

### 3. Многомерные случайные величины

1. Задан закон распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ :

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	2
-1	0,05	0,3	0	0,05
1	0	$p$	0,2	0

Требуется:

- а) определить значение параметра  $p$ ;
- б) найти  $P(\xi \geq \eta)$ ;
- в) найти законы распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ;
- г) вычислить математические ожидания  $M\xi$  и  $M\eta$ ;
- д) вычислить дисперсии  $D\xi$  и  $D\eta$ ;
- е) найти коэффициент корреляции между  $\xi$  и  $\eta$ ;
- ж) выяснить, зависимы ли случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ .

2. Задан закон распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ :

$\xi \backslash \eta$	20	40	60
10	$3\lambda$	$\lambda$	0
20	$2\lambda$	$4\lambda$	$2\lambda$
30	$\lambda$	$2\lambda$	$5\lambda$

Требуется:

- а) определить значение параметра  $\lambda$ ;
- б) найти законы распределения компонент двумерной случайной величины;
- в) выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ ;
- г) вычислить математические ожидания  $M\xi$  и  $M\eta$ ;
- д) вычислить дисперсии  $D\xi$  и  $D\eta$ ;
- е) найти коэффициент корреляции между  $\xi$  и  $\eta$ ;
- ж) найти  $P(\xi \geq \eta)$ .

**3.** Найти ковариацию между  $\xi$  и  $\eta$ , если задан закон распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ :

$\xi \backslash \eta$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,1	0,3	0,05

**4.** Пусть

$$P(\xi = -1; \eta = 0) = P(\xi = 1; \eta = 0) = P(\xi = 0; \eta = -1) = P(\xi = 0; \eta = 1) = 0,25.$$

**а)** Записать закон распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$  в виде таблицы.

**б)** Являются ли случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимыми?

**в)** Являются ли случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  некоррелированными?

**5.** Задана плотность распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ :

$$p(x; y) = \begin{cases} a(x + y), & \text{если } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Требуется найти:

**а)** коэффициент  $a$ ;

**б)** математические ожидания  $M\xi$  и  $M\eta$ ;

**в)** дисперсии  $D\xi$  и  $D\eta$ ;

**г)** коэффициент корреляции между  $\xi$  и  $\eta$ ;

**д)** выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ ;

**е)** найти плотности распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ;

**ж)** вероятность  $P(\xi + \eta < 0,5)$ .

**6.** Найти  $P\left(0 < \xi < \frac{\pi}{2}; 0 < \eta < \frac{\pi}{4}\right)$ , если двумерная случайная величина

$(\xi; \eta)$  задана плотностью распределения

$$p(x; y) = \begin{cases} a \sin(x + y), & \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**7.** Найти коэффициент корреляции между  $\xi$  и  $\eta$ , если двумерная случайная величина  $(\xi; \eta)$  задана плотностью распределения

$$p(x; y) = \begin{cases} x + y, & \text{если } 0 < x < 1 \text{ и } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

**8.** Задана функция распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ :

$$F(x; y) = \begin{cases} (1 - e^{-3x})(1 - e^{-5y}), & \text{если } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Требуется найти:

**а)** плотность распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ ;

**б)** вероятность  $P(0 < \xi < 1; 0 < \eta < 1)$ .

**9.** Задана функция распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ :

$$F(x; y) = \begin{cases} (1 - x^{-7})(1 - y^{-5}), & \text{если } x > 1, y > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Требуется:

**а)** найти плотность распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ ;

**б)** найти вероятность  $P(0 < \xi < 2; 2 < \eta < 4)$ ;

**в)** определить, зависимы ли случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ .

**10.** Случайная величина  $(\xi; \eta)$  распределена равномерно в треугольнике, ограниченном осью  $Ox$  и прямыми  $y = 2x$ ,  $x = 1$ . Требуется найти:

**а)** плотность распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ ;

**б)** вероятность  $P(\xi + \eta < 1)$ ;

**в)** плотности распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ ;

**г)** математические ожидания  $M\xi$  и  $M\eta$ ;

**д)** дисперсии  $D\xi$  и  $D\eta$ ;

**е)** коэффициент корреляции между  $\xi$  и  $\eta$ ;

**ж)** выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ .

**11.** Найти коэффициент корреляции между  $\xi$  и  $\eta$ , если двумерная случайная величина  $(\xi; \eta)$  задана функцией распределения

$$F(x; y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ \sin x \sin y & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y < \frac{\pi}{2}, \\ \sin x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ и } y \geq \frac{\pi}{2}, \\ \sin y & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y < \frac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2} \text{ и } y \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**12.** Записать плотность распределения двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ , если ее компоненты  $\xi$  и  $\eta$  независимы и распределены по следующим законам:

**а)** равномерно на отрезках  $[-1; 1]$  и  $[0; 2]$  соответственно;

**б)** нормально с параметрами  $M\xi = 3$ ,  $M\eta = -2$ ;  $D\xi = 4$ ,  $D\eta = 16$ .

**13.** Найти коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta = 1 - 2\xi$ .

**14.** Чему равен коэффициент корреляции случайных величин  $\eta = 2\xi + 3$  и  $\zeta = 1 - 3\xi$ ?

**15.** Найти числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин  $\zeta_1 = 2 - \xi + 3\eta$  и  $\zeta_2 = 3\xi + \eta$ , если

$M\xi = -1$ ;  $D\xi = 4$ ;  $M\eta = 0$ ;  $D\eta = 9$ ;  $\text{cov}(\xi; \eta) = -2$ .

**16.** Найти числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин  $\zeta_1 = 3\xi - 2\eta$  и  $\zeta_2 = 2\xi + 4\eta$ , если

$M\xi = 2$ ;  $D\xi = 1$ ;  $M\eta = -1$ ;  $D\eta = 16$ ;  $\text{cov}(\xi; \eta) = 3$ .

**17.** Найти числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин  $\zeta_1 = 5\xi + \eta$  и  $\zeta_2 = -\xi - 2\eta$ , если  $M\xi = 3; D\xi = 4; M\eta = -2; D\eta = 1; r_{\xi;\eta} = 0,5$ .

**18.** Найти числовые характеристики и коэффициент корреляции случайных величин  $\zeta_1 = 4 - 3\xi - 2\eta$  и  $\zeta_2 = 2\xi + 3\eta$ , если  $M\xi = 0; D\xi = 16; M\eta = 3; D\eta = 4; r_{\xi;\eta} = -0,25$ .

**19.** Производятся два независимых выстрела по мишени в неизменных условиях. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Рассматривается двумерная случайная величина  $(\xi; \eta)$ , где  $\xi$  – число выстрелов до первого попадания ( $\xi = 2$ , если попаданий не было);  $\eta$  – число промахов. Требуется найти:

а) распределение двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ ;

б)  $P(\xi = \eta)$ ;

в) выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ ;

г) найти коэффициент корреляции между  $\xi$  и  $\eta$ .

**20.** Бросаются две игральные кости. Введем случайные величины:  $\xi$  – число выпавших шестерок;  $\eta$  – число выпавших нечетных цифр. Требуется:

а) найти распределение двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ ;

б) построить условный закон распределения случайной величины  $\xi$  при условии, что  $\eta = 0$ ;

в) построить условный закон распределения случайной величины  $\xi$  при условии, что  $\eta = 1$ ;

г) выяснить, зависимы ли компоненты двумерной случайной величины  $(\xi; \eta)$ .

*Ответы. 1. а)  $p = 0,4$ ; б)  $0,65$ ;*

в)

$\xi$	-1	1
$P$	0,4	0,6

$\eta$	-1	0	1	2
$P$	0,05	0,7	0,2	0,05

г)  $M\xi = 0,2$ ;  $M\eta = 0,25$ ; д)  $D\xi = 0,96$ ;  $D\eta = 0,3875$ ; е)  $0,164$ ; ж) зависимы.

2. а)  $\lambda = 0,05$ ;

б)

$\xi$	10	20	30
$P$	0,2	0,4	0,4

$\eta$	20	40	60
$P$	0,3	0,35	0,35

в) зависимы; г)  $M\xi = 22$ ;  $M\eta = 41$ ; д)  $D\xi = 56$ ;  $D\eta = 259$ ; е)  $0,5646$ ; ж)  $0,15$ .

3.  $-0,0195$ .

4. а)

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
-1	0	0,25	0
0	0,25	0	0,25
1	0	0,25	0

б) нет; в) да.

5. а)  $a = 2$ ; б)  $M\xi = \frac{5}{12}$ ;  $M\eta = \frac{3}{4}$ ; в)  $D\xi = \frac{43}{720}$ ;  $D\eta = \frac{3}{80}$ ; г) 0,4402;

д) зависимы; е)  $p_\xi(x) = \begin{cases} 1 + 2x - 3x^2, & \text{если } x \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1]; \end{cases}$

$p_\eta(y) = \begin{cases} 3y^2, & \text{если } y \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } y \notin [0; 1]; \end{cases}$  ж)  $\frac{1}{24}$ . б. 0,5. 7.  $-\frac{1}{11}$ .

8. а)  $p(x; y) = \begin{cases} 15e^{-3x-5y}, & \text{если } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$  б)  $(1 - e^{-3})(1 - e^{-5})$ .

9. а)  $p(x; y) = \begin{cases} 35x^{-8}y^{-6}, & \text{если } x > 1, y > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$  б)  $(1 - 2^{-7})(2^{-5} - 4^{-5}) \approx 0,03$ ;

в) независимы. 10. а)  $p(x; y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x; y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x; y) \notin D, \end{cases}$  где  $D$  – треугольник,

ограниченный осью  $Ox$  и прямыми  $y = 2x$ ,  $x = 1$ ; б)  $\frac{1}{3}$ ;

в)  $p_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1]; \end{cases}$   $p_\eta(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & \text{если } y \in [0; 2], \\ 0, & \text{если } y \notin [0; 2]; \end{cases}$

г)  $M\xi = \frac{2}{3}$ ;  $M\eta = \frac{2}{3}$ ; д)  $D\xi = \frac{1}{18}$ ;  $D\eta = \frac{2}{9}$ ; е) 0,5; ж) зависимы. 11. 0.

12. а)  $p(x; y) = \begin{cases} 0,25, & \text{если } -1 \leq x \leq 1 \text{ и } 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$

б)  $p(x; y) = \frac{1}{16\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} \right) \right\}$ . 13. -1. 14. -1.

15.  $M\zeta_1 = 3$ ;  $D\zeta_1 = 97$ ;  $M\zeta_2 = -3$ ;  $D\zeta_2 = 33$ ;  $r_{\zeta_1; \zeta_2} = -\frac{1}{\sqrt{3201}} \approx -0,0177$ .

16.  $M\zeta_1 = 8$ ;  $D\zeta_1 = 37$ ;  $M\zeta_2 = 0$ ;  $D\zeta_2 = 308$ ;  $r_{\zeta_1; \zeta_2} = -\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{407}} \approx -0,918$ .

17.  $M\zeta_1 = 13$ ;  $D\zeta_1 = 111$ ;  $M\zeta_2 = 1$ ;  $D\zeta_2 = 12$ ;  $r_{\zeta_1; \zeta_2} = -\frac{11}{2\sqrt{37}} \approx -0,904$ .

18.  $M\zeta_1 = -2$ ;  $D\zeta_1 = 136$ ;  $M\zeta_2 = 9$ ;  $D\zeta_2 = 76$ ;  $r_{\zeta_1; \zeta_2} = -\frac{47}{2\sqrt{646}} \approx -0,925$ .

19. а) 

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
1	0,49	0,21	0
2	0	0,21	0,09

 б) 0,3; в) зависимы; г)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

20.

а)

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
0	1/9	1/3	1/4
1	1/9	1/6	0
2	1/36	0	0

б)

$\xi$	0	1	2
$P$	4/9	4/9	1/9

в)

$\xi$	0	1
$P$	2/3	1/3

г) зависимы.