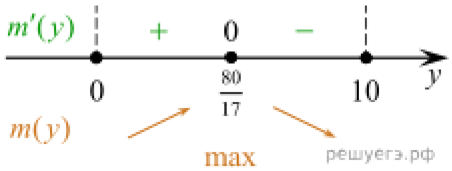
Решение. Фермер готов оплатить $\frac{20\,000}{200} = 100$ часов работы комбайнов. Пусть первый комбайн будет работать y^2 часов и соберёт $8y$ т зерновых, тогда второй комбайн будет работать $100 - y^2$ часов и соберёт $15\sqrt{100-y^2}$ т зерновых. Значит, всего будет собрано $m = 8y + 15\sqrt{100-y^2}$ т зерновых. По смыслу задачи $0 \leqslant y \leqslant 10.$

Найдём наибольшее значение функции $m(y) = 8y + 15\sqrt{100-y^2}$ на отрезке $[0;\, 10]$. Найдем производную:

$$m'(y) = 8 + \frac{15}{2}\cdot\frac{-2y}{\sqrt{100-y^2}} = 8 - \frac{15y}{\sqrt{100-y^2}}.$$

Приравняем производную к нулю и найдём критические точки:

$$8-\frac{15y}{\sqrt{100-y^2}}=0 \Leftrightarrow y=\frac{80}{17}.$$



Функция достигает наибольшего значения в точке максимума:

$$m\left(\frac{80}{17}\right)=8\cdot\frac{80}{17}+15\sqrt{100-\left(\frac{80}{17}\right)^2}=170.$$

Таким образом, затратив 20 000 руб., можно собрать самое большее 170 т зерновых.

Ответ: 170.

69. Тип 16 № 653091

Зависимость количества Q (в шт., $0 \leqslant Q \leqslant 30000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q=30000-P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $5000Q+3000000$ руб. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей $(0<t<15000)$ с каждой произведённой единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ-5000Q-3000000-tQ$ руб., а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ руб. Фирма производит такое количество товара, при котором её прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Решение. Выразим P через Q: $P=30000-Q$. Прибыль фирмы составляет:

$$S(Q)=(30000-Q)\cdot Q-5000Q-3000000-tQ= \\ =-Q^2+(25000-t)Q-3000000.$$

Наибольшего значения квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом $S(Q)$ достигает при

$$Q_0=-\frac{25000-t}{-2}=\frac{25000-t}{2}.$$

Заметим, что при $0<t<15000$ неравенство $0 \leqslant Q_0 \leqslant 30000$ верно. Значит, фирма производит Q_0 единиц товара. Тогда сумма налогов, собранных государством будет

$$N(t)=tQ_0=t\cdot\frac{25000-t}{2}=\frac{-t^2+25000t}{2}.$$

Наибольшего значения квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом $N(t)$ достигает в вершине, то есть при

$$t_0=\frac{0+25000}{2}=12500.$$

Найденное значение принадлежит заданному интервалу возможных значений t. Таким образом, сумма налогов, собранных государством, будет максимальной при $t=12500$.

Ответ: 12 500.

70. Тип 16 № 655787

Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа 1 и 2010 деталей типа 2. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа 1 время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа 2. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

Решение. Пусть в первой бригаде будет x рабочих, тогда во второй бригаде окажется $192-x$ рабочих. За единицу времени каждый рабочий первой бригады изготавливает две детали типа 1, а каждый рабочий второй бригады — одну деталь типа 2. Тогда время, которое затратит первая бригада на изготовление 1005 деталей типа 1, равно $\dfrac{1005}{2x}$, а время, которое затратит вторая бригада на изготовление 2010 деталей типа 2, равно $\dfrac{2010}{192-x}$. Найдём при каком значении x, время работы обеих бригад окажется одинаковым. Для этого решим уравнение:

$$\frac{1005}{2x}=\frac{2010}{192-x}\Leftrightarrow 5x=192\Leftrightarrow x=38,4.$$

С увеличением значения x время работы первой бригады будет уменьшаться, а время работы второй — увеличиваться. Значит, минимальное время изготовления заказа двумя бригадами будет, если $x=38$ или $x=39$. Вычислим время выполнения заказа для двух этих случаев:

Число рабочих в первой бригаде	Время работы первой бригады, ед. времени	Время работы второй бригады, ед. времени	Время выполнения заказа, ед. времени
38	$\dfrac{1005}{2\cdot 38}=13\dfrac{17}{76}$	$\dfrac{2010}{192-38}=13\dfrac{4}{77}$	$13\dfrac{17}{76}$
39	$\dfrac{1005}{2\cdot 39}=12\dfrac{23}{26}$	$\dfrac{2010}{192-39}=13\dfrac{7}{51}$	$13\dfrac{7}{51}$

Заметим, что

$$\frac{17}{76}=\frac{867}{76\cdot 51}>\frac{532}{76\cdot 51}=\frac{7}{51},$$

значит, при $x=39$ время выполнения заказа будет наименьшим. Таким образом, в первой бригаде должно быть 39 рабочих, а во второй — 153 рабочих.

Ответ: 39 и 153.

71. Тип 16 № 656545

Имеются три сплава, в состав которых входят металлы A, B и C. Первый сплав содержит 20% металла A, 30% металла B, 50% металла C. Второй сплав содержит 50% металла A, 20% металла B, 30% металла C. Третий сплав содержит 30% металла A, 40% металла B, 30% металла C. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 10 кг нового сплава, который содержал бы 25% металла A, а процентное содержание металла B было бы минимально возможным?

Решение. Пусть масса первого сплава равна x кг, масса второго сплава — y кг, а масса третьего сплава — z кг и $x+y+z=10.$ Тогда в новом сплаве массы металлов будут равны

$$m_A=0,2x+0,5y+0,3z\text{ кг},\qquad m_B=0,3x+0,2y+0,4z\text{ кг},$$
$$m_C=0,5x+0,3y+0,3z\text{ кг}.$$

По условию $m_A=0,25\cdot 10=2,5$ кг. Тогда

$$0,2x+0,5y+0,3z=2,5 \underset{x+y+z=10}{\Leftrightarrow} 0,3x+0,2z=2,5.$$

Масса металла A в новом сплаве известна, поэтому содержание металла B в сплаве минимально при максимальной массе металла C. Для этого необходимо и достаточно, чтобы наибольшей была разность m_C-m_B. Оценим эту разность:

$$m_C-m_B=0,5x+0,3y+0,3z-(0,3x+0,2y+0,4z)=$$
$$=0,2x+0,1y-0,1z \underset{x+y+z=10}{=} 1+0,1x-0,2z \underset{0,3x+0,2z=2,5}{=} 1+\frac{25}{30}-\frac{8z}{30}\geqslant\frac{55}{30}.$$

Разность m_C-m_B достигает наименьшего значения $\frac{55}{30}$ при $z=0$. Значит, чтобы условия задачи были выполнены, для получения нового сплава нужно использовать только первый и второй сплавы. Получаем систему

$$\begin{cases}x+y=10,\\0,2x+0,5y=2,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{25}{3},\\y=\frac{5}{3}.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{25}{3}$ кг, $\frac{5}{3}$ кг и 0 кг.

72. Тип 16 № 656584

Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 300 рублей. Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе рабочие суммарно будут работать x^2 часов, тогда они произведут x единиц товара, а на заработную плату рабочим первого завода пойдёт $200x^2$ рублей. Пусть на втором заводе рабочие суммарно будут работать y^2 часов, тогда они произведут y единиц товара, а на заработную плату рабочим второго завода пойдёт $300y^2$ рублей. Тогда

$$200x^2+300y^2=1\,200\,000\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2=6000-\frac{3y^2}{2}\underset{x\geqslant0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}.$$

Общее количество единиц товара, производимое двумя заводами, равно

$$S(y)=\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}+y,$$

где $0\leqslant y\leqslant 20\sqrt{10}$. Определим наибольшее значение функции $S(y)$ для таких значений переменной. Возьмём производную:

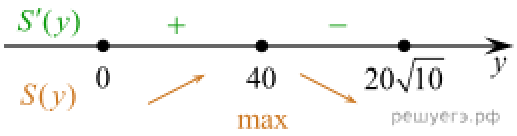
$$S'(y)=\frac{-3y}{2\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}}+1.$$

Найдём стационарные точки:

$$\frac{-3y}{2\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}}+1=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{6000-\frac{3y^2}{2}}=3y \underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 24\,000-6y^2=9y^2 \Leftrightarrow y^2=1600 \underset{y\geqslant 0}{\Leftrightarrow} y=40.$$

Отметим на рисунке промежутке монотонности функции:



Значит, наибольшее значение функции $S(y)$ на заданном отрезке достигается в точке максимума:

$$S(40)=\sqrt{6000-\frac{3\cdot 40^2}{2}}+40=60+40=100.$$

Ответ: 100.

73. Тип 16 № 657469

Строительство нового завода стоит 376 млн руб. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0,5x^2+x+12$ млн руб. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн руб.) за один год составит $px-(0,5x^2+x+12)$. Когда завод будет построен, каждый год фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы годовая прибыль была наибольшей. В первый год после постройки завода цена продукции p = 14 тыс. руб. за единицу. Каждый следующий год цена продукции увеличивается на 1 тыс. руб. за единицу. За сколько лет окупится строительство завода?

Решение. Найдем наибольшее значение прибыли, т. е. наибольшее значение функции

$$f(x)=px-(0,5x^2+x+12)=-0,5x^2+(p-1)x-12,$$

где $p\geqslant 14$ и $x>0$. Квадратичная функция с отрицательным коэффициентом при старшем члене достигает наибольшего значения в точке

$$x_0=-\frac{p-1}{2\cdot(-0,5)}=p-1.$$

Найдем это значение:

$$f(x_0)=-\frac{(p-1)^2}{2}+(p-1)^2-12=\frac{(p-1)^2}{2}-12.$$

Подсчитаем прибыль завода, последовательно перебирая значения p при условии $p\geqslant 14$, внесем данные в таблицу.

Год после постройки завода	Значение p	Сумма прибыли за год (в млн руб.)	Сумма прибыли с 1-го года функционирования завода (в млн руб.)
1	14	$\frac{(14-1)^2}{2}-12=\frac{169}{2}-12=72,5$	72,5

2	15	$\dfrac{(15-1)^2}{2}-12=\dfrac{196}{2}-12=86$	$72{,}5+86=158{,}5$
3	16	$\dfrac{(16-1)^2}{2}-12=\dfrac{225}{2}-12=100{,}5$	$158{,}5+100{,}5=259$
4	17	$\dfrac{(17-1)^2}{2}-12=\dfrac{256}{2}-12=116$	$259+116=375$

Прибыль каждый год увеличивается, значит, в пятый год прибыль будет больше 116 млн руб., и суммарная прибыль превысит $375+116=491$ млн руб., что больше 376 млн руб. Таким образом, прибыль превысит затраты на строительство через 5 лет.

Ответ: 5.

74. Тип 16 № 669115

Индивидуальный предприниматель в течение нескольких дней ежедневно покупал в магазине одежды 200 изделий на сумму 158 тыс. рублей: джинсы по 1000 руб. за штуку, рубашки — по 800 руб. за штуку, сумки — по 400 руб. за штуку. Найдите максимальное число сумок, которое могло быть куплено предпринимателем в один из таких дней.

Решение. Пусть число джинсов, рубашек и сумок, которые предприниматель купил в один из дней, равны соответственно a, b и c. Тогда справедлива система

$$\begin{cases} a+b+c=200, \\ 1000a+800b+400c=158\,000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a+5b+5c=1000, \\ 5a+4b+2c=790 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=200, \\ b+3c=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=200, \\ c=70-\dfrac{b}{3}. \end{cases}$$

Учитывая, что a, b и c — целые неотрицательные числа, получаем:

$$c=70-\frac{b}{3}\leqslant 70.$$

Наибольшее значение $c=70$ достигается при $b=0$ и $a=130$. Таким образом, максимальное число сумок, которое могло быть куплено предпринимателем в один из таких дней, равно 70.

Ответ: 70.