

Лабораторная работа №4

Научное программирование

Таубер Кирилл Олегович

Содержание

1	Цель работы	4
2	Теоретическое введение	5
3	Выполнение лабораторной работы	7
4	Вывод	12

Список иллюстраций

3.1	Метод Гаусса	8
3.2	Метод Гаусса	8
3.3	Левое деление	9
3.4	LU-разложение	10
3.5	LUP-разложение	11

1 Цель работы

Изучить встроенные в Octave алгоритмы, необходимые для решения систем линейных уравнений.

2 Теоретическое введение

Метод Гаусса

Запишем исходную систему

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ \dots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

в матричном виде: $Ax = b$. Матрица A называется основной матрицей системы, b — столбцом свободных членов. Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на два этапа:

- на первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна;
- на втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений.

Для приведения матрицы к треугольному виду для системы уравнений $Ax = b$ используют расширенную матрицу.

LU-разложение

LU-разложение — это вид факторизации матриц для метода Гаусса. Цель состоит в том, чтобы записать матрицу A в виде $A = LU$, где L — нижняя треугольная матрица, а U — верхняя треугольная матрица. Эта факторизованная форма может быть использована для решения уравнения $Ax = b$.

Если известно LU-разложение матрицы A , то исходная система может быть записана как $LUx = b$. Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система $Ly = b$. Поскольку L — нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой. На втором шаге решается система $Ux = y$. Поскольку U — верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

LUP-разложение

Если используются чередования строк, то матрица A умножается на матрицу перестановок, и разложение принимает форму $PA = LU$.

Более подробно см. в `[@Gauss:bash]` и `[@LU:bash]`.

3 Выполнение лабораторной работы

Для системы линейных уравнений:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

построим расширенную матрицу вида

$$B = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Рассмотрим ее поэлементно, например, выведем элемент, стоящий на пересечении 2й строки и 3го столбца. Также можем извлечь целый вектор строки или вектор столбца, например, выведем первую строку.

Реализуем явно метод Гаусса. Сначала добавим к третьей строке первую строку, умноженную на -1 . Далее добавим к третьей строке вторую строку, умноженную на -1.5 . Выведем явно решение системы, а затем воспользуемся встроенной командой. Можем поменять формат вывода значений, чтобы отображалось более пяти десятичных знаков. Затем вернем изначальный формат представления (рис. fig. 3.1) и (рис. fig. 3.2).

```

>> diary on
>> B = [ 1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6; 1 -1 0 0 ]
B =
    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    1   -1    0    0

>> B(2, 3)
ans = -4
>> B(1, :)
ans =
    1    2    3    4

>> B(3, :) = (-1) * B(1, :) + B(3, :)
B =
    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    0   -3   -3   -4

>> B(3, :) = (-1.5) * B(2, :) + B(3, :)
B =
    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    0    0    3   -13

>> X3 = -13/3
X3 = -4.3333
>> X2 = (6 + 4 * X3) / (-2)
X2 = 5.6667
>> X1 = 4 - 3 * X3 - 2 * X2
X1 = 5.6667

```

Рис. 3.1: Метод Гаусса

```

>> [X1; X2; X3]
ans =
    5.6667
    5.6667
   -4.3333

>> rref(B)
ans =
    1.0000    0    0    5.6667
    0    1.0000    0    5.6667
    0    0    1.0000   -4.3333

>> format long
>> rref(B)
ans =
    1.0000000000000000    0    0    5.666666666666667
    0    1.0000000000000000    0    5.666666666666667
    0    0    1.0000000000000000   -4.333333333333333

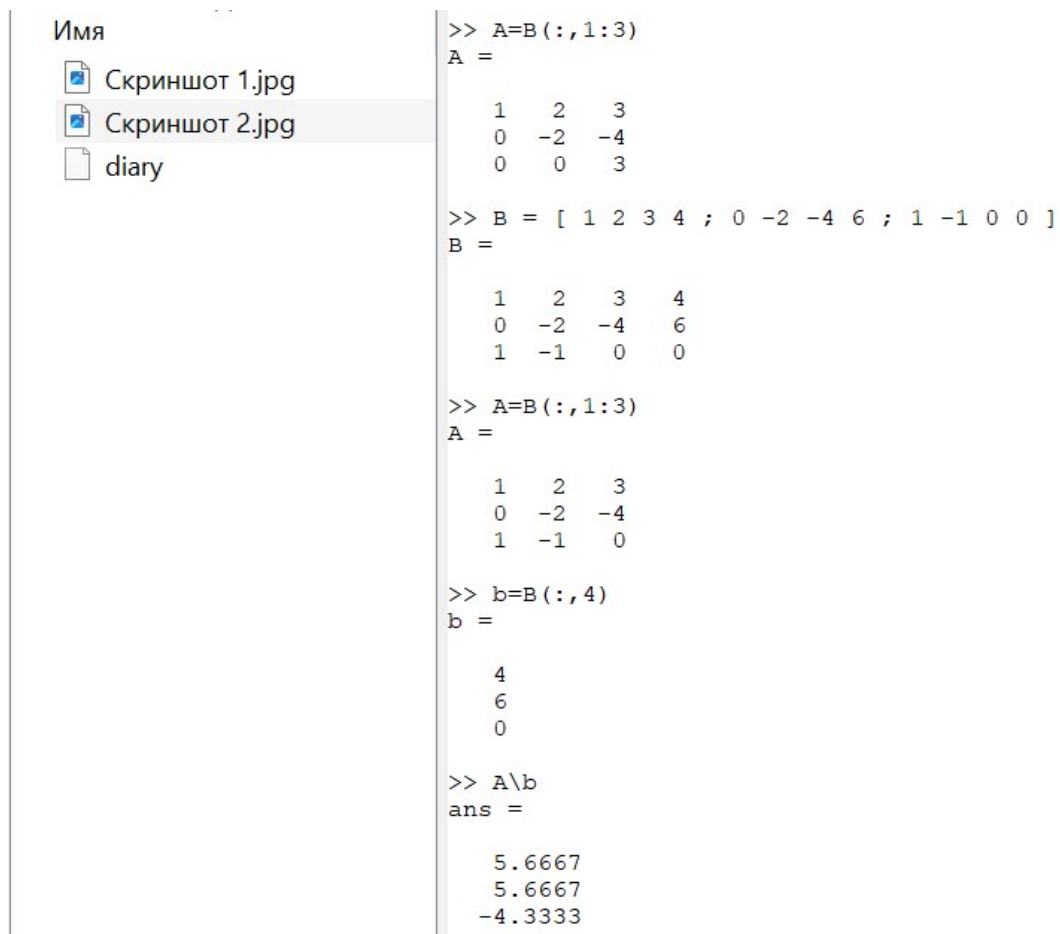
>> format short

```

Рис. 3.2: Метод Гаусса

Встроенная операция для решения линейных систем вида $Ax = b$ в Octave

называется левым делением и записывается как $A \backslash b$. Это концептуально эквивалентно выражению $A^{-1}b$. Выделим из расширенной матрицы B матрицу A и вектор b. После чего найдем вектор x (рис. fig. 3.3).



```
>> A=B(:,1:3)
A =

     1     2     3
     0    -2    -4
     0     0     3

>> B = [ 1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6 ; 1 -1 0 0 ]
B =

     1     2     3     4
     0    -2    -4     6
     1    -1     0     0

>> A=B(:,1:3)
A =

     1     2     3
     0    -2    -4
     1    -1     0

>> b=B(:,4)
b =

     4
     6
     0

>> A\b
ans =

     5.6667
     5.6667
    -4.3333
```

Рис. 3.3: Левое деление

Пусть дана матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

С помощью Octave распишем её LU-разложение и найдем вектор x (рис. fig. 3.4).

```
/Desktop/Остатки_2
Имя
Скриншот 1.jpg
Скриншот 2.jpg
Скриншот 3.jpg
diary

>> A
A =
     1     2     3
     0    -2    -4
     1    -1     0

>> [L U] = lu(A)
L =
     1.0000         0         0
         0     0.6667     1.0000
     1.0000     1.0000         0

U =
     1     2     3
     0    -3    -3
     0     0    -2

>> y=L\b
y =
     4.0000
    -4.0000
     8.6667

>> x=U\y
x =
     5.6667
     5.6667
    -4.3333
```

Рис. 3.4: LU-разложение

Для этой же матрицы A распишем LUP-разложение (рис. fig. 3.5).

```
>> A
A =
    1     2     3
    0    -2    -4
    1    -1     0

>> [L U P] = lu(A)
L =
    1.0000         0         0
    1.0000    1.0000         0
         0    0.6667    1.0000

U =
    1     2     3
    0    -3    -3
    0     0    -2

P =
Permutation Matrix
    1     0     0
    0     0     1
    0     1     0
```

Рис. 3.5: LUP-разложение

4 Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы я изучил встроенные в Octave алгоритмы, необходимые для решения систем линейных уравнений.