

Богомолов Кирилл

Вывод уравнений Фридмана и анализ одного из его предельных решений

Уравнение Фридмана — в космологии уравнение, описывающее динамику и эволюцию однородной и изотропной Вселенной. В данной работе я выведу первое и второе уравнения Фридмана в рамках ньютоновской механики (с несколькими фактами из ОТО) и проанализирую случай холодной плоской Вселенной, заполненной барионным веществом.

Искривление пространственно временного континуума

Из общей теории относительности следует, что распределение материи искривляет пространственно временной континуум вокруг этой материи. А искривленное пространство-время в свою очередь изменяет траектории, по которым двигаются тела.

Запишем интервал в случае искривленного пространства Минковского в сферических координатах [1]:

$$ds^2 = -c^2 \cdot dt^2 + a^2(t, r, \phi, \theta) \cdot dr^2$$

То есть искривление пространства приводит к тому, что все расстояния умножаются на функцию $a(t, r, \phi, \theta)$, называемую масштабным фактором.

$$\frac{r \cdot \frac{da}{dt}}{R} = \frac{da}{a \cdot dt} = H$$

H - параметр Хаббла, описывающий общую скорость расширения Вселенной.

В предположении однородности и изотропности Вселенной масштабный фактор становится зависимым только от t : $a = a(t)$. Изотропность Вселенной означает, что при любых поворотах в любом направлении под любым углом наблюдаемое распределение вещества не меняет своей структуры.

$$V = \frac{d(R)}{dt} = \frac{r \cdot a(t)}{dt} = r \cdot \frac{da}{dt}$$

Первое уравнение Фридмана

Выберем достаточно большую сферу радиуса R такую, чтобы она была заполнена веществом однородно и изотропно. Плотность вещества внутри сферы $\rho = \rho(t)$ - зависит только от времени. В силу однородности, вещество, находящееся снаружи выделенной сферы, будет взаимокompенсироваться, соответственно его учитывать не нужно.

Для произвольной точки на границы этой сферы должен быть справедлив ЗСЭ:

$$T + U = const$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot r^2 \cdot (\dot{a})^2}{2}$$

$$U = \frac{-GMm}{R} = -\frac{4}{3}\pi Gm\rho R^2$$

По определению:

$$R = r \cdot a$$

$$U = -\frac{4}{3}\pi Gm\rho r^2 a^2$$

Тогда:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4}{3}\pi G\rho a^2 = C$$

C - const

Мы получили это уравнение с помощью классической физики. Теория относительности дает такое же уравнение, но она вносит одно важное уточнение: константа C может принимать одно из возможных трёх значений.

$$C = -\frac{k}{2},$$

$$k = \begin{cases} 1, \\ 0, \\ -1 \end{cases}$$

Если у Вселенной $k = +1$, то она называется замкнутой (имеет форму гиперболы). Если $k = -1$, она называется открытой (имеет седловидную форму). В случае $k = 0$ Вселенная называется плоской. Соответственно, параметр k называется кривизной Вселенной.

Отсюда несложно получить **Первое уравнение Фридмана** (Фридмана-Робертсона-Уолкера-Леметра):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{k}{a^2}$$

ρ - усредненная плотность вещества, которая может меняться со временем.

Данные наблюдений с хорошей точностью показывают, что коэффициент k близок к нулю, однако до сих пор нельзя точно сказать, попадаем ли мы ровно в 0 или чуть выше или ниже.

Второе уравнение Фридмана

Предполагая, что Вселенная ни с чем не взаимодействует, можем записать уравнение адиабатического расширения:

$$dW = -PdS$$

$$\frac{dW}{dt} = -P\frac{dS}{dt}$$

dW - изменение полной энергии рассматриваемой сферы.

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{4}{3} \pi r^3 a^3 \rho \right) \cdot c^2 \right) = -P \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 a^3 \right)$$

$$\frac{d}{dt} (a^3 \rho) = -\frac{P}{c^2} \cdot \frac{d}{dt} (a^3)$$

Преобразуя, получаем **Второе уравнение Фридмана**:

$$\dot{\rho} = -3 \cdot \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \cdot H$$

$H = \frac{\dot{a}}{a}$ - параметр Хабла

В зависимости от того, какое предположение мы делаем о составе вещества Вселенной, мы можем установить связь давления и плотности этого вещества.

Из физических соображений, в большинстве случаев между плотностью и давлением прямая пропорциональность:

$$\frac{P}{c^2} = \omega \cdot \rho$$

называемое уравнением состояния.

$\omega = const$ - коэффициент пропорциональности, называемый параметром состояния. Параметр состояния зависит от того, какое вещество заполняет Вселенную.

Холодная плоская Вселенная, заполненная барионным веществом

Рассмотрим плоскую Вселенную, которая уже достаточно давно существует, в которой доминирует барионное вещество.

Барионным веществом - вещество, основой которого являются барионы – тяжелые элементарные частицы, включающие протоны и нейтроны и ряд короткоживущих частиц, которые при распаде порождают протоны.

Физическими соображениями можно показать, что в этом случае в уравнении состояния $w \sim 0$. Это следует из того, что в холодной Вселенной почти нет мест, где число $\frac{P}{c^2}$ было бы значимо отменно от нуля. Отсюда следует, что давление барионного вещества несколько мало, что им можно пренебречь.

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -3 \cdot \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \cdot \frac{\dot{a}}{a} \\ \frac{P}{c^2} = 0 \cdot \rho = 0 \end{cases}$$

$$\dot{\rho} = -3 \cdot \rho \cdot \frac{\dot{a}}{a}$$

Решаем и получаем:

$$\rho = \frac{C}{a^3}$$

$$\rho = \rho_0 \cdot \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

ρ_0, a_0 - наблюдаемые текущие параметры Вселенной.

Подставим в Первое уравнение Фридмана ($k = 0$).

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = 0$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{C}{a}$$

C - константа из $\rho = \frac{C}{a^3}$

$$\frac{da}{dt} = \pm \frac{b}{\sqrt{a}}$$

$$b = \sqrt{\frac{8\pi GC}{3}} > 0$$

Знак плюс соответствует $\frac{da}{dt} > 0$, то есть расширяющейся Вселенной. Аналогично, знак минус соответствует схлопывающейся Вселенной. Из данных уравнений можно видеть, что в случае барионного вещества Вселенная может либо расширяться, либо схлопываться, промежуточного случая нет.

$$a^{3/2} = \pm \frac{3}{2} \cdot b \cdot (t - t_s)$$

$$a(t) = \left(\pm \frac{3}{2} \cdot b \cdot (t - t_s)\right)^{2/3}$$

t_s - время начальной сингулярности. В рамках этой модели, если рассматриваем модель расширяющейся Вселенной, следует, что был момент зарождения Вселенной, что согласуется с теорией Большого Взрыва.

Заключение

В этой работе я вывел уравнения Фридмана в рамках ньютоновской механики с несколькими фактами из ОТО. Также проанализировал один из предельных случаев: модель расширяющейся холодной плоской Вселенной, заполненной барионным веществом. Мы видим, что она согласуется с существованием момента рождения Вселенной согласно теории Большого взрыва.

Важно отметить, что я рассмотрел только один из нескольких этапов эволюции Вселенной. На самых ранних этапах жизни Вселенной доминировало излучение, далее, по мере расширения Вселенной, стало доминировать барионное вещество (возраст ~ 100 тыс лет). В настоящий момент во Вселенной доминирует темная энергия и темная материя.

Литература

- [1] Геометрия и тригонометрия на плоскости Минковского
<https://mipt.ru/upload/medialibrary/205/mink09A4.pdf>

- Пространство Минковского
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE_%D0%9C%D0%B8%D0%BD%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE
- Уравнения Фридмана
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%A4%D1%80%D0%B8%D0%B4%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D0%B0
- Введение в космологию <https://td.lpi.ru/~eugvas/cosmology/lecture2.pdf>