

МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Задан закон распределения двумерной СВ $(\xi; \eta)$:

$\xi \backslash \eta$	-2	0	2
1	0,15	λ	0
2	0,1	0,2	0,1
3	λ	0,1	0,25

Требуется:

- а)** определить значение параметра λ ;
- б)** найти законы распределения компонент двумерной СВ;
- в)** выяснить, зависимы ли компоненты двумерной СВ $(\xi; \eta)$;
- г)** вычислить математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$;
- д)** вычислить дисперсии $D\xi$ и $D\eta$;
- е)** найти коэффициент корреляции между ξ и η ;
- ж)** найти $P(\eta \geq \xi)$.

Решение. **а)** Для нахождения значения параметра λ воспользуемся условием нормировки $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$ (сумма всех вероятностей должна быть равна 1):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 0,15 + \lambda + 0 + 0,1 + 0,2 + 0,1 + \lambda + 0,1 + 0,25 = 0,9 + 2\lambda = 1.$$

Следовательно, $\lambda = 0,05$.

б) Подставив найденное значение параметра λ в таблицу, получим закон распределения двумерной СВ $(\xi; \eta)$. Суммируя вероятности по строкам, получим вероятности различных значений СВ ξ ; суммируя по столбцам – вероятности для СВ η .

$\xi \backslash \eta$	-2	0	2	p^*
1	0,15	0,05	0	0,2
2	0,1	0,2	0,1	0,4
3	0,05	0,1	0,25	0,4
p^{**}	0,3	0,35	0,35	

Законы распределения компонент двумерной СВ $(\xi; \eta)$ запишутся в следующем виде:

ξ	1	2	3
P	0,2	0,4	0,4

η	-2	0	2
P	0,3	0,35	0,35

в) Для проверки зависимости СВ ξ и η используем критерий независимости дискретных СВ: СВ ξ и η с совместным распределением $p_{ij} = P(\xi = x_i; \eta = y_j)$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, независимы тогда и только тогда, когда $p_{ij} = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$ для всех $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Поскольку

$$P(\xi = 1; \eta = -2) = 0,15 \neq P(\xi = 1) \cdot P(\eta = -2) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06,$$

то СВ ξ и η зависимы.

г) Зная законы распределения СВ ξ и η , вычислим их математические ожидания:

$$M\xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i^* = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,4 = 2,2;$$

$$M\eta = \sum_{j=1}^m y_j p_j^{**} = -2 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,35 = 0,1.$$

д) Для вычисления дисперсий воспользуемся формулой $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$:

$$M(\xi^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i^* = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,4 = 0,2 + 1,6 + 3,6 = 5,4;$$

$$D\xi = 5,4 - (2,2)^2 = 5,4 - 4,84 = 0,56;$$

$$M(\eta^2) = \sum_{j=1}^m y_j^2 p_j^{**} = (-2)^2 \cdot 0,3 + 0^2 \cdot 0,35 + 2^2 \cdot 0,35 = 1,2 + 1,4 = 2,6;$$

$$D\eta = 2,6 - (0,1)^2 = 2,59.$$

е) Для вычисления коэффициента корреляции найдем:

$$\begin{aligned} M(\xi\eta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} = 1 \cdot (-2) \cdot 0,15 + 1 \cdot 0 \cdot 0,05 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + \\ &+ 2 \cdot (-2) \cdot 0,1 + 2 \cdot 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot (-2) \cdot 0,05 + 3 \cdot 0 \cdot 0,1 + 3 \cdot 2 \cdot 0,25 = \\ &= -0,3 + 0 + 0 - 0,4 + 0 + 0,4 - 0,3 + 0 + 1,5 = 0,9; \end{aligned}$$

$$r_{\xi;\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{0,9 - 2,2 \cdot 0,1}{\sqrt{0,56 \cdot 2,59}} \approx 0,5646.$$

Поскольку $r_{\xi;\eta} \neq 0$, это также свидетельствует о том, что СВ ξ и η зависимы.

ж) Для вычисления вероятности $P(\eta \geq \xi)$ выберем те пары значений СВ ξ и η , которые удовлетворяют неравенству $\eta \geq \xi$:

$$P(\eta \geq \xi) = P(\xi = 1; \eta = 2) + P(\xi = 2; \eta = 2) = 0 + 0,1 = 0,1.$$

Пример 2. Задана плотность распределения двумерной СВ $(\xi; \eta)$

$$p(x; y) = \begin{cases} axy, & \text{если } (x; y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x; y) \notin D, \end{cases}$$

где D — треугольник, ограниченный осями координат и прямой $x + y = 1$.

Требуется найти:

- а)** коэффициент a ;
- б)** математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$;
- в)** дисперсии $D\xi$ и $D\eta$;
- г)** коэффициент корреляции между ξ и η ;
- д)** выяснить, зависимы ли компоненты двумерной СВ $(\xi; \eta)$;
- е)** найти плотности распределения СВ ξ и η ;
- ж)** вероятность $P(\xi + \eta < 0,5)$.

Решение. **а)** Для нахождения значения параметра a воспользуем-

ся свойством плотности распределения: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x; y) dx dy = 1$.

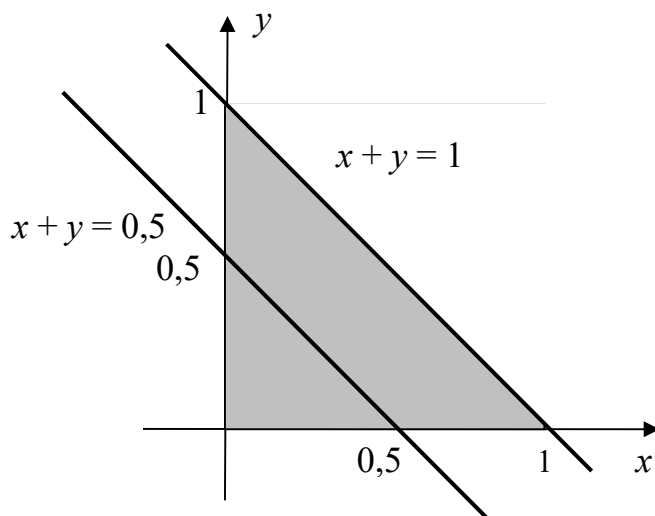


Рис. 1. Область интегрирования

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x; y) dx dy &= a \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy dy = a \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = a \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} dx = \\ &= \frac{a}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = \frac{a}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{a}{24} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $a = 24$.

б) Вычислим математическое ожидание СВ ξ :

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x; y) dx dy = 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y dy = 24 \int_0^1 \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= 24 \int_0^1 \frac{x^2 (1-x)^2}{2} dx = 12 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = 12 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 12 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = 12 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{5} = 0,4. \end{aligned}$$

Аналогично получим $M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yp(x; y) dx dy = 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy^2 dy = 0,4$.

в) Поскольку

$$\begin{aligned} M(\xi^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x; y) dx dy = 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^3 y dy = 24 \int_0^1 \frac{x^3 y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= 24 \int_0^1 \frac{x^3 (1-x)^2}{2} dx = 12 \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx = 12 \cdot \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 12 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) = 12 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{5} = 0,2; \end{aligned}$$

$$D\xi = 0,2 - (0,4)^2 = 0,2 - 0,16 = 0,04.$$

Аналогично имеем $M(\eta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p(x; y) dx dy = 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy^3 dy = 0,2$;

$$D\eta = 0,2 - (0,4)^2 = 0,2 - 0,16 = 0,04.$$

г) Для вычисления коэффициента корреляции найдем:

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x; y) dx dy = 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 y^2 dy = 24 \int_0^1 \frac{x^2 y^3}{3} \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 24 \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^3}{3} dx = 8 \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) dx = 8 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \\
&= 8 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = 8 \cdot \frac{1}{60} = \frac{2}{15}; \\
r_{\xi;\eta} &= \frac{M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{\frac{2}{15} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}{\sqrt{0,04 \cdot 0,04}} = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

д) Поскольку $r_{\xi;\eta} \neq 0$, то СВ ξ и η зависимы.

е) Найдем плотность распределения СВ ξ по формуле

$$p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x; y) dy:$$

$$\text{если } x \in [0;1], \text{ то } p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x; y) dy = 24x \int_0^{1-x} y^2 dy = 24x \frac{y^3}{3} \Big|_0^{1-x} = 12x(1-x)^2;$$

$$\text{если } x \notin [0;1], \text{ то } p_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x; y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dy = 0.$$

$$\text{Таким образом, } p_{\xi}(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & \text{если } x \in [0;1], \\ 0, & \text{если } x \notin [0;1]. \end{cases}$$

$$\text{Аналогично получаем, что } p_{\eta}(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2, & \text{если } y \in [0;1], \\ 0, & \text{если } y \notin [0;1]. \end{cases}$$

ж) Вычислим вероятность

$$\begin{aligned}
P(\xi + \eta < 0,5) &= \iint_{x+y < 0,5} p(x; y) dx dy = 24 \int_0^{0,5} dx \int_0^{0,5-x} xy dy = 24 \int_0^{0,5} \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{0,5-x} dx = \\
&= 24 \int_0^{0,5} \frac{x(0,5-x)^2}{2} dx = 12 \int_0^{0,5} \left(\frac{x}{4} - x^2 + x^3 \right) dx = 12 \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{1/2} = \\
&= 12 \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64} \right) = 12 \cdot \frac{1}{192} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$