布尔巴基数学基础（第1卷）集合论学习笔记

何嘉惠，黄芸芸

二零二四年十二月

说明

本文系《布尔巴基数学基础（第1卷）集合论》（施普林格出版社2006年版）学习笔记，包括下列内容：

元数学（métamathématique）：

（1）元数学定义1–65：大部分系原书内容，部分做了调整；

（2）记号定义1–23：大部分系原书内容，部分做了调整；

（3）替代规则（critère de substitution）1–12：按原书编号；

（4）补充替代规则1–8：即原书未编号或自行补充的替代规则，一项规则为公理模式的命题，也纳入补充替代规则；

（5）形成规则（critère formatif）1–13：按原书编号；

（6）补充形成规则1–2：即原书未编号或自行补充的形成规则；

（7）证明规则（critère déductif）1–63：按原书编号；

（8）补充证明规则1–91：即原书未编号或自行补充的证明规则；

（9）语法定义1–10：系原书第一章附录的定义；

（10）语法定理1–8：系原书第一章附录的定理；

（11）补充语法定理1–2：即自行补充的语法定理；

数学（mathématique）：

（1）定义1–206，原书提及的定义，部分做了调整；

（2）公理模式1–8，原书使用的8个公理模式；

（3）显式公理1–4，原书使用的4个显式公理；

（4）定理1–193，原书以斜体标明的定理；

（5）补充定理1–432，原书未以斜体标明的内容或自行补充的定理；

（6）结构定义1–39：系原始第四章的定义；

（7）结构规则1–23：按原书第四章的编号；

（8）补充结构规则1–14：即原书未编号或自行补充的结构规则.

习题（exercice）1–212：按照原书顺序编号，它可能属于数学也可能属于元数学，不做区分．其中部分习题的表述做了调整.

注：元数学定义中可能出现“自然数”等概念，但与数学中的“自然数”等概念无关，不存在循环定义.

目录

说明 **i**

1 形式数学的描述（Description de la mathématique formelle） **1**

1.1 项和公式（Termes et relations） 1

1.2 定理（Théorèmes） 8

1.3 逻辑理论（Théories logiques） 11

1.4 量词理论（Théories quantifiées） 23

1.5 等式理论（Théories égalitaires） 29

1.6 项和公式的性质（Caractérisation des termes et des relations） 35

2 集合论（Théorie des ensembles） **48**

2.1 集合化公式（Relations collectivisantes） 48

2.2 有序对（Couples） 57

2.3 对应（Correspondances） 61

2.4 集族的并集和交集（Réunion et intersection d'une famille d'ensembles） 87

2.5 集族的乘积（Produit d'une famille d'ensembles） 100

2.6 等价关系（Relations d'équivalence） 115

3 偏序集，基数，自然数（Ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers） **139**

3.1 偏序关系，偏序集（Relations d'ordre, ensembles ordonnés） 139

3.2 良序集（Ensembles bien ordonnés） 180

3.3 集合等势，基数（Ensembles équipotents, cardinaux） 214

3.4 自然数，有限集合（Entiers naturels, ensembles finis） 224

3.5 自然数的运算（Calcul sur les entiers） 235

3.6 无穷集合（Ensembles infinis） 251

3.7 射影极限和归纳极限（Limites projectives et limites inductives） 293

4 结构（Structures） **314**

4.1 结构和同构（Structures et isomorphismes） 314

4.2 态射和派生结构（Morphismes et structures dérivées） 323

4.3 普遍性映射（Applications universelles） 334

Chapter 1

形式数学的描述（Description de la mathématique formelle）

1.1 项和公式（Termes et relations）

元数学定义 1. 理论（*théorie*）

理论是指通过预先确定的“特别符号”、“公理模式”、“显式公理”三栏内容生成的规则体系.

注：理论是元数学的基本概念，在元数学中，实际上只能描述而无法定义．其中提到的“特别符号”、“公理模式”、“显式公理”将在后面定义.

元数学定义 2. 特别符号（*signe spécifique*）

特别符号是指理论的“特别符号”一栏列举的字符.

元数学定义 3. 特别符号的元（*poid de signe spécifique)*

特别符号的元，是指理论列举特殊符号时，同时列出的对应自然数.

元数学定义 4. 逻辑符号（*signe logique*）

逻辑符号是指$\square$、τ、$\vee$、$\neg$四个符号.

注：

$\vee$表示“析取”，$\neg$表示“否定”.

τ与某种性质相关联：令论域为良序集，如果论域中存在使该性质成立的对象，则它表示论域中具备此种性质的第一个对象；如果论域中不存在使该性质成立的对象，则它论域中的第一个对象．并且，论域的第一个对象除了与自身相等外，不具备任何其他性质.

$\square$必须与左侧的某一个τ用连线连接，表示τ的参数；τ可以与右侧的多个$\square$连接，也可以独立存在，表示没有参数.

元数学定义 5. 字母（*lettre*）

字母是指大写或小写拉丁字母，其可以附带一个自然数下标，也可以附带有限个单引号的上标.

注：字母的数量为可数集即可，按照习惯，仅允许附带一个自然数下标和有限个单引号上标.

元数学定义 6. 符号（*signe*）

逻辑符号、字母，特别符号统称符号.

元数学定义 7. 语句（*assemblage*），连线（*lien*）

有限符号序列，可以不附加任何线，也可以附加一条或多条线，但任何一条线只能把一个符号和另一个符号连接起来，称为语句. 语句附加的线，称为连线.

记号定义 1. 符号序列的连接（*connexion de suites de signes*）

令A、B为符号有限序列，AB表示将符号序列B依次写在符号序列A的右边而得到的序列.

记号定义 2. 蕴涵（*implication*）

在语句中，“$\vee\neg$”简记为“$\Rightarrow$”.

记号定义 3. 中序表达式（*notation infixée*）

语句也可以用中序表达式表示.

中序表达式的运算符,分为五个优先级.

中序表达式的运算符，在定义时没有特别说明优先级的，如果该运算符有两个参数，且没有使用上标、下标或者$\langle\rangle$、$()$、$\{\}$，则为第二优先级；其他情况下，为第一优先级.

其中，第二优先级、第三优先级、第四优先级、第五优先级的运算符均为左结合，第一优先级运算符均为右结合. 可以前后加括号改变符号优先级.

注：

语句采用前序表达式，但为符合通常的书写习惯，故设置改写为中序表达式的规则.

原则上，只有一个参数，或者包含上下标或各种括号，为第一优先级；对两个项进行运算得到一个新项，为第二优先级；对两个项进行运算得到一个公式，为第三优先级；析取和合取为第四优先级；蕴含和等价为第五优先级.

记号定义 4. 取得对象（*obtention de l'objet*）

令A为语句，x为字母，则用$\tau_x(A)$表示这样的语句：语句τA当中所有的符号x替代为符号$\square$，并将替代得到的$\square$和开头的τ连线.

记号定义 5. 替代（*substitution*）

令A、B为语句，x为字母，则用$(B|x)A$表示以B替代A当中所有的符号x而得到的语句.

注：原书还使用了带参数的语句取代替代记号，本文不采用这种写法，仍使用替代记号.

补充替代规则 1.

令A为语句，x为字母，则$(x|x)A$和A相同.

证明：根据定义可证.

替代规则 1.

令A、B为语句，x、x'为字母，如果A不包含x'，则$(B|x)A$和$(B|x')(x'|x)A$相同.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

补充替代规则 2.

令A为语句，x、y为字母，且A不包含x，则$(y|x)A$和A相同.

证明：根据定义可证.

补充替代规则 3.

令A为语句，x、x'为字母，如果A不包含x'，则$(x|x')(x'|x)A$和A相同.

证明：根据替代规则1、补充替代规则1可证.

替代规则 2.

令A、B、C为语句，x、y为不同字母，如果B不包含y，则$(B|x)(C|y)A$和$(C'|y)(B|x)A$相同，其中C'为$(B|x)C$.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

补充替代规则 4.

令A为语句，x、y、z为不同字母，且A不包含z，则$(y|z)(x|y)(z|x)A$和$(x|z)(y|x)(z|y)A$相同.

证明：
令u为不同于x、y、z的字母，且A不包含u.
根据替代规则1，$(x|z)(y|x)(z|y)A$和$(x|z)(y|u)(u|x)(z|y)$相同；
根据替代规则2，$(x|z)(y|u)(u|x)(z|y)$和$(y|u)(x|z)(z|y)(u|x)A$相同；
根据替代规则1，$(y|u)(x|z)(z|y)(u|x)A$和$(y|u)(x|y)(u|x)A$相同；
根据补充替代规则3，$(y|u)(x|y)(u|x)A$和$(y|u)(x|y)(u|z)(z|u)(u|x)A$相同；
根据替代规则1，$(y|u)(x|y)(u|z)(z|u)(u|x)A$和$(y|u)(u|z)(x|y)(z|u)(u|x)A$相同；
根据替代规则1，$(y|u)(u|z)(x|y)(z|u)(u|x)A$和$(y|z)(x|y)(z|x)A$相同.
得证.
注：$(y|z)(x|y)(z|x)A$和$(x|z)(y|x)(z|y)A$即为将语句A中的x和y交换后得到的语句.

替代规则 3.

令A为语句，x、x'为字母，如果A不包含x'，则$\tau_x(A)$和$\tau_{x'}(A')$相同，其中A'为$(x'|x)A$.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

替代规则 4.

令A、B为语句，x、y为不同字母，如果B不包含x，则$(B|y)\tau_x(A)$和$\tau_x(A')$相同，其中A'为$(B|y)A$.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

替代规则 5.

令A、B、C为语句，x为字母，s为特别符号，则$(C|x)(\neg A)$、$(C|x)(\vee AB)$、$(C|x)(\Rightarrow AB)$、$(C|x)(sAB)$分别和$\neg A'$、$\vee A'B'$、$\Rightarrow A'B'$、$'B'$相同，其中A'为$(C|x)A$，B'为$(C|x)B$.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

元数学定义 8. 第一类语句（*assemblage de première espèce*），第二类语句（*assemblage de deuxième espèce*）

以τ开头的语句或单个字母，称为第一类语句，其他语句称为第二类语句.

元数学定义 9. 构造（*construction formative*） 理论M的一个构造是指语句有限序列，并且序列中的语句A均符合下列规则之一：

（*1*）A是字母；

（*2*）存在位于A之前的第二类语句B，使A为$\neg B$；

（*3*）存在位于A之前的第二类语句B和C，使A为$\vee BC$；

（*4*）存在位于A之前的第二类语句B，以及字母x，使A为$\tau_x(B)$；

（5）存在一个n元特别符号s，以及位于A之前的n个第一类语句A_1、A_2、$\cdots$、A_n，使A为$sA_1A_2\cdots A_n$.

元数学定义 10. 项（*terme*）、公式（*relation*）

理论M的项是指，该理论的某个构造中的第一类语句；理论M的公式是指，该理论的某个构造中的第二类语句.

形成规则 1.

如果A和B都是理论M的公式，则$\vee AB$也是理论M的公式.

证明：将包含A的构造和包含B的构造合在一起. 由于A和B都是公式，因此可以加入语句$\vee AB$，故$\vee AB$也是公式.

形成规则 2.

如果A是理论M的公式，则$\neg A$也是理论M的公式.

证明：在包含A的构造中，由于A是公式，因此可以加入语句$\neg A$，故$\neg A$也是公式.

形成规则 3.

如果A是理论M的公式，x为字母，则$\tau_x(A)$是理论M的项.

证明：在包含A的构造中，由于A是公式，因此可以加入语句$\tau_x(A)$，故$\tau_x(A)$是项.

形成规则 4.

如果A_1、A_2、$\cdots$、A_n都是理论M的项，s是理论M的n元特别符号，则$sA_1A_2\cdots A_n$是理论M的公式.

证明：将包含A_1、A_2、$\cdots$、A_n的各构造合在一起. 由于A_1、A_2、$\cdots$、A_n都是项，因此可以加入语句$sA_1A_2\cdots A_n$，故$sA_1A_2\cdots A_n$是公式.

形成规则 5.

如果A和B都是理论M的公式，则$\Rightarrow AB$也是理论M的公式.

证明：$\Rightarrow AB$即$\vee\neg AB$，根据形成规则2、形成规则1可证.

形成规则 6.

如果A_1、A_2、$\cdots$、A_n是理论M的一个构造，x、y为字母，并且A_1、A_2、$\cdots$、A_n均不包含y，则$(y|x)A_1$、$(y|x)A_2$、$\cdots$、$(y|x)A_n$也组成理论M的一个构造.

证明：

A_1只能是字母，因此$(y|x)A_1$也是字母，故命题对A_1成立.

设命题对A_1、A_2、$\cdots$、A_i-1均成立，考虑A_i：

若A_i是字母，则$(y|x)A_i$也是字母.

若A_i是$\neg B$、$\vee BC$或$sA_1A_2\cdots A_j$的形式，根据替代规则5，$(y|x)A_i$也是同类的形式.

若A_i是$\tau_z(A_j)$的形式：

（1）如果z与x、y均不相同，根据替代规则4，$(y|x)(\tau_z(A_j))$和$\tau_z(A_j)$相同，故符合构造中语句的条件；

（2）如果z是x，即A_i是$\tau_x(A_j)$，根据替代规则3，$\tau_x(A_j)$和$\tau_y((y|x)A_j)$相同. 又因为$\tau_x(A_j)$不包含x，根据补充替代规则2，$\tau_x(A_j)$和$(y|x)\tau_x(A_j)$相同. 因此，$(y|x)A_i$和$\tau_y((y|x)A_j)$相同，符合构造中语句的条件；

（3）如果z是y，即A_i是$\tau_y(A_j)$，即τA_j，则$(y|x)A_i$为$(y|x)\tau A_j$，即$\tau(y|x)A_j$，符合构造中语句的条件.

形成规则 7.

如果A是理论M的公式（或项），x、y为字母，则$(y|x)A$也是理论M的公式（或项）.

证明：

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为包含A的构造.

A_1只能是字母，因此$(y|x)A_1$也是字母，为项，故命题对A_1成立.

设命题对A_1、A_2、$\cdots$、A_{i-1}均成立，考虑A_i：

若A_i是字母，则$(y|x)A_i$也是字母，为项.

若A_i是$\neg B$、$\vee BC$或$sA_1A_2\cdots A_j$的形式，根据替代规则5，$(y|x)A_i$也是同类的形式，根据形成规则2、形成规则3、形成规则4，为公式.

若A_i是$\tau_z(A_j)$的形式：

（1）如果z与x、y均不相同，根据替代规则4，$(y|x)(\tau_z(A_j))$和$\tau_z(A_j)$相同，根据形成规则3，$(y|x)A_i$为项；

（2）如果z是x，即A_i是$\tau_x(A_j)$，根据替代规则3，$\tau_x(A_j)$和$\tau_y((y|x)A_j)$相同．又因为$\tau_x(A_j)$不包含x，根据补充替代规则2，$\tau_x(A_j)$和$(y|x)\tau_x(A_j)$相同．因此，$(y|x)A_i$和$\tau_y((y|x)A_j)$相同，故$(y|x)A_i$为项；

（3）如果z是y，令u是不同于x、y且不出现在A_1、A_2、$\cdots$、A_j中的字母，根据形成规则6，$(y|x)(u|y)A_1$、$(y|x)(u|y)A_2$、$\cdots$、$(y|x)(u|y)A_j$也组成M的一个构造，根据替代规则4、替代规则3，$\tau_u((y|x)(u|y)A_j)$和$(y|x)\tau_y(A_j)$相同，即和$(y|x)A_i$相同，因此$(y|x)A_i$为项.

形成规则 8.

如果A是理论M的公式（或项），x为字母，T为理论M的项，则$(T|x)A$也是理论M的公式（或项）.

证明：

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为包含A的构造，x_1、x_2、$\cdots$、x_p是出现在T当中的所有不同字母，x'_1、x'_2、$\cdots$、x'_p是和x_1、x_2、$\cdots$、x_p均不同且不出现在A_1、A_2、$\cdots$、A_n中的字母.

根据形成规则7，$(x'_1|x_1)(x'_2|x_2)\cdots(x'_p|x_p)T$也是项，记作$T'$.

根据形成规则1，$(T|x)A$与$(x_1|x'_1)(x_2|x'_2)\cdots(x_p|x'_p)(T'|x)A$相同.

设命题对A_1、A_2、$\cdots$、A_{i-1}均成立，考虑A_i：

若A_i是字母，则$(T'|x)A_i$或者为字母，或者为T，故$(T'|x)A_i$为项；

若A_i是$\neg B$、$\vee BC$或$sA_1A_2\cdots A_j$的形式，根据替代规则5，$(T'|x)A_i$也是同类的形式，根据形成规则2、形成规则3、形成规则4，$(T'|x)A_i$为公式.

若A_i是$\tau_z(A_j)$的形式：

（1）如果z与x不同，且不出现在T'中，根据替代规则4，$(T'|x)\tau_z(A_j)$和$\tau_z((T'|x)A_j)$相同，根据形成规则3，$(T'|x)A_i$为项；

（2）如果z是x，即A_i是$\tau_x(A_j)$，不包含x，故A_i和$(T'|x)A_i$相同，因此，$(T'|x)A_i$为项；

（3）如果z出现在T'中，因此z不出现在A_1、A_2、$\cdots$、A_n中．令u是不出现在$(T'|x)A_1$、$(T'|x)A_2$、$\cdots$、$(T'|x)A_n$的字母．此时，$\tau_z(A_j)$即τA_j，$(T'|x)A_i$即$\tau(T'|x)A_j$，也即$\tau_u((T'|x)A_j)$，根据形成规则3，$(T'|x)A_i$为项为项.

综上，$(T'|x)A_i$为项（或公式），根据形成规则7，$(T|x)A_i$为项（或公式）.

补充形成规则 1.

A是理论M的项或公式，则A的每个符号□都与左侧某一个符号τ连线；且每个符号τ或者未连线，或者与右边一个或多个符号□连线. 除此之外，没有其他连线.

证明：

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为包含A的构造.

假设命题对于前k个语句成立，对于A_{k+1}：

如果A_{k+1}是字母、$\neg B$、$\vee BC$、$sD_1D_2\cdots D_n$的形式，由于B、C、D_1、D_2、$\cdots$、D_n都是构造中在A_{k+1}之前的语句，满足上述性质，且于A_{k+1}未添加其他连线，因此命题对A_{k+1}也成立.

如果于A_{k+1}是$\tau_x(B)$的形式，除了B已有的连线满足上述性质外，A开头的τ仅与B中的x替代得到的□连线，替代得到的□都与开头的τ连线，除此之外未添加其他连线，故命题对A_{k+1}也成立.

补充形成规则 2.

A是理论M的项或公式，则A不能以□开头.

证明：根据定义可证.

习题 1.

理论M没有特别符号，求证：M中没有公式，并且所有的的项都是单个字母.

证明：考虑任意构造，用数学归纳法可证明构造中的每个语句都只能是单个字母.

习题 2.

A是理论M的项或公式，求证：A的每个符号□都与左侧某一个符号τ连线；且每个符号τ或者未连线，或者与右边一个或多个符号□连线. 除此之外，没有其他连线.

证明：即补充形成规则1.

习题 3.

A是理论M的项或公式，求证：A的每个特别符号后面只能是□、τ或字母.

证明：根据构造的定义，特别符号后面的语句只能是项，而$\neg$、$\vee$和特别符号开头的语句是公式，故特别符号后面只能是是□、τ或字母.

习题 4.

A是理论M的项或公式，B是语句，求证：AB不是项也不是公式.

证明：

对A的符号数目用数学归纳法.

A的符号数目为1时，A只能是单个字母，因此AB以字母开头，不可能是项或公式，故命题成立.

假设A的符号数目小于k时，命题成立，考虑A的符号数目为k的情形：

如果A以$\neg$开头，设故A为$\neg C$的形式，如果AB为$\neg D$的形式，则公式D为CB，根据归纳假设，矛盾.

如果A以$\vee$或特别符号开头，同理可证.

如果A以τ开头，设A为$\tau_x(C)$，其中C为公式. 假设AB为$\tau_y(D)$，其中D为公式，则令u为一个不同于x和y，并且不出现在C和D中的字母，根据替代规则3，AB和$\tau_u((u|y)D)$相同，A和$\tau_u((u|x)C)$相同，因此$((u|y)D)$和$((u|x)C)B$相同，根据归纳假设，矛盾.

习题 5.

A是理论M的语句，x为字母，求证：如果$\tau_x(A)$是M的项，则A是M的公式.

证明：设$\tau_x(A)$和$\tau_y(R)$相同，其中R为M的项，y为字母. 由定义可知，A和$(y|x)R$相同. 根据形成规则7，A是M的公式.

习题 6.

A、B是理论M的语句，求证：如果A和$\Rightarrow AB$都是M的公式，则B是M的公式.

证明：假设“$\Rightarrow AB$”为“$\Rightarrow CD$”的形式，其中C、D为公式. 根据习题4，C和A相同，故B和D相同，得证.

1.2 定理（Théorèmes）

记号定义 6. 逻辑运算符（*opérateurs logiques*）

令A、B为语句，定义下列中序表达式的运算符：

（*1*）“非A”表示“$\neg A$”（第一优先级）；

（*2*）“A或B”表示“$\vee AB$”（第四优先级）；

（*3*）“$A \Rightarrow B$”表示“$\Rightarrow AB$”（第五优先级）.

元数学定义 11. 显式公理（*axiome explicite*）

显式公理，是指理论的“显式公理”一栏列举的一系列公式.

元数学定义 12. 公理模式（*schéma*），隐式公理（*axiome implicite*）

公理模式，是指理论的“公理模式”一栏列举并且满足下列条件的规则：

（*1*）将该规则适用到一个或数个项和/或公式上，可以生成公式；

（2）令T为项，x为字母，R为根据该规则生成的公式，则$(T|x)R$也是根据该规则可以生成的公式.

隐式公理是指根据公理模式生成的公式.

元数学定义 13. 公理（*axiome*）

公理是隐式公理和显式公理的总称.

元数学定义 14. 常数（*constante*）

显式公理中的字母，称为常数.

注：常数表示特定对象，其他字母表示不特定的对象. 显式公理对常数的性质做出断言，隐式公理对不特定对象的性质做出断言.

元数学定义 15. 证明文本（*texte démonstratif*），证明（*démonstration*）

理论M的证明文本，是指一个辅助构造和一个公式有限序列，并且序列其中每个公式都满足下列条件之一：

（1）该公式是理论M的显式公理；

（2）该公式是将理论M的一个公理模式适用到辅助构造中的项及公式，得到的公式；

（3）设该公式为R，在序列中，存在R之前的两个公式S和T，其中T是"$S \Rightarrow R$".

其中，证明文本中的公式序列称为证明.

元数学定义 16. 定理（*théorème*）

理论M的证明文本的证明中的各公式，均称为定理.

元数学定义 17. 真公式（*relation vraie*），假公式（*relation fausse*）

如果理论M的公式A是定理，则称A为真，如果公式$\neg A$是定理，则称A为假.

元数学定义 18. 矛盾的理论（*théorie contradictoire*）

如果理论M中存在一个公式A，既是真又是假，则称理论M有矛盾.

补充证明规则 1.

理论M的公理都是定理.

证明：建立仅包含公理A的公式序列，根据定理的定义，A是定理.

证明规则 1. 三段论

令A、B为理论M的公式，如果A和$A \Rightarrow B$是理论M的定理，则B是理论M的定理.

证明：设包含A的证明为R_1、R_2、$\cdots$、R_n，设包含$A \Rightarrow B$的证明为S_1、S_2、$\cdots$、S_n，则公式序列，R_1、R_2、$\cdots$、R_n、S_1、S_2、$\cdots$、S_n、B是一个证明. 故B是定理.

记号定义 7. 理论的替代（*substitution dans une théorie*）

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为理论M所有的显式公理，T为理论M的项，x为字母，则用$(T|x)$表示这样的理论：

它的特殊符号和公理模式都与M相同，而其中的显式公理为$(T|x)A_1$、$(T|x)A_2$、$\cdots$、$(T|x)A_n$.

证明规则 2.

令A为理论M的定理，T为理论M的项，x为字母，则$(T|x)A$是理论$(T|x)M$的定理.

证明：

设包含A的证明为为R_1、R_2、$\cdots$、R_n，考虑公式序列$(T|x)R_1$、$(T|x)R_2$、$\cdots$、$(T|x)R_n$.

若R_n是M的显式公理，则$(T|x)R_n$是$(T|x)M$的显式公理.

若R_n是M的隐式公理，则$(T|x)R_n$是$(T|x)M$由同一个公理模式产生的隐式公理.

若R_n是M的其他定理，则包含A的证明存在R_i和$R_i \Rightarrow R_n$，故$(T|x)R_i$、$(T|x)(Ri \Rightarrow Rn)$都在公式序列$(T|x)R_1$、$(T|x)R_2$、$\cdots$、$(T|x)R_n$中，根据替代规则5，$(T|x)(R_i \Rightarrow R_n)$即$(T|x)R_i \Rightarrow (T|x)R_n$. 因此$(T|x)R_n$是$(T|x)M$的定理.

证明规则 3.

令A为理论M的定理，T为理论M的项，x为字母，如果x不是理论M的常数，则$(T|x)A$是理论M的定理.

证明：由于M的显式公理不包括字母x，故$(T|x)M$和M相同. 根据证明规则2，$(T|x)A$是M的定理.

元数学定义 19. 更强的理论（*théorie plus forte*），等价的理论（*théories équivalentes*）

如果理论M的所有特殊符号、显式公理、公理模式分别都是理论M'的特殊符号、定理、公理模式，则称理论M'比理论M强. 如果理论M比理论M'强，并且理论M'比理论M强，则称M和M'等价.

注：在原书中，“强”这个概念包括与自身相等的情况，即一个理论比自身强.

证明规则 4.

如果理论M'比理论M强，则理论M的定理，也是理论M'的定理.

证明：

设理论M中包含定理R的证明为R_1、R_2、$\cdots$、R_n.

R_1为M公理，因此也是M'的公理，故命题对R_1成立.

设命题对R_1、R_2、$\cdots$、R_{k-1}成立，对于M的定理R_k，如果R_k是M的公理，则R_k是M'的公理. 如果R_k不是M的公理，则在对R_1、R_2、$\cdots$、R_{k-1}中，存在两个M的定理R_i和$R_i \Rightarrow R_k$，根据归纳假设，它们也都是M'的定理，故R_k也是M'的定理.

证明规则 5.

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为理论M的显式公理，a_1、a_2、$\cdots$、a_h为理论M的常数，T_1、T_2、$\cdots$、T_h为理论M的项，如果$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A_i$（其中$i=1,2,\cdots,n$）都是另一个理论$M'$的定理，而且理论$M$的所有特殊符号和公理模式分别都是理论$M'$的特殊符号和公理模式，则对理论$M$的任何定理$A$，$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A$都是理论$M'$的定理．

证明：根据证明规则2，$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A$ 是理论$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)M$的定理．由于$M'$比$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)M$强，根据证明规则4得证．

习题 7.

理论M的显式公理为A_1、A_2、$\cdots$、A_n，常数为a_1、a_2、$\cdots$、a_h．

（*1*）理论M'的常数和公理模式与M相同，显式公理为为A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}，如果M'和M不等价，则称A_n独立于其他公理．求证：当且仅当A_n不是M'的定理时，A_n独立．

（*2*）理论M''的常数和公理模式与M相同，对于M的项T_1、T_2、$\cdots$、T_h是M，对$i=1$、2、$\cdots$、$n-1$，$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_i$都是$M''$的定理，而(非$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_n)$是$M''$的定理，求证：要么在$M$中$A_n$独立于其他公理，要么$M''$有矛盾．

证明：

（1）M强于M'．如果A_n不是M'的定理，则M'不比M强，因此M'和M不等价．反过来，若M'不比M强，则M必有一个显式公理不是M'的定理，该显式公理只能是A_n．

（2）假设A_n是M'的定理，根据证明规则5，$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_n$是$M''$的定理，因此$M''$有矛盾．

1.3 逻辑理论（Théories logiques）

补充替代规则 5.

下列规则均为公理模式：

（*1*）令A为公式，则$(A$或$A)\Rightarrow A$是公理．

（*2*）令A、B为公式，则$A\Rightarrow(A$或$B)$是公理．

（*3*）令A、B为公式，则$(A$或$B)\Rightarrow(B$或$A)$ 是公理．

（*4*）令A、B、C为公式，则$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((C$或$A)\Rightarrow(C$或$B))$是公理．

证明：根据替代规则5可证．

公理模式 1.

令A为公式，则$(A$或$A)\Rightarrow A$是公理．

注：形式语言的表述是$\vee\neg\vee AAA$．

公理模式 2.

令A、B为公式，则$A \Rightarrow (A或B)$ 是公理.

注：形式语言的表述是$\vee\neg A \vee AB$.

公理模式 3. 析取交换律

令A、B为公式，则$(A或B) \Rightarrow (B或A)$是公理.

注：形式语言的表述是$\vee\neg \vee AB \vee BA$.

公理模式 4.

令A、B、C为公式，则$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C或A) \Rightarrow (C或B))$是公理.

注：形式语言的表述是$\vee\neg \vee \neg AB \vee \neg \vee CA \vee CB$.

元数学定义 20. 逻辑理论（*théorie logique*）

包含公理模式*1*、公理模式*2*、公理模式*3*、公理模式*4*的理论，称为逻辑理论.

补充证明规则 2.

如果逻辑理论M有矛盾，则M中的任何一个公式均为其定理.

证明：设A和非A均为M的定理，对任意公式B，根据公理模式2，非$A \Rightarrow$ 非A或B，根据证明规则1，非A或B，即$A \Rightarrow B$，又因为A是定理，根据根据证明规则1，B是定理.

证明规则 6. 蕴涵的传递性

令A、B、C为逻辑理论M的公式，$A \Rightarrow B$和$B \Rightarrow C$是M的定理，则$A \Rightarrow C$也是M的定理.

证明：

根据公理模式4，$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((非A或B) \Rightarrow (非A或C))$，即$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

由于$B \Rightarrow C$，根据证明规则1$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$，又因为$A \Rightarrow B$，根据证明规则1，$A \Rightarrow C$.

证明规则 7.

令A、B为逻辑理论M的公式，则$B \Rightarrow (A或B)$是M的定理.

证明：根据公理模式2，$B \Rightarrow (B或A)$是定理，根据公理模式3，$(B或A) \Rightarrow (A或B)$，根据证明规则6，$B \Rightarrow (A或B)$.

证明规则 8. 排中律之一

令A为逻辑理论M的公式，则$A \Rightarrow A$是M的定理.

证明：根据公理模式1，$(A或A) \Rightarrow A$，根据2，$A \Rightarrow (A或A)$，根据证明规则6，$A \Rightarrow A$.

证明规则 9.

令A为逻辑理论M的公式，B为M的定理，则$A \Rightarrow B$是M的定理.

证明：根据证明规则7，$B \Rightarrow (非A或B)$，即$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

又因为B是定理，根据证明规则1，$A \Rightarrow B$是定理.

证明规则 10. 排中律之二

令A为逻辑理论M的公式，则“$A或(非A)$”是M的定理.

证明：根据证明规则8，非A或A，根据公理模式2，非A或$A \Rightarrow A$或(非A)，根据证明规则1，A或(非A).

证明规则 11.

令A为逻辑理论M的公式，则$A \Rightarrow (非(非A))$是M的定理.

证明：根据证明规则8，$(非A)或(非(非A))$，即$A \Rightarrow (非(非A))$.

证明规则 12. 逆否命题和原命题等价之一

令A、B为逻辑理论M的公式，则$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (非B \Rightarrow 非A)$是$M$的定理.

证明：

根据证明规则11，$B \Rightarrow 非(非B)$；

根据公理模式4，$(B \Rightarrow 非(非B)) \Rightarrow ((非A或B) \Rightarrow (非A或非(非B))$；

根据证明规则6，$(非A或B) \Rightarrow (非A或非(非B))$；

根据公理模式3，$(非A或非(非B)) \Rightarrow (非(非B)或非A)$；

根据证明规则1，$(非A或B) \Rightarrow (非(非B)或非A)$，即$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (非B \Rightarrow 非A)$.

证明规则 13.

令A、B、C为逻辑理论M的公式，$A \Rightarrow B$是M的定理，则$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$是$M$的定理.

证明：

根据证明规则12，$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((非B) \Rightarrow (非A))$；

根据证明规则1，$(非B) \Rightarrow (非A)$；

根据公理模式4，$((非B) \Rightarrow (非A)) \Rightarrow ((C或非B) \Rightarrow (C或非A))$；

根据证明规则1，$(C或非B) \Rightarrow (C或非A)$；

根据公理模式3，$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (C或非B)$，$(C或非A) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$；

根据证明规则6，$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

证明规则 14. 辅助假设，演绎定理

令A为逻辑理论M的公式，M'为M加上公理A组成的理论，如果B是M'的定理，则$A \Rightarrow B$是M的定理.

证明：令公式B_1、B_2、$\cdots$、B_n为包含B的证明.

B_1为M的公理或者A本身，如果B_1为M的公理，根据补充证明规则1、证明规则9，$A \Rightarrow B_1$；如果B_1为A本身，根据证明规则8，$A \Rightarrow B_1$. 故命题对B_1成立. 设对任意$k < i-1$，有$A \Rightarrow B_k$，以下证明$A \Rightarrow B_i$：

若B_i是M'的公理，则B_i为M的公理或者A本身，如果B_i为M的公理，根据补充证明规则1、证明规则9，$A \Rightarrow B_i$；如果B_i为A本身，根据证明规则8，$A \Rightarrow B_i$.

若B_i不是M'的公理，则之前存在两个公式B_j和$B_j \Rightarrow B_i$，它们均为M的定理；

根据归纳假设，$A \Rightarrow B_j$和$A \Rightarrow (B_j \Rightarrow B_i)$都是$M$的定理；

根据证明规则13，$(B_j \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$是$M$的定理；

根据证明规则6，$A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$，即非$A$或$(A \Rightarrow B_i)$是$M$的定理.

根据公理模式3，$(A \Rightarrow B_i)$或非A是M的定理.

根据公理模式2，非$A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$是$M$的定理.

根据公理模式4，$((A \Rightarrow B_i)$或非$A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i)$或$(A \Rightarrow B_i))$是$M$的定理；

根据证明规则1，$(A \Rightarrow B_i)$或$(A \Rightarrow B_i)$是M的定理，根据公理模式1、证明规则1，$A \Rightarrow B_i$是M的定理.

综上，得证.

证明规则 15. 反证法

令A为逻辑理论M的公式，M'为M加上公理“非A”组成的理论，如果M'有矛盾，则A是M的定理.

证明：

由于M'有矛盾，根据补充证明规则1，A是M'的定理.

根据证明规则14，非$A \Rightarrow A$是M的定理.

根据公理模式4，$(A$或非$A) \Rightarrow (A$或$A)$是M的定理.

根据证明规则10，“A或A”是M的定理.

根据公理模式1，A是M的定理.

证明规则 16.

令A为逻辑理论M的公式，则$($非$($非$A)) \Rightarrow A$是M的定理.

证明：假设“非(非A)”为真，而A为假，即“非A”为真. “非A”和“非(非A)”同时为真，矛盾，得证.

注：

上述证明系运用证明规则14和证明规则15做出的简化表述．完整的表述是：

将“非(非A)”作为公理加入M得到理论M'，再加入公理“非A”得到理论M''，此时理论M''中，“非(非A)”同时为真也为假，根据证明规则15，A是理论M'的定理，根据证明规则则14，(非(非A)) $\Rightarrow$ A是理论M的定理．

以下证明中，如果运用证明规则14或证明规则15，也同样使用简化表述．

证明规则 17. 逆否命题与原命题等价之二

令A、B为逻辑理论M的公式，则(非$B \Rightarrow$ 非A) $\Rightarrow$ $(A \Rightarrow B)$是M的定理．

证明：假设非$B \Rightarrow$ 非A、A为真，B为假，即非B为真，则非A为真，矛盾，得证．

证明规则 18. 分情况讨论

令A、B、C为逻辑理论M的公式，如果A或B、$A \Rightarrow C$、$B \Rightarrow C$都是M的定理，则C是M的定理．

证明：根据公理模式4，(A或B) $\Rightarrow$ (A或C)、(C或A) $\Rightarrow$ (C或C)，再根据公理模式1、公理模式3得证．

证明规则 19. 辅助常数

令x为字母，A、B为逻辑理论M的公式，其中，x不是论M的常数，B也不包含x，并且存在M的项T，使$(T|x)A$为定理，那么，令M'为M加上公理A组成的理论，如果B是M'的定理，则B是M的定理．

证明：根据证明规则14，$A \Rightarrow B$是M的定理，根据证明规则3，$(T|x)(A \Rightarrow B)$是M的定理．由于B不包含x，根据替代规则3，$(T|x)(A \Rightarrow B)$和$((T|x)A) \Rightarrow B$相同，又因为$(T|x)A$是M的定理，因此B是M的定理．

注：只要$(\exists x)R$（即$(\tau_x(R)|x)R$）是定理，就可以运用添加辅助常数的方法．

记号定义 8. 合取（*conjonction*）

令A、B为语句，x为字母，则用“A与B”表示“非((非A)或(非B))”（第四优先级）．

替代规则 6.

令A、B、T为语句，x为字母，则$(T|x)(A$与$B)$和$((T|x)A$与$(T|x)B)$相同．

证明：A与B即非((非A)或(非B))，根据替代规则5可证．

形成规则 9.

如果A、B是理论M的公式，则A与B也是理论M的公式．

证明：根据形成规则1、形成规则2可证．

证明规则 20.

令A、B为逻辑理论M的定理，则“A与B”也是M的定理．

证明：假设“A与B”为假，则“非非((非A)或(非B))”，根据证明规则16，“非A或非B”，即“$A \Rightarrow$ 非B”，又因为A为真，故“非B”为真，和B为真矛盾，得证.

证明规则 21.

令A、B为逻辑理论M的公式，则$(A$与$B) \Rightarrow A$和$(A$与$B) \Rightarrow B$是M的定理.

证明：

根据公理模式2、证明规则7，非$A \Rightarrow$ (非A或非B)，非$B \Rightarrow$ (非A或非B).

根据证明规则11，(非A或非B) $\Rightarrow$ 非(A与B).

根据证明规则6，非$A \Rightarrow$ 非(A与B)，非$B \Rightarrow$ 非(A与B).

根据证明规则17，$(A$与$B) \Rightarrow A$，$(A$与$B) \Rightarrow B$.

记号定义 9. 等价（*équivalence*）

令A、B为语句，x为字母，则用“$A \Leftrightarrow B$”表示“$(A \Rightarrow B)$与$(B \Rightarrow A)$ ”（第五优先级）.

替代规则 7.

令A、B、T为语句，x为字母，则$(T|x)(A \Leftrightarrow B)$和$((T|x)A \Leftrightarrow (T|x)B)$相同.

证明：$A \Leftrightarrow B$即$(A \Rightarrow B)$与$(B \Rightarrow A)$，根据替代规则5、替代规则6可证.

形成规则 10.

如果A、B是理论M的公式，则$A \Leftrightarrow B$也是理论M的公式.

证明：根据形成规则5、形成规则9可证.

补充证明规则 3. 等价的反身性

令A为逻辑理论M的公式，则$A \Leftrightarrow A$是M的定理.

证明：根据证明规则8可证.

证明规则 22. 等价的对称性和传递性

（*1*）令A、B为逻辑理论M的公式，如果$A \Leftrightarrow B$是M的定理，则$B \Leftrightarrow A$是M的定理.

（*2*）令A、B、C为逻辑理论M的公式，如果$A \Leftrightarrow B$和$B \Leftrightarrow C$是M的定理，则$A \Leftrightarrow C$是M的定理.

证明：

（1）根据证明规则21，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$，根据证明规则20，$(B \Rightarrow A)$与$(A \Rightarrow B)$，即$B \Leftrightarrow A$.

（2）根据证明规则21、证明规则6可证.

补充证明规则 4.

令A为逻辑理论M的定理，则$B \Leftrightarrow (A$与$B)$和$B \Leftrightarrow (B$与$A)$是M的定理.

证明：假设B为真，根据证明规则20，A与B、B与A均为真，根据证明规则9，$B \Rightarrow (A与B)$、$B \Rightarrow (B与A)$．再根据证明规则21可证．

证明规则 23.

令A、B、C为逻辑理论M的公式，如果$A \Leftrightarrow B$是M的定理，则下列公式都是M的定理：

（*1*）$(非A) \Leftrightarrow (非B)$；

（*2*）$(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$；

（*3*）$(C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$；

（*4*）$(A与C) \Leftrightarrow (B与C)$；

（*5*）$(A或C) \Leftrightarrow (B或C)$．

证明：

（1）因为$A \Leftrightarrow B$，根据证明规则21、根据证明规则1，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$．根据证明规则12，$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (非B \Rightarrow 非A)$、$(B \Rightarrow A) \Rightarrow (非A \Rightarrow 非B)$．根据证明规则20可证．

（2）因为$A \Leftrightarrow B$，根据证明规则21、根据证明规则1，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$．若$A \Rightarrow C$，根据证明规则6，$B \Rightarrow C$．反过来，若$B \Rightarrow C$，根据证明规则6，$A \Rightarrow C$．根据证明规则20可证．

（3）类似证明规则23（2）可证．

（4）因为$A \Leftrightarrow B$，根据证明规则21、根据证明规则1，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$．根据证明规则21，$(A与C) \Rightarrow C$、$(A与C) \Rightarrow A$．根据证明规则6，$(A与C) \Rightarrow B$．根据证明规则20，$(A与C) \Rightarrow (B与C)$．同理可证$(B与A) \Rightarrow (A与C)$．根据证明规则20可证．

（5）因为$A \Leftrightarrow B$，根据证明规则21、根据证明规则1，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$．根据公理模式4，$(C或A) \Rightarrow (C或B)$、$(C或B) \Rightarrow (C或A)$．根据公理模式3、证明规则6，$(A或C) \Rightarrow (B或C)$、$(B或C) \Rightarrow (A或C)$．根据证明规则20可证．

证明规则 24.

令A、B、C为逻辑理论M的公式，则下列公式都是M的定理：

（*1*）$(非(非A)) \Leftrightarrow A$；

（*2*）$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((非B) \Rightarrow (非A))$；

（*3*）$(A与A) \Leftrightarrow A$；

（*4*）$(A与B) \Leftrightarrow (B与A)$；

（*5*）$(A与(B与C)) \Leftrightarrow ((A与B)与C)$；

（*6*）$(A或B) \Leftrightarrow (非((非A)与(非B)))$；

（*7*）$(A或A) \Leftrightarrow A$；

（*8*）$(A或B) \Leftrightarrow (B或A)$；

（*9*）$(A或(B或C)) \Leftrightarrow ((A或B)或C)$；

（*10*）$(A与(B或C)) \Leftrightarrow ((A与B)或(A与C))$；

（*11*）$(A或(B与C)) \Leftrightarrow ((A或B)与(A或C))$；

（*12*）$(A与(非B)) \Leftrightarrow (非(A \Rightarrow B))$；

（*13*）$(A或B) \Leftrightarrow ((非A) \Rightarrow B)$.

证明：

（1）根据证明规则11、证明规则16、证明规则20可证.

（2）根据证明规则12、证明规则17、证明规则20可证.

（3）根据证明规则20、证明规则21可证.

（4）根据公理模式3、、证明规则20，非A或非$B \Leftrightarrow$ 非B或非A，根据证明规则23（1）可证.

（5）若A与$(B$与$C)$，根据证明规则21，A、B、C均为真，根据证明规则20，$(A$与$B)$与C．反之亦然．根据证明规则20可证.

（6）根据证明规则24（1），非非$A \Leftrightarrow A$，非非$B \Leftrightarrow B$．根据证明规则23（5），"非非A或非非$B \Leftrightarrow A$或B"．根据证明规则23，非非(非非A或非非$B) \Leftrightarrow A$或B，即$(A$或$B)$ $\Leftrightarrow$ (非((非A)与(非B))).

（7）根据公理模式1、公理模式2、证明规则20可证.

（8）根据公理模式3、证明规则20可证.

（9）根据证明规则24（1）、证明规则24（2）、证明规则23（5），$(A$或$B)$或$C \Leftrightarrow$ 非$C \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$)，A或$(B$或$C) \Leftrightarrow$ 非$A \Rightarrow$ (非$C \Rightarrow B$).

若非$C \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$)、非A、非C为真，根据证明规则6，B为真，即(非$C \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow$ B)) $\Rightarrow$ (非$A \Rightarrow$ (非$C \Rightarrow B$)).

反过来，若非$A \Rightarrow$ (非$C \Rightarrow B$)、非C、非A为真，根据证明规则6，B为真，即(非$A \Rightarrow$ (非$C \Rightarrow B$)) $\Rightarrow$ (非$C \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$)).

综上，根据证明规则20得证.

（10）假设A与$(B$或$C)$，根据证明规则21，A、B或C为真，即非$B \Rightarrow C$．假设$A \Rightarrow$ 非B，则非B为真，根据证明规则6，C为真，根据证明规则20，A与C为真，即A与$(B$或$C)$ $\Rightarrow ((A \Rightarrow$ 非$B) \Rightarrow (A$与$C))$，即A与$(B$或$C) \Rightarrow ((A$与$B)$或$(A$与$C))$.

反过来，若$(A$与$B)$或$(A$与$C)$，即(非A或非$B) \Rightarrow (A$与$C)$，根据证明规则21，(非A或非$B) \Rightarrow A$、(非A或非$B) \Rightarrow C$．假设非A为真，根据公理模式1，(非A或非B)，所以A为真，矛盾．故A为真．由于(非A或非$B) \Rightarrow C$，假设非B，则C为真，即非$B \Rightarrow C$为真，根据证明规则23（5）、证明规则24（1），B或C．由于A、B或C为真，根据证明规则20，A与$(B$或$C)$.

综上，根据证明规则20得证.

（11）根据证明规则21，$(B$与$C) \Rightarrow B$，根据公理模式4，A或$(B$与$C) \Rightarrow A$或B，同理A或$(B$与$C) \Rightarrow A$或C，根据证明规则20，A或$(B$与$C) \Rightarrow (A$或$B)$与$(A$或$C)$.

反过来，假设$(A或B)$与$(A或C)$，根据证明规则21，$A或B$、$A或C$，即非$A \Rightarrow B$、非$A \Rightarrow C$，根据证明规则20，非$A \Rightarrow (B与C)$，即$A或(B与C)$．因此，$(A或B)与(A或C) \Rightarrow A或(B与C)$，得证．

（12）根据证明规则24（1）、证明规则23（2）可证．

（13）根据证明规则24（1）、证明规则23（5）可证．

证明规则 25.

（*1*）如果A为逻辑理论M的定理，B为M的公式，则$(A与B) \Leftrightarrow B$是M的定理．

（*2*）如果(非A)为逻辑理论M的定理，B为M的公式，则$(A或B) \Leftrightarrow B$是M的定理．

证明：

（1）根据证明规则21，$(A与B) \Rightarrow B$．根据补充证明规则4，$B \Rightarrow (A与B)$，故$(A与B) \Leftrightarrow B$是逻辑理论M的定理．

（2）根据证明规则25（1），非A与非$B \Leftrightarrow$ 非B，根据证明规则23（1），非(非A与非B) $\Leftrightarrow$ 非(非B)，根据证明规则24（1）、证明规则23（1），$(A或B) \Leftrightarrow B$．

补充证明规则 5.

令A、B、C、D为逻辑理论M的公式，则以下公式都是M的定理：

（*1*）$((A \Rightarrow B)与(C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A或C) \Rightarrow (B或D))$；

（*2*）$((A \Leftrightarrow B)与(C \Leftrightarrow D)) \Rightarrow ((A或C) \Leftrightarrow (B或D))$；

（*3*）$((A \Rightarrow B)与(C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A与C) \Rightarrow (B与D))$；

（*4*）$((A \Leftrightarrow B)与(C \Leftrightarrow D)) \Rightarrow ((A与C) \Leftrightarrow (B与D))$；

（*5*）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A或C) \Rightarrow (B或C))$；

（*6*）$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A或C) \Leftrightarrow (B或C))$；

（*7*）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A与C) \Rightarrow (B与C))$；

（*8*）$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A与C) \Leftrightarrow (B与C))$；

（*9*）$A \Leftrightarrow (A或A)$；

（*10*）$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A或B) \Rightarrow C))$；

（*11*）$(A或B) \Leftrightarrow (B或A)$；

（*12*）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B与C)))$；

（*13*）$(A与非A) \Rightarrow B$；

（*14*）$B或(A与非A) \Leftrightarrow B$；

（*15*）$B或(A与非A与C) \Leftrightarrow B$；

（*16*）$(A与B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A与非C \Rightarrow 非B)$．

证明：

（1）$G((A \Rightarrow B)与(C \Rightarrow D))$，根据证明规则21，$A \Rightarrow B$、$C \Rightarrow D$，根据公理模式4、公理模式2、公理模式3，$(A或C) \Rightarrow (C或A)$、$(C或A) \Rightarrow (C或B)$、$(C或B) \Rightarrow (B或C)$、$(B或C) \Rightarrow (B或D)$，根据证明规则6可证．

（2）根据补充证明规则5（1）、证明规则20可证.

（3）假设$(A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow D)$，根据证明规则21，$A \Rightarrow B$、$C \Rightarrow D$，根据证明规则12，非$B \Rightarrow$ 非A，非$D \Rightarrow$ 非C，根据公理模式4、公理模式2、公理模式3、证明规则6，(非B或非$D) \Rightarrow$ (非A或非C)，根据证明规则12，(A与$C) \Rightarrow (B$与$D)$.

（4）根据补充证明规则5（3）、证明规则20可证.

（5）根据证明规则8，$C \Rightarrow C$，根据证明规则20、证明规则21，$(A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$，根据补充证明规则5（1）可证.

（6）根据证明规则8、证明规则20，$C \Leftrightarrow C$，根据证明规则20、证明规则21，$(A \Leftrightarrow B)$与$(C \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$，根据补充证明规则5（2）可证.

（7）根据证明规则8，$C \Rightarrow C$，根据证明规则20、证明规则21，$(A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$，根据补充证明规则5（3）可证.

（8）根据证明规则8、证明规则20，$C \Leftrightarrow C$，根据证明规则20、证明规则refC21，$(A \Leftrightarrow B)$与$(C \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$，根据补充证明规则5（4）可证.

（9）根据公理模式1、公理模式2、证明规则20可证.

（10）根据证明规则14、证明规则18可证.

（11）根据公理模式3、证明规则20可证.

（12）假设$A \Rightarrow B$、$A \Rightarrow C$、A为真，则B、C均为真，根据证明规则20，B与C，得证.

（13）根据证明规则11、证明规则16，((A与非$A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$或非$A$或$B$. 根据证明规则10、公理模式2，$A$或非$A$或$B$，得证.

（14）根据公理模式1，$B \Rightarrow B$或(A与非A)，根据证明规则18、补充证明规则5（13），B或(A与非$A) \Rightarrow B$，得证.

（15）根据公理模式1，$B \Rightarrow B$或(A与非A与C). 根据证明规则21，(A与非A与$C) \Rightarrow$ (A与非A)，根据补充证明规则5（14），B或(A与非A与$C) \Rightarrow B$，得证.

（16）根据证明规则24（1）、证明规则23（5），(A与$B \Rightarrow C) \Leftrightarrow$ 非A或非B或C、(A与非$C \Rightarrow$ 非$B) \Leftrightarrow$ 非A或C或非B，根据证明规则24（8）、证明规则24（9）可证.

习题 8.

令A、B、C为逻辑理论M的公式，求证：

（1）$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

（2）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

（3）$A \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$);

（4）(A或$B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$;

（5）$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow$ ((A与B)或(非A与非B));

（6）非((非$A) \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$;

（7）$(A \Rightarrow$ (B或(非C))) $\Leftrightarrow$ ((C与$A) \Rightarrow B$);

（*8*）$(A\Rightarrow(B\text{或}C))\Leftrightarrow(B\text{或}(A\Rightarrow C))$；

（*9*）$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow(B\text{与}C)))$；

（*10*）$(A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow((A\text{或}B)\Rightarrow C))$；

（*11*）$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\text{与}C)\Rightarrow(B\text{与}C))$；

（*12*）$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\text{或}C)\Rightarrow(B\text{或}C))$；

证明：

（1）假设A为真，根据证明规则9，$B\Rightarrow A$，故$A\Rightarrow(B\Rightarrow A)$.

（2）假设$A\Rightarrow B$、$B\Rightarrow C$，根据证明规则6，$A\Rightarrow C$，故$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C))$.

(3）假设A、非非A为真，则"非非A或B"为真，即非$A\Rightarrow B$，因此$A\Rightarrow(\text{非}A\Rightarrow B)$.

（4）假设A或B、$A\Rightarrow B$，又因为$B\Rightarrow B$，根据证明规则18，$(A\text{或}B)\Rightarrow((A\Rightarrow B)\Rightarrow B)$；假设$(A\Rightarrow B)\Rightarrow B$，即非(非$A$或$B$)或$B$．根据证明规则23，非(非$A$或$B$) $\Leftrightarrow$ 非(非A或非非B)，即(A与非B)或B，根据证明规则21，A与非$B\Rightarrow A$，根据公理模式2、证明规则6 A与非$B\Rightarrow A$或B．根据证明规则7，$B\Rightarrow(A\text{或}B)$，根据证明规则18，$((A\Rightarrow B)\Rightarrow B)\Rightarrow(A\text{或}B)$，得证.

（5）若$A\Leftrightarrow B$，则$((A\text{与}B)\text{或}(\text{非}A\text{与非}B))\Leftrightarrow A$或非$A$，根据证明规则10，
$((A\text{与}B)\text{或}(\text{非}A\text{与非}B))$．反过来，若$(A\text{与}B)\text{或}(\text{非}A\text{与非}B)$，假设$A$为真，根据证明规则25（2），$B$或(非$A$与非$B$)，即非($A$或$B$)或$B$，即$(A\text{或}B)\Rightarrow B$．又因为$A$为真，根据公理模式2，$A$或$B$，因此$B$为真，因此，$A\Rightarrow B$，同理可证$B\Rightarrow A$，故$A\Leftrightarrow B$.

（6）$(\text{非}A)\Rightarrow B$即(非非A)或B，根据证明规则16、证明规则23（5），(非非A)或$B\Leftrightarrow$ A或B．而$B\Rightarrow(\text{非}A)$，即非B或非A.

根据证明规则20，$((\text{非}A)\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\text{或}B)\text{与}(\text{非}A\text{或非}B)$．根据证明规则23（10），非$((\text{非}A)\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\text{与非}A)\text{或}(A\text{与非}B)\text{或}(B\text{与非}A)\text{或}(B\text{与非}B)$，进而，根据证明规则23（10）、公理模式2、证明规则24（4），非$((\text{非}A)\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow((\text{非}A\text{或}B)\text{与}(\text{非}B\text{或}A))$，即
"非$((\text{非}A)\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\Leftrightarrow B)$".

（7）$A\Rightarrow(B\text{或}(\text{非}C))$即非$A$或($B$或非$C$)，$(C\text{与}A)\Rightarrow B$即(非非(非$C$或非$A$))或$B$，根据证明规则24（1）、证明规则24（8）、证明规则24（9）可证.

（8）$A\Rightarrow(B\text{或}C)$即非A或(B或C)，B或$(A\Rightarrow C)$即B或(非A或C),、证明规则24（8）、证明规则24（9）可证.

（9）即补充证明规则5（12）.

（10）即补充证明规则5（10）.

(11）假设$A\Rightarrow B$，A与C，根据证明规则21，A、C为真，则B为真，根据证明规则20，B与C，得证.

（12）根据公理模式4、公理模式3可证.

习题 9.

A为逻辑理论M的公式，$A \Leftrightarrow$ 非A是M的定理，求证：M存在矛盾.

证明：

$A \Rightarrow$ 非A，即非A或非A，根据公理模式1，"非AÆ为真.

非$A \Rightarrow A$，即非非A或真，根据证明规则24（1）、证明规则23（5），A或A，根据公理模式1，A为真.

故M存在矛盾.

习题 10.

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为逻辑理论M的公式，求证：

（1）要证明A_1或A_2或$\cdots$或A_n，只需要在M添加显式公理非A_1、非A_2、$\cdots$、非A_{n-1}得到的理论M'中，证明A_n即可.

（2）若A_1或A_2或$\cdots$或A_n是M的定理，要证明A是M的定理，只需要证明$A_1 \Rightarrow A$、$A_2 \Rightarrow A$、$\cdots$、$A_n \Rightarrow A$即可.

证明：

（1）对n用数学归纳法：

n=2时，根据证明规则14，"非非A_1或A_2"是M的定理，根据证明规则24（1）、证明规则23（5），A_1或A_2是M的定理.

假设命题对$n = i$成立，当$n = i+1$时，令添加公理非A_1、非A_2、$\cdots$、非A_{i-1}得到的理论为M'，再添加公理非A_i得到的理论为M''，根据证明规则14、证明规则24（1）、证明规则23（5），若M''中Ai_1为真，则M'中A_i或A_{i+1}为真，因此M中的A_1或A_2或$\cdots$或A_{i-1}或(A_i或A_{i+1}为真，根据证明规则24（9），可证.

（2）对n用数学归纳法，根据证明规则18可证.

习题 11.

A、B为逻辑理论M的公式，令$A|B$表示(非A或非B)，求证：

（1）非$A \Leftrightarrow (A|A)$;

（2）$(A$或$B) \Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$;

（3）$(A$与$B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$;

（4）$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A|(B|B))$.

证明：

（1）根据补充证明规则5（9）可证.

（2）根据习题11（1），(非非A)或(非非B) $\Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$，根据证明规则23（5）、证明规则24（1）可证.

（3）根据习题11（1），非$(A|B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$，即$(A$与$B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$.

（4）根据习题11（1），$(A|$非$B) \Leftrightarrow (A|(B|B))$，根据证明规则23（5）、证明规则24（1）可证.

注：

习题11中的连接词“|”仅在该题中使用，和替代记号“|”不可混淆.

习题11表明，连接词“|”具有完全性.

习题 12.

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为逻辑理论M的显式公理，求证：当且仅当符号和公理模式与M相同、显式公理为A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}、非A_n的理论没有矛盾时，A_n是独立的显式公理.

证明：

令理论M'为符号和公理模式与M相同、显式公理为A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}的理论，理论M''为符号和公理模式与M相同、显式公理为A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}、非A_n的理论.

假设A_n不独立，则M'与M等价，故A_n是M'的定理. 由于M''比M'强，根据证明规则4，A_n是M''的定理，因此M''有矛盾.

假设M''有矛盾，根据证明规则15，A_n是M'的定理，故M'和M等价，即A_n不独立. 综上，得证.

1.4 量词理论（Théories quantifiées）

记号定义 10. 量词（*quantificateur*）

令A、R为语句，x为字母，则用“$(\exists x)R$”表示“$(\tau_x(R)|x)R$”，用“$(\forall x)R$”表示“非$((\exists x)(\text{非}R))$”.

替代规则 8.

令R为语句，x、x'为字母，如果R不包含x'，则$(\exists x)R$、$(\forall x)R$分别和$(\exists x')R'$、$(\forall x')R'$相同，其中R'为$(x'|x)R$.

证明：根据替代规则1，$(\exists x)R$和$(\tau_x(R)|x')R'$相同，根据替代规则3，$\tau_x(R)$和$\tau x'(R')$相同，故$(\exists x)R$和$(\exists x')R'$相同. 同理并结合替代规则5，可证$(\forall x)R$和$(\forall x')R'$相同.

替代规则 9.

令R、U为语句，x、y为字母，如果U不包含x，则$(U|y)(\exists x)R$、$(U|y)(\forall x)R$分别和$(\exists x)R'$、$(\forall x)R'$相同，其中R'为$(U|y)R$.

证明：根据替代规则2，$(U|y)(\exists x)R$和$(T|x)(U|y)R$相同，其中T为$(U|y)\tau_x(R)$，根据替代规则4，$(T|x)(U|y)R$和$(\exists x)R'$相同. 同理可证$(U|y)(\forall x)R$和$(\forall x)R'$相同.

形成规则 11.

如果R是理论M的公式，x为字母，则$(\exists x)R$和$(\forall x)R$也是理论M的公式.

证明：根据形成规则3、形成规则8、形成规则2，可证.

证明规则 26.

令R为逻辑理论M的公式，x为字母，则$(\forall x)R \Leftrightarrow (\tau_x(\text{非}R)|x)R$是$M$的定理.

证明：根据替代规则5，$(\forall x)R$即"非非$(\tau_x(\text{非}R)|x)R$"，得证.

证明规则 27.

令R为逻辑理论M的定理，x为不是常数的字母，则$(\forall x)R$是M的定理.

证明：根据证明规则26，$(\forall x)R \Leftrightarrow (\tau_x(\text{非}R)|x)R$，得证.

证明规则 28.

令R为逻辑理论M的公式，x为字母，则$(\text{非}((\forall x)R)) \Leftrightarrow (\exists x)(\text{非}R)$是$M$的定理.

证明：$(\text{非}((\forall x)R))$即"非非$(\tau_x(\text{非}R)|x)(\text{非}R)$"，得证.

补充替代规则 6.

"令R为公式，x为字母，T为项，则$(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$是公理"是公理模式.

证明：

以下证明$(U|y)((T|x)R \Rightarrow (\exists x)R)$也是该规则产生的公式：

若U不包含x且x、y不同，根据替代规则2、替代规则9，$(T|x)(U|y)R \Rightarrow (\exists x)(U|y)R$和明$(U|y)((T|x)R \Rightarrow (\exists x)R)$相同.

若U包含x或x、y相同，则令R'为$(x'|x)R$，其中x'为与y不同的字母且U不包含x'，根据替代规则1、替代规则8及上述结论，得证.

公理模式 5.

令R为公式，x为字母，T为项，则$(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$是公理.

元数学定义 21. 量词理论（*théorie quantifiée*）

包含公理模式5的逻辑理论，称为量词理论.

证明规则 29.

令R为量词理论M的公式，x为字母，则"非$((\exists x)R) \Leftrightarrow (\forall x)(\text{非}R)$"是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

由于$R \Leftrightarrow$ 非非R，根据证明规则3，$(\exists x)R \Rightarrow (\tau_x(R)|x)(\text{非非}R)$、$(\exists x)(\text{非非}R) \Rightarrow (\tau_x(\text{非非}R)|x)R$.

根据公理模式5，$(\tau_x(R)|x)(\text{非非}R) \Rightarrow (\exists x)(\text{非非}R)$、$(\tau_x(\text{非非}R)|x)R \Rightarrow (\exists x)R$.

故$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)(\text{非非}R)$.

又因为$(\exists x)(\text{非非}R) \Leftrightarrow$ 非非$(\exists x)(\text{非非}R)$，后者即非$(\forall x)(\text{非}R)$，因此非$((\exists x)R)) \Leftrightarrow (\forall x)(\text{非}R)$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

注：如果已知条件中不包括任何含常数的定理，可以用这种方法. 从而，在证明过程中，可以运用“字母不是常数”的条件.

证明规则 30.

令R为量词理论M的公式，T为M的项，x为字母，则$(\forall x)R \Rightarrow (T|x)R$是$M$的定理.

证明：根据公理模式5，$(T|x)(非R) \Rightarrow (\exists x)非R$，即非$(T|x)R \Rightarrow$ 非$(\tau_x(非R)|x)R$，因此$\tau_x(非R)|x)R \Rightarrow (T|x)R$，根据证明规则26，得证.

补充证明规则 6.

x不是量词理论M的常数，则当且仅当R为M的定理时，$(\forall x)R$为M的定理.

证明：根据证明规则30、证明规则27可证.

证明规则 31.

令R、S为量词理论M的公式，x为字母，并且x不是量词理论M的常数. 如果$R \Rightarrow S$是M的定理，则$(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$和$(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$也是$M$的定理；如果$R \Leftrightarrow S$是$M$的定理，则$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$和$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$也是$M$的定理.

证明：

如果$R \Rightarrow S$，假设$(\forall x)R$为真，根据证明规则30，R为真，因此S为真，根据证明规则27，$(\forall x)S$为真，故$(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$.

如果$R \Rightarrow S$，则非$S \Rightarrow$ 非R，根据上述结论故$(\forall x)(非R) \Rightarrow (\forall x)(非S)$，根据证明规则29，非$(\exists x(S)) \Rightarrow$ 非$(\exists x(R))$，故$(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$.

根据上述结论可证，如果$R \Leftrightarrow S$是量词理论M的定理，则$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$和$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$.

证明规则 32.

令R、S为量词理论M的公式，x为字母，则$(\forall x)(R与S) \Leftrightarrow ((\forall x)R)与((\forall x)S)$，$(\exists x)(R或S) \Leftrightarrow ((\exists x)R)或((\exists x)S)$是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

若$(\forall x)(R与S)$为真，根据补充证明规则4，R与S为真，即R、S为真，根据补充证明规则4，$((\forall x)R)与((\forall x)S)$为真. 反之亦然. 根据证明规则29，$(\exists x)(R或S) \Leftrightarrow ((\exists x)R)或((\exists x)S)$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

证明规则 33.

令R、S为量词理论M的公式，x为字母，并且R不包含x，则$(\forall x)(R或S) \Leftrightarrow (R或(\forall x)S)$和$(\exists x)(R与S) \Leftrightarrow (R与(\exists x)S)$是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

R或S即非$R \Rightarrow S$，将非R作为公理添加到M_0，则S是定理，根据证明规则27，$(\forall x)S$是定理，因此，非$R \Rightarrow (\forall x)S$，即$R$或$(\forall x)S$．反之亦然．

根据证明规则29，$(\exists x)(R$与$S) \Leftrightarrow (R$与$(\exists x)S)$．

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立．

证明规则 34.

令R为量词理论M的公式，x、y为字母，则以下公式都是M的定理：

（*1*）$(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)R$;

（*2*）$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)R$;

（*3*）$(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\forall y)(\exists x)R$;

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

若$(\forall x)(\forall y)R$，根据证明规则30，R为真，根据证明规则27，$(\forall y)(\forall x)R$，反之依然，即第一式成立．

根据证明规则29，可证第二式．

根据证明规则31，证明规则30，$(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\exists x)R$，若$(\exists x)(\forall y)R$，则$(\exists x)R$，根据证明规则27，$(\forall y)(\exists x)R$，第三式得证．

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立．

记号定义 11. 类别量词（*quantificateur typique*）

令A、R为语句，x为字母，则用“$(\exists_A x)R$”表示“$(\exists x)(A$与$R)$”，用“$(\forall_A x)R$”表示“非$((\exists_A x)($非$R))$”．

注：原书很少使用类别量词．

替代规则 10.

令A、R为语句，x、x'为字母，如果R不包含x'，则$(\exists_A x)R$、$(\forall_A x)R$分别和$(\exists_{A'} x')R'$、$(\forall_{A'} x')R'$相同，其中R'为$(x'|x)R$，A'为$(x'|x)A$．

证明：根据替代规则8、替代规则5、替代规则6可证．

替代规则 11.

令A、R、U为语句，x、y为字母，如果U不包含x，则$(U|y)(\exists_A x)R$、$(U|y)(\forall_A x)R$分别和$(\exists_{A'} x)R'$、$(\forall_{A'} x)R'$相同，其中R'为$(U|y)R$，A'为$(x'|x)A$．

证明：根据替代规则9、替代规则5、替代规则6可证．

形成规则 12.

如果A、R是理M的公式，x为字母，则$(\exists_A x)R$和$(\forall_A x)R$也是理论M的公式.

证明：根据形成规则11、形成规则9、形成规则2，可证.

证明规则 35.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，则$(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall x)(A \Rightarrow R)$是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

$(\forall_A x)R$即非$(\exists x)(A$与非$R)$，又因为$(A$与非$R) \Leftrightarrow ($非$(A \Rightarrow R))$，根据证明规则31，$(\forall_A x)R \Leftrightarrow$ 非$(\exists x)($非$(A \Rightarrow R))$，即$(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall x)(A \Rightarrow R)$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

证明规则 36.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，M'为量词理论M加上公理A组成的量词理论，如果x不是M的常数，并且R是量词理论M'的定理，则$(\forall_A x)R$是M的定理.

证明：在理论M中，$A \Rightarrow R$，根据证明规则27、证明规则35可证.

证明规则 37.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，M'为理论M加上公理A与$($非$R)$组成的理论，如果x不是M的常数，并且M'有矛盾，则$(\forall_A x)R$是量词理论M的定理.

证明：M'即M加入公理(非$(A \Rightarrow$ 非非$R))$得到的理论，因此$A \Rightarrow ($非非$R)$是M的定理，故$A \Rightarrow R$，根据证明规则27、证明规则35可证.

证明规则 38.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，则(非$(\exists_A x(R))) \Leftrightarrow (\forall_A x)($非$R)$和(非$(\forall_A x(R))) \Leftrightarrow (\exists_A x)($非$R)$都是$M$的定理.

证明：类似证明规则29可证.

证明规则 39.

令A、R、S为量词理论M的公式，x为字母，并且x不是量词理论M的常数. 如果$A \Rightarrow (R \Rightarrow S)$是$M$的定理，则$(\forall_A x)R \Rightarrow (\forall_A x)S$和$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists_A x)S$也是$M$的定理；如果$A \Rightarrow (R \Leftrightarrow S)$是$M$的定理，则$(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)S$和$(\exists_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)S$也是$M$的定理.

证明：类似证明规则31可证.

证明规则 40.

令A、R、S为量词理论M的公式，x为字母，则$(\forall_A x)(R$与$S) \Leftrightarrow ((\forall_A x)R)$与$((\forall_A x)S)$和$(\exists_A x)(R$或$S) \Leftrightarrow ((\exists_A x)R)$或$((\exists_A x)S)$是$M$的定理.

证明：类似证明规则32可证.

证明规则 41.

令A、R、S为量词理论M的公式，x为字母，并且R不包含x，则$(\forall_A x)(R或S) \Leftrightarrow (R或(\forall_A x)S)$和$(\exists_A x)(R与S) \Leftrightarrow (R与(\exists_A x)S)$是$M$的定理.

证明：类似证明规则33可证.

证明规则 42.

令A、B、R为量词理论M的公式，x、y为字母，则以下公式都是M的定理：

（*1*）$(\exists_A x)(\exists_B y)R \Leftrightarrow (\exists_B y)(\exists_A x)R$;

（*2*）$(\forall_A x)(\forall_B y)R \Leftrightarrow (\forall_B y)(\forall_A x)R$;

（*3*）$(\exists_A x)(\forall_B y)R \Rightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)R$;

证明：类似证明规则34可证.

习题 13.

令A、B为量词理论M的公式，x为字母，且A不包含x，求证：$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$.

证明：根据证明规则33可证.

习题 14.

令A、B为量词理论M的公式，x为字母且不是M的常数，并且A不包含x，如果$B \Rightarrow A$是M的定理，求证：$(\exists x)B \Rightarrow A$是$M$的定理.

证明：根据证明规则31，$(\exists x)B \Rightarrow (\exists x)A$. 由于$A$不包含$x$，故$(\exists x)A$和$A$相同，得证.

习题 15.

令A为量词理论M的公式，x、y为字母，求证：$(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)(x|y)A$、$(\exists x)(x|y)A \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

根据证明规则30、证明规则31，$(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)(x|y)A$，根据公理模式5、证明规则31，$(\exists x)(x|y)A \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

习题 16.

令A、B为量词理论M的公式，x为字母，求证：

（*1*）$(\forall x)(A或B) \Rightarrow ((\forall x)A或(\exists x)B)$;

（*2*）$((\forall x)A与(\exists x)B) \Rightarrow (\exists x)(A与B)$.

证明：

（1）根据公理模式4、公理模式5，$(A或B) \Rightarrow (A或(\exists x)B)$，根据证明规则31、证明规则33可证.

（2）根据习题16（1）、证明规则12，$(\forall x)A与(\exists x)B) \Rightarrow 非(\forall x)(A或B)$，根据证明规则29可证.

习题 17.

令A、B为量词理论M的公式，x、y为字母，且B不包含x、A不包含y，求证：$(\forall x)(\forall y)(A与B) \Rightarrow ((\forall x)A与(\forall y)B)$.

证明：根据证明规则31、证明规则33可证.

习题 18.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，求证：$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$，$(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$.

证明：根据证明规则31、证明规则21，$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$. 根据证明规则12，$(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$.

习题 19.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母且不是M的常数. 求证：如果$R \Rightarrow A$是M的定理，则$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$是$M$的定理. 如果$(非R) \Rightarrow A$是$M$的定理，则$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$是$M$的定理. 特别是，如果$A$是$M$的定理，则$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$、$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$都是$M$的定理.

证明：

如果$R \Rightarrow A$是M的定理，则$R \Leftrightarrow (A与R)$，根据证明规则31，$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$.

如果$(非R) \Rightarrow A$是M的定理，则$(非R) \Leftrightarrow (A与非R)$，根据证明规则31、证明规则12，$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$. 如果$A$是$M$的定理，则$R \Rightarrow A$、$(非R) \Rightarrow A$，根据上述结论，$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$、$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$都是$M$的定理.

习题 20.

令A、R为量词理论M的公式，T是M的项，x为字母，如果$(T|x)A$是M的定理，求证：$(T|x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$、$(\forall_A x)R \Rightarrow (T|x)R$是$M$的定理.

证明：由于$(T|x)A$是M的定理，因此$(T|x)R \Rightarrow (T|x)(R与A)$. 根据公理模式5，$(T|x)(R与A) \Rightarrow (\exists_A x)R$，故$(T|x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$. 根据证明规则12，$(\forall_A x)R \Rightarrow (T|x)R$.

1.5 等式理论（Théories égalitaires）

记号定义 12. 等式（*égalité*）

令T、U为语句，x为字母，则“用$T=U$”表示“$=TU$”（第三优先级）；用“$T\neq U$”表示“非$(T=U)$”（第三优先级）.

补充替代规则 7.

下列规则均为公理模式：

（1）令x为字母，T和U为项，R为公式，则$(T=U)\Rightarrow((T|x)R\Leftrightarrow(U|x)R)$是公理.

（2）令R和S为公式，x为字母，则$(\forall x)(R\Leftrightarrow S)\Rightarrow(\tau_x(R)=\tau_x(S))$是公理.

证明：

令原公式为A，以下证明$(V|y)A$也是该规则产生的公式：

若V不包含x且x、y不同，根据替代规则2、替代规则5，可证明（1），根据替代规则4、替代规则7，可证明（2）.

若V包含x或x、y相同，则令R'为$(x'|x)R$，其中x'为与y不同的字母且U不包含x'，根据替代规则1、替代规则8及上述结论可证.

公理模式 6.：

令x为字母，T和U为项，R为公式，则$(T=U)\Rightarrow((T|x)R\Leftrightarrow(U|x)R)$是公理.

注：即相等的量有相同的性质.

公理模式 7.：

令R和S为公式，x为字母，则$(\forall x)(R\Leftrightarrow S)\Rightarrow(\tau_x(R)=\tau_x(S))$是公理.

元数学定义 22. 等式理论（*théorie égalitaire*）

等式理论是指，定义了*2*元特别符号“=”，并且包含公理模式6、公理模式7的量词理论.

证明规则 43.

令x为字母，T和U为等式理论M的项，R为M的公式，则$((T=U)$与$(T|x)R)\Leftrightarrow((T=U)$与$(U|x)R)$是$M$的定理.

证明：

假设$((T=U)$与$(T|x)R)$，则$T=U$.

由于$(T|x)R$，根据公理模式6，$(U|x)R$.

反之亦然.

注：下文中提及的所有定理、补充定理，都是基于前文已提及的特别符号、公理模式、显式公理组成的理论. 它们也适用于更强的理论.

定理 1. 等式的反身性

$x=x$.

证明：

设理论为M，考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

对任意公式R，根据证明规则27，$\forall x(R \Leftrightarrow R)$，根据公理模式7，$\tau_x(R) = \tau_x(R)$，即$(\tau_x(R)|x)(x = x)$，令R为非$(x = x)$，根据证明规则26，$(\forall x)(x = x)$，根据证明规则30，$x = x$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

补充证明规则 7. 同一律

令T为等式理论M的项，则$T = T$.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：根据定理1、证明规则27，$(\forall x)(x = x)$，根据证明规则30，$T = T$. 由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

补充证明规则 8.

令T为等式理论M的项，则$(\exists x)(x = T)$，$(\exists x)(T = x)$.

证明：根据补充证明规则7、替代规则9、公理模式5可证.

定理 2. 等式的对称性

$(x = y) \Leftrightarrow (y = x)$.

证明：假设$x = y$，根据公理模式6，$(x|y)(y = x) \Leftrightarrow (y|y)(y = x)$，即$(x = x) \Leftrightarrow (y = x)$，根据定理1，$y = x$. 反之亦然.

定理 3. 等式的传递性

$((x = y)$与$(y = z))\$Rightarrow(x = z)$.

证明：假设$x = y$、$y = z$，根据公理模式6，$(x = y) \Rightarrow ((x = z) \Leftrightarrow (y = z))$，因此，$(x = z) \Leftrightarrow (y = z)$，因此，$x = z$.

证明规则 44.

令T、U、V为等式理论M的项，x为字母，则$(T = U) \Rightarrow ((T|x)V = (U|x)V)$是$M$的定理.

证明：

令y、z为和x不同的字母，且不出现在T、U、V中.

假设$y = z$，则$(y|z)((y|x)V = (z|x)V) \Leftrightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$，即$((y|x)V = (y|x)V) \Leftrightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$，根据定理1，$(y|x)V = (y|x)V$，故$(y|x)V = (z|x)V$.

因此，$(y = z) \Rightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$，进而$(T|y)(U|z)((y = z) \Rightarrow ((y|x)V = (z|x)V))$，即$(T = U) \Rightarrow ((T|x)V = (U|x)V)$.

元数学定义 23. 单一公式（*relation univoque*），唯一（*il existe au plus un*）

令R为等式理论M的公式，x、y、z为不同的字母，并且R不包含y和z，如果$(\forall y)(\forall z)$ $(((y|x)R)$与$((z|x)R)) \Rightarrow (y=z)$是$M$的定理，则称在$M$中，$R$是$x$上的单一公式，或称在$M$中，满足$R$的$x$是唯一的.

元数学定义 24. 函数性公式（*relation fonctionnelle*），有且仅有一个（*il existe un et un seul*）

令R为等式理论M的公式，x为字母，如果在M中，R是x上的单一公式，并且$(\exists x)R$是M的定理，则称在M中，R是x上的函数性公式，或称在M中，有且仅有一个x满足R.

证明规则 45.

令R为等式理论M的公式，x为字母并且不是M的常数．如果在M中，R是x上的单一公式，则$R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$是$M$的定理．反之，如果存在等式理论$M$的项$T$，使$R \Rightarrow (x = T)$为$M$的定理，则在$M$中，$R$是$x$上的单一公式.

证明：

当$R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$时，假设$R$为真，根据公理模式5，$(\tau_x(R)|x)R$，因此$R$与$(\tau_x(R)|x)R$，由于$R$是$x$上的单一公式，因此$R$与$(\tau_x(R)|x)R \Rightarrow (x=\tau_x(R))$．根据证明规则30可证.

反过来，当$R \Rightarrow (x = T)$时，令y、z是和x不同且不出现在R中的字母，则$(y|x)R \Rightarrow (y=T)$、$(z|x)R \Rightarrow (z=T)$．$G(\forall y)(\forall z)(((y|x)R)$与$((z|x)R))$，根据证明规则30，$(y|x)R)$与$((z|x)R$，因此$y=T$、$z=T$，根据3，得证.

证明规则 46.

令R为等式理论M的公式，x为字母并且不是等式理论M的常数．如果在M中，R是x上的函数性公式，则$R \Leftrightarrow (x=\tau_x(R))$是$M$的定理．反之，如果存在等式理论$M$的项$T$，使$R \Leftrightarrow (x=T)$为理论$M$的定理，则在$M$中，$R$是$x$上的函数性公式.

证明：

当R是x上的函数性公式时，根据证明规则45，$R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$．同时，根据公理模式5，$(\exists x)R$．根据公理模式6，$(x=\tau_x(R)) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (\exists x)R)$．当$x=\tau_x(R)$时，$R \Leftrightarrow (\exists x)R$，又因为$(\exists x)R$，因此$R$为真．综上，前一部分得证.

反之，如果$R \Leftrightarrow (x = T)$，根据证明规则45，$R$是$x$上的单一公式．又因为$(T|x)R \Leftrightarrow (T=T)$，根据定理1，$(T|x)R$，根据公理模式5，$(\exists x)R$，得证.

证明规则 47.

令R、S为等式理论M的公式，x为字母并且不是等式理论M的常数．如果在M中，R是x上的函数性公式，则$(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow (\exists x)(R$与$S)$.

证明：

根据证明规则46，$R \Leftrightarrow (x=\tau_x(R))$.

根据证明规则43，$(x=\tau_x(R))$与$S\Leftrightarrow(x=\tau_x(R))$与$(\tau_x(R)|x)S$.

因此，R与$(\tau_x(R)|x)S\Leftrightarrow R$与$S$.

由于$(\tau_x(R)|x)S$不包含x，根据证明规则33，$(\exists x)R$与$(\tau_x(R)|x)S\Leftrightarrow(\exists x)(R$与$S)$.

由于R是x上的函数性公式，故$(\exists x)R$，因此$(\tau_x(R)|x)S\Leftrightarrow(\exists x)(R$与$S)$.

补充证明规则 9.

令T为等式理论M的项，x为字母且T不包含x，则在M中，$x=T$是x上的函数性公式.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

根据证明规则46可证.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

补充证明规则 10.

令R为等式理论M的公式，T是M的项，x为字母且T不包含x，则$(\exists x)(x=T$与$R)\Leftrightarrow(T|x)R$.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

根据补充证明规则9，$x=T$是x的函数性公式；根据证明规则47，$(\tau_x(x=T)|x)R\Leftrightarrow(\exists x)(x=T$与$R)$.

根据证明规则46，$(x=T)\Leftrightarrow(x=\tau_x(x=T))$. 根据补充证明规则8，$(\exists x)(x=T)$，即$\tau_x(x=T)=T$. 根据公理模式6，$(\tau_x(x=T)|x)R\Leftrightarrow(T|x)R$. 得证.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

习题 21.

令M为等式理论，求证：在M中，$x=y$是x上的函数性公式.

证明：根据补充证明规则9可证.

习题 22.

令R为等式理论M的公式，x、y是不同的字母. 求证：$(\exists x)(x=y$与$R)\Leftrightarrow(y|x)R$.

证明：根据补充证明规则10可证.

习题 23.

令R、S为等式理论M的公式，T为M的项，x、y为字母，y不是M的常数，T不包含x. 令理论M'为M添加显式公理S形成的理论. 在理论M'中，R是x上的函数性公式，$(T|y)S$是理论M的定理. 求证：在M中，$(T|y)R$是x上的函数性公式.

证明：

在理论M中，根据证明规则14，$S \Rightarrow (\exists x)R$．根据证明规则3、替代规则5，$(T|y)S \Rightarrow (T|y)(\exists x)R$．

根据替代规则9，$(T|y)(\exists x)Rs(\exists x)(T|y)R$，故$(\exists x)(T|y)R$．

令u、v为不同于x、y且不出现在R和T中的字母，在理论M中，根据证明规则14，$S \Rightarrow (\forall u)(\forall v)(((u|x)R)$与$((v|x)R)) \Rightarrow (u=v)$．

根据证明规则3、替代规则9、替代规则2、替代规则5，$(T|y)S \Rightarrow (\forall u)(\forall v)$ $(((u|x)(T|y)R)$与$((v|x)(T|y)R)) \Rightarrow (u=v)$．

因此，$(\forall u)(\forall v)(((u|x)(T|y)R)$与$((v|x)(T|y)R)) \Rightarrow (u=v)$．

综上，得证．

习题 24.

令R、S为等式理论M的公式，x为字母且不是M的常数．若R是x上的函数性公式，$R \Leftrightarrow S$是定理，求证：S是x上的函数性公式．

证明：

根据证明规则31，$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$，又因为$R$是$x$上的函数性公式，故$(\exists x)S$．

令y、z为不同且不同于x的字母，并且R不包含y和z，又因为R是x上的函数性公式，所以$(\forall y)(\forall z)(((y|x)R)$与$((z|x)R)) \Rightarrow (y=z)$．

根据证明规则3、替代规则7，$(y|x)R \Leftrightarrow (y|x)S$，$(z|x)R \Leftrightarrow (z|x)S$．

根据补充证明规则5（4），$(y|x)R$与$(z|x)R \Leftrightarrow (y|x)S$与$(z|x)S$．根据证明规则31，$(\forall y)(\forall z)(((y|x)R)$与$((z|x)R)) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall z)(((y|x)S)$与$((z|x)S))$，因此$(\forall y)(\forall z)(((y|x)S)$与$((z|x)S)) \Rightarrow (y=z)$．

习题 25.

令R、S、T为等式理论M的公式，x为字母，若R是x上的函数性公式，求证：下列公式是M的定理：

（1）(非$(\exists x)(R$与$S)) \Leftrightarrow ((\exists x)R$与(非$S$))；

（2）$(\exists x)(R$与$(S$与$T)) \Leftrightarrow ((\exists x)(R$与$S)$与$(\exists x)(R$与$T))$；

（3）$(\exists x)(R$与$(S$或$T)) \Leftrightarrow ((\exists x)(R$与$S)$与$(\exists x)(R$或$T))$．

证明：

（1）根据证明规则47，非$(\exists x)(R$与$S) \Leftrightarrow$ 非$(\tau_x(R)|x)S$、$(\exists x)R$与(非S) $\Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)$(非$S$)，根据替代规则5可证．

（2）根据证明规则47，$(\exists x)(R$与$(S$与$T)) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)(S$与$T)$、$(\exists x)(R$与$S) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)S$、$(\exists x)(R$与$T) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)T$，根据替代规则6可证．

（3）根据证明规则47，$(\exists x)(R$与$(S$或$T)) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)(S$或$T)$、$(\exists x)(R$与$S) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)S$、$(\exists x)(R$与$T) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)T$，根据替代规则5可证．

习题 26.

求证：$(\exists x)R \Rightarrow R$不是公理模式.

证明：

令x、y为不同的字母，R是包含x、y的公式.

根据替代规则5，$(y|x)((\exists x)R \Rightarrow R)$即$(\exists x)R \Rightarrow (y|x)\mathrm{R}$.

假设该公式具有$(\exists z)R' \Rightarrow R'$的形式，则该公式是$\vee$开头的平衡语句，因此，它能唯一的表示为$\vee BC$的形式，即$(\exists x)R$和$(\exists z)R'$相同，$(y|x)R$和$R'$相同．即$(\exists x)R$和$(\exists z)(y|x)R$相同.

假设z和x相同，则$(\tau_x(R)|x)R$和$(y|x)R$相同，但$\tau_x(R)$至少包含两个字符，二者字符数量不同，矛盾．故z和x不同.

由于$(\exists z)(y|x)R$不包含z，因此$(\exists x)R$不包含z，即R不包含z．故$(\tau_x(R)|x)R$和$(y|x)R$相同，但$\tau_x(R)$显然至少包含两个字符，二者字符数量不同，同样矛盾．得证.

注：习题26涉及尚未介绍的“平衡片段唯一性”的知识.

习题 27.

求证：$(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$不是公理模式.

证明：

令x、y为不同的字母，R、S是包含x、y的公式.

根据替代规则5、替代规则7，$(y|x)((R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S)))$即$((y|x)R \Leftrightarrow (y|x)S)$ $\Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$.

假设该公式具有$(R' \Leftrightarrow S') \Rightarrow (\tau_z(R') = \tau_z(S'))$的形式，则$R'$、$S'$、$\tau_z(R')$、$\tau_z(S')$分别和$(y|x)R$、$(y|x)S$、$\tau_x(R)$、$\tau_x(S)$相同．即$\tau_z((y|x)R)$、$\tau_z((y|x)S)$分别和$\tau_x(R)$、$\tau_x(S)$相同.

若z和x相同，由于$(y|x)R$、$(y|x)S$不包含x，而R、S包含x，$\tau_x((y|x)R)$、$\tau_x((y|x)S)$没有连线，而$\tau_x(R)$、$\tau_x(S)$有连线，矛盾.

因此z和x不同，由于$\tau_z((y|x)R)$、$\tau_z((y|x)S)$不包含z，因此$(y|x)R$、$(y|x)S$不包含z．故$\tau_z((y|x)R)$、$\tau_z((y|x)S)$没有连线，而$\tau_x(R)$、$\tau_x(S)$有连线，同样矛盾．得证.

注：习题27证明使用习题26的结论，同样涉及尚未介绍的“平衡片段唯一性”的知识.

1.6 项和公式的性质（Caractérisation des termes et des relations）

语法定义 1. 单词（*mot*），单词幺半群（*monoïde de mots*）

令S为理论的符号集合，在S上按照下列规则构建的自由幺半群$L_0(S)$，称为单词幺半群，其元素称为单词：

第一，其元素为所有有限个符号组成的序列$s_0s_1\cdots s_n$（也可以记作$(s_i)_{i\in[0,n]}$）；

第二，元素A和B的乘法运算，为序列A和序列B连接成的序列，记作AB；

第三，其单位元为零个元素组成的序列.

语法定义 2. 长度（*longueur*）

单词A的长度，为A包含的符号集合的元素数目，记作$l(A)$.

语法定义 3. 权重（*poid*）

建立符号集合到非负整数集的映射. 定义单词A的权重为A包含的各符号对应的数值之和，记作$n(A)$.

补充语法定理 1. *A*、*B*为单词，则*l(AB)=l(A)+l(B)*.

证明：根据定义可证.

补充语法定理 2. *A*、*B*为单词，则*n(AB)=n(A)+n(B)*.

证明：根据定义可证.

语法定义 4. 单词的片段（*segment d'un mot*），单词的真片段（*segment propre d'un mot*），单词的头（*segment initial d'un mot*），单词的真头（*segment initial propre d'un mot*），单词的尾（*segment final d'un mot*），单词的真尾（*segment final propre d'un mot*）

A、A'、B、A''均为单词，如果$A = A'BA''$，则称B为A的片段，如果$B \neq A$，则称B为A的真片段. 如果$A' = \emptyset$，则称B为A的头，此时，如果$B \neq A$，则称B为A的真头. 如果$A'' = \emptyset$，则称B为A的尾，此时，如果$B \neq A$，则称B为A的真尾.

语法定义 5. 不相交的单词片段（*segments disjoint d'un mot*），相交的单词片段（*segments d'un mot qui rencontrent*）

令A、B、C、D、E、F为单词，如果$A = BCDEF$，则称C和E为A的不相交的片段，反之，则称两个片段相交.

语法定义 6. 有意义的序列（*suit significative*），有意义的单词（*mot significatif*）

单词群$L_0(S)$的单词序列A_1、A_2、$\cdots$、A_n，当序列中每个元素A_i（$0 \le i \le n$）均满足下列条件之一时，称为有意义的序列：

（*1*）A_i仅包含一个权重为0的符号；

（*2*）在A_i之前有p个元素A_{i_1}、A_{i_2}、$\cdots$、A_{i_p}，以及一个权重为p的字符f，使$A_i = fA_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_p}$.

有意义的序列中的各元素，称为有意义的单词.

语法定理 1.

如果A_1、A_2、$\cdots$、A_p都是有意义的单词，符号f是权重为p的元素，则$fA_1A_2\cdots A_p$为有意义的单词.

证明：将A_1、A_2、$\cdots$、A_p所在的有意义的序列合并在一起，然后加入$fA_1A_2\cdots A_p$，仍能得到一个有意义的序列，得证.

语法定义 7. 平衡单词（*mot équilibré*）

单词A，同时满足下列两个条件的，称为平衡单词：

（*1*）$l(A) = n(A) + 1$;

（*2*）对A的任何真头B，$l(B) \leq n(B)$.

语法定理 2.

A是平衡单词，对任意$0 \leq k < l(A)$，存在唯一的从A的第$k+1$个符号开始的平衡片段S.

证明：

根据定义，任何平衡单词的真头，不可能是平衡单词，故唯一性成立.

下面证明存在性：

令$A = BC$，其中$l(B) = k$，则$l(C) = l(A) - l(B) \geq n(A) + 1 - n(B) = n(C) + 1$.

令C_q为C的前q个字符组成的序列，则$l(C_0) = n(C_0) = 0$.

设i是使$l(C_i) \leq n(C_i)$成立的最大非负整数，即$l(C_{i+1}) = i+1 \geq n(C_{i+1})+1$，则$n(C_{i+1})+1 \leq i+1$，$i+ \leq n(C_i)+1$，$n(C_i)+1 \leq n(Ci+1)+1$，因此三个式子中的等号全部成立，故$l(C_{i+1}) = n(C_{i+1}) + 1$，所以$C_{i+1}$即为所求片段.

语法定理 3.

任何平衡单词A都可以写成$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为平衡单词，且$n(f) = p$.

证明：

设A的第一个符号是f. 根据语法定理2，A的其他符号可以分为p个平衡单A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为平衡单词.

又因为$l(A) = 1 + l(A_1) + l(A_2) + \cdots + l(A_p)$，

故$l(A) = 1 + p + n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_p)$，

进而$l(A) = 1 + p + n(A) - n(f)$.

又因为$l(A) = 1 + n(A)$，

所以$n(f) = p$，得证.

语法定理 4.

当且仅当一个单词平衡时，该单词有意义.

证明：

充分性：

令A为有意义的单词，设其属于单词序列A_1、A_2、$\cdots$、A_n. A_1只能是权重为0的符号，显然是平衡单词.

假设对任意$j<k$，A_j均为平衡单词，考虑单词A_k：

若A_k是权重为0的符号，显然是平衡单词.

若$A_k=fB_1B_2\cdots B_p$，其中$n(f)=p$，且B_1、B_2、$\cdots$、B_p均为序列之前的单词，即为平衡单词，则：

由于$l(A_k)=1+l(B_1)+l(B_2)+\cdots+l(B_p)$，

故$l(A_k)=1+p+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_p)$，

因此，$l(A_k)=1+n(f)+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_p)$，

所以，$l(A_k)=1+n(A_k)$.

同时，对于A的任何一个真头$C=fB_1B_2\cdots B_qD$，有：

$l(C)=1+l(f)+l(B_1)+l(B_2)+\cdots+l(B_q)+l(D)$，

所以$l(C)\leq 1+q+n(f)+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_q)+n(D)$，

进而$l(C)\leq p+n(f)+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_q)+n(D)$

故$l(C)\leq n(C)$，故A_k是平衡单词.

必要性：

对单词的长度运用数学归纳法. 长度为1的平衡单词，权重为0，显然为有意义的单词.

设长度$i<l(A)$的平衡单词均有意义，根据语法定理3，A可以写成$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为平衡单词，因此A_1、A_2、$\cdots$、A_p均有意义，根据语法定理1，A有意义.

语法定理 5.

A是有意义的单词，对任意$k\in[0,l(A)[$，存在唯一的从A的第$k+1$个符号开始的有意义的片段S.

证明：根据语法定理4、语法定理2可证.

语法定理 6.

A是有意义的单词，则A可以唯一表示为$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为有意义的单词，且$n(f)=p$.

证明：

存在性：根据语法定理4、语法定理3可证.

唯一性：根据语法定理2，A可以唯一表示为$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为平衡单词，即都是有意义的单词.

而$l(A)=1+l(A_1)+l(A_2)+\cdots+l(A_p)$，

故$l(A)=1+p+n(A_1)+n(A_2)+\cdots+n(A_p)$，

因此$l(A)=1+n(A)-n(f)+p$，

又因为$l(A)=1+n(A)$，

所以$n(f)=p$，唯一性得证.

语法定义 8. 平衡语句（*assemblage équilibré*）

如果语句A去掉连线后产生的字符序列A^*是平衡单词，则称A为平衡语句.

语法定义 9. 语句的片段（*segment d'un assemblage*），语句的真片段（*segment propre d'un assemblage*），语句的头（*segment initial d'un assemblage*），语句的真头（*segment initial propre d'un assemblage*），语句的尾（*segment final d'un assemblage*），语句的真尾（*segment final propre d'un assemblage*），不相交的语句片段（*segments disjoint d'un assemblages*），相交的语句片段（*segments d'un assemblages qui rencontrent*）

对于语句A，去掉连线后产生的字符序列A^*的任何（真）片段S^*，如果A在S^*的相应位置有连线，则在S^*内部添加相应连线后，形成的语句S，称为A的（真）片段. 如果片段S^*是A^*的头（尾），则称相应的语句S为A的头（尾）. 如果语句A的两个片段，在去掉连线后产生的字符序列A^*中相应的片段相交（不相交），则称语句A的这两个片段相交（不相交）.

语法定理 7.

对于理论M，令S为M的符号集合，并构建单词群$L_0(S)$，其中$n(\tau)=n(\neg)$
$=1$，$n(\vee)=2$，$n(\square)=0$，$n(x)=0$（x为字母），$n(s)=m$(s为特别符号，m为该特别符号的元). 则理论M的公式和项均为平衡语句.

证明：对包含A的构造为A_1、A_2、$\cdots$、A_p. 用数学归纳法，根据语法定理1可证.

语法定义 10. 先行语句（*assemblage antécédent*），完美平衡（*parfaitement équilibré*）

对于以$\neg$、$\vee$或特别符号开头的平衡语句A，将去掉连线后产生的平衡单词A^*表示为$f{A_1}^*{A_2}^*\cdots{A_p}^*$的形式，其中${A_1}^*$、${A_2}^*$、$\cdots$、${A_p}^*$均为平衡单词. 在各平衡单词${A_1}^*$、${A_2}^*$、$\cdots$、${A_p}^*$内部，如果$A$的相应位置有连线，则相应恢复连线，得到的语句$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_p$称为$A$的先行语句.

此时，如果A和$fA_1A_2\cdots A_p$完全相同，则称A为完美平衡语句.

对于以τ开头的平衡语句A，将去掉连线后产生的平衡单词A^*表示为τB^*的形式，选择任意一个B^*中未包含的字母x，将与开头的τ连线的所有$\square$替换为x，然后按照A当中的其他连线位置重新恢复连线，得到的语句B称为A的先行语句.

此时，如果A和$\tau_x(B)$完全相同，则称A为完美平衡语句.

语法定理 8.

设A为理论M的平衡语句，当且仅当A满足下列条件之一时，A是M的项：

第一，A是单个字母；

第二，A是以τ开头的完美平衡语句，且A的先行语句是M的公式.

当且仅当A满足下列条件之一时，A是M的公式：

第一，A是以$\neg$或$\vee k$开头的完美平衡语句，且先行语句都是M的公式；

第二，A是以特别符号开头的完美平衡语句，且先行语句都是M的项.

证明：

根据形成规则1、形成规则2、形成规则3、形成规则4，可证得充分性.

反过来，如果A是公式，则A是$\neg B$、$\vee BC$或$sD_1D_2\cdots D_n$的形式，因此A是完美平衡语句，且先行语句B、C是公式，D_1、D_2、$\cdots$、D_n是项.

如果A是项，则A是单个字母或者以τ开头．如果A以τ开头，则A可以表示为$\tau_x(B)$的形式，因此A是完美平衡语句，且先行语句B是项.

综上，必要性成立.

习题 28.

令S为理论的符号集合，A为$L_0(S)$的单词，B、C是A的两个有意义的片段．求证：或者B是C的片段，或者C是B的片段，或者B和C不相交.

证明：根据语法定理4，B、C是平衡单词.

如果B和C相交：

设C的开头在B的开头之后，令C开头符号为f，根据语法定理2，在平衡单词B中，以f开头的片段中，存在唯一的平衡片段D．因此D也是C的片段．在平衡单词C中，根据语法定理2，D和C相同，即C是B的片段.

设C的开头在B的开头之前，同理可证B是C的片段.

若C和B开头相同，则C是B的片段，或者B是C的片段.

综上得证.

习题 29.

令S为理论的符号集合，A为$L_0(S)$的有意义的单词，其形式为$A'BA''$，其中B有意义．求证：若C有意义，则$A'CA''$有意义.

证明：

若A长度为1，则A'、A''均为单位元，$A=B$，故$A'CA''=C$，命题成立.

设命题对长度小于k的单词成立，对长度为k的单词，根据语法定理6，A可以表示为$fA_1A_2\cdots A_p$，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均有意义．若其中与B相交的多于1个，根据语法定理2，矛盾．故只有1个与B相交，设其为A_i，根据习题28，B是A_i的真片段，即A_i可表示为$A'_iBA''_i$，因此$A'_iCA''_i$也是有意义的单词．因此，$A'CA''=fA_1A_2\cdots A'_iCA''_i\cdots A_p$也是有意义的单词.

习题 30.

令E为集合，f为$E \times E$到E的映射．令$S = E \cup f$．令$n(f) = 2$，对于$x \in E$，令$n(x) = 0$：

（*1*）令M为$L_0(S)$有意义的单词的集合，求证：存在M到E且满足下列条件的唯一映射v:

第一，对所有$x \in E$，$v(x) = x$；

第二，对任意两个有意义的单词A、B，$v(fAB) = f(v(A), v(B))$．

（*2*）设$A = (s_i)_{i\in[0,n]}$为$L_0(S)$的单词，定义A^*为其子串，其下标序列$i\check{}\check{}1$、i_2、$\cdot$、s_{i_k}是所有满足$S_i \neq f$的下标i按照递增顺序排序而成．若A、B为$L_0(S)$的单词，且满足$A^* = B^*$，则称A、B相似．求证：如果f满足结合律（即$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$），则对任意有意义的单词$A$、$B$，$v(A) = v(B)$．

证明：

（1）根据定义，存在性成立，根据语法定理6，唯一性成立．

（2）对任意有意义的单词A，若$A^* = A_1A_2 \cdots A_n$，则称$fA_1fA_2 \cdots fA_{n-1}A_n$为$A$的标准化单词，记作$A'$．则$A$存在唯一的标准化单词，且$A$和$A'$相似．

对于$n = 1$，显然$v(A) = v(A')$，设命题$v(A) = v(A')$对$n < k$成立，则对$n = k$：

令$A = fBC$，其中$B^* = A_1A_2 \cdots A_i$，$C^* = A_{i+1}A_{i+2} \cdots A_k$，则$v(A) = f(v(B), v(C)) = f(v(B'), v(C'))$．

若$i = 1$，则$v(A) = f(v(A_1), v(C')) = v(A')$显然成立．

设$v(A) = v(A')$对$i < j$成立，则对$i = j$：根据f的结合律，

$v(A) = f(f(A_1, v(fA_2fA_3 \cdots fA_{j-1}A_j)), v(fA_{j+1}fA_{j+2} \cdots fA_{k-1}A_k)) = f(A_1, f(v(fA_2fA_3 \cdots fA_{j-1}A_j), v(fA_{j+1}fA_{j+2} \cdots fA_{k-1}A_k))$．

令$D = ffA_2fA_3 \cdots fA_{j-1}A_jfA_{j+1}fA_{j+2} \cdots fA_{k-1}A_k$，因此$D' = fA_2 \cdots fA_{n-1}A_n$，根据归纳假设，$v(D) = v(D')$，故$v(A) = f(A_1, v(D')) = v(A')$．得证．

习题 31.

令A为理论M的项或公式．考虑下列语句序列：

先写A，如果A是单个字母，则结束．否则，写下A的先行语句（如果A以τ开头，则写下任何一个先行语句）．如有一个或数个新写出的先行语句不是字母，则继续写这些先行语句的先行语句，直至新写出的语句全部是单个字母为止．

（*1*）求证：将上述语句序列的顺序颠倒，则形成一个构造．

（*2*）若平衡语句B是A的片段，且在语句A中，没有B内部和B外部之间的连线，求证：B是M的项或公式．

（*3*）若B是项（或公式），则将A中的B替代为另一个项（或公式）．求证：若A是项（或公式），则得到的新语句是项（或公式）．

证明：

（1）根据定义可证.

（2）对语句A的长度用数学归纳法可知，该语句序列中存在语句C，和B的起始位置相同，

根据语法定理2，C和B长度相同. 同时，由于没有B内部和B外部之间的连线，故B中的□没有被替代掉，即B和C相同. 因此B是M的项或公式.

（3）设A为$A'BA''$，以C替代A.

若A的长度为1，则A和B相同，命题成立.

设命题对长度小于k的语句成立，则当A的长度为k时，根据习题2929证明过程，A的先行语句中，只有一个和B相交，且B为该先行语句的片段.

设该语句为A_p，将A_p中的B替代为C得到A'_p，若A'_p为项（或公式），则A'_p相应为项（或公式）. 因此，若A为项（或公式），则A的先行公式A_p替代为A'_p，根据语法定理8，得到的$A'CA''$也是项（或公式）.

习题 32.

令A为理论M的语句，T为M的项，x为字母. 求证，若$(T|x)A$为项（或公式），则A为项（或公式）.

证明：根据习题31（3）可证.

习题 33.

理论M的公式，如果以特别符号开头，则称该公式逻辑上不可约. 令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为M中逻辑上不可约的不同公式. 对于M的语句序列A_1、A_2、$\cdots$、A_n，如果其中每个语句A_i都满足下列条件之一，则称该序列为基于令R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造：

第一，A_i是公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n中的一个；

第二，在A_i之前有一个语句A_j使A_i为$\neg A_j$；

第三，在A_i之前有两个语句A_j、A_k，使A_i为$\vee A_j A_k$.

（1）求证：基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造的每个语句均为理论M的公式.

（2）基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造的每个语句，称为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式. 求证：若R、S为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式，则$\neg R$、$\vee RS$、$\Rightarrow RS$、R与S、$R \Leftrightarrow S$均为为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式.

（3）令R为M的公式. 考虑下列语句序列：先写R，如果R逻辑上不可约，则结束. 否则，写下R的先行语句. 如有一个或数个先行语句不是逻辑上不可约的公式，则然后继续写这些先行语句的先行语句，直至新写出的语句全部是逻辑上不可约的公式为止. 若R_1、R_2、$\cdots$、R_n为上述语句序列中不同的逻辑上不可约公式，则称R_1、R_2、$\cdots$、R_n为R的逻辑成分. 求证：R为其各逻辑成分的逻辑构造公式，且若从其逻辑成分中去掉一个公式，则R不是其剩余公式的逻辑构造公式.

（4）令R为M的公式，令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为M中逻辑上不可约的不同公式，并且：

第一，R为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式；

第二，从R_1、R_2、$\cdots$、R_n中去掉任何一个公式，R不是其剩余公式的逻辑构造公式，

求证：R的逻辑成分是为R_1、R_2、$\cdots$、R_n.

证明：

（1）对于A_1，其为公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n中的一个，显然为公式．设命题对$i<k$成立，则对A_k，其为公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n中的一个，或为$\neg A_j$，或为$\vee A_jA_k$，根据形成规则1、形成规则2，A_k为公式．得证．

（2）类似形成规则1、形成规则2、形成规则5、形成规则9、形成规则10的证明，可证．

（3）将语句序列的顺序颠倒，根据定义，R为其各逻辑成分的逻辑构造公式．下面证明，去掉R_n后，R不是剩余公式的逻辑构造公式：

若R长度为2，则R本身逻辑上不可约，仅有一个逻辑成分，去掉后则无法产生逻辑构造公式，显然成立．

设待证命题对于小于k的公式成立，则对于长度为k的公式，若R本身逻辑上不可约，显然成立；若R为$\neg A$的形式，R和A的逻辑成分相同，假设R是剩余公式的逻辑构造公式，则该逻辑构造包含A，与A不是剩余公式的逻辑构造公式矛盾；若R为$\vee BC$的形式，则B、C必有一个公式的逻辑成分包含R_n，设该公式为B，假设R是剩余公式的逻辑构造公式，则该逻辑构造包含B 、C，与B不是剩余公式的逻辑构造公式矛盾．综上，得证．

（4）按照（3）写下公式序列．若存在R_i（$1\leq i\leq n$）不在公式序列中，则去掉R_i，R仍是剩余公式的逻辑构造公式，矛盾．得证．

习题 34.

令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为理论M中逻辑上不可约的公式，序列A_1、A_2、$\cdots$、A_n为基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造．

先将每个R_i对应符号0或1，然后按照下列规则将每个A_i对应0或1：

第一，若存在j使A_i与R_j相同，则A_i与R_j对应相同的符号；

第二，若存在j使A_i与$\neg A_j$相同，而A_j对应0（或1），则A_i对应1（或0）；

第三，若存在j、k使A_i与$\vee A_jA_k$相同，在A_j 、A_k均为1的情况下，A_i为1，其他情况下A_i为0．

（*1*）求证：根据上述方法，每个A_i有且仅有一个对应的符号．

（*2*）令R为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式，求证：R对应的符号，与选择哪一个基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n且包含R的逻辑构造无关．

（*3*）令R、S为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式，R和$\Rightarrow RS$对应的符号均为0，求证：S对应的符号为0．

（*4*）设理论M的公理仅包含公理模式*1*、公理模式*2*、公理模式*3*、公理模式*4*生成的公理，R是M的定理，R_1、R_2、$\cdots$、R_n是R的逻辑成分．求证：不论各公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n对应的符号是0还是1，R对应的符号均为0．

（5）令R为理论M逻辑上不可约的公式．求证：R、非R都不是M的定理，并且，M没有矛盾．

（6）令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为理论M中逻辑上不可约的公式．令S_1、S_2、$\cdots$、S_p为所有$(R'_1$或R'_2或$\cdots$或$R'_n)$形式的公式，其中R'_i为R_i或者“非R_i”其中之一．令T_1、T_2、$\cdots$、T_q为所有S_{i_1}与S_{i_2}与$\cdots$与S_{i_r}形式的公式，其中i_1、i_2、$\cdots$、i_r为严格递增的下标序列．令T_0为M中的定理“R_1或非R_1”，求证：令R_1、R_2、$\cdots$、R_n的一切逻辑构造公式，与且仅与T_0、T_1、T_2、$\cdots$、T_q中的一个公式等价．

（7）令R为理论M的公式，R_1、R_2、$\cdots$、R_n为其逻辑成分．求证：当且仅当R为定理时，不论各公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n对应的符号是0还是1，R对应的符号是0．

证明：

（1）根据定义，存在性成立；根据语法定理6，唯一性成立．

（2）若R长度为2，则R只能是R_1、R_2、$\cdots$、R_n其中之一，其对应的符号不取决于逻辑构造，故命题对长度为2的R成立．

设公式对长度小于k的R成立，对于长度为k的R：

若R为R_1、R_2、$\cdots$、R_n之一，命题显然成立；若R为$\neg A_j$或$\vee A_j A_k$，由于A_j（以及A_k）对应的符号不取决于逻辑构造；另一方面，根据语法定理6，R的表示形式唯一，故R对应的符号也不取决于逻辑构造．

（3）根据习题34（1）、习题34（2），S对应的符号唯一．R对应0，则$\neg R$对应1，若S对应1，则$\Rightarrow RS$对应1，矛盾，因此S对应0．

（4）考虑包含R的证明：若R为公理，对于公理模式1、公理模式2、公理模式3、公理模式4，无论A、B、C对应的符号是0还是1，R对应的符号均为0．若R不是公理，则根据习题34（3）可证．

（5） R逻辑上不可约，故R、非R的逻辑成分仅有公式R．非R对应的符号因R对应的符号而变，根据习题34（4），R、非R都不是定理．另一方面，如果M有矛盾，即存在定理S和定理非S，根据习题34（4），S、非S对应的符号均为0．但S对应的符号为0，非S对应的符号为1．根据习题34（1）、34（2），S对应的符号唯一，矛盾．因此M没有矛盾．

（6）唯一性：

若某个S_{i_1}与S_{i_2}与$\cdots$与S_{i_r}和T_0等价，则S_{i_1}与S_{i_2}与$\cdots$与S_{i_r}为定理，因此，S_{i_1}为定理，根据习题34（4），$S_i 1$对应的符号恒为0，但设S_{i_1}为R'_1或R'_2或$\cdots$或$R'_n)$，令其中各公式R'_i对应的符号均为1，则S_{i_1}对应的符号为1，根据习题34（1）、习题34（2），矛盾．

若存在$(S_{i_1}$与S_{i_2}与$\cdots$与$S_{i_r}) \Leftrightarrow (S_{j_1}$与$S_{j_2}$与$\cdots$与$S_{j_{r'}})$，则序列$i_1$、$i_2$、$\cdots$、$i_r$和$j_1$、$j_2$、$\cdots$、$j_{r'}$必不完全相同，设$j_m$不在$i_1$、$i_2$、$\cdots$、$i_r$之中，则$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r}) \Rightarrow S_{j_m}$，设$S_{j_m}$为$R'_1$或$R'_2$或$\cdots$或$R'_n$，令其中各公式$R'_i$对应的符号均为1，则$S_{j_m}$对应的符号为1，而$S_{i_1}$、$S_{i_2}$、$\cdots$、$S_{i_r}$对应的符号均为0，因此$S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r}$对应的符号为0，故$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r}) \Rightarrow S_{j_m}$对应的符号为1，根据习题34（1）、习题34（2），矛盾．

综上，唯一性得证.

存在性：

先证引理：

引理1：对于R_1、R_2、$\cdots$、R_n构成的所有S_1、S_2、$\cdots$、S_p（$p=2^n$），非S_1或非S_2或$\cdots$或非S_p为定理.

令U_n为n个逻辑上不可约的不同公式构成的“非$S1$或非$S2$或非$\cdots$或非Sp”（$p=2^n$）. 对$n=1$，R_1与非R_1为定理，显然命题成立. 设公式对$n<k$成立，对于$n=k$，U_k等价于$(U_{k-1}$与$R_k)$或$(U_{k-1}$与非$R_n)$，等价于“R_n与非R_n”，显然命题成立，引理1得证.

引理2：对于R_1、R_2、$\cdots$、R_n构成的所有S_1、S_2、$\cdots$、S_p（$p=2^n$），对任意$i\neq j$，S_i或S_j均为定理.

由于$i\neq j$，S_i或S_j中必有Ri和非Ri，故引理2得证.

引理3：对于R_1、R_2、$\cdots$、R_n构成的所有T_0、T_1、T_2、$\cdots$、T_q，则对任意i，R_i、非R_i分别等价于其中某个T_m、$T_{m'}$.

设S_1、S_2、$\cdots$、S_p中所有包含R_i的公式为S_{i_1}、S_{i_2}、$\cdots$、S_{i_r}，又因为U_{n-1}为真，故$(S_{i_1}$与S_{i_2}与$\cdots$与$S_{i_r})\Leftrightarrow($非(U_{n-1})或$R_i)$，因此$(S_{i_1}$与S_{i_2}与$\cdots$与$S_{i_4})\Leftrightarrow(U_{n-1}\Rightarrow R_i)$，故$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_4})\Leftrightarrow R_i$. 同理可证存在等价于非$R_i$的某个$T_{m'}$. 引理3得证.

引理4：对于R_1、R_2、$\cdots$、R_n构成的所有S_1、S_2、$\cdots$、S_p（$p=2^n$），则对任意i，S_1与S_2与$\cdots$与$S_i)\Leftrightarrow$非$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与S_p.

根据引理1，非S_1或非S_2或非$\cdots$或非S_p，则非$(S_1$与$S2$与$\cdots$与$S_i)$或非$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$，故$(S_1$与S_2与$\cdots$与$S_i)\Rightarrow$非$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$.

反过来，考虑$(S_1$与S_2与$\cdots$与$S_i)$或$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$，用分配律展开，根据引理2，各项均为真，故$(S_1$与S_2与$\cdots$与$S_i)$或$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$，因此非$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$ $\Rightarrow(S_1$与S_2与$\cdots$与$S_i)$，引理4得证.

考虑任何一个基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造A_1、A_2、$\cdots$、A_m，A_1必为R_i的形式，根据引理3，存在性对公式A_1成立.

设存在性对公式A_1、A_2、$\cdots$、A_{i-1}成立，对于A_i：

如果A_i为R_j的形式，根据引理3，存在性成立.

如果A_i是$\neg A_j$的形式，若$A_j\Leftrightarrow T_0$，根据引理1，$A_i\Leftrightarrow(S_1$与S_2与$\cdots$与$S_p)$；在其他情况下，令$A_j\Leftrightarrow(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})$，设剩余公式为$S_{j_1}$、$S_{j_2}$、$\cdots$、$S_{j_{r'}}$，则根据引理4，$A_i\Leftrightarrow$非$A_j\Leftrightarrow$非$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})\Leftrightarrow(S_{j_1}$与$S_{j_2}$与$\cdots$与$S_{j_{r'}})$. 以上两种情况下，存在性均成立.

如果A_i是$\vee A_jA_k$的形式，若$A_j\Leftrightarrow T_0$或者$A_k\Leftrightarrow T_0$，则$A_i\Leftrightarrow T_0$；在其他情况下，令$A_j\Leftrightarrow(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})$，$A_k\Leftrightarrow(S_{j_1}$与$S_{j_2}$与$\cdots$与$S_{j_{r'}})$，若$A_j$包含的各项与$A_k$包含的各项没有相同的，则$A_j$或$A_k$用分配律展开，各项均为真，故$A_i\Leftrightarrow T_0$，若$A_j$包含的各项与$A_k$包含的各项中有相同项$S_{l_1}$、$S_{l_2}$、$\cdots$、$S_{l_{r''}}$为相同项，则$A_i\Leftrightarrow S_{l_1}$与$S_{l_2}$与$\cdots$与$S_{l_{r''}}$. 以上两种情况下，存在性均成立.

综上，存在性成立.

（7）根据习题34（4），必要性成立.

若R对应的符号恒为0，根据习题34（6），存在唯一的T_m，使$R \Leftrightarrow T_m$. 如果$R \Leftrightarrow T_0$，则R为定理. 否则，存在S_{i_1}、S_{i_2}、$\cdots$、S_{i_r}，使$R \Leftrightarrow (S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})$，则$S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r}$对应的符号恒为0，非$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})$即(非$S_{i_1}$或非$S_{i_2}$或非$\cdots$或非$S_{i_r}$)，故其对应的符号恒为1，因此$S_{i_1}$、$S_{i_2}$、$\cdots$、$S_{i_r}$对应的符号均恒为0. 但设$S_{i_1}$为$R'_1$或$R'_2$或$\cdots$或$R'_n$，令其中各公式$R'{}_i$对应的符号均为1，则$S_{i_1}$对应的符号为1，根据习题34（1）、习题34（2），矛盾.

注：

习题34（6）表明主合取范式的存在性和唯一性（同理可证主析取范式的存在性和唯一性）.

习题34（4）、（7）表明逻辑理论的可靠性.

习题34（5）表明逻辑理论的一致性.

习题 35.

令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为理论M中逻辑上不可约的公式，将每个R_i对应符号0、1或2，对于基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造的一切公式，按照下列规则确定其对应的符号：$\neg 0 = 1$，$\neg 1 = 0$，$\neg 2 = 2$，$\vee 00 = \vee 01 = \vee 02 = \vee 10 = \vee 20 = \vee 22 = 0$，$\vee 11 = 1$，$\vee 12 = \vee 21 = 2$.

（1）求证：令R为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式，求证：R对应的符号不取决于基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n且包含R的逻辑构造.

（2）设理论M的公理仅包含公理模式2、公理模式3、公理模式4生成的公理，R是M的定理. 求证：不论R的各逻辑成分对应的符号是0、1还是2，R对应的符号都是0. 同时，如果S为逻辑上不可约的公式，并且对应的符号为2，则$(S$或$S) \Rightarrow S$对应的符号为2，进而，M不可能等价于一个符号与M相同并且仅包含公理模式1、公理模式2、公理模式3、公理模式4生成的公理的理论.

（3）对于仅包含公理模式公理模式1、公理模式3、公理模式4生成的公理的理论，适用下列规则：$\neg 0 = 1$，$\neg 1 = 0$，$\neg 2 = 2$，$\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = 0$，$\vee 11 = 1$，$\vee 12 = \vee 21 = 1$；$\vee 22 = 2$；对于仅包含公理模式公理模式1、公理模式2、公理模式4生成的公理的理论，适用下列规则：$\neg 0 = 1$，$\neg 1 = 2$，$\neg 2 = 0$，$\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 21 = 0$，$\vee 11 = \vee 12 = 1$；$\vee 22 = 2$. 求证与（1）、（2）类似的结论.

（4）对于仅包含公理模式公理模式1、公理模式2、公理模式3生成的公理的理论，适用下列规则：$\neg 0 = 1$，$\neg 1 = 0$，$\neg 2 = 3$，$\neg 3 = 0$，$\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = \vee 03 = \vee 30 = \vee 23 = \vee 32 = 0$，$\vee 11 = 1$，$\vee 12 = \vee 21 = \vee 22 = 2$，$\vee 13 = \vee 31 = \vee 33 = 3$. 求证与（1）、（2）类似的结论.

证明：

（1）类似习题34（2）可证.

（2）第一点：类似习题34（4）可证.

第二点：若公理模式1生成的公理是M的定理，则$(S或S) \Rightarrow S$对应的符号为0．又因为$(S或S) \Rightarrow S$对应的符号为2，类似习题34（1）、习题34（2），S对应的符号唯一，矛盾.

（3）类似习题35（1）、习题35（2）可证.

（4）类似习题35（1）、习题35（2）可证．注：习题35表明逻辑理论的独立性.

Chapter 2

集合论（Théorie des ensembles）

2.1 集合化公式（Relations collectivisantes）

元数学定义 25. 集合（*ensemble*）

在包含二元特别符号$\in$的理论中，项又称集合.

注：集合论中，项与集合为同义词，万物皆为集合.

记号定义 13. 属于（*appartenance*）

令T、U为语句，x为字母，则用"$T \in U$"表示"$\in TU$"（第三优先级）；"$T \notin U$"表示"非$(T \in U)$"（第三优先级）.

定义 1. 元素（*élément*）

如果$A \in B$，则称A为B的元素.

定义 2. 包含于（*contenu dans*），包含（*contenir*），子集（*partie/sous-ensemble*）

如果不包含字母z的公式$(\forall z)((z \in x) \Rightarrow (z \in y))$为真，则称$x$包含于$y$，$y$包含$x$，或者$x$是$y$的子集，记作$x \subset y$（第三优先级）.

记号定义 14. 非子集（*non partie/non sous-ensemble*）

"非$(x \subset y)$"记作$x \not\subset y$（第三优先级）.

替代规则 12.

令T、U、V为语句，x为字母，则$(V|x)(T \subset U)$和$(V|x)T \subset (V|x)U$相同.

证明：根据替代规则9、替代规则5可证.

形成规则 13.

令T、U为包含2元特别符号$\in$的理论M的项，则$T \subset U$是M的公式.

证明：根据形成规则8，可证.

定理 4. 子集的反身性

$x \subset x$.

证明：令z为不是常数的字母，则$(z \in x) \Rightarrow (z \in x)$，根据证明规则27可证.

定理 5. 子集的传递性

$((x \subset y)$与$(y \subset z)) \Rightarrow (x \subset z)$.

证明：令u为不是常数的字母，根据证明规则30，$(u \in x) \Rightarrow (u \in y)$、$(u \in y) \Rightarrow (u \in z)$，故$(u \in x) \Rightarrow (u \in z)$. 根据证明规则31可证.

补充定理 1.

$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Leftrightarrow (\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$.

证明：

由于待证公式不包含字母，故可令x、y为不同字母且都不是常数.

令R为公式$(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$，根据证明规则32，$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x = y))$.

假设$(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x = y))$，则$R \Rightarrow (x = y)$. 同时，根据公理模式6，$(x = y) \Rightarrow R$，故$R \Leftrightarrow x = y$. 根据公理模式7，$\tau_x(R) = \tau_x(x = y)$. 根据定理1，$y = y$，根据补充证明规则8，$(\exists x)(x = y)$，即$\tau_x(x = y) = y$，根据定理3，$y = \tau_x(R)$，根据证明规则27，$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$. 故$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Rightarrow (\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$.

反过来，令x'、x''是与x、y、z不同的字母，假设$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$.

若$(\forall x')(\forall x'')((x'|x)R$与$(x''|x)R)$，根据证明规则30，$(x'|x)R$、$(x''|x)R$，因此$(x'|x)R \Leftrightarrow (x''|x)R$，根据证明规则27，$(\forall y)((x'|x)R \Leftrightarrow (x''|x)R)$，根据公理模式7，$\tau_y((x'|x)R) = \tau_y((x''|x)R)$，进而，$x' = \tau_y((x'|x)R)$、$x'' = \tau_y((x'|x)R)$，根据定理3，$x' = x''$，即$R$是$y$上的单一公式.

根据证明规则45，$R \Rightarrow (y = \tau_y(R))$. 假设$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x))$，根据证明规则32，$(\forall x)(\forall y)R$，根据证明规则27，$R$为真，故$y = \tau_y(R)$. 又因为$(\forall x)(x = \tau_y(R))$，根据证明规则27，$x = \tau_y(R)$，根据定理3，$x = y$，故$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y))$.

注：左边为本文的外延公理，右边是外延公理的另一种表述，包含相同元素的集合相等. 本补充定理表明，外延公理的两种表述方式是等价的.

显式公理 1. 外延公理

$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y))$.

补充定理 2.

$(\forall z)((z \in x) \Leftrightarrow (z \in y)) \Rightarrow (x = y)$.

证明：根据显式公理1可证.

证明规则 48.

令R为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x、y为不同的字母，并且R不包含y，则在M中，$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$是$y$上的单一公式.

证明：令z、z'为不同于x且不出现在R中的字母．假设$(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow R)$与$(\forall x)((x \in z') \Leftrightarrow R)$，则$(\forall x)(((x \in z) \Leftrightarrow R)$与$(x \in z') \Leftrightarrow R))$，因此$(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (x \in z'))$，即$(z \subset z')$与$(z' \subset z)$，根据显式公理1，$z = z'$，得证.

记号定义 15. 集合化（*collectivisante*）

如果公式R不包含y，x、y是不同的字母，则语句$(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$记作$Coll_x R$.

注：如果$Coll_x R$为真，则意味着满足R的x的集合存在.

元数学定义 26. 集合化公式（*relation collectivisante*），满足公式的元素集合（*ensemble de éléments tels que une relation*）

在包含*2*元特别符号$\in$ 的理论M中，如果R不包含y，x、y是不同的字母，如果$Coll_x R$是定理，则称在M中，R为x上的集合化公式，称不含y的项$\tau_y((\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R))$为满足$R$的$x$的集合，记作$\{x|R\}$.

补充定理 3.

$Coll_x(x \in y)$.

证明：$(x \in y) \Leftrightarrow (x \in y)$，得证.

补充定理 4. 罗素悖论，所有不属于自身的项不能组成集合

非$Coll_(x \notin x)$.

证明：令y为不是常数的字母，由于$y \notin y$或$y \in y$，故非$((y \in y) \Leftrightarrow (y \notin y))$，根据公理模式5，$(\exists x)($非$((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x)))$，因此，非$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x))$，根据证明规则27，$(\forall y)($非$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x)))$，因此，非$(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x))$.

证明规则 49.

令R为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x、y为不同的字母，并且R不包含y，如果在M中，R是x上的集合化公式，则在M中，公式$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$是$y$上的函数性公式.

证明：根据证明规则48可证.

补充证明规则 11.

令R为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x为字母，如果在M中，R是x上的集合化公式，则$(x \in \{x|R\}) \Leftrightarrow R$是$M$的定理.

证明：根据定义，$Coll_x R$和$(\forall x)(x \in \{x|R\}) \Leftrightarrow R)$相同，根据证明规则30可证.

补充证明规则 12.

令R、S为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x为字母，如果在M中，R是x上的集合化公式，且$R \Leftrightarrow S$，则S也是x上的集合化公式.

证明：由于$R \Leftrightarrow S$，因此$Collx_R \Leftrightarrow Coll_x S$，得证.

证明规则 50.

令R、S为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x为字母，如果在M中，R和S都是x上的集合化公式，则$(\forall x)(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow \{x|R\} \subset \{x|S\}$，$(\forall x)(R \Leftrightarrow S) \Leftrightarrow \{x|R\} = \{x|S\}$.

证明：根据补充证明规则11、显式公理1可证.

显式公理 2. 配对公理

$(\forall x)(\forall y)Coll_z(z = x$或$z = y)$.

注：本公理表明，任何两个项均可构成集合.

定义 3. 二元集合（*ensemble à deux éléments*），仅有一个元素的集合（*ensemble réduit à un élément*），仅有两个元素的集合（*ensemble réduit à deux éléments*）

$\{z|z = x$或$z = y\}$称为二元集合，记作$\{x, y\}$. $\{x, x\}$称为仅有一个元素的集合，记作$\{x\}$. 如果$x \neq y$，则$\{x, y\}$称为仅有两个元素的集合.

定义 4. 二元子集（*partie à deux éléments*）

如果某个二元集合是另一个集合的子集，则称其为二元子集.

补充定理 5.

$\{x, y\} = \{y, x\}$.

证明：根据证明规则50可证.

补充定理 6.

$x \in \{y\} \Leftrightarrow x = y$.

证明：根据补充证明规则12，$x \in \{y\} \Leftrightarrow (x = y$或$x = y)$，得证.

补充定理 7.

$\{z|z = x\} = \{x\}$.

证明：$\{x\}$即$\{z|z = x$或$z = x\}$，根据证明规则50、公理模式1可证.

补充定理 8.

$(\{x\} \subset X) \Leftrightarrow (x \in X)$.

证明：

令z为不是常数的字母，$\{x\} \subset X$即$(\forall z)((z \in \{x\}) \Rightarrow (z \in X))$，根据补充定理6，$(\forall z)((z \in \{x\}) \Rightarrow (z \in X)) \Leftrightarrow (\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$．若$\{x\} \subset X$，则$(\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$，故$(x = x) \Rightarrow (x \in X)$，因此$x \in X$．

反过来，假设$x \in X$，则$(z = x) \Rightarrow (z \in X)$，进而$(\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$．得证．

补充定理 9.

$(\{x\} = \{y\}) \Leftrightarrow (x = y)$.

证明：

令z为不是常数的字母，根据补充定理7、补充证明规则7，$z \in \{x\} \Leftrightarrow z = x$，$z \in \{y\} \Leftrightarrow z = y$．由于$\{x\} = \{y\}$，根据公理模式6，$z \in \{x\} \Leftrightarrow z \in \{y\}$，则$(z = x) \Leftrightarrow (z = y)$．根据证明规则27，$(\forall z)((z = x) \Leftrightarrow (z = y))$，根据证明规则30，$(x = x) \Leftrightarrow (x = y)$，根据定理1，$x = y$，故$(\{x\} = \{y\}) \Rightarrow (x = y)$.

反过来，根据证明规则44，$(x = y) \Rightarrow (\{x\} = \{y\})$.

补充替代规则 8.

“令R为公式，x、y、X、Y为不同字母，并且R不包含X和Y，则$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)Coll_x((\exists y)((y \in Y$与$R))$是公理”是公理模式.

证明：根据替代规则8可证.

公理模式 8. 搜集和并集公理模式

令R为公式，x、y、X、Y为不同字母，并且R不包含X和Y，则$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)Coll_x((\exists y)((y \in Y$与$R))$是公理.

注：该公理模式的含义是，对任何一个y值，能使公式R（含参数x、y）成立的x值，都属于某个集合，则对任何一个集合，它的所有元素y值对应的能使公式R成立的x值，构成一个集合.

证明规则 51. 分类定理

令P为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x为字母，A为不包含x的项，则在M中，“P与$x \in A$”是x上的集合化公式.

证明：

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论M_0，则M_0不包含任何常数：

令R为公式P与$x = y$，其中y是不同于x且不出现在P、A中的字母．根据证明规则27，$(\forall x)(R \Rightarrow x \in \{y\})$，即$(\{y\}|X)(R \Rightarrow x \in X)$.

由于x、y是不同字母，根据公理模式5、证明规则27，$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X))$，由于$A$不包含$x$、$y$，根据公理模式8、证明规则30，$Coll_x((\exists y)((y \in A$与$R))$．根据证明规则43，$(y \in Y$与$R) \Leftrightarrow (x = y$与$x \in A$与$R)$，由于$y$不出现在$P$、$A$中，根据证明规则33，$(\exists y)(y \in Y$与$R) \Leftrightarrow ((\exists y)(x = y))$与$x \in A$与$R)$．根据补充证明规则8，$(\exists y)(x = y)$，因此$(\exists y)(y \in Y$与$R) \Leftrightarrow (x \in A$与$R)$即$Coll_x(x \in A$与$R)$．

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立．

证明规则 52.

令R为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x为字母，A为不包含x的项，如果$R \Rightarrow (x \in A)$是M的定理，则在M中，R是x上的集合化公式．

证明：$R \Rightarrow (x \in A)$，因此$R \Leftrightarrow R$与$(x \in A)$，根据证明规则51可证．

补充证明规则 13.

令R为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的定理，x为字母，则(非$Coll_x(R)$)为真．

证明：

如果M存在矛盾，根据补充证明规则2，任何公式均为真．

如果M不存在矛盾，假设$Coll_x(R)$为真，根据补充证明规则11，$(x \in \{x|R\}) \Leftrightarrow R$，即$x \in \{x|R\}$，因此对任意公式$R'$，$R' \Rightarrow x \in \{x|R\}$，根据证明规则52，$R'$是$x$上的集合化公式．与补充定理4矛盾．故“非$Coll_x(R)$”．

补充定理 10. 所有的项不能组成集合

（*1*）非$(\exists y)(\forall x)(x \in y)$；

（*2*）$(\forall y)(\exists x)(x \notin y)$．

证明：根据补充证明规则13可证．

证明规则 53.

令T、A为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的项，x和y为不同的字母，如果T不包含y，A不包含x和y，则在M中，$(\exists x)(y = T$与$x \in A)$是y上的集合化公式．

证明：令R为公式$y = T$，则$(\forall y)((y = T) \Rightarrow (y \in \{T\}))$，令$X$为不同于$y$且不出现在$R$的字母，则$(\forall x)(\exists X)(\forall y)((y = T) \Rightarrow (y \in X))$．根据公理模式8，$(\forall A)Colly((\exists x)((x \in A$与$y = T))$，根据证明规则30，$(\exists x)((x \in A$与$y = T)$是$y$上的集合化公式．

元数学定义 27. 形式为项的对象集合（*ensemble des objets de la forme d'un terme*）

令T、A为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的项，x和y为不同的字母，如果T不包含y，A不包含x和y，则称$\{y|(\exists x)(y = T与x \in A)\}$为“对于$x \in A$形式为$T$的对象集合”.

补充定理 11. 补集的存在性

$x \notin A$与$x \in X$是x上的集合化公式.

证明：根据证明规则51可证.

定义 5. （*complémentaire d'un ensemble*）

如果$A \subset X$，则称$\{x|x \notin A与x \in X\}$为A的补集，记作$\complement_X A$或$X - A$.

补充定理 12.

如果$A \subset X$，则$\complement_X(\complement_X A) = A$.

证明：根据补充证明规则12，$x \notin \{x|x \notin A与x \in X\} \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in A)$，又因为$x \in X \Rightarrow x \in A$，所以$((x \in X \Rightarrow x \in A)与x \in X) \Leftrightarrow x \in A$，进而$\complement_X(\complement_X A) = A$.

补充定理 13.

如果$A \subset X$，$B \subset X$，则$(A \subset B) \Leftrightarrow (\complement_X B \subset \complement_X A)$.

证明：令x为字母，$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$，因此$A \subset B \Leftrightarrow ((x \notin B) \Rightarrow (x \notin A))$，故$A \subset B \Leftrightarrow ((x \notin B)与(x \in X) \Rightarrow (x \notin A)与(x \in X))$，因此$A \subset B \Leftrightarrow \complement_X B \subset \complement_X A)$.

补充证明规则 14.

令R为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的定理，x为字母，则$Coll_x(非R)$为真.

证明：

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论M_0，则M_0不包含任何常数：

先证$((x \in y) \Leftrightarrow (非R)) \Leftrightarrow (x \notin y)$.

若$(x \notin y)$，则$(x \in y) \Leftrightarrow (非R)$即$((x \notin y)或非R)与((x \in y)或R)$，显然为真. 反过来，若$(x \in y) \Leftrightarrow (非R)$，即$(x \notin y) \Leftrightarrow R)$，因此$x \notin y$.

由于“非$(x \in Y与x \notin Y)$”，故$(\forall x)(x \notin \complement_Y Y)$，则$(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$，即$(\exists X)(\forall x)(x \notin X) \Leftrightarrow (\exists X)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (非R))$，得证.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

定理 6. 空集的存在性和唯一性

$(\forall x)(x \notin X)$是X上的函数性公式.

证明：

$(\forall x)(x \notin X)$即$(\forall x)$非$(x \in X)$，而$(\forall x)$非$(x \in X) \Rightarrow (\forall x)$非$(x \in X)$或$(\forall T)(\forall x)(x \in T)$. 根据证明规则33，$(\forall x)$非$(x \in X)$或$(\forall T)(\forall x)(x \in T) \Leftrightarrow (\forall T)(\forall x)($非$(x \in X)$或$(x \in T))$，即$(\forall T)(X \subset T)$. 因此，$(\forall x)(x \notin X) \Rightarrow (\forall T)(X \subset T)$.

若$(\forall x)(x \notin Y)$与$(\forall x)(x \notin Z)$，则$(\forall T)(Y \subset T)$、$(\forall T)(Z \subset T)$. 因此$Y \subset Z$、$Z \subset Y$. 根据显式公理1，$Y = Z$，即$(\forall x)(x \notin X)$是X上的单一公式.

另一方面，由于"非$(x \in Y$与$x \notin Y)$"，故$(\forall x)(x \notin \complement_Y Y)$，则$(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$，得证.

定义 6. 空集（*ensemble vide*），非空（*n'est pas l'ensemble vide*）

不包含X和x的项$\tau_X((\forall x)(x \notin X))$，称为空集，记作$\varnothing$.

如果$E \neq \varnothing$，则称E非空.

注：用形式语言表示，空集是$\tau\neg\neg\neg \in \tau\neg\neg \in \square\square\square$.

补充定理 14.

$(\forall x)(x \notin X) \Leftrightarrow (X = \varnothing)$，$(\exists x)(x \in X) \Leftrightarrow (X \neq \varnothing)$.

证明：根据定理6、证明规则46可证.

补充定理 15.

$(\forall x)(x \notin \varnothing)$.

证明：根据补充定理14（1）、补充证明规则7可证.

补充定理 16.

（*1*）$\{x\} \neq \varnothing$；

（*2*）$\{\{x\}\} \neq \{\varnothing\}$ ；

（*3*）$\{\{\{x\}\}\} \neq \{\{\varnothing\}\}$.

证明：

（1）根据补充定理6，$x \in \{x\}$，根据公理模式5，$(\exists y)(y \in \{x\})$，根据补充定理14（2）可证.

（2）根据补充定理9、补充定理16（1）可证.

（3）根据补充定理9、补充定理16（2）可证.

补充定理 17.

（*1*）$(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$；

（*2*）$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \neq y$与$y \neq z$与$x \neq z)$；

（*3*）$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)(x \neq y$与$y \neq z$与$x \neq z$与$x \neq t$与$y \neq t$与$z \neq t)$.

证明：根据补充定理16、补充定理9，$\{\{\{\varnothing\}\}\}$、$\{\{\varnothing\}\}$、$\{\varnothing\}$、$\varnothing$互不相等，得证.

补充定理 18.

（*1*）$(\forall X)(\varnothing \subset X)$.

（*2*）$X \subset \varnothing \Rightarrow X = \varnothing$.

（*3*）$X \subset \{x\} \Leftrightarrow (X = \{x\})$或$(X = \varnothing)$.

（*4*）如果$(\forall y)(y \in X \Rightarrow y = x)$，则$(X = \{x\})$或$(X = \varnothing)$.

证明：

（1）令z为不是常数的字母，根据补充定理15，$z \notin \varnothing$，因此$(z \in \varnothing) \Rightarrow (z \in y)$，故$(\forall z)((z \in \varnothing) \Rightarrow (z \in y))$，得证.

（2）假设$X \not\subset \varnothing$，则$(\exists x)(x \in X)$，设$y \in X$，则$y \in \varnothing$，和补充定理15矛盾，得证.

（3）根据定理4、补充定理18（1），$(X = \{x\})$或$(X = \varnothing) \Rightarrow X \subset \{x\}$. 反过来，假设$X \subset \{x\}$与$X \neq \varnothing$，根据补充定理6，$(\forall z)((z \in X) \Rightarrow (z = x))$. 由于$X \neq \varnothing$，根据补充定理14（2），$(\exists x)(x \in X)$. 添加辅助常数$x$、$X$以及公理$x \in X$. 根据补充定理8，$\{x\} \subset X$，根据显式公理1，$X = \{x\}$，根据证明规则19得证.

（4）根据补充定理6，$y = x \Leftrightarrow y \in \{x\}$，因此$(\forall y)(y \in X \Rightarrow y = x) \Leftrightarrow X \subset \{x\}$，根据补充定理18（3）得证.

习题 36.

求证：$(x = y) \Leftrightarrow (\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$.

证明：

根据公理模式6、证明规则27，$(x = y) \Rightarrow (\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$. 反过来，假设$(\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$，根据证明规则31，$(\{x\}|X)((x \in X) \Rightarrow (y \in X))$，即$(x \in \{x\}) \Rightarrow (y \in \{x\})$，因此$y \in \{x\}$，根据补充定理6，$x = y$.

习题 37.

求证：

（*1*）$\varnothing \neq \{x\}$.

（*2*）$(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$.

证明：

（1）即补充定理16（1）.

（2）即补充定理17（1）.

习题 38.

如果$A \subset X$、$B \subset X$，求证：$(B \subset \complement_X A) \Leftrightarrow (\complement_X B \subset A)$、$(A \subset \complement_X B) \Leftrightarrow (\complement_X A \subset B)$.

证明：根据补充定理12、补充定理13可证.

习题 39.

求证：$X \subset \{x\} \Leftrightarrow (X = \{x\})$或$(X = \varnothing)$.

证明：即补充定理18（3）.

习题 40.

求证：$\varnothing = \tau_X(\tau_x(x \in X) \notin X)$.

证明：由于待证公式不包含X，故令X为不是常数的字母.

$\tau_x(x \in X) \notin X s$非$(\tau_x(x \in X) \in X)$，即非$(\exists x)(x \in X)$，根据证明规则29，$\tau_x(x \in X) \notin X \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin X)$，根据证明规则27，$(\forall X)(\tau_x(x \in X) \notin X \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin X))$，根据公理模式7，得证.

习题 41.

令M为包含特别符号$\in$的等式理论，并有显式公理*1'*：$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$，求证：显式公理*1*是$M$的定理.

证明：根据补充定理1可证.

2.2 有序对（Couples）

定理 7.

$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \Leftrightarrow (x = x'$与$y = y')$.

证明：

根据证明规则44，$(x = x'$与$y = y') \Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$.

反过来，假设$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$，若$x \neq x'$，根据补充定理9，$\{x\} \neq \{x'\}$，则$\{x\} = \{x', y'\}$，根据证明规则50，$(\forall x)((z = x) \Leftrightarrow (z = x')$或$(z = y))$，因此$x = x'$，矛盾. 故$x = x'$，同理可证$y = y'$.

记号定义 16. 有序对的记号（*signe d'un couple*），三元组的记号（*signe d'un triplet*），四元组的记号（*signe d'un quadlet*）

$\{\{x\}, \{x, y\}\}$记作(x, y)．$((x, y), z)$记作(x, y, z)．$((x, y, z), t)$记作(x, y, z, t).

定义 7. 有序对（*couple*）

如果$(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$，则称$z$为有序对.

定义 8. 三元组（*triplet*）

如果$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(u = (x, y, z))$，则称$u$为三元组.

定义 9. 四元组（*triplet*）

如果$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)(u = ((x, y, z, t))$，则称$u$为三元组.

补充定理 19.

(x,y)为有序对.

证明：根据定理1，$(x,y)=(x,y)$，根据公理模式5，$(\exists u)(\exists v)((u,v)=(x,y))$，得证.

补充定理 20. 有序对的第一元素和第二元素存在且唯一

$(\exists y)(z=(x,y))$是x上的函数性公式，$(\exists x)(z=(x,y))$是y上的函数性公式.

证明：根据定理7可证.

定义 10. 有序对的第一元素（*première coordonnée d'un couple/première projection d'un couple*），有序对的第二元素（*seconde coordonnée d'un couple/seconde projection d'un couple*）

令z为有序对，则不包含x、y的项$\tau_x((\exists y)(z=(x,y)))$称为$z$的第一元素，记作$pr_1z$，不包含$x$、$y$的项$\tau_y((\exists x)(z=(x,y)))$称为$z$的第二元素，记作$pr_2z$.

记号定义 17. 用有序对表示字母（*remplacer le lettre par couple*）

如果某个字母z只能是有序对，则可以选择两个不会引起混淆的新字母，令第一个新字母是x，第二个新字母是y，此时，可用x表示pr_1z，用y表示pr_2z，在其他情况下用(x,y)表示z. 此时，公式中的“(x,y)为有序对与”可以省略.

注：
使用该记号的例子，如：
$\{z|(z\text{为有序对})\text{与}R\}$可以表示为$\{(x,y)|R\}$；
$(X_{pr_1k}\cap Y_{pr_2k})_{(k\text{为有序对})\text{与}k\in K}$可以表示为$(X_i\cap Y_j)_{(i,j)\in K}$，
在本文中，公式记号过于复杂的情况下，会使用这种表述方式，

补充定理 21.

（*1*）$(pr_1z=x)\Leftrightarrow(\exists y)(z=(x,y))$；
（*2*）$(pr_2z=y)\Leftrightarrow(\exists x)(z=(x,y))$.

证明：根据补充定理20、证明规则46可证.

补充定理 22.

（*1*）$(z=(x,y))\Leftrightarrow(z\text{为有序对})\text{与}(pr_1z=x)\text{与}(pr_2z=y)$.
（*2*）$(z=(x,y))\text{与}x\in X\text{与}y\in Y\Leftrightarrow(z\text{为有序对})\text{与}(pr_1z\in X)\text{与}(pr_2z\in Y)$.
（*3*）$(z=(pr_1z,pr_2z))\Leftrightarrow(z\text{为有序对})$.
（*4*）$pr_1(x,y)=x$，$pr_2(x,y)=y$.

证明：

（1）根据补充定理21（1）、补充定理21（2）， $(z$为有序对$)$与$(pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)) \Leftrightarrow$
$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(z = (x', y')$与$z = (x, y'')$与$z = (x'', y))$.

根据定理7，$(z = (x', y')$与$z = (x, y'')$与$z = (x'', y))$等价于$(z = (x, y)$与$x = x'$与$x = x''$与$y = y'$与$y = y'')$，进而等价于$(z = (x, y))$与$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(x = x'$与$x = x''$与$y = y'$与$y = y'')$，根据定理1，$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(x = x'$与$x = x''$与$y = y'$与$y = y'')$，则
$(z$为有序对$)$与$(pr_1z = x)$与$(pr_2z = y) \Leftrightarrow (z = (x, y))$.

（2）根据补充定理20，$(\exists y)(z = (x, y))$是x上的函数性公式，$(\exists x)(z = (x, y))$是y上的函数性公式，根据补充证明规则10，$(pr_1z = x)$与$(x \in X) \Leftrightarrow (pr_1z \in X)$、$(pr_2z = y)$与$(y \in Y) \Leftrightarrow (pr_2z \in Y)$．因此，$(z = (x, y))$与$x \in X$与$y \in Y \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)$与$x \in X$与$y \in Y$，进而等价于$(z$为有序对$)$与$(pr_1z \in X)$与$(pr_2z \in Y)$，得证．

（3）根据补充定理22（1），$(z = (pr_1z, pr_2z)) \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1z = pr_1z)$与$(pr_2z = pr_2z)$，得证．

（4）根据补充定理22（1）可证．

补充证明规则 15.

令R为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x、y为不同字母，z为与x、y不同的字母且R不包含z，则：

（*1*）$(\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$R) \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R$.

（*2*）$(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists z)((z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R)$.

（*3*）$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z$为有序对$) \Rightarrow (pr_1z|x)(pr_2z|y)R))$.

证明：

（1）根据补充定理22（1），$(\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$R) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((z$为有序对$)$与$(pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)$与$R)$.

根据证明规则33，$(\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$R) \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(\exists x)(\exists y)((pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)$与$R)$.

根据证明规则47，$(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)((\exists x)(z = (x, y))$与$R)$，根据补充定理21（2），
$(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)(R$与$(pr_2z = y))$.

根据替代规则9，$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)(pr_1z|x)(R$与$(pr_2z = y))$，即等价于
$(\exists y)((pr_1z|x)R$与$(pr_2z = y))$，根据证明规则47、补充定理21（1），$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R \Leftrightarrow$
$(\exists y)((\exists x)(R$与$(pr_1z = x))$与$(pr_2z = y))$，即等价于$(\exists x)(\exists y)((pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)$与$R)$.

综上，得证．

（2）根据补充证明规则15（1），$(\exists z)((z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R) \Leftrightarrow (\exists z)(\exists x)(\exists y)$
$(z = (x, y)$与$R)$，根据证明规则33，其等价于$(\exists z)(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$与$(\exists x)(\exists y)R$．根据定理1，$(\exists z)(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$，因此其等价于$(\exists x)(\exists y)R$.

（3）令R'为非R，根据补充证明规则15（2），非$(\exists x)(\exists y)R' \Leftrightarrow$ 非$(\exists z)((z$为有序对$)$与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R')$，即$(\forall x)(\forall y)($非非$R) \Leftrightarrow (\forall z)($非$(z$为有序对$)$或$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)$非非$R)$，因此$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z$为有序对$) \Rightarrow (pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R))$.

定理 8. 两个集合的乘积的存在性

$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall z)((z \in Z) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$x \in X$与$y \in Y)$.

证明：

由于待证公式不含y，故令y为不是常数的字母.

根据证明规则53，$(\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X)$在z上是集合化公式，令$A_y = \{z|(\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X)\}$，则$(\forall z)((z \in A_y) \Leftrightarrow (\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X))$，根据公理模式5、证明规则27，$(\forall y)(\exists x)(\forall z)((z = (x, y)$与$x \in X) \Rightarrow (z \in A))$，根据公理模式8，$(\exists y)((y \in Y)$与$(\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X))$是$z$上的集合化公式，又因为$(\exists y)((y \in Y)$与$(\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((z = (x, y))$与$x \in X$与$y \in Y)$，因此$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall z)((z \in Z) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$x \in X$与$y \in Y)$.

定义 11. 两个集合的乘积（*produit de deux ensembles*）

$\{z|(\exists x)(\exists y)((z = (x, y))$与$x \in X$与$y \in Y))\}$称为$X$和$Y$的乘积，记作$X \times Y$.

定理 9.

如果$A' \neq \varnothing$、$B' \neq \varnothing$，则$(A' \times B') \subset (A \times B) \Leftrightarrow (A' \subset A)$与$(B' \subset B)$.

证明：

令z为不是常数的字母.

$(A' \times B') \subset (A \times B)$等价于$(\forall z)(z \in (A' \times B') \Rightarrow z \in (A \times B))$，进而等价于$(\forall z)((\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$x \in A'$与$y \in B') \Rightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$x \in A$与$y \in B))$.

根据补充定理22（2），$(A' \times B') \subset (A \times B) \Leftrightarrow ((z$为有序对$)$与$pr_1 z \in A'$与$pr_2 z \in B' \Rightarrow (z$为有序对$)$与$pr_1 z \in A$与$pr_2 z \in B))$.

若$(A' \subset A)$与$(B' \subset B)$，则$pr_1 z \in A' \Rightarrow pr_1 z \in A$、$pr_2 z \in B' \Rightarrow pr_2 z \in B$，根据补充证明规则5（3），$(A' \times B') \subset (A \times B)$.

反过来，若$(A' \times B') \subset (A \times B)$，假设$x \in A'$，由于$B' \neq \varnothing$，故$(\exists y)(y \in B')$，即$\tau_y(y \in B') \in B'$，则$(x, \tau_y(y \in B)) \in (A' \times B')$，因此$(x, \tau_y(y \in B)) \in (A \times B)$，故$x \in A$，所以，$A' \subset A$，同理$B' \subset B$.

补充定理 23.

（1）$z \in X \times Y \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1 z \in X)$与$(pr_2 z \in Y)$.

（2）$(x, y) \in X \times Y \Leftrightarrow (x \in X)$与$(y \in Y)$.

（3）$X \times Y = X' \times Y' \Leftrightarrow X = X'$与$Y = Y'$.

证明：

（1）根据补充定理22（2）可证.

（2）根据补充定理23（1）、补充定理19可证.

（3）根据定理9可证.

定理 10.

$A \times B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing)$或$(B = \varnothing)$.

证明：假设$A \times B \neq \varnothing$，根据补充定理14（2），$(\exists x)(x \in (A \times B))$，即$\tau_x(x \in (A \times B)) \in X \times Y \Rightarrow (pr_1(\tau_x(x \in (A \times B))) \in X)$与$(pr_2(\tau_x(x \in (A \times B))) \in Y)$，则$A \neq \varnothing$、$B \neq \varnothing$.

反过来，若$A \neq \varnothing$、$B \neq \varnothing$，则$\tau_x(x \in A) \in A$、$\tau_y(y \in B) \in B$，故$(\tau_x(x \in A), \tau_y(y \in B)) \in (A \times B)$，因此$A \times B \neq \varnothing$. 得证.

补充定理 24.

（*1*）$(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow x = x'$与$y = y'$与$z = z'$.

（*2*）$(x, y, z, t) = (x', y', z', t') \Leftrightarrow x = x'$与$y = y'$与$z = z'$与$t = t'$.

证明：根据定理7可证.

习题 42.

令R为公式，x、y为不同字母，z为与x、y不同的字母且R不包含z. 求证：

（*1*）$(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists z)((z$为有序对$)$与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R)$;

（*2*）$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z$为有序对$) \Rightarrow (pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R))$.

证明：

（1）即补充证明规则15（2）;

（2）即补充证明规则15（3）.

2.3 对应（Correspondances）

定义 12. 图（*graphe*）

如果$(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z$为有序对$))$，则称$G$为图.

补充定理 25.

$G' \subset G$，G为图，则G'为图.

证明：令z为不是常数的字母. 由于G是图，故$(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z$为有序对$))$. 又因为$G' \subset G$，故$(\forall z)(z \in G' \Rightarrow z \in G)$，根据证明规则27、证明规则30，$(\forall z)(z \in G' \Rightarrow (z$为有序对$))$，得证.

补充定理 26.

$X \times Y$为图.

证明：令z为不是常数的字母，根据补充定理23（1），$z \in X \times Y \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1 z \in X)$与$(pr_2 z \in Y)$，因此，$z \in X \times Y \Rightarrow (z$为有序对$)$，进而$(\forall z)(z \in X \times Y \Rightarrow (z$为有序对$))$，得证.

定义 13. 通过图对应（*correspond par graphe*）

令G为图，如果$(x, y) \in G$，则称y通过G对应x.

元数学定义 28. 生成图的公式（*relation qui admet un graphe*），公式的图（*graphe de relation*）

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，令R为公式，如果$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x, y) \in G \Leftrightarrow R))$，则称$R$为对于$x$、$y$生成图$G$的公式．项$\tau_G((G$为图$)$与$((x, y) \in G \Leftrightarrow R))$称为公式$R$关于$x$、$y$的图.

补充证明规则 16.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，令R为对于x、y生成图G的公式，则：

（*1*）$(x, y) \in G \Leftrightarrow R$.

（*2*）如果R不包含z，则$z \in G \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$.

证明：

（1）根据证明规则21可证.

（2）根据补充证明规则16（1），$(z$为有序对$)$与$(pr_1 z, pr_2 z) \in G \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$，根据补充定理22（3），$(z = (pr_1 z, pr_2 z))$与$(pr_1 z, pr_2 z) \in G \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$，根据证明规则43，$(z = (pr_1 z, pr_2 z))$与$z \in G \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$.

由于G为图，因此$z \in G \Rightarrow (z$为有序对$)$，进而$z \in G \Rightarrow z = (pr_1 z, pr_2 z)$，故$z \in G \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$.

补充定理 27.

G_1、G_2为图，则：

（*1*）如果$(\forall x)(\forall y)((x, y) \in G_1 \Leftrightarrow (x, y) \in G_2)$，则$G_1 = G_2$.

（*2*）如果$(\forall x)(\forall y)((x, y) \in G_1 \Rightarrow (x, y) \in G_2)$，则$G_1 \subset G_2$.

证明：

（1）令z为不是常数的字母．故$(pr_1 z, pr_2 z) \in G_1 \Leftrightarrow (pr_1 z, pr_2 z) \in G_2$，根据补充定理22（3），$(z = (pr_1 z, pr_2 z))$与$(pr_1 z, pr_2 z) \in G_1 \Leftrightarrow (z = (pr_1 z, pr_2 z))$与$(pr_1 z, pr_2 z) \in G_2$，因此，$(z = (pr_1 z, pr_2 z))$与$z \in G_1 \Leftrightarrow (z = (pr_1 z, pr_2 z))$与$z \in G_2$，故$z \in G_1 \Leftrightarrow z \in G_2$，得证.

（2）与补充定理27（1）同理可证.

补充证明规则 17. 公式的图的唯一性

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y生成图的公式，则R关于x、y的图是唯一的.

证明：设G_1、G_2均为R的图，$(x,y) \in G_1 \Leftrightarrow R$，$(x,y) \in G_2 \Leftrightarrow R$，因此$(x,y) \in G_1 \Leftrightarrow (x,y) \in G_2$，根据补充定理27（1）可证.

补充证明规则 18.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，Z为不同于x、y的字母，且R不包含Z，如果$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$，则$R$为生成图的公式.

证明：

由于$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$不包含$x$、$y$，故令$x$、$y$为不是常数的字母.

添加辅助常数Z，令$(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$为公理，则$R \Rightarrow (x,y) \in Z$.

根据证明规则51，$z \in Z$与(z为有序对)与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$是z上的集合化公式．令G为$\{z|z \in Z$与(z为有序对)与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R\}$，则$z \in G \Leftrightarrow z \in Z$与($z$为有序对)与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$，即$(z \in G \Rightarrow$ (z为有序对))，因此，G为图.

进而，$(x,y) \in G \Leftrightarrow (x,y) \in Z$与($(x,y)$为有序对)与$(pr_1(x,y)|x)(pr_2(x,y)|y)R$．根据补充定理20，$(x,y)$为有序对，根据补充定理22（4），$pr_1(x,y) = x$、$pr_2(x,y) = y$．因此，$(pr_1(x,y)|x)(pr_2(x,y)|y)R \Leftrightarrow R$，故$(x,y) \in G \Leftrightarrow (x,y) \in Z$与$R$，又因为$R \Rightarrow (x,y) \in Z$，因此$(x,y) \in G \Leftrightarrow R$.

综上，根据证明规则19，得证.

补充证明规则 19.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，T为不包含x、y的项，且字母x、y不是M的常数，如果$(R \Rightarrow (x,y) \in T)$，则$R$为生成图的公式.

证明：由于$R \Rightarrow (x,y) \in T$且$x$、$y$不是常数，根据证明规则27，因此$(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in T)$，由于$T$不包含$x$、$y$，令$Z$为不同于$x$、$y$的字母且$R$不包含$Z$，根据替代规则9，$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$，根据补充证明规则18可证.

补充证明规则 20.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，A、B为项，x、y为不同的字母，且A、B均不包含x、y，则“$x \in A$与$y \in B$”为生成图的公式.

证明：根据补充定理23，$(x \in A$与$y \in B) \Rightarrow (x,y) \in A \times B$，根据补充证明规则19可证.

定理 11. 图的第一射影和第二射影存在且唯一

G为图，则有且仅有一个A满足$(\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow x \in A$，有且仅有一个$B$满足$(\exists x)((x,y) \in G) \Leftrightarrow y \in B$.

证明：根据证明规则53，$(\exists z)(x=pr_1 z$与$z\in G)$为集合化公式．令$A=\{x|(\exists z)(x=pr_1 z$与$(z$为有序对$)$与$z\in G)\}$，根据补充证明规则11，$(\exists z)(x=pr_1 z$与$(z$为有序对$)$与$z\in G)\Leftrightarrow x\in A$．

由于G为图，故$z\in G\Rightarrow(z$为有序对$)$，因此$(z$为有序对$)$与$z\in G\Leftrightarrow z\in G$．

根据补充定理21（1），$(\exists z)(x=pr_1 z$与$z\in G)\Leftrightarrow(\exists z)((\exists y)(z=(x,y))$与$z\in G)$，后者即$(\exists z)(\exists y)(z=(x,y)$与$z\in G)$，即$(\exists y)(\exists z)(z=(x,y)$与$z\in G)$．

根据补充证明规则10，$(\exists z)(z=(x,y)$与$z\in G)\Leftrightarrow(x,y)\in G$．综上，$x\in A\Leftrightarrow(\exists y)(x,y)\in G$．$A$的存在性得证．

A的唯一性，根据显式公理1可证．同理可证B的存在性和唯一性．

定义 14. 图的第一射影（*première projection d'un graphe*），图的定义域（*ensemble de définition d'un graphe*），图的第二射影（*seconde projection d'un graphe*），值域（*ensemble des valeurs d'un graphe*）

G为图，则$\{x|(\exists y)((x,y)\in G))\}$称为$G$的第一射影，或称为$G$的定义域，记作$pr_1G$；$\{y|(\exists x)((x,y)\in G))\}$称为$G$的第二射影，或称为$G$的值域，记作$pr_2G$．

补充证明规则 21.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，R为不包含字母G的公式，如果$(\exists y)R$或者$(\exists x)R$是M的定理，则“非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow R))$”是$M$的定理．

证明：

若$(\exists y)R$，假设$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow R))$，令$G$为该图，则$(\exists y)((x,y)\in G)\Leftrightarrow(\exists y)R$，因此$(\exists y)((x,y)\in G)$，根据定理11，$(\exists A)(\forall x)(x\in A)$，与补充定理10矛盾．同理可证$(\exists x)R$为真的情况．

补充定理 28.

（*1*）非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow x=y))$；

（*2*）非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow x\in y))$；

（*3*）非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow x\subset y))$；

（*4*）非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow x=\{y\}))$．

证明：根据补充证明规则21可证．

补充定理 29.

$(x,y)\in G\Rightarrow x\in pr_1G$，$(x,y)\in G\Rightarrow y\in pr_2G$．

证明：假设$(x,y)\in G$，则$(\exists y)((x,y)\in G)$，根据补充证明规则11，$x\in pr_1G$．
同理可证$y\in pr_2G$．

补充定理 30.

G为图，则$G \subset pr_1G \times pr_2G$.

证明：令x、y为不是常数的字母．设$(x,y) \in G$．根据补充定理29，$x \in pr_1G$，$y \in pr_2G$．根据补充定理22（1），$(x,y) \in pr_1G \times pr_2G$．即$(x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in pr_1G \times pr_2G$，根据补充定理27（2）得证．

补充定理 31.

（*1*）$\varnothing$为图．

（*2*）G为图，如果$pr_1G = \varnothing$或$pr_2G = \varnothing$，则$G = \varnothing$．

（*3*）$pr_1\varnothing = \varnothing$，$pr_2\varnothing = \varnothing$．

（*4*）如果$X \neq \varnothing$，$Y \neq \varnothing$，则$pr_1(X \times Y) = X$，$pr_2(X \times Y) = X$．

（*5*）G_1、G_2为图，且$G_1 \subset G_2$，则$pr_1G_1 \subset pr_1G_2$，$pr_2G_1 \subset pr_2G_2$．

证明：

（1）根据补充定理15可证．

（2）根据补充定理30，$G \subset \varnothing$，根据补充定理18（2）得证．

（3）令x、y为不是常数的字母，根据补充定理15，$(x,y) \notin \varnothing$，因此“非$(\exists y)((x,y) \in \varnothing)$”，即$x \notin pr_1\varnothing$，根据补充定理14（1）可证．

（4）$\{x|(\exists y)((x,y) \in X \times Y))\} = \{x|(\exists y)(x \in X$与$y \in Y))\}$，等于$\{x|x \in X$与$(\exists y)(y \in Y)\}$，等于$\{x|x \in X\}$，得证．

（5）令x、y为不是常数的字母，由于$G_1 \subset G_2$，因此$(x,y) \in G_1 \Rightarrow (x,y) \in G_2$．

根据证明规则31，$(\exists y)((x,y) \in G_1 \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G_2$，$(\exists x)((x,y) \in G_1 \Rightarrow (\exists x)((x,y) \in G_2$，根据证明规则50可证．

定义 15. 对应（*correspondance*），对应的图（*graphe d'une correspondance*）、出发域（*ensemble de départ*）、到达域（*ensemble d'arrivée*），通过一个对应对应（*correspond par une correspondance*）、对应的定义域（*ensemble de définition d'une correspondance/domaine d'une correspondance*）、对应的值域（*ensemble des valeurs d'une correspondance/image d'une correspondance*）

G为图，如果$pr_1G \subset A$且$pr_2G \subset B$，则称三元组(G,A,B)为A到B的对应，称G为(G,A,B)的图，A为(G,A,B)的出发域，B为(G,A,B)的到达域．如果$(x,y) \in G$，则称y通过(G,A,B)对应x，pr_1G称为(G,A,B)的定义域，pr_2G称为(G,A,B)的值域．

补充定理 32.

(G,A,B)为对应，$B \subset B'$，则(G,A,B)为对应．

证明：根据定义可证．

定义 16. 元素到元素的公式（*relation entre un élément et un élément*）、公式定义的对应（*correspondance définie par la relation*）

如果R为对于x、y生成图G的公式，A、B满足$pr_1G \subset A$、$pr_2G \subset B$，则称R为对于x、y从A的元素到B的元素的公式，(G, A, B)称为R定义的对于x、y的A到B的对应．

补充定理 33.

G为图，则$(x \in X$与$(x, y) \in G)$为对于x、y生成图G'的公式，并且pr_2G'=$\{y|(\exists x)(x \in X$与$(x, y) \in G)\}$．

证明：令$G' = \{z|pr_1z \in X$与$z \in G\}$，则$G' \subset G$，根据补充定理25，G'为图．根据补充定理22（4），$(x, y) \in G' \Leftrightarrow (x \in X$与$(x, y) \in G)$，根据公理模式5，$(x \in X$与$(x, y) \in G)$为对于$x$、$y$生成图的公式．又因为$(x, y) \in G' \Leftrightarrow (x \in X$与$(x, y) \in G)$，因此$pr_2G' = \{y|(\exists x)(x \in X$与$(x, y) \in G)\}$．

定义 17. 在图下的像（*image par une image*），在对应下的像（*image par une image correspond*）

G为图，则$\{y|(\exists x)(x \in X$与$(x, y) \in G)\}$称为X在G下的像，记作$G\langle X\rangle$．令F为对应，且F的图为G，则X在G下的像也称为X在F下的像．

补充定理 34.

G为图，则$G\langle X\rangle \subset pr_2G$．

证明：由于$z \in G\langle X\rangle \Leftrightarrow (\exists x)(x \in X$与$(x, y) \in G)$，$z \in pr_2G \Leftrightarrow (\exists x)((x, y) \in G))$，根据证明规则31，$z \in G\langle X\rangle \Rightarrow z \in pr_2G$，得证．

补充定理 35.

G为图，则$G\langle pr_1G\rangle = pr_2G$．

证明：根据公理模式5，$(x, y) \in G \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in G)$，因此，$(x \in \{y|(\exists x)((x, y) \in G))\}$与$(x, y) \in G) \Leftrightarrow (x, y) \in G$，得证．

补充定理 36.

G为图，则$G\langle\varnothing\rangle = \varnothing$．

证明：根据补充定理15，$x \notin \varnothing$，则非$(x \in \varnothing$与$(x, y) \in G)$，因此非$(\exists x)(x \in \varnothing$与$(x, y) \in G)$，即$(\exists x)(x \in \varnothing$与$(x, y) \in G) \Leftrightarrow x \in \varnothing$，故$G\langle\varnothing\rangle = \varnothing$．

定理 12.

G为图，则$X \subset Y \Rightarrow G\langle X\rangle \subset G\langle Y\rangle$．

证明：根据证明规则50可证．

定理 13.

G为图，$pr_1G \subset A$，则$G\langle A\rangle = pr_2G$.

证明：根据定理12、补充定理31（5）、补充定理34、显式公理1可证.

定义 18. 切割（*coupe*）

令G为图，x为字母，则称$G\langle\{x\}\rangle$为G对x的切割，也可以记作$G(x)$. 令F为A到B的对应，其图为G，则$G\langle\{x\}\rangle$也称为F对x的切割，记作$F\langle\{x\}\rangle$或$F(x)$.

补充定理 37.

G为图，则$y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (x, y) \in G$.

证明：$y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (\exists x')(x' \in \{x\}$与$(x', y) \in G))$，即$y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (\exists x')(x' = x$与$(x', y) \in G))$，根据证明规则43，$y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (\exists x')(x' = x$与$(x, y) \in G))$，因此，$y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (\exists x')(x' = x)$与$(x, y) \in G)$. 根据补充证明规则8，$(\exists x')(x' = x)$，因此，$y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (x, y) \in G$.

补充定理 38.

G、G'均为图，则：

（*1*）$G \subset G' \Leftrightarrow (\forall x)(G\langle x\rangle \subset G'\langle x\rangle)$.

（*2*）$G \subset G' \Rightarrow G\langle A\rangle \subset G'\langle A\rangle$.

证明：

（1）根据补充定理37可证.

（2）由于$G \subset G'$，因此$(x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in G'$，故$x \in A$与$(x, y) \in G \Rightarrow x \in A$与$(x, y) \in G'$，因此$(\exists x)(x \in A$与$(x, y) \in G) \Rightarrow (\exists x)(x \in A$与$(x, y) \in G')$，得证.

补充定理 39. 逆图是图

（*1*）$(z$为有序对$)$与$(pr_2z, pr_1z) \in G)$是z上的集合化公式.

（*2*）$\{z|(z$为有序对$)$与$(pr_2z, pr_1z) \in G)\}$为图.

证明：

（1）如果$(z$为有序对$)$与$(pr_2z, pr_1z) \in G)$，根据补充定理29，$pr_2z \in pr_1G$，$pr_1z \in pr_2G$，故$z \in pr_2G \times pr_1G$，根据证明规则52可证.

（2）根据定义可证.

定义 19. 逆图（*graphe réciproque*）

G为图，则$\{z|(z$为有序对$)$与$(pr_2z, pr_1z) \in G)\}$称为G的逆图，记作G^{-1}.

补充定理 40.

G为图，则$(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G^{-1}$.

证明：根据定义，$(y,x)\in G^{-1}\Leftrightarrow((y,x)$为有序对$)$与$(x,y)\in G$，根据补充定理19，$(y,x)$为有序对，得证.

补充定理 41.

$\varnothing^{-1}=\varnothing$.

证明：令z为不是常数的字母，则$z\in\varnothing^{-1}\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_2z,pr_1z)\in\varnothing$，$z\notin\varnothing^{-1}\Leftrightarrow(z$非为有序对$)$或$(pr_2z,pr_1z)\notin\varnothing$，故$(\forall z)z\notin\varnothing^{-1}$，因此$\varnothing^{-1}=\varnothing$.

补充定理 42.

G为图，则$pr_1G^{-1}=pr_2G$，$pr_2G^{-1}=pr_1G$.

证明：pr_1G^{-1}即$\{y|(\exists x)((x,y)\in G^{-1}))\}$，因此，$pr_1G^{-1}=\{y|(\exists x)((y,x)\in G))\}$，即$pr_1G^{-1}=pr_2G$，同理可证$pr_2G^{-1}=pr_1G$.

补充定理 43.

$(X\times Y)^{-1}=Y\times X$.

证明：令z为不是常数的字母，$z\in(X\times Y)^{-1}\Leftrightarrow\{z|(z$为有序对$)$与$(pr_2z,pr_1z)\in(X\times Y)\}$. 根据补充定理23（1），$z\in(X\times Y)\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_1z\in X)$与$(pr_2z\in Y)$，因此，$z\in(X\times Y)^{-1}\Leftrightarrow\{z|(z$为有序对$)$与$pr_2z\in X$与$pr_1z\in Y\}$. 根据补充定理23（1），得证.

补充定理 44.

G为图，则$(G^{-1})^{-1}=G$.

证明：令z为不是常数的字母，$z\in(G^{-1})^{-1}\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_2z,pr_1z)\in G^{-1})$. 根据补充定理40，$(pr_2z,pr_1z)\in G^{-1}\Leftrightarrow(pr_1z,pr_2z)\in G$，根据补充定理22（3），$z\in(G^{-1})^{-1}\Leftrightarrow(z=(pr_1z,pr_2z))$与$(pr_1z,pr_2z)\in G)$. 根据证明规则43，$z\in(G^{-1})^{-1}\Leftrightarrow(z=(pr_1z,pr_2z))$与$z\in G)$，根据补充定理22（3），$z\in(G^{-1})^{-1}\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$z\in G$，又因为$z\in G\Rightarrow(z$为有序对$)$，因此，$z\in(G^{-1})^{-1}\Leftrightarrow z\in G$，得证.

补充定理 45.

G_1、G_2为图，则：

（*1*）$G_1\subset G_2\Leftrightarrow {G_1}^{-1}\subset {G_2}^{-1}$.

（*2*）如果$G_1\subset G_2$，则$(G_2-G_1)^{-1}={G_2}^{-1}-{G_1}^{-1}$.

证明：

（1）根据补充定理40可证.

（2）根据定义，$(x,y)\in(G_2-G_1)^{-1}\Leftrightarrow(y,x)\in G_2$与$(y,x)\notin G_1$，得证.

定义 20. 在图下的原像（*image réciproque par une image*）

G为图，$G^{-1}\langle X\rangle$称为X在G下的原像.

定义 21. 对称图（*graphe symétrique*）

对于图G，如果$G = G^{-1}$，则称G是对称图.

补充定理 46. 逆对应是对应

如果(G, A, B)为A到B的对应，则(G^{-1}, B, A)为B到A的对应.

证明：根据定义和补充定理39，G、G^{-1}为图，$pr_1G \subset A$ˇ$pr_2G \subset B$，根据补充定理42，$pr_1G^{-1} \subset B$，$pr_2G^{-1} \subset A$，因此(G^{-1}, B, A)为B到A的对应.

定义 22. 逆对应（*correspondance réciproque*），在对应下的原像（*image réciproque par une corespondance*）

令F为A到B的对应，且F的图为G，则B到A的对应(G^{-1}, B, A)，称为F的逆对应，记作F^{-1}. X在G下的原像，也称为X在F下的原像.

补充定理 47. 图的复合是图

G、G'为图，则$(\exists y)((x, y) \in G$与$(y, z) \in G') \Rightarrow (x, z) \in pr_1G \times pr_2G'$，且$(\exists y)((x, y) \in G$与$(y, z) \in G')$为生成图的公式.

证明：根据补充定理28，$(\exists y)((x, y) \in G$与$(y, z) \in G') \Rightarrow (x \in pr_1G$与$z \in pr_2G')$，根据补充定理23（1），$(\exists y)((x, y) \in G$与$(y, z) \in G') \Rightarrow (x, z) \in pr_1G \times pr_2G'$. 根据补充证明规则18，可知其为生成图的公式.

定义 23. 图的复合（*composée de deux graphes*）

令G、G'为图，则公式$(\exists y)((x, y) \in G$与$(y, z) \in G')$关于x、z的图，称为G和G'的复合，记作$G' \circ G$或者$G'G$.

定理 14.

G、G'为图，则$(G' \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ G'^{-1}$.

证明：令z、x为不是常数的字母，根据补充定理39，$(x, y) \in G$与$(y, z) \in G' \Leftrightarrow (z, y) \in G'^{-1}$与$(y, x) \in G'^{-1}$，即$(\exists y)((x, y) \in G$与$(y, z) \in G') \Leftrightarrow (\exists y)((z, y) \in G'^{-1}$与$(y, x) \in G'^{-1})$，根据补充证明规则16（1），$(x, z) \in G' \circ G \Leftrightarrow (z, x) \in G^{-1} \circ G'^{-1}$，根据补充定理39，$(z, x) \in (G' \circ G)^{-1} \Leftrightarrow (z, x) \in G^{-1} \circ G'^{-1}$，根据补充定理27（1）可证.

定理 15. 图的复合的结合律

G_1、G_2、G_3为图，则$(G_3 \circ G_2) \circ G_1 = G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$.

证明：$(x, t) \in (G_3 \circ G_2) \circ G_1 \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G_1$与$(\exists z)((y, z) \in G_2$与$(z, t) \in G_3))$，根据证明规则33，$(x, t) \in (G_3 \circ G_2) \circ G_1 \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)((x, y) \in G_1$与$(y, z) \in G_2$与$(z, t) \in G_3)$. 同理可得，$(x, t) \in G_3 \circ (G_2 \circ G_1) \Leftrightarrow (\exists z)(\exists y)((x, y) \in G_1$与$(y, z) \in G_2$与$(z, t) \in G_3)$. 根据补充定理27（1）可证.

定理 16.

G、G'为图，则$G' \circ G\langle A\rangle = G'\langle G\langle A\rangle\rangle$.

证明：令z为不是常数的字母，根据证明规则33，$z \in G' \circ G\langle A\rangle \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(x \in A$与$(x,y) \in G$与$(y,z) \in G')$，故$z \in G \circ G'\langle A\rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in G\langle A\rangle$与$(y,z) \in G')$，即$z \in G \circ G'\langle A\rangle \Leftrightarrow z \in G'\langle G\langle A\rangle\rangle$. 得证.

补充定理 48.

G、G'为图，则$pr_1(G' \circ G) = G^{-1}\langle pr_1 G'\rangle$.

证明：令x为不是常数的字母，则$x \in pr_1(G \circ G') \Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in G' \circ G))$，即$(\exists z)(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G')$. 同时，$x \in G^{-1}\langle pr_1 G'\rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_1 G'$与$(y,x) \in G^{-1})$，即$x \in G^{-1}\langle pr_1 G'\rangle \Leftrightarrow (\exists y)((\exists z)((y,z) \in G')$与$(y,x) \in G^{-1})$，因此，$x \in G^{-1}\langle pr_1 G'\rangle \Leftrightarrow (\exists z)(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G')$，得证.

补充定理 49.

G、G'为图，则$pr_2(G' \circ G) = G'\langle pr_2 G\rangle$.

证明：令x为不是常数的字母，则$x \in pr_2(G' \circ G) \Leftrightarrow (\exists z)((z,x) \in G \circ G'))$，即$(\exists z)(\exists y)((z,y) \in G'$与$(y,x) \in G)$. 同时，$x \in G'\langle pr_2 G\rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G'$与$(y,x) \in G)$，即$x \in G'\langle pr_2 G\rangle \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)((z,y) \in G'$与$(y,x) \in G)$，得证.

补充定理 50.

G为图，则$X \subset pr_1 G \Leftrightarrow X \subset G^{-1}\langle G\langle X\rangle\rangle$.

证明：假设$X \subset pr_1 G$，令x为不是常数的字母，则$x \in X \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$，因此$x \in X \Rightarrow (\exists y)(x \in X$与$(x,y) \in G)$，根据公理模式5，$x \in X$与$(x,y) \in G \Rightarrow (\exists z)(z \in X$与$(z,y) \in G)$，故$x \in X \Rightarrow (\exists z)(z \in X$与$(z,y) \in G)$.

同时，根据补充定理40，$(x,y) \in G \Leftrightarrow (y,x) \in G^{-1}$，则$x \in X \Rightarrow (\exists y)((y,x) \in G^{-1})$. 因此，$x \in X \Rightarrow (\exists y)((\exists z)(z \in X$与$(z,y) \in G)$与$(y,x) \in G^{-1})$. 进而，$X \subset pr_1 G \Rightarrow X \subset G^{-1}\langle G\langle X\rangle\rangle$. 反过来，根据补充定理34，$G^{-1}\langle G\langle X\rangle\rangle \subset pr_2 G^{-1}$，根据补充定理42，$G^{-1}\langle G\langle X\rangle\rangle \subset pr_1 G$. 故$X \subset G^{-1}\langle G\langle X\rangle\rangle \Rightarrow X \subset pr_1 G$. 综上，得证.

补充定理 51.

（*1*）G_1、G_2、G_1'、G_2'为图，$G_1 \subset G_2$，$G_1' \subset G_2'$，则$G_1' \circ G_1 \subset G_2' \circ G_2$.

（*2*）G、G'为图，则$pr_1(G' \circ G) \subset pr_1 G$，$pr_2(G' \circ G) \subset pr_2 G'$.

证明：

（1）由于$G_1 \subset G_2$，$G_1' \subset G_2'$，则$(x,y) \in G_1 \Rightarrow (x,y) \in G_2$，$(y,z) \in G_1' \Rightarrow (y,z) \in G_2'$，因此$(\exists y)((x,y) \in G_1$与$(y,z) \in G_1') \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G_2$与$(y,z) \in G_2')$，根据证明规则50得证.

（2）$(\exists z)(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G') \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$与$(\exists z)(\exists y)(y,z) \in G'$．因此$(\exists z)(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G') \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$．根据证明规则50，$pr_1(G' \circ G) \subset pr_1 G$得证．同理可证$pr_2(G' \circ G) \subset pr_2 G'$．

补充定理 52.

G为图，则：

（1）$G \circ \varnothing = \varnothing$，$\varnothing \circ G = \varnothing$．

（2）当且仅当$G = \varnothing$时，$G^{-1} \circ G = \varnothing$．

证明：

（1）令y为不是常数的字母，则$(x,z) \in G \circ \varnothing \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in \varnothing$与$(y,z) \in G)$，非$(x,y) \in \varnothing$，因此非$(x,z) \in G \circ \varnothing$，根据补充定理14（1），$G \circ \varnothing = \varnothing$．同理，$\varnothing \circ G = \varnothing$．

（2）$G = \varnothing$时，根据补充定理52（1），$G^{-1} \circ G = \varnothing$．反过来，如果$G^{-1} \circ G = \varnothing$，令$x$、$y$为不是常数的字母，则$(x,x) \in \varnothing \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G$与$(x,y) \in G)))$．假设$z \in G$，则$z$为有序对，故$(pr_1 z, pr_2 z) \notin G$，矛盾，因此$z \notin G$，故$G = \varnothing$．

补充定理 53. 对应的复合是对应

令F为A到B的对应，其图为G，F'为B到C的对应，其图为G'，则$(G' \circ G, A, C)$为A到C的对应．

证明：根据补充定理51（2），$pr_1(G' \circ G) \subset pr_1 G$，$pr_2(G' \circ G) \subset pr_2 G'$．而$pr_1 G \subset A$、$pr_2 G' \subset C$，因此$pr_1(G' \circ G) \subset A$、$pr_2(G' \circ G) \subset C$，得证．

定义 24. 对应的复合（*composée de deux correspondances*）

令F为A到B的对应，其图为G，F'为B到C的对应，其图为G'，则称$(G' \circ G, A, C)$为F和F'的复合，记作$F' \circ F$或者$F'F$．

令F为A到B'的对应，其图为G，F'为B到C的对应，且$B' \subset B$，则(G, A, B)和F'的复合，也称为F和F'的复合，同样记作$F' \circ F$或者$F'F$．

注：原书对应的符合仅包含前半段定义，后半段是对原定义的推广．在《布尔巴基数学基础》的其他书中，会使用推广的定义．

补充定理 54.

F、F'为对应，则：

（1）$F' \circ F\langle X \rangle = F'\langle F\langle X \rangle \rangle$．

（2）$(F' \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ F'^{-1}$．

证明：

（1）根据定理16可证．

（2）根据定理14可证．

补充定理 55. 对角集合的存在性

$(z$为有序对$)$与$pr_1 z = pr_2 z$与$pr_1 z \in A$是z上的集合化公式.

证明：如果$(z$为有序对$)$与$pr_1 z = pr_2 z$与$pr_1 z \in A$，根据补充定理29，$pr_2 z \in A$，$pr_1 z \in A$，故$z \in A \times A$，根据证明规则52可证.

定义 25. 对角集合（*ensemble de la diagonale*）

$\{z | (z$为有序对$)$与$pr_1 z = pr_2 z$与$pr_1 z \in A\}$称为$A \times A$的对角集合，记作Δ_A.

补充定理 56.

$\Delta_A \subset A \times A$.

证明：令z为不是常数的字母．根据补充定理23（1），$z \in A \times A \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1 z \in A)$与$(pr_2 z \in A)$．而$(z$为有序对$)$与$pr_1 z = pr_2 z$与$pr_1 z \in A \Rightarrow$ 与$(pr_1 z \in A)$与$(pr_2 z \in A)$，得证.

补充定理 57.

Δ_A为图.

证明：根据定义可证.

补充定理 58.

$pr_1 \Delta_A = A$，$pr_2 \Delta_A = A$.

证明：令x为不是常数的字母，则$x \in pr_1 \Delta_A \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in \Delta_A)$，即$x \in pr_1 \Delta_A \Leftrightarrow (\exists y)(x = y$与$x \in A)$，因此$x \in pr_1 \Delta_A \Leftrightarrow x \in A$，前半部分得证．同理可证后半部分.

补充定理 59.

$(x, y) \in \Delta_A \Leftrightarrow (x = y)$与$(x \in A)$，$(x, x) \in \Delta_A \Leftrightarrow (x \in A)$.

证明：根据补充定理19、补充定理22（4）可证.

补充定理 60.

G为图，则：

（*1*）如果$pr_1 G \subset A$，则$G \circ \Delta_A = G$.

（*2*）如果$pr_2 G \subset B$，则$\Delta_B \circ G = G$.

证明：

（1）令x、z为不是常数的字母，$(\exists y)((x, y) \in \Delta_A$与$(y, z) \in G) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in A$与$x = y$与$(y, z) \in G)$，因此$(\exists y)((x, y) \in \Delta_A$与$(y, z) \in G) \Leftrightarrow x \in A$与$(\exists y)(x = y)$与$(x, z) \in G$．根据补充定理29，$(x, z) \in G \Rightarrow x \in pr_1 G$，又因为$pr_1 G \subset A$，因此$(x, z) \in G \Rightarrow x \in A$．而根据补充证明规则8，$(\exists y)(x = y)$．因此$(\exists y)((x, y) \in \Delta_A$与$(y, z) \in G) \Leftrightarrow (x, z) \in G$，根据证明规则50可证.

（2）与补充定理60（1）同理可证.

补充定理 61.

$\Delta_A{}^{-1} = \Delta_A$

证明：令z为不是常数的字母，根据证明规则44，(z为有序对)与$pr_1z = pr_2z$与$pr_1z \in A \Leftrightarrow$ (z为有序对)与$pr_1z = pr_2z$与$pr_2z \in A$，根据证明规则50得证.

定义 26. 恒等对应（*correspondance identique*）

对应(Δ_A, A, A)称为恒等对应，记作Id_A.

补充定理 62.

如果F为A到B的对应，则$F \circ Id_A = F$，$Id_B \circ F = F$.

证明：根据补充定理60（1）、补充定理60（2）可证.

定义 27. 函数图（*graphe fonctionnel*），函数（*fonction*），函数的定义域（*ensemble de définition d'une fonction*）、函数的值域（*ensemble des valeurs d'une fonction*），映射（*application*），函数的值（*valeur de fonction*）

如果图F满足$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x,y) \in F$与$(x,z) \in F \Rightarrow (y = z))$，则称$F$为函数图. 如果$F$为函数图，且$pr_2F \subset B$，则对应$(F, pr_1F, B)$称为函数，$pr_1F$称为函数$(F, pr_1F, B)$的定义域；$pr_2F$称为函数$(F, pr_1F, B)$的值域. 函数$(F, A, B)$也可称为$A$到$B$的映射. 如果$f$为函数，其图为$F$，且$x \in pr_1F$，则$\tau_y((x,y) \in F)$称为函数$f$对于$x$的值，记作$f(x)$、$f_x$、$F(x)$或$F_x$.

注：如果x不属于函数f的定义域，根据定义可知，$f(x)$表示论域的第一个对象，该对象除了与自身相等外，不具有任何其他性质.

定义 28. 族（*famille*），集族（*famille d'ensembles*），元素族（*famille d'éléments*），指标集（*ensemble des indices*），双族（*famille double*），子集族（*famille de parties*），空族（*famille vide*），非空族（*famille non vide*）

函数(X, I, E)的图也可以称为族或集族，或称为E的元素族，令i为不出现在X、I、E的任何一个字母，则族可以记作$(X_i)_{i \in I}(X_i \in E)$，在没有歧义的情况下也可以简记为$(X_i)_{i \in I}$，当$I$为$\{i|R\}$时，也可以记作$(X_i)R$. 此时，$I$称为族的指标集.

如果I可以表示为$A \times B$的形式，则称其为双族.

如果族满足$(\forall x)(x \in E \Rightarrow x \subset F)$，则称其为$F$的子集族.

如果族的指标集为空集，则称其为空族. 如果族的指标集非空，则称其为非空族.

注：在本文中，“非空集族”只表示该族的值域各元素均非空集；“非空族”则表示该族的指标集为空，以避免歧义.

补充定理 63.

(G, A, B)为函数，$B \subset B'$，则(G, A, B')为函数.

证明：根据定义可证.

补充定理 64. 函数的值的基本性质

（1）F为函数图，$x \in pr_1F$，则$(x,y) \in F$为y上的函数性公式.

（2）f为函数，其图为F，则$(x \in pr_1F)$与$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x,y) \in F$.

（3）$x \in pr_1F \Leftrightarrow (x, f(x)) \in F$.

（4）$x \in pr_1F \Rightarrow f(x) \in pr_2F$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）如果$(x \in pr_1F)$，根据证明规则46、补充定理64（1），$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x,y) \in F$. 根据补充定理29，$(x,y) \in F \Rightarrow (x \in pr_1F)$. 得证.

（3）根据补充定理64（2）可证.

（4）根据补充定理64（3）、补充定理29可证.

补充定理 65.

F为函数图，$(\forall x)(x \in pr_1F \Rightarrow f(x) \in A)$，则$pr_2F \subset A$.

证明：令x为不是常数的字母，由于$x \in pr_1F \Rightarrow f(x) \in A$，根据补充定理64（2），$(x,y) \in F \Rightarrow (y = f(x))$与$(f(x) \in A)$，其等价于$(y = f(x))$与$(y \in A)$，因此$(\exists x)((x,y) \in F) \Rightarrow y \in A$，得证.

补充定理 66.

（1）$\varnothing$为函数图，$(\varnothing, \varnothing, A)$为函数.

（2）Id_A为函数.

（3）函数f为(F, A, pr_2F)，且$x \in A \Leftrightarrow f(x) = x$，则$f = Id_A$.

（4）如果$X \subset A$，则$Id_A\langle X\rangle = X$.

证明：

（1）根据补充定理31（1），$\varnothing$为图；根据补充定理31（3），$pr_1\varnothing = \varnothing$，$pr_2\varnothing = \varnothing$，则$pr_2\varnothing \subset A$；令$x$、$y$、$z$为不是常数的字母，根据补充定理15，$(x,y) \in \varnothing$为假、$(x,z) \in \varnothing$为假，故$(x,y) \in F$与$(x,z) \in F \Rightarrow (y = z)$，因此$(\varnothing, \varnothing, A)$为函数.

（2）根据补充定理57，Δ_A为图. 根据补充定理59，$pr_1\Delta_A = A$，$pr_2\Delta_A = A$. 根据补充定理59，$(x,y) \in \Delta_A \Rightarrow x = y$，$(x,z) \in \Delta_A \Rightarrow x = z$，得证.

（3）令f的图为F，则$(x,y) \in F \Leftrightarrow (x \in A$与$f(x) = y)$，又因为$x \in A \Leftrightarrow f(x) = x$，则$(x,y) \in F \Leftrightarrow (x \in A$与$x = y)$，根据补充定理59、补充证明规则17，$F = \Delta_A$，根据补充定理58，$pr_2F = A$，得证.

（4）$Id_A\langle X\rangle = \{y|(\exists x)(x \in X$与$(x,y) \in \Delta_A)\}$，等于$\{y|(\exists x)(x \in X$与$y \in A$与$x = y)\}$，等于$\{y|y \in X\}$，等于$X$，得证.

定义 29. 恒等映射（*application identique*），恒等函数（*fonction identique*）

恒等对应又称恒等映射或恒等函数.

补充定理 67.

f、g为函数，其图分别为F、G，且$F \subset G$，则(f的定义域) $\subset$ (g的定义域).

证明：根据补充定理31（5）可证.

补充定理 68.

f、g为函数，其图分别为F、G，且$pr_1F = pr_1G$，$(\forall x)(x \in pr_1F \Rightarrow f(x) = g(x))$，则$F$=$G$. 如果($f$的到达域) = ($g$的到达域)，则$f = g$.

证明：根据补充定理64（2），$(x \in pr_1F)$与$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in F$，$(x \in pr_1G)$与$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in G$. $(x, y) \in F \Rightarrow (x \in pr_1F)$与$y = g(x)$，因此$(x, y) \in F \Rightarrow (x, y) \in G$，同理可证$(x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in F$，根据补充定理27（1），$F = G$. 进而，如果($f$的到达域) = ($g$的到达域)，根据定义，$f = g$.

补充定理 69.

G为图，则G为函数图 $\Leftrightarrow (\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle \subset X)$.

证明：$(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle \subset X) \Leftrightarrow (\forall X)(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$(y, x) \in G$与$(y, z) \in G \Rightarrow z \in X)$. 如果$G$为函数图，则$(y, x) \in G$与$(y, z) \in G \Rightarrow z = x$，故$x \in X$与$(y, x) \in G$与$(y, z) \in G \Rightarrow z \in X$，因此$(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle \subset X)$. 反过来，如果$(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle \subset X)$，当$(y, x) \in G$与$(y, z) \in G$时，$(\exists x)(x \in \{x\}) \Rightarrow z \in \{x\}$，故$z = x$，因此$G$为函数图，得证.

补充定理 70.

f为A到B的映射，则：

（*1*）$x \in f^{-1}\langle X\rangle \Leftrightarrow f(x) \in X$与$x \in A$.

（*2*）$f^{-1}\langle B\rangle = A$.

（*3*）$x \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$与$x \in A$.

（*4*）$x \in f^{-1}(f(x)) \Leftrightarrow x \in A$.

（*5*）$X \subset A$，则$x \in X \Rightarrow f(x) \in f\langle X\rangle$.

（*6*）$x \in A \Rightarrow \{f(x)\} = f\langle\{x\}\rangle$.

（*7*）$X \subset A \Rightarrow X \subset f^{-1}\langle f\langle X\rangle\rangle$.

（*8*）$(X \subset$ (f的值域)) $\Rightarrow (X = f\langle f^{-1}\langle X\rangle\rangle)$.

证明：

（1）令f的图为F，则$x \in f^{-1}\langle X\rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in X$与$(x, y) \in F)$，根据补充定理64（2），等价于$(\exists y)(y \in X$与$(x \in A)$与$(y = f(x)))$，等价于$(\exists y)(y = f(x))$与$x \in A$与$f(x) \in X$.

$x \in A \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in F)$，根据补充定理64(2)，$x \in A \Rightarrow (\exists y)(y = f(x))$，因此$x \in f^{-1}\langle X\rangle \Leftrightarrow x \in A$与$f(x) \in X$.

（2）由于f为A到B的映射，根据补充定理64（4），$f(x) \in B$，根据补充定理70（1），$x \in f^{-1}\langle B\rangle$
$\Leftrightarrow x \in A$.

（3）$x \in f^{-1}(y)$即$x \in f^{-1}\langle\{y\}\rangle$，根据补充定理70（1）可证.

（4）根据补充定理70（3）可证.

（5）令f的图为F，$f(x) \in f\langle X\rangle \Leftrightarrow (\exists z)(z \in X$与$(z, f(x)) \in F)$. 由于$x \in X$，因此$x \in A$，根据补充定理64（3），$(x, f(x)) \in F$，因此$x \in X$与$(x, f(x)) \in F$，故$(\exists z)(z \in X$与$(z, f(x)) \in F)$，得证.

（6）$f\langle\{x\}\rangle = \{y|(\exists z)(z \in \{x\}$与$(z,y) \in F)\}$，等于$\{y|(\exists z)(z = x$与$(x,y) \in F)\}$，等于$\{y|(x,y) \in F)\}$，等于$\{y|y = f(x)\}$，即$\{f(x)\}$.

（7）令f的图为F，则$u \in f^{-1}f\langle X\rangle \Leftrightarrow (\exists y)((\exists x)((x,y) \in F$与$x \in X)$与$(u,y) \in F)$，等价于$(\exists y)(\exists x)((x,y) \in F$与$x \in X$与$(u,y) \in F)$. 同时，$X \subset A$，则$u \in X \Rightarrow (\exists y)((u,y) \in F)$，故$(\exists y)((u,y) \in F$与$u \in X)$，因此$(\exists y)(\exists x)((x,y) \in F$与$x \in X$与$(u,y) \in F)$，得证.

（8）当$X \subset (f$的值域$)$时，令f的图为F，则$u \in f\langle f^{-1}\langle X\rangle\rangle \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((x,y) \in F$与$y \in X$与$(x,u) \in F)$. 由于$F$为函数图，故$(\exists x)(\exists y)((x,y) \in F$与$y \in X$与$(x,u) \in F) \Rightarrow u = y$，因此$(\exists x)(\exists y)((x,y) \in F$与$y \in X$与$(x,u) \in F) \Rightarrow u \in X$.

反过来，由于$X \subset (f$的值域$)$，故$u \in X \Rightarrow (\exists x)((x,u) \in F)$，因此$u \in X \Rightarrow (\exists x)(\exists y)$ $((x,y) \in F$与$y \in X$与$(x,u) \in F)$，得证.

定义 30. 常数函数（*fonction constante*），常数映射（*application constante*）

令f为函数，且$(\forall x)(\forall x')(x \in (fI)$与$x' \in (fI) \Rightarrow f(x) = f(x'))$，则称$f$为常数函数或常数映射.

定义 31. 不动点（*élément invariant*）

令f为映射，如果$x \in (f$的定义域$)$与$f(x) = x$，则称x为f的不动点.

定义 32. 重合（*coïncident*）

令f、g为函数，$E \subset f$的定义域，$E \subset g$的定义域，并且$(\forall x)((x \in E) \Rightarrow f(x) = g(x))$，则称$f$和$g$在$E$上重合.

定义 33. 延拓（*prolongement*）

令$f = (F, A, B)$和$g = (G, C, D)$为函数，$F \subset G$，并且f和g在A上重合，则称g为f在C上的延拓.

补充定理 71. 函数的限制是函数

f为函数，定义域为A，$X \subset A$，则$(x \in X$与$y = f(x))$为对于x、y生成图的公式，并且，其对于x、y生成的图G为函数图，且$pr_1 G = X$.

证明：令f的图为F，根据补充定理64（2），$(x \in A$与$y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in F$，根据补充证明规则18，$(x \in X$与$y = f(x))$为对于$x$、$y$生成图的公式.

因此，$(x, y) \in G \Leftrightarrow x \in X$与$y = f(x)$，令$f$的图为$F$，根据补充定理64（2），等价于$x \in X$与$(x, y) \in F$，则$pr_1 G = \{x | x \in X$与$x \in A\}$，即$pr_1 G = X$. 对于$(x, y) \in G$、$(x, y') \in G$，有$(x, y) \in F$、$(x, y') \in F$，由于$F$为函数图，故$y = y'$，因此，$G$为函数图.

定义 34. 限制（*restriction*）

函数$f = (F, A, B)$，$X \subset A$，$(x \in X$与$y = f(x))$对于x、y生成的图为G，则称(G, X, B)为函数f在X上的限制，记作$f|X$.

补充定理 72.

f为函数，$x \subset (f$的定义域$)$，则$f|X$和f在X上重合，并且，f为$f|X$在其定义域上的延拓.

证明：令f的图为F，$f|X$的图为G，x、y为不是常数的字母. 由于$(x \in X$与$y = f(x))$ $\Rightarrow y = f(x)$，因此，$F \subset G$. 根据补充定理64（2）、补充证明规则16（1），$(x \in X$与$y = f(x)) \Leftrightarrow y = f|X(x)$，则$x \in X \Leftrightarrow f(x) = f|X(x)$，因此，$f|X$和$f$在$X$上重合. 又因为$X$为$f|X$的定义域，因此，$f$为$f|X$在其定义域上的延拓.

补充定理 73.

函数$f = (F, A, B)$，$X \subset A$，则：

（*1*）$x \in X \Rightarrow f(x) = (f|X)(x)$.

（*2*）$f|X = f \circ Id_X$.

证明：

（1）设$x \in X$，根据补充定理64（2），$(x, f(x)) \in F$. 令$f|X$的图为G，则$y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in G$，即$y = f(x) \Leftrightarrow y = f|X(x)$，因此$f(x) = f|X(x)$.

（2）$(x, z) \in F \circ \Delta_X \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in \Delta_X$与$(y, z) \in F)$，根据补充定理59，等价于$x \in X$与$(x, z) \in F$，根据补充定理64（2），等价于$x \in X$与$y = f(x)$，得证.

证明规则 54.

令T、A为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的项，x、y为不同的字母，A不包含x，A、T均不包含y. R为公式$x \in A$与$y = T$. 则其为对于x、y生成图的公式. 设其生成的图为F，则F为函数图，$pr_1 F = A$，$pr_2 F = ($对于$x \in A$形式为T的对象集合$)$，且$x \in A \Leftrightarrow F(x) = T$.

证明：

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论M_0，则M_0不包含任何常数：

令B为对于$x \in A$形式为T的对象集合，则B不包含x、y. $R \Rightarrow (x, y) \in A \times B$，由于$A$、$B$都不包含$x$、$y$，根据补充证明规则19，$R$为对于$x$、$y$生成图的公式.

令z为不同于M中常数的字母，则根据补充证明规则16（1），$(x,y)\in F$与$(x,z)\in F\Leftrightarrow x\in A$与$y=T$与$z=T$，因此，$(x,y)\in F$与$(x,z)\in F\Rightarrow(y=T)$与$(z=T)$，根据定理3，$(x,y)\in F$与$(x,z)\in F\Rightarrow y=z$，故$F$为函数图.

由于A不包含y，因此$(\exists y)(x\in A$与$y=T)\Leftrightarrow x\in A$与$(\exists y)(y=T)$，其等价于$x\in A$，因此$pr_1F=A$.

根据定义，$pr_2F=($对于$x\in A$形式为T的对象集合$)$.

根据补充定理64（2），$y=F(x)\Leftrightarrow x\in A$与$y=T$. 假设$x\in A$，则$y=F(x)\Leftrightarrow y=T$，因此$F(x)=T$. 故$x\in A\Rightarrow F(x)=T$.

反过来，假设$F(x)=T$，则$x\in A$为真. 故$x\in A\Leftrightarrow F(x)=T$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

元数学定义 29. 用项定义的函数（*fonction par un terme*）

令T、A、C为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的项，x、y为不同的字母，A不包含x，A、T、C均不包含y. 如果(对于$x\in A$形式为T的对象集合$)\subset C$，公式$x\in A$与$y=T$对于x、y生成图的公式为F，则(F,A,C)称为用T定义的函数，记作$x\mapsto T(x\in A,T\in C)$，在没有歧义的情况下也可以简记为$x\mapsto T(x\in A)$、$(T)x\in A$、$x\mapsto T$或者$T$.

定理 17. 映射的复合是映射

f为A到B的映射，g为B到C的映射，则$g\circ f$为A到C的映射.

证明：令f、g的图分别为F、G，x、y、z均为不是常数的字母，则$(x,z)\in G\circ F\Leftrightarrow(\exists y)((x,y)\in F$与$(y,z)\in G)$，$(x,z')\in G\circ F\Leftrightarrow(\exists y)((x,y)\in F$与$(y,z')\in G)$. 添加辅助常数$y$、$y'$，设$(x,y)\in F$与$(y,z)\in G$，$(x,y')\in F$与$(y',z')\in G$. 则根据函数定义，$y=y'$，故$z=z'$. 故$g\circ f$为函数.

f的定义域$A=\{x|(\exists y)(x,y)\in F\}$，$g$的定义域为$B=\{y|(\exists z)(y,z)\in G\}$. 令$g\circ f$的定义域$A'=\{x|(\exists z)((\exists y)((x,y)\in F$与$(y,z)\in G))\}$. 则$(\exists z)((\exists y)((x,y)\in F$与$(y,z)\in G))\Rightarrow(\exists y)((x,y)\in F)$，故$A'\subset A$. 另一方面，$(\exists x)(x,y)\in F\Rightarrow(\exists z)(y,z)\in G$，又因为$(x,y)\in F\Rightarrow(\exists x)(x,y)\in F$，因此，$(\exists y)((x,y)\in F)\Rightarrow(\exists z)((\exists y)((x,y)\in F$与$(y,z)\in G))$，故$A\subset A'$. 根据补充定理51（2），$pr_2G\circ F\subset C$.

综上，得证.

定义 35. 单射（*injection/application injective*），满射（*surjection/application surjective*），双射（*bijection/application bijective*）

令f为A到B的映射. 如果$(\forall x)(\forall y)(x\in A$与$y\in A$与$f(x)=f(y)\Rightarrow(x=y))$，则称$f$为$A$到$B$的单射；如果$f\langle A\rangle=B$，则称$f$为$A$到$B$的满射. 如果$f$是$A$到$B$的单射，也是$A$到$B$的满射，则称$f$为$A$到$B$的双射.

定义 36. 排列（*permutation*）

A到A的双射称为A的排列.

补充定理 74.

（*1*）函数$(\varnothing, \varnothing, A)$为单射，函数$(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$为双射.

（*2*）函数$(F, \{x\}, A)$为单射，函数$(F, \{x\}, \{y\})$为双射.

（*3*）函数Id_A为双射.

（*4*）如果$A \subset B$，则函数(Δ_A, A, B)为单射.

（*5*）$x \mapsto (x, x)(x \in A, (x, x) \in A \times A)$为单射.

证明：根据定义可证.

定义 37. 子集的规范映射（*application canonique de partie*），子集的规范单射（*injection canonique de partie*）

如果$A \subset B$，则映射(Δ_A, A, B)称为A到B的规范映射或规范单射.

定义 38. 到两个集合的乘积的对角映射（*application diagonale dans produit de deux ensembles*）

映射$x \mapsto (x, x)(x \in A, (x, x) \in A \times A)$称为对角映射.

补充定理 75.

f为A到B的单射，$X \subset A$，则$f|X$为X到B的单射.

证明：$X \subset A$，故$x \in X \Rightarrow x \in A$，根据定义可证.

定理 18.

f为A到B的映射，则f^{-1}为函数$\Leftrightarrow f$为双射.

证明：

令f的图为F，则f^{-1}的图为F^{-1}．令x、y、z为不是常数的字母.

由于f为A到B的映射，故$pr_1 F = A$，根据补充定理42，$pr_2 F^{-1} = A$.

根据补充定理35、补充定理42，f为满射$\Leftrightarrow pr_1 F^{-1} = B$.

根据补充定理64（2），$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((y, x) \in F$与$(z, x) \in F \Rightarrow (y = z))$ $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$x = f(y)$与$x = f(z) \Rightarrow (y = z))$．假设$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$x = f(y)$与$x = f(z) \Rightarrow (y = z))$，则$(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$f(y) = f(y)$与$f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$，进而$(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$.

反过来，假设$(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$，由于$y \in A$与$z \in A$与$x = f(y)$与$x = f(z) \Rightarrow f(y) = f(z)$，故$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$x = f(y)$与$x = f(z) \Rightarrow (y = z))$.

综上，得证.

定义 39. 逆映射（*application réciproque*），反函数（*fonction réciproque*）

令f为A到B的双射，则称f^{-1}为f的逆映射或反函数.

定义 40. 对合函数（*fonction involutive*）

令f为函数，如果$f^{-1} = f$，则称f为对合函数.

补充定理 76.

f为A到B的双射，则f^{-1}为B到A的双射.

证明：根据补充定理44，$(f^{-1})^{-1}$的图与f的图相同，根据定理18可证.

补充定理 77.

Id_A的反函数是Id_A.

证明：根据补充定理61可证.

补充定理 78.

f为A到B的双射，则$(\forall X)(X \subset A \Rightarrow f^{-1}\langle f\langle X\rangle\rangle = X)$.

证明：根据补充定理44，$(f)^{-1})^{-1} = f$，根据补充定理70（8）可证.

定理 19. 左逆和右逆的存在性

f为A到B的映射，如果存在B到A的映射r（或s），使$r \circ f = Id_A$（或$f \circ s = Id_B$），则f为单射（或满射）.

反过来，如果f为满射，则存在B到A的映射s，使$f \circ s = Id_B$；如果f为单射，且$A \neq \varnothing$，则存在B到A的映射r，使$r \circ f = Id_A$.

证明：

如果$r \circ f$为Id_A，则$(x \in A$与$y \in A) \Rightarrow (r(f(x)) = x$与$r(f(y)) = y)$. 根据公理模式6、补充定理29， $f(x) = f(y) \Rightarrow r(f(x)) = r(f(y))$与$x \in A$与$y \in A$，因此$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$，故$f$为单射.

如果$f \circ s = Id_B$，则$f\langle s\langle B\rangle\rangle = B$，同时，根据定理12，$f\langle s\langle B\rangle\rangle \subset f\langle A\rangle$，又因为$f\langle A\rangle \subset f\langle B\rangle$，故$f\langle A\rangle = f\langle B\rangle$，因此$f$为满射.

如果f为满射，则$f\langle A\rangle = B$，根据补充定理35，$x \in B \Leftrightarrow (\exists y)((y, x) \in F)$，根据补充定理64（2），$(y, x) \in F \Leftrightarrow y \in A$与$x = f(y)$. 令$T$为项$\tau_y(y \in A$与$x = f(y))$，根据证明规则54，$x \in B \Leftrightarrow f(T) = x)$. 令$s$为映射$x \mapsto T(x \in B, T \in A)$，则$x \in B \Leftrightarrow f(s(x)) = x$，即$f \circ s = Id_B$. 如果$f$为单射，且$A \neq \varnothing$，根据补充定理14（2），$(\exists x)(x \in A)$，因此可以添加辅助常数$a$，令$a \in A$. 令$f$的图为$F$，$R$为公式$(y, x) \in F$或$(y = a$与$x \in B - f\langle A\rangle)$. 由于$(y, x) \in F \Rightarrow y \in A$与$x \in B$，因此$R \Rightarrow (x, y) \in B \times A$，因此，该公式为对于$x$、$y$生成图的公式. 令其生成的图为$P$.

R与$(z|y)R \Leftrightarrow ((y,x) \in F$与$(z,x) \in F)$或$(y = a$与$z = a$与$x \in B - f\langle A\rangle)$或$((y,x) \in F$与$z = a$与$x \in B - f\langle A\rangle)$或$((z,x) \in F$与$y = a$与$x \in B$与$x \notin f\langle A\rangle)$. $1(z,x) \in F \Rightarrow x \in f\langle A\rangle)$，$(y,x) \in F \Rightarrow x \in f\langle A\rangle$，根据补充证明规则5（13），$R$与$(z|y)R \Rightarrow y = z$，故$P$为函数图.

$(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists y)((y,x) \in F)$或$(\exists y)(y = a$与$x \in B - f\langle A\rangle)$，等价于$(\exists y)((y,x) \in F)$或$x \in B - f\langle A\rangle$，等价于$x \in f\langle A\rangle$或$x \in B - f\langle A\rangle$，等价于$x \in B$，故$pr_1 P = B$. $(\exists x)R \Leftrightarrow y \in A$或$(y = a$与$(\exists x)(x \in B - f\langle A\rangle))$，又由于$y = a \Rightarrow y \in A$，故$(y = a$与$(\exists x)(x \in B - f\langle A\rangle)) \Rightarrow y \in A$，故$(\exists x)R \Leftrightarrow y \in A$，故$pr_2 P = A$. 由此可知，$(P, B, A)$是函数，令其为$r$，则$r \circ f(x) = x \Leftrightarrow (x, f(x)) \in F$或$(x = a$与$f(x) \in B - f\langle A\rangle)$，$r \circ f(x) = x \Leftrightarrow x \in A$或$(x = a$与$f(x) \in B$与$f(x) \notin f\langle A\rangle)$. $1a \in A \Rightarrow f(x) \in f\langle A\rangle$，根据补充证明规则5（15），$r \circ f(x) = x \Leftrightarrow x \in A$，故$r \circ f = Id_A$.

定理 20.

f为A到B的映射，g为B到A的映射，且$g \circ f = Id_A$，$f \circ g = Id_B$，则f和g均为双射，且$g = f^{-1}$.

证明：根据定理19，f和g均为双射.

令f的图为F，g的图为G，假设$(x,y) \in F$，则$y \in B$，$y = f(x)$. 由于$g(f(x)) = x$，因此$g(y) = x$，根据补充定理64（2），$(y,x) \in G$.

假设$(y,x) \in$G，同理可得$(x,y) \in F$.

因此$(x,y) \in F \Leftrightarrow (y,x) \in G$，即$(y,x) \in F^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in G$，根据补充定理27（2），$G = F^{-1}$. 又因为$g$为$B$到$A$的映射，故$g = f^{-1}$.

定义 41. *回缩（rétractions），截面（section），左逆（inverse à gauche），右逆（inverse à droite）*

令f为A到B的单射（或满射），如果B到A的映射r（或s）使使$r \circ f = Id_A$（或$f \circ s = Id_B$），则称r（或s）为f的回缩（或截面），或称为f的左逆（或右逆）.

补充定理 79.

如果g是f的左逆，则f是g的右逆；如果f是g的右逆，则g是f的左逆.

证明：根据定义可证.

补充定理 80.

单射的左逆是满射，满射的右逆是单射.

证明：根据补充定理79、定理19可证.

补充定理 81. *右逆的唯一性*

令f为A到B的满射，s、s'都是f的右逆，如果$s\langle B\rangle = s'\langle B\rangle$，则$s = s'$.

证明：

如果$B=\varnothing$，根据补充定理31（2），s、s'的图均为$\varnothing$，则$s=s'$.

如果$B\neq\varnothing$，添加辅助常数x、y，使$x\in B$，$y\in B$，且$s(x)=s'(y)$．由于$f(s(x))=x$，$f(s'(y))=y$，因此$s(x)=s'(x)$．根据补充定理68，得证.

定理 21.

令f为A到B的映射，f'为B到C的映射，f''=$f'\circ f$，则：

（*1*）如果f、f'为单射，则$f'\circ f$为单射；如果r、r'分别为f、f'的左逆，则$r\circ r'$是f''的左逆；

（*2*）如果f、f'为满射，则$f'\circ f$为满射；如果s、s'分别为f、f'的左逆，则$r\circ r'$是f''的左逆；

（*3*）如果f''为单射，则f为单射；如果r''是f''的左逆，则$r''\circ f'$是f的左逆；

（*4*）如果f''为满射，则f'为满射；如果s''是f''的右逆，则$f\circ s''$是f'的右逆；

（*5*）如果f''为满射，f'为单射，则f为满射；如果s''是f''的右逆，则$s''\circ f'$是f的右逆；

（*6*）如果f''为单射，f为满射，则f'为单射；如果r''是f''的左逆，则$f\circ r''$是f的左逆.

证明：

（1）如果$A=\varnothing$，则f、f'、r、r'均为$(\varnothing,\varnothing,\varnothing)$，显然成立．如果$A\neq\varnothing$，则$r\circ f=Id_A$，$r'\circ f'=Id_B$．$r\circ r'\circ f'\circ f=r\circ Id_B\circ f$，等于$r\circ f$，等于$Id_A$.

此外，根据定理19，$f'\circ f$为单射.

（2）类似定理21（1）可证.

（3）如果$A=\varnothing$，则f、f'、r、r'均为$(\varnothing,\varnothing,\varnothing)$，显然成立．如果$A\neq\varnothing$，$r''\circ f''=Id_A$，则$(r''\circ f')\circ f=Id_A$．此外，根据定理19，$f$为单射.

（4）类似定理21（3）可证.

（5）$f''\circ s''=Id_C$，根据定理21（4），f'为双射，则$f\circ(s''\circ f')=(f'^{-1}\circ f')\circ f\circ(s''\circ f')$，等于$f'^{-1}\circ f''\circ s''\circ f'$，等于$f'^{-1}\circ f'$，等于$Id_B$．此外，根据定理19，$f$为满射.

（6）类似定理21（5）可证.

定理 22. 函数唯一存在的条件

（*1*）令g为E到F的满射，f为E到G的映射，则当且仅当$(\forall x)(\forall y)(x\in E$与$y\in E$与$g(x)=g(y)\Rightarrow f(x)=f(y))$时，存在$F$到$G$的映射$h$，使$f=h\circ g$；并且，$h$是唯一的，令$s$为$g$的右逆，则$h=f\circ s$.

（*2*）令g为F到E的单射，f为G到E的映射，则当且仅当$f(G)\subset g(F)$时，存在G到F的映射h，使$f=g\circ h$；并且，h是唯一的，令r为g的左逆，$h=r\circ f$.

证明：

（1）若$f=h\circ g$，则$(\forall x)(\forall y)(x\in E$与$y\in E$与$g(x)=g(y)\Rightarrow f(x)=f(y))$．同时，$s$为$g$的右逆，则$h=h\circ(g\circ s)$，因此$h=f\circ s$，故$h$是唯一的.

反过来，假设$(\forall x)(\forall y)(x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y))$，令$h = f \circ s$，则当$x \in E$时，$g(s(g(x))) = g(x)$，$s(g(x)) \in E$，因此$f(s(g(x))) = f(x)$，即$h(g(x)) = f(x)$. 因此$f = h \circ g$.

（2）若$f = g \circ h$，根据补充定理51（2），$f(G) \subset g(F)$. 同时，r为g的左逆，则$h = (r \circ g) \circ h$，因此$h = r \circ f$.

反过来，假设$f(G) \subset g(F)$，令$h = r \circ f$. 由于$f(G) \subset g(F)$，因此$(\exists x)(x \in G$与$y = f(x)) \Rightarrow (\exists x)(x \in F$与$y = g(x))$，因此，$(\exists x)(x \in G$与$f(z) = f(x)) \Rightarrow (\exists x)(x \in F$与$f(z) = g(x))$. 如果$G = \varnothing$，则$f$为$(\varnothing, \varnothing, E)$，$h$为$(\varnothing, \varnothing, F)$，因此$f = h \circ g$. 如果$G \neq \varnothing$，则添加辅助变量$z$使$z \in G$，故$(\exists x)(x \in F$与$f(z) = g(x))$，添加辅助变量$y$，使$f(z) = g(y)$，因此$g(h(z)) = g(r(f(z)))$，进而等于$g(r(g(y)))$，进而等于$g(y)$，最后等于$f(z)$. 因此，$f = g \circ h$.

定义 42. 二元函数（*fonction de deux arguments*）

如果函数f的定义域为图G，则称f为二元函数. 当$(x, y) \in G$时，函数f对于(x, y)的值记作$f(x, y)$.

定义 43. 偏映射（*application partielle*）

令f为二元函数，定义域为D，到达域为C，令$A_y = D^{-1}\langle\{y\}\rangle$，则映射$x \mapsto f(x, y)$ $(x \in A - y, f(x, y) \in C)$称为$f$关于第二个参数值为$y$的偏映射，记作$f(., y)$、$f(, y)$或$f_y$. 令$A_x = D\langle\{x\}\rangle$，则映射$y \mapsto f(x, y)(y \in B_x, f(x, y) \in C)$称为$f$关于第一个参数值为$x$的偏映射，记作$f(x, .)$、$f(x,)$或$f_x$.

补充定理 82.

（*1*）令f为二元函数，定义域为D，则$(x, y) \in D \Leftrightarrow f(., y)(x) = f(x, y)$，$(x, y) \in D \Leftrightarrow f(x, .)(y) = f(x, y)$.

（*2*）令f、g为二元函数，定义域均为D，如果$(x, y) \in D \Rightarrow f(., y)(x) = g(., y)(x)$，或者$(x, y) \in D \Rightarrow f(x, .)(y) = g(x, .)(y)$，则$f$和$g$在$D$上重合.

证明：

（1）根据证明规则54可证.

（2）当$(x, y) \in D$时，如果$(x, y) \in D \Rightarrow f(., y)(x) = g(., y)(x)$，则$f(., y)(x) = g(., y)(x)$，根据补充定理82（1），$f(x, y) = g(x, y)$. 同理可证$(x, y) \in D \Rightarrow f(x, .)(y) = g(x, .)(y)$的情况.

定义 44. 不依赖于参数（*ne dépend pas de argument*）

令f为二元函数，如果 $f(., y)$（或$f(x, .)$）为常数函数，则称f不依赖于第一个参数（或第二个参数）.

补充定理 83.

令g为B到C的映射，则映射$z \mapsto g(pr_2 z)(z \in A \times B, g(pr_2 z) \in C)$不依赖于第一个参数.

证明：如果$B \neq \varnothing$，若$y \in B$，则该映射关于第二个参数的偏映射是$x \mapsto g(y)(x \in A_y, g(y) \in C)$，若$y \notin B$，则该映射关于第二个参数的偏映射是$(\varnothing, \varnothing, C)$；如果$B = \varnothing$，则关于第二个参数的偏映射是$(\varnothing, \varnothing, C)$，均为常数函数，得证.

定义 45. 映射在乘积集合上的规范扩展（*extension canonique de applications aux ensembles produits*），映射的乘积（*produit de applications*）

令u为A到C的映射，v为B到D的映射，则称映射$z \mapsto (u(pr_1 z), v(pr_2 z))(z \in A \times B, (u(pr_1 z), v(pr_2 z)) \in C \times D)$为$u$和$v$在乘积集合上的规范扩展，或称$u$和$v$的乘积，记作$u \times v$或$(u, v)$.

补充定理 84.

u为A到C的映射，v为B到D的映射，则u和v的乘积的值域为$u\langle A\rangle \times v\langle B\rangle$.

证明：令u的图为U，v的图为V，则$u\langle A\rangle \times v\langle B\rangle = \{z | (z为有序对)与(\exists x)(x, pr_1 z) \in U与(\exists x)(x, pr_2 z) \in V\}$．u和v的乘积的值域为$\{z | (\exists w)(w \in A \times B与z = (u(pr_1 w), v(pr_2 w)))\}$.

由于$(z为有序对)与(\exists x)(x, pr_1 z) \in U与(\exists x)(x, pr_2 z) \in V \Leftrightarrow (z为有序对)与(\exists x)(\exists y)((x, pr_1 z) \in U与(y, pr_2 z) \in V)$，而$(\exists w)(w \in A \times B, z = (u(pr_1 w), v(pr_2 w))) \Leftrightarrow (z为有序对)与(\exists w)((w为有序对)与pr_1 w \in A与pr_2 w \in B与pr_1 z = u(pr_1 w)与pr_2 z = v(pr_2 w))$，等价于$(z为有序对)与(\exists w)((w为有序对)与(pr_1 w, pr_1 z) \in U与(pr_2 w, pr_2 z) \in U)$，根据补充证明规则15，得证.

补充定理 85.

u、v为函数，如果u、v都是单射（或满射），则$u \times v$为单射（或满射）.

证明：如果u、v都是单射，根据定理7可证．如果u、v都是满射，根据补充定理84可证.

补充定理 86.

u为A到C的映射，v为B到D的映射，u'为C到E的映射，v'为D到F的映射，则$u' \times v' \circ u \times v = u' \circ u \times v' \circ v$.

证明：若$z \in A \times B$，则$((u' \times v') \circ (u \times v))(z) = (u' \times v')(u(pr_1 z), v(pr_2 z))$，等于$(u'(u(pr_1 z), v'(v(pr_2 z)))$，得证.

补充定理 87.

$Id_A \times Id_B = Id_{A \times B}$.

证明：若$z \in A \times B$，则$(Id_A \times Id_B)(z) = (Id_A(pr_1 z), Id_B(pr_2 z))$，即等于$z$，得证.

补充定理 88.

u、v都是双射，则$u \times v$为双射，且其反函数为$u^{-1} \times v^{-1}$.

证明：根据补充定理85，$u \times v$为双射.

令u的定义域为A，v的定义域为B，根据补充定理86，$u^{-1} \times v^{-1} \circ u \times v = Id_A \times Id_B$，根据补充定理87得证.

习题 43.

求证：$x \in y$、$x \subset y$、$x = \{y\}$都不是对于x、y生成图的公式.

证明：即补充定理28（2）、补充定理28（3）、补充定理28（4）.

习题 44.

G为图，求证：$X \subset pr_1 G \Leftrightarrow X \subset G^{-1}\langle G\langle X\rangle\rangle$.

证明：即补充定理50.

习题 45.

G和F为图，求证：$pr_1 H \subset pr_1 G \Leftrightarrow H \subset H \circ G^{-1} \circ G$，并且$G \subset G \circ G^{-1} \circ G$.

证明：

如果$pr_1 H \subset pr_1 G$，设$(h, h') \in H$，则$h \in pr_1 G$，故$(\exists g)(h, g) \in G$，则$(\exists g)(\exists i)((h, g) \in G$与$(i, g) \in G$与$(i, h') \in H)$，故$(h, h') \in H \circ G^{-1} \circ G$，即$H \subset H \circ G^{-1} \circ G$.

由于$pr_1 G \subset pr_1 G$，故$G \subset G \circ G^{-1} \circ G$.

习题 46.

G为图，求证：

（*1*） $G \circ \varnothing = \varnothing$，$\varnothing \circ G = \varnothing$；

（*2*）当且仅当$G = \varnothing$时，$G^{-1} \circ G = \varnothing$.

证明：即补充定理52.

习题 47.

G为图，求证：

（*1*）$(A \times B) \circ G = G^{-1}\langle A\rangle \times B$.

（*2*）$G \circ (A \times B) = A \times G\langle B\rangle$.

证明：

（1）令x、y、z为不是常数的字母，$(x, z) \in (A \times B) \circ G \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G$与$y \in A$与$z \in B)$，$(x, z) \in G^{-1}\langle A\rangle \times B \Leftrightarrow (\exists y)(y \in A$与$(x, y) \in G)$与$z \in B$，得证.

（2）令x、y、z为不是常数的字母，$(x, z) \in G \circ (A \times B) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in A$与$y \in B$与$(y, z) \in G)$，$(x, z) \in A \times G\langle B\rangle \Leftrightarrow x \in A$与$(\exists y)(y \in B$与$(y, z) \in G)$，得证.

习题 48.

对任意图G，用G'表示$pr_1G \times pr_2G - G$，求证：

（*1*）$(G^{-1})' = (G')^{-1}$.

（*2*）如果$pr_1G \subset A$，$pr_2G \subset B$，则$G \circ (G^{-1})' \subset (\Delta_B)'$，$(G^{-1})' \circ G \subset (\Delta_A)'$.

（*3*）当且仅当$G \circ (G^{-1})' \circ G = \varnothing$时，$G = pr_1G \times pr_2G$.

证明：

（1）根据补充定理42、补充定理45可证.

（2）令x、y、z为不是常数的字母，$(x,y) \in (G^{-1})' \Leftrightarrow (x \in A$与$y \in B$与$(y,x) \notin G)$，则$(x,z) \in G \circ (G^{-1})' \Leftrightarrow (\exists y)(x \in B$与$y \in A$与$(y,x) \notin G$与$(y,z) \in G)$，$(x,z) \in (\Delta_B)' \Leftrightarrow (x \in B$与$z \in B$与$x \neq z)$. 由于$(y,z) \in G \Rightarrow z \in B$，$(y,x) \notin G$与$(y,z) \in G \Rightarrow x \neq z$，故$(x,z) \in G \circ (G^{-1})' \Rightarrow (x,z) \in (\Delta_B)'$，即$G \circ (G^{-1})' \subset (\Delta_B)'$. 同理可证$(G^{-1})' \circ G \subset (\Delta_A)'$.

（3）如果$G = pr_1G \times pr_2G$，则$(G^{-1})' = \varnothing$，根据补充定理52（1），$G \circ (G^{-1})' \circ G = \varnothing$. 如果$G \circ (G^{-1})' \circ G = \varnothing$，则$(\exists y)(\exists z)((x,y) \in G$与$y \in pr_2G$与$z \in pr_1G$与$(z,y) \notin G$与$(z,t) \in G)$为假，即$(x,y) \notin G$或$y \notin pr_2G$或$z \notin pr_1G$或$(z,y) \in G$或$(z,t) \notin G)$，即$(x,y) \in G$与$y \in pr_2G$与$z \in pr_1G$与$(z,t) \in G \Rightarrow (z,y) \in G$，因此，$(\exists x)((x,y) \in G)$与$(\exists t)((z,t) \in G)$与$y \in pr_2G$与$z \in pr_1G \Rightarrow (z,y) \in G$，又因为$y \in pr_2G \Rightarrow (\exists x)((x,y) \in G)$，$z \in pr_1G \Rightarrow ((z,t) \in G)$，因此$y \in pr_2G$与$z \in pr_1G \Rightarrow (z,y) \in G$，因此$G = pr_1G \times pr_2G$.

习题 49.

G为图，求证：G为函数图$\Leftrightarrow (\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle \subset X)$.

证明：即补充定理70.

习题 50.

令F是A到B的对应，F'是B到A的对应. 如果$(\forall x)(x \in A \Rightarrow F'(F(x)) = \{x\})$、$(\forall y)(y \in B \Rightarrow F(F'(y)) = \{y\})$，求证：$F$、$F'$均为双射，且$F'$为$F$的逆映射.

证明：令G、G'分别是F、F'的图，假设$(x,y) \in G$、$(x,y') \in G$，则$y \in F(x)$，因此$F'(y) \subset F'(F(x))$. 又因为$F(F'(y)) = \{y\}$，故$F'(y) \neq \varnothing$，因此$F'(y) = \{x\}$，同理$F'(y') = \{x\}$，因此$F'(F(y)) = F'(F(y'))$，因此$y = y'$，故G为函数图，同时，对于$x \in A$，由于$F'(F(x)) \neq \varnothing$，因此$F(x) \neq \varnothing$，故$pr_1G = A$，因此，$F$为映射，同理$F'$为映射. 根据定理20得证.

习题 51.

f为A到B的映射，g为B到C的映射，h为C到D的映射，且$g \circ f$和$h \circ g$为双射，求证：f、g、h为双射.

证明：根据定理21（3）、定理21（4），g为双射. 根据定理21（5）、定理21（6），f和h也是双射.

习题 52.

f为A到B的映射，g为B到C的映射，h为C到A的映射，求证：如果$h\circ g\circ f$、$g\circ f\circ h$、$f\circ h\circ g$之中两个满射一个单射，或者两个单射一个满射，则f、g、h都是双射.

证明：

假设$h\circ g\circ f$、$g\circ f\circ h$为满射，$f\circ h\circ g$为单射，根据定理15、定理21（3)、定理21（4)，g为双射、h为满射、$h\circ g$为双射、$g\circ f$为满射，根据定理21（5)、定理21（6)，h、f为双射.

假设$h\circ g\circ f$、$g\circ f\circ h$为单射，$f\circ h\circ g$为满射，根据定理15、定理21（3)、定理21（4)，$f\circ h$为双射、f为双射、$g\circ f$为单射、h为单射，根据定理21（5)、定理21（6)，g、h为双射.

习题 53.

试找到以下推理的错误：令N为自然数集，A为满足$n>2$且存在不等于0的自然数x、y、z使$x^n+y^n=z^n$成立的不等于0的自然数n的集合，则A不为空集（即费马大定理为假）. 设$B=\{A\}$，$C=\{N\}$，由于B、C均为仅有一个元素的集合，因此存在B到C的双射f. 因此$f(A)=N$，如果$A=\varnothing$，则$f(\varnothing)=\varnothing$，故$N=\varnothing$，矛盾.

答：$f(\varnothing)=\varnothing$推理错误. 混淆了$f(\varnothing)$与$f\langle\varnothing\rangle$，即将函数的值和在对应下的像混淆.

注：习题53涉及尚未介绍的“自然数”知识.

2.4 集族的并集和交集（Réunion et intersection d’une famille d’ensembles）

补充定理 89. 并集定理

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，则$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i)$是x上的集合化公式.

证明：由于$(\forall x)((i\in I$与$x\in X_i)\Rightarrow(x\in X_i))$，根据公理模式5，$(\forall i)(\forall x)(\exists Z)((i\in I$与$x\in X_i)\Rightarrow(x\in Z))$，根据公理模式8得证.

定义 46. 集族的并集（*réunion d’une famille*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，集合$\{x|(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i)\}$称为该集族的并集，记作$\bigcup\limits_{i\in I}X_i$.

补充定理 90.

E的子集族的并集，是E的子集.

证明：如果$i\in I$，则$X_i\subset E$，因此$x\in X_i\Rightarrow x\in E$，则$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i)\Rightarrow x\in E$，得证.

补充定理 91.

$\bigcup\limits_{i\in\varnothing} X_i = \varnothing$.

证明：$i \in \varnothing$为假，故$(\exists i)(i \in \varnothing$与$x \in X_i)$为假，得证.

补充定理 92. 交集定理

对于集族$(X_i)_{i\in I}$，如果$I \neq \varnothing$，则$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$是$x$上的集合化公式.

证明：设$a \in I$，则$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i) \Rightarrow x \in X_a$，根据证明规则52得证.

补充定理 93. 空族的交集不存在

非$Coll_x(\forall i)(i \in \varnothing \Rightarrow x \in X_i)$.

证明：$i \in \varnothing$为假，因此$i \in \varnothing \Rightarrow x \in X_i$为真，根据证明规则13可证.

补充定理 94. 子集族的交集存在

$(X_i)_{i\in I}$为F的子集族，则$x \in F$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$是$x$上的集合化公式.

证明：根据证明规则51可证.

定义 47. 集族的交集（*intersection d'une famille*）；子集族的交集（*intersection d'une famille*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，且$I \neq \varnothing$，则集合$\{x|(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}$称为该集族的交集，记作$\bigcap\limits_{i\in I} X_i$. 如果$(X_i)_{i\in I}$为$F$的子集族，则集合$\{x|x \in F$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}$称为该子集族的交集，同样记作$\bigcap\limits_{i\in I} X_i$.

补充定理 95. 空子集族的交集

$(X_i)i \in \varnothing$为F的子集族，则$\bigcap\limits_{i} \in \varnothing X_i = F$.

证明：根据定义可证.

补充定理 96.

（*1*）E的子集族的交集，是E的子集.

（*2*）如果集族同时是E的子集族，且指标集不为空集，则该集族的交集也是该子集族的交集.

证明：

（1）$x \in E$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i) \Rightarrow x \in E$，得证.

（2）根据补充定理96（1）可证.

定理 23. 并集和交集的交换律

$(X_i)_{i\in I}$为集族，f为K到I的满射，则$\bigcup\limits_{k\in K} X_{f(k)} = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$；如果$I \neq \varnothing$，则$\bigcap\limits_{k\in K} X_{f(k)} = \bigcap\limits_{i\in I} X_i$. 如果$(X_i)_{i\in I}$为子集族，在$I = \varnothing$的情况下，$\bigcap\limits_{k\in K} X_{f(k)} = \bigcap\limits_{i\in I} X_i$也为真.

证明：

对于并集：

设$x \in \bigcup\limits_{i \in I} X_i$，则存在$i \in I$，使$x \in X_i$，由于$f\langle K \rangle = I$，因此存在$k \in K$，使$i = f(k)$，故$x \in X_{f(k)}$，因此$x \in \bigcup\limits_{k \in K} X_{f(k)}$.

反过来，设$x \in \bigcup\limits_{k \in K} X_{f(k)}$，因此存在$k \in K$，使$x \in X_{f(k)}$，设$i = f(k)$，则$x \in X_i$，因此$x \in \bigcup\limits_{i \in I} X_i$.

对于交集：

设$x \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$，对任意$k \in K$，都有$f(k) \in I$，即$x \in X_{f(k)}$，因此$x \in \bigcap\limits_{k \in K} X_{f(k)}$.

反过来，设$x \in \bigcap\limits_{k \in K} X_{f(k)}$，$i \in I$，则存在在$k \in K$，使$i = f(k)$，因此$x \in X_i$，故$x \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$.

设$(X_i)_{i \in I}$为F的子集族，在$I = \varnothing$的情况下，f为K到I的满射，则$K = \varnothing$，因此$\bigcap\limits_{k \in K} X_{f(k)} = F$，$\bigcap\limits_{i \in I} X_i = F$，得证.

定理 24. $(X_i)_{i \in I}$为集族，$(\forall i)(\forall k)(i \in I$与$k \in I \Rightarrow X_i = X_k)$，则$(\forall a)(a \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} X_i = X_a)$，当$I \neq \varnothing$时，$(\forall a)(a \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} X_i = X_a)$.

证明：令f为常数映射$i \mapsto a (i \in I, a \in \{a\})$，其为$I$到$\{a\}$的满射，根据定理23可证.

定义 48. 多个集合的并集（*réunion d'ensembles*），多个集合的交集（*intersection d'ensembles*）

集族Id_F的并集，也称为F的并集，记作$\bigcup\limits_{X \in F} X$；当$F \neq \varnothing$时，集族$Id_F$的交集，称为$F$的交集，记作$\bigcap\limits_{X \in F} X$.

补充定理 97.

（*1*）如果$(X_i)_{i \in I}$、$(Y_i)_{i \in I}$为集族，且$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \subset Y_i)$，则$\bigcup\limits_{i \in I} X_i \subset \bigcup\limits_{i \in I} Y_i$；如果$I \neq \varnothing$，则$\bigcap\limits_{i \in I} X_i \subset \bigcap\limits_{i \in I} Y_i$.

（*2*）如果$(X_i)_{i \in I}$为集族，且$J \subset I$，则$\bigcup\limits_{i \in J} X_i \subset \bigcup\limits_{i \in I} X_i$；如果$J \neq \varnothing$，则$\bigcap\limits_{i \in I} X_i \subset \bigcap\limits_{i \in J} X_i$.

证明：

（1）设$x \in \bigcup\limits_{i \in I} X_i$，则存在$i \in I$，使$x \in X_i$，因此$x \in Y_i$，故$x \in \bigcup\limits_{i \in I} Y_i$.

另一方面，设$x \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$，则对任意$i \in I$，$x \in X_i$，因此$x \in Y_i$，故$x \in \bigcap\limits_{i \in I} Y_i$. 得证.

（2）设$x \in \bigcup\limits_{i \in J} X_i$，则存在$i \in J$，使$x \in X_i$. 由于$J \subset I$，因此$i \in I$，故$x \in \bigcup\limits_{i \in I} X_i$.

另一方面，设$x \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i$，则对任意$i \in I$，$x \in X_i$. 由于$J \subset I$，因此对任意$i \in J$，故$x \in \bigcap\limits_{i \in J} X_i$. 得证.

定理 25. 并集和交集的结合律

$(X_i)_{i\in I}$为集族，其指标集$I=\bigcup\limits_{l\in L}J_l$，则$\bigcup\limits_{i\in I}X_i=\bigcup\limits_{l\in L}(\bigcup\limits_{i\in J_I}X_i)$，如果$L\neq\varnothing$，并且对任意$l\in L$，$J_l\neq\varnothing$，则$\bigcap\limits_{i\in I}X_i=\bigcap\limits_{l\in L}(\bigcap\limits_{i\in J_I}X_i)$.

证明：

对于并集：

设$x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，则存在$i\in I$，使$x\in X_i$，由于$I=\bigcup\limits_{l\in L}J_l$，因此存在$l\in L$，使$i\in J_l$，因此$x\in\bigcup\limits_{i\in J_I}X_i$，故$\bigcup\limits_{l\in L}(\bigcup\limits_{i\in J_I}X_i)$.

反过来，设$x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，则存在$l\in L$，使$x\in\bigcup\limits_{i\in J_I}X_i$，因此存在$i\in J_l$，使$x\in X_i$，由于$I=\bigcup\limits_{l\in L}J_l$，因此$i\in I$，故$x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$.

对于交集：

设$x\in\bigcap\limits_{i\in I}X_i$，则对任意$i\in I$，$x\in X_i$，对任意$l\in L$，由于$J_l\subset I$，因此$x\in\bigcap\limits_{i\in J_I}X_i$，故$x\in\bigcap\limits_{l\in L}(\bigcap\limits_{i\in J_I}X_i)$.

反过来，设$x\in\bigcap\limits_{l\in L}(\bigcap\limits_{i\in J_I}X_i)$，则对任意$l\in L$，$x\in\bigcap\limits_{i\in J_I}X_i$，由于$I=\bigcup\limits_{l\in L}J_l$，因此对任意$i\in I$，存在$l\in L$，使$i\in J_l$，因此$x\in X_i$，故$x\in\bigcap\limits_{i\in I}X_i$.

补充定理 98.

$(X_i)_{i\in I}$为子集族，其指标集$I=\bigcup\limits_{l\in L}J_l$，则$\bigcap\limits_{i\in I}X_i=\bigcap\limits_{l\in L}(\bigcap\limits_{i\in J_I}X_i)$.

证明：

设$(X_i)_{i\in I}$为F的子集族.

如果$L\neq\varnothing$，并且对所有$l\in L$，$J_l\neq\varnothing$，根据定理25、补充定理96（2）可证.

如果$L=\varnothing$，根据补充定理91，$I=\varnothing$，故$\bigcap\limits_{i\in I}X_i=F$，$\bigcap\limits_{l\in L}(\bigcap\limits_{i\in J_I}X_i)=F$.

如果$L\neq\varnothing$，但存在l，使$J_L=\varnothing$，则$\bigcap\limits_{i\in J_I}X_i=F$. 类似定理25仍然可证.

定理 26.

$(X_i)_{i\in I}$为A的子集族，F为A到B的对应，则$F\langle\bigcup\limits_{i\in I}X_i\rangle=\bigcup\limits_{i\in I}F\langle X_i\rangle$，$F\langle\bigcap\limits_{i\in I}X_i\rangle\subset\bigcap\limits_{i\in I}F\langle X_i\rangle$.

证明：

$(\exists x)(x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$与$y\in F(x))\Leftrightarrow(\exists x)(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i$与$y\in F(x))$，等价于$(\exists i)(i\in I$与$y\in F(X_i))$，因此$y\in\bigcup\limits_{i\in I}F\langle X_i\rangle$.

对任意$i\in I$，$\bigcap\limits_{i\in I}X_i\subset X_i$，根据定理12，$F\langle\bigcup\limits_{i\in I}X_i\rangle\subset F\langle X_i\rangle$，故$F\langle\bigcap\limits_{i\in I}X_i\rangle\subset\bigcap\limits_{i\in I}F\langle X_i\rangle$.

定理 27.

f为A到B的映射，$(Y_i)_{i\in I}$为B的子集族，则$f^{-1}\langle\bigcap\limits_{i\in I}Y_i\rangle=\bigcap\limits_{i\in I}f^{-1}\langle Y_i\rangle$.

证明：设$x\in\bigcap\limits_{i\in I}f^{-1}\langle Y_i\rangle$，根据补充定理70（1），$x\in A$，且对任意$i\in I$，$f(x)\in Y_i$，因此$f(x)\in\bigcap\limits_{i\in I}Y_i$，故$x\in f^{-1}\langle\bigcap\limits_{i\in I}Y_i\rangle$．另一方面，根据定理26，$f^{-1}\langle\bigcap\limits_{i\in I}Y_i\rangle\subset\bigcap\limits_{i\in I}f^{-1}\langle Y_i\rangle$．得证.

定理 28.

$(X_i)_{i\in I}$为A的子集族，f为A到B的单射，且$I\neq\varnothing$，则$f\langle\bigcap\limits_{i\in I}X_i\rangle=\bigcap\limits_{i\in I}f\langle X_i\rangle$.

证明：设f的图为F，令$i=(\Delta_f\langle A\rangle,f\langle A\rangle,B)$，$g=(F,A,f\langle A\rangle)$．则$g$为双射，$i$为单射，$f=i\circ g$．令$h$为$g$的逆映射，则对任意$X\subset A$，$f\langle X\rangle=h^{-1}\langle X\rangle$，根据定理27得证.

定理 29.

设$(X_i)_{i\in I}$为E的子集族，则$\complement_E(\bigcup\limits_{i\in I}X_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$，$\complement_E(\bigcap\limits_{i\in I}X_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$.

证明：设$x\in\complement_E(\bigcup\limits_{i\in I}X_i)$，则$x\in E$，且对任意$i\in I$，$x\notin X_i$，$x\in\complement_E X_i$，因此$x\in\bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$.

反过来，设$x\in\bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$，根据补充定理96（1），$x\in E$，同时，若$x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，则存在$i$，使$x\in X_i$，与$x\in\bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$矛盾，故$x\notin\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，因此，$x\in\complement_E(\bigcup\limits_{i\in I}X_i)$．故$\complement_E(\bigcup\limits_{i\in I}X_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$．根据补充定理12，$\complement_E(\bigcap\limits_{i\in I}X_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$.

定义 49. 两个集合的并集与交集（*réunion et intersection de deux ensembles*），迹（*trace*）

$\bigcup\limits_{X\in\{A,B\}}X$称为$A$和$B$的并集，记作$A\cup B$，$\bigcap\limits_{X\in\{A,B\}}X$称为$A$和$B$的交集，记作$A\cap B$．$A\cap B$又称$A$在$B$上的迹.

定义 50. 三元集合（*ensemble à trois éléments*），四元集合（*ensemble à quatre éléments*）

$\{x,y\}\cup\{z\}$称为三元集合，记作$\{x,y,z\}$；$\{x,y,z\}\cup\{t\}$称为四元集合，记作$\{x,y,z,t\}$.

补充定理 99.

$A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$，$A\cap B=\{x|x\in A$与$x\in B\}$.

证明：$A\cup B=\{x|(\exists i)(i\in\{A,B\}$与$x\in i)\}$，等于$\{x|(\exists i)((i=A$与$x\in A)$或$(i=B$或$x\in B))\}$，等于$\{x|x\in A$或$x\in B\}$．同理可证$A\cap B=\{x|x\in A$与$x\in B\}$.

补充定理 100.

（1）$A \cup B = B \cup A$;

（2）$A \cap B = B \cap A$;

（3）$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

（4）$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

（5）$(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$;

（6）$(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$;

（7）$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$;

（8）$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$;

（9）$A \cup \complement_E A = E$;

（10）$A \cap \complement_E A = \varnothing$.

证明：根据补充定理99可证.

补充定理 101.

（1）$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

（2）$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

证明：根据补充定理99可证.

补充定理 102.

令G为E到F的对应，A和B是E的子集，则$G(A \cup B) = G(A) \cup G(B)$，$G(A \cap B) \subset G(A) \cap G(B)$.

证明：根据定理26可证.

补充定理 103.

令f为F到E的映射，A和B是E的子集，则$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

证明：根据定理27可证.

补充定理 104.

令G为图，$X \subset pr_1 G$，$pr_2 G \subset B$，则$pr_1(G \cap X \times B) = X$.

证明：$(x, y) \in (G \cap X \times B) \Leftrightarrow (x, y) \in G$与$x \in X$与$y \in B$，由于$pr_2 G \subset B$，故$(x, y) \in G \Rightarrow y \in B$，因此$(x, y) \in (G \cap X \times B) \Leftrightarrow (x, y) \in G$与$x \in X$，故$(\exists y)((x, y) \in (G \cap X \times B)) \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G)$与$x \in X$，又因为$X \subset pr_1 G$，故$(\exists y)((x, y) \in (G \cap X \times B)) \Leftrightarrow x \in X$，得证.

定义 51. 通过子集导出的函数（*fonction déduite par passage au le sous-ensemble*），通过子集导出的映射（*application déduite par passage au le sous-ensemble*）

令函数$f=(F,A,B)$，$X\subset A$，则$(F\cap X\times B,X,B)$称为f通过A的子集X导出的函数，或称为f通过A的子集X导出的映射．如果$pr_2F\subset Y$，则(F,A,Y)称为f通过B的子集Y导出的函数，或称为f通过B的子集Y导出的映射．如果$(pr_2F\cap X\times B)\subset Z$，则$(F\cap X\times B,X,Z)$称为$f$通过$A$的子集$X$和$B$的子集$Z$导出的函数，或称为$f$通过$A$的子集$X$和$B$的子集$Z$导出的映射．

补充定理 105.

令函数$f=(F,A,B)$，$X\subset A$，则(f通过A的子集X导出的函数)$=f|X$，并且f通过A的子集X导出的函数和f在X上重合．

证明：设$f|X$的图为G，根据补充定理64（2），$x\in X$与$y=f(x)\Leftrightarrow(x,y)\in G$，$x\in A$与$y=f(x)\Leftrightarrow(x,y)\in F$．根据补充定理23（2），$x\in X$与$y\in B\Leftrightarrow(x,y)\in X\times B$．根据补充定理64（4），$x\in A\Rightarrow f(x)\in B$．因此$(x,y)\in(F\cap X\times B)\Leftrightarrow x\in A$与$y=f(x)$与$x\in X$与$y\in B$，等价于$x\in X$与$y=f(x)$，得证．

补充定理 106.

令函数$f=(F,A,B)$，$X\subset A$，$pr_2F\subset Y$，$(pr_2F\cap X\times B)\subset Z$，如果$f$为单射，则$f$通过$A$的子集$X$导出的函数、$f$通过$B$的子集$Y$导出的函数、$f$通过$A$的子集$X$和$B$的子集$Z$导出的函数均为单射．

证明：根据补充定理105、补充定理72可证．

定理 30.

f为A到B的映射，$Y\subset B$，则$f^{-1}(B-Y)=f^{-1}(B)-f^{-1}(Y)$．

证明：设$x\in f^{-1}(B-Y)$，根据补充定理70（1），$x\in A$，且$f(x)\in B-Y$．因此$f(x)\in B$，且$f(x)\notin Y$，根据补充定理70（1），$x\in(f^{-1}(B)-f^{-1}(Y))$．反过来，$x\in f^{-1}(B)-f^{-1}(Y)$，根据补充定理70（1），$x\in$A，$f(x)\in B$，且$f(x)\notin Y$，因此$f(x)\in(B-Y)$，根据补充定理70（1），$x\in f^{-1}(B-Y)$．

定理 31.

f为A到B的单射，$X\subset A$，则$f(A-X)=f-(A)-f(X)$．

证明：设f的图为F，令$i=(\Delta_{f\langle A\rangle},f\langle A\rangle,B)$，$g=(F,A,f\langle A\rangle)$．则$g$为双射，$i$为单射，$f=i\circ g$．令$h$为$g$的逆映射，则对任意$X\subset A$，$f\langle X\rangle=h^{-1}\langle X\rangle$，根据定理30得证．

定义 52. 覆盖（*recouvrement*），更细的覆盖（*recouvrement plus fin*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，如果$E=\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，则称$(X_i)_{i\in I}$为$E$的覆盖．

如果$(X_i)_{i\in I}$和$(Y_k)_{k\in K}$都是E的覆盖，并且$(\forall k)(k\in K\Rightarrow(\exists i)(Y_k\subset X_i))$，则称$(Y_k)_{k\in K}$为比$(X_i)_{i\in I}$更细的覆盖．

注：

从上下文来看，原书对覆盖的定义有误.

在原书中，“更细”这个概念包括与自身相等的情况，即一个覆盖比自身更细.

补充定理 107.

覆盖R比覆盖R'更细，覆盖R'比覆盖R''更细，则覆盖R比覆盖R''更细.

证明：根据定义可证.

补充定理 108.

$(X_i)_{i\in I}$和$(X_i)_{i\in J}$都是E的覆盖，且$J\subset I$，则$(X_i)_{i\in J}$比$(X_i)_{i\in I}$更细.

证明：根据定义可证.

补充定理 109.

$I\neq\varnothing$，$K\neq\varnothing$，$(X_i)_{i\in I}$和$(Y_k)_{k\in K}$都是E的覆盖，则$(X_i\cap Y_k)_{(i,k)\in I\times K}$也是$E$的覆盖，并且比$(X_i)_{i\in I}$和$(Y_k)_{k\in K}$更细.

证明：设$x\in E$，则存在i、k，使$x\in X_i$，$x\in Y_k$，则$x\in(X_i\cap Y_k)$，且$(i,k)\in I\times K$，故$x\in(X_i\cap Y_k)_{(i,k)}\in I\times K$. 如果$k\in K$，则$X_i\cap Y_k\subset Y_k$，故$(X_i\cap Y_k)_{(i,k)}\in I\times K$比$(Y_k)_{k\in K}$更细，同理可证比$(X_i)_{i\in I}$更细.

补充定理 110.

$I\neq\varnothing$，$K\neq\varnothing$，$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_k)_{k\in K}$、$(Z_l)_{l\in L}$都是E的覆盖，如果对任意$l\in L$，均存在i、k，使$Z_l\subset X_i$，$Z_l\subset Y_k$，则$(Z_l)_{l\in L}$是比$(X_i\cap Y_k)_{(i,k)\in I\times K}$更细的覆盖.

证明：对任意$l\in L$，均存在i、k，使$Z_l\subset X_i$，$Z_l\subset Y_k$，则$Z_l\subset X_i\cap Y_k$，得证.

定义 53. 覆盖的像（*image du recouvrement*），覆盖的原像（*image réciproque du recouvrement*）

如果$(X_i)_{i\in I}$为A的覆盖，f为A到B的满射，则$(f\langle X_i\rangle)_{i\in I}$称为$(X_i)_{i\in I}$在$f$下的像.

如果$(X_i)_{i\in I}$是A的覆盖，g是C到A的映射，则$(g^{-1}\langle X_i\rangle)_{i\in I}$称为$(X_i)_{i\in I}$在$g$下的原像.

补充定理 111. 覆盖和像和原像都是覆盖

如果$(X_i)_{i\in I}$为A的覆盖，f为A到B的满射，g为C到A的映射，则$(X_i)_{i\in I}$在f下的像是B的覆盖，$(X_i)_{i\in I}$在g下的原像是C的覆盖.

证明：根据定理26可证.

定义 54. 覆盖的乘积（*produit des recouvrements*）

$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，$(Y_k)_{k\in K}$为F的覆盖，则$(X_i\times Y_k)_{(i,k)\in I\times K}$称为$E$的覆盖$(X_i)_{i\in I}$和$F$的覆盖$(Y_k)_{k\in K}$的乘积.

补充定理 112.

$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，$(Y_k)_{k\in K}$为F的覆盖，则两个覆盖的乘积是$E\times F$的覆盖.

证明：设$z\in E\times F$，则$pr_1z\in E$，$pr_2z\in F$．存在$i\in I$，使$pr_1z\in X_i$，存在$k\in K$，使$pr_2z\in Y_k$．因此$z\in X_i\times Y_k$，得证.

定理 32.

（1）$(X_i)_{i\in I}$是E的覆盖，f、g是两个定义域为E的函数，如果对任意$i\in I$，f和g均在X_i上重合，则f和g在E上重合.

（2）$(X_i)_{i\in I}$是E的覆盖，$(f_i)_{i\in I}$是集族，其中，对任意$i\in I$，f_i均为函数，且定义域为X_i，到达域为F．如果$(\forall i)(\forall k)((i,k)\in(I\times I)\Rightarrow(f_i$和$f_k$在$x_i\cap X_k$上重合$))$，则存在唯一的函数$f$，以$E$为定义域，以$F$为到达域，且当$i\in I$时，是$f_i$在$E$上的延拓.

证明：

（1）设$x\in E$，则存在$i\in I$，使$x\in X_i$，故$f(x)=g(x)$，得证.

（2）令f_i的图为G_i，$G=\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，设$(x,y)\in G$，$(x,y')\in G$，则存在$i\in I$、$k\in I$，使$(x,y)\in G_i$，$(x,y')\in G_k$．因此$x\in X_i\cap X_k$，$y=f_i(x)$，$y'=f_k(x)$，因此$y=y'$，故$G$为函数图．又因为$pr_1G=(\exists y)((x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i)$，即$(\exists y)(\exists i)(i\in I$与$(x,y)\in G_i)$，即$(\exists i)(i\in I$与$(\exists y)(x,y)\in G_i)$，即$\bigcup\limits_{i\in I}pr_1G_i$，即$\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，即E．令$(G,E,F)$为函数$f$，当$i\in I$时，$(x,y)\in G_i\Rightarrow(x,y)\in G$，因此当$x\in X_i$时，$f_i(x)=f(x)$，即f是$f_i$在$E$上的延拓．因此，函数$f$即为所求．同时，根据定理32（1），$f$具有唯一性．得证.

注：因原书对覆盖的定义更正，本定理也做相应更正.

定义 55. 不相交的集合（*ensembles disjoint*），相交的集合（*ensembles qui rencontrent*），两两不相交的集合（*ensembles mutuellement disjoint/ensembles deux à deux disjoint*）

如果$A\cap B=\varnothing$，则称A和B不相交．如果$A\cap B\neq\varnothing$，则称A和B相交．对于集族$(X_i)_{i\in I}$，如果$(\forall i)(\forall k)(i\in I$与$k\in I$与$i\neq k\Rightarrow X_i\cap X_k=\varnothing)$，则称该集族两两不相交.

补充定理 113.

f为A到B的映射，$(Y_i)_{i\in I}$为B的子集族且两两不相交，则$(f^{-1}\langle Y_i\rangle)_{i\in I}$为$A$的子集族且两两不相交.

证明：根据定理27可证.

定理 33.

$(X_i)_{i\in I}$是两两不相交的集族，$(f_i)_{i\in I}$是函数族，且定义域为X_i，到达域为F，则存在唯一的函数f，以$\bigcup\limits_{i\in I}X_i$为定义域，以$F$为到达域，且当$i\in I$时，是$f_i$在$\bigcup\limits_{i\in I}X_i$上的延拓.

证明：根据定理32（2）可证.

定义 56. 划分（*parition*）

如果一个两两不相交的集族是E的覆盖，则称其为E的划分.

补充定理 114.

（*1*）E的划分的并集是E.

（*2*）“Δ_G为E的划分”是G上的集合化公式.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）如果Δ_G为E的划分，根据补充定理114（1），对任意$x \in G$，$x \subset E$，故$G \subset \mathcal{P}(E)$，根据证明规则52可证.

注：集合$\{G|\Delta_G$为E的划分$\}$的与严肃数目．为E的划分数目（仅指标集不同的划分，为同一个划分）.

补充定理 115.

f为E到F的映射，则集族$(f^{-1}(y))y \in f\langle E\rangle$是$E$的划分.

证明：设$x \in f^{-1}(y_1)$、$x \in f^{-1}(y_2)$，根据补充定理70（3），$f(x) = y_1$，$f(x) = y_2$，因此$y_1 = y_2$，故集族$(f^{-1}(y))y \in f\langle E\rangle$两两不相交．对任意$x \in f^{-1}(y)$，根据补充定理70（3），$x \in E$，

反过来，如果$x \in E$，根据补充定理70（4），$x \in f^{-1}(f(x))$，因此$\bigcup\limits_{y \in f\langle E\rangle}(f^{-1}(y)) = E$.

定理 34.

对于集族$(X_i)_{i\in I}$，存在满足下列性质的X：存在两两不相交的集族$(X'i)_{i\in I}$，使$X = \bigcup\limits_{i\in I}(X'_i)_{i\in I}$，并且，对任意$i \in I$，存在$X_i$到$X'_i$的双射.

证明：令$A = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$．由于$(z$为有序对$)$与$pr_1 z \in X_i$与$pr_2 z = i \Rightarrow z \in A \times I$，因此其为集合化公式，令$X'_i$为$\{z|(z$为有序对$)$与$pr_1 z \in X_i$与$pr_2 z = i\}$，如果$i \in I$，则$x \mapsto (x, i)(x \in X_i)$为$X_i$到$X'_i$的双射，且当$i \neq k$时，假设$z \in (X'_i \cap X'_k)$，则$pr_1 z = i$，$pr_1 z = k$，矛盾，故$X'_i \cap X'_k = \varnothing$，因此，$(X'_i)_{i\in I}$两两不相交.

定义 57. 集族的和（*somme d'une famille*），到和的规范映射（*application canonique dans somme*）

$(X_i)_{i\in I}$为集族，则称$\bigcup\limits_{i\in I}(X_i \times \{i\})_{i\in I}$为其和．对任意$i \in I$，映射$x \mapsto (x, i)(x \in X_i)$称为$X_i$到$(X_i)_{i\in I}$的和的规范映射.

定义 58. 集合和单元素集合的和（*somme d'un ensemble et un ensemble à un seul élément*），将元素添加到集合得到的集合（*ensemble obtenu par adjonction d'un élément à un ensemble*）

如果$a \notin X$，则$X \cup \{a\}$称为X和$\{a\}$的和，或称为将a添加到X得到的集合.

定理 35.

$(X_i)_{i \in I}$为两两不相交的集族，A为其并，S为其和，则存在A到S的双射.

证明：对任意$i \in I$，$x \mapsto (x,i)(x \in X_i)$为$X_i$到$X_i \times \{i\}$的双射，根据定理33，存在唯一的函数$f$，以$A$为定义域，以$A \times I$为到达域，且当$i \in I$时，是$x \mapsto (x,i)(x \in X_i)$在$A$上的延拓. f即为A到S的双射.

补充定理 116.

（*1*）$(X_i)_{i \in I}$为集族，A为其并，S为其和，则存在S到A的满射，存在A到S的单射.

（*2*）$(X_i)_{i \in I}$为集族，S为其和，对任意$i \in I$，令f_i为X_i到S的规范映射，$Y_i = f_i\langle X_i \rangle$，则$(Y_i)_{i \in I}$为$S$的划分.

（*3*）$(X_i)_{i \in I}$为集族，对任意$i \in I$，令f_i为X_i到S的规范映射，$Y_i = f_i\langle X_i \rangle$，则对任意$i \in I$，$x \mapsto (x,i)(x \in X_i)$为$X_i$到$Y_i$的双射.

（*4*）$(X_i)_{i \in \varnothing}$的和为$\varnothing$.

（*5*）$(\varnothing)_{i \in I}$的和为$\varnothing$.

证明：

（1） $z \mapsto pr_1 z(z \in S)$为$S$到$A$的满射. 其右逆为$A$到$S$的单射.

（2）根据定义可证.

（3）根据定义可证.

（4）根据定义可证.

（5）根据定义可证.

习题 54.

G为图，求证以下三个公式等价：

公式一：G为函数图；

公式二：$G^{-1}(X \cap Y) = G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y)$；

公式三：$X \cap Y = \varnothing \Rightarrow G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y) = \varnothing$.

证明：

$(G^{-1}(X \cap Y) = G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y)) \Leftrightarrow ((\exists y)((x,y) \in G$与$y \in X)$与$(\exists y)((x,y) \in G$与$y \in Y) \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G$与$y \in X$与$y \in Y))$. 如果$G$为函数图，则等价于$f(x) \in X$与$x \in pr_1 G$与$f(x) \in Y \Leftrightarrow f(x) \in X$与$x \in pr_1 G$与$f(x) \in Y$，故公式一$\Rightarrow$公式二.

$X\cap Y=\varnothing$，则$G^{-1}(X\cap Y)=\varnothing$，如果$G^{-1}(X\cap Y)=G^{-1}(X)\cap G^{-1}(Y)$，则$G^{-1}(X)\cap G^{-1}(Y)=\varnothing$，即公式二⇒公式三.

如果$X\cap Y=\varnothing\Rightarrow G^{-1}(X)\cap G^{-1}(Y)=\varnothing$，设$(x,y)\in G$、$(x,y')\in G$，假设$y\neq y'$，则$\{y\}\cap\{y'\}=\varnothing$，则$G^{-1}(\{y\})\cap G^{-1}(\{y'\})=\varnothing$，但$x\in G^{-1}(\{y\})$、$x\in G^{-1}(\{y'\})$，矛盾，故公式三⇒公式一.

习题 55.

G为图，求证：

（1）$G(X)=pr_2(G\cap(X\times pr_2G))$；

（2）$G(X)=G(X\cap pr_1G)$.

证明：

（1）$pr_2(G\cap(X\times pr_2G))=\{y|(\exists x)((x,y)\in G$与$x\in X$与$y\in pr_2G)\}$，根据补充定理29，$(x,y)\in G\Rightarrow y\in pr_2G$，故其等于$\{y|(\exists x)((x,y)\in G$与$x\in X)\}$，即$G(X)$.

（2）$G(X\cap pr_1G)=\{y|(\exists x)((x,y)\in G$与$x\in X$与$x\in pr_1G)\}$，根据补充定理29，$(x,y)\in G\Rightarrow x\in pr_1G$，故其等于$\{y|(\exists x)((x,y)\in G$与$x\in X)\}$，即$G(X)$.

习题 56.

求证：如果$Y\cap Y'=\varnothing$，则$(Y'\times Z)\circ(X\times Y)=\varnothing$；如果$Y\cap Y'\neq\varnothing$，则$(Y'\times Z)\circ(X\times Y)=X\times Z$.

证明：$(x,z)\in(Y'\times Z)\circ(X\times Y)\Leftrightarrow(\exists y)(x\in X$与$y\in Y$与$y\in Y'$与$z\in Z)$，根据补充定理23（2），等价于$(x\in X$与$z\in Z)$与$(\exists y)(y\in(Y\cap Y'))$，等价于$(x,z)\in X\times Z$与$(\exists y)(y\in(Y\cap Y'))$. 得证.

习题 57.

$(G_i)_{i\in I}$为图族，求证：对任意X，$(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\langle X\rangle=\bigcup\limits_{i\in I}G_i\langle X\rangle$，对任意$x$，$(\bigcap\limits_{i\in I}G_i)\langle\{x\}\rangle=\bigcap\limits_{i\in I}G_i\langle\{x\}\rangle$，并给出图$G$、$H$的例子，使$G\langle X\rangle\cap H\langle X\rangle\neq(G\cap H)\langle X\rangle$.

证明：

对于并集：

若$y\in(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\langle X\rangle$，则存在$x\in X$，使$(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，故存在$i\in I$，使$(x,y)\in G_i$，因此$y\in G_i\langle X\rangle$，故$y\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i\langle X\rangle$.

反过来，若$y\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i\langle X\rangle$，则存在$i\in I$，使$y\in G_i\langle X\rangle$，故存在$x\in X$，使$(x,y)\in G_i$，因此$(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，故$y\in(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\langle X\rangle$.

对于交集：

若$y\in(\bigcap\limits_{i\in I}G_i)\langle\{x\}\rangle$，则$(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}G_i$，故对任意$i\in I$，$(x,y)\in G_i$，因此$y\in G_i\langle\{x\}\rangle$，故$y\in\bigcap\limits_{i\in I}G_i\langle\{x\}\rangle$.

反过来，若$y \in \bigcap\limits_{i\in I} G_i\langle\{x\}\rangle$，则对任意$i \in I$，$y \in G_i\langle\{x\}\rangle$，故$(x,y) \in G_i$，则$(x,y) \in \bigcap\limits_{i\in I} G_i$，因此$y \in (\bigcap\limits_{i\in I} G_i)\langle\{x\}\rangle$.

设a、b、c互不相等，令$G = \{(b,a),(a,b),(b,c)\}$，$H = \{(b,b),(b,a),(b,c)\}$，$X = \{a,b\}$，则$G\langle X\rangle \cap H\langle X\rangle = \{a,b,c\}$，$(G\cap H)\langle X\rangle = \{a,c\}$.

习题 58.

$(G_i)_{i\in I}$为图族，H为图，求证：$(\bigcup\limits_{i\in I} G_i)\circ H = \bigcup\limits_{i\in I}(G_i\circ H)$，$H\circ(\bigcup\limits_{i\in I} G_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(H\circ G_i)$.

证明：

若$(x,z) \in (\bigcup\limits_{i\in I} G_i)\circ H$，则存在$y$，使$(x,y)\in H$，$(y,z) \in \bigcup\limits_{i\in I} G_i$，故对任意$i\in I$，$(y,z)\in G_i$，因此$(x,z)\in G_i\circ H$，故$(x,z)\in \bigcup\limits_{i\in I}(G_i\circ H)$.

反过来，若$(x,z) \in \bigcup\limits_{i\in I}(G_i\circ H)$，则对任意$i\in I$，$(x,z)\in G_i\circ H$，则存在$y$，使$(x,y)\in H$，$(y,z)\in G_i$，故$(y,z)\in \bigcup\limits_{i\in I} G_i$，因此$(x,z)\in(\bigcup\limits_{i\in I} G_i)\circ H$.

同理可证$H\circ(\bigcup\limits_{i\in I} G_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(H\circ G_i)$.

习题 59.

G、H、H'为图，求证：当且仅当$(\forall H)(\forall H')((H\cap H')\circ G = (H\circ G)\cap(H'\circ G))$时，$G$为函数图.

证明：

如果G为函数图，设$(x,z)\in(H\cap H')\circ G$，则存在$y$，使$(x,y)\in G$，$(y,z)\in H\cap H'$，因此$(x,z)\in(H\circ G)\cap(H'\circ G)$.

反过来，如果$(x,z) \in (H\circ G)\cap(H'\circ G)$，则存在$y$、$y'$，使$(x,y)\in G$，$(y,z)\in H$，$(x,y')\in G$，$(y',z)\in H'$．由于$G$为函数图，因此$y = y'$，故$(x,z)\in(H\cap H')\circ G$.

如果$(H\cap H')\circ G = (H\circ G)\cap(H'\circ G)$，设$(x,y)\in G$、$(x,y')\in G$，令$H = \{(y,z)\}$，$H' = \{(y',z)\}$，如果$y\neq y'$，则$H\cap H' = \varnothing$，故$(H\cap H')\circ G = \varnothing$．但$(x,z)\in(H\circ G)\cap(H'\circ G)$，矛盾．故$y = y'$，因此$G$为函数图.

习题 60.

G、H、K为图，求证：$(H\circ G)\cap K \subset (H\cap(K\circ G^{-1}))\circ(G\cap(H^{-1}\circ K))$.

证明：若$(x,z) \in (H\circ G)\cap K$，则$(x,z)\in K$，且存在$y$，使$(x,y)\in G$、$(y,z)\in H$．则$(x,y)\in H^{-1}\circ K$，因此$(x,y)\in(G\cap(H^{-1}\circ K))$．同时，$(y,z)\in K\circ G^{-1}$，因此$(y,z)\in(H\cap(K\circ G^{-1}))$．故$(x,z)\in(H\cap(K\circ G^{-1}))\circ(G\cap(H^{-1}\circ K))$．得证.

习题 61.

$H = (X_i)_{i\in I}$和$G = (Y_k)_{k\in K}$都是E的覆盖，

（*1*）如果G是E的划分，H是比G更细的覆盖，且对任意$k\in K$，$Y_k\neq\varnothing$. 求证：对任意$k\in K$，存在$i\in I$，使$X_i\subset Y_k$.

（*2*）写出E的两个覆盖H和G，H是比G更细的覆盖，但（*1*）中的性质不成立.

（*3*）写出E的两个划分H和G，对任意$k\in K$，存在$i\in I$，使$X_i\subset Y_k$，但H并不是比G更细的覆盖.

证明：

（1）对任意$k\in K$，设$x\in Y_k$，故存在$i\in I$，使$x\in X_i$，由于H是比G更细的覆盖，因此存在$k'\in K$，使$X_i\subset Y'_k$. 假设$k\neq k'$，由于G是E的划分，故$Y'_k\cap Y_k=\varnothing$，矛盾，因此$k=k'$，故$X_i\subset Y_k$.

（2）设a、b互不相等，$E=\{a,b\}$，$H=\Delta_{\{E\}}$，$G=\Delta_{\{\{a\},E\}}$.

（3）设a、b、c、d互不相等，$E=\{a,b,c,d\}$，$H=\Delta_{\{\{a\},\{d\},\{b,c\}\}}$，$G=\Delta_{\{\{a,b\},\{c,d\}\}}$.

2.5 集族的乘积（Produit d'une famille d'ensembles）

显式公理 3. 幂集公理

$(\forall X)Coll_Y(Y\subset X)$.

定义 59. 幂集（*ensemble des parties*）

$\{Y|Y\subset X\}$称为X的幂集，记作$\mathcal{P}(X)$或2^X.

补充定理 117.

（*1*）$\mathcal{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$;

（*2*）$\mathcal{P}(\{x\})=\{\varnothing,\{x\}\}$.

证明：

（1）根据补充定理18（2）可证.

（2）根据补充定理18可证.

补充定理 118.

$(X\subset Y)\Rightarrow(\mathcal{P}(X)\subset\mathcal{P}(Y))$.

证明：设$x\in\mathcal{P}(X)$，则$x\subset X$，故$x\subset Y$，因此$x\in\mathcal{P}(Y)$，得证.

定义 60. 在子集上的规范扩展（*extension canonique aux ensembles de parties*），在子集上的逆扩展（*extension réciproque aux ensembles de parties*）

令F为A到B的对应，函数$X\mapsto F\langle X\rangle(X\in\mathcal{P}(A),F\langle X\rangle\in\mathcal{P}(B))$称为$F$在子集上的规范扩展，记作$\hat{F}$. 函数$Y\mapsto F^{-1}\langle Y\rangle(Y\in\mathcal{P}(A),F^{-1}\langle Y\rangle\in\mathcal{P}(A))$，称为$F$在子集上的逆扩展.

补充定理 119.

（*1*）令F为A到B的对应，F'为B到C的对应，则$F'\circ F$在子集上的规范扩展为$\hat{F'}\circ\hat{F}$.

（*2*）令F为A到B的双射，则F^{-1}在子集上的规范扩展为$(\hat{F})^{-1}$.

（*3*）Id_A在子集上的规范扩展为$Id_{\mathcal{P}(A)}$.

证明：

（1）根据定理16，$F'\circ F\langle X\rangle = F'\langle F\langle X\rangle\rangle$，且定义域均为$\mathcal{P}(A)$、到达域均为$\mathcal{P}(C)$，得证.

（2）根据补充定理78可证.

（3）根据补充定理66（4）可证.

定理 36.

（*1*）设f为E到F的满射，则$\hat{f}$是$\mathcal{P}(E)$到$\mathcal{P}(F)$的满射.

（*2*）设f为E到F的单射，则$\hat{f}$是$\mathcal{P}(E)$到$\mathcal{P}(F)$的单射.

证明：

（1）设s是f的右逆，则$f\circ s = Id_F$，根据补充定理119（1），$\hat{f}\circ\hat{s} = Id_{\mathcal{P}(F)}$，得证.

（2）如果$E=\varnothing$，根据补充定理18（2），$\mathcal{P}(E)=\{\varnothing\}$，根据补充定理74（2），$\hat{f}$是单射. 如果$E\neq\varnothing$，设$r$是$f$的左逆，则$r\circ f = Id_E$，根据补充定理119（1），$\hat{r}\circ\hat{f} = Id\mathcal{P}(E)$，则$\hat{f}$是单射.

补充定理 120. 所有从一个集合到另一个集合的映射的图能够组成集合

$(G$为图$)$与$(pr_1G=E)$与$(pr_2G\subset F)$是G上的集合化公式.

证明：$(G$为图$)$与$(pr_1G=E)$与$(pr_2G\subset F)\Rightarrow G\subset E\times F$，因此$G\in\mathcal{P}(E\times F)$，根据证明规则52得证.

定义 61. 映射的图的集合（*ensemble des graphe d'applications*）

$\{G|(G$为图$)$与$(pr_1G=E)$与$(pr_2G\subset F)\}$称为E到F的映射的图的集合，记作F^E.

补充定理 121.

$F^E\subset\mathcal{P}(E\times F)$.

证明：设$G\in F^E$，则$(G$为图$)$与$(pr_1G=E)$与$(pr_2G\subset F)\Rightarrow G\subset E\times F$，因此$G\in\mathcal{P}(E\times F)$，得证.

补充定理 122. 所有从一个集合到另一个集合的映射能够组成集合

$(f$为A到B的映射$)$是f上的集合化公式.

证明：$(f$的图$\in A\times B$，故$f\in A\times B\times A\times B$，根据证明规则52得证.

定义 62. 映射的集合（*ensemble des applications*）

$\{f|f$为A到B的映射$\}$称为A到B的映射的集合，记作$\mathcal{F}(A;B)$.

补充定理 123.

$G \mapsto (G, A, B)$是A^B到$\mathcal{F}(A;B)$的双射.

证明：对任意$G \in A^B$，$(G, A, B) \in \mathcal{F}(A;B)$，因此该映射的定义域是$A^B$；$G = G' \Leftrightarrow (G, A, B) = (G', A, B)$，因此该对应是映射并且是单射；对任意$f \in \mathcal{F}(A;B)$，$f$为$A$到$B$的映射，并且$f$的图$\in A \times B$，因此该映射为满射．得证.

定义 63. 映射的图的集合到映射的集合的规范映射（*application canonique de ensemble des graphe d'applications dans ensemble des applications*）

A^B到$\mathcal{F}(A;B)$的映射$G \mapsto (G, A, B)$，称为A^B到$\mathcal{F}(A;B)$的规范映射.

定理 37.

（*1*）令u为A'到A的满射，v为B'到B的单射，f为A到B的映射，则$f \mapsto v \circ f \circ u(f \in \mathcal{F}(A;B))$是单射.

（*2*）令u为A'到A的单射，v为B'到B的满射，f为A到B的映射，则$f \mapsto v \circ f \circ u(f \in \mathcal{F}(A;B))$是满射.

证明：

（1）令s为u的右逆，r为v的左逆，则$r \circ (v \circ f \circ u) \circ s = Id_F \circ f \circ Id_E$，即等于$f$．得证.

（2）令s为v的右逆，r为u的左逆，则对任意f，$v \circ (s \circ f \circ r) \circ u = Id_F \circ f \circ Id_E$，即等于$f$．得证.

定理 38.

令u为A'到A的双射，v为B'到B的双射，f为A到B的映射，则$f \mapsto v \circ f \circ u(f \in \mathcal{F}(A;B))$是双射.

证明：根据定理37可证.

定理 39.

f为$B \times C$到A的映射，令g为映射$y \mapsto f_y(y \in C, f_y \in \mathcal{F}(B;A))$，则$f \mapsto g(f \in \mathcal{F}(B \times C;A), g \in \mathcal{F}(C;\mathcal{F}(B;A)))$为双射.

证明：

f为$B \times C$到A的映射，则f_y是B到A的映射，因此$y \mapsto f_y$是C到$\mathcal{F}(B;A)$的映射.

反过来，设g为C到$\mathcal{F}(B;A)$的映射，令二元函数$f = (g(y))(x)$，其定义域为$B \times C$，则当$y \in C$时，$f_y = g(y)$．同时，设定义域为$B \times C$的二元函数f'也满足${f'}_y = g(y)$，则当$y \in C$时，$f_y = {f'}_y$，即当$x \in B$、$y \in C$时，$f_y(x) = {f'}_y(x)$，根据补充定理82（2），$f = f'$，即f是唯一的，得证.

定义 64. 映射的集合之间的规范映射（*application canonique entre deux ensembles des applications*）

f为$B\times C$到A的映射，令g为映射$y\mapsto f_y(y\in C, f_y\in\mathcal{F}(B;A))$，则$f\mapsto g(f\in\mathcal{F}(B\times C;A), g\in\mathcal{F}(C;\mathcal{F}(B;A)))$称为$\mathcal{F}(B\times C;A)$到$\mathcal{F}(C;\mathcal{F}(B;A))$的规范映射.

补充定理 124. 集族的乘积是集合

(F为函数图)与($pr_1F=I$)与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i)$是$F$上的集合化公式.

证明：$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i)$，因此$i\in I\Rightarrow F(i)\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，根据补充定理65，$pr_2F\subset\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，又因为$pr_1F=I$，故$F\subset I\times\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，因此$F\in\mathcal{P}(I\times\bigcup\limits_{i\in I}X_i)$，根据证明规则52得证.

定义 65. 集族的乘积（*produit d'une famille d'ensembles*），因子（*facteur*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$\{F|(F$为函数图$)$与$(pr_1F=I)$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i)\}$称为该集族的乘积，记作$\prod\limits_{i}\in IX_i$. 当$i\in I$时，$X_i$称为乘积$\prod\limits_{i\in I}X_i$的指标$i$的因子.

补充定理 125.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$i\in I$，则(对于$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$形式为$F(i)$的对象集合$)\subset X_i$.

证明：$y\in$ (对于$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$形式为$F(i)$的对象集合) $\Leftrightarrow(\exists F)(y=F(i)$与$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i)$，因此$y\in$ (对于$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$形式为$F(i)$的对象集合) $\Rightarrow(\exists F)(y=F(i)$与$F(i)\in X_i)$，故$y\in$ (对于$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$形式为$F(i)$的对象集合) $\Rightarrow(\exists F)(y=F(i)$与$y\in X_i)$，故$y\in$ (对于$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$形式为$F(i)$的对象集合) $\Rightarrow y\in X_i$，得证.

定义 66. 坐标函数（*fonction coordonnée*），射影函数（*fonction projection*），坐标（*coordonnée*），射影（*projection*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$i\in I$，映射$F\mapsto F(i)(F\in\prod\limits_{i\in I}X_i, F(i)\in X_i)$称为指标$i$的坐标函数或射影函数，记作$pr_i$，$pr_i(F)$可以简记为$pr_iF$. 其中，$F(i)$称为$F$的指标$i$的坐标或射影.

定义 67. 乘积的子集的射影（*projection d'une partie de la produit*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$A\subset\prod\limits_{i\in I}X_i$，则$pr_i\langle A\rangle$称为$A$的指标$i$的射影.

补充定理 126.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，$A\subset\prod\limits_{i\in I}X_i$，则$A\subset\prod\limits_{i\in I}pr_i\langle A\rangle$.

证明：设$F\in A$，则F为函数图、$pr_1F=I$，且对任意$i\in I$，$F(i)\in pr_i\langle A\rangle$，即$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i)$，因此$F\in\prod\limits_{i\in I}pr_i\langle A\rangle$，得证.

补充定理 127.

（*1*）$(X_i)_{i\in\varnothing}$的乘积为$\{\varnothing\}$.

（*2*）$(X_i)_{i\in I}$为集族，如果存在$i\in I$，使$X_i=\varnothing$，则$(X_i)_{i\in I}$的乘积为$\varnothing$.

证明：

（1）一方面，$\varnothing$为函数图且$pr_1\varnothing = \varnothing$．另一方面，设$F \in \prod_{i\in\varnothing} X_i$，则$pr_1F = \varnothing$，因此$F = \varnothing$，得证．

（2）根据定义可证．

补充定理 128.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，如果$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i = E)$，则$\prod_{i\in I} X_i = E^I$．

证明：$F \in \prod_{i\in I} X_i \Leftrightarrow ((F$为函数图$)$与$(pr_1F = I)$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in E))$，如果$F \in \prod_{i\in I} X_i$，则$pr_1F = I$、$pr_2F \subset E$，则$F \in E^I$．

反过来，如果$F \in E^I$，则F为I到E的映射的图，根据补充定理64（3），$i \in I \Rightarrow F(i) \in E$，故$F \in \prod_{i\in I} X_i$．得证．

补充定理 129.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，如果$\bigcup_{i\in I} X_i \subset E$，则$\prod_{i\in I} X_i \subset E^I$．

证明：$F \in \prod_{i\in I} X_i \Leftrightarrow ((F$为函数图$)$与$(pr_1F = I)$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i))$，由于$\bigcup_{i\in I} X_i \subset E$，故对任意$i \in I$，均有$X_i \subset E$，因此$F \in \prod_{i\in I} X_i \Rightarrow ((F$为函数图$)$与$(pr_1F = I)$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in E))$，根据补充定理128，$F \in \prod_{i\in I} X_i \Rightarrow F \in E^I$，得证．

补充定理 130.

$\prod_{i\in\{a\}} X_i = {X_a}^{\{a\}}$，且指标$i$的坐标函数为${X_a}^{\{a\}}$到$X_a$的双射．

证明：如果$i \in \{a\}$，则$i = a$，$X_i = X_a$，根据补充定理128，$\prod_{i\in\{a\}} X_i = X_a^{\{a\}}$．设$F \in {X_a}^{\{a\}}$，$F' \in {X_a}^{\{a\}}$，且$F(a) = F'(a)$，则$i \in \{a\} \Rightarrow F(i) = F'(i)$，故$F = F'$．对任意$b \in X_a$，令$F$为$\{(a, b)\}$，则$F \in {X_a}^{\{a\}}$，且$F(a) = b$．故$F \mapsto F(a)(F \in {X_a}^{\{a\}}, F(a) \in X_a)$为双射．

定义 68. 乘积和集合之间的规范映射（*application canonique entre le produit et un ensemble*）

$\prod_{i\in\{a\}} X_i$的指标i的坐标函数，称为$X_a^{\{a\}}$到X_a的规范映射，其逆映射称为X_a到${X_a}^{\{a\}}$的规范映射．

补充定理 131.

如果$a \neq b$，则$\prod_{i\in\{a,b\}} X_i = \{F | (\exists x)(\exists y)(x \in X_a$与$y \in X_b$与$F = \{(a, x), (b, y)\})\}$，并且，$(x, y) \mapsto \{(a, x), (b, y)\}$是$X_a \times X_b$到$\prod_{i\in\{a,b\}} X_i$的双射．

证明：

$(\exists x)(\exists y)(x\in X_a$与$y\in X_b$与$F=\{(a,x),(b,y)\})\Rightarrow pr_1F=(a,b)$与$pr_2F\subset X_a\cup X_b$，因此，其为$F$上的集合化公式．

$\prod\limits_{i\in\{a,b\}}X_i=\{F|(F$为函数图$)$与$(pr_1F=\{a,b\})$与$F(a)\in X_a$与$F(a)\in X_b\}$．如果$(\exists x)(\exists y)(x\in X_a$与$y\in X_b$与$F=\{(a,x),(b,y)\}$，显然$F\in\prod\limits_{i\in\{a,b\}}X_i$．

反过来，如果$F\in\prod\limits_{i\in\{a,b\}}X_i$，则$F$为函数图，设$(u,v)\in F$，则$u=a$或$u=b$，如果$u=a$，则$v=f(a)$，如果$u=b$，则$v=f(b)$，因此$F=\{(a,f(a)),(b,f(b))\}$，又因为$x\in X_a$与$y\in X_b$，故$(\exists x)(\exists y)(x\in X_a$与$y\in X_b$与$F=\{(a,x),(b,y)\}$．

综上，$\prod\limits_{i\in\{a,b\}}X_i=\{F|(\exists x)(\exists y)(x\in X_a$与$y\in X_b$与$F=\{(a,x),(b,y)\})\}$．

因此，$(x,y)\mapsto\{(a,x),(b,y)\}$是$X_a\times X_b$到$\prod\limits_{i\in\{a,b\}}X_i$的映射，对任意$F\in\prod\limits_{i\in\{a,b\}}X_i$，$(\exists x)(\exists y)(x\in X_a$与$y\in X_b$与$F=\{(a,x),(b,y)\})$，因此该映射为满射；对于$(x,y)\in X_a\times X_b$，$(x',y')\in X_a\times X_b$，由于$a\neq b$，若$\{(a,x),(b,y)\}=\{(a,x'),(b,y')\}$，则$x=x'$，$y=y'$，故该映射为单射．得证．

补充定理 132.

$\prod\limits_{i\in I}\{a_i\}=\{(a_i)_{i\in I}\}$．

证明：$(\exists i)(i\in I$与$z=(i,a_i))\Rightarrow z\in\times\bigcup\limits_{i\in I}\{a_i\}$，因此为$z$上的集合化公式．$F\in\prod\limits_{i\in I}\{a_i\}\Leftrightarrow((F$为函数图$)$与$(pr_1F=I)$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)=a_i))$．如果$z\in F$，则$(\exists i)(i\in I\check{}z=(i,a_i))$，则$z$为有序对，故$F$为图；若$(x,y)\in F$、$(x,y')\in F$，则$(\exists i)(i\in I$与$x=i$与$y=a_i)$、$(\exists i)(i\in I$与$x=i$与$y'=a_i)$，故$y=y'$，因此$F$为函数图；同时，$(\exists y)((x,y)\in F)\Leftrightarrow(\exists y)(\exists i)(i\in I$与$x=i$与$y=a_i)$，等价于$(\exists i)(i\in I$与$x=i)$，等价于$x\in I$，故$pr_1F=I$；此外，若$i\in I$，则$(i,a_i)\in F$，同时$F(i)=a_i$．因此，$F\in\prod\limits_{i\in I}\{a_i\}$．

反过来，如果$F\in\prod\limits_{i\in I}\{a_i\}$，$F'\in\prod\limits_{i\in I}\{a_i\}$，则$i\in I\Rightarrow F(i)=a_i$、$i\in I\Rightarrow F'(i)=a_i$，则$i\in I\Rightarrow F(i)=F'(i)$，因此$F=F'$．故$x\in\prod\limits_{i\in I}\{a_i\}\Rightarrow x=F$，又$F\in\prod\limits_{i\in I}\{a_i\}$，因此$x\in\prod\limits_{i\in I}\{a_i\}\Leftrightarrow x=F$，得证．

补充定理 133.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$，则$F=(F(i))_{i\in I}$．

证明：由于$(F$为函数图$)$与$(pr_1F=I)$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i)$，因此$(x,y)\in F\Leftrightarrow x\in I$与$y=F(x)$，$(x,y)\in(F(i))_{i\in I}\Leftrightarrow(\exists i)(i\in I$与$x=i$与$y=F(i))$，等价于$x\in I$与$y=F(x)$，得证．

补充定理 134. 对角映射是单射

（*1*）$pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x$是z上的集合化公式．

（*2*）令G_x表示图$\{z|pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x\}$，则G_x为函数图，并且$(\exists x)(x \in E$与$G = G_x)$是G上的集合化公式．同时，$\{G|(\exists x)(x \in E$与$G = G_x)\} \subset E^I$，且$x \mapsto G_x$是E到E^I的单射．

证明：

（1）$pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x \Rightarrow z \in I \times \{x\}$，因此是集合化公式．

（2）设$a \in I$、$b \in I$，且$(a, b) \in G_x$，$(a, b') \in G_x$，则$b = x$，$b' = x$，故G为函数图．而$(\exists x)(x \in E$与$G = G_x) \Rightarrow G \subset I \times E$，因此$G \in E^I$．因此，$(\exists x)(x \in E$与$G = G_x)$是$G$上的集合化公式，且$\{G|(\exists x)(x \in E$与$G = G_x)\} \subset E^I$．

设$x \in E$、$x' \in E$，若$G_x = G'_x$，则$(\forall z)(pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x \Leftrightarrow pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x')$，故$x = x'$，因此该映射为单射．

定义 69. 到映射的图的集合的对角映射（*application diagonale dans ensemble des graphe d'applications*）

令G_x为函数图$\{z|pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x\}$，则映射$x \mapsto G_x (x \in E, G_x \in E^I)$称为对角映射．

定理 40.

令$(X_i)_{i \in I}$为集族，u是K到I的双射，其图为U，则映射$F \mapsto F \circ U$为$\prod\limits_{i \in I} X_i$到$\prod\limits_{k \in K} X_{u(k)}$的双射．

证明：根据定理23，$\bigcup\limits_{i \in I} X_i = \bigcup\limits_{k \in K} X_{u(k)}$，设其为$A$，根据定理37，映射$F \mapsto F \circ U (F \in A^I)$为$A^I$到$A^K$的双射，根据补充定理75，$\prod\limits_{i \in I} X_i$到$\prod\limits_{k \in K} X_{u(k)}$的映射$F \mapsto F \circ U$为单射．由于$u$为

K到I的双射，因此，若对任意$i \in I$，$F(i) \in X_i$，则对任意k，设$k = u^{-1}(i)$，则$F \circ U(k) \in X_{u(k)}$，反之，同理可证$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i) \Leftrightarrow (\forall k)(k \in K \Rightarrow F \circ U(k) \in X_{u(k)})$．因此，对于$\prod\limits_{i \in I} X_i$到$\prod\limits_{k \in K} X_{u(k)}$的映射$F \mapsto F \circ U$，若$F \circ U \in \prod\limits_{k \in K} X_{u(k)}$，则$F \in \prod\limits_{i \in I} X_i$，故为满射，得证．

定义 70. 部分乘积（*produit partiel*）

令$(X_i)_{i \in I}$为集族，$J \subset I$，则称$\prod\limits_{i \in J} X_i$为其部分乘积．

补充定理 135.

$(X_i)_{i \in I}$为集族，$J \subset I$，f为函数，其图为F，且$F \in \prod\limits_{i \in I} X_i$，则$F \circ \Delta_J$为$f|J$的图．

证明：根据补充定理73（2）可证．

补充定理 136.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，f为函数，其图为F，且$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$，则$F\circ\Delta_J\in\prod\limits_{i\in J}X_i$.

证明：根据补充定理135，$F\circ\Delta_J$为$f|J$的图．因此$(x,y)\in F\circ\Delta_J\Leftrightarrow x\in J$与$(x,y)\in F$.

设$i\in J$，由于$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i)$，故$F(x)\in X_i$，根据补充定理73（1），$F\circ\Delta_J\in X_i$，即$(\forall i)(i\in J\Rightarrow F\circ\Delta_J(i)\in X_i)$，同时，根据定理17，$F\circ\Delta_J$为函数图且定义域为$J$，根据定义，$F\circ\Delta_J\in\prod\limits_{i\in J}X_i$.

定义 71. 指标集的子集的射影（*projection de partie de ensemble des indices*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，F为函数图，则映射$F\mapsto F\circ\Delta_J(F\in\prod\limits_{i\in I}X_i,F\circ\Delta_J\in\prod\limits_{i\in J}X_i)$称为指标$J$的射影，记作$pr_J$.

定理 41.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq\varnothing$，令$A=\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，设$g$为$J$到$A$的映射，并且$(\forall i)(i\in J\Rightarrow g(i)\in X_i)$，则存在映射$f$，为$g$在$I$上的延拓，

证明：对于$i\in I-J$，令$T_i=\tau_y(y\in X_i)$，由于$X_i\neq\varnothing$，因此$T_i\in X_i$．设g的图为G，令$F=G\cup(\bigcup\limits_{i\in I}-J(i,T_i))$，由于$(\exists y)((x,y)\in G)\Leftrightarrow x\in I$，当$x\in J$时，$(\exists y)((x,y)\in G)$，则$(\exists y)((x,y)\in F)$，当$x\in I-J$时，$(x,T_x)\in F$，当$x\notin I$时，$(\exists y)((x,y)\in G)$为假，若存在$y$使$(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I-J}(i,T_i)$，则存在$i\in I-J$，使$(i,T_i)=(x,y)$，则$x\in I$，矛盾．故$pr_1F=I$.

类似可证$pr_2F\subset A$．令$f=(F,I,A)$，则f和g在J上重合，故f为g在I上的延拓.

定理 42.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq\varnothing$，则pr_J为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到$\prod\limits_{i\in J}X_i$的满射.

证明：根据定理41可证.

定理 43.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq\varnothing$，则对$a\in I$，pr_a为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到X_a的满射.

证明：根据补充定理130，$\prod\limits_{i\in J}X\{a\}=X_a{}^{\{a\}}$，根据定理42，$pr_{\{a\}}$为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到$X_a{}^{\{a\}}$的满射，令其图为$G_1$.

同时，$pr_{\{a\}}$为$F\mapsto F\circ\{(a,a)\}$，且$F\circ\{(a,a)\}\in\prod\limits_{i\in\{a\}}X_i$．根据补充定理130，$\prod\limits_{i\in\{a\}}X_i$的指标$i$的坐标函数为$X_a{}^{\{a\}}$到$X_a$的满射，令该函数为$g$，其图为$G_2$.

由于$F\circ\{(a,a)\}(a)=F(a)$，即对任意$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$，$(F,F\circ\{(a,a)\})\in G_1$，$(F\circ\{(a,a)\},F(a))\in G_2$，因此$pr_a=g\circ pr_{\{a\}}$，根据定理21（2），$pr_a$为$\prod\limits_{i\in I}X_i$ 到X_a的满射.

定理 44.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，则$\prod\limits_{i\in I} X_i = \varnothing \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I$与$X_i = \varnothing)$.

证明：如果$\prod\limits_{i\in I} X_i = \varnothing$，假设$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \neq \varnothing)$，设$x \in X_a$，根据定理43，存在$F \in \prod\limits_{i\in I} X_i$，使$F(a) = x$，矛盾，故$(\exists i)(i \in I$与$X_i = \varnothing)$.

反过来，如果$(\exists i)(i \in I$与$X_i = \varnothing)$，假设$\prod\limits_{i\in I} X_i \neq \varnothing$，根据定理43，对任意$a \in I$，$pr_a\langle\prod\limits_{i\in I} X_i\rangle \subset X_a$，则$X_a \neq \varnothing$，矛盾，故$\prod\limits_{i\in I} X_i = \varnothing$.

定理 45.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为有相同指标集I的集族，如果$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \subset Y_i)$，则$\prod\limits_{i\in J} X_i \subset \prod\limits_{i\in J} Y_i$；反过来，如果$\prod\limits_{i\in J} X_i \subset \prod\limits_{i\in J} Y_i$，且对任意$i \in I$，均有$X_i \neq \varnothing$，则$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \subset Y_i)$.

证明：$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \subset Y_i)$，则对任意$F \in \prod\limits_{i\in J} X_i$，$F(i) \in X_i \Rightarrow F(i) \in Y_i$，故$F \in \prod\limits_{i\in J} Y_i$.

反过来，根据定理43，对任意$a \in I$，$pr_a\langle\prod\limits_{i\in J} X_i\rangle = X_a$，$pr_a\langle\prod\limits_{i\in J} Y_i\rangle = Y_a$，由于$\prod\limits_{i\in J} X_i \subset \prod\limits_{i\in J} Y_i$，因此$pr_a\langle\prod\limits_{i\in J} X_i\rangle \subset pr_a\langle\prod\limits_{i\in J} Y_i\rangle$，得证.

补充定理 137.

令$(X_i)_{i\in I}$、$\{a_i\}i \in I$为有相同指标集I的集族，如果$(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i \in X_i)$，则$(a_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in J} X_i$；反过来，如果$(a_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in J} X_i$，则$(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i \in X_i)$.

证明：根据定理45可证.

定理 46. 乘积的结合律

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(J_l)_{l\in L}$为I的划分，则映射$f \mapsto (prJ_l f)_{l\in L}$为$\prod\limits_{i\in I} X_i$到$\prod\limits_{l\in L}(\prod\limits_{i\in J} lX_i)$的双射.

证明：根据补充定理135，$prJ_l f = f|J_l$. 设$w \in \prod\limits_{l\in L}(\prod\limits_{i\in J} lX_i)$，则当$l \in L$时，$w(l) \in \prod\limits_{i\in J} lX_i$，即$(w(l), J_l, \bigcup\limits_{i\in J_l} X_i)$为映射，又因为$J_l \subset I$，因此$(w(l), J_l, \bigcup\limits_{i\in I} X_i)$为映射，将其记为$v_l$. 对于集族$(v_l)_{l\in L}$，根据定理32，存在唯一的$I$到$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$的映射$u$，使对任意$l \in L$，$u$在$J_l$上的限制为$v_l$. 得证.

补充定理 138.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(J_l)_{l\in\{a,b\}}$为I的划分，则映射$f \mapsto (pr_{J_a} f, pr_{J_b} f)$为$\prod\limits_{i\in I} X_i$到$(\prod\limits_{i\in J_a} X_i) \times (\prod\limits_{i\in J_b} X_i)$的双射. 如果对任意$i \in J_b$，$X_i$均为单元素集合，则$f \mapsto pr_{J_a} f$为$\prod\limits_{i\in I} X_i$到$\prod\limits_{i\in J_a} X_i$的双射.

证明：根据定理46，$f \mapsto (pr_{J_l} f)(l \in \{a,b\})$为$\prod\limits_{i\in I} X_i$ 到 $\prod\limits_{l\in\{a,b\}}(\prod\limits_{i\in J_l} X_i)$的双射，令其为$f$.

根据补充定理131，$(x,y) \mapsto \{(a,x),(b,y)\}$是$\prod\limits_{i\in J_a} X_i \times \prod\limits_{i\in J_b} X_i$到$\prod\limits_{l\in\{a,b\}}(\prod\limits_{i\in J_l} X_i)$的双射，令其为$g$.

则$g^{-1}\circ f$即为映射$f \mapsto (prJ_a f, pr_{J_b} f)$，前半部分得证．如果对任意$i \in J_b$，$X_i$均为单元素集合，根据补充定理132，令$\prod\limits_{i\in J_b} X_i = \{y\}$，则对任意$z \in (\prod\limits_{i\in J_a} X_i) \times (\prod\limits_{i\in J_b} X_i)$，$pr_2 z = y$，因此，$z \mapsto pr_1 f$为$(\prod\limits_{i\in J} aX_i) \times (\prod\limits_{i\in J_b} X_i)$到$\prod\limits_{i\in J_a} X_i$的双射，后半部分得证.

补充定理 139.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为集族，则映射$f \mapsto ((pr_1(pr_i f))_{i\in I}, (pr_2(pr_i f))_{i\in I})$为$\prod\limits_{i\in I}(X_i \times Y_i)$到$(\prod\limits_{i\in I} X_i) \times (\prod\limits_{i\in I} Y_i)$的双射.

证明：

设$f \in \prod\limits_{i\in I}(X_i \times Y_i)$，则当$i \in I$时，$f(i) \in X_i \times Y_i$，故$pr_1 f(i) \in X_i$，因此$(pr_1(pr_i f))_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} X_i$，同理$(pr_2(pr_i f))_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} Y_i$，故$((pr_1(pr_i f))_{i\in I}, (pr_2(pr_i f))_{i\in I}) \in (\prod\limits_{i\in I} X_i) \times (\prod\limits_{i\in I} Y_i)$.

对任意$x \in (\prod\limits_{i\in I} X_i)$，$y \in (\prod\limits_{i\in I} Y_i)$，设$f$为$i \mapsto (pr_i x, pr_i y)$，则$(pr_1(pr_i f))_{i\in I} = (pr_i x)_{i\in I}$，根据补充定理133，$(pr_1(pr_i f))_{i\in I} = x$，同理$(pr_2(pr_i f))_{i\in I} = y$．同时，当$i \in I$时，$pr_i x \in X_i$，$pr_i y \in Y_i$，因此$(pr_i x, pr_i y) \in X_i \times Y_i$，所以$f \in \prod\limits_{i\in I}(X_i \times Y_i)$，故该映射为满射.

对任意$f \in \prod\limits_{i\in I}(X_i \times Y_i)$，$f' \in \prod\limits_{i\in I}(X_i \times Y_i)$，若$(pr_1(pr_i f))_{i\in I} = (pr_1(pr_i f'))_{i\in I}$，令其为$A$，则对任意$i' \in I$，$(i', pr_1 f(i')) \in A$，因此$(\exists i)(i \in I$与$i = i'$与$pr_1 f(i') = pr_1 f'(i))$，因此$(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_1 f(i) = pr_1 f'(i))$，同理$(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_2 f(i) = pr_2 f'(i))$，故$(\forall i)(i \in I \Rightarrow f(i) = f'(i))$，根据补充定理133，$f = f'$，故该映射为单射．得证.

定义 72. 两个集族乘积之间的规范映射（*application canonique entre deux produits d'familles d'ensembles*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(J_l)_{l\in L}$为I的划分，则映射$f \mapsto (prJ_l f)_{l\in L}$称为$\prod\limits_{i\in I} X_i$到$\prod\limits_{l\in L}(\prod\limits_{i\in J_l} X_i)$的规范映射.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(J_l)_{l\in\{a,b\}}$为I的划分，则映射$f \mapsto (pr_{J_a} f, pr_{J_b} f)$称为$\prod\limits_{i\in I} X_i$到$(\prod\limits_{i\in J_a} X_i) \times (\prod\limits_{i\in J_b} X_i)$的规范映射.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为集族，则映射$f \mapsto ((pr_1(pr_i f))_{i\in I}, (pr_2(pr_i f))_{i\in I})$称为$\prod\limits_{i\in I}(X_i \times Y_i)$到$(\prod\limits_{i\in I} X_i) \times (\prod\limits_{i\in I} Y_i)$的规范映射.

定理 47. 并集和交集的分配律

令$((X_{l,i})_{l\in L})_{i\in I}$为集族，且$L \neq \varnothing$、$(\forall l)(l \in L \Rightarrow J_l \neq \varnothing)$．令$I = \prod\limits_{l\in L} J_l$，则：

（*1*）$\bigcup\limits_{l\in L}(\bigcap\limits_{i\in J_l} X_{l,i}) = \bigcap\limits_{f\in I}(\bigcup\limits_{l\in L} X_{l,f(l)})$.

（2）$\bigcap_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i}) = \bigcup_{f\in I}(\bigcap_{l\in L} X_{l,f(l)})$.

证明：

（1）设$x\in\bigcup_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i})$，则存在$l\in L$，使$x\in\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i}i$，因此对任意$f\in I$，$x\in X_{l,f(l)}$，即对任意$f\in I$，$x\in\bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)}$，因此$x\in\bigcap_{f\in I}(\bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)})$.

反过来，设$x\notin\bigcup_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i})$，则对任意$l\in L$，$x\notin\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i}$，即对任意$l\in L$，存在$J_l$，使$i\in J_l$且$x\notin X_{l,i}$. 由于$i\in J_l$与$x\notin X_{l,i}$为集合化公式，可令$J'_l=\{i|i\in J_l与x\notin X_{l,i}\}$，根据定理43，存在函数图$f$，定义域为$I$，且对任意$l\in L$，$f(l)\in J'_l$. 因此$f\in I$，且对任意$l\in L$，$x\notin X_{l,f(l)}$. 则$x\notin\bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)}$，故$x\notin\bigcap_{f\in I}(\bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)})$，得证.

（2）令$A=\bigcup_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})$，令$Y_{l,i}=\complement_A X_{l,i}$，根据定理29、定理47（1）可证.

定理 48.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_k)k\in K$为集族，则：

（1）若$I\neq\varnothing$，$K\neq\varnothing$，则$(\bigcap_{i\in I} X_i)\cup(\bigcap_{k\in K} Y_k)=\bigcap_{(i,k)\in I\times K}(X_i\cup Y_k)$.

（2）$(\bigcup_{i\in I} X_i)\cap(\bigcup_{k\in K} Y_k)=\bigcup_{(i,k)\in I\times K}(X_i\cap Y_k)$.

证明：令$L=\{a,b\}$，$J_a=I$，$J_b=K$. 根据补充定理131，存在$\prod_{i\in\{a,b\}} J_i$到$A\times B$的双射，令其为f，根据定理47可证.

定理 49. 并集和交集对乘积的分配律

令$((X_{l,i})_{l\in L})_{i\in I}$为集族，$I=\prod_{l\in L} J_l$，则：

（1）$\prod_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})=\bigcup_{f\in I}(\prod_{l\in L} X_{l,f(l)})$.

（2）若$L\neq\varnothing$、$(\forall l)(l\in L\Rightarrow J_l\neq\varnothing)$，则$\prod_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i})=\bigcap_{f\in I}(\prod_{l\in L} X_{l,f(l)})$.

证明：

（1）若$L=\varnothing$，左边$=\{\varnothing\}$，右边$=\{\varnothing\}$；若存在$l\in L$，使$J_l=\varnothing$，则左边$=\varnothing$，右边$=\varnothing$.

在其他情况下，设$g\in\prod_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})$，则对任意$l\in L$，存在$i\in J_l$，使$g(l)\in X_{l,i}$. 由于$i\in J_l$与$g(l)\in X_{l,i}$是$i$上的集合化公式，令$H_l=\{i|i\in J_l与g(l)\in X_{l,i}\}$，则$H_l\neq\varnothing$. 令$f=\bigcup l\in L(i,\tau_y(y\in H_l))$，则$f$为函数图且对任意$l\in L$，$f(l)\in H_l$，且$f\in I$. 因此$g(l)\in X_{l,f(l)}$，故$g\in\prod_{l\in L} X_{l,f(l)}$，因此$g\in\bigcup_{f\in I}(\prod_{l\in L} Xl,f(l))$.

反过来，如果$g\in\bigcup_{f\in I}(\prod_{l\in L} X_{l,f(l)})$，则存在$f\in I$，使$g\in\prod_{l\in L} X_{l,f(l)}$，因此对任意$l\in L$，均有$g(l)\in X_{l,f(l)}$，由于$f(l)\in J_l$，因此$g(l)\in\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i}$，故$g\in\prod_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})$. 得证.

（2）类似定理49（1）可证.

定理 50.

如果对任意$l \in L$，集族$(X_{l,i})_{l\in L}$为$\bigcup\limits_{i\in J_l} X_{l,i}$的划分，则集族$(\prod\limits_{l\in L} X_{l,f(l)})_{f\in I}$是$\prod\limits_{l\in L}(\bigcup\limits_{i\in J_l} X_{l,i})$的划分.

证明：令$P_f = \prod\limits_{l\in L} X_{l,f(l)}$. 设$f \in I$、$g \in I$，且$f \neq g$，则存在$l \in L$，使$f(l) \neq g(l)$，故$X_{l,f(l)} \cap X_{l,g(l)} = \varnothing$，如果$P_f \cap P_g \neq \varnothing$，则令$G \in P_f \cap P_g$，因此$G(l) \in X_{l,f(l)}$，$G(l) \in X_{l,g(l)}$，矛盾. 因此，$P_f \cap P_g = \varnothing$，得证.

定理 51.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_k)k \in K$为集族，则：

（1）$(\bigcup\limits_{i\in I} X_i) \times (\bigcup\limits_{k\in K} Y_k) = \bigcup\limits_{(} i,k) \in I \times K(X_i \times Y_k)$.

（2）若$I \neq \varnothing$，$K \neq \varnothing$，则$(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) \times (\bigcap\limits_{k\in K} Y_k) = \bigcap\limits_{(} i,k) \in I \times K(X_i \times Y_k)$.

证明：类似定理48的证明，根据定理49可证.

定理 52.

令$(X_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$为集族，$k \neq \varnothing$，则$\bigcap\limits_{k\in K}(\prod\limits_{i\in I} X_{i,k}) = \prod\limits_{i\in I}(\bigcap\limits_{k\in K} X_{i,k})$.

证明：

$f \in \bigcap\limits_{k\in K}(\prod\limits_{i\in I} X_{i,k}) \Leftrightarrow (\forall k)(k \in K \Rightarrow f \in \prod\limits_{i\in I} X_{i,k})$. 等价于($f$为函数图)与($f$的定义域为$I$)与$(\forall k)(\forall i)(k \in K$与$i \in I \Rightarrow f(i) \in X_{i,k})$.

另一方面，$f \in \prod\limits_{i\in I}(\bigcap\limits_{k\in K} X_{i,k}) \Leftrightarrow$ (f为函数图)与(f的定义域为I)与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow f(i) \in \bigcap\limits_{k\in K} X_{i,k})$，等价于($f$为函数图)与($f$的定义域为$I$)与$(\forall k)(\forall i)(k \in K$与$i \in I \Rightarrow f(i) \in X_{i,k})$，得证.

定理 53.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族，且$I \neq \varnothing$，则：

（1）$(\prod\limits_{i\in I} X_i) \cap (\prod\limits_{i\in I} Y_i) = \prod\limits_{i\in I}(X_i \cap Y_k)$.

（2）$(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) \times (\bigcap\limits_{i\in I} Y_i) = \bigcap\limits_{i\in I}(X_i \times Y_k)$.

证明：类似定理48的证明，根据定理52可证.

补充定理 140.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族. 对任意$i \in I$，g_i为X_i到Y_i的映射. 对任意$f \in \prod\limits_{i\in I} X_i$，令$u_f$为映射$i \mapsto g_i(f(i))(i \in I)$，则$u_f \in \prod\limits_{i\in I} Y_i$.

证明：对任意$f \in \prod\limits_{i\in I} X_i$、任意$i \in I$，$g_i(f(i)) \in Y_i$，故$u_f \in \prod\limits_{i\in I} Y_i$.

定义 73. 映射族在乘积上的规范扩展（*extension canonique de famille d'applications aux produit*），映射族的乘积（*produit de famille d'applications*）

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族，$(g_i)_{i\in I}$为函数族，且对任意$i\in I$，g_i为X_i到Y_i的映射．对任意$f\in\prod\limits_{i\in I}X_i$，令$u_f$为映射$i\mapsto g_i(f(i))(i\in I)$的图，则映射$f\mapsto u_f(f\in\prod\limits_{i\in I}X_i, u_f\in\prod\limits_{i\in I}Y_i)$称为映射族$(g_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，或称为映射族的乘积．

定理 54.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$、$(Z_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族，$(g_i)_{i\in I}$、$(g'_i)_{i\in I}$为指标集相同的函数族，且对任意$i\in I$，g_i为X_i到Y_i的映射，g'_i为Y_i到Z_i的映射．设g和g'分别为$(g_i)_{i\in I}$和$(g'_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，则$g'\circ g$为$(g'_i\circ g_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展．

证明：根据定义可证．

补充定理 141.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$\prod\limits_{i\in I}X_i=A$，则$(Id_{x_i})i\in I$在乘积上的规范扩展为$Id_A$．

证明：令u_f为映射$i\mapsto Id_{x_i}(f(i))(i\in I)$的图，即为映射$i\mapsto f(i)$的图，因此，$u_f=f$，得证．

定理 55.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族，$(g_i)_{i\in I}$为函数族，且对任$i\in I$，g_i为X_i到Y_i的单射（或满射），则$(g_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到$\prod\limits_{i\in I}Y_i$的单射（或满射）．

证明：

如果存在$i'\in I$，使$X'_i=\varnothing$，则$\prod\limits_{i\in I}X_i=\varnothing$．如果对任意$i\in I$，$g_i$均为单射，其在乘积上的规范扩展为$(\varnothing,\varnothing,\prod\limits_{i\in I}Y_i)$，是单射．如果对任意$i\in I$，$g_i$均为满射，则$Y'_i=\varnothing$，故$\prod\limits_{i\in I}Y_i=\varnothing$，因此其在乘积上的规范扩展为$(\varnothing,\varnothing,\varnothing)$，是满射．

如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq\varnothing$：

对于单射的情况，令r_i为g_i的左逆，r为$(r_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，根据定理54，$r\circ g$为$(Id_{x_i})_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，根据补充定理140，即$Id_{\prod\limits_{i\in I}X_i}$，其为双射，故$(g_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到$\prod\limits_{i\in I}Y_i$的单射．

对于满射的情况，令s_i为g_i的右逆，同理可证．

补充定理 142.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，f为E到$\prod\limits_{i\in I}X_i$的映射，$\tilde{f}$为$(pr_i\circ f)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，d为E到E^I的对角映射，则$f=\tilde{f}\circ d$．

证明：设$x\in E$，则$d(x)=\{z|pr_1z\in I$与$pr_2z=x\}$，$\tilde{f}\circ d(x)$为映射$i\mapsto pr_i\circ f(x)(i\in I)$，即为映射$i\mapsto(f(x))(i)(i\in I)$，即为映射$f(x)$，得证．

补充定理 143.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(f_i)_{i\in I}$为函数族，且对任意$i\in I$，f_i为E到X_i的映射，$\tilde{f}$为$(f_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，d为E到E^I的对角映射，则对任意$i\in I$，$pr_i\circ(\tilde{f}\circ d)=f_i$.

证明：设$x\in E$，则$d(x)=\{z|pr_1z\in I$与$pr_2z=x\}$，$\tilde{f}\circ d(x)$为映射$i\mapsto f_i(x)$，故$pr_i\circ(\tilde{f}\circ d)=f_i$.

补充定理 144.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(f_i)_{i\in I}$为函数族，且对任意$i\in I$，f_i为E到X_i的映射，$\tilde{f}$为$(f_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，则$f\mapsto\tilde{f}$为$(\prod\limits_{i\in I}X_i)^E$到$\prod\limits_{i\in I}({X_i}^E)$的双射.

证明：根据补充定理142、补充定理143可证.

定义 74. 积和映射的图的集合之间的规范映射（*application canonique entre le produit et la ensemble des graphe d'applications*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，f为E到$\prod\limits_{i\in I}X_i$的映射，令$\tilde{f}$为$(pr_i\circ f)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，则称映射$f\mapsto\tilde{f}$为$(\prod\limits_{i\in I}X_i)^E$到$\prod\limits_{i\in I}({X_i}^E)$的规范映射，其逆映射为$\prod\limits_{i\in I}({X_i}^E)$到$(\prod\limits_{i\in I}X_i)^E$的规范映射.

习题 62.

$(X\subset Y)\Rightarrow(\mathcal{P}(X)\subset\mathcal{P}(Y))$.

证明：即补充定理118.

习题 63.

f为$\mathcal{P}(E)$到$\mathcal{P}(E)$的映射，且$(\forall X)(\forall Y)(X\in\mathcal{P}(E)$与$Y\in\mathcal{P}(E)$与$X\subset Y\Rightarrow f(X)\subset f(Y))$. 令$V=\bigcap\limits_{Z\subset E与f(Z)\subset Z}Z$，$W=\bigcup\limits_{Z\subset E与Z\subset f(Z)}Z$，求证：$V=f(V)$，$W=f(W)$，并且，$(\forall Z)(Z\subset E$与$f(Z)=Z\Rightarrow V\subset Z$与$Z\subset W)$.

证明：对任意$Z\in\{Z|Z\subset E$与$f(Z)\subset Z\}$，都有$V\subset Z$，因此$f(V)\subset f(Z)$，则$f(V)\subset Z$，故$f(V)\subset V$，因此$f(f(V))\subset f(V)$，故 $f(V)\in\{Z|Z\subset E$与$f(Z)\subset Z\}$，因此$V\subset f(V)$，综上，$V=f(V)$. 同理可证$W=f(W)$.

此外，$f(Z)=Z$，则$Z\in\{Z|Z\subset E$与$f(Z)\subset Z\}$、$Z\in\{Z|Z\subset E$与$Z\subset f(Z)\}$，根据定义$V\subset Z$与$Z\subset W$.

习题 64.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，$I\neq\varnothing$，而集族$(Y_i)_{i\in I}$满足$(\forall i)(i\in I\Rightarrow Y_i\subset X_i)$，求证：$\prod\limits_{i\in I}Y_i=\bigcap\limits_{i\in I}{pr_i}^{-1}(Y_i)$.

证明：

设$f \in \prod\limits_{i\in I} Y_i$，则对任意$i \in I$，$pr_i f \in Y_i$．故$f \in {pr_i}^{-1}(Y_i)$，因此$f \in \bigcap\limits_{i\in I} {pr_i}^{-1}(Y_i)$．

反过来，设$f \in \bigcap\limits_{i\in I} {pr_i}^{-1}(Y_i)$，则对任意$i \in I$，$f \in {pr_i}^{-1}(Y_i)$，因此$pr_i f \in Y_i$，且$f$是定义域为$I$的函数图，故$f \in \prod\limits_{i\in I} Y_i$．得证．

习题 65.

对任意$G \subset A \times B$，令$\tilde{G}$为A到 $\mathcal{P}(B)$的映射$x \mapsto G\langle\{x\}\rangle$，求证：$G \mapsto \tilde{G}$为 $\mathcal{P}(A \times B)$到$(\mathcal{P}(B))^A$的双射．

证明：对任意A到$\mathcal{P}(B)$的映射f，令$G = \bigcup\limits_{x\in A}(\{x\} \times f(x))$，则对任意$x \in A$，$G\langle\{x\}\rangle = f(x)$；设对任意$x \in A$，$G'\langle\{x\}\rangle = f(x)$，则$G'\langle\{x\}\rangle = G\langle\{x\}\rangle$，故$\{y|(x,y) \in G\} = \{y|(x,y) \in G'\}$，则$G = G'$，故$G$具有唯一性．因此$G \mapsto f$为$\mathcal{P}(A \times B)$到$\mathcal{F}(A; \mathcal{P}(B))$的双射．根据补充定理123，$\tilde{G} \mapsto f$为$(\mathcal{P}(B))^A$到$\mathcal{F}(A; \mathcal{P}(B))$的双射．根据定理21（3）、21（5）得证．

习题 66.

设$(X_i)_{1\leq i\leq n}$为集族．对任意$[1,n]$的子集H，令$P_H = \bigcup\limits_{i\in H} X_i$，$Q_H = \bigcap\limits_{i\in H} X_i$．令$F_k$为$[1,n]$中元素数目为$k$的子集集合，求证：

（1）如果$k \leq (n+1)/2$，则$\bigcap\limits_{H\in F_k} P_H \subset \bigcup\limits_{H\in F_k} Q_H$．

（2）如果$k \geq (n+1)/2$，则$\bigcup\limits_{H\in F_k} Q_H \subset \bigcap\limits_{H\in F_k} P_H$．

证明：

如果$f \in I$，根据定理47，$\bigcap\limits_{H\in F_k} P_H = \bigcup\limits_{f\in I}(\bigcap\limits_{H\in F_k} X_f(H))$，其中$I = \prod\limits_{H\in F_k} H$．如果$f \in I$，则$f(H) \in H$．

（1）如果$k \leq (n+1)/2$，设$x \in \bigcap\limits_{f\in I}(\bigcup\limits_{H\in F_k} X_{f(H)})$，则存在$f \in I$，使$x \in \bigcap\limits_{H\in F_k} X_{f(H)}$．假设$pr_2 f$的元素数目小于$k$，则$[1,n] - pr_2 f$的元素数目大于等于$k$，因此存在$[1,n]$的$k$个元素的子集$H$，是$[1,n] - pr_2 f$的子集，因此$H \cap pr_2 f = \varnothing$．而$f(H) \in H \cap pr_2 f$，矛盾．因此，存在$k$个元素的子集$H$，即$H \in F_k$，使$x \in \bigcap\limits_{i\in H} X_i$．因此，$x \in \bigcup\limits_{H\in F_k} Q_H$．

（2）如果$k \geq (n+1)/2$，设$x \in \bigcup\limits_{H\in F_k} Q_H$，则存在$H' \in F_k$，使$x \in \bigcap\limits_{i\in H'} X_i$．对任意$H \in F_k$，$H \cap H' \neq \varnothing$，根据定理44，$\prod\limits_{H\in F_k}(H \cap H') \neq \varnothing$，根据定理45，$\prod\limits_{H\in F_k}(H \cap H') \subset I$．因此存在$f \in \prod\limits_{H\in F_k}(H \cap H')$，且$f \in I$．因此对任意$H \in F_k$，$f(H) \in H \cap H'$，即存在$i \in H'$，使$i = f(H)$，因此$X_i = X_{f(H)}$，由于$X_{f(H)} \subset \bigcap\limits_{i\in H'} X_i$，故$x \in X_{f(H)}$．因而$x \in \bigcap\limits_{H\in F_k} X_{f(H)}$，故$x \in \bigcap\limits_{H\in F_k} P_H$．注：习题66涉及尚未介绍的“自然数”知识．

2.6 等价关系（Relations d'équivalence）

元数学定义 30. 对称性（*symétrique*）

令R为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x、y、z为不同的不是常数的字母，且R不包含z，如果$R \Rightarrow (x|z)(y|x)(z|y)R$，则称$R$关于$x$、$y$具有对称性，在没有歧义的情况下也可以简称$R$具有对称性.

注：$(x|z)(y|x)(z|y)R$即为将R中的x、y对换得到的公式.

元数学定义 31. 传递性（*transitive*）

令R为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x、y、z为不同的不是常数的字母，且R不包含z，如果R与$(y|x)(z|y)R \Rightarrow (z|y)R$，则称$R$关于$x$、$y$具有传递性，在没有歧义的情况下也可以简称$R$具有传递性.

元数学定义 32. 等价关系（*relation d'équivalence*）

令R为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M的公式，如果R关于x、y具有对称性和传递性，则称R为关于x、y的等价关系，或称x模R等价于y，记作$x \equiv y(modR)$，在没有歧义的情况下也可以简称R为等价关系.

补充证明规则 22.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的等价关系，则：

（*1*），令A、B为项，如果A不包含y、B不包含x，则$(A|x)(B|y)$为关于x、y的等价关系；

（*2*）R为关于x、y的等价关系，令u、v为字母，如果R不包含u、v，则$(u|x)(v|y)R$为关于u、v的等价关系.

证明：根据定义可证.

记号定义 18. 两个项的等价（*équivalence de deux termes*）

R为关于x、y的等价关系，如果A不包含y、B不包含x，则$(A|x)(B|y)R$记作$A \equiv B(modR)$.

补充证明规则 23.

如果公式R为关于x、y的等价关系，则$R \Rightarrow (y|x)R$与$(x|y)R$.

证明：令z为不同于x、y的不是常数的字母，且R不包含z. 如果R为真，则$(x|z)(y|x)(z|y)R$，同时R与$(y|x)(z|y)R \Rightarrow (z|y)R$. 因此$(x|z)(y|x)(z|y)R \Rightarrow (x|z)(z|y)R$，故$(x|z)(z|y)R$，即$(y|x)R$. 因此，$(x|z)(y|x)(z|y)R$. 根据补充替代规则4，$(x|z)(y|x)(z|y)R$和$(y|z)(x|y)(z|x)R$相同，故同理可证$(x|y)R$.

补充证明规则 24.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R、S均为关于x、y的等价关系，则“$(R$与$S)$”为关于x、y的等价关系.

证明：根据定义可证.

元数学定义 33. 反身性（*réflexive*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为公式，x、y为不同的不是常数的字母，如果$(x|y)R \Leftrightarrow x \in E$，则称$R$关于$x$、$y$在$E$上具有反身性，在没有歧义的情况下也可以简称$R$在$E$上具有反身性，或简称$R$具有反身性.

元数学定义 34. 在集合上的等价关系（*relation d'équivalence dans un ensemble*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，并且R关于x、y在E上具有反身性，则称R为关于x、y在E上的等价关系，在没有歧义的情况下也可以简称R为在E上的等价关系..

补充证明规则 25.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的等价关系，则$R \Rightarrow x \in E$，$R \Rightarrow y \in E$.

证明：根据补充证明规则23可证.

补充证明规则 26.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的等价关系，则R为生成图的公式.

证明：根据补充证明规则25，$R \Rightarrow (x, y) \in E \times E$，根据补充证明规则18可证.

定义 75. 等价图（*graphe d'équivalence*）

G为图，如果$(x, y) \in G$为在E上的等价关系，则称G为在E上的等价图.

补充定理 145.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，$(G_i)_{i\in I}$为集族，且$(\forall I)(i \in I \Rightarrow G_i$为在$E$上的等价图)，则$\bigcap\limits_{i\in I} G_i$为在$E$上的等价图.

证明：

如果$(x, y) \in \bigcap\limits_{i\in I} G_i$，则对任意$i \in I$，$(x, y) \in G_i$，因此$(y, x) \in G_i$，故$(y, x) \in \bigcap\limits_{i\in I} G_i$，因此对称性成立.

同理可证传递性.

对任意$i \in I$，$x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G_i$，因此$x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G_i$，故反身性成立.

综上得证.

补充证明规则 27.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果公式R为关于x、y的等价关系，则$(\exists y)R \Leftrightarrow (x|y)R$，$(\exists x)R \Leftrightarrow (y|x)R$.

证明：根据公理模式5，$(x|y)R \Rightarrow (\exists y)R$. 另一方面，根据补充证明规则23，$(\exists y)R \Rightarrow (\exists y)(x|y)R$，后者即$(x|y)R$. 综上，则$(\exists y)R \Leftrightarrow (x|y)R$.

同理可证$(\exists x)R \Leftrightarrow (y|x)R$.

补充证明规则 28.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果公式R为关于x、y在E上的等价关系，G为其生成的图，则：$x \in pr_1G \Leftrightarrow (x|y)R$，$pr_1G = E$，$y \in pr_2G \Leftrightarrow (y|x)R$，$pr_2G = E$.

证明：根据补充证明规则27可证.

补充证明规则 29.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的等价关系，G为其生成的图，则：

（*1*）$x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G$;

（*2*）$(x, y) \in G$与$(y, z) \in G \Rightarrow (y, z) \in G$;

（*3*）$(x, y) \in G \Rightarrow (x, x) \in G$与$(y, y) \in G$.

（*4*）$x \in E \Rightarrow x \in G(x)$.

证明：根据补充证明规则23可证.

补充证明规则 30.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中：

（*1*）如果公式R、S均为关于x、y在E上的等价关系，则“R与S”为关于x、y在E上的等价关系.

（*2*）如果公式S为关于x、y在F上的等价关系，f为E到F的满射，则$(f(y)|y)(f(x)|x)S$为关于x、y在E上的等价关系.

（*3*）如果公式R为关于x、y在E上的等价关系，S为关于x、y在F上的等价关系，f为E到F的映射，则R与$(f(y)|y)(f(x)|x)S$为关于x、y在E上的等价关系.

证明：

（1）根据补充证明规则24可证.

（2）对称性和传递性根据补充证明规则22（1）、补充证明规则22（2）可证. 根据替代规则2，$(f(x)|y)(f(x)|x)S$和$(f(x)|x)(x|y)S$相同，故$(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow f(x) \in F$，等价于$x \in E$，得证.

（3）对称性和传递性根据补充证明规则22（1）、补充证明规则22（2）可证．根据替代规则2，$(f(x)|y)(f(x)|x)S$和$(f(x)|x)(x|y)S$相同，故R与$(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow x \in E$与$f(x) \in F$，由于$x \in E \Rightarrow f(x) \in F$，故$R$与$(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow x \in E$，得证．

补充定理 146.

（1）$x = y$为等价关系，但不是在任何集合上的等价关系．

（2）$x = y$与$x \in E$为在E上的等价关系．

（3）$(\exists F)(F$为X到Y的双射$)$为等价关系，但不是在任何集合上的等价关系．

（4）$x \in E$与$y \in E$为在E上的等价关系．

（5）如果$A \subset E$，则$(x \in E - A$与$y = x)$或$(x \in A$与$y \in A)$为在E上的等价关系．

（6）令f为函数，其定义域为E，则公式"$x \in E$与$y \in E$与$f(x) = f(y)$"为在E上的等价关系．

证明：根据定义可证以上各式的等价关系．

对于$x = y$、$(\exists F)(F$为X到Y的双射$)$，根据补充定理10可以证明其不是在任何集合上的等价关系．

定义 76. 在集合上的等价对应（*correspondance d'équivalence dans un ensemble*）

如果F为在E上的等价图，则(F, E, E)称为在E上的等价对应．

定理 56.

当且仅当同时满足下列三个条件时，X到X的对应F为在X上的等价对应：

第一，X为F的定义域；

第二，$F = F^{-1}$；

第三，$F \circ F = F$．

证明：令$F = (G, X, X)$．如果F为在X上的等价对应，则$x \in X \Leftrightarrow (x, x) \in G$，故$F$的定义域为$X$；由于$(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G$，故$F = F^{-1}$；由于$(x, y) \in G$与$(y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \in G$，故$G \circ G \subset G$，同时，$(x, y) \in G \Rightarrow (x, x) \in G$，故$(x, y) \in G \circ G$，故$G \subset G \circ G$，因此$G \circ G = G$．

反过来，由于$F = F^{-1}$，因此$(x, y) \in Gw\Psi'$，由于$F \circ F = F$，因此$(x, y) \in G$具有传递性．由于F的定义域为X，因此对于$x \in X$，存在$(x, y) \in G$，则$(y, x) \in G$，因此$(x, x) \in G$；同时，如果$(x, x) \in G$，则$x \in X$，故$(x, y) \in G$在X上具有反身性．因此，F为在X上的等价对应．

定义 77. 同函数相关的等价关系（*relation d'équivalence associée à une fonction*）

令f为函数，其定义域为E，其图为F，则公式$(x \in E$与$y \in E$与$f(x) = f(y))$称为同f相关的等价关系．

补充定理 147.

如果f的图为F，则同f相关的等价关系生成的图为$F^{-1}\circ F$.

证明：$x\in E$与$y\in E$与$f(x)=f(y)\Leftrightarrow(\exists z)((x,y)\in F$与$(y,z)\in F)$，进而等价于$(\exists z)((x,y)\in F$与$(y,z)\in F^{-1})$，等价于$(x,y)\in F^{-1}\circ F$，得证.

元数学定义 35. 等价类（*classe d'équivalence*），代表（*représentant*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，R生成的图为G，且$x\in E$，则称$G(x)$为x关于R的等价类. 如果$z\in(x$关于R的等价类$)$，则称z为该等价类的代表.

补充证明规则 31.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，R生成的图为G，且$x\in E$，则$(x$关于R的等价类$)\subset E$.

证明：根据补充证明规则25可证.

补充证明规则 32.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则$x\in(x$关于R的等价类$)$.

证明：根据补充证明规则29（1）可证.

补充证明规则 33.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，R生成的图为G，则$(\exists x)(x\in E$与$X=G(x))$为关于X的集合化公式.

证明：根据补充证明规则31，$(\exists x)(x\in E$与$X=G(x))\Rightarrow X\subset E$，即$x\in\mathcal{P}(E)$，根据证明规则52得证.

元数学定义 36. 商集（*ensemble quotient*），到商集的规范映射（*l'application canonique dans l'ensemble quotient*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，R生成的图为G，则称$\{X|(\exists x)(x\in E$与$X=G(x))\}$为E除以R的商集，记作E/R. $x\mapsto G(x)((x\in E,G(x)\in E/R)$称为$E$到$E/R$的规范映射.

补充证明规则 34.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则：

（*1*）$E=\varnothing\Leftrightarrow E/R=\varnothing$;

（*2*）对任意$X\in E/R$，$X\neq\varnothing$.

证明：

（1）如果$E=\varnothing$，则$x\in E$为假，根据定义，$E/R=\varnothing$；同时，如果$E\neq\varnothing$，对任意$x\in E$，$G(x)\in E/R$，故$E/R\neq\varnothing$，得证.

（2）令R生成的图为G，若$X=\varnothing$，则$(\exists x)(x\in E$与$\varnothing=G(x))$，故$(\exists x)(\varnothing=G(x))$，但$x\in G(x)$，矛盾，得证.

补充证明规则 35.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则E到E/R的规范映射为满射.

证明：根据定义可证.

证明规则 55.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，p为E到E/R的规范映射，则$R\Leftrightarrow(x\in E$与$y\in E$与$p(x)=p(y))$.

证明：令R生成的图为G，则$R\Leftrightarrow(x,y)\in G$. 假设$(x,y)\in G$，则$x\in E$与$y\in E$，且$y\in G(x)$，因此$G(y)\subset G\circ G(x)$. 根据定理56，$G(y)\subset G(x)$. 同时，由于$(x,y)\in G$，故$(y,x)\in G$，同理$G(x)\subset G(y)$，因此$G(x)=G(y)$. 反过来，假设$G(x)=G(y)$，由于$y\in G(y)$，故$y\in G(x)$，因此$(x,y)\in G$.

补充证明规则 36.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，p为E到E/R的规范映射，则：

（*1*）$(\forall x)(\forall y)(x\in E\Rightarrow(p(y)=p(x)\Leftrightarrow y\in p(x)))$；

（*2*）$(\forall x)(\forall X)(x\in E$与$X\in E/R\Rightarrow(X=p(x)\Leftrightarrow x\in X))$.

证明：

（1）令R生成的图为G，在$x\in E$的情况下，如果$y\in p(x)$，则$(x,y)\in G$，因此$p(x)=p(y)$.

反过来，如果$p(x)=p(y)$，根据补充证明规则32，$y\in p(y)$，故$y\in p(x)$.

（2）假设$x\in E$、$X\in E/R$，则存在$y\in E$，使$p(y)=X$，如果$X=p(x)$，则$p(x)=p(y)$，根据补充证明规则36（1），$x\in X$.

反过来，如果$x\in X$，根据补充证明规则36（1），$p(x)=p(y)$，故$p(x)=X$. 得证.

元数学定义 37. 集合对于公式的截面（*section d'un ensemble pour une relation*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，p为E到E/R的规范映射，则p的右逆称为E对于R的截面.

补充证明规则 37.

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则$\Delta_{E/R}$为E的划分.

证明：如果$E=\varnothing$，根据补充证明规则34（1），$E/R=\varnothing$，$\Delta_{\varnothing}$=$\varnothing$，根据划分的定义可证.

如果$E\neq\varnothing$，设R生成的图为G，$X\in E/R$，$X'\in E/R$，设$X=G(x)$，$X'=G(x')$，设$a\in X\cap X'$，则$(x,a)\in G$，$(x',a)\in G$，故$(x,x')\in G$，因此$G(x)=G(x')$，所以$X=X'$. 同时，对任意$x\in E$，$x\in G(x)$. 综上得证.

注：$\Delta_{E/R}$即集族$(X)_{X\in E/R}$.

补充证明规则 38.

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则：

（*1*）$R\Leftrightarrow((\exists X)(x\in X$与$y\in X$与$X\in E/R))$.

（*2*）$X=G(x)\Leftrightarrow X\in E/R$与$x\in X$.

证明：

（1）设R生成的图为G，则$R\Leftrightarrow(x,y)\in G$，如果$(x,y)\in G$，则$(\exists X)(x\in X$与$X\in E/R)$. 若$x\in X$，根据证明规则55，则$G(y)=X$，故$y\in X$，因此$(\exists X)(x\in X$与$y\in X$与$X\in E/R)$.

反过来，若$(\exists X)(x\in X$与$y\in X$与$X\in E/R)$，则$x\in E$、$y\in E$，且$G(x)=G(y)$，根据证明规则55，$(x,y)\in G$.

（2）如果$X=G(x)$，根据定义，$X\in E/R$、$x\in X$. 反过来，如果$X\in E/R$、$x\in X$，由于$G(x)\in E/R$，如果$X\neq G(x)$，则$X\bigcap\limits_{G}(x)=\varnothing$，矛盾，故$X=G(x)$.

补充定理 148.

令$(X_i)_{i\in I}$为E的划分，且$i\neq\varnothing$，$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i\neq\varnothing)$，设$R$为$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i$与$y\in X_i)$，则$R$为关于$x$、$y$在$E$上的等价关系，且$i\mapsto X_i(i\in I)$为$I$到$E/R$的双射.

证明：$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i$与$y\in X_i)\Leftrightarrow(\exists i)(i\in I$与$y\in X_i$与$x\in X_i)$，故该公式具有对称性. 若$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i$与$y\in X_i)$、$(\exists i)(i\in I$与$y\in X_i$与$z\in X_i)$，设$i\in I$、$i'\in I$，$x\in X_i$与$y\in X_i$，使$y\in X_i'$、$z\in X_i'$，故$i=i'$，因此$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i$与$z\in X_i)$，即该公式具有传递性. 若$x\in E$，则存在$i$，使$(i\in I$与$x\in X_i)$，故反身性成立. 综上，$R$为关于$x$、$y$在$E$上的等价关系.

令R生成的图为G，对任意$i\in I$，设$x\in X_i$，则$y\in G(x)\Leftrightarrow(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i$与$y\in X_i)$，等价于$y\in X_i$，故$G(x)=X_i$. 所以$X_i\in E/R$，即该映射到达域为$E/R$. 对任意$X\in E/R$，设$x\in X$，故$X=G(x)$，同时存在$i\in I$，使$x\in X_i$. 则$X=X_i$，故该映射为满射.

又因为$(X_i)_{i\in I}$为E的划分，且$i\neq\varnothing$，$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i\neq\varnothing)$，故$X_i=X_i'\Rightarrow i=i'$，因此该映射为单射.

定义 78. 代表系统（*système de représentants*）

令$(X_i)_{i\in I}$为E的划分，且$i\neq\varnothing$，$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i\neq\varnothing)$，设$R$为$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i$与$y\in X_i)$，$S\subset E$，且$(\forall i)(\exists x)(S\cap X_i=\{x\})$，则称$S$为$R$的等价类的代表系统.

元数学定义 38. 同等价关系相容的公式（*relation compatible avec une relation d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，P为公式：

如果P不包含x'，且P与$R\Rightarrow(x'|x)P$，则称P关于x同等价关系R相容，在没有歧义的情况下也可以简称P同等价关系R相容；

如果P不包含x'、y'，R不包含y、y'，且P与R与$(y|x)(y'|x')R\Rightarrow(x'|x)(y'|y)P$，则称$P$关于$x$、$y$同等价关系$R$相容，在没有歧义的情况下也可以简称$P$同等价关系$R$相容.

证明规则 56.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，P为公式，t为字母，如果P关于x同等价关系R相容，则$t\in E/R$与$(\exists x)(x\in t$与$P)\Leftrightarrow t\in E/R$与$(\forall x)(x\in t\Rightarrow P)$.

证明：在$t\in E/R$的情况下，如果$(\exists x)(x\in t$与$P)$为真，即存在$a\in t$，使$(a|x)P$、$(x|x')(a|x)R$对一切$x\in t$为真，故P对一切$x\in t$为真，因此$(\forall a)(a\in t\Rightarrow(a|x)P)$；反过来，若$(\forall x)(x\in t\Rightarrow P)$，由于$t\neq\varnothing$，则$(\exists x)(x\in t$与$P)$. 得证.

补充证明规则 39.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，P为公式，t为字母，如果R不包含y，且P关于x、y同等价关系R相容，则$t\in E/R$与$u\in E/R$与$(\exists x)(\exists y)(x\in t$与$y\in u$与$P)\Leftrightarrow t\in E/R$与$u\in E/R$与$(\forall x)(\forall y)(x\in t$与$y\in u\Rightarrow P)$.

证明：类似证明规则56可证.

元数学定义 39. 通过商导出的公式（*relation déduite par passage au quotient*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，且$E\neq\varnothing$，P为公式：

如果P关于x同等价关系R相容，t为字母且P不包含t，则$t\in E/R$与$(\exists x)(x\in t$与$P)$ 称为P关于x对于R通过商导出的公式，在没有歧义的情况下也可以简称为P对于R通过商导出的公式.

如果R不包含y，且P关于x、y同等价关系R相容，t、u为字母且P不包含t、u，则$t\in E/R$与$u\in E/R$与$(\exists x)(\exists y)(x\in t$与$y\in u$与$P)$称为$P$关于$x$、$y$对于$R$通过商导出的公式，在没有歧义的情况下也可以简称为$P$对于$R$通过商导出的公式.

补充证明规则 40.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，P为公式，t为字母：

（*1*）如果P关于x同等价关系R相容，P'为P为关于x对于R通过商导出的公式，f为E到E/R的规范映射，则$z\in E$与$(f(z)|t)P'\Leftrightarrow z\in E$与$(z|x)P$.

（*2*）如果R不包含y，且P关于x、y同等价关系R相容，P'为P为关于x、y对于R通过商导出的公式，f为E到E/R的规范映射，则$z\in E$与$w\in E$与$(f(z)|t)(f(w)|u)P'\Leftrightarrow z\in E$与$w\in E$与$(z|x)(w|y)P$.

证明：

（1）若$z\in E$，根据证明规则56，$(f(z)|t)P'\Leftrightarrow(\forall x)(x\in f(z)\Rightarrow P)$. 如果$(\forall x)(x\in f(z)\Rightarrow P)$，则$(z|x)P$. 反过来，如果$(z|x)P$，根据证明规则56，$(\forall x)(x\in f(z)\Rightarrow P)$. 得证.

（2）类似补充证明规则40（1）可证.

元数学定义 40. 浸润子集（*partie saturée*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，$A\subset E$，如果$x\in A$关于x同等价关系R相容，则称A为E对于R的浸润子集.

补充证明规则 41.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，$A\subset E$，则：

（*1*）如果A为E对R的浸润子集，则$x\in A\Rightarrow G(x)\subset A$.

（*2*）$(\exists F)(F\subset E/R$与$A=\bigcup\limits_{X}\in FX)\Leftrightarrow(A$为$E$对于$R$的浸润子集$)$.

证明：令R生成的图为G.

（1）如果A为E对于R的浸润子集，则$x\in A$与$(x,y)\in G\Rightarrow y\in A$. 对任意$y\in G(x)$，$x\in A\Rightarrow y\in A$，因此$x\in A\Rightarrow G(x)\subset A$.

（2）假设存在$F\subset E/R$，使$A=\bigcup\limits_{X\in F}X$，设$x\in A$，则存在$X\in F$，使$x\in X$，则$X\in E/R$，故$X=G(x)$. 对于$(x,y)\in G$，可得$y\in X$，故$y\in A$，因此$A$为$E$对于$R$的浸润子集.

反过来，如果A为E对于R的浸润子集，则$x\in A$与$(x,y)\in G\Rightarrow y\in A$. 令$F=\{X|(X\in E/R$与$X\bigcap\limits_{A}\neq\varnothing\}$，故$F\subset E/R$. 当$x\in A$时，$G(x)\in F$，故$x\in\bigcup\limits_{X\in F}X$；反过来，若$x\in\bigcup\limits_{X\in F}X$，则存在$X\in F$，使$x\in X$，因此$X=G(x)$，根据补充证明规则41（1），$G(x)\subset A$，

故$x\in A$．因此，$(\exists F)(F\subset E/R$与$A=\bigcup\limits_{X\in F}X)$．注：本补充证明规则表明，当且仅当子集是若干个等价类的并集时，其为浸润子集．

补充证明规则 42.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f为E到E/R的规范映射，$A\subset E$，则$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle=A\Leftrightarrow(A$为$E$对于$R$的浸润子集$)$．

证明：设f的图为G．如果A为E对于R的浸润子集，对任意$x\in A$，$f\langle\{x\}\rangle=f(x)$，即等于$G(x)$，设$y\in E$且$f(y)=G(x)$，根据证明规则55，$(x,y)\in G$，故$y\in G(x)$，因此$f^{-1}f\langle\{x\}\rangle\subset G(x)$，根据补充证明规则41（1），$f^{-1}f\langle\{x\}\rangle\subset A$，因此$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle\subset A$，根据补充定理50，$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle=A$．另一方面，若$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle=A$，对任意$x\in A$，则$f(x)\in f\langle A\rangle$．令$K=f(x)$，根据补充证明规则36（1），$y\in K\Leftrightarrow f(y)=K$，故$f^{-1}\langle\{K\}\rangle=K$，因此$K\subset f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$，所以$K\subset A$．因此，$A$为$E$对于$R$的浸润子集．

补充证明规则 43.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，$(X_i)_{i\in I}$为E的子集族，$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i$为$E$对于$R$的浸润子集$)$，则$\bigcup\limits_{i\in I}X_i$和$\bigcap\limits_{i\in I}X_i$都是$E$对于$R$的浸润子集．

证明：根据定理26、定理27、补充证明规则42可证．

补充证明规则 44.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，A为E对于R的浸润子集，则$\complement_E A$也是E对于R的浸润子集．

证明：令f为E到E/R的规范映射，根据补充证明规则42，$A=f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$．根据补充定理70（2），$E=f^{-1}\langle E/R\rangle$．根据定理30，$\complement_E A=f^{-1}\langle E/R-f\langle A\rangle\rangle$，根据补充证明规则42得证．

补充证明规则 45.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f为E到E/R的规范映射，$A\subset E$，则$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$为$E$对于$R$的浸润子集．

证明：令R生成的图为G．设$x\in f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$，则$f(x)\in f\langle A\rangle$．若$(x,y)\in G$，根据证明规则55，$f(y)\in f\langle A\rangle$，故$y\in f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$，得证．

补充证明规则 46.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f为E到E/R的规范映射，$A \subset E$，若A'为E对于R的浸润子集，且$A \subset A'$，则$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle \subset A'$.

证明：由于$A \subset A'$，因此$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle \subset f^{-1}\langle f\langle A'\rangle\rangle$，根据补充证明规则42，得证.

元数学定义 41. 子集的浸润子集（*partie saturée d'une partie*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f为E到E/R的规范映射，$A \subset E$，则称$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$为$A$对于$R$的浸润子集.

补充证明规则 47.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，$(X_i)_{i\in I}$为E的子集族，对任意$i \in I$，令A_i为X_i对于R的浸润子集，则$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$为$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$对于$R$的浸润子集.

证明：根据定理26、补充证明规则42可证.

元数学定义 42. 同等价关系相容的映射（*application compatible avec une relation d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f是定义域为E的函数，z为字母，R不包含z，如果$z = f(x)$关于x同等价关系R相容，则称f为同等价关系R相容的映射.

注：同等价关系相容的映射，意味着同一个等价类的元素的函数值相等.

补充证明规则 48.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，g为E到E/R的规范映射，f是定义域为E的函数，z为字母，R不包含z，则当且仅当$z = f(x)$关于x同等价关系R相容时，$x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

证明：

充分性：$z = f(x)$与$R \Rightarrow z = f(y)$，因此$R \Rightarrow f(x) = f(y)$，根据证明规则55得证.

必要性：如果$x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$，当$x \in E$与$y \in E$与$x \equiv y(modR)$时，$g(x) = g(y)$，故$f(x) = f(y)$，因此$z = f(x)$关于$x$同等价关系$R$相容.

证明规则 57.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，g为E到E/R的规范映射，对任意E到F的映射f，当且仅

当存在E/R到F的映射h使$f = h \circ g$时，f为同等价关系R相容的映射．并且，对任意f，h是唯一确定的且$h = f \circ s$，其中s是g的右逆．

证明：根据定理22（1）可证．

元数学定义 43. 通过商导出的映射（*application déduite par passage au quotient*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，g为E到E/R的规范映射，对E到F的映射f，如果f为同等价关系R相容的映射，s是g的右逆，则称$f \circ s$为f对于R通过商导出的映射．

补充定理 149.

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，则f为同等价关系R相容的映射．

证明：根据定义可证．

补充定理 150.

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，则f对于R通过商导出的映射为E/R到F的单射．

证明：设f对于R通过商导出的映射为h，$t \in E/R$，$t' \in E/R$，若$h(t) = h'(t)$，则对任意$x \in t$、$x \in t'$，$f(x) = h(t)$，$f(x') = h(t')$，故$f(x) = f(x')$，根据R的定义，$x = x'$，得证．

补充定理 151.

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，f对于R通过商导出的映射h的值域为$f\langle E\rangle$，并且，令k为h通过F的子集$f\langle E\rangle$导出的函数，则k为E/R到$f\langle E\rangle$的双射．

证明：E到E/R的规范映射为g，其右逆为s．由于$h = f \circ s$，故(h的值域) $\subset f\langle E\rangle$．而对任意$a \in f\langle E\rangle$．存在$x \in E$，使$a = f(x)$，则$h(g(x)) = a$，故$h$的值域为$f\langle E\rangle$，并且，$k$为满射，同时，根据补充定理150，$h$为单射，故$k$为单射，因此$k$为双射．

补充定理 152.

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，h为f对于R通过商导出的映射，k为h通过F的子集$f\langle E\rangle$导出的函数，g为E到E/R的规范映射，j为$f\langle E\rangle$到F的规范映射，则$f = j \circ k \circ g$．

证明：根据证明规则57可证．

定义 79. 规范分解（*décomposition canonique*）

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，h为f对于R通过商导出的映射，k为h通过F的子集$f\langle E\rangle$导出的函数，g为E到E/R的规范映射，j为$f\langle E\rangle$到F的规范映射，则称$j \circ k \circ g$为f的规范分解．

元数学定义 44. 同两个等价关系相容的映射（*application compatible avec deux relations d'équivalence*） 包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令f为E到F的映射，R为在E上的等价关系，S为在F上的等价关系，v为S到F/S的规范映射．如果$v\circ f$为同等价关系R相容的映射，则称f为同等价关系R和S相容的映射．

注：同两个等价关系相容的映射，意味着第一个等价关系的同一个等价类的元素的函数值，属于第二个等价关系的同一个等价类．

补充证明规则 49.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令f为E到F的映射，R为在E上的等价关系，S为在F上的等价关系，v为S到F/S的规范映射，u为E到E/R的规范映射，当且仅当f为同等价关系R和S相容的映射时，存在从E/R到F/S的映射h，使$v\circ f=h\circ u$，且h是唯一的，同时，令s为u的右逆，$h=v\circ f\circ s$．

证明：

必要性：$v\circ f$为同等价关系R相容的映射，则$R\Rightarrow v\circ f(x)=v\circ f(y)$，又因为$R\Leftrightarrow x\in E$与$y\in E$与$u(x)=u(y)$，根据定理22（1）可证存在性和唯一性，以及，$h=v\circ f\circ s$．

充分性：如果存在从E/R到F/S的映射h，使$v\circ f=h\circ u$，则当$x\in E$与$y\in E$与$x\equiv y(modR)$，均有$h\circ u(x)=h\circ u(y)$，即$v\circ f(x)=v\circ f(y)$，故f为同等价关系R和S相容的映射．

元数学定义 45. 通过两个商导出的映射（*application déduite par passage au deux quotients*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令f为E到F的映射，R为在E上的等价关系，S为在F上的等价关系，v为S到F/S的规范映射，u为E到E/R的规范映射，如果E/R到F/S的映射h满足$v\circ f=h\circ u$，则称h为f对于R和S通过商导出的映射．

元数学定义 46. 等价关系的原像（*Image réciproque d'une relation d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令f为E到F的映射，S为在F上的等价关系，v为F到F/S的规范映射，则同$v\circ f$相关的等价关系称为S在f下的原像．

补充证明规则 50.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令f为E到F的映射，S为在F上的等价关系，v为F到F/S的规范映射，令R为S在f下的原像，则$R\Leftrightarrow x\in E$与$y\in E$与$(f(y)|y)(f(x)|x)S$．

证明：R即为$(x \in E$与$y \in E$与$v(f(x)) = v(f(y)))$．设S的图为G，则$R \Leftrightarrow (x \in E$与$y \in E$与$G\langle f(x)\rangle = G\langle f(y)\rangle)$，等价于$(x \in E$与$y \in E$与$(f(x), f(y) \in G))$，得证．

补充证明规则 51.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令f为E到F的映射，S为在F上的等价关系，v为F到F/S的规范映射，令R为S在f下的原像，则任何一个关于R的等价类，都是某个关于S的等价类在f下的原像，且该等价类与$f\langle E\rangle$的交集不为空；反过来，任何关于S的等价类，如果与$f\langle E\rangle$的交集不为空，则其在f下的原像是R的等价类．

证明：设R生成的的图为G，S生成的图为F，则对于任何$x \in E$，R的等价类为$G(x)$，对于S的等价类$F(f(x))$，满足$f(x) \in F(f(x))$，故其与$f\langle E\rangle$的交集不为空，同时，当$y \in E$时，$y \in G(x) \Leftrightarrow v(f(x)) = v(f(y))$，即$F(f(x)) = F(f(y))$，等价于$f(y) \in F(f(x))$，等价于$y \in f^{-1}(F(f(x)))$．故$y$为关于$S$的等价类$F(f(x))$的原像．

反过来，任何关于S的等价类X，如果与$f\langle E\rangle$的交集不为空，设$a \in X \cap f\langle E\rangle$，则存在$x$，使$f(x) = a$，则$X = F(f(x))$，如上所述，其在$f$下的原像是$R$的等价类$G(x)$．

元数学定义 47. 导出的等价关系（*relation d'équivalence induite*） 包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，j为A到E的规范映射，则R在j下的原像，称为在A上由R导出的等价关系，记作R_A．

补充证明规则 52.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，则$R_A \Leftrightarrow x \in A$与$y \in A$与$R$．

证明：根据补充证明规则50可证．

补充证明规则 53.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，则对任意$x \in A$，x关于R_A的等价类，是x关于R的等价类在A上的迹．

证明：设R_A的图为G，R的图为F，$G(x) = \{y|(x, y) \in G\}$，$F(x) = \{y|(x, y) \in F)$．由于$R_A \Leftrightarrow x \in A$与$y \in A$与$R$，因此$G(x) = \{y|x \in A$与$y \in A$与$(x, y) \in F\}$，由于$x \in A$，故$G(x) = F(x)\underset{A}{\bigcap}$，得证．

补充证明规则 54.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，j为A到E的规范映射，则j为同等价关系R和R_A相容的映射．

证明：设E到E/R的规范映射为v，则R_A为$x \in A$与$y \in A$与$v(j(x)) = v(j(y))$，因此$z = v(j(x))$与$R \Rightarrow z = v(j(y))$，故$v \circ j$为同等价关系$R_A$相容的映射，得证.

补充证明规则 55.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，j为A到E的规范映射，E到E/R的规范映射为v，h为j对于R_A和R通过商导出的映射，则：

（*1*）h为A/R_A到E/R的单射.

（*2*）$h\langle A/R_A\rangle = v\langle A\rangle$.

证明：设A到A/R_A的规范映射为u，

（1）当$x \in A$、$y \in A$时，$h(u(x)) = h(u(y)) \Leftrightarrow v(j(x)) = v(j(y))$，即等价于$v(x) = v(y)$，故$(x, y) \in R_A$生成的图，因此$u(x) = u(y)$，得证.

（2）当$x \in A$时，$v(x) = v(j(x))$，等于$h(u(x))$，因此$v\langle A\rangle \subset h\langle A/R_A\rangle$．反过来，对于$y \in A/R_A$，由于$u$为满射，则存在$x \in A$使$y = u(x)$，则$h(y) = v(x)$，因此，$hh\langle A/R_A\rangle \subset v\langle A\rangle$．得证.

元数学定义 48. 商之间的规范映射（*application canonique entre deux quotients*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，j为A到E的规范映射，E到E/R的规范映射为v，h为j对于R_A和R通过商导出的映射，则h通过E/R的子集$v\langle A\rangle$导出的映射，称为A/R_A到$v\langle A\rangle$的规范映射，其逆映射称为$v\langle A\rangle$到A/R_A的规范映射.

元数学定义 49. 更细的等价关系（*relations d'équivalence plus fin*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果R、S均为关于x、y的等价关系，且$S \Rightarrow R$，则称S为比R更细的等价关系.

注：在原书中，“更细”这个概念包括与自身相等的情况，即一个等价关系比自身更细.

补充证明规则 56.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果R、S均为关于x、y的等价关系，且S为比R更细的等价关系，则任何一个S的等价类，都是R的一个等价类的子集.

证明：设R生成的图为G，S生成的图为F，则$F \subset G$．则$F(x) \subset G(x)$，得证.

补充证明规则 57.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果R、S均为关于x、y的等价关系，且S为比R更细的等价关系，f为E到E/R的规范映射，则f为同等价关系S相容的映射.

证明：根据定义可证.

元数学定义 50. 等价关系的商（*quotient de relations d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R、S均为关于x、y在E上的等价关系，且S为比R更细的等价关系，f、g分别为E到E/R和E到E/S的规范映射，h为f对于S通过商集导出的映射，则同h相关的等价关系称为R除以S的商，记作R/S.

补充证明规则 58.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R、S均为关于x、y在E上的等价关系，且S为比R更细的等价关系，f、g分别为E到E/R和E到E/S的规范映射，h为f对于S通过商集导出的映射，则：

（*1*）$f = h \circ g$.

（*2*）$x \equiv y(modR) \Leftrightarrow g(x) \equiv g(y)(modR/S)$.

（*3*）关于R/S的等价类，是关于R的等价类在g下的像.

证明：

（1）令$j = Id_E$，则$f \circ j = f$，因此$f = h \circ g$.

（2）根据补充证明规则58（1）可证.

（3）令R的图为G，R/S的图为F，对任意$x \in E$，考虑R的等价类$G(x)$和R/S的等价类$F(g(x))$．当$y \in E$时，$y \in G(x) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$，等价于$h(g(y)) = h(g(x))$，等价于$g(y) \in F(g(x))$．同时，当$z \in E/S$时，$z \in g\langle G(x)\rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in G(x)$与$g(y) = z)$，等价于$(\exists y)(g(y) \in F(g(x))$与$g(y) = z)$，等价于$z \in F(g(x))$与$(\exists y)(g(y) = z)$，根据补充证明规则35，$g$为$E$到$E/S$的满射，故$(\exists y)(g(y) = z)$，因此$z \in g\langle G(x)\rangle \Leftrightarrow z \in F(g(x))$，得证.

补充证明规则 59.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令S为关于x、y在E上的等价关系，T为关于x、y在E/S上的等价关系，g为E到E/S的规范映射，R为T在g下的原像，则S为比R更细的等价关系，并且$T \Leftrightarrow R/S$.

证明：$R \Leftrightarrow x \in E$与$y \in E$与$(g(y)|y)(g(x)|x)T$，同时，根据证明规则55，$S \Rightarrow (x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y))$，当$g(x) = g(y)$时，$(g(y)|y)(g(x)|x)T \Leftrightarrow (g(x)|y)(g(x)|x)T$，后者即$(g(x)|x)(x|y)T$，其为真，因此$S \Rightarrow R$.

令f为E到E/R的规范映射，h为f对于S通过商集导出的映射，则$f = h \circ g$，当$x \in E$、$y \in E$时，$(g(y)|y)(g(x)|x)T \Leftrightarrow h(g(x)) = h(g(y))$，由于$g$为满射，故对任意$x \in E/S$、$y \in E/S$，均存在$g(a) = x$、$g(b) = y$，故$T \Leftrightarrow h(x) = h(y)$．又因为$T \Rightarrow x \in E/S$、$T \Rightarrow y \in E/S$，因此$T \Leftrightarrow R/S$.

补充证明规则 60.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的等价公式，R'为关于x'、y'的等价公式，令S为$(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u=(x,x')$与$v=(y,y')$与$R$与$(y'|y)(x'|x)R)$，则$S$为关于$u$、$v$的等价公式.

证明：根据定义可证.

元数学定义 51. 等价关系的积（*produit de relations d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的等价公式，R'为关于x'、y'的等价公式，则称关于u、v的等价公式$(\exists x)(\exists y)$ $(\exists x')(\exists y')(u=(x,x')$与$v=(y,y')$与$R$与$R')$为$R$和$R'$的积，记作$R\times R'$.

补充证明规则 61.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的等价公式，R'为关于x'、y'在E'上的等价公式，则$R\times R'$为在$E\times E'$上的等价公式.

证明：令S为$(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u=(x,x')$与$v=(y,y')$与$R$与$(y'|y)(x'|x)R)$，则$(u|v)S$ $\Leftrightarrow$ $(\exists x)(\exists x')(u=(x,x')$与$(x|y)R$与$(x'|y')R')$，等价于$(\exists x)(\exists x')(u=(x,x')$与$x\in E$与$x'\in R')$，等价于$u\in E\times E'$，得证.

补充证明规则 62.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的等价公式，R'为关于x'、y'在E'上的等价公式，f和f'分别为E到E/R和E'到E'/R'的规范映射，g为$E\times E'$到$(E\times E')/(R\times R')$的映射，则：

（*1*）$g((x,x'))=f(x)\times f'(x')$.

（*2*）关于$R\times R'$的等价类，是关于R的等价类和关于R'的等价类的积，反过来，关于R的等价类和关于R'的等价类的积，是关于$R\times R'$的等价类.

证明：

（1）令$x\in E$，$x'\in E'$，$u=(x,x')$，则$R\times R'\Leftrightarrow(\exists y)(\exists y')(v=(x,x')$与$R$与$R')$，令$R$和$R'$的图分别为$G$和$G'$，$R\times R'$的图为$F$，则$R\times R'\Leftrightarrow v\in G(x)\times G'(x')$，因此，$(u,v)\in F\Leftrightarrow v\in G(x)\times G'(x')$，即$F(u)=G(x)\times G'(x')$，得证.

（2）根据补充证明规则62（1）可证.

补充证明规则 63.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的等价公式，R'为关于x'、y'在E'上的等价公式，f和f'分别为E到E/R和E'到E'/R'的规范映射，则同$f\times f'$相关的等价关系等价于$R\times R'$.

证明：$f\times f'((x,x'))=(f(x),f'(x'))$，因此，同$f\times f'$相关的等价关系即$x\in E$与$x'\in E'$与$y\in E$与$y'\in E'$与$u=(x,x')$与$v=(y,y')$与$f(x)=f(y)$与$f'(x')=f'(y')$，由于$R\Leftrightarrow x\in E$与$y\in E$与$f(x)=f(y)$，$R'\Leftrightarrow x'\in E'$与$y'\in E'$与$f'(x')=f'(y')$，得证.

补充证明规则 64.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的等价公式，R'为关于x'、y'在E'上的等价公式，f和f'分别为E到E/R和E'到E'/R'的规范映射，g为$E\times E'$到$(E\times E')/(R\times R')$的规范映射，则存在唯一的映射$h$，使$f\times f'=h\circ g$，且$h$为$(E\times E')/(R\times R')$到$(E/R)\times(E'/R')$的双射.

证明：根据补充证明规则62（1），$g((x,x'))=f(x)\times f'(x')$，$f\times f'((x,x'))=(f(x),f'(x'))$，根据定理22（1），存在唯一的$h$，使$f\times f'=h\circ g$. 由于$f\times f'$为满射，故$h$为满射.

同时，设$h(a)=h(b)$，由于g为满射，故存在a、b使$a=g(x,x')$、$b=(y,y')$，因此$h(a)=(f(x),f'(x'))$，$h(b)=(f(y),f'(y'))$，故$f(x)=f(y),f'(x')=f'(y')$，故$g((x,x'))=g((y,y'))$，因此$a=b$，所以h为单射.

综上，h为双射.

补充证明规则 65.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，则：

（*1*）$(x'|y)R\Rightarrow\tau_y(R)=\tau_y((x'|x)R)$.

（*2*）$(x|y)R\Leftrightarrow(\tau_y(R)|y)R$.

（*3*）$(x|y)R$与$(x'|x)(x'|y)R$与$\tau_y(R)=\tau_y((x'|x)R)\Leftrightarrow(x'|y)R$.

证明：

（1）如果$(x'|y)R$，则$R\Leftrightarrow(x'|x)R$，根据公理模式7可证.

（2）$(\tau_y(R)|y)R$即$(\exists y)R$. 根据补充证明规则27可证.

（3）如果$(x'|y)R$，根据补充证明规则23，$(x|y)R$与$(x'|x)(x'|y)R$，根据补充证明规则65（1），$(x'|y)R\Rightarrow(x|y)R$与$(x'|x)(x'|y)R$与$\tau_y(R)=\tau_y((x'|x)R)$.

反过来，如果$(x|y)R$与$(x'|x)(x'|y)R$与$\tau_y(R)=\tau_y((x'|x)R)$，根据公理模式6，$(\tau_y((x'|x)R)|y)(x'|x)R\Leftrightarrow(\tau_y(R)|y)(x'|x)R$，根据补充证明规则65（2），$(x'|x)(x'|y)R\Leftrightarrow(\tau_y((x'|x)R)|y)(x'|x)$，故$(\tau_y(R)|y)(x'|x)R\Leftrightarrow(x'|x)(x'|y)R$，因此$(\tau_y(R)|y)(x'|x)R$，根据补充证明规则65（2），$(x|y)R\Leftrightarrow(\tau_y(R)|y)R$，故$(\tau_y(R)|y)R$，因此$(x'|x)R$. 得证.

元数学定义 52. 等价的对象类（*classe d'objets équivalents*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，则$\tau_y(R)$称为关于R等价于x的对象类.

补充证明规则 66.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，T为项且不包含x，如果$(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T$与$R))$，则$(\exists x)((x|y)R$与$z = \tau_y(R))$为$z$上的集合化公式.

证明：根据证明规则53，$x \in T$与$z = \tau_y(R)$为z上的集合化公式，令$X = \{z|x \in T$与$z = \tau_y(R)\}$，如果$(x|y)R$，则存在$x \in T$，使R为真，则$\tau_y(R) = (y|x)\tau_y(R)$，由于$\tau_y(R) \in X$，故$(y|x)\tau_y(R)$
$\in X$，因此$(y|x)R \Rightarrow (y|x)\tau_y(R) \in X$，因此$(x|y)R \Rightarrow \tau_y(R) \in X$，故$(\exists x)((x|y)R$与$z = \tau_y(R)) \Rightarrow z \in X$，根据证明规则52得证.

元数学定义 53. 等价的对象类的集合（*ensemble de classes d'objets équivalents*)）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，如果存在不包含x的项T，使$(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T$与$R))$，则称$\{z|(\exists x)((x|y)R$与$z = \tau_y(R))\}$为等价的对象类的集合.

补充证明规则 67.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，存在不包含x的项T，使$(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T$与$R))$，$X$为等价的对象类的集合，$(x|y)R$为真，则存在唯一的$z$，满足$z \in X$ˇ$(z|y)R$为真.

证明：$\tau_y(R)$满足上述条件，存在性得证.

另一方面，设$z = \tau_y((u|x)R)$且$(u|y)R$，因此$(u|x)(z|y)R$为真，因此$(u|y)R$为真，根据补充证明规则65（1），$\tau_y((u|x)R) = \tau_y(R)$，故$z = \tau_y(R)$，唯一性得证.

习题 67.

求证：当且仅当满足下列三个条件时，G为在E上的等价关系生产的图：

第一，$pr_1G = E$，$pr_2G = E$，

第二，$G \circ G^{-1} \circ G = G$，

第三，$\Delta_E \subset G$.

证明：

如果G为在E上的等价关系生产的图：根据补充证明规则25，$(x,y) \in G \Rightarrow x \in E$，$(x,y) \in G \Rightarrow y \in E$，同时，$x \in E \Leftrightarrow (x,x) \in G$，故$(\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow x \in E$、$(\exists x)((x,y) \in G) \Leftrightarrow y \in E$，即$pr_1G = E$，$pr_2G = E$.

$(x,t) \in G \Rightarrow (x,x) \in G$与$(x,x) \in G$与$(x,t) \in G$，故$(\exists y)(\exists z)((x,y) \in G$与$(z,y) \in G$与$(z,t) \in G)$，另一方面，如果$(\exists y)(\exists z)((x,y) \in G$与$(z,y) \in G$与$(z,t) \in G)$，则$(x,t) \in G$，$EG \circ G^{-1} \circ G = G$.

$x \in E \Leftrightarrow (x,x) \in G$，根据补充定理59，$(x,y) \in \Delta_E \Leftrightarrow x \in E$与$y = x$，由于$x \in E \Leftrightarrow (x,x) \in G$，$(x,y) \in \Delta_E \Rightarrow (x,y) \in G$，因此$\Delta_E \subset G$.

反过来，如果三个条件成立：由于$pr_1G=E$，$pr_2G=E$，$\Delta_E\subset G$，反身性成立.

如果$(x,y)\in G$，$(y,z)\in G$，由于$(y,y)\in G^{-1}$，故$(x,z)\in G\circ G^{-1}\circ G$，因此$(x,z)\in G$，传递性成立.

若$(x,y)\in G$，由于$(y,y)\in G$，因此$(y,x)\in G^{-1}$，$(x,x)\in G$，因此$(y,x)\in G$，对称性成立.

习题 68.

G为图，且$G\circ G^{-1}\circ G=G$，求证：$G^{-1}\circ G$和$G\circ G^{-1}$分别为在pr_1G上和在pr_2G上的等价图.

证明：当$x\in pr_1G$时，$(\exists y)((x,y)\in G)$，则$(y,x)\in G^{-1}$，故$(x,x)\in G^{-1}\circ G$；反过来，若$(x,x)\in G^{-1}\circ G$，$(\exists y)((x,y)\in G)$，故$x\in pr_1G$，反身性成立.

若$(x,y)\in G^{-1}\circ G$，$(y,z)\in G^{-1}\circ G$，则$(\exists z)((x,z)\in G)$，$(y,z)\in G$，因此$(y,x)\in G$，对称性成立.

若$(x,y)\in G^{-1}\circ G$，则$y\in pr_1G$，因此$(y,y)\in G$，故$(x,y)\in G\circ G^{-1}\circ G$，因此$(x,y)\in G$；由于$(y,z)\in G^{-1}\circ G$，则$(z,y)\in G^{-1}\circ G$，同理$(z,y)\in G$，因此$(x,z)\in G^{-1}\circ G$，传递性成立.

故$G^{-1}\circ G$为在pr_1G上的等价图. 同理可证$G\circ G^{-1}$为在pr_2G上的等价图.

习题 69.

$A\subset E$，R是同恒等映射$X\mapsto X\cap A(X\in\mathcal{P}(E),X\bigcap\limits_{A}\in\mathcal{P}(E))$相关的等价关系. 求证：存在$\mathcal{P}(A)$到$\mathcal{P}(E)/R$的双射.

证明：令映射$X\mapsto X\cap A(X\in\mathcal{P}(E),X\bigcap\limits_{A}\in\mathcal{P}(E))$为$f$，对任意$Y\in\mathcal{P}(A)$，$Y\cap A=Y$，故$f(Y)=Y$，因此$f\langle\mathcal{P}(E)\rangle=\mathcal{P}(A)$，对$f$做规范分解$f=g\circ k\circ j$，其中，$k$为$E/R$到$\mathcal{P}(A)$的映射，根据补充定理150得证.

习题 70.

G为在E上的等价图，如果$A\subset G$且$pr_1A=E$（或$pr_2A=E$），B为图，则：$G\circ A=G$（或$A\circ G=G$），$(G\cap B)\circ A=G\cap(B\circ A)$（或$A\circ(G\cap B)=G\cap(A\circ B)$）.

证明：

若$pr_1A=E$，如果$(x,z)\in G$，则$x\in E$，故存在y使$(x,y)\in A$，同时$(y,z)\in G$，故$(x,z)\in G\circ A$；反过来，如果$(x,z)\in G\circ A$，则存在y使$(x,y)\in A$与$(y,z)\in G$，故$(x,z)\in G$，因此$G\circ A=G$.

如果$(x,z)\in G\cap(B\circ A)$，则$(x,z)\in G$，且存在y，使$(x,y)\in A$，$(y,z)\in B$，因此$(y,z)\in G$，故$(y,z)\in G\cap B$，故$(x,z)\in(G\cap B)\circ A$. 反过来，如果$(x,z)\in(G\cap B)\circ A$，则存在y，使$(x,y)\in A$，$(y,z)\in G\cap B$，故$(y,z)\in B$，$(y,z)\in G$，因此$(x,z)\in B\circ A$，$(x,z)\in G$，因此$(G\cap B)\circ A=G\cap(B\circ A)$.

同理可证$pr_2A=E$的情形.

习题 71.

求证：在E上的多个等价图的交集，是在E上的等价图．并给出在E上的两个等价集，其并集不是在E上的等价集．

证明：证明部分即补充定理145．令a、b、c互不相等，$G=$ $\{(a,a),(b,b),(c,c)\}\cup\{(a,b),(b,a)\}$，H=$\{(a,a),(b,b),(c,c)\}\cup\{(a,c),(c,a)\}$，则$G$、$H$均为在$\{a,b,c\}$上的等价图，但$G\cup H=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}\cup\{(a,b),(b,a)\}\cup\{(a,c),(c,a)\}$，$(b,a)\in G\cup H$、$(a,c)\in G\cup H$，但$(b,c)\notin G\cup H$，故$G\cup H$不是等价图．

习题 72.

G、H均为在E上的等价图，求证：当且仅当$G\circ H=H\circ G$时，$G\circ H$为在E上的等价图，并且，这种情况下，令$I=X\in\{X|G\subset X$与$H\subset X$与(H为在E上的等价图)$\}$，则$G\circ H=\bigcap\limits_{X\in I}X$．

证明：

对任意$x\in E$，$(x,x)\in G$、$(x,x)\in H$、故$(x,x)\in G\circ H$，反过来，如果$(x,x)\in G\circ H$，则存在y使$(x,y)\in H$，故$x\in E$，因此$G\circ H$具有反身性．

如果$(x,y)\in G\circ H$，则存在z使$(x,z)\in H$，$(z,y)\in G$，因此$(y,x)\in H\circ G$，反之亦然．故当且仅当$G\circ H=H\circ G$时，$G\circ H$具有对称性．

如果$G\circ H=H\circ G$，则当$(x,y)\in G\circ H$、$(y,z)\in G\circ H$时，$(x,z)\in G\circ H\circ G\circ H$，因此$(x,z)\in G\circ G\circ H\circ H$．根据定理56，$G\circ G=G$、$H\circ H=H$，因此$(x,z)\in G\circ H$，即$G\circ H$具有传递性．

综上，当且仅当$G\circ H=H\circ G$时，$G\circ H$为在E上的等价图．

设$(x,y)\in G\circ H$，则存在z，使$(x,z)\in G$、$(z,y)\in H$，因此对任意$X\in I$，$(x,y)\in X$，故$X\in\bigcap\limits_{X\in I}X$，反过来，若$(x,y)\in\bigcap\limits_{X\in I}X$，则对任意$X\in I$，$(x,y)\in X$，因此$(x,y)\in G$、$(x,y)\in H$，故$(x,y)\in G\circ H$，得证．

习题 73.

令R为在F上的等价关系，f为E到F的映射，S为R在f下的原像．$A=f\langle E\rangle$，试给出E/S到R/R_A的双射．

答：设j为A到F的规范映射，则j为单射；h为f对于R与S通过商集导出的映射，根据补充定理150，h为E/S到F/R的单射；l为j对于R_A与R通过商集导出的映射，根据补充证明规则55（1），l为A/R_A到F/R的单射．

令p为F到F/R的规范映射，根据补充证明规则55（2），$l\langle A/R_A\rangle=p\langle A\rangle$，令$l'$为$l$通过$F/R$的子集$p\langle A\rangle$导出的函数，则$l'$为双射．同时，设$E$到$E/S$的规范映射为$k$，则$p\circ f=h\circ k$．对任意$x\in p\langle A\rangle$，则存在$y\in E$，使$p(f(y))=x$，故$x=h(k(y))$，反过来，对任意$z\in E/S$，设$z=G(u)$，则$h(z)=p(f(u))$，故$h(z)\in p\langle A\rangle$．因此，令$h'$为$h$通过$F/R$的子集$p\langle A\rangle$导出的函数，则$h'$为双射．

因此$l'^{-1}\circ h'$为E/S到R/R_A的双射.

习题 74.

R为在F上的等价关系，p为F到F/R的规范映射，f为G到F/R的满射，求证：存在E，以及E到F的满射g、E到G的满射h，使$p\circ g=f\circ h$.

证明：$(\exists X)(z\in p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle$与$X\in F/R)\Rightarrow z\in F\times G$，故$(\exists X)(z\in p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle$与$X\in F/R)$为集合化公式，令$E=\{z|(\exists X)(z\in p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle$与$X\in F/R)\}$，映射$g$为$z\mapsto pr_1z(z\in E,pr_1z\in F)$，映射$h$为$z\mapsto pr_2z(z\in E,pr_2z\in G)$．对任意$z\in E$，设$z\in p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle$与$X\in F/R$，故$p(g(z))=X$，$f(h(z))=X$，同时，由于$p$、$f$均为满射，故对任意$x\in F$，令$G(x)=X$，故$p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle\neq\varnothing$，因此存在$z\in E$，使$g(z)=x$，故$g$为满射，同理可证$h$为满射.

习题 75.

（1）令R为公式，求证：公式R与$(x|z)(y|x)(z|y)R$关于x、y具有对称性，在什么情况下，该公式为关于x、y在E上具有反身性？

（2）令R为公式，R关于x、y具有对称性并且在E上具有反身性，令其生成的图为G，且$G\subset E\times E$．S为公式：

“存在自然数$n>0$以及$(x_i)_{i\in[0,n]}$（$(\forall i)(i\in[0,n]\Rightarrow x_i\in G)$），其中$x_0=x$，$x_n=y$，并且，对任意$i\in[0,n-1]$，$(x_{i+1}|y)(x_i|x)R$为真”.

求证：S是关于x、y在E上的等价关系，并且，包含G的一切等价图，均包含S的图.

（3）当$x\in E$时，（2）中的S的等价类，称为x所在的E关于R的连通分量，在没有歧义的情况下可以简称E关于R的连通分量．令$F=\{A|A\subset E$与$(\forall y)(\forall z)(y\in A$与$z\in E-A\Rightarrow$非$(y|x)(z|y)R)$，求证：对任意$x\in E$，$\bigcap\limits_{A\in\{A|A\in F\text{与}x\in A\}}A$为$E$关于$R$的连通分量.

证明：

（1）对称性根据定义可证．$(x|y)R$与$(x|y)(x|z)(y|x)(z|y)R\Leftrightarrow x\in E$，即$(x|y)R\Leftrightarrow x\in E$，故当且仅当$R$在$E$上具有反身性时，公式$R$与$(x|z)(y|x)(z|y)R$在$E$上具有反身性.

（2）令R的图为G，S的图为F．假设$(x,y)\in F$，由于R具有对称性，令$y_i=x_{n-i}$，则$(y_i)_{0\leq i\text{与}i\leq n}$满足$S$，故$(y,x)\in F$，因此$S$具有对称性.

假设$x\in E$，由于R具有反身性，令$y_i=x$（$0\leq i$与$i\leq n$），则则$(y_i)_{0\leq i\text{与}i\leq n}$满足$S$；反过来若$(x_i)_{0\leq i\text{与}i\leq n}$满足$S$，且其中$x_0=x$，$x_n=x$，则$(x,x_1)\in G$，由于$G\subset E\times E$，故$x\in E$，因此$S$在$E$上具有反身性.

假设$(x,y)\in F$、$(y,z)\in F$，将相应的$(x_i)_{i\in[0,n]}$、$(Y_i)_{i\in[0,m]}$合在一起组成$(Zi)_{i\in[0,n+m+1]}$（当$i\in[0,n]$时，$Z_i=X_i$，当$i\in[n+1,n+m+1]$时，$Z_i=Y_{i-n-1}$），因此$(x,z)\in F$，因此S具有传递性．令$G^1=G$，$G^n=G^{n-1}\circ G$，则$F=\bigcup\limits_{n\in N-\{0\}}G^n$．对满足$G\subset G'$的任意$G'$，如果$G$为在$E$上的等价关系，根据定理56，对任意自然数$n>0$，$G^n\subset G'$，因此$F\subset G$，得证.

（3）令R的图为G，S的图为F，则当$A \in F$且$x \in A$时，如果$(x,y) \in F$，则存在满足S的$(x_i)_{i\in[0,n]}$，如果存在i使$x_{i-1} \in A$但$x_i \notin A$，则$(x_{i-1},x_i) \notin G$，矛盾，因此$y \in A$，故$y \in \bigcap\limits_{A\in\{A|A\in F与x\in A\}} A$.

反过来，如果$(x,y) \notin F$，则$y \notin F(x)$、$x \in F(x)$、$F(x) \in F$，因此$y \notin \bigcap\limits_{A\in\{A|A\in F与x\in A\}} A$.得证.

注：习题75（2）、（3）涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 76.

（*1*）公式R具有对称性并且在E上具有反身性．如果对任意互不相等的x、y、z、t，$x \in E$与$y \in E$与$z \in E$与$t \in E$与R与$(z|y)R$与$(t|y)R$与$(y|x)(z|y)R$与$(y|x)(t|y)R \Rightarrow (t|y)(z|x)R$，则称$R$具有1级非传递性．如果$A \subset E$，并且$x \in A$与$y \in A \Rightarrow R$，则称$A$关于$R$稳定．如果$a \in E$、$b \in E$，$a \neq b$，并且$(b|y)(a|x)R$为真，令$C(a,b) = \{x|x \in E$与$(x|y)(a|x)R$与$(x|y)(b|x)R\}$，求证：$C(a,b)$关于$R$稳定；任意$x \in C(a,b)$、$y \in C(a,b)v\check{~}x \neq y$，均有$C(x,y) = C(a,b)$；此时，集合$C(a,b)$称为$E$关于$R$的组成部分，则$C(a,b)$是$E$关于$R$的连通分量；$E$的两个不同组成部分的交集最多有一个元素，并且对于$E$的三个不同组成部分$A$、$B$、$C$，$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$至少有一个为空或者三者相同.

（*2*）反过来，设$(X_l)_{l\in L}$为E的覆盖，其中$l \in L \Rightarrow X_l \neq \varnothing$，并且：

第一，对任意$l \in L$、$m \in L$且$l \neq m$，$X_l \cap X_m$最多有一个元素；

第二，对任意$l \in L$、$m \in L$、$n \in L$且三者互不相等，$X_l \cap X_m$、$X_l \cap X_m$、$X_l \cap X_m$至少有一个为空或者三者相同.

令公式R为$(\exists l)(l \in L$与$x \in X_l$与$y \in X_l)$，求证：R在E上具有反身性、具有对称性，并且具有1级非传递性.

（*3*）公式R具有对称性并且在E上具有反身性．如果对于E的n个互不相等的元素$(x_i)_{1\leq i与i\leq n}$，只要$(x_i|x)(x_j|y)R$（$1 \in [1,n]$，$j \in [1,n]$，$i \neq j$，且$(i,j) \neq (n-1,n)$，$(i,j) \neq (n,n-1)$）均为真，就有$(x_{n-1}|x)(x_n|y)R$为真，则称R具有$n-3$级非传递性．试类比习题*76*（*1*）、习题*76*（*2*），给出具有任意级非传递性的充分必要条件，并证明：具有p级非传递性的公式，也具有q级非传递性（$q > p$）.

证明：

（1）设$x \in C(a,b)$、$y \in C(a,b)$，则$R(a,x)$、$R(b,x)$、$R(a,y)$、$R(b,y)$、$R(a,b)$，且$a \in E$、$b \in E$、$x \in E$、$y \in E$，根据定义，无论a、b、x、y中是否有相等的，R均为真．故$C(a,b)$关于R稳定．如果$x \in C(a,b)$、$y \in C(a,b)$并且$x \neq y$，则对任意$z \in C(x,y)$，则$z \in E$并且$(z|y)(a|x)R$、$(z|y)(b|x)R$，故$z \in C(a,b)$，反之，同理可证对任意$z \in C(a,b)$，有$z \in C(x,y)$，因此$C(x,y) = C(a,b)$．对任意$x \in C(a,b)$，则$(x|y)(a|x)R$成立，反过来，如果x是a所在的E关于R的连通分量的元素，根据数学归纳法可证$x \in C(a,b)$，故$C(a,b)$是a所在的E关于R的连通分量．若E的两个不同组成部分的交集有两个元素x、y，则二者均为

$C(x,y)$，矛盾，故最多有一个元素．假设$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$均不为空，设$A\cap B=\{a\}$，$B\cap C=\{b\}$，$C\cap A=\{c\}$，若其中$a=b$，则$a=c$，三者相同，若三者均不相同，则$A=C(a,c)$，$B=C(a,b)$，$C=C(b,c)$，因此$(b|y)(a|x)R$、$(a|y)(c|x)R$、$(c|y)(b|x)R$，因此$b\in A$、$c\in B$、$a\in C$，故$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$均有不少于三个公共元素，矛盾．得证．

（2）$(\exists l)(l\in L$与$x\in X_l)$为真，故R具有反身性；$(\exists l)(l\in L$与$x\in X_l$与$y\in X_l)\Leftrightarrow(\exists l)(l\in L$与$y\in X_l$与$x\in X_l)$，故$R$具有对称性．对任意互不相等的$x$、$y$、$z$、$t$如果$x\in E$与$y\in E$与$z\in E$与$t\in E$与$R$与$(z|y)R$与$(t|y)R$与$(y|x)(z|y)R$与$(y|x)(t|y)R$，则存在$l\in l$，使$\{x,y\}\subset X_i$，存在$m\in L$，使$\{y,z\}\subset X_m$，存在$n\in L$，使$\{z,x\}\subset X_n$，因此$l$、$m$、$n$相等，故$\{x,y,z\}\subset X_l$，同理存在$l'\in l$，使$\{x,y,t\}\subset X'_l$，因此$l=l'$，故$\{x,y,z,t\}\subset X_l$，因此，$(t|y)(z|x)R$，故$R$具有1级非传递性．

（3）充分必要条件为：

第一，集族任意两个元素的交集最多有$n-3$个元素；

第二，集族中任意三个集合A、B、C，如果$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$均有$n-3$个元素，且其中$n-4$个元素是三个集合共有的，则全部$n-3$个元素均为三个集合共有．

如果上述性质成立，考虑任何元素x，集族中包含x的集合，去掉x后，剩下的集合产生的公式具有$n-4$级非传递性，故充分性成立；如果R具有$n-3$级非传递性，对任意元素$x\in E$，考虑与x满足R的元素集合E'（不包含元素x），令$R'=R\cap(E'\times E')$，则R'具有$n-4$级非传递性，因此任意集合A、B、C，上述性质对$n-1$成立，则对于$A\cup\{x\}$、$B\cup\{x\}$、$C\cup\{x\}$，上述性质对n成立，必要性成立．

如果公式R具有p级非传递性，则集族任意两个元素的交集最多有p个元素，由于$q>p$，故q级非传递性的条件一成立；同时，如果集族中任意三个集合A、B、C，如果$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$均有q个元素，且其中$q-1$个元素是三个集合共有的，则令M有$q-p$个元素且$M\subset(A\cap B\cap C)$，令$A'=A-M$、$B'=B-M$、$C'=C-M$，则$A'\cap B'$、$B'\cap C'$、$C'\cap A'$均有$p-3$个元素，且其中$p-4$个元素是三个集合共有的，故全部$p3$个元素均属于$A'\cap B'\cap C'$，也就是说，q级非传递性的条件二成立．综上，R具有q级非传递性．

注：习题76（1）、（3）涉及尚未介绍的“自然数”知识．

Chapter 3

偏序集，基数，自然数（Ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers）

3.1 偏序关系，偏序集（Relations d'ordre, ensembles ordonnés）

元数学定义 54. 偏序关系（*relation d'ordre*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为公式，x、y、z为不同的不是常数的字母，且R不包含z，如果下列三个公式为真：

第一，R关于x、y具有传递性；

第二，R与$(x|z)(y|x)(z|y)R \Rightarrow x = y$；

第三，$R \Rightarrow (x|y)R$与$(y|x)R$，

则称R为关于x、y的偏序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为R为偏序关系.

补充证明规则 68.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的偏序关系，则$(x|z)(y|x)(z|y)R$也是关于x、y的偏序关系.

证明：根据定义可证.

元数学定义 55. 在集合上的偏序关系（*relation d'ordre dans un ensemble*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的偏序关系，并且R关于x、y在E上具有反身性，则称R为关于x、y在E上的偏序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为R为在E上的偏序关系.

补充定理 153.

（*1*）$x=y$为关于x、y的偏序关系.

（*2*）$x\subset y$为关于x、y的偏序关系.

（*3*）$x=y$与$x\in E$为关于x、y在E上的偏序关系.

（*4*）$F\subset\mathcal{P}(E)$，则$x\subset y$与$x\in F$与$y\in F$为关于x、y在F上的偏序关系.

（*5*）E、F为集合，H的元素都是E的子集到F的映射，则$x\in H$与$y\in H$与(y为x的延拓)为关于x、y在H上的偏序关系.

（*6*）E为集合，$F=\{A|(\Delta_A$为E的划分$)\}$，$X\in F$与$Y\in F$与Δ_X为比Δ_Y更细$)\}$为关于X、Y在F上的偏序关系.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 69.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的偏序关系，则$R\Rightarrow x\in E$，$R\Rightarrow y\in E$.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 70.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的偏序关系，则R与$(x|z)(y|x)(z|y)R\Leftrightarrow x\in E$与$y\in E$与$x=y$.

证明：根据定义，R与$(x|z)(y|x)(z|y)R\Rightarrow x\in E$与$y\in E$与$x=y$. 另一方面，如果$x\in E$与$y\in E$与$x=y$，则$R\Leftrightarrow(y|x)R$、$R\Leftrightarrow(x|y)R$，进而$x\in E$与$y\in E$与$x=y\Rightarrow R$与$(x|z)(y|x)(z|y)R$.

补充证明规则 71.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的偏序关系，则R为生成图的公式.

证明：根据补充证明规则69，$R\Rightarrow(x,y)\in E\times E$，根据补充证明规则118可证.

定义 80. 偏序图（*graphe d'ordre*）

G为图，如果$(x,y)\in G$为在E上的偏序关系，则称G为在E上的偏序图.

定义 81. 在集合上的偏序对应（*correspondance d'ordre dans un ensemble*），偏序（*ordre*）

如果F为在E上的偏序图，则(F,E,E)称为在E上的偏序对应，或称为在E上的偏序.

定理 57. 当且仅当同时满足下列两个条件时，对应(G,E,E)为在E上的偏序对应：

第一，$G\circ G=G$；

第二，$G\cap G^{-1}=\Delta_E\times E$.

证明：如果(G,E,E)为偏序关系，由于$(x,y)\in G$与$(y,z)\in G\Rightarrow(x,z)\in G$，故$G\circ G\subset G$，同时，$(x,y)\in G\Rightarrow(y,y)\in G$，故$(x,y)\in G\circ G$，故$G\subset G\circ G$，因此$G\circ G=G$；根据补充证明规则70，$G\cap G^{-1}=\Delta_E\times E$.

反过来，如果$G\circ G=G$，则$(x,y)\in G$与$(y,z)\in G\Rightarrow(x,z)\in G$；如果$G\cap G^{-1}=\Delta_E\times E$，故$(x,y)\in G$与$(y,x)\in G\Rightarrow x=y$；$\Delta_E\times E\subset G$，故$x\in E\Rightarrow(x,x)\in G$，又因为$pr_1G=E$，$pr_2G\subset E$，因此$(x,x)\in G\Rightarrow x\in G$，$(x,y)\in G\Rightarrow x\in E$，$(x,y)\in G\Rightarrow y\in E$，因此$(x,y)\in G\Rightarrow(x,x)\in G$与$(y,y)\in G$．故$F$为在$E$上的偏序图.

元数学定义 56. 预序关系（*relation de préordre*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为公式，x、y、z为不同的不是常数的字母，且R不包含z，如果以下二个公式为真：

（*1*）R关于x、y具有传递性；

（*2*）$R\Rightarrow(x|y)R$与$(y|x)R$,

则称R为关于x、y的预序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为R为预序关系.

补充证明规则 72.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的预序关系，则$(x|z)(y|x)(z|y)R$也是关于x、y的预序关系.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 73.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为偏序关系，则R为预序关系.

证明：根据定义可证.

元数学定义 57. 相反关系（*relation opposée*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为预序关系，则$(x|z)(y|x)(z|y)R$称为R的相反关系.

补充证明规则 74.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为预序关系（或偏序关系），则R的相反关系也是预序关系（或偏序关系）.

证明：根据补充证明规则68、补充证明规则72可证.

补充证明规则 75.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为预序关系，则R与(R的相反关系)是等价关系.

证明：根据定义可证.

元数学定义 58. 在集合上的预序关系（*relation d'préordre dans un ensemble*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的预序关系，并且R关于x、y在E上具有反身性，则称R为关于x、y在E上的预序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为R为在E上的预序关系.

补充证明规则 76.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的预序关系，S为R与(Rs)，x'、y'为与x、y不同的字母且R不包含x'、y'，则$(x'|y)S$与$(y|x)(y'|y)S$也是在E上的等价关系，并且R关于x、y同等价关系"$(x'|y)S$与$(y|x)(y'|y)S$"相容.

证明：根据定义，$(x'|y)S$与$(y|x)(y'|y)S$是等价关系，同时，根据传递性，R与$(x'|y)S$与$(y|x)(y'|y)S \Rightarrow (x'|x)(y'|y)R$，得证.

补充证明规则 77.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的预序关系，则$R \Rightarrow x \in E$，$R \Rightarrow y \in E$.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 78.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的预序关系，令S为R与(R的相反关系)，R'为公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$y \in Y$与$R)$，则$R'$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的偏序关系.

证明：R'与$(Y|X)(Z|Y)R' \Leftrightarrow X \in E/S$与$Y \in E/S$与$Z \in E/S$与$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X$与$y \in Y$与$z \in Z \Rightarrow R$与$(y|x)(z|y)R)$，由于$R$具有传递性，故$R'$具有传递性.

R'与$(X|Z)(Y|X)(Z|Y)R' \Leftrightarrow X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\forall x)(\forall y)(x \in X$与$y \in Y \Rightarrow R$与$(x|z)(y|x)(z|y)R)$，等价于$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\forall x)(\forall y)(x \in X$与$y \in Y \Rightarrow S)$，如果$X \in E/S$与$Y \in E/S$，$x \in X$与$y \in Y$，根据补充证明规则38（1），$S \Leftrightarrow (\exists X)(x \in X$与$y \in X$与$X \in E/S)$，则$(\exists X)(x \in X$与$y \in X$与$X \in E/S)$，因此$X = Y$. 故$R'$与$(X|Z)(Y|X)(Z|Y)R' \Rightarrow X \in E/S$与$Y \in E/S$与$X = Y$.

同时，由于$R \Rightarrow (x|y)R$与$(y|x)R$，因此$R' \Rightarrow X \in E/S$与$(\forall X)(x \in X \Rightarrow (x|y)R)$，$R' \Rightarrow Y \in E/S$与$(\forall y)(y \in Y \Rightarrow (y|x)R)$，故$R' \Rightarrow (X|Y)R'$与$(Y|X)R'$.

另外，由于$x \in E \Leftrightarrow (y|x)R$，故$X \in E/S \Rightarrow (X|Y)R'$.

综上，得证.

补充证明规则 79.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为偏序关系（或预序关系），R'为R与$x \in E$与$y \in E$，如果$x \in E \Rightarrow (y|x)R$，则$R'$为在$E$上的偏序关系（或预序关系）.

证明：$x \in E \Rightarrow (y|x)R$，故$x \in E \Rightarrow (y|x)R'$，同时，$R' \Rightarrow x \in E$，得证.

补充证明规则 80.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的预序关系，则R为生成图的公式.

证明：根据补充证明规则77，$R \Rightarrow (x, y) \in E \times E$，根据补充证明规则18可证.

定义 82. 预序图（*graphe d' préordre*）

对于图G，如果$(x, y) \in G$为在E上的预序关系，则称G为在E上的预序图.

定义 83. 在集合上的预序对应（*correspondance d'préordre dans un ensemble*），预序（*préordre*）

如果F为在E上的预序图，则(F, E, E)称为在E上的预序对应，或称为在E上的预序.

补充定理 154.

（*1*）当且仅当同时满足下列两个条件时，对应(G, E, E)为在E上的预序对应：

第一，$G \circ G \subset G$;

第二，$\Delta_{E \times E} \subset G$.

（*2*）G为在E上的预序图，则$(x, y) \in G$与$(y, x) \in G$为生成图的公式，其生成的图为$G \cap G^{-1}$.

证明：

（1）$G \circ G \subset G$等价于传递性，$\Delta_E \times E \subset G$与预序的第二个性质等价，得证.

（2）$(x, y) \in G$与$(y, x) \in G \Rightarrow (x, y) \in G$，故其为生成图的公式. 根据定义可证其生成的图为$G \cap G^{-1}$.

补充定理 155.

（*1*）在$\varnothing$上的唯一的预序图是$\varnothing$，在$\varnothing$上的唯一的预序是$(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$. 并且，该预序图（或预序）是偏序图（或偏序）.

（*2*）在x上的唯一的预序图是$\{(x, x)\}$，在x上的唯一的预序是$(\{(x, x)\}, x, x)$. 并且，该预序图（或预序）是偏序图（或偏序）.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理154（1）可证.

补充定理 156.

G为在E上的预序图，令S为公式$(x,y) \in G$与$(y,x) \in G$，令R'为公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$y \in Y$与$(x,y) \in G)$，则该公式生成的图$G'$为$(E/S) \times (E/S)$的子集，并且是$G$在$E \times E$到$(E \times E)/(S \times S)$的规范映射下的像.

证明：$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$y \in Y$与$(x,y) \in G) \Rightarrow X \in E/S$与$Y \in E/S$，故该公式生成的图$G'$为$(E/S) \times (E/S)$的子集.

令S的图为F，则$F = G \cap G^{-1}$. 令f为E到E/S的规范映射，g为$E \times E$到$(E \times E)/(S \times S)$的规范映射，根据补充证明规则62（1），$g(x,y) = f(x) \times f(y)$. 则$(u,v) \in g\langle G \rangle \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(u = f(x)$与$v = f(y)$与$(x,y) \in G)$，等价于$(\exists x)(\exists y)(u = F\langle x \rangle$与$v = F\langle y \rangle$与$(x,y) \in G)$，根据补充证明规则38（2），等价于$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$y \in Y$与$(x,y) \in G)$，得证.

记号定义 19. 不等式（*inégalité*）

令R为关于x、y的预序关系或偏序关系，在没有歧义的情况下，R可以记作$x \leq y$. $x \leq y$也可以记作$y \geq x$，$x \leq y$与$x \neq y$记作$x < y$，$x \geq y$与$x \neq y$记作$x > y$.

令G为在E上的预序图或偏序图，$S = (G,E,E)$，则$(x,y) \in G$可以记作$x \leq_S y$. $x \leq_S y$也可以记作$y \geq_S x$，$x \leq_S y$与$x \neq_S y$记作$x <_S y$，$x \geq_S y$与$x \neq_S y$记作$x >_S y$. 在没有歧义的情况下，可以分别简记为$x \leq y$、$y \geq x$、$x < y$、$x > y$.

定义 84. 更细的预序（*préordre plus fin*），更细的偏序（*ordre plus fin*）

(F,E,E)、(F',E,E)均为在E上的预序（或偏序），如果$F' \subset F$，则称(F,E,E)为比(F',E,E)更细的预序（或偏序）.

注：在原书中，“更细”这个概念包括与自身相等的情况，即一个预序（或偏序）比自身更细.

证明规则 58.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中：

（*1*）$x \leq y \Leftrightarrow x < y$或$x = y$；

（*2*）$x \leq y$与$y < z \Rightarrow x < z$；

（*3*）$x < y$与$y \leq z \Rightarrow x < z$；

（*4*）$x \leq y$与$y < z \Rightarrow x < z$.

证明：根据定义可证.

定义 85. 偏序集（*ensemble ordonné*），预序集（*ensemble préordonné*）

F是在E上的偏序（或预序），则称E为按偏序（或预序）F排序的偏序集（或预序集），或称E为按偏序关系（或预序关系）$y \in F\langle x \rangle$或与之等价的公式排序的偏序集（或预序集）.

定义 86. 集合的同构（*isomorphisme de ensembles*），集合的逆同构（*isomorphisme réciproque de ensembles*），同构于一个集合（*isomorphe à un ensemble*）

如果E、E'分别为按F、F'排序的偏序集（或预序集），f为E到E'的双射，且$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$，则称$f$为$E$到$E'$的同构，$f$的逆映射称为$f$的逆同构．如果存在$E$到$E'$的同构，则称$E$同构于$E'$．

补充定理 157. 同构的逆映射为同构

令f为E到E'的同构，则f的逆映射为E'到E的同构．

定义 87. 集合的逆同构（*isomorphisme réciproque de ensembles*）

令f为E到E'的同构，则f的逆映射称为f的逆同构．

定义 88. 按包含关系排序的偏序集（*ensemble ordonné par inclusion*）

$F \subset \mathcal{P}(E)$，则按偏序关系$x \subset y$与$x \in F$与$y \in F$排序的偏序集F，称为按包含关系排序的偏序集．

定义 89. 可比较的（*cornparable*），不可比较的（*incomparable*）

令E为预序集，如果$x \leq y$或$y \leq x$，则称x和y为可比较的．否则，称x和y为不可比较的．

补充定理 158.

令E为按F排序的偏序集（或预序集），F的图为G，$A \subset E$，则$(x,y) \in G \cap (A \times A)$为在$A$上关于$x$、$y$的偏序关系（或预序关系），$(G \cap (A \times A), A, A)$是在$A$上的偏序对应（或预序对应）．

证明：根据定义可证．

元数学定义 59. 导出的偏序（*ordre induits*），导出的预序（*préordre induits*），导出的偏序关系（*relation de ordre induits*），导出的预序关系（*relation de préordre induits*），偏序子集（*partie ordonné*），预序子集（*partie préordonné*），偏序的延拓（*prolongements de l'ordre*），预序的延拓（*prolongements de l'relation de ordre induits*），偏序关系的延拓（*prolongements de l'ordre*），预序关系的延拓（*prolongements de relation de l'ordre induits*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令E为按F排序的偏序集（或预序集），F的图为G，$A \subset E$，则$(G \cap (A \times A), A, A)$称为$F$在$A$上导出的偏序（或预序）；$(x,y) \in G \cap (A \times A)$或与之等价的公式，称为偏序关系$(x,y) \in G$或与之等价的公式在$A$上导出的偏序关系（或预序关系）；按该偏序关系（或预序关系）在A上导出的偏序排序的偏序集，称为E的偏序子集（或预序子集）．同时，F称为偏序（或预序）$(G \cap (A \times A), A, A)$在$E$上的延拓；$(x,y) \in G$或与之等价的公式，称为偏序关系（或预序关系）$(x,y) \in G \cap (A \times A)$或与之等价的公式在$E$上的延拓．

补充定理 159.

偏序集（或预序集）的偏序子集（或预序子集）的偏序子集（或预序子集），也是该偏序集（或预序集）的偏序子集（或预序子集）.

证明：根据定义可证.

补充定理 160.

令$(E_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i \in I$，F_i为在E_i上的偏序（或预序），其图为G_i，将关于x_i、y_i的偏序关系（或预序关系）$(x_i, y_i) \in G_i$记作$x_i \leq y_i$，令$F = \prod\limits_{i\in I} E_i$，则公式$(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_i x \leq pr_i y)$是关于$x$、$y$在$F$上的偏序关系（或预序关系）.

证明：根据定义可证.

定义 90. 偏序的乘积（*ordre produit*），预序的乘积（*préordre produit*），偏序关系的乘积（*relation du ordre produit*），预序关系的乘积（*relation du préordre produit*），偏序集的乘积（*produit d'ensembles ordonnés*），预序集的乘积（*produit d'ensembles préordonnés*）

令$(E_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i \in I$，F_i为在E_i上的偏序（或预序），其图为G_i，将关于x_i、y_i的偏序关系（或预序关系）$(x_i, y_i) \in G_i$记作$x_i \leq y_i$，令$F = \prod\limits_{i\in I} E_i$，$G$为公式$(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_i x \leq pr_i y)$生成的图，则$(G, F, F)$称为偏序（或预序）$(F_i)_{i\in I}$的乘积，$x \leq y$称为上述各偏序（或预序）相应的偏序关系（或预序关系）的乘积，按$(F_i)_{i\in I}$的乘积排序的F称为偏序集（或预序集）$(E_i)_{i\in I}$的乘积.

补充定理 161.

令F_1为在E_1上的偏序（或预序），F_2为在E_2上的偏序（或预序），则公式$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$是关于x、y在$E_1 \times E_2$上的偏序关系（或预序关系）.

证明：根据定义可证.

定义 91. 两个偏序的乘积（*produit de deux ordres*），两个预序的乘积（*produit de deux préordres*），两个偏序关系的乘积（*relation du produit de deux ordres*），两个预序关系的乘积（*relation du produit de deux préordres*），两个偏序集的乘积（*produit de deux ensembles ordonnés*），两个预序集的乘积（*produit de deux ensembles préordonnés*）

令F_1为在E_1上的偏序（或预序），F_2为在E_2上的偏序（或预序），G为公式$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$生成的图，则$(G, E_1 \times E_2, E_1 \times E_2)$称为偏序（或预序）$F_1$和$F_2$的乘积. $x \leq y$称为上述两个偏序（或预序）相应的偏序关系（或预序关系）的乘积，F_1和F_2的乘积排序的$E_1 \times E_2$称为偏序集（或预序集）E_1和E_2的乘积.

补充定理 162.

令$(E_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i\in I$，F_i为在E_i上的偏序（或预序），其图为G_i，将关于x_i、y_i的偏序关系（或预序关系）$(x_i,y_i)\in G_i$记作$x_i\leq y_i$，令$F=\prod\limits_{i\in I}E_i$，$G$为上述偏序关系（或预序关系）的乘积生成的图，则$G$为$\prod\limits_{i\in I}G_i$在$\prod\limits_{i\in I}(E_i\times E_i)$到$F\times F$的规范映射下的像.

证明：

令该规范映射为F，对任意$f\in\prod\limits_{i\in I}G_i$，则$F(f)=((pr_1(pr_if))_{i\in I},(pr_2(pr_if))_{i\in I})$，等于$((pr_1f(i))_{i\in I},(pr_2f(i))_{i\in I})$，令$f(i)=(x_i,y_i)$，$x=(x_i)_{i\in I}$，$y=(y_i)_{i\in I}$，故$F(f)=(x,y)$. 并且，对任意$i\in I$，$(x_i,y_i)\in G_i$，故$(x,y)\in G$. 反过来，如果$(x,y)\in G$，则对任意$i\in I$，$(x_i,y_i)\in G_i$，因此$((x_i,y_i))_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I}G_i$. 综上，得证.

补充定理 163.

令h为B^A到$\mathcal{F}(A;B)$的规范映射，F为偏序集（或预序集），R为公式$f\in\mathcal{F}(A;B)$与$g\in\mathcal{F}(A;B)$与$x\in A\Rightarrow f(x)\leq g(x)$，$R'$为公式$F\in B^A$与$g\in B^A$与$x\in A\Rightarrow(F,A,B)(x)\leq(G,A,B)(y)$，则$R$为在$\mathcal{F}(A;B)$上的偏序关系（或预序关系），$R'$为在$B^A$上的的偏序关系（或预序关系），并且$h$为$B^A$到$\mathcal{F}(A;B)$的同构.

证明：根据定义可证R和R'为偏序关系（或预序关系），根据补充定理123，$G\mapsto(G,A,B)$为双射，得证.

定义 92. 单增映射（*application croissante*），单减映射（*application décroissante*），单调映射（*application monotone*），严格单增映射（*application strictement croissante*），严格单减映射（*application strictement décroissante*），严格单调映射（*application trictement monotone*）

令E、F为预序集，f为E到F的映射，如果$x\leq y\Rightarrow f(x)\leq f(y)$，则称$f$为单增映射，如果$x\leq y\Rightarrow f(x)\geq f(y)$，则称$f$为单减映射，如果$f$是单增映射或单减映射，则称$f$为单调映射. 如果$x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$，则称$f$为严格单增映射，如果$x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$，则称$f$为严格单减映射，如果$f$是严格单增的或严格单减的，则称$f$为严格单调映射.

补充定理 164.

令E、F为偏序集，f为E到F的映射，把E、F其中之一的偏序关系替代为其相反关系，如果f原来是单增映射（或单减映射），则变为单减映射（或单增映射）.

证明：根据定义可证.

补充定理 165.

（*1*）如果常数函数的定义域和到达域为偏序集，则该常数函数是单增映射，也是单减映射.

（*2*）如果函数是单调映射（或单增映射、单减映射），并且是单射，则该函数是严格单调映射（或单增映射、单减映射）

证明：根据定义可证.

补充定理 166.

E、F为偏序集，f为E到F的双射，则f为单增映射、f^{-1}为单增映射、f为E到F的同构三者等价.

证明：根据定义可证.

定义 93. 单增子集族（*famille de parties croissante*），单减子集族（*famille de parties décroissante*），严格单增子集族（*famille de parties strictement croissante*），严格单减子集族（*famille de parties strictement décroissante*）

$(X_i)_{i\in I}$为E的子集族，其指标集I为偏序集，$\mathcal{P}(E)$为按包含关系排序的偏序集，如果映射$i\mapsto X_i(i\in I, X_i\in\mathcal{P}(E))$为单增映射（或单减映射、严格单增映射、严格单减映射），则称$(X_i)_{i\in I}$为单增子集族（或单减子集族、严格单增子集族、严格单减子集族）.

定理 58.

如果E、E'为偏序集，E到E'的映射u和E'到E的映射v均为单减映射，并且对任意$x\in E$、$x'\in E'$，$v(u(x))\geq x$，$u(v(x'))\geq x'$，则$u\circ v\circ u=u$、$v\circ u\circ v=v$.

证明：$v(u(x))\geq x$，故$u(v(u(x)))\leq u(x)$œ$u(v(x'))\geq x'$，故$u(v(u(x)))\geq u(x)$，因此$u\circ v\circ u=u$，同理可证$v\circ u\circ v=v$.

补充证明规则 81.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中*:*

（*1*）E为预序集，$x\leq y$为在E上的预序关系，S为在E上的等价关系，令R为公式$X\in E/S$与$Y\in E/S$与$((\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y)))$，则$R$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的预序关系.

（*2*）E为偏序集，$x\leq y$为在E上的偏序关系，S为在E上的等价关系，令R为公式$X\in E/S$与$Y\in E/S$与$((\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y)))$，如果$x\leq y$与$y\leq z$与$x\equiv z(modS)\Rightarrow x\equiv y(modS)$，则$R$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的偏序关系.

证明：

（1）如果$(\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y))$、$((\forall y)(y\in Y\Rightarrow(\exists z)(z\in Z$与$y\leq z)))$，则$(y\in Y$与$x\leq y)\Rightarrow(\exists z)(z\in Z$与$y\leq z)$与$x\leq y$，因此$(y\in Y$与$x\leq y)\Rightarrow(\exists z)(z\in Z$与$x\leq z)$，故$((\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists z)(z\in Y$与$x\leq z)))$，传递性得证.

由于$(x\in X\Rightarrow(x\in X$与$x\leq x))$，故$(\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in X$与$x\leq y)$. 得证.

（2）如果$(\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y))$、$((\forall y)(y\in Y\Rightarrow(\exists z)(z\in X$与$y\leq z)))$，则$x\in X\Rightarrow(\exists y)(\exists z)(y\in Y$与$x\leq y$与$z\in X$与$y\leq z)$，故$x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in X$与$y\in Y)$，因此$X=Y$，得证.

元数学定义 60. 预序关系的商（*quotient relation de préordre*），商预序集（*ensemble préordonné quotient*），偏序关系的商（*quotient relation de ordre*），商偏序集（*ensemble ordonné quotient*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中：

E为预序集，S为在E上的等价关系，公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$与$x \leq y)))$称为预序关系$x \leq y$除以$S$的商，按该预序排序的$E/S$，称为预序集$E$除以$S$的商预序集，或称为$E/S$的商预序集.

E为偏序集，S为在E上的等价关系，如果$x \leq y$与$y \leq z$与$x \equiv z(modS) \Rightarrow x \equiv y (modS)$，则公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$与$x \leq y)))$称为偏序关系$x \leq y$除以$S$的商，按该偏序排序的$E/S$，称为偏序集$E$除以$S$的商偏序集，或称为$E/S$的商偏序集.

补充证明规则 82.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，E为预序集，S为在E上的等价关系，f为E到E/S的规范映射：

（*1*）对任何E/S的商预序集到预序集F的映射g，如果$g \circ f$为单增映射，则g为单增映射.

（*2*）当且仅当S满足下列条件时，f为单增映射：$(x \leq y$与$x \equiv x'(modS)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$与$y \equiv y'(modS)$与$x' \leq y')$.

证明：

（1）如果$X \leq Y$，则对任意$x \in X$，存在$y \in Y$，并且$x \leq y$. 根据补充证明规则36（2），$f(x) = X$，$f(y) = Y$，由于$g(f(x)) \leq g(f(y))$，故$g(X) \leq g(Y)$，得证.

（2）如果f是单增映射，对任意E的元素x、y、x'，如果$x \leq y$、$x \equiv x'(modS)$，则$f(x) \leq f(y)$，故$f(x') \leq f(y)$，因此，存在$y' \in f(y)$，使$x' \leq y'$.

反过来，对任意E的元素x、y，$x \leq y$，则对任意$x' \in f(x)$，都存在$y' \in f(y)$，且$x' \leq y'$，故$f(x) \leq f(y)$，得证.

元数学定义 61. 同预序关系弱相容（*faiblement compatible avec une relation de préordre*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，E为预序集，S为在E上的等价关系，E/S为商预序集，f为E到E/S的规范映射，如果f为单增映射，则称S在x、y上同在E上的预序关系$x \leq y$弱相容，在没有歧义的情况下，也可以简称作S同在E上的预序关系$x \leq y$弱相容.

补充证明规则 83.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论M中，E为预序集，S为在E上的等价关系，f为E到E/S的规范映射，如果$x \leq y$在x上同S相容，则S同$x \leq y$弱相容.

证明：根据补充证明规则82（2）可证.

补充定理 167.

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，令F为集族$(E_i)_{i\in I}$的和，$G = \{(x, y)|(x, y)$为有序对与$x \in F$与$y \in F$与$(pr_2x < pr_2y$或$(pr_2x = pr_2y$与$($在Epr_2x上$pr_1x \leq pr_1y)))\}$，则G为在F上的偏序.

证明：根据定义可证.

定义 94. 偏序集族的序数和（*somme ordinale de la famille d'ensembles ordonnés*）

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，令F为集族$(E_i)_{i\in I}$的和，$G = \{(x, y)|(x, y)$为有序对与$x \in F$与$y \in F$与$(pr_2x < pr_2y$或$(pr_2x = pr_2y$与$($在E_{pr_2x}上$pr_1x \leq pr_1y)))\}$，则称按G排序的F为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和.

注：偏序类族的序数和通常不满足交换律.

补充定理 168.

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$、$(Fi)_{i\in I}$为偏序集族，对任意$i \in I$，E_i同构于F_i，则$(E_i)_{i\in I}$的序数和同构于$(F_i)_{i\in I}$的序数和.

证明：令E_i到F_i的同构为f_i，则映射$x \mapsto (f_{pr_2x}(pr_1x), pr_2x)$为$(E_i)_{i\in I}$的序数和到$(F_i)_{i\in I}$的序数和的同构.

补充定理 169. 偏序集族的序数和的结合律

L为偏序集，I为偏序集族$(J_l)_{l\in L}$的序数和，令F_l为偏序集族$(E_i)_{i\in J_l}$的序数和，则集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和同构于集族$(F_l)_{l\in L}$的序数和.

证明：令f为映射$x \mapsto ((pr_1x, pr_1(pr_2x)), pr_2(pr_2x))$，其为同构.

定义 95. 极大元（*élément maximal*），极小元（*éléments minimal*）

E为预序集，$a \in E$，如果$x \leq a \Rightarrow x = a$（或$x \geq a \Rightarrow x = a$），则称$a$为极小元（或极大元）.

补充定理 170.

令E为预序集，a为极小元（或极大元），把E的预序关系替代为其相反关系，则a变为极大元（或极小元）.

证明：根据定义可证.

定义 96. 最大元（*éléments plus petit*），最小元（*éléments plus grand*）

E为预序集，$a \in E$，如果$x \in E \Rightarrow x \leq a$（或$x \in E \Rightarrow x \geq a$），则称$a$为$E$的最小元（或最大元）.

补充定理 171.

偏序集最多只有一个最小元，一个最大元.

证明：设a、b均为最小元，则$a \leq b$，$b \leq a$，因此$a = b$.

补充定理 172.

令E为偏序集，a为最小元（或最大元），把E的偏序关系替代为其相反关系，则a变为最大元（或最小元）.

证明：根据定义可证.

补充定理 173.

令f为偏序集E到偏序集F的同构，如果E有最小元（或最大元）a，则F有最小元（或最大元）$f(a)$.

证明：根据定义可证.

定理 59.

令E为偏序集，$a \notin E$，E'为E和$\{a\}$的和，则存在唯一的在E'上的偏序，其为在E上的偏序在E'上的延拓，且a为最大元（或最小元）.

证明：对于最大元的情况，令在E上的偏序为G，令$G' = G \cup \{z | pr_2 z = a)$与$pr_1 z \in E'\}$，则$G'$符合条件.

设G''也符合条件，则$G \subset G'$，且对任意$x \in E'$，$(x, a) \in G''$，故$G' \subset G''$，同时，设$z \in G''$，如果$pr_1 z \in E$且$pr_2 z \in E$，由于$G'' \cap E \times E = G$，故$z \in G$，因此$z \in G'$，如果$pr_1 z \in E$且$pr_2 z = a$，则$z \in G'$，如果$pr_1 z = a$，由于$x \geq a \Rightarrow x = a$，故$z = (a, a)$，因此$z \in G'$，综上，$G' = G''$.

同理可证最小元的情况.

定义 97. 向集合添加最大元得到的偏序集（*ensemble ordonné obtenu adjoignant à un ensemble un plus grand élément*），向集合添加最小元得到的偏序集（*ensemble ordonné obtenu adjoignant à un ensemble un plus petit élément*）

令E为偏序集，$a \notin E$，E'为E和$\{a\}$的和，令偏序F为在E上的偏序在E'上的延拓，且a为最大元（或最小元），则按该偏序排序的E'，称为向E添加最大元（或最小元）a得到的偏序集.

定义 98. 共尾子集（*partie cofinale*），共首子集（*partie coinitiale*） 令E为预序集，$A \subset E$，如果$(\forall x)(x \in E \Rightarrow (\exists y)(y \in A$与$x \leq y))$，则称$A$为$E$的共尾子集；如果$(\forall x)(x \in E \Rightarrow (\exists y)(y \in A$与$x \geq y))$，则称$A$为$E$的共首子集.

补充定理 174.

任何预序集都是自身的共尾子集和共首子集.

证明：根据定义可证.

补充定理 175.

当且仅当$\{a\}$是偏序集E的共尾子集（或共首子集）时，a是E的最大元（或最小元）.

证明：根据定义可证.

定义 99. 下界（*minorant*），上界（*majorant*），严格下界（*minorant strict*），严格上界（*majorant strict*）

E为预序集，$X \subset E$，$x \in E$，如果$(\forall y)(y \in X \Rightarrow x \leq y)$，则称$x$为$X$在$E$上的下界，在没有歧义的情况下也可以简称为$X$的下界；如果$(\forall y)(y \in X \Rightarrow x \geq y)$，则称$x$为$X$在$E$上的上界，在没有歧义的情况下也可以简称为$X$的上界. 如果上界不属于$X$，则称其为严格上界；如果下界不属于$X$，则称其为严格下界.

补充定理 176.

（*1*）令E为预序集，$X \subset E$，x为X在E上的下界（或上界），把E的预序关系替代为其相反关系，则x变为X在E上的上界（或下界）.

（*2*）令E为预序集，$X \subset E$，x为X在E上的下界（或上界），$x \leq z$（或$x \geq z$），则z为X在E
上的下界（或上界）.

证明：根据定义可证.

补充定理 177.

令E为预序集，$X \subset E$，$Y \subset X$，x为X在E上的下界（或上界），则x为Y在E上的下界（或上界）.

证明：根据定义可证.

补充定理 178.

E为偏序集，$X \subset E$，且X为E的偏序子集，则当且仅当$(\exists x)((x$为X在E上的下界$)$与$x \in X)$时，X有最小元；当且仅当$(\exists x)((x$为X在E上的上界$)$与$x \in X)$时，X有最大元.

证明：根据定义可证.

补充定理 179.

偏序集的子集如果有最大元，则最大元是其上界；如果有最小元，则最小元是其下界.

证明：根据定义可证.

补充定理 180.

E为预序集，$X\subset E$，则"x为X在E上的下界（或上界）"为关于x的集合化公式.

证明：x为X的下界 $\Rightarrow x\in E$，根据证明规则52，下界的情况得证，上界的情况同理可证.

定义 100. 下界集（*ensemble des minorant*），上界集（*majorant*）

E为预序集，$X\subset E$，则$\{x|x$为X在E上的下界$\}$（$\{x|x$为X在E上的上界$\}$）称为X在E上的下界集（或上界集），在没有歧义的情况下也可以简称为X的下界集（或上界集）.

定义 101. 有下界（*minorée*），有上界（*majorée*），有界（*bornée*）

E为预序集，$X\subset E$，如果"X在E上的下界集（或上界集）$\neq\varnothing$"，则称X在E上有下界（或有上界）. 如果X在E上有下界或有上界，则称X在E上有界. 在没有歧义的情况下也可以简称为X有上界（或有下界、有界）.

补充定理 181.

E为预序集，$X\subset E$，$Y\subset X$，X在E上有上界（或有下界、有界），则Y在E上有上界（或有下界、有界）.

证明：根据补充定理177可证.

定义 102. 有下界的映射（*application minorée*），有上界的映射（*application majorée*），有界的映射（*application bornée*）

E为预序集，f为A到E的映射，如果$f\langle A\rangle$在E上有下界（或有上界、有界），则称f为有下界的映射（或有上界的映射、有界的映射）.

定义 103. 集合的最大下界（*borne inférieure d'un ensemble*），集合的最小上界（*borne supérieure d'un ensemble*），族的最大下界（*borne inférieure d'une famille*），族的最小上界（*borne supérieure d'une famille*）

令E为偏序集，$X\subset E$，如果X在E上的下界集（或上界集）有最大元（或最小元），则称其为X在E上的最大下界（或最小上界），记作$inf_E X$（或$sup_E X$），在没有歧义的情况下也可以简记为$inf\ X$（或$sup\ X$）.

如果X为二元集合$\{x,y\}$、三元集合$\{x,y,z\}$、四元集合$\{x,y,z,t\}$，为X在E上的最大下界（或最小上界）也可以记作$inf_E(x,y)$、$inf_E(x,y,z)$、$inf_E(x,y,z,t)$（或$sup_E(x,y)$、$sup_E(x,y,z)$、$sup_E(x,y,z,t)$），在没有歧义的情况下也可以简记为$inf(x,y)$、$inf(x,y,z)$、$inf(x,y,z,t)$（或$sup(x,y)$、$sup(x,y,z)$、$sup(x,y,z,t)$）.

对于族$(a_i)_{i\in I}$，如果$\bigcup\limits_{i\in I}\{a_i\} \subset E$，则称$\bigcup\limits_{i\in I}\{a_i\}$的最大下界（或最小上界）为该族的最大下界（或最小上界），记作$inf_E(a_i)_{i\in I}$（或$sup_E(a_i)_{i\in I}$），在没有歧义的情况下也可以简记为$inf(a_i)_{i\in I}$（或$sup(a_i)_{i\in I}$），或者简记作$\underset{i\in I}{inf}\, a_i$（或$\underset{i\in I}{sup}\, a_i$）.

补充定理 182.

令E为偏序集，$X \subset E$，把E的偏序关系替代为其相反关系，则X在E上的最小上界变为最大下界，在E上的最大下界变为最小上界.

证明：根据定义可证.

补充定理 183.

令E为偏序集，X是E的偏序子集：

（*1*）如果X有最大元（或最小元），则X在E上的最小上界（或最大下界）是其最大元（或最小元）.

（*2*）如果X在E上有最小上界（或最大下界）x，且$x \in X$，则x是X的最大元（或最小元）.

证明：

（1）根据补充定理179可证.

（2）根据定义可证.

补充定理 184.

令E为偏序集，X是E的偏序子集，且$X \neq \varnothing$，如果x是X的最小上界，也是X的最大下界，则$X = \{x\}$.

证明：对任意$y \in X$，$x \leq y$、$y \leq x$，故$x = y$，因此$X \subset \{x\}$，又因为）$X \neq \varnothing$，故$X = \{x\}$.

定义 104. 映射的最大下界（*borne inférieure d'une application*），映射的最小上界（*borne supérieure d'une application*）

E为预序集，f为A到E的映射，$f\langle A\rangle$的最大下界称为映射f的最大下界，令x为不出现在f的图、A、E的任何一个字母，则记作$\underset{x\in A}{inf}\, f(x)$，$f\langle A\rangle$的最小上界称为映射$f$的最小上界，记作$\underset{x\in A}{sup}\, f(x)$.

定理 60.

令E为偏序集，$A \subset E$，并且有在E上的最大下界和最小上界，当$A \neq \varnothing$时，$inf\ A \leq sup\ A$；当$A = \varnothing$时，$inf\ A$为E的最大元，$sup\ A$为E的最小元.

证明：根据定义可证.

定理 61.

令E为偏序集，A、B均为E的子集，并且均有在E上的最大下界（或最小上界），如果$A \subset B$，则$inf\ A \geq inf\ B$（$sup\ A \leq sup\ B$）.

证明：根据定义可证.

定理 62.

令E为偏序集，E的元素族$(x_i)_{i \in I}$有在E上的最小上界（或最大下界），则对任意$J \subset I$，$(x_i)i \in J$也有在E上的最小上界（或最大下界），并且$\underset{i \in J}{sup}\, x_i \leq \underset{i \in I}{sup}\, x_i$（$\underset{i \in J}{inf}\, x_i \geq \underset{i \in I}{inf}\, x_i$）.

证明：根据定义可证.

定理 63.

令E为偏序集，E的元素族$(x_i)_{i \in I}$、$(y_i)_{i \in I}$是两个E的子集族，其指标集相同且均有最小上界（或最大下界），如果$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq y_i)$，则$\underset{i \in I}{sup}\, x_i \leq \underset{i \in I}{sup}\, y_i$（$\underset{i \in I}{inf}\, x_i \leq \underset{i \in I}{inf}\, y_i$）.

证明：设$a = \underset{i \in I}{sup}\, y_i$，则$(\forall i)(i \in I \Rightarrow yi \leq a)$，故$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq a)$，因此$a/(x_i)_{i \in I}$的上界，上界的情况得证. 下界的情况同理可证.

定理 64.

令E为偏序集，$(x_i)_{i \in I}$是E的元素族，$(J_l)l \in L$为指标集I的覆盖，对任意$l \in L$，$(x_i)_{i \in J_l}$有在E上的最小上界（或最大下界），则当且仅当$(\underset{i \in J_l}{sup}\, x_i)_{l \in L}$有在$E$上的最小上界（或最大下界）时，$(x_i)_{i \in I}$有在$E$上的最小上界（或最大下界），且$\underset{i \in I}{sup}\, x_i = \underset{l \in L}{sup}(\underset{i \in J_l}{sup}\, x_i)$（$\underset{i \in I}{inf}\, x_i = \underset{l \in L}{inf}(\underset{i \in J_l}{inf}\, x_i)$）.

证明：令$b_l = \underset{i \in J_l}{sup}\, x_i$，设$(x_i)_{i \in I}$有最小上界$a$，根据定理61，对任意$l \in L$，$a \geq b_l$. 另一方面，由于$(J_l)_{l \in L}$为指标集$I$的覆盖，故若$c$满足对任意$l \in L$，$c \geq b_l$，则对任意$i \in I$，$c \geq x_i$，故$c$:$(x_i)_{i \in I}$的上界，因此$c \geq a$，故$a = \underset{l \in L}{sup}(\underset{i \in J_l}{sup}\, x_i)$. 反过来，如果$(\underset{i \in J_l}{sup}\, x_i)_{l \in L}$有最小上界$a'$，则对任意$l \in L$，$a \geq x_i$. 另一方面，如果$c'$满足对任意$l \in L$，$c' \geq x_i$，则对任意$l \in L$，$c' \geq b_l$，因此$c' \geq a'$，故$a = \underset{i \in I}{sup}\, x_i$.

最大下界的情况同理可证.

定理 65.

令E为偏序集，E的元素族$(x_{l,m})_{(l,m) \in L \times M}$为双族，如果对任意$m \in M$，$(x_{l,m})_{l \in L}$在$E$上有最小上界（或最大下界），则当且仅当$(\underset{l \in L}{sup}\, x_{l,m})_{m \in M}$在$E$上有最小上界（或最大下界）时，$(x_{l,m})_{(l,m) \in L \times M}$在$E$上有最小上界（或最大下界），且 $\underset{(l,m) \in L \times M}{sup}\, x_{l,m} = \underset{m \in M}{sup}\,(\underset{l \in L}{sup}\, x_{l,m})$（$\underset{(l,m) \in L \times M}{inf}\, x_{l,m} = \underset{m \in M}{inf}\,(\underset{l \in L}{inf}\, x_{l,m})$）.

证明：根据定理64可证.

定理 66.

令$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，$E=\prod\limits_{i\in I}E_i$，$E$为按各偏序的乘积排序的偏序族，$A\subset E$，对任意$i\in I$，令$A_i=pr_iA$，则当且仅当对任意$i\in I$，$A_i$在$E_i$上有最小上界（或最大下界）时，$A$在$E$上有最小上界（或最大下界），且$sup\ A=\sup\limits_{i\in I}pr_iA$.

证明：如果存在$E_i=\varnothing$，则$E=\varnothing$，A_i和A均无上界和下界，无需考虑.

如果对任意$i\in I$，$E_i=\varnothing$，令A_i的最小上界为b_i，设$(c_i)_{i\in I}$为A的上界，则对任意$i\in I$，$c_i\geq b$，故$(b_i)_{i\in I}$为A的最小上界．反过来，设A的最小上界为$(a_i)_{i\in I}$，对任意$i\in I$、$x_i\in A_i$，根据定理41，存在$x\in A$，使$pr_ix=x_i$；由于$x\leq(a_i)_{i\in I}$，故$x_i\leq a_i$，因此，对任意$i\in I$，a_i为A_i的上界；另一方面，假设a'_i为A_i的上界，令$c=(a-(i,a_i))\cup(i,a'_i)$，由于$c\geq a$，故$a'_i\geq a_i$，因此，对任意$i\in I$，$a_i$为$A_i$的最小上界．最大下界的情况同理可证.

补充定理 185.

E为偏序集，f为E到E的单增映射，令$A=\{z|z\in E$与$f(z)\leq z\}$，$B=\{z|z\in E$与$z\leq f(z)\}$，则：

（*1*）如果A有最小上界v，则$v=f(v)$；

（*2*）如果B有最大下界w，则$w=f(w)$.

证明：

（1）对任意$z\in A$，$v\leq z$，因此$f(v)\leq f(z)$，则$f(v)\leq z$，故$f(v)$是A的下界，因此$f(v)\leq v$，故$f(f(v))\leq f(v)$，因此$f(v)\in A$，$v\leq f(v)$，综上，$v=f(v)$.

（2）类似补充定理185（1）可证.

注：本补充定理是习题63的推广.

定理 67.

令E为偏序集，$F\subset E$，$A\subset F$，如果A在E上和在F上均有最小上界（或最大下界），则$sup_EA\leq sup_FA$（$inf_EA\geq inf_FA$）；如果A在E上有最小上界，且$sup_EA\in F$，则sup_EA $=sup_FA$.

证明：根据定义可证.

定义 105. ***右方有向集（ensemble filtrant à droite/ensemble filtrant croissant），左方有向集（ensemble filtrant à gauche/ensemble filtrant décroissant）***

E是预序集，如果E的任意二元子集在E上都有上界（有下界），此时称E为右方有向集（左方有向集）.

定理 68.

E是偏序集，如果E是右方有向集（或左方有向集），则E的极大元是最大元（或极小元是最小元）.

证明：设E是右方有向集，a为极大元．对任意$x \in E$，设$\{x, a\}$的上界为y，则$a \leq y$，$x \leq y$，故$a = y$，因此$x \leq a$，因此a为最大元．左方有向集的情形同理可证．

补充定理 186.

令E为偏序集，如果E为右方有向集（或左方有向集），把E的偏序关系替代为其相反关系，则E变为为左方有向集（或右方有向集）．

证明：根据定义可证．

补充定理 187.

I、L均为右方有向集，$I \times L$的预序关系为$(x \in I \times L$与$y \in I \times L$与$pr_1x \leq pr_1y$与$pr_2x \leq pr_2y)$，则$I \times L$为右方有向集．

证明：设$(a, b) \in I \times L$，$(c, d) \in I \times L$，$\{a, c\}$在I上的上界为x，$\{b, d\}$在L上的上界为y，则$(x, y) \in I \times L$，且(x, y)为$\{(a, b), (c, d)\}$在$I \times L$上的上界，得证．

定义 106. 格（*ensemble réticulé*）

如果偏序集E的任何二元子集都有在E上的最大下界和最小上界，则称E为格．

补充定理 188.

（*1*）格的乘积是格．

（*2*）格的偏序子集为格．

（*3*）如果格有极小元，则其为格的最小元；如果格有极大元，则其为格的最大元．

证明：

（1）根据定理66可证．

（2）根据定义可证．

（3）根据定义可证．

定义 107. 不可约元素（*élément irréductible*）

E为格，$a \in E$，如果$(\forall x)(\forall y)(x \in E$与$y \in E$与$sup(x, y) = a \Rightarrow x = a$或$y = a)$，则称$a$为$E$的不可约元素．

补充定理 189.

E为格，a为E的最小元，则a为E的不可约元素．

证明：根据定义可证．

定义 108. 内部格（*ensemble coréticulée*）

E为格，$A \subset E$，如果对任意$x \in A$、$y \in A$，均有$sup_E(x, y) \in A$、$inf_E(x, y) \in A$，则称A为E的内部格．

定义 109. 全序集（*ensemble totalement ordonné*），全序（*ordre total*），全序关系（*relation d'ordre total*），全序图（*graphe d'ordre total*），全序子集（*partie totalement ordonné*），链（*chaîne d'ensemble*）

令E为偏序集，如果E的任何两个元素都是可比较的，则称E为全序集．E的偏序称为全序，E的偏序关系称为全序关系，其偏序图称为全序图．

令E为偏序集，如果E的偏序子集是全序集，则称其为E的全序子集，或称其为E的链．

补充定理 190.

（*1*）E为全序集，x、y为E的元素，则$x = y$或$x < y$或$x > y$．

（*2*）令E为全序集，把E的全序关系替代为其相反关系，则E仍为全序集．

证明：根据定义可证．

补充定理 191.

全序集是左方有向集，是右方有向集，也是格．

证明：根据定义可证．

补充定理 192. 偏序集族的序数和为右方有向集、全序集、格的条件

令F为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和，且对任意$i \in I$，$E_i \neq \varnothing$：

（*1*）当且仅当I为右方有向集且对I的任意极大元i，并且E_i均为右方有向集时，F为右方有向集．

（*2*）当且仅当I为全序集，且对任意$i \in I$，E_i均为全序集时，F为全序集．

（*3*）当且仅当满足下列条件时，F为格：

第一，I为格，并且，对任意$i \in I$、$j \in I$，如果i和j是不可比较的，则$E_{sup(i,j)}$有最小元，$E_{inf(i,j)}$有最大元；

第二，对任意$i \in I$，如果$x \in E_i$，$y \in E_i$，且$\{x, y\}$在E_i上有上界（或下界），则$\{x, y\}$在E_i上有最小上界（或最大下界）；

第三，对任意$i \in I$，如果$x \in E_i$，$y \in E_i$，且$\{x, y\}$在E_i上没有上界（或下界），则$\{k|k \in I与k > i\}$（或$\{k|k \in I与k < i\}$）有最小元（或最大元）j，且E_j有最大元（或最小元）．

证明：

（1）充分性：

对任意$x \in F$、$y \in F$，如果$pr_2x = pr_2y$，那么：若存在$j \in I$使$j > pr_2x$，设$z \in Ej$，则z为$\{x, y\}$的上界；若pr_2x为I的极大元，则存在z使$z \geq pr_1x$且$z \geq y$，则z为$\{x, y\}$的上界；

如果$pr_2x \neq pr_2y$，则存在$j \geq pr_2x$、$j \geq pr_2y$：若$j > pr_2x$、$j > pr_2y$，设$z \in E_j$，则z为$\{x, y\}$的上界；若$j > pr_2x$、$j = pr_2y$，则y为$\{x, y\}$的上界，若$j = pr_2x$、$j > pr_2y$，则x为$\{x, y\}$的上界．

必要性：

对任意$i \in I$、$j \in I$，$i \neq j$，设$x \in E_i$，$y \in E_j$，则存在$z \geq (x,i)$、$z \geq (y,j)$，设$z \in E_k$，则k为$\{i,j\}$的上界；

对I的任意极大元i，设$x \in E_i$，$y \in E_i$，则存在$z \geq (x,i)$、$z \geq (y,i)$，故$pr_2 z = i$，因此$pr_1 z \geq x$、$pr_1 z \geq y$，所以E_i为右方有向集.

（2）充分性：

对任意$x \in F$、$y \in F$：

如果$pr_2 x = pr_2 y$，由于$pr_1 x$和$pr_1 y$是可比较的，因此x和y是可比较的；

如果$pr_2 x \neq pr_2 y$，由于$pr_2 x$和$pr_2 y$是可比较的，因此x和y是可比较的；

必要性：对任意$i \in I$、$j \in I$，$i \neq j$，设$x \in E_i$，$y \in E_j$，由于(x,i)和(y,j)是可比较的，因此i和j是可比较的，所以I为全序集；

对任意$i \in I$，设$x \in E_i$，$y \in E_i$，由于(x,i)和(y,i)是可比较的，因此x和y是可比较的，所以E_i为全序集.

（3）充分性：

对任意$x \in F$、$y \in F$：

如果$pr_2 x = pr_2 y$，根据第二个条件和第三个条件，其有最小上界和最大下界；

如果$pr_2 x \neq pr_2 y$，根据第一个条件，其有最小上界和最大下界.

必要性：

对任意$i \in I$、$j \in I$，$i \neq j$，设$x \in E_i$，$y \in E_j$，由于(x,i)和(y,j)有最大上界和最小下界，因此第一个条件成立；

对任意$i \in I$，设$x \in E_i$，$y \in E_i$，由于(x,i)和(y,i)有最大上界和最小下界，因此第二个条件、第三个条件成立.

定理 69.

全序集E到全序集F的严格单调映射，为单射. 如果f为严格单增映射，则f为E到$f(E)$的同构.

证明：如果$x \neq y$，则$x < y$或$x > y$，故$f(x) < f(y)$或$f(y) < f(x)$，因此$f(x) \neq f(y)$，故f为单射. 如果f为严格单增映射，则$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$，同时$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$，故$f(x) \leq f(y) \Rightarrow x < y$，因此$f$为$E$到$f(E)$的同构.

定理 70.

令E为全序集，$X \subset E$，当且仅当b为X在E上的上界（或下界），并且$(\forall c)(c \in E$与$c < b \Rightarrow (\exists x)(x \in X$与$c < x$与$x \leq b))$（或$(\forall c)(c \in E$与$c > b \Rightarrow (\exists x)(x \in X$与$c > x$与$x \geq b))$）时，$b$为$X$在$E$上的最小上界（或最大下界）.

证明：如果$(\forall c)(c \in E$与$c < b \Rightarrow (\exists x)(x \in X$与$c < x$与$x \leq b))$，同时$b$为上界，则对任意$c \in E$且$c < b$，$c$都不是$X$的上界，故$b$是最小上界；

反过来，如果b是最小上界，则b是上界，同时，对任意c $c \in E$且$c < b$，由于c不是X的上界，故存在$x \in X$，使$c < x$，同时，由于b是上界，故$x \le b$，得证.

下界的情况同理可证.

定义 110. 自由子集（*partie libre*），反链（*antichaîne d'ensemble*）

令E为偏序集，$X \subset E$，如果X的任何两个不同元素都是不可比较的，则称X为E的自由子集，或称X为E的反链.

补充定理 193.

$F = \{X | X为E的自由子集\}$，则：

（*1*）$X \in F$与$Y \in F$与$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y与x \le y))$为关于$X$、$Y$在$F$上的偏序关系；

（*2*）F按（*1*）的偏序关系排序，则$x \mapsto \{x\}$为E到F的子集的同构；

（*3*）F按（*1*）的偏序关系排序，则如果$X \in F$、$Y \in F$、$X \subset Y$，则$X \le Y$；

（*4*）F按（*1*）的偏序关系排序，则当且仅当E为全序集、E到F存在同构时，F为全序集.

证明：

（1）如果$x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y与x \le y)$，$y \in Y \Rightarrow (\exists x)(x \in X与y \le x))$，那么对任意$x \in X$，存在$y \in Y$且$x \le y$，故存在$x' \in X$且$y \le x'$，因此$x \le x'$，故$x = x'$，故$x = y$，故$X \subset Y$，同理$Y \subset X$，因此$X = Y$；另外两个条件类似补充定理81（1）可证.

（2）根据定义，$x \le y \Leftrightarrow \{x\} \le \{y\}$，得证.

（3）根据定义可证.

（4）充分性根据定义可证. 如果F为全序集，则E为全序集，故$F = \{X | (\exists x)(X = \{x\})\}$，因此$E$到$F$存在同构，必要性得证.

定义 111. 完备格（*ensemble réticulé achevé*）

如果偏序集E的任何子集在E上都有最大下界和最小上界，则称E为完备格.

补充定理 194.

如果偏序集E的任何子集在E上都有最小上界，则E为完备格.

证明：对任意$F \subset E$，令$G = \{x | x为F在E上的下界\}$，G在E上有最小上界x，如果存在$y \in F$且$y < x$，则y也是G的上界，矛盾，故x是F的下界，所以$x \in G$，故x是G的最大元，因此F有最大下界，得证.

补充定理 195.

当且仅当各偏序集都是完备格时，偏序集的积是完备格.

证明：根据定义可证.

补充定理 196. 偏序集的序数和为完备格的条件

当且仅当集族$(E_i)_{i\in I}$满足下列条件时，其序数和为完备格：

第一，I为完备格；

第二，对任意$J\subset I$，如果J没有最大元，令$d=sup\ J$，则E_d有最小元；

第三，对任意$i\in I$和任意E_i的子集，如果在E_i上有上界，则有最小上界；

第四，对任意$i\in I$，如果E_i没有最大元，则$\{x|x>i与x\in I\}$有最小元a，并且E_a有最小元，

证明：

必要性：

如果$(E_i)_{i\in I}$的序数和为完备格，对I的任意子集K，$(E_i)_{i\in K}$的序数和有最大下界x和最小上界y，故K有最大下界pr_2x和最小上界pr_2y；如果$J\subset I$，且J没有最大元，令$(E_i)_{i\in J}$的最小上界x，则$pr_2x=d$，pr_1x为d的最小元；令$E_i\times\{i\}$的最小上界为x，则$pr_2x=a$，其最小元为pr_1x.

充分性：

对$(E_i)_{i\in I}$的序数和的任意子集K，令$J=pr_2k$，则J有最小上界d. 如果$d\notin J$，则E_d有最小元a，(a,d)即为K的最小上界，如果$d\in J$，那么，若$K\cap E_d$有上界，则有最小上界y，(y,d)即为K的最小上界，若$K\cap E_d$没有上界，则E_d没有最大元，故$\{x|x>d与x\in I\}$有最小元b，并且E_b有最小元z，(z,b)即为K的最小上界.

补充定理 197.

E、F为偏序集，令$A(E,F)=\{X|X\in FE与((X,E,F)为单增函数)\}$，并为按$f\in A(E,F)$与$g\in A(E,F)$与$(\forall x)(x\in E\Rightarrow f(x)\leq g(x))$排序的关于$f$、$g$的偏序集，则当且仅当$F$为完备格时，$A(E,F)$为完备格.

证明：

充分性：

对$A(E,F)$的任何子集G，映射$x\mapsto(\{y|(y,E,F)(x)\}$的最小上界$)$的图，是$G$的最小上界，同理可证$G$有最大下界.

必要性：

对任意$X\subset F$，令$G=\{A|(\exists x)(A=E\times\{x\}与x\in X)\}$，设$G$的最小上界为$H$，对任意$z\in E$，令$u=(H,E,F)(z)$，则$u$是$X$的上界，如果$u'<u$且为$X$的上界，则令$H'=(H-\{(z,u)\})\cup\{(z,u')\}$，$H'<H$，且$H'$也是$G$的上界，矛盾，故$u$是$X$的最小上界，同理可证$X$的最大下界存在.

定义 112. 闭包（*fermeture*）

E为偏序集，E到E的映射f如果满足下列条件，则称f为在E上的闭包，在没有歧义的情况下也可以简称f为闭包：

第一，f是单增映射；

第二，对任意$x \in E$，$f(x) \geq x$；

第三，对任意$x \in E$，$f(f(x)) = f(x)$.

补充定理 198. 分配格的判定和性质

E为格，则以下五个公式等价：

第一，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow sup(x, inf(y, z)) = inf(sup(x, y), sup(x, z)))$；

第二，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow inf(x, sup(y, z)) = sup(inf(x, y), inf(x, z)))$；

第三，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) = inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x)))$；

第四，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow inf(z, sup(x, y)) \leq sup(x, inf(y, z)))$；

第五，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y))) = sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)))$.

证明：

以上五个公式分别记作R_1、R_2、R_3、R_4、R_5：

如果$sup(x, inf(y, z)) = inf(sup(x, y), sup(x, z))$，则$sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) = sup(inf(sup(x, inf(y, z)), sup(y, inf(y, z)))), inf(z, x))$，等于$sup(inf(sup(x, y), sup(x, z), y, sup(y, z)), inf(z, x))$，等于$inf(sup(x, y, z), sup(x, z), sup(y, z), sup(x, y))$，等于$inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x))$，即$R_1 \Rightarrow R3$.

同理可证$R_2 \Rightarrow R_3$.

根据定义可证$sup(z, inf(x, y)) = inf(x, sup(y, z))$. 并且，$sup(sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)), x) = sup(inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x)), x)$，左边 $= sup(x, inf(y, z))$，右边 $= inf(sup(x, z), sup(x, y), sup(x, y, z))$，等于$inf(sup(x, y), sup(x, z))$，即$R_3 \Rightarrow R_1$.

同理可证$R_3 \Rightarrow R_2$.

如果$inf(x, sup(y, z)) = sup(inf(x, y), inf(x, z))$，则$inf(z, sup(x, y)) \leq sup(x, inf(y, z))$，即$R_2 \Rightarrow R_4$.

如果$inf(z, sup(x, y)) \leq sup(x, inf(y, z))$，则$sup(inf(x, y), inf(x, z)) \geq inf(x, sup(inf(x, y), z))$，故$sup(inf(x, y), inf(x, z)) \geq inf(x, sup(y, z))$，同时，由于$inf(x, y) \leq x$、$inf(x, y) \leq sup(y, z)$，故$inf(x, y) \leq inf(x, sup(y, z))$，同理$inf(x, z) \leq inf(x, sup(y, z))$，因此$sup(inf(x, y), inf(x, z)) = inf(x, sup(y, z))$. 因此$R_4 \Rightarrow R_2$.

如果$inf(x, sup(y, z)) = sup(inf(x, y), inf(x, z))$，则$inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y))) = sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x))$，即$R_2 \Rightarrow R_5$.

如果$inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y))) = sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x))$，而$inf(z, sup(x, y)) \leq inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y)))$，$sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) \leq$

$sup(x, inf(y,z))$，故$R_5 \Rightarrow R_4$.

定义 113. 分配格（*ensemble réticulé distributif*）

E为格，如果$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow sup(x, inf(y,z)) = inf(sup(x,y), sup(x,z)))$，则称$E$为分配格.

补充定理 199.

（*1*）全序集是分配格.

（*2*）按偏序的乘积排列的分配格的乘积，是分配格.

（*3*）分配格的内部格是分配格.

（*4*）E为分配格，a是E的不可约元素，则$a \leq sup(x,y) \Rightarrow a \leq x$或$a \leq y$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定理66可证.

（3）根据定义可证.

（4）由于$inf(z, sup(x,y)) = z$，故$sup(inf(x,z), inf(y,z)) = z$，因此$inf(x,z) = z$或$inf(y,z) = z$，得证.

定义 114. 互补格（*ensemble réticulé relativement complémenté*），补（*complément relatif*）

令E为格，并且有最小元a，如果对任意$x \in E$、$y \in E$、$x \leq y$，均存在$x' \in E$，使$sup(x,x') = y$，$inf(x,x') = a$，则称E为互补格，x'称为x对y的补.

补充定理 200.

E为分配格和互补格，则对任意$x \in E$、$y \in E$、$x \neq y$，x对y的补唯一.

证明：设t、t'均为x对y的补，根据补充定理198，$inf(t,t') = sup(t,t')$，根据补充定理184（3），$t = t'$.

定义 115. 布尔网络（*réseau booléien*）

如果E是分配格，也是互补格，并且有最大元，则称E为布尔网络.

补充定理 201.

E为布尔网络，最大元为z，对任意$x \in E$，令x^*为x对z的补，则$x \mapsto x^*$为E到按在E上的偏序关系的相反关系排序的偏序集的同构，并且$(x^*)^* = x$.

证明：根据定义可证$(x^*)^* = x$. 对任意$x \leq y$，$sup(y, inf(x^*, y^*)) = sup(y, x^*)$. 根据定理63，$sup(y,x^*) \geq sup(x,x^*)$，故$sup(y,x^*) = z$，因此$sup(y, inf(x^*,y^*)) = z$，又因为$inf(y, inf(x^*,y^*)) = a$，因此$inf(x^*,y^*) = y^*$，所以$x^* \geq y^*$，得证.

补充定理 202.

对任意集合A，按包含关系排序的$\mathcal{P}(A)$，是布尔网络.

证明：根据定义可证.

补充定理 203.

E为布尔网络，且为完备格，$(x_i)_{i\in I}$为E的元素族，求证：$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) = sup(inf(y, x_i))_{i\in I}$.

证明：
令E的最大元为z，对任意$x \in E$，令x^*为x对z的补．则：
$inf(y, sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})) = sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，
$inf(y, sup(y^*, sup(x_i)_{i\in I})) = inf(y, sup(x_i)_{i\in I})$.
根据定理63，$inf(y, sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})) \leq inf(y, sup(y^*, sup(x_i)_{i\in I}))$，
因此$sup(inf(y, x_i))_{i\in I}) \leq inf(y, sup(x_i)_{i\in I})$.
同时，$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) \leq y$，
$sup(inf(y, x_i))_{i\in I} \leq y$.
对任意$i \in I$，$inf(y, x_i) \leq sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，
根据定理63，$sup(y, x_i) \leq sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，
因此$x_i \leq sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，
因此，$sup(x_i)_{i\in I} \leq sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，
所以$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) \leq inf(y, sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I}))$，
故$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) \leq sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$.

补充定理 204.

令E为偏序集，a、b是E的元素，则$x \in E$与$a \leq x$与$x \leq b$、$x \in E$与$a < x$与$x \leq b$、$x \in E$与$a \leq x$与$x < b$、$x \in E$与$a < x$与$x < b$均为关于x的集合化公式.

证明：根据证明规则52可证.

定义 116. 闭区间（*interval fermé*），左半开区间（*intervalle semi-ouvert à gauche*），右半开区间（*intervalle semi-ouvert à droite*），开区间（*intervalle ouvert*）

令E为偏序集，a、b是E的元素，$a \leq b$，则称$\{x | x \in E$与$a \leq x$与$x \leq b\}$为在E上以a为起点、以b为终点的闭区间，记作$[a, b]$；$\{x | x \in E$与$a < x$与$x \leq b\}$为在E上以a为起点、以b为终点的左半开区间，记作$]a, b]$；$\{x | x \in E$与$a \leq x$与$x < b\}$为在E上以a为起点、以b为终点的右半开区间，记作$[a, b[$；$\{x | x \in E$与$a < x$与$x < b\}$为在E上以a为起点、以b为终点的开区间，记作$]a, b[$．在没有歧义的情况下，也可以省略“在E上”字样.

定义 117. 左无穷闭区间（*interval fermé illimité à gauche*），左无穷开区间（*intervalle semi-ouvert à gauche*），右无穷闭区间（*interval fermé illimité à droite*），右无穷开区间（*intervalle semi-ouvert à droite*）

令E为偏序集，a是E的元素，则称$\{x|x \in E$与$x \leq a\}$为在E上以a为终点的左无穷闭区间，记作$]\leftarrow, a]$；$\{x|x \in E$与$x < a\}$为在E上以a为终点的左无穷开区间，记作$]\leftarrow, a[$；$\{x|x \in E$与$a \leq x\}$为在E上以a为起点的右无穷闭区间，记作$[a, \rightarrow[$；$\{x|x \in E$与$a < x\}$为在E上以a为起点的右无穷开区间，记作$]a, \rightarrow[$. 在没有歧义的情况下，也可以省略"在E上"字样.

定义 118. 区间（*interval*）

左半开区间、右半开区间、闭区间、开区间、左无穷闭区间、左无穷开区间、右无穷闭区间、右无穷开区间统称为区间.

定理 71.

格的任何两个区间的交集和并集，都是区间.

证明：根据定义可证.

定义 119. 无间隙的偏序集（*ensemble ordonné sans trou*）

E为偏序集，且至少有一对可比较的不同元素，并且，对E的任何一对可比较的元素x、y，如果$x < y$，则$]x, y[\neq \varnothing$，则称E为无间隙的.

定义 120. 离散的偏序集（*ensemble ordonné dispersé*）

E为偏序集，如果E的任何偏序子集，都不是无间隙的，则称E为离散的.

补充定理 205.

离散集合的任何偏序子集都是离散的.

证明：根据定义可证.

定义 121. 开集（*ensemble ouvert*），正则开集（*ensemble ouvert régulier*）

E为偏序集，如果E的子集U满足对任意$x \in U$，$[x, \rightarrow[\subset U$，则称$U$为开集；如果$U$为开集，且不存在开集$V$，满足$U \neq V$且$U$是$V$的共尾子集，则称$U$为正则开集.

补充定理 206.

（*1*）开集族的并集仍是开集.

（*2*）E为偏序集，对任意$x \in E$，$[x, \rightarrow[$为开集.

证明：根据定义可证.

补充定理 207.

E为偏序集，则：

（*1*）对任意开集$U\subset E$，存在唯一的正则开集$\tilde{U}$，使U为$\tilde{U}$的共尾子集.

（*2*）U为开集，$x\in E$，如果对任意$y\geq x$，均存在$z\in U$使$y\leq z$，则$x\in\tilde{U}$.

（*3*）$\mathcal{P}(E)$按包含关系排序，则映射$U\mapsto\tilde{U}$为单增映射.

（*4*）$\mathcal{P}(E)$按包含关系排序，则映射$U\mapsto\tilde{U}$为闭包.

（*5*）对开集U、V，如果$U\cap V=\varnothing$，则$\tilde{U}\cap\tilde{V}=\varnothing$.

证明：

（1）令$K=\{V|(V\text{为开集})\text{与}(U\neq V)\text{与}(U\text{是}V\text{的共尾子集})\}$，$\tilde{U}=\bigcup\limits_{X\in K}X$，根据补充定理206（1），$\tilde{U}$为开集；根据定义可证，$\tilde{U}$为正则开集.

同时，如果存在正则开集U'也满足条件，则$U'\subset\tilde{U}$，根据正则开集的定义，$U'=\tilde{U}$，$\tilde{U}$的唯一性得证.

（2）由于$U\cup[x,\rightarrow[$也是开集并且U是其共尾子集，根据补充定理207（1）的证明过程，$U\cup[x,\rightarrow[\subset\tilde{U}$，得证.

（3）设$U\subset V$，$x\in\tilde{U}$，对任意$y\geq x$，由于$y\in\tilde{U}$，故存在$z\geq y$且$z\in U$，因此$z\in V$，根据补充定理207（2），$x\in\tilde{V}$，因此映射$U\mapsto\tilde{U}$为单增映射.

（4）根据补充定理207（1）、补充定理207（3）可证.

（5）$U\mapsto\tilde{U}$为单增映射．若存在$a\in\tilde{U}$且$a\in\tilde{V}$，则存在$x\geq a$且$x\in U$，因此$x\in\tilde{V}$，故存在$y\geq x$且$y\in V$，因此$y\in U$，矛盾，得证.

补充定理 208.

E为偏序集，U、V为正则开集，则$U\cap V$为正则开集.

证明：令$\tilde{X}$为正则开集且使U为$\tilde{X}$的共尾子集，f为映射$X\mapsto\tilde{X}$.

根据补充定理207（3），$f(U\cap V)\subset f(U)$，$f(U\cap V)\subset f(V)$，故$f(U\cap V)\subset f(U)$．根据补充定理207（1），$f(U)=U$、$f(V)=V$，因此$f(U\cap V)\subset U\cap V$．又因为$U\cap V\subset f(U\cap V)$，得证.

补充定理 209.

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，并按包含关系排序：

（*1*）$\varnothing$为$R(E)$的最小元，E为$R(E)$的最大元.

（*2*）$R(E)$为完备格.

（*3*）$R(E)$为互补格.

（*4*）对任意$U\in R(E)$、$V\in R(E)$，$U\cap V\in R(E)$，且$inf(U,V)=U\cap V$.

（*5*）$R(E)$为分配格，

（*6*）$R(E)$布尔网络.

（*7*）当且仅当E非空且为右方向集时，$R(E)$为仅有两个元素的结合.

证明：对于E的子集X，令$\tilde{X}$表示正则开集，并且X为其共尾子集：

（1）根据定义可证.

（2）对E的任意子集族，令其并集为F，则$\tilde{F}$为其上界，假设存在$H \in R(E)$、$F \subset H$且$H \subset \tilde{F}$，则$H = \tilde{H}$，并且，根据补充定理207（3），$\tilde(F) \subset \tilde{H}$，故$H = \tilde{F}$，即$\tilde{F}$是其最小上界，故$E$为完备格.

（3）设$X \in R(E)$，$Y \in R(E)$，令$Z = \{x|x \in Y$与$(\forall y)(y \in X \Rightarrow ($非$x \leq y))\}$，则$Z$为开集，根据补充定理207（2），$Y \subset X \cup \tilde{Z}$，同时，$X \cap Z = \varnothing$，根据补充定理207（5），$X \cap \tilde{Z} = \varnothing$. 又因为$Z \subset Y$，故$\tilde{Z} \subset Y$，又$X \subset Y$，因此$Y = X \cup \tilde{Z}$，即$\tilde{Z}$是$X$对$Y$的补，因此$E$为互补格.

（4）根据补充定理208可证.

（5）设$X \in R(E)$，$Y \in R(E)$，$Z \in R(E)$，令$x \in Z \cap sup(X, Y)$，故存在$y \geq x$使$y \in X \cap Y$，同时$y \in Z$，又因为$Z \cap (X \cup Y) \subset X \cup (Y \cap Z)$，故$y \in sup(X, Y \cap Z)$，根据补充定理198，$E$为分配格.

（6）根据定义可证.

（7）如果E不是右方有向集，则存在x、y，使$[x, \rightarrow [\cap[y, \rightarrow [= \varnothing$，根据补充定理207（5），$R(E)$至少有两个非空集元素；反过来，如果$E$是右方有向集，设$U \in R(E)$，且$U \neq \varnothing$. 令$x \in U$，对任意$y \in E$，对任意$z \geq y$，存在$t$为$\{x, z\}$的上界，则$t \in U$，根据补充定理207（2），$y \in U$，故$U = E$，因此$R(E) = \{\varnothing, E\}$.

定义 122. 区间到正则开集的规范映射（*application canonique de interval dans ensemble ouvert régulier*）

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$. 对任意$x \in E$，令$r(x)$为正则开集，且$[x, \rightarrow [$是其共尾子集，则$r$称为$E$到$R_0(E)$的规范映射.

补充定理 210.

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$，并按包含关系的相反关系排序. r为E到$R_0(E)$的规范映射，则r为单增映射，并且$r(E)$的像是$R_0(E)$的共尾子集.

证明：根据补充定理207（3），r为单增映射. 对任意$X \in R_0(E)$，$x \in X$，$r(x) \subset X$，故$r(E)$的像是$R_0(E)$的共尾子集.

补充定理 211.

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$，并按包含关系的相反关系排序. r为E到$R_0(E)$的规范映射，则：

（1）$x \in E$、$y \in E$，则当且仅当对任意$z \geq y$且$z \in E$，$\{x, z\}$在E上均有上界时，$y \in r(x)$.

（*2*）$x \in E$、$y \in E$，则当且仅当存在$z \geq y$且$z \in E$，使$[x, \to [\cap [z, \to [= \varnothing$时，$y \notin r(x)$.

（*3*）$x \in E$、$y \in E$，如果$x \in r(y)$、$y \in r(x)$，则$r(x) = r(y)$.

证明：

（1）如果$y \in r(x)$，则$[y, \to [\subset r(x)$，由于$[x, \to [$是$r(x)$的共尾子集，故对任意$z \geq y$，$\{x, z\}$在E上均有上界；反过来，如果对任意$z \geq y$，$\{x, z\}$在E上均有上界，根据补充定理207（2），$y \in r(x)$.

（2）根据补充定理211（1）可证.

（3）如果$x \in r(y)$、$y \in r(x)$，则$[x, \to [\subset r(y)$，$[y, \to [\subset r(x)$，根据补充定理207（3），$r(y) \subset r(x)$，$r(x) \subset r(y)$，得证.

定义 123. 右方无向集（*ensemble afiltrant à droite*）

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$. 对任意$x \in E$，令$r(x)$为区间$[x, \to [$相应的正则开集. 如果$r$为单射，则称$E$为右方无向集.

补充定理 212. 偏序集为右方无向集的条件

E为偏序集，当且仅当同时满足下列两个条件时，E为右方无向集：

第一，对任意$x \in E$、$y \in E$、$x < y$，均存在$z \in E$、$x < z$，使$[y, \to [\cap [z, \to [= \varnothing$；

第二，令x、y是E的一对不可比较的元素，那么，或者存在$x' \geq x$，使$[x', \to [\cap [y, \to [= \varnothing$，或者存在$y' \geq y$，使$[x, \to [\cap [y', \to [= \varnothing$.

证明：

令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$. r为E到$R_0(E)$的规范映射，

根据补充定理211（2），两个条件等价于$x \notin r(y)$或$y \notin r(x)$. 如果r为单射，即当$x \neq y$时，$r(x) \neq r(y)$，根据补充定理211（3），$x \notin r(y)$或$y \notin r(x)$. 反过来，当$x \neq y$时，如果$x \notin r(y)$或$y \notin r(x)$，则$r(x) \neq r(y)$，得证.

定义 124. 右方分叉集（*ensemble fourchu à droite*）

E为偏序集，如果对任意$x \in E$，均存在$y \in E$、$z \in E$并且$x \leq y$、$x \leq z$，使$[y \to [\cap [z, \to [= \varnothing$，在则称$E$为右方分叉集.

补充定理 213.

（*1*）右方分叉集没有极大元.

（*2*）E为右方分叉集，$x \in E$，则存在$y \in E$、$z \in E$，使$x < y$、$x < z$且y和z不可比较.

（*2*）没有极大元的右方无向集，是右方分叉集.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

（3）根据补充定理212可证.

定义 125. 右方分支集（*ensemble ramifié à droite*），完全右方分支集（*ensemble complément ramifié à droite*）

E为偏序集，如果对任意$x \in E$、$y \in E$、$x < y$，均存在$z \in E$、$x < z$，使y和z是不可比较的，则称E为右方分支集．没有极大元的右方分支集，称为完全右方分支集．

补充定理 214.

右方无向集都是右方分支集．

证明：根据补充定理212可证.

习题 77.

E为偏序集，且至少有一对可比较的不同元素，令R为$x \in E$与$y \in E$与$x < y$，求证：R满足偏序关系前两个条件，不满足第三个条件．

证明：由于E的偏序具有传递性，因此$x \le y$与$y \le z \Rightarrow x \le z$．如果$x < y$、$y < z$且$x = z$，则$x = y$，矛盾，故$R$具有传递性；由于$x < y$与$y < x$为假，故第二式为真．但$E$的两个不同的可比较的元素$x$、$y$若满足$x < y$，而$x < x$、$y < y$为假，故第三式为假．

习题 78.

（*1*）E为预序集，$x \le y$为在E上的预序关系，令R为公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y与x \le y)))$．求证：$R$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的预序关系．

（*2*） f为E到E/S的规范映射，求证：

对任意E/S的商预序集到预序集F的映射g，如果$g \circ f$为单增映射，则g为单增映射．

当且仅当S满足下列条件时，f为单增映射：

$(x \le y与x \equiv x'(modS)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E与y \equiv y'(modS)与x' \le y')$.

如果$x \le y$关于x同S相容，则S同$x \le y$弱相容．

（*3*） E_1、E_2为预序集，令S_1为公式$pr_1 z = pr_1 z'$，求证：S_1在z、t上同在$E_1 \times E_2$上的预序关系的乘积$z \le t$弱相容；并且，令h_1为$E_1 \times E_2$到$(E_1 \times E_2)/S_1$的规范映射，$pr_1 = f_1 \circ h_1$，则f_1是$(E_1 \times E_2)/S_1$到E_1的同构．

（*4*）E为偏序集，$x \le y$ 为在E上的偏序关系，S为在E上的等价关系，令R为公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y与x \le y)))$，且$x \le y$与$y \le z$与$x \equiv z(modS) \Rightarrow x \equiv y(modS)$．求证：$R$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的偏序关系．

（*5*）给出元素数目为4的全序集E以及在E上的等价关系S，使E/S为一个偏序集，但“$(x \le y与x \equiv x'(modS)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E与y \equiv y'(modS)与x' \le y')$”、“$x \le y与y \le z与x \equiv z(modS) \Rightarrow x \equiv y(modS)$”都不成立．

（6）E、F为偏序集，f为E到F的单增函数，S为公式$f(x)=f(y)$与$x\in E$与$y\in E$，则$x\leq y$与$y\leq z$与$x\equiv z(modS)\Rightarrow x\equiv y(modS)$.

令R为公式$X\in E/S$与$Y\in E/S$与$((\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y)))$，$E/S$为按$R$排序的偏序集．当且仅当$x'\in E$与$x\leq y$与$f(x)=f(x')\Rightarrow(\exists y')(y'\in E$与$x'\leq y'$与$f(y)=f(y'))$时，$(x\leq y$与$x\equiv x'(modS))\Rightarrow(\exists y')(y'\in E$与$y\equiv y'(modS)$与$x'\leq y')$.

令$f=g\circ h$，h为E到E/S的规范映射，则当且仅当下列两个条件同时成立时，g为E/S到$f\langle E\rangle$的同构：

第一，$x'\in E$与$x\leq y$与$f(x)=f(x')\Rightarrow(\exists y')(y'\in E$与$x'\leq y'$与$f(y)=f(y'))$；

第二，$x\in E$与$y\in E$与$f(x)\leq f(y)\Rightarrow(\exists x')(\exists y')(f(x)=f(x')$与$f(y)=f(y')$与$x'\leq y'$.

证明：

（1）即补充证明规则81（1）.

（2）即补充证明规则82、补充证明规则83.

（3）根据定义可证S_1在z、t上同在$E_1\times E_2$上的预序关系的乘积$z\leq t$弱相容，根据补充证明规则82（1）可证f_1是单增映射，即$X\leq Y\Rightarrow f_1(X)\leq f_1(Y)$.

反过来，如果$f_1(X)\leq f_1(Y)$，对任意$x\in X$，设$y\in Y$，令$y'=(pr_1y,pr_2x)$，则$y'\in Y$，且$pr_1x\leq pr_1y'$，故$x\leq y'$，因此$X\leq Y$.

（4）即补充证明规则81（2）.

（5）设a、b、c、d互不相等，令$E=\{a,b,c,d\}$，$S=\{(a,b),(b,a),(a,d),(d,a),(b,d),(d,b),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$，在$E$上的偏序的图为$\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$，则符合要求.

（6）第一部分、第二部分根据定义可证.

对于第三部分：

如果g为E/S到$f\langle E\rangle$的同构，则当$X\in E/s$、$Y\in E/s$时，$X\leq Y\Leftrightarrow g(X)\leq g(Y)$．对任意E的元素$x$、$y$、$x'$，如果$x\leq y$以及$x\equiv x'(modS)$，则$g(h(x))\leq g(h(y))$，故$h(x)\leq h(y)$，因此$h(x')\leq h(y)$，因此存在$y'\in h(y)$且$x'\leq y'$；同时，如果$f(x)\leq f(y)$，则$g(h(x))\leq g(h(y))$，故对任意$x'\in h(x)$，存在$y'\in h(y)$且$x'\leq y'$.

反过来，如果两个条件成立，若$X\leq Y$，则对任意$x\in X$，存在$y\in Y$，使$x\leq y$，故$g(h(x))\leq g(h(y))$，因此$g(X)\leq g(Y)$；如果$g(X)\leq g(Y)$，则对任意$x\in X$、$y\in Y$，有$X=h(x)$、$Y=h(y)$，故$f(x)\leq f(y)$，因此，存在x'、y'，使$f(x)=f(x')$、$f(y)=f(y')$且$x'\leq y'$，故存在$y''\in Y$使$x\leq y''$，因此$X\leq Y$，得证.

习题 79.

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集非空族：

（1）令F为集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和，$G=\{(x,y)|(x,y)$为有序对与$x\in F$与$y\in F$与$(pr_2x<pr_2y$或$(pr_2x=pr_2y$与在E_{pr_2x}上$pr_1x\leq pr_1y))\}$，求证：

G为在F上的偏序.

令S为公式$x \in F$与$y \in F$与$pr_2 x = pr_2 y$，则：

第一，$(x \leq y$与$x \equiv x'(modS)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$与$y \equiv y'(modS)$与$x' \leq y')$；

第二，$x \leq y$与$y \leq z$与$x \equiv z(modS) \Rightarrow x \equiv y(modS)$.

E/S的商偏序集，同构于I.

（2）L为偏序集，I为偏序集族$(J_l)_{l \in L}$的序数和，令F_l为偏序集族$(E_i)i \in J_l$的序数和，求证：集族$(E_i)_{i \in I}$的序数和同构于集族$(F_l)l \in L$的序数和．但令I为全序集$\{1,2\}$，E_1、E_2为偏序集，$F_2 = E_1$，$F_1 = E_2$，偏序集族$(_E i)_{i \in I}$的序数和不同构于偏序集族$(F_i)_{i \in I}$的序数和．（1）求证：当且仅当I为右方有向集且对I的任意极大元i，并且E_i均为右方有向集时，F为右方有向集.

（2）求证：当且仅当I为全序集，且对任意$i \in I$，E_i均为全序集时，F为全序集.

（3）求证：当且仅当满足下列条件时，F为格：

第一，I为格，并且，对任意$i \in I$、$j \in I$，如果i和j是不可比较的，则$E_{sup(i,j)}$有最小元，$E_{inf(i,j)}$有最大元；

第二，对任意$i \in I$，如果$x \in E_i$，$y \in E_i$，且$\{x, y\}$在E_i上有上界（或下界），则$\{x, y\}$在E_i上有最小上界（或最大下界）；

第三，对任意$i \in I$，如果$x \in E_i$，$y \in E_i$，且$\{x, y\}$在E_i上没有上界（或下界），则$\{k | k \in I$与$k > i\}$（或$\{k | k \in I$与$k < i\}$）有最小元（或最大元）j，且E_j有最大元（或最小元）.

证明：

（1）第一部分即补充定理167.

第二部分根据定义可证.

第三部分：令g为映射$x \mapsto E_x \times x(x \in I)$，则$g$为双射，且$g^{-1}$为$E/S$到$I$的同构，

（2）前一部分即补充定理169．设a、b、c互不相等，$E_1 = \{a\}$，$E_2 = \{b, c\}$，均按偏序关系$x = y$排序，则偏序集族$(E_i)_{i \in I}$的序数和不同构于偏序集族$(F_i)_{i \in I}$的序数和.

（3）即补充定理192（1）.

（4）即补充定理192（2）.

（5）即补充定理192（3）.

习题 80.

E为偏序集，$(E_i)_{i \in I}$为E的划分，并且均为E关于公式$(x = y$或x和y是不可比较的$)$的连通分量：

（1）求证：如果$i \leq k$，$x \in E_i$，$y \in E_k$，则x和y是可比较的；并且，如果$x \leq y$，$y' \in E_k$，$y \neq y'$，则$x \leq y'$.

（2）令S为公式$x \in F$与$y \in F$与$(\exists i)(i \in I$与$x \in Ei$与$y \in E_i)$，求证：$x \leq y$关于x、y同S相容，且E/S的商预序集为全序集.

（3）F、G为全序集，E为F和G两个全序集的乘积，那么，E的连通分量是什么？

证明：

（1）根据定义可证x和y是可比较的；如果$y' < x$，则$y' \le y$，又因为$y \in E_k$、$y' \in E_k$，故$y = y'$，矛盾，因此，$x \le y'$.

（2）根据习题80（1）可证$x \le y$关于y同S相容，同理可证$x \le y$关于x同S相容，根据习题80（1）和定义，可证E/S的商预序集为全序集.

（3）如果F、G分别有最小元a、b和最大元c、d，则E的连通分量为$\{(a,b)\}$、$\{(c,d)\}$、$E - \{(a,b),(c,d)\}$；如果E、F至少有一个没有最小元，并且至少有一个没有最大元，则E的连通分量为E；如果E、F至少有一个没有最小元，分别有最大元a、b，或者至少有一个没有最大元，分别有最小元a、b，则E的连通分量为$\{(a,b)\}$、$E - \{(a,b)\}$.

注：习题80中的概念“联通分量”，涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 81.

$F = \{X | X$为E的自由子集$\}$，求证：

（1）$X \in F$与$Y \in F$与$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$与$x \le y))$为关于$X$、$Y$在$F$上的偏序关系；

（2）F按（1）的偏序关系排序，则$x \mapsto \{x\}$为E到F的子集的同构；

（3）F按（1）的偏序关系排序，则如果$X \in F$、$Y \in F$、$X \subset Y$，则$X \le Y$；

（4）F按（1）的偏序关系排序，则当且仅当E为全序集、E到F存在同构时，F为全序集.

证明：即补充定理193.

习题 82.

E、F为偏序集，令$\mathcal{A}(E,F) = \{X | X \in FE$与$((X,E,F)$为单增函数$)\}$，并为按$f \in \mathcal{A}(E,F)$与$g \in \mathcal{A}(E,F)$与$(\forall x)(x \in E \Rightarrow f(x) \le g(x))$排序的关于$f$、$g$的偏序集：

（1）E、F、G均为偏序集，$F \times G$为按$x \in F \times G$与$y \in F \times G$与$pr_1 x \le pr_1 y$与$pr_2 x \le pr_2 y$排序的关于x、y的偏序集，求证：$\mathcal{A}(E, F \times G)$同构于偏序集$\mathcal{A}(E,F)$和$\mathcal{A}(E,G)$的积.

（2）E、F、G均为偏序集，$E \times F$为按$x \in E \times F$与$y \in E \times F$与$pr_1 x \le pr_1 y$与$pr_2 x \le pr_2 y$排序的关于x、y的偏序集，求证：$\mathcal{A}(E \times F, G)$同构于$\mathcal{A}(E, \mathcal{A}(F,G))$.

（3）$E \ne \varnothing$，求证：当且仅当F为格时，$\mathcal{A}(E,F)$为格.

（4）$E \ne \varnothing$，$F \ne \varnothing$，求证：当且仅当满足下列条件之一时，$\mathcal{A}(E,F)$为全序集：第一，F的元素数目为1；第二，E的元素数目为1且F为全序集；第三，E为全序集，F的元素数目为2并且为全序集.

证明：

（1）映射$X \mapsto (x \mapsto pr_1(X,E,F \times G)(x)$的图$, x \mapsto pr_2(X,E,F \times G)(x)$的图$)$，为其同构，得证.

（2）映射$X \mapsto (x \mapsto (y \mapsto (X, E \times F, G)(x,y)$的图$)$的图$)$，为其同构，得证.

（3）类似补充定理197可证.

（4）充分性根据定义可证.

必要性：$\mathcal{A}(E,F)$为全序集，则F为全序集．如果F的元素数目大于2，E的元素数目大于1，设$x\in E$，$y\in E$，且$x\neq y$，$\{a,b,c\}\in F$，且$a<b$，$b<c$，则对任意$y\in E$，令$f(x)=b$，对任意$z\leq x$，令$g(z)=a$，对任意$u\geq y$，令$g(u)=c$，对其他$v\in E$，令$g(v)=b$，则f和g是不可比较的，矛盾，故E的元素数目为1；

如果F的元素数目为2，设$\{a,b\}\in F$，且$a<b$，如果$x\in E$，$y\in E$，且x和y不可比较，则对任意$z\leq x$，令$f(z)=a$，对其他$v\in E$，令$f(v)=b$，对任意$z\leq y$，令$g(z)=a$，对其他$v\in E$，令$g(v)=b$，则f和g是不可比较的，矛盾，故E为全序集．必要性得证.

注：习题82中的概念“元素数目”，涉及尚未介绍的知识.

习题 83.

E为偏序集，F为元素数目不少于2的偏序集，求证：当且仅当E为关于公式“$(x=y$或x和y是不可比较的$)$”的连通分量时，下列公式为真：

$(f$为E到F的映射$)$与$(f$是单增映射$)$与$(f$是单减映射$)\Rightarrow(f$是常数映射$)$.

特别是，当E为右方有向集或左方有向集时，满足上述条件.

证明：根据定义可证.

注：习题83中的概念“联通分量”，涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 84.

E、F为偏序集，f为E到F的单增映射，g为F到E的单增映射，$A=\{x|x\in E$与$g(f(x))=x\}$，$B=\{y|y\in F$与$f(g(y))=y\}$，求证：A同构于B.

证明：当$x\in A$时，$f(x)=f(g(f(x)))$，故$f(x)\in B$，因此，令f'为f通过A和B导出的函数，类似的，可以令g'为g通过B和A导出的函数．则f'和g'为单增映射，$f'\circ g'=Id_B$，$g'\circ f'=Id_A$，根据定理20，f'和g'均为双射，得证.

习题 85.

E为格，I、J均为有限集合，对任意$i\in I$、$j\in J$，$(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$为$E$的元素族，求证：$sup(inf(x_{i,j})_{i\in I})_{j\in J}\leq inf(sup(x_{i,j})_{j\in J})_{i\in I}$.

证明：

E为格，I、J均为有限集合，故$inf(x_{i,j})_{i\in I}$、$sup(x_{i,j})_{j\in J}$存在，$sup(inf(x_{i,j})_{i\in I})_{j\in J}$、$inf(sup(x_{i,j})_{j\in J})_{i\in I}$也存在.

对任意$i\in I$、$j\in J$，$(inf(x_{i,j})_{i\in I}\leq x_{i,j}$，根据定理63，对任意$i\in I$，$sup(inf(x_{i,j})_{i\in I})_{j\in J}\leq sup(x_{i,j})_{j\in J}$，得证.

注：习题85涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 86.

E、F为格，f为E到F的映射，求证：当且仅当对任意$x \in E$、$y \in E$均有$f(inf(x,y)) \leq inf(f(x),f(y))$时，$f$为单增函数．$N$为自然数集，$N \times N$为偏序集$N$和$N$的乘积，并试给出$N \times N$到$N$的单增映射$f$，且存在$(x,y)$，使$f(inf(x,y)) = inf(f(x),f(y))$不成立．

证明；

必要性：如果$x \leq y$，则$f(x) \leq f(y)$，故$f(inf(x,y)) \leq inf(f(x),f(y))$．

充分性：如果$x \leq y$，则$f(x) \leq inf(f(x),f(y))$，故$f(x) \leq f(y)$．

不成立的例子：令f为$(x,y) \mapsto x+y$，$x = (0,1)$，$y = (1,0)$，则$f(inf(x,y)) = 0$，$inf(f(x),f(y)) = 1$．

注：习题86涉及尚未介绍的“自然数”知识．

习题 87.

（1）求证：如果偏序集E的任何子集在E上都有最小上界，则E为完备格．

（2）求证：当且仅当各偏序集都是完备格时，偏序集的积是完备格．

（3）求证：当且仅当集族$(E_i)_{i \in I}$满足下列条件时，其序数和为完备格：

第一，I为完备格；

第二，对任意$J \subset I$，如果J没有最大元，令$d = sup\ J$，则E_d有最小元；

第三，对任意$i \in I$和任意E_i的子集，如果在E_i上有上界，则有最小上界；

第四，对任意$i \in I$，如果E_i没有最大元，则$\{x|x > i$与$x \in I\}$有最小元a，并且E_a有最小元，

（4）E、F为偏序集，令$A(E,F) = \{X|X \in FE$与$((X,E,F)$为单增函数$)\}$，并为按$f \in A(E,F)$与$g \in A(E,F)$与$(\forall x)(x \in E \Rightarrow f(x) \leq g(x))$排序的关于$f$、$g$的偏序集，求证：当且仅当$F$为完备格时，$A(E,F)$为完备格．

证明：

（1）即补充定理194.

（2）即补充定理195.

（3）即补充定理196.

（4）即补充定理197.

习题 88.

E为A到A的映射集合，$F = \{X|X \subset A$与$f(X) \subset X$与$f \in E\}$，且为按包含关系排序的偏序集，则F为完备格．

证明：F的任何子集的最小上界，是其并集，得证．

习题 89.

E为偏序集，f为闭包；令F为f的不动点集合：

（1）求证：

对任意$x \in E$，令$F_x = \{y | y \in F与x \leq y\}$，则其有最小元$f(x)$.

反过来，如果$G \subset E$，对任意$x \in E$，$\{y | y \in G与x \leq y\}$均有最小元$g(x)$，则g为闭包，且G为g的不动点集合.

（2）E为完备格，求证：F的任何非空子集在E上的最大下界属于F.

（3）如果E为格，求证：对任意$x \in E$、$y \in E$，$f(sup(x, y)) = sup(f(x), f(y))$.

证明：

（1）$f(x) \geq x$，因此$f(x) \in F_x$；设$y \in F_x$，则$x \leq y$，故$f(x) \leq f(y)$，$y \geq f(x)$，故$f(x)$为最小元．反过来，根据定义可证对任意$x \in E$ ，$g(x) \geq x$，$g(x) \in G$，故$g(g(x)) = g(x)$，同时，当$x \leq y$时，$\{z | z \in G与y \leq z\} \subset \{z | z \in G与x \leq z\}$，故$g(x) \leq g(y)$，因此，$G$为闭包．另外，对任意$x \in G$，$x = g(x)$，同时，对任意$x = g(x)$，$x \in G$，得证．

（2）如果该子集的最大下界x不属于F，则$f(x) > x$，且$f(x)$也是该子集的下界，矛盾．

（3）设$z = sup(x, y)$，对任意u，如果使$f(x) \leq u$，$f(y) \leq u$，则$x \leq f(u)$，$y \leq f(u)$，故$z \leq f(u)$，因此$f(z) \leq u$，所以$f(z) = sup(f(x), f(y))$，得证．

习题 90.

$R \subset A \times B$，对$X \subset A$、$Y \subset B$，令映射$r(X) = \{y | y \in B与(\forall x)(x \in X \Rightarrow (x, y) \in R)\}$，$s(Y) = \{x | x \in A与(\forall y)(y \in Y \Rightarrow (x, y) \in R)\}$，$\mathcal{P}(A)$、$\mathcal{P}(B)$为按包含关系排序的偏序集，求证：$r$、$s$为单减映射，并且映射$s \circ r$、$r \circ s$均为闭包.

证明：根据定义可证，r、s为单减映射，因此，$s \circ r$、$r \circ s$为单增映射．对任意$x \in X$，令$Y = r(X)$，则对任意$y \in Y$，$(x, y) \in R$，故$x \in s(r(X))$，因此$s(r(X)) \geq X$，同理$r(s(Y)) \geq Y$．因此$r(s(r(X))) \geq r(X)$，同时，由于r为单减函数，故$r(s(r(X))) \leq r(X)$，因此$r(s(r(X))) = r(X)$，故$s(r(s(r(X)))) = s(r(X))$，同理$r(s(r(s(Y)))) = r(s(Y))$，根据定义，$s \circ r$、$r \circ s$均为闭包．

习题 91.

（1）E为偏序集，对任意$X \subset E$，令$r(X) = \{A | A为X在E上的上界\}$，$s(X) = \{A | A为X在E上的下界\}$，映射i为$x \mapsto s(\{x\})$.

求证：

令$E' = \{X | X \subset E与X = s(r(X))\}$，并按包含关系排序，则$E'$是完备格.

并且，映射i是E到E'的一个子集的同构.

同时，对任意$x_i \in E$，如果$\{x_i\}$有最小上界a，则在E'上，$i(a)$是$\{i(\{x_i\})\}$的最小上界.

（2）求证：对任意$X \subset E$，$s(r(X))$是$i(X)$在E'上的最小上界．同时，确定对E到完备格F的任意单增映射f，是否存在唯一的E'到F的单增映射f'，使$f = f' \circ i$，并且，对E'的任意子集Z，均有$f'(sup\ Z) = sup(f'(Z))$.

（3）如果E为全序集，求证：E'为全序集.

证明：

（1）令$f = s \circ r$，根据定义，f是闭包．因此，对E'的子集I，令$J = \bigcup_{X \in I} X$，$f(J)$为I的最小上界．根据补充定理194，E'是完备格．

根据定义，$s \circ r$、$r \circ s$为增函数，r为减函数，故$s(r(s(\{x\}))) \geq s(\{x\})$，$s(r(s(\{x\}))) \leq s(\{x\})$，所以$s(r(s(\{x\}))) = s(\{x\})$，因此映射$i$是$E$到$E'$的子集$i(E)$的双射．同时，如果$x \leq y$，则$s(\{x\}) \leq s(\{y\})$，故$i$是$E$到$i(E)$的同构．根据定义可证，$i(a)/\{i(\{xi\})\}$的最小上界．

（2）根据定义，$s(r(\{x\})) = s(\{x\})$，由于$s \circ r$为增函数，因此，对任意$x \in X$，$s(r(X)) \geq s(\{x\})$．如果对任意$x \in X$，$Y \geq s(\{x\})$且$s(r(Y) = Y$，则$Y \geq \bigcup_{x \in X} s(\{x\})$，因此$Y \geq s(r(\bigcup_{x \in X} s(\{x\})))$，又因为$r(\bigcup_{x \in X} s(\{x\})) = r(X)$，故$s(r(X)) = (r(\bigcup_{x \in X} s(\{x\})))$，因此$Y \geq s(r(X))$，故$s(r(X))$是$i(X)$在$E'$上的最小上界．

设a、b、c互不相等，令E={a, b, c}，按({a, a}, {b, b}, {c, c}, {a, c}, {b, c})排序，F={a, b, c}，按({a, a}, {b, b}, {c, c}, {a, c}, {b, c}, {a, b})排序，映射$f = Id_E$，$Z = \{\{a\}, \{b\}\}$，则$f'(sup\ Z) = c$，$sup(f'(Z)) = b$，故为反例．

（3）根据定义可证．

注：原书习题91（2）后半部分是假命题．

习题 92.

E为格：

（1）求证：如果以下两个条件之中任何一个成立，则对任意$x \in E$、$y \in E$、$z \in E$，均有$sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) = inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x))$：

第一，对任意$x \in E$、$y \in E$、$z \in E$，$sup(x, inf(y, z)) = inf(sup(x, y), sup(x, z))$；

第二，对任意$x \in E$、$y \in E$、$z \in E$，$inf(x, sup(y, z)) = sup(inf(x, y), inf(x, z))$．

（2）求证：如果对任意$x \in E$、$y \in E$、$z \in E$，均有$sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) = inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x))$，则当$x \geq z$时，$sup(z, inf(x, y)) = inf(x, sup(y, z))$，并且，（1）当中的两个条件都成立．即对任意$x \in E$、$y \in E$、$z \in E$，$sup(x, inf(y, z)) = inf(sup(x, y), sup(x, z))$、$inf(x, sup(y, z)) = sup(inf(x, y), inf(x, z))$、$sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) = inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x))$都等价．

（3）求证：下列两个条件中的任何一个，均为E为分配格的充分必要条件：

第一，对任意$x \in E$、$y \in E$、$z \in E$，$inf(z, sup(x, y)) \leq sup(x, inf(y, z))$；

第二，对任意$x \in E$、$y \in E$、$z \in E$，$inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y))) = sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x))$．

证明：即补充定理198．

习题 93.

（1）求证：按包含关系排序的维数不小于2的向量空间的子空间集合E，是互补格．但对$x \in E$、$y \in E$、$x \neq y$，通常x对y的补不是唯一的．

（2）E为分配格和互补格，求证：对任意$x \in E$、$y \in E$、$x \neq y$，x对y的补唯一．如果E为分配格和互补格，并且有最大元z，则称E为布尔网络．对任意$x \in E$，令x^*为x对z的补，则$x \mapsto x^*$为E到按在E上的偏序关系的相反关系排序的同构，并且$(x^*)^* = x$．对任意集合A，按包含关系排序的$\mathcal{P}(A)$，是布尔网络．

（3）E为布尔网络，且为完备格，$(x_i)_{i\in I}$为E的元素族，求证：$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) = sup(inf(y, x_i))_{i\in I}$．

证明：

（1）对E的任何两个元素，其交集为最大下界，其和为最小上界，故E为格．对任意$x \le y$，将x的基扩展为y的基，则扩展的基，为x对y的补，故E为互补格．同时，当y不是E的最大元时，扩展的基和x的基线性组合可以得到不同的补，故x'存在且通常不是唯一的．

（2）即补充定理200、补充定理201、补充定理202．

（3）即补充定理203．

注：习题93（1）涉及尚未介绍的“向量空间”知识．

习题 94.

A的元素数目不小于$3F = \{A|(\Delta_A$为E的划分$)\}$，并按偏序关系“$X \in F$与$Y \in F$与Δ_X为比Δ_Y更细”排序．求证：F是完备格，不是分配格，但是互补格．

证明：对F的任意子集X，$\{B|B \neq \varnothing$与$(\forall x)(\forall z)(x \in B$与$z \in X \Rightarrow (\exists t)(t \in z$与$x \in t$与$t \subset B))\}$为其最小上界，$\{C|C \neq \varnothing$与$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in C$与$y \in C$与$z \in X \Rightarrow (\exists t)(t \in z$与$x \in t$与$y \in t))\}$为其最大下界，故$F$为完备格．

对F的任意子集X、Y，且$X \le Y$，对任意$z \in Y$，令$H_z = \{x|x \in X$与$x \subset z\}$，$T_z = \bigcup_{x\in H_z} \{\tau_u(u \in x)\}$．$D = \{u|(\exists z)(u = T_z$与$z \in Y)\}$，$E = A - \bigcup_{x\in D} x$，$K = D \cup \{X|(\exists x)(X = \{x\}$与$x \in E)\}$，则$K$为$X$的补．

F不是分配格的反例：

令x、y、z互不相等，$A = \{x, y, z\}$，$X = \{\{x\}, \{y, z\}\}$，$Y = \{\{y\}, \{x, z\}\}$，$Z = \{\{z\}, \{x, y\}\}$，则$sup(X, inf(Y, Z)) \neq inf(sup(X, Y), sup(X, Z))$．

注：证明互补格时，K的含义是：从Y的每个集合对应的X的各集合中，各取一个元素，组成若干个新集合（D），然后将A剩下的每个元素均作为一个集合．

习题 95.

求证：当且仅当集族$(E_i)_{i\in I}$满足下列条件时，其序数和为无间隙的：

第一，I至少有一对可比较的不同元素，或者存在$i \in I$使E_i至少有一对可比较的不同元素；

第二，对任意$i \in I$，如果E_i至少有一对可比较的不同元素，则E_i为无间隙的；

第三，$a \in I$、$b \in I$，$a < b$且$]a, b[$为空，则E_a没有极大元或者E_b没有极小元．

特别是：

对任意$i \in I$，E_i都是无间隙的，且没有极大元（或极小元），则其序数和是无间隙的.

如果I是无间隙的，并且对任意$i \in I$，E_i都是无间隙的或者没有可比较的元素，则其序数和是无间隙的.

证明：根据定义可证.

习题 96.

（*1*）E是离散的，求证：对任意$x \in E$、$y \in E$、$x < y$，存在$x' \in E$、$y' \in E$，使$x \leq x'$、$x' < y'$、$y' \leq y$，且$]x', y'[= \varnothing$. 并给出一个满足该条件，但不是离散的全序集.

（*2*）$(E_i)_{i \in I}$为集族，其中$I \neq \varnothing$，对任意$i \in I$，$E_i \neq \varnothing$，求证：当且仅当I为离散的，并且对任意$i \in I$，E_i为离散的，该集族的序数和是离散的，

证明：

（1）根据定义可证. 康托尔集是一个例子.

（2）令E为其序数和.

必要性：如果E是离散的，根据习题96（1），对任意$i \in I$，$E_i \times \{i\}$是离散的，因此E_i是离散的；同时，令$F = \{x | (\exists i)(i \in I与x = \tau_y(y \in Ei))\}$，则$F$是离散的，因此$I$是离散的，必要性得证.

充分性：对E的任何偏序子集F，令$J = pr_2 F$，则F为集族$(E_i \cap F)_{i \in J}$的序数和，如果F是无间隙的，根据习题95， J至少有一对可比较的不同元素，令其为x、y且$x < y$，则存在$x' \in E$、$y' \in E$，使$x \leq x'$、$x' < y'$、$y' \leq y$，且$]x', y'[= \varnothing$. 同时，根据习题95，对任意$i \in J$，$E_i \cap F$没有可比较的不同元素，因此，对任意$i \in J$，$E_i \cap F$有极大元也有极小元，矛盾.

注：习题96（1）反例部分部分涉及尚未介绍的“康托尔集”知识.

习题 97.

E为非空全序集，公式S为($[x, y]$是离散的)，求证：S和在E上的偏序$x \leq y$弱相容；关于S的等价类是离散的；E/S的商偏序集存在，其或者是仅有一个元素的集合，或者是无间隙的. 并且，E同构于某个离散集合族的序数和，其指标集或者是仅有一个元素的集合，或者是无间隙的.

证明：根据补充定理169，S和在E上的偏序$x \leq y$弱相容.

考虑关于S的某个等价类的任何偏序子集F，设$x \in F$，$y \in F$，则$[x, y]$是离散的，令$G = F \cap [x, y]$，根据习题96（3），存在$x' \in G$、$y' \in G$，使$x \leq x'$、$x' < y'$、$y' \leq y$，且$]x', y'[= \varnothing$，因此，关于S的等价类是离散的.

同时，E同构于集族$(X)_{X \in E/S}$的序数和. 如果E是离散的，根据习题96（1），对任意$x \in E$、$y \in E$，$[x, y]$都是离散的，故$E/S = \{E\}$，即是仅有一个元素的集合；如果E不是离散的，则集族$(X)_{X \in E/S}$的序数和也不是离散的，根据习题96（4），E/S不是离散的，得证.

习题 98.

（*1*）E为偏序集，求证：对任意开集$U \subset E$，存在唯一的正则开集$\tilde{U}$，使U为$\tilde{U}$的共尾子集，并且，映射$U \mapsto \tilde{U}$为单增映射．同时，对开集U、V，如果$U \cap V = \varnothing$，则$\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$．

（*2*）E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，并按包含关系排序，求证：$R(E)$为布尔网络，且为完备格．并且，当且仅当E非空且为右方有向集时，$R(E)$为仅有两个元素的结合．

（*3*）令F为E的共尾子集，$R(E)$、$R(F)$均按包含关系排序，求证：映射$U \mapsto U \cap F$为$R(E)$到$R(F)$的同构．

（*4*）E_1、E_2为偏序集，$E1 \times E2$按偏序关系$(pr_1x \le pr_1y)$与$(pr_2x \le pr_2y)$排序，求证：$E_1 \times E_2$的任意开集，均可表示为$U_1 \times U_2$的形式，其中U_1、U_2分别为在E_1上的开集、在E_2上的开集．并确定$R(E1 \times E2)$是否同构于$R(E1) \times R(E2)$．

证明：

（1）即补充定理207（1）、补充定理207（3）、补充定理207（5）．

（2）即补充定理209（2）、补充定理209（6）、补充定理209（7）．

（3）$U \in R(E)$，因此在F上$U \cap F$是开集，设$U \cap F$在F上相应的正则开集是V，对任意$x \in V$，显然$x \in F$，同时，对任意$y \ge$x，存在$z \in F$且$y \le z$，因此，$z \in V$，因此存在$z \le t$且$t \in U \cap F$，根据补充定理207（2），$x \in \tilde{U}$，故$x \in U$，因此$x \in U \cap F$，所以$U \cap F$在F上是正则开集．

对任意$V \in R(F)$，设V在E上相应的正则开集为U，则U是唯一的；同时，对任意$x \in U \cap F$，对任意$y \ge x$且$y \in F$，存在$z \in F$且$y \le z$，故$z \in U \cap F$，故存在$t \in V$使$t \ge z$，根据补充定理207（2），$x \in V$，因此，$U \cap F = V$．因此，$U \mapsto U \cap F$为$R(E)$到$R(F)$的双射．根据定义$U \subset V \Rightarrow U \cap F \subset V \cap F$；反过来，如果$U \cap F \subset V \cap F$，如果$x \in U$，对任意$y \ge x$，存在$z \in F$且$y \le z$，因此$z \in V$，根据补充定理207（2），$x \in V$，故$U \subset V$，综上，该映射为同构．

（4）对于$F \subset E_1 \times E_2$，且F为开集，令$U_1 = pr_1F$，$U_2 = pr_2F$，根据定义可证$F = U_1 \times U_2$且U_1、U_2均为开集．

令$E_1 = \{a\}$、$E_2 = \{b\}$，则$R(E_1 \times E_2)$不同构于$R(E_1) \times R(E_2)$．

注：原书习题98（4）后半部分是假命题．

习题 99.

E为偏序集，令$R_(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$，并按包含关系的相反关系排序．令为$E$到$R_0(E)$的规范映射：

（*1*）求证：r为单增映射，并且$r(E)$的像是$R_0(E)$的共尾子集．

（*2*）求证：E为偏序集，当且仅当同时满足下列两个条件时，E为右方无向集：

第一，对任意$x \in E$、$y \in E$、$x < y$，均存在$z \in E$、$x < z$，使$[y, \to [\cap [z, \to [= \varnothing$；

第二，令x、y是E的一对不可比较的元素，那么，或者存在$x' \geq x$，使$[x', \rightarrow [\cap [y, \rightarrow [= \varnothing$，或者存在$y' \geq y$，使$[x, \rightarrow [\cap [y', \rightarrow [= \varnothing$.

（*3*）求证：$R_0(E)$为右方无向集，并且$R_0(E)$到$R_0(R_0(E))$的规范映射为双射.

证明：

（1）即补充定理210.

（2）即补充定理212.

（3）对任意$X \in R_0(E)$、$Y \in R_0(E)$，如果$Y \subset X$或者Y、X不可比较，根据补充定理209（3），存在$Z \in R_0(E)$且$Z \subset X$、$Z \cap Y = \varnothing$；根据补充定理212，$R_0(E)$为右方无向集，并且$R_0(E)$到$R_0(R_0(E))$的规范映射为单射．对任意$U \in R_0(R_0(E))$，设其最小元为X，则对任意$Y \subset X$，存在$X \cap Y \subset U$，根据补充定理207（2），$X \in U$，故$[X, \rightarrow [\subset U$，因此$r(X) = U$，得证.

习题 100.

（*1*）求证：没有极大元的右方无向集，是右方分叉集.

（*2*） E为实数区间$[k2-n, (k+1)2-n]$（n为自然数，k为整数且$k \in [0, 2^n-1]$）的集合，按包含关系的相反关系排列，求证：E为右方分叉集，并且没有极大元.

（*3*）给出一个右方分叉集，其不存在右方无向的共尾子集.

（*4*）给出偏序集，它不是右方分叉集，但存在右方分叉的共尾子集.

证明：

（1）即补充定理213（3）.

（2）根据补充定理212、补充定理213（3）可证.

（3）设E为习题100（2）所称的集合，F为不包含可数共尾子集的全序集，根据定义，$E \times F$为右方分叉集．同时，$E \times F$的任何共尾子集，都有元素(x, a)，(x, b)，故该共尾子集不是右方无向集.

（4）设E为习题100（2）所称的集合，F为非空全序集，则偏序集族$(F)_{i \in E}$的序数和，不是右方分叉集，但令其序数和为A，$y \in F$，则$\{x | x \in A$与$pr_1 x = y\}$为右方分叉的共尾子集.

注：习题100（2）、（3）、（4）涉及尚未介绍的“有理数”知识.

3.2 良序集（Ensembles bien ordonnés）

元数学定义 62. 良序关系（*relation de bon ordre*），良序图（*graphe d'un bon ordre*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的偏序关系，并且对任意满足$E \neq \varnothing$并且$x \in E \Rightarrow (x|y)R$的集合$E$，$E$均为按偏序关系$R$与$x \in E$与$y \in E$排序的偏序集，并且有最小元，则称$R$为$x$、$y$之间的良序关系，在没有歧义的情况下简称为$R$为良序关系．良序关系生成的图称为良序图.

定义 126. 良序（*bien ordonné*）

F为在E上的偏序，如果$y \in F\langle x\rangle$为x、y之间的良序关系，则称F为在E上的良序.

定义 127. 良序集（*ensemble bien ordonné*），良序子集（*partie bien ordonné*）

任何非空子集都有最小元的偏序集，称为良序集. 偏序集的偏序子集如果是良序集，则称为良序子集.

补充证明规则 84.

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果E是按照偏序关系R排序的良序集，则R是良序关系；如果E是根据偏序F排序的良序集，则F是良序.

证明：由于E的任何非空子集E'，都满足$x \in E' \Rightarrow (x|y)R$，且$E'$为按偏序关系$R$与$x \in E$与$y \in E$排序的偏序集，故$R$为偏序关系. 进而，如果$E$是良序集，则$y \in F\langle x\rangle$为良序关系，$F$为良序.

补充证明规则 85.

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果R是关于x、y的良序关系，$E \neq \varnothing$并且$x \in E \Rightarrow (x|y)R$，则按$R$与$x \in E$与$y \in E$排序的$E$，为良序集.

证明：根据定义可证.

补充定理 215.

良序集是全序集.

证明：根据定义可证.

补充定理 216.

良序集的子集如果有上界，则有最小上界.

证明：令良序集为E，其子集为A，A的上界集为B，则B的最小元为其最小上界.

补充定理 217.

（*1*）良序集的偏序子集也是良序集.

（*2*）良序集是离散的.

（*3*）当且仅当指标集和各偏序集均为良序集时，偏序集族的序数和为良序集.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）设E为良序集，F为其偏序子集，且有一对可比较的不同元素，则F有最小元a，$F-\{a\}$有最小元b，则区间$]a,b[=\varnothing$，得证.

（3）根据定义可证.

补充定理 218.

$\varnothing$、x按其唯一的偏序排序得到的偏序集，都是良序集.

证明：根据定义可证.

定义 128. 片段（*segement*）

E为偏序集，$S \subset E$，如果$x \in S$与$y \in E$与$y \leq x \Rightarrow y \in S$，则称$S$为$E$的片段.

补充定理 219.

（*1*）偏序集是其自身的片段.

（*2*）偏序集的任何两个片段的交集和并集，都是其片段.

证明：根据定义可证.

补充定理 220.

令E为偏序集，S为E的片段，则E的偏序子集S的片段，也是E的片段.

证明：根据定义可证.

定理 72.

E为良序集，S为E的片段，$S \neq E$，则$(\exists a)(a \in E$与$S =]\leftarrow, a[)$.

证明：由于$E - S$非空，故令a为$E - S$的最小元，由于$a \notin S$，又因为$x \in S$与$a \leq x \Rightarrow a \in S$，故$x \geq a \Rightarrow x \notin S$，又因为$x \in E - S \Rightarrow x \geq a$，因此$E - S = [a, \rightarrow[$，得证.

补充定理 221. 偏序集的每个元素均确定一个以该元素为终点的片段

E为偏序集，$a \in E$，则$]\leftarrow, a[$为E的片段.

证明：假设$x \in]\leftarrow, a[$、$y \in E$、$y \leq x$，则$x \leq a$，故$y \leq a$，得证.

定义 129. 以元素为终点的片段（*segment d'extrémité un élément*）

E为良序集，$a \in E$，则$]\leftarrow, a[$称为以a为终点的片段，记作S_a.

补充定理 222.

E为全序集，$A = \bigcup\limits_{x \in E} S_x$，如果$E$没有最大元，则$A = E$，如果$E$有最大元$b$，则$A = E - \{b\}$.

证明：对任意$c \in E$，如果c不是E的最大元，则存在d，使$c < d$，因此$c \in S_d$，故$c \in A$；反过来，对任意$c \in A$，存在S_d，使$c < d$，故$c \in E$，并且c不是E的最大元，得证.

补充定理 223.

E为良序集，$a \in E$，$b \in E$，$S_a = S_b$，则$a = b$.

证明：如果$a<b$，则$a\notin S_a$，但$a\in S_b$，矛盾．同理$a>b$也矛盾，得证．

补充定理 224.

映射f为偏序集E到偏序集F的同构，则：

（*1*）如果E为良序集，则F为良序集．

（*2*）如果S为E的片段，则$f\langle S\rangle$为F的片段．

证明：（1）对于F的任何非空子集B，令$A=f^{-1}\langle B\rangle$，设A的最小元为a，由于对任意$x\in A$，$a\leq x$，故对任意$y\in B$，令$z=f^{-1}(y)$，则$f(a)\leq f(z)$，即$f(a)\leq y$，因此$f(a)$为B的最小元．得证．

（2）如果$S=E$，则$f\langle S\rangle=F$，得证；

如果$S\neq E$，根据定理72，令S为$]\leftarrow,a[$，$a\in E$，则$f(x)<f(a)\Leftrightarrow x<a$，故$f\langle S\rangle$为$]\leftarrow,f(a)[$，得证．

补充定理 225.

（*1*）E为良序集，如果其片段S_a同构于S_b，则$a=b$．

（*2*）E为良序集，如果E同构于其片段S，则$E=S$．

证明：

（1）令f为S_a到S_b的同构，令$X=\{x|x\in S_a$与$x\neq f(x)\}$，如果$X\neq\varnothing$，则X有最小元y，因此$f(y)\neq y$．令$z=f^{-1}(y)$，则$z\neq y$，故$f(z)\neq z$，因此$z>y$，故$f(y)<y$，故$f(f(y))<f(y)$，因此$f(y)\in X$，矛盾，因此$X=\varnothing$，故对任意$x\in S_a$，$x=f(x)$，所以$S_a=S_b$，根据补充定理223，$a=b$．

（2）类似补充定理225（1）可证．

定理 73.

E为良序集：

（*1*）偏序集$F=\{X|(X$为E的片段$)$与$X\neq E\}$，并按包含关系排序，则映射$x\mapsto S_x$为E到F的同构．

（*2*）$E^*=\{S|S$为E的片段$\}$，则E^*为按包含关系排序的良序集．

证明：

（1）$x<y\Rightarrow S_x\subset S_y$，因此$S_x\neq S_y$，根据定理69，映射$x\mapsto S_x$为$E$到$F$的同构．

（2）$E^*=F\cup\{E\}$，根据补充定理224（1），F的任意非空子集G均有最小元，进而，$G\cup\{E\}$也有同样的最小元，同时，$\{E\}$也有最小元E，得证．

定理 74.

令$(X_a)_{a\in A}$为偏序集族，集合$\bigcup\limits_{a\in A}\{X_a\}\}$按包含关系排序，且为右方有向集．对任意$a\in A$、$b\in A$，如果$X_a\subset X_b$，则在$X_a$上的偏序，都是在$X_b$上的偏序在$X_a$上导出的偏序．令$E=$

$\bigcup_{a\in A} X_a$，则存在唯一的在E上的偏序，令E为按该偏序排序的偏序集，对任意$a \in A$， X_a都是偏序集E的偏序子集.

证明：令G_a为在X_a上的偏序的图，如果G为在E上的偏序，且对任意$a \in A$时，该偏序在X_a上导出的偏序，等于X_a上的偏序，则对任意$a \in A$，$G_a \subset G$，因此$\bigcup_{a\in A} G_a \subset G$；同时，由于该集族为右方有向集，故对任意$x \in E$、$y \in E$，存在$x \in X_a$，$y \in X_a$，因此$(x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in G_a$，故$G = \bigcup_{a\in A} G_a$，唯一性成立.

设$G = \bigcup_{a\in A} G_a$，由于对任意$a \in A$、$b \in A$，$X_a \subset X_b \Rightarrow G_b \cap (X_a \times X_a) = G_a$，因此当$x \in G \cap (X_a \times X_a)$时，存在$c \in A$，使$x \in G_c$且$x \in X_a \times X_a$，因此$x \in G_c \cap (X_a \times X_a)$，故$x \in G_a$. 反过来，当$x \in G_a$时，$x \in G$、$x \in X_a \times X_a$. 故$a \in A$时，$G \cap (X_a \times X_a) = G_a$.

同时，对E的任意三个元素x、y、z，均存在$a \in A$，使$\{x, y, z\} \subset X_a$，故G为偏序图. 存在性成立.

定理 75.

令$(X_i)_{i\in I}$为良序集族，对任意$i \in I$、$k \in I$，X_i和X_k其中都有一个是另一个的片段，令$E = \bigcup_{i\in I} X_i$，则存在唯一的在E上的偏序满足下列条件：

第一，E为良序集；第二，对任意$i \in I$， X_i都是E的偏序子集.

同时，对任意$i \in I$，X_i的片段都是E的片段，并且，对任意$x \in X_i$，X_i的以x为终点的片段，是E的以x为终点的片段. 反过来，E的片段或者是E，或者存在$i \in I$，使之为X_i的片段.

证明：根据定理74，存在唯一E上的偏序.

对E的任意非空子集H，存在$i \in I$，使$H \cap X_i \neq \varnothing$，设$a$是$H \cap X_i$的最小元，对任意$x \in H$，设$x \in X_k$，若$X_k \subset X_i$，则$a \leq x$，若$X_i \subset X_k$，且$x < a$，则$x \in]\leftarrow, a[$，根据补充定理220、定理72，该区间是$X_i$的片段，故$x \in H \cap X_i$，矛盾，因此$a$是$H$的最小元，故$E$为按该偏序排序的良序集.

如果$x \in X_i$，$y \in E$，则存在$k \in I$，使$x \in X_k$，$y \in X_k$. 同时，根据补充定理220、定理72，对任意$x \in X_i$，X_i的以x为终点的片段，是E的区间$]\leftarrow, x[$，因此是E的以x为终点的片段.

反过来，E的片段如果不是E，则存在$x \in E$，该片段为$]\leftarrow, x[$，由于存在X_i使$x \in X_i$，故该区间也是X_i的片段.

定理 76.

E是良序集，F的元素均为E的片段，并且，任何F的元素族的并集也是F的元素，同时，如果$S_x \in F$，则$S_x \cup \{x\} \in F$，则F是E的片段集合.

证明：设有E的片段不属于F，根据定理73（2），不属于F的E的片段的集合，有最小元S．如果S没有最大元，根据补充定理222，S是所有片段的并集，因此$S \in F$，矛盾；如果S有最大元a，则$S - \{a\} \in F$，则$S \in F$，同样矛盾．

证明规则 59. 超限归纳法

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，x不是常数，E为按良序关系$x \leq y$排序的良序集，如果$(x \in E$与$(\forall y)(y \in E$与$y < x \Rightarrow (y|x)R)) \Rightarrow R$是$M$的定理，则$x \in E \Rightarrow R$是$M$的定理．

证明：令F为E的满足$x \in S \Rightarrow R$的片段S的集合，因此F任何元素的并集也是F的元素，同时，如果$S_x \in F$，则$S_x \cup \{x\} \in F$，根据定理76可证．

证明规则 60. 超限归纳法定义的映射的存在性和唯一性

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，E为良序集，u为字母，T为项，则存在唯一的项U和E到U的满射f，使$(f^{(x)}|u)T = f(x)$，其中$f^{(x)}$为任意一个S_x到$f\langle S_x \rangle$的满射，并且在S_x上和f重合．

证明：设f和U、f'和U'均满足条件，令F为使f和f'在S上重合的E的片段S的集合，因此，F任意若干个元素的并集都是F的元素，并且对于F的元素S_x，$f^{(x)} = f'^{(x)}$，$f(x) = (f^{(x)}|u)T$，$f'(x) = (f'^{(x)}|u)T$，因此，$S_x \cup \{x\} \in F$，根据定理76，F是E的片段集合，故$E \in F$．由于$U = f(E)$，$U' = f'(E)$，因此f和f'在E上重合，且$U = U'$．故唯一性成立．

令G为存在满足条件的项和满射的E的片段的集合，对任意$S \in G$，根据唯一性，存在唯一的满足条件的项和满射，分别记作f_S和U_S．则对任意$S' \in G$、$S'' \in G$，设$S' \subset S''$，$f_{S'}$和$f_{S''}$在S'上重合．根据定理32（2），G的元素的并集也属于G．同时，令$S_x \in G$，由于$f_{S_x}(x) = ({f_{S_x}}^{(x)}|u)T$，根据定理33，$S_x \cup \{x\} \in F$，根据定理76可证存在性．

定理 77.

G为$\mathcal{P}(E)$的子集，p为G到E的映射，对任意$X \in G$，$p(X) \notin X$，则存在E的子集M和在M上的良序F，满足下列条件：

第一，令$x \leq y$表示$y \in F\langle x \rangle$，S_x表示在M上的区间$] \leftarrow, x[$，$(\forall x)(x \in M \Rightarrow S_x \in G$与$p(S_x) = x)$；

第二，$M \notin G$．

证明：

令K为满足下列条件的图H的集合：

第一，$H \subset E \times E$；

第二，令$U = pr_1 H$，H为在U上的良序图；

第三，偏序关系$(x, y) \in H$记作$x \leq y$，令S_x为U的片段，则$(\forall x)(x \in U \Rightarrow S_x \in G$与$p(S_x) = x)$.

设H、H'都是K的元素，相应的第一射影为U、U'，设$V = \{x|x \in U \cap U'$与$(U$的以x为终点的片段$) = (U'$的以x为终点的片段$)\}$，对任意$x \in V$、$y \in V$，若在U上$x \leq y$，则在U'上$x \leq y$，故(H, U, U)和(H', U', U')在V上导出的偏序相同．如果$x \in V$，$y \leq x$，$y \in U$，则$y \in U'$，同时，在U上$z \leq y$等价于在U'上$z \leq y$，故$y \in V$，因此V是U的片段，同理，V也是U'的片段．

如果$V \neq U$且$V \neq U'$，设x为$U - V$的最小元，x'为$U' - V$的最小元，则在U上$V = S_x$，在U'上$V = S_{x'}$，且$p(S_x) = x$，$p(S_{x'}) = x'$，故$x = x'$，根据V的定义，$x \in V$，矛盾．

因此，$V = U$或$V = U'$．不妨设$V = U$，故$U \subset U'$，且U是U'的片段．

令$M = \bigcup\limits_{H \subset K} H$，根据定理75，存在唯一的偏序，使$M$为按该偏序排序的良序集，且任意$K$的元素$H$，都是$M$的偏序子集．并且，对任意$x \in M$，存在$H \in K$，使$x \in H$，则$(\forall x)(x \in U \Rightarrow S_x \in H$与$p(S_x) = x)$；由于在$H$上的$S_x$和在$M$上的$S_x$相等，故$(\forall x)(x \in M \Rightarrow S_x \in G$与$p(S_x) = x)$．

如果$M \in G$，令$a = p(M)$，则$a \notin M$，把a作为最大元加入M，则M'也是良序集，由于在M'上，$M = S_a$，因此对于上述在偏序集M'上延拓的偏序，相应的偏序图也是K的元素，矛盾．

注：本定理的证明利用了并集，即：对于所有符合条件一的子集，证明这些子集彼此具有包含关系；然后，取所有子集的并集，证明其仍然符合条件一，并符合条件二．

定理 78. 策梅洛定理

在任何集合上均存在良序．

证明：令$G = \mathcal{P}(E) - \{E\}$，对于$X \in G$，令$p(X) = \tau_x(x \in E - X)$，根据定理77，存在子集$M$以及在$M$上的良序使$M \notin G$，故$M = E$，得证．

定义 130. 归纳集（*ensemble inductif*）

如果偏序集的任何全序子集在该偏序集上都有上界，则称其为归纳集．

补充定理 226.

（1）$F \subset \mathcal{P}(E)$，并且$(\forall G)(G \subset F$与G为按包含关系排序的全序集$\Rightarrow \bigcup\limits_{X \in G} X \in F)$，则$F$是归纳集．

（2）“x为A的子集到B的映射”，为x上的集合化公式．并且，令$F = \{x|x$为A的子集到B的映射$\}$，R为公式$(v$为u在$pr_1 v$上的延拓$)$，则R为关于u、v的偏序关系，并且按R与$u \in F$与$v \in F$排序的偏序集F，为归纳集．

证明：

（1）根据定义可证．

（2）由于“x为A的子集到B的映射$\Rightarrow x \in A \times B \times A \times B$”，故“$x$为$A$的子集到$B$的映射”为$x$上的集合化公式．根据定义可证$R$为偏序关系．根据定理32（2），$F$的任何全序

子集，存在唯一映射，是各元素在所有元素的定义域的并集上的延拓，该映射即为上界，故F为归纳集.

定理 79.

如果偏序集E的任何良序子集在E上都有上界，则E有极大元.

证明：令G为E的有严格上界的子集的集合，p为G到E的映射，其中$p(x) = \tau_v(v$为x的严格上界)，根据定理77，存在E的子集M和在M上的良序F，使$(\forall x)(x \in M \Rightarrow S_x \in G$与$p(S_x) = x)$，且$M$没有严格上界.

在M上，$y \in F\langle X\rangle$与$x \neq y \Leftrightarrow x \in S_y$，同时，$p(S_y) = y$，因此，在$E$上，$y$为$S_y$的严格上界，进而，在$E$上，$x < y$.

又因为M是全序集，故良序F是在E上的偏序在M上的导出的偏序.

由于M有上界，且M没有严格上界，因此该上界是E的极大元.

定理 80. 佐恩引理

归纳集有极大元.

证明：根据定理79可证.

定理 81.

E为归纳集，$a \in E$，则存在E的极大元m，使$m \geq a$.

证明：令$F = \{x | x \in E$与$x \geq a\}$，则F为归纳集. 设m为F的极大元，则m同时是E的极大元，得证.

定理 82.

F的元素都是E的子集，并且对F的任意子集G，只要G是按包含关系排序的全序集，G的所有元素的并集（或交集）都是F的元素，则F有极大元（或极小元）.

证明：对于并集的情况，根据补充定理226（1），F为归纳集，根据定理80可证. 将F的所有全序子集变为按相反关系排序的全序集，则可证得交集的结论.

补充定理 227.

$K = \{F | F$为在E上的偏序$\}$，并且按$(F \in K$与$F' \in K$与F是比F'更细的偏序$)$排序，则K的极小元是在E上的全序.

证明：令H为K的极小元，其图为G，设a、b是不可比较的，令$A = \{z | z \in E$与$z \leq a\}$，$B = \{z | z \in E$与$b \leq z\}$，因此$A \cap B = \varnothing$. 令$G' = G \cup (A \times B)$，H'为偏序(G', E, E). 对任意$(x, y) \in G'$，$(y, z) \in G'$：如果$(x, y) \in G$，$(y, z) \in G$，则$(x, z) \in G$；如果$(x, y) \in A \times B$，$(y, z) \in G$，由于$(b, y) \in G$，故$(b, z) \in G$，因此$(x, z) \in A \times B$，故$(x, z) \in G'$；如果$(x, y) \in G$，$(y, z) \in A \times B$，同理可证$(x, z) \in G'$. 故对G'，传递性成立，根据定义可以证明其他两个条件也成立，因此H'是比H更细的偏序，矛盾.

补充定理 228.

F为在E上的偏序，则F的图是所有不等于F且比F更细的全序的图的交集.

证明：令F的图为G，对任意不等于F且比F更细的全序的图的交集的元素(a,b)，如果$(a,b)\notin G$，则$a\neq b$．按照补充定理227的证明过程构造F'，使$(b,a)\in F'$，考虑$M=\{H|H\in K$与$F'\subset H\}$，对于按相反关系排序的偏序集，根据定理80，其有极大元Q，其同时为K的极小元．根据补充定理227，Q为全序．$(b,a)\in Q$，因此$(a,b)\in Q$，矛盾.

补充定理 229.

任何偏序集同构于全序集族的乘积的一个子集.

证明：对于按偏序F排序的偏序集E，令F的图为G，$M=$
$\{H|H\neq F$与$(H$为比F更细的全序$)\}$，根据补充定理228，$G=\bigcap\limits_{H\in M}(H$的图$)$．根据定义，映射$x\mapsto(x)_{i\in M}(x\in E)$为$E$到$\prod\limits_{H\in M}E$的同构.

补充定理 230.

对于任何偏序集，存在在该集合上的全序图，其偏序图是该全序图的子集.

证明：设E为偏序集，其偏序图为G，$H=\{K|G\subset K$与K为在E上的偏序图$\}$，根据定理82，H有极大元M，如存在$x\in E$、$y\in E$且$(x,y)\notin M$，则令$M'=M\cup(x,y)\cup\{(a,b)|b=y$与$a\leq x\}\cup\{(a,b)|a=x$与$y\leq b\}$，则$M'\subset H$，矛盾．故$M$为全序图.

定理 83.

E、F为良序集，f、g为E到F的两个单增映射，并且，$f(E)$是F的片段，g为严格单增映射，则对任意$x\in E$，$f(x)\leq g(x)$.

证明：如果$\{x|x\in E$与$f(x)>g(x)\}\neq\varnothing$，设其最小元为$a$，令$x<a$，则$f(x)\leq g(x)$，$g(a)<f(a)$，$g(x)<g(a)$．由于$f(E)$是$F$的片段，故存在$z$，使$g(a)=f(z)$，则$f(z)<f(a)$，因此$z<a$，则$f(z)<f(a)$，$g(z)<g(a)$，故$f(z)<g(a)$，因此$f(z)<f(z)$，矛盾.

定理 84.

E、F为良序集，则下列两个公式至少有一个为真：

第一，存在唯一的E到F的片段的同构；

第二，存在唯一的F到E的片段的同构.

证明：令G为E的片段到F的片段的同构的集合，并为按“v是u的延拓”排序的偏序集．设G的全序子集为H，由于H各元素的定义域都是E的片段，故其并集S也是E的片段，根据定理32，存在以S为定义域的映射，是H各元素的延拓，故为H的最小上界，设其为v，则$v(S)$为H各元素值域的并集，因此也是F的片段．由于H为全序子集，因此对于S
的任意两个元素$x<y$，存在$u\in H$，使x、y均为u的定义域的元素，故$u(x)<u(y)$，因此$v(x)<v(y)$，故v是S到$v(S)$的同构，因此$v\in G$，故G为归纳集，因此G有极大元.

设G的极大元为u，定义域为S，如果$S \neq E$且$u(S) \neq F$，则存在$a \in E$、$b \in F$，使$S =] \leftarrow, a[$，$u(S) =] \leftarrow, b[$，u为S到$u(S)$的延拓，将u延拓为w，其定义域为$] \leftarrow, a]$，值域为$] \leftarrow, b]$，其中$w(a) = b$，则$w \in G$，与u是G的极大元矛盾.

故S=E或$u(S)$=F，存在性得证.

根据定理83可证唯一性.

定理 85.

E为良序集，E到E的片段的唯一同构，是E到E的恒等映射.

证明：设存在E到其片段S的同构，根据补充定理225（2），$S = E$，根据定理84可证.

定理 86.

E、F为良序集，如果存在E到F的片段S的同构f，以及F到E的片段T的同构g，则S=E，T=F并且f和g互为反函数.

证明：根据补充定理224（2），$g(T)$为E的片段，故$g \circ f$为E到E的片段的同构，根据定理85，$S = E$，故$g \circ f = Id_E$，同理$f \circ g = Id_F$，$T = F$，得证.

定理 87.

良序集的任何子集同构于该良序集的一个片段.

证明：设A为良序集的子集，对于该良序集的片段S_a，如果A不同构于E的任何一个片段，则存在映射g，为E到A的某个片段S_a的同构，故$g(a) \in S_a$，且g为严格单增映射，令$f = Id_E$，根据定理83，$a \leq g(a)$，矛盾.

定义 131. 部分良序集（*ensemble partiellement bien ordonné*）

如果E的任意全序子集都是良序集，则称E为部分良序集.

补充定理 231.

（1）对任意偏序集E，存在$F \subset E$，F为部分良序集，并且是E的共尾子集.

（2）对任意全序集E，存在$F \subset E$，F为良序集，并且是E的共尾子集.

证明：

（1）令$H = \{X | X \subset E$与X为部分良序集$\}$，R为公式$X \in H$与$Y \in H$与$X \subset Y$与$(\forall x)(\forall y)(x \in X$与$y \in Y - X \Rightarrow$ 非$(y \leq x))$，则R为在$\mathcal{P}(E)$上的偏序关系.

对H的任意全序子集K，令$Z = \bigcup\limits_{X \in K} X$，对任意$X \in K$，$x \in X$，$y \in Z - X$，则存在$Y \in K$使$y \in Y$，因此$X \leq Y$，故非$(y \leq x)$，$X \leq Z$，因此$Z$为$K$的上界，故$H$为归纳集，根据定理80，$H$有极大元$M$. 如果存在$y \in E$，对任意$x \in M$，均有非$(y \leq x)$，令$M' = M + \{x\}$，则$M'$为部分良序集，且$M < M'$，矛盾，故$M$为$E$的共尾子集.

（2）根据补充定理231（1）可证.

定义 132. 关于函数的链（*chaîne pour une fonction*）

E为偏序集，f为E到E的映射，并且对任意$x \in E$，$f(x) \geq x$：令H为满足下列条件的E的子集M的集合：

第一，$x \in M \Rightarrow f(x) \in M$；

第二，如果M的非空子集在E上有最小上界x，则x是M的元素.

令$K = \{X|X \in H与a \in X\}$，则称$\bigcap\limits_{X \in K} X$为$a$关于函数$f$的链，记作$C_a$，在没有歧义的情况下可以简称为$a$的链.

补充定理 232.

E为偏序集，f为E到E的映射，并且对任意$x \in E$，$f(x) \geq x$. 令H为满足下列条件的E的子集M的集合：

第一，$x \in M \Rightarrow f(x) \in M$；

第二，如果M的非空子集在E上有最小上界x，则x是M的元素.

则：

（*1*）对任意$a \in E$，$C_a \in H$；

（*2*）E的偏序子集C_a，为良序集；

（*3*）如果C_a在E上有最小上界b，则$b \in C_a$并且$f(b) = b$.

证明：

（1）由于$E \in H$，故$H \neq \varnothing$，根据定义可证$C_a \in H$.

（2）令$K = \{X|X \subset E与a \in X与(X在E上有最小上界m)与(m \notin X或f(m) > m)\} \cup \{\varnothing\}$，并定义$K$到$E$的映射$p$，其中：

$p(\varnothing) = a$；

如果$sup_E X \notin X$，则$p(X) = sup_E X$；

如果$sup_E X \in X$，则$p(X) = f(sup_E X)$.

根据定理77，存在E的子集U及在U上的良序F，使U满足：

第一，在U上，$(\forall x)(x \in U \Rightarrow S_x \in K与p(S_x) = x)$；

第二，$U \notin K$.

在按F排序的U上，如果$y < x$，则$y \in S_x$，令$c = sup_E S_x$，则在E上$y \leq c$，又因为$c \leq p(S_x)$，故$c \leq x$，因此在E上$y \leq x$，由于$x \neq y$，因此$y < x$，故良序F是在E上的偏序在U上的导出的偏序.

由于$U \not{i}nK$，故$U \neq \varnothing$；同时，令$x \in U$，如果在U上，$S_x = \varnothing$，则$x = a$；如果$S_x \neq \varnothing$，则$a \in S_x$. 综上有，$a \in U$.

在U上，对任意$y \in U$：

如果y为U的最大元，由于$a \in S_y$，故$a \in U$，而$U \notin K$，因此$f(y) = y$，故$f(y) \in U$；

如果y不是U的最大元，令z为$\{x|x > y与x \in U\}$的最小元，则$y = sup_E(S_z)$，故$p(S_z) = f(y)$，因此$z = f(y)$，即$f(y) \in U$.

综上，U满足第一个条件.

对任意U的子集V，设V在E上有最小上界m：

如果$\{y|y \geq m与y \in U\} = \varnothing$，则$m = sup\ U$，故$m \in U$；

如果$\{y|y \geq m与y \in U\} \neq \varnothing$，设其最小元为$z$，如果$z \in V$，则$z = m$，且$z \in U$；如果$z \notin V$，则$V \subset S_z$，令$t$为$S_z$在$E$上的最小上界，则$m \leq t$，$t \leq z$，如果$t \in S_z$，则$t \in \{y|y \geq m与y \in U\}$，则$z = t$，与$t \in S_z$矛盾，故$t \notin S_z$，$p(S_z) = t$，因此$z = t$，如果存在$q \in S_z$，使$m < q$，由于$q < z$，与$z$为$\{y|y \geq m与y \in U\}$的最小元矛盾，因此$m$为$S_z$在$E$上的上界，故$t \leq m$，因此$t = m$，所以$m = z$，故$U$满足第二个条件.

综上，$U \in H$，故$C_a \subset U$，因此C_a为良序集.

（3）根据定义可证.

补充定理 233. 布尔巴基-维特定理

E为归纳集，f为E到E的映射，并且对任意$x \in E$，$f(x) \geq x$，则存在$b \in E$，使$f(b) = b$.

证明：根据补充定理232可证.

补充定理 234. 字典式排序为偏序关系

令$(E_i)_{i \in I}$为良序集族，I为良序集，$E = \prod\limits_{i \in I} E_i$，对于$x \in E$、$y \in E$，且$x \neq y$，令$j$为集合$\{i|i \in I与pr_i x \neq pr_i y\}$的最小元，则公式$(x \in E与y \in E与(x \neq y \Rightarrow pr_j x < pr_j y))$为在$E$上的偏序关系.

证明：

令R为$x \in E与y \in E与pr_j x < pr_j y$，则$(y|x)R \Leftrightarrow x \in E$，$R \Rightarrow (y|x)R与(x|y)R$，$R与(y|z)(x|y)(z|x)R \Rightarrow x = y$. 对于$R与(y|x)(z|y)R$，如果$x = y$或$y = z$，显然$(z|y)R$为真，如果$x \neq y$、$y \neq z$，设满足$pr_i x \neq pr_i y$的最小$i$为$j$，满足$pr_i y \neq pr_i z$的最小$i$为$k$，若$j < k$，则$pr_j x \neq pr_j z$，且$pr_j x < pr_j y$，$pr_i y = pr_i z$，因此$pr_j x < pr_j z$；若$j > k$，同理可得$pr_k x < pr_k z$；若$j = k$，则$pr_j x < pr_j y$，$pr_j y < pr_j z$，因此$pr_j x < pr_j z$. 综上，得证.

定义 133. 字典式偏序关系（*relation d'ordre lexicographique*），字典式偏序（*ordre lexicographique*），字典式乘积（*produit lexicographique*）

令$(E_i)_{i \in I}$为良序集族，I为良序集，$E = \prod\limits_{i \in I} E_i$，对于$x \in E$、$y \in E$，且$x \neq y$，令$j$为集合$\{i|i \in I与pr_i x \neq pr_i y\}$的最小元，则公式$(x \in E与y \in E与(x \neq y \Rightarrow pr_j x < pr_j y))$称为在$E$上的字典式偏序关系，令该公式生成的图为$G$，则$(G, E, E)$称为在$E$上的字典式偏序；按该偏序排序的偏序集$E$，称为偏序集族$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积.

补充定理 235.

I为良序集，如果对任意$i \in I$，E_i为全序集，则$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积是全序集.

证明：根据定义可证.

补充定理 236. 偏序的同构为等价关系

令R为公式(F为在E上的偏序)与(F'为在E'上的偏序)与(按F排序的E同构于在F'上排序的E')，则R为关于F、F'的等价关系.

证明：根据定义可证.

定义 134. 偏序类（*type d'ordre*）

令R为公式(F为在E上的偏序)与(F'为在E'上的偏序)与(按F排序的E同构于在F'上排序的E')，则称$\tau_{F'}(R)$为F的偏序类，记作$Ord(F)$，在没有歧义的情况下也可以记作$Ord(E)$.

补充定理 237.

当且仅当两个偏序的偏序类相等时，这两个偏序集同构.

证明：根据定义可证.

补充定理 238. 偏序类之间的预序关系

令S为公式(X为偏序类)与(Y为偏序类)与$(\exists A)(\exists B)$((A为按偏序类为X的偏序排序的偏序集)与(B为按偏序类为Y的偏序排序的偏序集)与$(\exists Z)$($Z \subset Y$与X同构于Z)). 则S为关于X、Y的预序关系.

证明：根据定义可证.

记号定义 20. 偏序类之间的不等式（*inégalité entre types d'ordre*）

X、Y为偏序类，则预序关系(X为偏序类)与(Y为偏序类)与$(\exists A)(\exists B)$((A为按偏序类为X的偏序排序的偏序集)与(B为按偏序类为Y的偏序排序的偏序集)与$(\exists Z)$($Z \subset Y$与X同构于Z))记作$X \prec Y$或$Y \succ X$.

定义 135. 偏序类族的序数和（*somme ordinale de la famille des types d'ordre*）

令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，对任意$i \in I$，令$E_i = l_i$的定义域. 令E为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和，则称$Ord(E)$为偏序类族$(l_i)_{i\in I}$的序数和，记作$\sum\limits_{i\in I} l_i$.

定义 136. 两个偏序类的序数和（*somme ordinale de deux types d'ordre*）

令$a \neq b$，$I = \{a, b\}$，按$\{(a,a),(a,b),(b,b)\}$排序，l、m为偏序类，$E_a = l$的定义域，$E_b = m$的定义域. 令E为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和，则称$Ord(E)$为偏序类l和m的序数和，记作$l + m$.

补充定理 239.

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，F为其序数和，则$\sum\limits_{i\in I} Ord(E_i) = Ord(F)$.

证明：根据补充定理168可证.

补充定理 240. 序数和的结合律

$(J_k)_{k\in K}$为偏序集族，其和为I，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，则$\sum\limits_{k\in K}(\sum\limits_{i\in J_k\times\{k\}} l_i)=\sum\limits_{i\in I} l_i$.

证明：根据补充定理169可证.

定义 137. 偏序类族的序数乘积（*produit ordinale de la famille des types d'ordre*）

令I为良序集，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，对任意$i\in I$，令$E_i=l_i$的定义域. 令E为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的字典式乘积，则称$Ord(E)$为偏序类族$(l_i)_{i\in I}$的序数乘积，记作$\mathsf{P}\limits_{i\in I} l_i$.

定义 138. 两个偏序类的序数乘积（*produit ordinale de deux types d'ordre*）

令$a\neq b$，$I=\{a,b\}$，按$\{(a,a),(a,b),(b,b)\}$排序，l、m为偏序类，$E_a=l$的定义域，$E_b=m$的定义域. 令E为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的序数乘积，则称$Ord(E)$为偏序类l和m的序数乘积，记作ml.

补充定理 241.

令I为良序集，$(E_i)_{i\in I}$、$(F_i)_{i\in I}$为偏序集族，且对任意$i\in I$，E_i同构于F_i，则$(E_i)_{i\in I}$的字典式乘积同构于$(F_i)_{i\in I}$的字典式乘积.

证明：令f_i为E_i到F_i的同构，则$x\mapsto\bigcap\limits_{i\in I}\{(i,f_i(pr_i x))\}$是$(E_i)_{i\in I}$的字典式乘积到$(F_i)_{i\in I}$的字典式乘积的同构.

补充定理 242.

I为良序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，F为其字典式乘积，则$\mathsf{P}\limits_{i\in I} Ord(E_i)=Ord(F)$.

证明：根据补充定理241可证.

补充定理 243. 序数乘积的结合律

$(J_k)_{k\in K}$为良序集族，其序数和为良序集I，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，则$\mathsf{P}\limits_{k\in K}(\mathsf{P}\limits_{i\in J_k\{k\}} l_i)=\mathsf{P}\limits_{i\in I} l_i$.

证明：根据定理64可证.

补充定理 244.

I为良序集，$(m)_{i\in I}$为偏序类族，$Ord(I)=l$，则$\sum\limits_{i\in I} m=ml$.

证明：令$a\neq b$，$J=a,b$，$E_a=I$，$E_b=m$的定义域，偏序集族$(E_i)_{i\in J}$的序数乘积为E. $(E_b)i\in I$的序数为F，则$x\mapsto\{(a,pr_2 x),(b,pr_1 x)\}$是E到F的同构，得证.

补充定理 245. 两个序数的和与乘积的结合律、分配律

l、m、n为偏序类，则：

（1）$(l+m)+n=l+(m+n)$;

（2）$(lm)n=l(mn)$;

（3）$l(m+n)=lm+ln$.

证明：根据定义可证.

补充定理 246.

（*1*）令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$、$(m_i)_{i\in I}$为两个偏序类族，对任意$i\in I$，$l_i\prec m_i$，则$\sum\limits_{i\in I} l_i\prec \sum\limits_{i\in I} m_i$，并且，如果$I$是良序集，则$\prod\limits_{i\in I} l_i\prec \prod\limits_{i\in I} m_i$.

（*2*）令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，$J\subset I$，则$\sum\limits_{i\in J} l_i\prec \sum\limits_{i\in I} l_i$，并且，如果$I$是良序集，并且对任意$i\in I$，$l_i\neq\varnothing$，则$\prod\limits_{i\in J} l_i\prec \prod\limits_{i\in I} l_i$.

证明：

（1）根据补充定理97（1）、定理45可证.

（2）根据补充定理246（1）可证.

定义 139. 序数（*ordinal*）

良序集的偏序类，称为序数.

补充定理 247.

（*1*）I为良序集，$(l_i)_{i\in I}$为序数族，则$\sum\limits_{i\in I} l_i$为序数.

（*2*）m、l为序数，则$m+l$、ml为序数.

证明：

（1）令E_i为l_i的定义域，$(E_i)_{i\in I}$的和为S，对S的任意子集F，令$pr_2 f$的最小元为i，$S\cap(\breve{}\breve{}Ei\times\{i\})$的最小元为$a$，则$(a,i)$为$S$的最小元，得证.

（2）$m+l$部分根据补充定理247（1）可证；ml部分根据定义可证.

定义 140. 序数*0*（*ordinal zéro*），序数*1*（*ordinal un*），序数*2*（*ordinal deux*），序数*3*（*ordinal trois*）

$Ord(\varnothing)$称为序数0；$Ord(\{\varnothing\})$称为序数1. 在没有歧义的情况下也可以分别简称为0、1.

1和1的序数和，称为序数2，在没有歧义的情况下也可以简称为2.

2和1的序数和，称为序数3，在没有歧义的情况下也可以简称为3.

补充定理 248.

（*1*）$0=\varnothing$;

（*2*）$Ord(A)=0\Leftrightarrow A=\varnothing$;

（*3*）$Ord(A)=1\Leftrightarrow(\exists x)(A=\{x\})$.

（*4*）序数族$(l_i)_{i\in\varnothing}$的序数和为0，序数乘积为1.

（*5*）序数族$(\varnothing)_{i\in I}$的序数和为0.

（*6*）序数族$(l_i)_{i\in I}$中，如果存在$i\in I$，使$l_i=0$，则其序数乘积为0.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

（3）根据定义可证.

（4）根据补充定理116（4）、补充定理127（1）可证.

（5）根据补充定理116（5）可证.

（6）根据补充定理127（2）可证.

补充定理 249.

a为序数，则：

（*1*）$a+0=a$；$0+a=a$；$a1=a$；$1a=a$.

（*2*）$a_0=0$；$0a=0$.

（*3*）$a+a=a2$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理248（4）、补充定理248（5）可证.

（3）根据定义可证.

补充定理 250.

对任意两个序数l、m，均有$l\prec m$或$m\prec l$.

证明：根据定理84可证.

补充定理 251.

公式(l为序数)与(m为序数)与($l\prec m$)，为良序.

证明：

对任意元素均为序数的非空集合X，令$x\in X$，x的定义域为E，$Y=\{y|y\prec x$与$y\neq x\}$，如果$Y=\varnothing$，则x为X的最小元；如果$y\neq\varnothing$，根据定理87、定理72，对任意$y\in Y$且$y\neq x$，存在$a\in E$使$y=Ord(]\leftarrow,a[)$，令$f(y)=\tau_a(y=Ord(]\leftarrow,a[))$，则$\{z|z=f(y)$与$y\in Y$与$y\neq x\}$有最小元，令其最小元为$b$，设$f(u)=b$，因此$u$是$Y$的最小元，进而，$u$也是$X$的最小元，得证.

记号定义 21. 序数之间的不等式（*inégalité entre ordinaux*）

l、m为序数，如果$l\prec m$，则记作$l\leq m$.

补充定理 252.

a为序数：

（*1*）公式x为序数与$x<a$是x上的集合化公式.

（*2*）公式x为序数与$x\leq a$是x上的集合化公式.

证明：

（1）令$E=pr_1 a$．则$x<a\Leftrightarrow(\exists y)(y\in E$与$x=Ord(Sy))$．令$F_y=\{S_y\}$，$A=\bigcup\limits_{y\in E}F_y$，则$x<a\Rightarrow x\in A$，得证．

（2）根据补充定理252（1）可证．

补充定理 253.

（*1*）令$O_a=\{x|x$为序数与$x<a\}$，则O_a为良序集且$Ord(O_a)=a$．

（*2*）$\{x|x$为序数与$x\leq a\}$为良序集，且$Ord(\{x|x$为序数与$x\leq a\})=a+1$．

证明：

（1）令$E=a$的定义域．根据定理87，$x<a\Leftrightarrow(\exists y)(y\in E$与$x=Ord(S_y))$，根据补充定理225、定理73（1），$O_a$同构于E，根据补充定理224（1）得证．

（2）根据补充定理253（1）可证．

补充证明规则 86.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，x不是常数，如果$(x$为序数与$(\forall y)(y$为序数与$y<x\Rightarrow(y|x)R))\Rightarrow R$是$M$的定理，则$x$为序数$\Rightarrow R$是$M$的定理．

证明：根据证明规则59、补充定理253（2）可证．

补充定理 254.

（*1*）令$(x_i)_{i\in I}$为序数族，则存在唯一的序数a，使$(l$为序数与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow xi\leq l))\Leftrightarrow(a\leq l)$．

（*2*）H的元素都是序数，则存在唯一的序数a，使$(l$为序数与$(\forall x)(x\in H\Rightarrow x\leq l))\Leftrightarrow(a\leq l)$．

证明：

（1）令$x=\sum\limits_{i\in I}x_i$，$A=\{l|l\leq a$与$l$为序数与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow xi\leq l)\}$，根据补充定理246（2），对任意$i\in I$，$x_i\leq x$，故$A\neq\varnothing$，因此令$A$的最小元为$a$，存在性得证．根据定义可证唯一性．

（2）类似补充定理254（1）可证．

定义 141. 序数族的最小上界（*borne supérieure de la famille d'ordinaux*），序数集合的最小上界（*borne supérieure du ensemble d'ordinaux*）

令$(x_i)_{i\in I}$为序数族，使$(l$为序数与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow x_i\leq l))\Leftrightarrow(a\leq l)$成立的$a$，称为$(x_i)_{i\in I}$的最小上界，记作$\sup\limits_{i\in I}(x_i)$．令$H$的所有元素均为序数，使$(l$为序数与$(\forall x)(x\in H\Rightarrow x\leq l))\Leftrightarrow(a\leq l)$成立的$a$，称为$H$的最小上界，记作$sup\ H$．

定义 142. 前导（*prédécesseur*）

a、b为序数，如果$a=b+1$，则称b为a的前导.

补充定理 255.

a为序数，则序数族$(x)_{x<a}$的最小上界为a或a的前导.

证明：

设最小上界为b，假设$b\neq a$且$b+1\neq a$.

由于$b<a$，设a的定义域为E，根据定理87，存在$y\in E$，使$b=Ord(S_y)$.

由于$b+1=Ord(S_y\cup\{y\})$，故$b+1\neq a$，又因为$b+1\neq a$，因此$b+1<a$．但根据补充定理246（2），$b<b+1$，矛盾.

补充定理 256.

a为序数，且$a\neq 0$，则$a>0$并且$a\geq 1$.

证明：根据定义可证.

补充定理 257.

a、b、x为序数，则：

（1）$a<b\Leftrightarrow a+1\leq b$.

（2）如果$a<b$，则$x+a<x+b$，$a+x\leq b+x$，$ax\leq bx$;

（3）如果$a<b$，$x>0$，则$xa<xb$.

（4）$a<a+1$.

（5）$a>1\Leftrightarrow a\geq 2$.

（6）$a+1=b+1\Leftrightarrow a=b$.

（7）$a+1<b+1\Leftrightarrow a<b$.

证明：

（1）令b的定义域为E，如果$a<b$，则a同构于E的片段S_x，$a+1$同构于E的片段$S_x\cup\{x\}$.

反过来，如果$a+1\leq b$，根据补充定理246（1）、补充定理249（1），$a<a+1$，因此$a<b$.

（2）根据补充定理257（1）、补充定理246（1）、补充定理245（1）可证.

（3）根据补充定理257（1）、补充定理246（1）、补充定理245（3）可证.

（4）根据补充定理257（1）可证.

（5）根据补充定理257（1）可证.

（6）根据公理模式6，$a=b\Rightarrow a+1=b+1$．反过来，如果$a+1=b+1$，令a的定义域为E，b的定义域为E'，设$x\not{i}nE$，$y\not{i}ny$，把x作为最大元加入E，把y作为最大元加入E'，

则$a+1=Ord(E\cup\{x\})$，$b+1=Ord(E'\cup\{y\})$，故$E\cup\{x\}$同构于$E'\cup\{y\}$. 因此E同构于E'，故$a=b$.

（7）根据补充定理257（2）、补充定理257（6）可证.

补充定理 258. 前导的唯一性

一个序数的前导如果存在，则是唯一的.

证明：根据补充定理257（6）可证.

补充定理 259. 所有序数不能组成集合

非$Coll_x(x$为序数$)$.

证明：设序数的集合的最小上界为a，但$a<a+1$，矛盾.

补充定理 260.

a、b、c为序数，则：

（1）$c+a<c+b\Rightarrow a<b$，$a+c<b+c\Rightarrow a<b$;

（2）如果$c>0$，则$ca<cb\Rightarrow a<b$，$ac<bc\Rightarrow a<b$;

（3）$c+a=c+b\Rightarrow a=b$;

（4）$ca=cb\Rightarrow a=b$.

证明：

（1）根据补充定理246（1）可证.

（2）根据补充定理246（1）可证.

（3）根据补充定理257（2）可证.

（4）根据补充定理257（3）可证.

补充定理 261. 序数的差的存在性和唯一性

a、b为序数，$a\le b$，则存在唯一的序数c，使$a+c=b$.

证明：令b的定义域为E，则a同构于E的区间S_x，令$c=Ord(E-S_x)$，则$a+c=b$；根据补充定理260（3），c具有唯一性.

定义 143. 序数的差（*différence ordinale*）

a、b为序数，$a\le b$，如果序数c满足$a+c=b$，则称c为a和b的差，记作$(-a)+b$.

补充定理 262. 序数的商和余数的存在性和唯一性

a、b、c为序数，$c<ab$，则存在唯一的一组序数d、e，使$c=ae+d$，且$d<a$，$e<b$.

证明：

由于$c<ab$，故$a\neq 0$.

令a的定义域为E，b的定义域为F，c的定义域为G，则G同构于ab的区间S_x，令x的射影分别为m、n，其中$m \in F$、$n \in E$．令$Ord(\{t|t为序数与t < m\}) = e$，$Ord(\{t|t为序数与t < n\}) = d$，则$d < a$，$e < b$．令$E$和序数集合$\{t|t为序数与t < m\}$的字典式乘积为$X$，则$Ord(X) = ae$．令$Y = \{t|t为序数与t < n\}$，根据定义，$Ord(X) + Ord(Y) = Ord(S_x)$，因此$c = ae + d$．存在性得证．

设$c = ae+d$，$c = ae'+d'$．设$e < e'$，则$e+1 \leq e'$，因此$ae+a \leq ae'$，故$ae+a+d' \leq ae+d$，故$a + d' \leq d$，和$d < a$矛盾．唯一性得证．

定义 144. 序数的商（*quotient ordinal*），序数的余数（*reste ordinal*）

a、b、c为序数，$c < ab$，如果序数d、e，使$c = ae + d$，且$d < a$，$e < b$，则称e为c除以a的商，d为c除以a的余数．

定义 145. 可约的序数（*ordinal décompasable*），不可约的序数（*ordinal indécompasable*）

序数$r > 0$，如果存在序数$s < r$、$t < r$使$s + t = r$，则称r可约，否则，称r不可约．

补充定理 263.

序数$r > 0$，当且仅当对任意序数$s < r$均有$s + r = r$时，r不可约．

证明：根据补充定理261可证．

补充定理 264.

序数$r > 0$，当且仅当对任意序数$a < r$、$b < r$，均有$a + b < r$时，r不可约．

证明：

充分性：根据补充定理263，$a + r = r$，由于$b < r$，根据补充定理257（2），$a + b < r$．

必要性：根据定义可证．

补充定理 265.

a、r为序数，$r > 1$，$a > 0$，则当且仅当r不可约时，ar不可约．

证明：

如果r可约，令$r = x + y$，其中$x < r$，$y < r$，根据补充定理245（3），$ar = ax + ay$，根据补充定理257（3），$ax < ar$，$ay < ar$，故ar可约．

反过来，如果ar可约，令$ar = p + q$，$p < ar$、$q < ar$，则存在e、d使$p = ae + d$，故$ar = ae + d + q$，因此$e < r$．如果r不可约，根据补充定理263，$r = e + r$，根据补充定理260（3），$ar = d + q$，由于$d + r = r$，故$d + ar = ar$，因此$q = ar$，矛盾．

补充定理 266.

a、r为序数，$a > 0$，$r > 0$，r不可约，则存在不可约的序数x，使$r = ax$．

证明：如果$r=ar$，得证；如果$r<ar$，则存在d、e使$r=ae+d$，且$d<r$，故$r=ae$，根据补充定理265，e不可约，得证.

补充定理 267.

不可约的序数族的最小上界是不可约的序数.

证明：令$c=\underset{i\in I}{sup}(x_i)$，设$a<c$，$b<c$，则存在$i\in I$，使$a<x_i$、$b<x_i$，故$a+b<x_i$，因此$a+b<c$，得证.

补充定理 268.

序数$a>0$，则$\{x|x$为序数与$x\le a$与x不可约$\}$有最大元.

证明：根据补充定理267可证.

元数学定义 63. 序数函数符号（*symbole fonctionnel ordinal*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令T为项：

令a_0为序数，如果$(x$为序数与$x\ge a_0)\Rightarrow T$为序数，则称T为关于x定义在$x\ge a_0$上的序数函数符号，或简称为定义在$x\ge a_0$上的序数函数符号.

令a_0、b_0为序数，如果$(x$为序数与$x\ge a_0$与y为序数与$y\ge b_0)\Rightarrow T$为序数，则称T为关于x、y定义在$x\ge a_0$、$y\ge b_0$上的序数函数符号，或简称为定义在$x\ge a_0$、$y\ge b_0$上的序数函数符号.

注：由于所有序数不能组成集合，故“序数函数符号”只是类似函数的一种表达式，并非真正的函数.

使用“序数函数符号”的主要意义是用于定义序数幂.

元数学定义 64. 标准序数函数符号（*symbole fonctionnel ordinal*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令T为项：

令a_0为序数，T为关于x定义在$x\ge a_0$上的序数函数符号，如果对任意序数x、y，$x<y$与$x\ge a_0\Rightarrow T<(y|x)T$，并且，对任意序数族$(x_i)_{i\in I}$且$i\ne\varnothing$，如果对任意$i\in I$，均有$x_i\ge a_0$，则$(\underset{i\in I}{sup}(x_i)|x)T=\underset{i\in I}{sup}((x_i|x)T)$，则称$T$为关于$x$的标准序数函数符号，在没有歧义的情况下也可以简称$T$为标准序数函数符号.

补充定理 269.

序数$a>0$，则$a+x$、ax均为定义在$x\ge 0$上的序数函数符号.

证明：根据补充定理257（2）、补充定理257（3）可证.

补充定理 270.

$w(x)$为定义在$x \geq a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \geq a_0$，$w(x) \geq x$，并且，$(x$为序数$)$与$(y$为序数$)$与$x < y$与$x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令$g(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq a_0$上的序数函数符号，并满足$((x$为序数$)$与$(y$为序数$)$与$x \geq a_0$与$y \geq a_0) \Rightarrow g(x,y) > x$.

$f(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq 1$上的序数函数符号，其按下列方式定义：

第一，对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,1) = w(x)$；

第二，对任意序数$x \geq a_0$， $y > 1$，$f(x,y) = \sup\limits_{z \in]0,y[} g(f(x,z),x)$.

那么，

（*1*）如果序数函数符号$f_1(x,y)$也满足上述条件，则对任意序数$x \geq a_0$， $y \geq 1$，$f_1(x,y) = f(x,y)$.

（*2*）对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,y)$是关于y定义在$y \geq 1$上的标准序数函数符号.

（*3*）对任意序数$x \geq a_0$， $y \geq 1$，均有$f(x,y) \geq x$，对任意序数$x \geq sup(a_0,1)$，$y \geq 1$，均有$f(x,y) \geq y$.

（*4*）如果序数a、b满足$a > 0$，$a \geq a_0$，$b \geq w(a)$，则存在唯一的序数x，使$f(a,x) \leq b$，$b < f(a,x+1)$，并且$x \leq b$.

（*5*）令$a_0 = 0$，$w(x) = x+1$，$g(x,y) = x+1$，则$f(x,y) = x+y$.

令$a_0 = 1$，$w(x) = x$，$g(x,y) = x+y$，则$f(x,y) = xy$.

（*6*）如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$，则$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$1 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow f(x,y) \leq f(x',y')$.

如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y < y' \Rightarrow g(x,y) < g(x,y')$与$g(x,y) \leq g(x',y)$，则$a_0 \leq x$与$x < x'$与$0 \leq y \Rightarrow f(x,y+1) < f(x',y+1)$.

（*7*）如果$w(x) = x$，并且，$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y < y' \Rightarrow g(x,y) < g(x,y')$与$g(x,y) \leq g(x',y)$，同时，对任意序数$x \geq a_0$，$g(x,y)$为关于$y$定义在$y \geq a_0$上的标准序数函数符号，此外，对任意序数$x \geq a_0$，$y \geq a_0$，$z \geq a_0$，均有$g(g(x,y),z)) = g(x,g(y,z))$，则对任意$x \geq a_0$，$y \geq 1$，$z \geq 1$，$g(f(x,y),f(x,z)) = f(x,y+z)$，$f(f(x,y),z) = f(x,yz)$.

（*8*）如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$，则对任意序数$x \geq a_0$，$y > 0$，均有$f(x,y+1) \geq w(x) + y$.

证明：

（1）根据证明规则60可证.

（2）根据定义，对任意$a > b$、$b \geq 1$，$f(x,a) > f(x,b)$，同时，对于集族$(x_i)_{i \in I}$且$i \neq \varnothing$，设$a = \sup\limits_{i \in I}(x_i)$，故$f(x,a) = \sup\limits_{z \in]0,a[}(g(f(x,z),x))$. 同时，$\sup\limits_{i \in I}(f(x_i)) = \sup\limits_{i \in I}(\sup\limits_{z \in]0,x_i[}(g(f(x,z),x)))$，对任意$i \in I$， $\sup\limits_{z \in]0,x_i[}(g(f(x,z),x)) \leq f(a)$，故$\sup\limits_{i \in I}(f(x,x_i)) \leq f(x,a)$，同时，对任意z$\in]0,a[$，存在$x_i \geq z$，故$g(f(x,z),x) \leq$

$\sup\limits_{z\in]0,x_i[}(g(f(x,z),x))$，故$g(f(x,z),x)\le \sup\limits_{i\in I}(f(x_i))$，因此$f(x,a)\le \sup\limits_{i\in I}(f(x_i))$，故$f(x,a)=\sup\limits_{i\in I}(f(x_i))$，综上，对任意$x\ge a_0$，$f(x,y)$是关于$y$定义在$y\ge 1$上的标准序数函数符号.

（3）根据定义可证$f(x,y)\ge x$，同时，$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[}(g(f(x,z),x))$，$y=1$时，显然$f(x,1)\ge 1$，$y>1$时，设命题对$]0,y[$成立，则$f(x,y)\ge=\sup\limits_{z\in]0,y[} z$，根据补充定理255，$f(x,y)\ge y$或$f(x,y)\ge b$，其中$b$为$y$的前导，如果$f(x,y)\ge b$，由于$b\in]0,y[$，因此$g(f(x,b),x)>b$，矛盾，因此$f(x,y)\ge y$，根据补充证明规则86，对任意$x\ge sup(a_0,1)$，$y\ge 1$，$f(x,y)\ge y$.

（4）令$A=\{y|f(a,y)\le b\}$，则$A\ne\varnothing$，令$z=\sup\limits_{i\in A} f(a,i)$，则$z=f(a,\sup\limits_{i\in A} i)$，故$\sup\limits_{i\in A} i$满足条件，存在性得证；设$x$、$x'$都满足条件，如果$x<x'$，则$x+1\le x'$，$f(a,x+1)\le f(a,x')$，矛盾，唯一性得证.

（5）前一部分：$y=1$显然成立，$y>1$时，设命题对$]0,y[$成立，则$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[}(x+z+1)$，根据补充定理257（1）、补充定理259（1）可证.

后一部分：$y=1$显然成立，$y>1$，设命题对$]0,y[$成立，则$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[}(xz+x)$，根据补充定理262可证.

（6）根据补充证明规则86可证.

（7）前半部分：根据定义可证$g(f(x,y),f(x,1))=f(x,y+1)$. 设命题对$]1,z[$成立，则$g(f(x,y),f(x,z))=g(f(x,y),\sup\limits_{i\in]0,z[} g(f(x,i),x))$，等于$\sup\limits_{i\in]0,z}[g(f(x,y),g(f(x,i),x))$，等于$\sup\limits_{i\in]0,z}[g(f(x,y+i),x)$，等于$\sup\limits_{j\in]0,y+z[} g(f(x,j),x)$，等于$f(x,y+z)$.

后半部分：$f(x,yz)=\sup\limits_{j\in]0,yz[} f(x,j+1)$，$f(f(x,y),z)=\sup\limits_{j\in]0,z}[f(x,y(i+1))$，如果存在$i+1=z$，则$f(x,yz)=f(f(x,y),z)$，如果对任意$i<z$均有$i+1<z$，对任意$j<yz$，根据补充定理262，存在$h$、$k$使$j=yh+k$，且$h<z$，$k<y$，故$j+1\le y(h+1)$，因此$\sup\limits_{j\in]0,yz[} f(x,j+1)\le \sup\limits_{j\in]0,z[} f(x,y(i+1))$，反过来，对任意$i<z$，$y(i+1)<yz$，故$\sup\limits_{j\in]0,yz[} f(x,j+1)\ge \sup\limits_{j\in]0,z[} f(x,y(i+1))$，得证.

（8）$y=0$显然成立；设命题对$]0,y[$成立，$z\in]0,y[$时，$g(f(x,z+1),x)\ge x+z+1$，则$f(x,y+1)\ge z\in]0,y[(w(x)+z+1)$，故$f(x,y+1)\ge w(x)+y$.

定义 146. 序数幂（*exponentiation ordinale*）

按下列方式定义序数函数符号$f(x,y)$：

第一，对任意$x\ge 2$，$f(x,1)=x$；

第二，对任意$x\ge 2$，$y>1$，$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[} f(x,z)x$；

第三，对任意序数a，$f(a,0)=1$；

第四，对任意序数$b \geq 1$，$f(0,b)=0$，$f(1,b)=1$．则称$f(a,b)$为a的b次序数幂，记作a^b．

补充定理 271.

$a>1 \Rightarrow a^b>1$．

证明：根据补充证明规则86可证．

补充定理 272.

a、b、b'为序数，如果$a>1$，$b>b'$，则$a^{b'}<a^b$，并且，a^b为关于b的标准序数函数符号．

证明：根据补充定理270（2）可证．

补充定理 273.

a、a'、b为序数，如果$a'>0$，$a \geq a'$，则$a'^b \leq a^b$．

证明：根据补充证明规则86可证．

补充定理 274.

a、x、y为序数，则$a^x a^y = a^{x+y}$，$(a^x)^y = a^{xy}$．

证明：根据补充定理270（7）可证．

补充定理 275.

a、b为序数，$a \geq 2$，$b \geq 1$，则$a^b \geq ab$．

证明：$a^b = \underset{i\in]0,b[}{sup}\, a^i a$，$ab = \underset{i\in]0,b[}{sup}\, (ai+a)$，根据补充证明规则86可证．

补充定理 276.

a、b为序数，$a \geq 2$，$b \geq 1$，则存在唯一的序数c、d、e，使$b=a^c d+e$，且$d>0$、$d<a$、$e<a^c$．

证明：根据补充定理270（4）、补充定理262可证．

定义 147. 传递集合（*ensemble transitif*）

如果$(\forall x)(x\in X \Rightarrow x\subset X)$，则称$X$为传递集合．

补充定理 277.

（*1*）$\varnothing$、$\{\varnothing\}$、$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$、$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$为传递集合．

（*2*）如果Y为传递集合，则$Y\cup\{Y\}$为传递集合．

（*3*）如果$(Y_i)_{i\in I}$为传递集族，则$\bigcup\limits_{i\in I} Y_i$为传递集合，如果$i\neq\varnothing$，则$\bigcap\limits_{i\in I} Y_i$为传递集合．

证明：根据定义可证.

定义 148. 伪序数（*pseudo-ordinal*）

如果$(\forall Y)(Y \subset X$与$(Y$为传递集合$)$与$Y \neq X \Rightarrow Y \in X)$，则称$X$为伪序数.

定义 149. 正式集合（*ensemble decent*）

如果$(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \notin x)$，则称$X$为正式集合.

补充定理 278.

伪序数是传递集合也是正式集合.

证明：令A为伪序数，$B = \{Y|Y \subset A$与$(Y$为传递集合$)$与$(Y$为正式集合$)\}$，$C = \bigcup\limits_{Y\in B} Y$，因此$C \subset A$. 根据补充定理277（3），$C$为传递集合. 同时，对任意$x \in C$，故存在$Y \in B$使$x \in Y$，故$x \notin x$，因此$C$为正式集合.

如果$C \in C$，则存在$Y \in B$使$C \in Y$，故$C \notin C$，矛盾；因此，$C \notin C$.

如果$C \neq A$，则$C \in A - C$，根据补充定理277（2），$C \cup \{C\}$为传递集合，

同时，对任意$x \in C \cup \{C\}$，如果$x = C$，则$x \notin x$，如果$x \neq C$，则$x \in C$，故$x \notin x$，因此，$C \cup \{C\}$为正式集合，故$C \cup \{C\} \subset C$，矛盾.

因此$C = A$，得证.

补充定理 279.

如果X是伪序数，则$X \cup \{X\}$也是伪序数.

证明：根据定义可证.

补充定理 280.

X、Y均为伪序数，则$X \subset Y$或$Y \subset X$.

证明：根据补充定理279、补充定理277（3），$X \cap Y$为传递集合，且$X \cap Y \notin X \cap Y$，因此，$X \cap Y = X$或$X \cap Y = Y$，得证.

补充定理 281.

X为传递集合，如果对任意$x \in X$，x均为伪序数，则X为伪序数.

证明：如果$Y \subset X$，$Y \neq X$，Y为传递集合，对任意$x \in X - Y$，$y \in Y$，根据补充定理280，$x \subset y$或$y \subset x$. 如果$x \subset y$，由于$x \neq y$，故$x \in y$，又因为$y \subset Y$，故$x \in Y$，矛盾；因此，$y \subset x$，由于$x \neq y$，故$y \in x$，因此$Y \subset x$. 如果$Y = x$，则$Y \in X$，如果$Y \neq x$，则$Y \in x$，由于$x \subset X$，故$y \in X$，得证.

补充定理 282.

$\varnothing$为伪序数.

证明：根据定义可证.

补充定理 283.

伪序数的每一个元素都是伪序数.

证明：设X为伪序数，$A=\{Y|Y\subset X$与(Y为传递集合)与$(\forall x)(x\in Y\Rightarrow x$为伪序数$)\}$，$B=\bigcup\limits_{Y\subset A}Y$，则$B$为传递集合，故$B$为伪序数，因此$B\notin B$. 根据补充定理279，$B\cup\{B\}$也是伪序数，且$B\cup\{B\}\neq B$. 如果$B\neq X$，则$B\in X$，故$B\cup\{B\}\subset X$，因此，$B\cup\{B\}\in A$，所以$B\cup\{B\}\subset B$，矛盾. 因此$B=X$，得证.

补充定理 284.

（*1*）令$(X_i)_{i\in I}$是伪序数族，且$i\neq\varnothing$，则$\bigcap\limits_{i\in I}X_i$是$\{Y|(\exists i)(i\in I$与$Y=X_i)\}$按包含关系排序的偏序集的最小元.

（*2*）E为伪序数，则$x\in E$与$y\in E$与$x\subset y$为良序.

证明：

（1）令$X=\bigcap\limits_{i\in I}X_i$，根据补充定理281、补充定理277（3），$X$为伪序数，故$X\notin X$. 根据补充定理279，$X\cup\{X\}$为伪序数，如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq X$，则$X\cup\{X\}\subset X$，矛盾. 因此，存在$i\in I$使$X_i=X$，其即为最小元.

（2）根据补充定理284（1）可证.

补充定理 285.

对任意序数a，存在唯一的伪序数E_a，使$Ord(Ea)=a$.

证明：由于$Ord(\varnothing)=0$，故命题对$[0,1[$成立，设命题对$[0,a[$成立，令$X=\bigcup\limits_{i\in[0,a[}\{E_i\}$，并且是按包含关系排序的偏序集. 根据补充定理281、补充定理277（3），E_a为伪序数，根据补充定理253（1），$Ord(E_a)=a$，同时，根据补充定理280，这样的伪序数是唯一的. 根据补充证明规则86得证.

注：本补充定理表明，序数和伪序数一一对应.

习题 101.

$K=\{F|F$为在E上的偏序$\}$，并且是按($F\in K$与$F'\in K$与F是比F'更细的偏序)排序的偏序集，求证：K的极小元是在E上的全序；对在E上的任意偏序F，F的图是所有不等于E且比F更细的全序的图的交集；进而，任何偏序集同构于全序集族的乘积的一个子集.

证明：即补充定理227、补充定理228、补充定理229.

习题 102.

E为集合，$P=\{F|F\subset E$与(F是按E的偏序在F上导出的偏序排序的良序集$)\}$，求证：

（*1*）"(X是Y的片段"是关于X、Y在P上的偏序关系；

（2）P是归纳集；

（3）存在E的良序子集，在E上没有严格上界.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

（3）根据定理80，P有极大元F．假设F有严格上界x，则$F\cup\{x\}\in P$，且$F<F\cup\{x\}$，矛盾，因此F没有严格上界.

习题 103.

E为偏序集，求证：存在A、B，使$A\cup B=E$，$A\cap B=\varnothing$，且A为良序集，B没有最小元．并举出这样的例子.

证明：

令B为E的所有没有最小元的子集的并集，如果B有最小元x，设$x\in X$，X为没有最小元的E的子集，则x为X的最小元，矛盾．令$A=E-B$，如果A的子集Y没有最小元，则$Y\subset B$，矛盾.

例：E为整数集，A为E的任意有限子集，$B=E-A$.

注：习题103例子部分涉及未介绍的“整数”知识.

习题 104.

对任意偏序集E，存在$F\subset E$，F为部分良序集，并且是E的共尾子集.

证明：即补充定理231（1）.

习题 105.

E为偏序集，$F=\{X|X\text{为}E\text{的自由子集}\}$，并且为按$X\in F$与$Y\in F$与$(\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y\text{与}x\leq y))$排序的偏序集，求证：如果$E$为归纳集，则$F$有极大元.

证明：根据定理80，E有极大元，令$X=\{x|x\text{为}E\text{的极大元}\}$，则$X\in F$．如果存在$E$的自由子集$Y$使$X\leq Y$，则$X\subset Y$，若$Y-X\neq\varnothing$，则令$u\in Y-X$，根据定理81，存在$E$的极大元$v$，使$u\leq v$，又因为$v\in X$，故$v\in Y$，矛盾．故$X$是$F$的极大元.

习题 106.

E为偏序集，f为E到E的映射，并且对任意$x\in E$，$f(x)\geq x$：

（1）C_a为a关于函数f的链，求证：

对任意$a\in E$，$C_a\in H$；

E的偏序子集C_a，为良序集；

如果C_a在E上有最小上界b，则$b\in C_a$并且$f(b)=b$.

（2）如果E为归纳集，求证：存在$b\in E$，使$f(b)=b$.

证明：

（1）即补充定理232.

（2）即补充定理233.

习题 107.

E为良序集，F为在E上的闭包的集合．F按关于u、v的偏序关系"$u \in F$与$v \in F$与$(\forall x)(x \in E \Rightarrow u(x) \leq v(x))$"排序．对任$u \in F$，令$I(u)$为$u$的不动点集合：

（*1*）求证：当且仅当$I(v) \subset I(u)$时，$u \leq v$.

（*2*）求证：如果E的任何两个元素在E上有最大下界，则F的任何两个元素在F上有最大下界；如果E是完备格，则F是完备格.

（*3*）求证：如果E为归纳集，则F的任何两个元素在F上有最小上界.

证明：

（1）当$u \leq v$时，根据定义可证$I(v) \subset I(u)$；反过来，当$I(v) \subset I(u)$时，对任意$x \in E$，$u(v(x)) = v(x)$，由于$u(v(x)) \geq u(x)$，得证.

（2）对任意$u \in F$、$v \in F$，令t为映射$x \mapsto inf(u(x), v(x))$，根据定义，$t \in F$，且$t$为$u$、$v$的最大下界．同理可证映射$x \mapsto sup(u(x), v(x))$ 为u、v的最小上界，因此，如果E是完备格，则F是完备格.

（3）对于$u \in F$、$v \in F$，令$f = u \circ v$，根据定义，$I(f) = I(u) \bigcap\limits_I (v)$．对任意$x \in E$，令$w(x)$为$x$的链$C_x$的最大元．则对任意$x \in E$、$y \in E$、$x \leq y$，$x \leq w(y)$，同时，根据习题106（1），$C_x$为良序集．令$X = \{a | a \in C_x$与$a \leq w(y)\}$，则$X$非空，令$Y = C_x - X$，如果$Y$非空，则$Y$有最小元$b$，因此对任意$c \in X$，$c \leq w(y)$，故$f(c) \leq w(y)$，因此$f(c) \in X$，故$f(c) < b$．所以$w(y)$、$b$都是X的上界．根据定义，存在$X$的子集$Z$，$Z$在$X$上有最小上界，且该最小上界是$Y$的元素，故$sup\ Z = b$．又因为$w(y)$也是$X$的上界，故也是$Z$的上界，因此$b \leq w(y)$，矛盾．故$Y$为空，即$w(x) \leq w(y)$．$w$满足闭包的其他条件，故$w$是闭包，并且，$I(w) = I(u) \cap I(v)$；根据习题107（1），$w$为最小上界.

习题 108.

E为偏序集，$a \in E$，R_a为E的以a为最小元的右方分支子集的集合，并按包含关系排序：

（*1*）求证：R_a有极大元.

（*2*）E为右方分叉集，求证：R_a的极大元均为完全右方分支集.

（*3*）给出一个是右方分叉集但不是右方分支集的例子．并且，设E为习题*100*（*2*）所称的集合，F为不包含可数共尾子集的全序集，$E \times F$为完全右方分支集.

（*4*）E为集合，对任意$x \in E$，区间$]\leftarrow, x]$均为全序集，是否一定存在E的共尾右方无向子集.

证明：

（1）根据定理82可证.

（2）如果R_a的极大元U有极大元x，根据补充定理213（2），存在$y \in E$、$z \in E$使$y > x$、$z > x$，且y和z是不可比较的. 因此$U \cup \{y, z\}$也是右方分支集，矛盾，得证.

（3）设E为习题100（2）所称的集合，$\{R\} \cup E$按包含关系的相反关系排序，则其是右方分叉集，但不是右方分支集. 同时，根据定义可证$E \times F$为完全右方分支集.

（4）如果E为无最大元的全序集，显然不存在.

注：

习题108（3）涉及尚未介绍的“实数”知识.

原书习题108（4）有误.

习题 109.

求证：当且仅当指标集和各偏序集均为良序集时，偏序集族的序数和为良序集.

证明：即补充定理217（3）.

习题 110.

E、I为偏序集，$\{a, b\}$为良序集，其中$a < b$；$F_a = I$，$F_b = E$. 求证：$(E)_{i \in I}$的偏序集族的序数和，同构于集族$(F_i)_{i \in \{a,b\}}$的字典式乘积.

证明：根据定义可证.

习题 111.

I为良序集，$(E_i)_{i \in I}$为偏序集族，并且对任意$i \in I$，E_i均中少有一对可比较的不同元素. 则当且仅当I为有限集合，并且对任意$i \in I$，E_i均为良序集时，$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积为良序集.

证明：

必要性：如果$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积为良序集，根据定义，对任意$i \in I$，E_i均为良序集. 同时，如果I为无穷集合，令k的自然数集N到I的子集的同构，$G(n) = \{(x, y) | x \in E_k(n)与y \in E_k(n)与x < y\}$，则对任意$n \in N$，$G(n) \neq \varnothing$. 进而，令$f(n) = pr_1(\tau_z(z \in G(n)))$，$g(n) = pr_2(\tau_z(z \in G(n)))$.

令$F(n) = \{z | (\exists i)(i \in N - n与z = (k(i), g(i)))\} \cup \{z | (\exists i)(i \in I - k\langle N \rangle与z = (i, tau_a(a \in E_i)))\}$，$A = \{X | (\exists n)(n \in N与X = F(n))\}$，那么对任意$A$的元素$F(n)$，令自然数$m > n$，则$F(n) > F(m)$，故$A$没有最小元，矛盾. 必要性得证.

充分性：对I的元素数目用数学归纳法可证.

注：习题111涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 112.

I为全序集，$(E_i)_{i \in I}$为偏序集族，$E = \prod\limits_{i \in I} E_i$，$R$为公式$(\{i | i \in I与pr_i x \neq pr_i y\}是良序集)$与$((\exists j)(j是\{i | i \in I与pr_i x \neq pr_i y\}的最小元)与(pr_j x \leq pr_j y))$.

求证：R为关于x、y在E上的偏序关系．如果对任意$i \in I$，E_i均为全序集，则E关于"x和y是可比较的"的连通分量是全序集．如果对任意$i \in I$，E_i都有不少于两个元素，则当且仅当I为良序集，且对任意$i \in I$，E_i均为全序集时，E为全序集，并且此时，E为$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积．

证明：

根据定义可证R为关于x、y在E上的偏序关系．

设x、y是可比较的，y、z是可比较的，令$A = \{i | i \in I$与$pr_i x \neq pr_i y\}$，$B = \{i | i \in I$与$pr_i y \neq pr_i z\}$，则$A \cup B$是良序集，$\{i | i \in I$与$pr_i x \subset pr_i y\} A \cup B$，也是良序集．故$x$、$z$是可比较的．使用数学归纳法可证$E$关于"$x$和$y$是可比较的"的连通分量是全序集．

充分性根据定义可证．

必要性：若E为全序集，令$f(i) = \tau_x(x \in E_i)$，$g(i) = \tau_x(x \in E_i - \{f(i)\})$．则对$I$的任意子集$J$，令$x = \bigcup\limits_{i \in I} \{(i, f(i))\}$，$y = (\bigcup\limits_{i \in I-J} \{(i, f(i))\}) \cup (\bigcup\limits_{i \in J} \{(i, g(i))\})$，由于$x$、$y$是可比较的，故$J$为良序集，根据定义，$I$为良序集．

同时，对任意$i \in I$、$x \in E_i$、$y \in E_i$，令$A = (\bigcup\limits_{j \in I-i} \{(j, f(j))\}) \cup \{i, x\}$，$B = (\bigcup\limits_{j \in I-i} \{(j, f(j))\}) \cup \{i, y\}$，由于$A$、$B$是可比较的，故$x$、$y$是可比较的．

综上，必要性成立．

根据定义可证，此时，E为$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积．

注：习题112涉及尚未介绍的知识．

习题 113.

（1）令R为公式(F为在E上的偏序)与(F'为在E'上的偏序)与(按F排序的E同构于在F'上排序的E')，求证：R为关于F、F'的等价关系．同时，当且仅当两个偏序的偏序类相等时，这两个偏序集同构．

（2）令S为公式(X为偏序类)与(Y为偏序类)与$(\exists A)(\exists B)$((A为按偏序类为X的偏序排序的偏序集)与(B为按偏序类为Y的偏序排序的偏序集)与$(\exists Z)$($Z \subset Y$与X同构于Z))．求证：S为关于X、Y的预序关系．

（3）I为偏序集，$(E_i)_{i \in I}$为偏序集族，F为其序数和，求证：$\sum\limits_{i \in I} Ord(E_i) = Ord(F)$．

$(J_k)_{k \in K}$为偏序集族，其和为I，$(l_i)_{i \in I}$为偏序类族，求证：$\sum\limits_{k \in K} (\sum\limits_{i \in J_k \times \{k\}} l_i) = \sum\limits_{i \in I} l_i$．

（4）I为良序集，$(E_i)_{i \in I}$为偏序集族，F为其字典式乘积，求证：$\mathsf{P}_{i \in I} Ord(E_i) = Ord(F)$．

$(J_k)_{k \in K}$为良序集族，其序数和为良序集I，$(l_i)_{i \in I}$为偏序类族，求证：$\mathsf{P}_{k \in K} (\mathsf{P}_{i \in J_k \{k\}} l_i) = \mathsf{P}_{i \in I} l_i$．

（5）I为良序集，$(m)_{i \in I}$为偏序类族，$Ord(I) = l$，求证：$\sum\limits_{i \in I} m = ml$．

l、m、n为偏序类，求证：$(l+m)+n = l+(m+n)$，$(lm)n = l(mn)$，$l(m+n) = lm+ln$．

（6）令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$、$(m_i)_{i\in I}$为两个偏序类族，对任意$i\in I$，$l_i\prec m_i$，求证：$\sum\limits_{i\in I}l_i\prec\sum\limits_{i\in I}m_i$，并且，如果$I$是良序集，则$\prod\limits_{i\in I}l_i\prec\prod\limits_{i\in I}m_i$.

令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，$J\subset I$，求证：$\sum\limits_{i\in J}l_i\prec\sum\limits_{i\in I}l_i$，并且，如果$I$是良序集，并且对任意$i\in I$，$l_i\neq\varnothing$，则$\prod\limits_{i\in J}l_i\prec\prod\limits_{i\in I}l_i$.

（7）l为偏序类，l^*表示按l相反关系排序的l的定义域，求证：$(l^*)^*=l$，$(\sum\limits_{i\in I}l_i)^*=(\sum\limits_{i\in I^*}l_i^*)$，其中$I^*$表示按相反关系排序的$I$.

证明：

（1）即补充定理236、补充定理237.

（2）即补充定理238.

（3）即补充定理239、补充定理240.

（4）即补充定理242、补充定理243.

（5）即补充定理244、补充定理245.

（6）即补充定理246.

（7）根据定义可证.

习题 114.

（1）I为良序集，$(l_i)_{i\in I}$为序数族，求证：$\sum\limits_{i\in I}l_i$为序数；如果I为有限集合，则$\prod\limits_{i\in I}l_i$为序数；a为序数，则$a+0=a$；$0+a=a$；$a1=a$；$1a=a$.

（2）公式l为序数与m为序数与$l\prec m$，为良序.

（3）a为序数，求证：公式x为序数与$x\leq a$是x上的集合化公式. 并且，令$O_a=\{x|x$为序数与$x<a\}$，则O_a为良序集且$Ord(O_a)=a$.

（4）a为序数，求证：序数族$(x)_{x<a}$的最小上界为a或a的前导.

证明：

（1）前半部分序数和即补充定理247（1）；序数乘积对I的元素数目用数学归纳法可证. 后半部分即补充定理249（1）.

（2）即补充定理251.

（3）前半部分即补充定理252（2），后半部分即补充定理253（1）.

（4）即补充定理255.

注：习题114（1）涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 115.

（1）a、b为序数：

求证：$a<b\Leftrightarrow a+1\leq b$；

x为序数，$a<b$，求证：$x+a<x+b$，$a+x\leq b+x$，$ax\leq bx$；

x为序数，$a<b$，$x>0$，求证：$xa<xb$.

（2）不存在一个集合，使所有序数都是其元素.

（3） a、b、c为序数：

求证：$c+a<c+b \Rightarrow a<b$，$a+c<b+c \Rightarrow a<b$.

如果$c>0$，求证：$ca<cb \Rightarrow a<b$，$ac<bc \Rightarrow a<b$.

（4）a、b、c为序数，求证：$c+a<c+b \Rightarrow a<b$；如果$c>0$，则$ca<cb \Rightarrow a<b$；

（5）a、b为序数，$a \le b$，求证：存在唯一的序数c，使$a+c=b$；

（6）a、b、c为序数，$c<ab$，求证：存在唯一的一组序数d、e，使$c=ae+d$，且$d<a$，$e<b$.

证明：

（1）即补充定理257（1）、补充定理257（2）、补充定理257（3）；

（2）即补充定理259；

（3）即补充定理260（1）、补充定理260（2）；

（4）即补充定理260（3）、补充定理260（4）；

（5）即补充定理261；

（6）即补充定理262.

习题 116.

（1）$r>0$，求证：当且仅当对任意序数$s<r$均有$s+r=r$时，r为不可约的序数.

（2）a、r为序数，$r>1$，$a>0$，求证：当且仅当r不可约时，ar不可约.

（3）a、r为序数，$a>0$，$r>0$，r不可约，求证：存在不可约的序数x，使$r=ax$.

（4）序数$a>0$，求证：$\{x|x$为序数与$x \le a$与x不可约$\}$有最大元.

（5）求证：不可约的序数族的最小上界是不可约的序数.

证明：

（1）即补充定理263.

（2）即补充定理265.

（3）即补充定理266.

（4）即补充定理268.

（5）即补充定理267.

习题 117.

（1）序数$a>0$，求证：$a+x$、ax均为定义在$x \ge 0$上的序数函数符号.

（2）$w(x)$为定义在$x \ge a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \ge a_0$，$w(x) \ge x$，并且，$(x$为序数$)$与$(y$为序数$)$与$x<y$与$x \ge a_0 \Rightarrow w(x)<w(y)$.

令$g(x,y)$为定义在$x \ge a_0$、$y \ge a_0$上的序数函数符号，并满足$((x$为序数$)$与$(y$为序数$)$与$x \ge a_0$与$y \ge a_0) \Rightarrow g(x,y)>x$.

$f(x,y)$为定义在$x \ge a_0$、$y \ge 1$上的序数函数符号，其按下列方式定义：

第一，对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,1)=w(x)$；

第二，对任意序数$x \geq a_0$， $y>1$，$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[} g(f(x,z),x)$.

求证：

如果序数函数符号$f_1(x,y)$也满足上述条件，则对任意序数$x \geq a_0$， $y \geq 1$，$f_1(x,y)=f(x,y)$.

对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,y)$是关于y定义在$y \geq 1$上的标准序数函数符号.

对任意序数$x \geq a_0$， $y \geq 1$，均有$f(x,y) \geq x$，对任意序数$x \geq sup(a_0,1)$，$y \geq 1$，均有$f(x,y) \geq y$.

如果序数a、b满足$a>0$，$a \geq a_0$，$b \geq w(a)$，则存在唯一的序数x，使$f(a,x) \leq b$，$b<f(a,x+1)$，并且$x \leq b$.

（*3*）令$a_0=0$，$w(x)=x+1$，$g(x,y)=x+1$，求证：$f(x,y)=x+y$.

令$a_0=1$，$w(x)=x$，$g(x,y)=x+y$，求证：$f(x,y)=xy$.

（*4*）如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$，求证：$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$1 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow f(x,y) \leq f(x',y')$.

如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y<y' \Rightarrow g(x,y)<g(x,y')$与$g(x,y) \leq g(x',y)$，求证：$a_0 \leq x$与$x<x'$与$0 \leq y \Rightarrow f(x,y+1)<f(x',y+1)$.

（*5*）如果$w(x)=x$，并且，$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y<y' \Rightarrow g(x,y)<g(x,y')$与$g(x,y) \leq g(x',y)$，同时，对任意序数$x \geq a_0$，$g(x,y)$为关于$y$定义在$y \geq a_0$上的标准序数函数符号，此外，对任意序数$x \geq a_0$，$y \geq a_0$，$z \geq a_0$，均有$g(g(x,y),z))=g(x,g(y,z))$，求证：对任意$x \geq a_0$，$y \geq 1$，$z \geq 1$，$g(f(x,y),f(x,z))=f(x,y+z)$，$f(f(x,y),z)=f(x,yz)$.

证明：

（1）即补充定理269.

（2）即补充定理270（1）、补充定理270（2）、补充定理270（3）、补充定理270（4）.

（3）即补充定理270（5）.

（4）即补充定理270（6）.

（5）即补充定理270（7）.

习题 118.

（*1*）a、a'、b、b'为序数，求证：如果$a>1$，$b>b'$，则$a^{b'}<a^b$，并且，a^b为关于b的标准序数函数符号．此外，如果$a'>0$，$a \geq a'$，则$a'^b \leq a^b$.

（*2*）a、x、y为序数，求证：$a^x a^y=a^{x+y}$，$(a^x)^y=a^{xy}$.

（*3*）a、b为序数，$a \geq 2$，$b \geq 1$，求证：$a^b \geq ab$.

（*4*）a、b为序数，$a \geq 2$，$b \geq 1$，求证：存在唯一的序数c、d、e，使$b=a^c d+e$.

证明：

（1）即补充定理272、补充定理273.

（2）即补充定理274.

（3）即补充定理275.

（4）即补充定理276.

习题 119.

a、b为序数，E、F为良序集，且$a = Ord(E)$，$b = Ord(F)$，令$G = \{g|g \in E^F$与$F - \{y|y \in F$与$(y, E$的最小元$) \in g\}$为有限集合$\}$，F^*为F按相反关系排序的偏序集．E^{F^*}按公式$(\{i|i \in I$与$(x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\}$是良序集$)$与$((\exists j)(j$是$\{i|i \in I$与$(x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\}$的最小元$)$与$(x, F, E)(i) \leq (y, F, E)(i))$排序，求证：$G$是$E^{F^*}$关于“$x$和$y$是可比较的”的连通分量，并且，$G$是良序集，$Ord(G) = a^b$.

证明：

令$T_{x,y}$表示集合$\{i|i \in I$与$(x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\}$，如果$x$和$y$是可比较的，则$T_{x,y}$的任何子集均有最大元和最小元，故$T_{x,y}$是有限集合，反过来，如果$T_{x,y}$是有限集合，则$x$和$y$是可比较的.

令$x \in G$，如果y和x属于同一个连通分量，运用数学归纳法可证$y \in G$．反过来，如果$x \in G$、$y \in G$，则x、y是可比较的．故G是E^{F^*}关于“x和y是可比较的”的联通分量，并且，G是全序集.

令F的最小元为m，$I_g = F - \{y|y \in F$与$(y, E$的最小元$) \in g\}$，对G的任意子集Y，令$A_Y = \bigcup\limits_{g \in Y} I_g$．对于$G$的子集$X$，考虑所有满足$(\forall x)(\forall y)(x \in Y$与$y \in X - Y \Rightarrow x < y)$的集合$Y$，则所有$A_Y$均为有限集合，

设其中元素数目最小的是A_Z，如果$A_Z = \varnothing$，即$x \mapsto m$的图是G的最小元；如果$A_Z \neq \varnothing$，令其最小元为v，设$\{u|(\exists g)(g \in Z$与$(g, F, E)(v) = u)\}$的最小元为w，且$x \in Z$、$(g, F, E)(v) = u$，若有$y \in Z$、$(g, F, E)(v) = u$、$y \neq x$，则$A\{g|(g, F, E)(v) = u)\}$的元素数目小于A_Z的元素数目，矛盾，故x为G的最小元.

如果良序集E和E'同构、F和F'同构，则相应的G、G'同构．令$P_{a,b}$为和a、b相应的$Ord(G)$，则$P_{a,0} = 1$，当$b = c + d$时，$P_{a,b} = P_{a,c}P_{a,d}$，同时，当$b < b'$时，$P_{a,b} \leq P_{a,b'}$，因此，$P_{a,b} \geq \underset{i \in]0,b[}{sup} P_{a^i,a}$．如果$P_{a,b} > \underset{i \in]0,b[}{sup} P_{a^i,a}$，设在$G$上，$\underset{i \in]0,b[}{sup} P_{a^i,a} = Ord(S_x)$，$Q = \{i|(i, m) \notin x\}$，设$Q$的最大元是$t$，则$x \in P_{a,Ord[0,t]}$．一方面，$Ord(]0, x]) > \underset{i \in]0,b[}{sup} P_{a^i,a}$，另一方面，$P_{a,Ord([0,t])} = P_{a,Ord([0,t[)}a$，$Ord(]0, x]) \leq P_{a,t}a$，同时，$Ord([0, t[) < b$，矛盾．故$P_{a,b} = \underset{i \in]0,b[}{sup} P_{a^i,a}$．因此$P_{a,b} = a^b$.

注：习题119涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 120.

（*1*）如果Y为传递集合，求证：$Y \cup \{Y\}$为传递集合．如果$(Y_i)_{i \in I}$为传递集族，求证：$\bigcup\limits_{i \in I} Y_i$为传递集合，如果$i \neq \varnothing$，求证：$\bigcap\limits_{i \in I} Y_i$为传递集合.

（*2*）求证：伪序数是传递集合也是正式集合．并且，如果X是伪序数，$X \cup \{X\}$也是伪序数．

（*3*）X、Y均为伪序数，求证：$X \subset Y$或$Y \subset X$．

（*4*）X为传递集合，如果对任意$x \in X$，x均为伪序数，求证：X为伪序数．

（*5*）求证：$\varnothing$为伪序数．伪序数的每一个元素都是伪序数．

（*6*）令$(X_i)_{i \in I}$是伪序数族，且$i \neq \varnothing$，求证：$\bigcap\limits_{i \in I} X_i / \{Y | (\exists i)(i \in I$与$Y = X_i)\}$按包含关系排序的偏序集的最小元．并且，如果$E$为伪序数，则$x \in E$与$y \in E$与$x \subset y$为良序．

（*7*）求证：对任意序数a，存在唯一的伪序数E_a，使$Ord(E_a) = a$．并且，序数0、1、2、3相应的伪序数分别是$\varnothing$、$\{\varnothing\}$、$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$、$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$．

证明：

（1）即补充定理277.

（2）即补充定理278、补充定理279.

（3）即补充定理280.

（4）即补充定理281.

（5）即补充定理282、补充定理283.

（6）即补充定理284.

（7）前半部分即补充定理285，后半部分根据定义可证.

3.3 集合等势，基数（Ensembles équipotents, cardinaux）

定义 150. 等势（*équipotent*）

如果存在X到Y的双射，则称X和Y等势，记作$Eq(X, Y)$．

补充定理 286.

（*1*）$Eq(X, Y)$为等价关系．

（*2*）如果$Eq(X, Y)$，则$\tau_Z(Eq(X, Z)) = \tau_Z(Eq(Y, Z))$．

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理286（1）、公理模式7可证.

定义 151. 基数（*cardinal*）

$\tau_Z(Eq(X, Z))$称为X的基数，记作$Card(X)$．

补充定理 287.

$Eq(Card(X), X)$．

证明：根据公理模式5可证.

定理 88.

$Eq(X,Y) \Leftrightarrow Card(X)=Card(Y)$.

证明：根据补充定理287可证.

补充定理 288.

$(\exists Z)(Z\subset Y$与$Eq(X,Z)) \Leftrightarrow (\exists f)(f$为$X$到$Y$的单射).

证明：根据定义可证.

补充定理 289.

a为基数，则$Card(a)=a$.

证明：a为基数，故存在X，使$Card(X)=a$，根据补充定理287，$Eq(a,X)$，根据定理88，$Card(a)=a$.

定义 152. 基数*0*（*cardinal zéro*），基数*1*（*cardinal un*），基数*2*（*cardinal deux*）

$Card(\varnothing)$称为基数0；$Card(\{\varnothing\})$称为基数1；$Card(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})$称为基数2. 在没有歧义的情况下也可以分别简称为0、1、2.

补充定理 290.

（*1*）$0=\varnothing$;

（*2*）$Card(A)=0 \Leftrightarrow A=\varnothing$;

（*3*）$Card(A)=1 \Leftrightarrow (\exists x)(A=\{x\})$;

（*4*）$Card(A)=2 \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(x\neq y$与$A=\{x,y\})$.

证明：

（1）$(\exists Z)(Z=\varnothing)$，即$\tau_Z(Z=\varnothing))=\varnothing$，又因为$Z=\varnothing \Leftrightarrow Eq(\varnothing,Z)$，因此$0=\varnothing$.

（2）根据定义可证.

（3）根据定义可证.

（4）根据定义可证.

定理 89. 基数之间的良序关系

$(X$为基数)与$(Y$为基数)与$(\exists Z)(Z\subset Y$与$Eq(X,Z))$为X、Y之间的良序关系.

证明：

根据定义可知其为偏序关系.

令R为$(\exists Z)(Z\subset Y$与$Eq(X,Z))$，对任意元素均为基数的集合E，令$A=\bigcup\limits_{X\in E}X$，根据定理78，在$A$上存在良序.

根据定理87，任何A的子集同构于A的一个片段，对任意$X \in E$，考虑和X等势的A的片段的集合，根据定理73（2），该集合有最小元，用$f(X)$表示该最小元.

当$f(X) \subset f(Y)$时，存在$f(X)$到$f(Y)$的单射，因此存在X到Y的单射，故$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X,Z))$；反过来，若$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X,Z))$，则存在X和$f(Y)$的某个子集等势，此时，若$f(Y) \subset f(X)$且$f(X) \neq f(Y)$，则根据定理87、定理75，$f(X)$的某个片段和X等势，与$f(X)$的定义矛盾，故公式R与$X \in E$与$Y \in E \Leftrightarrow f(X) \subset f(Y)$. 根据定理73（2），$A$的片段集合为良序集，得证.

记号定义 22. 基数之间的不等式（*inégalité entre cardinaux*）

$(X$为基数$)$与$(Y$为基数$)$与$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X,Z))$记作$X \leq Y$或$Y \geq X$.

补充定理 291.

（*1*）X和Y的子集等势$\Leftrightarrow Card(X) \leq Card(Y)$.

（*2*）$X \subset Y \Rightarrow Card(X) \leq Card(Y)$.

（*3*）a为基数，对任意Y，如果$a \leq Card(Y)$，则存在$Z \subset Y$，使$Card(Z) = a$.

（*4*）a为基数，则$a \geq 0$.

（*5*）a为基数，则$a \neq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$.

证明：

（1）根据补充定理288可证.

（2）由于X和X等势，根据补充定理291（1），得证.

（3）根据补充定理289，$Card(a) = a$，根据补充定理291（1），a和Y的子集等势，设该子集为Z，得证.

（4）令$Card(A) = a$，$\varnothing \subset A$，得证.

（5）令$Card(A) = a$，如果$a \neq 0$，则$a \neq \varnothing$，故存在$x \in A$，因此$\{x\} \subset A$；反过来，如果$a \geq 1$，则$a \neq \varnothing$，故$a \neq 0$，得证.

定理 90.

任意两个集合中，必有一个集合和另一个集合的子集等势.

证明：根据定理84、定理78可证.

定理 91.

两个集合之中的任何一个都和另一个集合的子集等势，则两个集合等势.

证明：根据定理86、定理78可证.

补充定理 292.

$(\exists X)(x = Card(X)$与$X \subset A)$是x上的集合化公式.

证明：由于$X \in \mathcal{P}(A)$，根据证明规则53可证.

补充定理 293.

a为基数，则(x为基数)与$x \le a$是x上的集合化公式.

证明：根据定义，(x为基数)与$x \le a \Leftrightarrow (\exists X)(x = Card(X)$与$X \subset a)$，根据补充定理292可证.

定理 92.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，则存在唯一的基数b，使对任意$i \in I$，$a_i \le b$，并且，如果c满足对任意$i \in I$，$a_i \le c$，则$b \le c$.

证明：令E为$(a_i)_{i\in I}$的和，则对任意$i \in I$，$a_i \le Card(E)$，令$F = \{x|(x$为基数)与$x \le Card(E)\}$，根据定理89，F为良序集，且对任意$i \in I$，$a_i \in F$，根据补充定理216，集族$(a_i)_{i\in I}$有最小上界b. 另一方面，如果c满足对任意$i \in I$，$a_i \le c$，且$c < b$，则与b为最小上界矛盾，得证.

定理 93.

如果存在X到Y的满射，则$Card(Y) \le Card(X)$.

证明：设满射为f，则其右逆s为Y到X的单射，得证.

补充定理 294.

f为X到Y的映射，则$Card(f\langle X\rangle) \le Card(X)$.

证明：f为X到$f\langle X\rangle$的满射，根据定理93得证.

定义 153. 基数乘积（*produit cardinal*），基数和（*somme cardinal*）

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，则$(a_i)_{i\in I}$的乘积及和的基数，分别称为该基数族的基数乘积及基数和，分别记作$\prod\limits_{i\in I} a_i$、$\sum\limits_{i\in I} a_i$.

补充定理 295.

令$(E_i)_{i\in I}$为集族，其乘积为P，其和为S，对任意$i \in I$，$Card(E_i) = a_i$，则$Card(P) = \prod\limits_{i\in I} a_i$，$Card(S) = \sum\limits_{i\in I} a_i$.

证明：对任意$i \in I$，存在E_i到a_i的双射，根据定理35、定理55，存在P到$\prod\limits_{i\in I} a_i$、$S$到$\sum\limits_{i\in I} a_i$的双射，得证.

补充定理 296.

$(a_i)_{i\in\varnothing}$为基数族，则$\prod\limits_{i\in\varnothing} a_i = 1$；$\sum\limits_{i\in\varnothing} a_i = 0$.

证明：根据补充定理116（4）、补充定理127（1）可证.

定理 94.

（*1*）令$(E_i)_{i\in I}$为集族，则$\bigcup\limits_{i\in I} E_i \le \sum\limits_{i\in I} Card(E_i)$.

（*2*）令$(E_i)_{i\in I}$为两两不相交的集族，则$\bigcup\limits_{i\in I} E_i = \sum\limits_{i\in I} Card(E_i)$.

证明：

（1）根据补充定理116（1）可证.

（2）根据定理35可证.

定理 95. 基数的和与乘积的交换律、结合律、分配律

（*1*）令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，f为K到I的双射，则$\sum\limits_{k\in K} a_{f(k)} = \sum\limits_{i\in I} a_i$，$\prod\limits_{k\in K} a_{f(k)} = \prod\limits_{i\in I} a_i$.

（*2*）令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，$(J_l)_{l\in L}$为I的划分，则$\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{l\in L}(\sum\limits_{i\in J_l} a_i)$，$\prod\limits_{i\in I} a_i = \prod\limits_{l\in L}(\prod\limits_{i\in J_l} a_i)$.

（*3*）令$((a_{l,i})_{i\in J_l})_{l\in L}$为基数族，令$I = \prod\limits_{l\in L} J_l$，则$\prod\limits_{l\in L}(\sum\limits_{i} \in J_l ali) = \sum\limits_{f\in I}(\prod\limits_{l\in L} a_{l,f(l)})$.

证明：

（1）根据定理23、定理40可证.

（2）根据定理25、定理46、定理47可证.

（3）根据定理49、定理50可证.

定义 154. 两个基数的乘积（*produit de deux cardinaux*），两个基数的和（*somme de deux cardinaux*）

$x \neq y$，a，b为基数，基数族$(a_i)_{i\in\{x,y\}}$中，$a_x = a$，$a_y = b$，则$\prod\limits_{i\in\{x,y\}} a_i$称为$a$和$b$的乘积，记作$ab$或者$a\cdot b$，$\sum\limits_{i\in\{x,y\}} a_i$称为$a$和$b$的和，记作$a+b$.

定理 96. 两个基数的和与乘积的交换律、结合律、分配律

a、b、c为基数，则：

（*1*）$a+b=b+a$;

（*2*）$(a+b)+c=a+(b+c)$;

（*3*）$ab=ba$;

（*4*）$(ab)c=a(bc)$;

（*5*）$(a+b)c=ac+bc$.

证明：根据定理95可证.

定理 97.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，$J\subset I$，对于$i\in I$但$i\notin J$，$a_i = 0$（或$a_i = 1$），则$\sum\limits_{i\in J} a_i = \sum\limits_{i\in I} a_i$（或$\prod\limits_{i\in J} a_i = \prod\limits_{i\in I} a_i$）.

证明：

对于加法，$i \in I - J$时，$a_i = \varnothing$，根据定理95（2）可证.

对于乘法，$i \in I - J$时，a_i为单元素集合，根据补充定理138，$\prod\limits_{i \in J} a_i$到$\prod\limits_{i \in I} a_i$存在一一对应，得证.

定理 98.

a为基数，则$a + 0 = a$，$0 + a = a$，$a \cdot 1 = a$，$1 \cdot a = a$.

证明：根据定理97可证.

定理 99.

令$(a_i)_{i \in I}$、$(c_i)_{i \in I}$为基数族，a、b为基数，$b = Card(I)$，并且对任意$i \in I$，$a_i = a$，$c_i = 1$，则$ab = \sum\limits_{i \in I} a_i$，$b = \sum\limits_{i \in I} c_i$.

证明：$c_i = 1$，故c_i为单元素集合，故存在I到$\bigcup\limits_{i \in I} c_i$的双射，因此第二式成立．第一式根据定理95（3）、定理98可证.

定理 100.

令$(a_i)_{i \in I}$为基数族，$\sum\limits_{i \in I} a_i \neq 0$，则对任意$i \in I$，$a_i \neq 0$.

证明：根据定理44可证.

定理 101.

a、b为基数，如果$a + 1 = b + 1$，则$a = b$.

证明：令$X = a+1$，则$X = b+1$，则存在$A \subset X$、$B \subset X$，使$Card(A) = a$，$Card(B) = b$，故$Card(X - A) = 1$，$Card(X - B) = 1$，因此$X - A = \{x\}$、$X - B = \{y\}$．如果$x = y$，则$A = B$，故$a = b$；如果$x \neq y$，令$C = A \cap B$，则$A = C \cup \{y\}$，$B = C \cup \{x\}$，因此$a = Card(C) + 1$，$b = Card(C) + 1$，得证.

补充定理 297.

a、b为基数，则$a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow a = b$.

证明：根据公理模式7、定理101可证.

定义 155. 基数幂（*exponentiation des cardinaux*）

a、b为基数，则a到b的映射集合的基数，称为b的a次基数幂，记作b^a.

定理 102.

$Card(X) = a$，$Card(Y) = b$，则$Card(X^Y) = a^b$.

证明：根据定理38可证.

定理 103.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，a、b为基数，$b = Card(I)$，并且对任意$i \in I$，$a_i = a$，则$a^b = \prod\limits_{i\in I} a_i$.

证明：根据集合的乘积的定义可证.

定理 104.

令a为基数，$(b_i)_{i\in I}$为基数族，则$a^{(\sum\limits_{i\in I} b_i)} = \prod\limits_{i\in I}(a^{b_i})$.

证明：令S为$(b_i)_{i\in I}$的和，当$s \in S$时，令$a_s = a$，根据定理103，左边等于$\prod\limits_{s\in S} a_s$，根据定理95（2），右边等于$\prod\limits_{s\in S} a_s$，得证.

定理 105.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，b为基数，则$\prod\limits_{i\in I} {a_i}^b = (\prod\limits_{i\in I} a_i)^b$.

证明：对于$(x, y) \in I \times b$，令$a_{x,y} = a_x$，根据定理95（2），$\prod\limits_{i\in I} {a_i}^b = \prod\limits_{y\in b}(\prod\limits_{x\in I} a_{x,y})$，等于$\prod\limits_{(x,y)\in I\times b} a_{x,y}$，等于$\prod\limits_{x\in I}(\prod\limits_{y\in b} a_{x,y})$，等于$(\prod\limits_{i\in I} a_i)^b$.

定理 106.

a、b、c为基数，则$a^{bc} = (a^b)^c$.

证明：对任意$i \in c$，令$b_i = b$，则$a^{bc} = a^{\sum\limits_{i\in c} b_i}$，根据定理104，等于$\prod\limits_{i\in c} a^{b_i}$，等于$\prod\limits_{i\in c} a^b$，根据定理103，等于$(a^b)c$.

定理 107.

令a为基数，则$a^0 = 1$，$a^1 = a$，$1^a = 1$，如果$a \neq 0$，则$0^a = 1$.

证明：根据补充定理127（1）、补充定理132及定义可证.

定理 108.

$Card(X) = a$，则$Card(\mathcal{P}(X)) = 2^a$.

证明：令$A = \{a, b\}$. 对任意$Y \subset X$，令f_Y为X到A的映射，对于$x \in X$，如果$x \in Y$，则$f_Y(x) = a$，如果$x \in X - Y$，则$f_Y(x) = b$，令u为映射$Y \mapsto f_Y(Y \in \mathcal{P}(X), f_Y \in A^X)$. 反过来，对任意$X$到$A$的映射$g$，$g^{-1}(a) \subset X$，令$v$为映射$g \mapsto g^{-1}(a)(g \in A^X, g^{-1}(a) \in \mathcal{P}(X))$，则$u \circ v$和$v \circ u$均为恒等映射，根据定理20，$u$、$v$均为双射，故$Card(\mathcal{P}(X)) = Card(A^X)$，得证.

定理 109.

a、b均为基数，则当且仅当存在基数c使$a = b + c$时，$a \geq b$.

证明：$a \geq b \Leftrightarrow (\exists B)(B \subset a$与$Card(B) = b)$，令$c = Card(a-B)$，因此等价于$a = b+c$.

定理 110.

令$(a_i)_{i\in I}$、$({}_b i)_{i\in I}$为基数族，$(\forall I)(i\in I\Rightarrow a_i\geq b_i)$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i\geq\sum\limits_{i\in I}b_i$，$\prod\limits_{i\in I}a_i\geq\prod\limits_{i\in I}b_i$.

证明：根据定理45、补充定理97（1）可证.

补充定理 298.

令a、b、c为基数，$a\leq b\Rightarrow a+c\leq b+c$，$a\leq b\Rightarrow ac\leq bc$.

证明：根据定理110可证.

定理 111.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，$J\subset I$，则$\sum\limits_{i\in J}a_i\leq\sum\limits_{i\in I}a_i$；如果对任意$i\in I-J$，$a_i\neq 0$，则$\prod\limits_{i\in J}a_i\leq\prod\limits_{i\in I}a_i$.

证明：令$b_i=a_i$（$i\in J$），$b_i=0$（或$b_i=1$）（$i\in I-J$），根据定理110可证.

定理 112.

a、a'、b、b'均为基数，$a\leq a'$，$b\leq b'$，则$a^b\leq {a'}^{b'}$.

证明：根据定理111、定理103可证.

定理 113. 康托尔定理

a为基数，则$2^a>a$.

证明：由于$x\mapsto\{x\}$为a到$\mathcal{P}(a)$的单射，故$a\leq 2^a$.

对任意a到$\mathcal{P}(a)$的映射f，令X为a的元素中满足$x\notin f(x)$的元素集合，如果$x\notin X$，则$f(x)\neq X$，如果$x\in f(x)$，则$x\in a-X$，故$f(x)\neq X$，因此，$X\notin f(a)$，因此不存在a到$\mathcal{P}(a)$的满射，故$2^a>a$.

定理 114. 所有基数不能组成集合

非$Coll_x(x$为基数$)$.

证明：如果存在这样的集合U，令S为$(X)_{X\in U}$的和，则任何基数都和S的某个子集等势. 令$s=Card(S)$，则$s<2^s$，但2^s也是基数，矛盾，

补充定理 299.

（*1*）*1+1=2*.

（*2*）*a+a=2a*.

证明：

（1）令$A=\{x\}$，$B=\{y\}$，其中$x\neq y$，则$A\cup B=\{x,y\}$，$A\cap B=\varnothing$，根据定理94（2）可证.

（2）根据补充定理299（1）、定理96（5）可证.

补充定理 300.

令$(a_i)_{i\in I}$、$(b_i)_{i\in I}$为基数族，对任意$i\in I$，$b_i\geq 2$：

（*1*）对任意$i\in I$，$a_i\leq b_i$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq\prod\limits_{i\in I}b_i$.

（*2*）对任意$i\in I$，$a_i<b_i$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i<\prod\limits_{i\in I}b_i$.

证明：

（1）对任意$i\in I$，令p_i为a_i到b_i的单射，p为映射$x\mapsto p_{pr_2x}(pr_1x)$.

如果$Card(I)=0$，根据补充定理296，命题成立.

如果$Card(I)=1$，令$I=\{i\}$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i=a_i$，$\prod\limits_{i\in I}b_i=b_i$，命题成立.

如果$Card(I)=2$，令$I=\{i,j\}$，令$c_i=b_{i-1}$，$c_j=b_{j-1}$，则$b_ib_j\geq c_ic_j+c_i+c_j+1$，大于等于$b_i+b_j$，大于等于$a_i+a_j$，命题成立.

如果$Card(I)>2$，令f为映射$i\mapsto\tau_x(x\in b_i)$，g为映射$i\mapsto\tau_x(x\in b_i-f(i))$. 令$A$为$(a_i)_{i\in I}$的和，对任意$x\in A$，如果$p(x)\neq f(pr_2x)$，令$h(x)=(\bigcup\limits_{i\in I-pr_2x}\{(f(i),i)\})\cup\{f(pr_2x),pr_2x\}$，如果$p(x)=f(pr_2x)$，令$h(x)=(\bigcup\limits_{i\in I-pr_2x}\{(g(i),i)\})\cup\{f(pr_2x),pr_2x\}$，根据定义，$h$为$A$到$\prod\limits_{i\in I}a_i$的单射，故$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq\prod\limits_{i\in I}b_i$.

（2）类似补充定理300（1）可证.

记号定义 23. 序数的第一射影的基数（*cardinal de la première projection d'une ordinal*）

令a为序数，在没有歧义的情况下，$Card(pr_1a)$可以简记为$Card(a)$.

补充定理 301.

（*1*）E、F为良序集，且E同构于F，则$Card(E)=Card(F)$.

（*2*）$Card(序数0)=基数0$；$Card(序数1)=基数1$.

（*3*）$(l_i)_{i\in I}$为序数族，I为良序集，则$Card(\sum\limits_{i\in I}l_i)=\sum\limits_{i\in I}Card(l_i)$，$Card(\prod\limits_{i\in I}l_i)=\prod\limits_{i\in I}Card(l_i)$.

（*4*）$Card(序数2)=基数2$.

（*5*）a、b为序数，且$Card(a)<Card(b)$，则$a<b$.

（*6*）序数$a\leq b$，则$Card(a)\leq Card(b)$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理248（2）、补充定理248（3）、补充定理290（2）、补充定理290（3）可证.

（3）根据定义可证.

（4）根据补充定理299（1）、补充定理301（3）可证.

（5）根据定义可证.

（6）根据定义可证.

补充定理 302.

$(\forall E)(\exists X)(X \subset E$与$X \notin E)$.

证明：根据定理113可证.

习题 121.

f为E到F的映射，g为F到E的映射，求证：存在E的子集A、B以及F的子集A'、B'，使$B = E - A$，$B' = F - A'$，且$A' = f\langle A\rangle$，$B = g\langle B'\rangle$.

证明：考虑$X \mapsto E - g\langle F - f\langle X\rangle\rangle(X \in \mathcal{P}(E))$，根据习题63，存在$A$使$A = E - g\langle F - f\langle A\rangle\rangle$，令$A' = f\langle A\rangle$，$B' = F - f\langle A\rangle$，$B = E - A$，则$B = g\langle B'\rangle$.

注：原书习题121中f为单射的条件，是多余的.

习题 122.

E和F是不同的集合，求证：$E^F \neq F^E$，并且，如果$Card(E) = 2$，$Card(F) = 2 + 2$，则E^F、F^E至少有一个不是基数.

证明；如果E、F其中一个为$\varnothing$，显然成立.

如果均不为$\varnothing$，且$E^F = F^E$，对任意$G \in F^E$，$pr_1 G = E$，由于$G \in E^F$，故$pr_1 G = F$，因此$E = F$，矛盾.

如果$Card(E) = 2$，$Card(F) = 2 + 2$，由于$Card(E^F) = Card(F^E)$，故E^F、F^E至少有一个不是基数．其中至少有一个不是基数.

习题 123.

令$(a_i)_{i\in I}$、$(b_i)_{i\in I}$为基数族，对任意$i \in I$，$b_i \geq 2$:

（1）对任意$i \in I$，$a_i \leq b_i$，求证：$\sum\limits_{i\in I} a_i \leq \prod\limits_{i\in I} b_i$.

（2）对任意$i \in I$，$a_i < b_i$，求证：$\sum\limits_{i\in I} a_i < \prod\limits_{i\in I} b_i$.

证明：即补充定理300.

习题 124.

令f为$\mathcal{P}(E) - \{\varnothing\}$到$E$的映射，并且，对任意$X \subset E$且$X \neq \varnothing$，$f(X) \in X$:

（1）b为基数，$A = \{x | x \in E$与$Card(f^{-1}\langle x\rangle)) \leq b\}$，令$a = Card(A)$，求证：$2^a \leq 1 + ab$.

（2）$B = \{x | x \in E$与$(X \in f^{-1}\langle x\rangle) \Rightarrow Card(X) \leq b)\}$，求证：$Card(B) \leq b$.

证明：

（1）令$Y=\bigcup\limits_{x\in A}f^{-1}\langle x\rangle$，则$Card(Y)\leq ab$，对任意$y\in\mathcal{P}(A)-\{\varnothing\}$，$f(y)\in A$，故$y\in Y$，因此$\mathcal{P}(A)-\{\varnothing\}\subset Y$，所以$Card(\mathcal{P}(A))\leq 1+ab$，得证.

（2）令$x=f(B)$，则$x\in B$，故$Card(B)\leq b$.

习题 125.

$(l_i)_{i\in I}$为序数族，I为良序集，求证：$Card(\sum\limits_{i\in I}l_i)=\sum\limits_{i\in I}Card(l_i)$，$Card(\prod\limits_{i\in I}l_i)=\prod\limits_{i\in I}Card(l_i)$.

证明：即补充定理301（3）.

习题 126.

求证：$(\forall E)(\exists X)(X\subset E$与$X\notin E)$.

证明：即补充定理302.

3.4 自然数，有限集合（Entiers naturels, ensembles finis）

定义 156. 有限基数（*cardinal fini*），自然数（*entier naturel*），有限集合（*ensemble finie*），元素数目（*nombre d'éléments*），数目（*nombre*），有限族（*famille finie*）

对于基数a，如果$a+1\neq a$，则称a为有限基数，又称自然数．如果$Card(E)$为自然数，则称E为有限集合，此时，$Card(E)$称为E的元素数目．在没有歧义的情况下，某类项的集合的元素数目，也可以简称为该类项的数目．如果族的指标集是有限集，则称该族为有限族.

注：原书常用“entier”表示自然数，在第二卷引入“整数”时，则称作“entier rationnel”.

定理 115.

当且仅当$a+1$为自然数时，a为自然数.

证明：根据补充定理297，$a+1=b+1\Leftrightarrow a=b$，因此$a\neq a+1\Leftrightarrow a+1\neq a+1+1$，得证.

定理 116.

n为自然数，基数$a\leq n$，则a为自然数；并且，如果$n\neq 0$，则存在唯一的自然数m使$n=m+1$，且$a<n\Leftrightarrow a\leq m$.

证明：由于$a \leq n$，因此存在b使$n = a + b$，由于$n \neq n + 1$，因此$a + 1 + b \neq a + b$，因此$a+1 \neq a$，故a为自然数．如果$n \neq 0$，则$n \geq 1$，根据定理109，存在自然数m使$n = m+1$；根据定理101，m是唯一的．

令$a < n$时，设$n = a + b$，且$b \neq 0$，由于$b \leq n$，故b为自然数，因此存在c使$b = c + 1$，因此$m = a + c$，因此$a \leq m$，得证．

定理 117.

有限集合的的子集是有限集合．

证明：根据定理116可证．

定理 118.

X为有限集合E的子集，且$X \neq E$，则$Card(X) < Card(E)$．

证明：设$a \in E - X$，令$Y = E - \{a\}$，则$Card(X) \leq Card(Y)$，同时$Card(Y) + 1 = Card(E)$，根据定理116得证．

定理 119.

f为有限集合E到F的映射，则$f(E)$为有限集合．

证明：根据定理93，$Card(f(E)) \leq Card(E)$，根据定理116得证．

定理 120.

E和F的元素数目相同，f为E到F的映射，则以下三个公式等价：

第一，f是单射；

第二，f是满射；

第三，f是双射．

证明：若f是单射，则$Card(f(E)) = Card(E)$，等于$Card(F)$，根据定理118，f为满射；反过来，若f不是单射，设存在$x \neq x'$使$f(x) = f(x')$，则$f(E-\{x\}) = f(E)$，故$Card(f(E-\{x\})) \leq Card(E - \{x\})$，又因为$Card(E - \{x\}) < Card(E)$，故$f(E) < Card(E)$，因此$f$不是满射．综上得证．

证明规则 61. 数学归纳法

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n不是常数，如果“$(0|n)R$与$(\forall n)(n$为自然数与$R \Rightarrow (n+1|n)R)$”是M的定理，则$(\forall n)(n$为自然数$\Rightarrow R)$是M的定理．

证明：假设$(\exists n)(n$为自然数与非$R)$为真，令q为自然数，且非$(q|n)R$．由于集合$\{n|n$为自然数与$n \leq q$与$R\}$为非空良序集，故有最小元s，如果$s = 0$，矛盾；如果$s > 0$，令$s = s' + 1$，根据定理116，$s' < s$，因此$(s'|n)R$为真，故$(s|n)R$为真，矛盾．

补充证明规则 87.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n、p不是常数，令S为$(\forall p)(n$为自然数与p为自然数与$p < n \Rightarrow (p|n)R)$，如果$S \Rightarrow R$是$M$的定理，则$(\forall n)(n$为自然数$\Rightarrow R)$是$M$的定理．

证明：$(0|n)S$为真，故$(0|n)R$为真．设R对n成立，由于$(n+1|n)S \Leftrightarrow S$与$R$，故$(n+1|n)S$为真，因此$(n+1|n)R$为真，根据证明规则61得证．

补充证明规则 88.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n不是常数，k为自然数，如果$(k|n)R$与$(\forall n)(n$为自然数与$n \geq k$与$R \Rightarrow (n+1|n)R)$是M的定理，则$(\forall n)(n$为自然数与$n \geq k \Rightarrow R)$是M的定理．

证明：令$m = n - k$，根据证明规则61可证．

补充证明规则 89.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n不是常数，a、b为自然数，如果$(a|n)R$与$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n < b$与$R \Rightarrow (n+1|n)R)$是M的定理，则$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n \leq b \Rightarrow R)$是M的定理．

证明：令S为$a \leq n$与$n \leq b \Rightarrow R$，根据证明规则61，S为真，故$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n \leq b \Rightarrow R)$．

补充证明规则 90.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n不是常数，a、b为自然数，如果$(b|n)R$与$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n < b$与$(n+1|n)R \Rightarrow R)$是M的定理，则$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n \leq b \Rightarrow R)$是M的定理．

证明：$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n < b$与$(n+1|n)R \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n < b$与非$R \Rightarrow$ 非$(n+1|n)R)$．如果存在k，$a \leq k$与$k \leq b$，并且非$(k|n)R$为真，则根据补充证明规则89，非$(b|n)R$为真，矛盾．

定理 121.

令E为右方有向集（或左方有向集、格、全序集），则E的非空有限子集有上界（或有下界、有最小上界和最大下界、有最大元和最小元）．

证明：考虑右方有向集的情况，令n为1，命题显然成立．设公式对n成立，对于设元素数目为$n+1$的子集X，设$x \in X$，令$Y = X - \{x\}$，则Y有上界y，又由于$\{x, y\}$有上界，该上界也是X的上界，得证．其他情况同理可证．

定理 122.

任何非空全序有限集合是有最大元的良序集．

证明：根据定理121可证.

定理 123.

任何非空偏序有限集合有极大元.

证明：根据定理121，该集合为归纳集，根据定理80可证.

补充定理 303.

任何非空偏序有限集合有极小元.

证明：考虑按相反关系排序的偏序集，根据定理123可证.

定义 157. 有限性（*caractère fini*）

F的元素都是E的子集，如果$X \in F \Leftrightarrow (\forall Y)((Y \subset X)$与$(Y$为有限集合$) \Rightarrow (Y \in F))$，则称$F$具有有限性.

定理 124.

F的元素都是E的子集，且具有有限性，则F按包含关系排序的非空偏序集有极大元.

证明：令G为F的全序子集，设G的元素的并集为X，X的任意有限子集Y当中的元素y，存在$Z_y \in G$使$y \in Z_y$，根据定理122，Z_y（$y \in Y$）的集合为全序有限集合，因此有最大元S，故$Y \subset S$且$S \in G$，由于$S \in F$且F具有有限性，因此$Y \in F$，由于F具有有限性，因此$X \in F$．根据定理82，F有极大元.

补充定理 304.

当且仅当任意按包含关系排序的$\mathcal{P}(E)$的非空子集均有极大元时，E为有限集合.

证明：必要性根据定理123可证.

充分性：令F为E的有限子集的集合，假设其有极大元X，如果$X \neq E$，则存在$a \in X - E$，$X \cup \{a\}$也是E的有限子集，矛盾，故$X = E$，得证.

补充定理 305.

E为良序集，E按相反关系排序的偏序集也是良序集，则E为有限集合.

证明：如果$E = \varnothing$，命题显然成立；如果$E \neq \varnothing$，令$S = \{x|]\leftarrow, x[$为有限集合$\}$，则$S \neq \varnothing$．设S的最大元为y，则$]\leftarrow, y[gcup\{y\}$为有限集合，如果$E - (]\leftarrow, y[\cup\{y\}) \neq \varnothing$，则其有最小元$z$，则$]\leftarrow, z[$为有限集合，故$z \in S$，且$z > y$，矛盾．因此，$E =]\leftarrow, y[\cup\{y\}$，得证.

定义 158. 最长反链的长度（*longueur de l'antichaîne la plus longue*），最长反链（*antichaîne la plus longue*）

E为偏序集，$A = \{a|(\exists X)((X$为E的自由子集$)$与$Card(X) = a)\}$，如果A有最大元自然数k，则称A为E的最长反链的长度．对E的任意自由子集X，如果$Card(X) = k$，则称X为E的最长反链.

补充定理 306. 狄尔沃斯定理

E为偏序集，其最长反链的长度为自然数k，则存在E的划分Δ_F使$Card(F) = k$，并且，F的元素均为E的全序子集.

证明：

如果E为有限集合，设E的元素数目为n，对n用数学归纳法：

令a为E的极小元. 对于$E - \{a\}$：

如果E的最长反链的长度为k，根据归纳假设，存在$E - \{a\}$的划分Δ_F使$Card(F) = k$，且F的个元素均为全序集. 令$X = x|(\exists G)(G \in F$与$x$为$G$的最小元)，则$Card(X) = k$，故$a$和$X$的某个元素$y$是可比较的，设$y \in G$、$G \in F$，则将$a$加入$G$，可得到符合条件的划分.

如果果E的最长反链的长度为$k-1$，根据归纳假设，存在$E-\{a\}$的划分Δ_F使$Card(F) = k - 1$，且F的个元素均为全序集. 则将$\{a\}$单独作为一个集合，加入F中，可得到符合条件的划分.

根据证明规则61，对有限集合命题得证.

如果E不是有限集合，设命题对$k-1$成立，令G为满足下列条件的集合C的集合：

对E的任意有限子集F，均存在F的划分Δ_G使$Card(G) \leq k$，且G的个元素均为全序集，并使$C \cap F$是G的一个元素的子集.

根据定义，这样的集合均为全序集，同时，根据定理82，C有极大元C_0.

如果存在$E - C_0$的自由子集，其元素数目为k，令其为$\bigcup\limits_{i\in[1,k]} \{a_i\}$（对任意$i \in [1, k]$、$j \in [1, k]$、$i \neq j$，均有$a_i \neq a_j$），则对任意$i \in [1, k]$，均存在有限集合$F_i$，使其任何划分$\Delta_G$，只要$Card(G) \leq k$，则$(C_0 \cup \{a_i\}) \cap F_i$均不是$G$的任何一个元素的子集，故$a_i \in F_i$.

令$H = \bigcup\limits_{i\in[1,k]} F_i$，则$\bigcup\limits_{i\in[1,k]} \{a_i\} \subset H$. 同时，存在$H$的某个划分$\Delta_G$，其满足$Card(G) = k$.

此时，令E_i为G的元素且满足$a_i \in E_i$，则存在$j \in [1, k]$，使$C_0 \cap H \subset E_j$，令$P_i = E_i \cap F_j$，则$(P_i)_{i\in[1,k]}$是F_j的划分，故$(C_0 \cup \{a_j\}) \cap F_j \subset P_j$，矛盾.

因此，$E - C_0$的最长反链的长度小于k，由于C_0为全序集，$E - C_0$的最长反链的长度为$k - 1$，根据归纳假设，存在$E - C_0$的划分Δ_G使$Card(G) \leq k - 1$，将C_0加入该划分，即可证得命题对k也成立.

补充定理 307.

A为集合，$(X_i)i \in [1, m]$，$(Y_j)j \in [m + 1, m + n]$均为$A$的有限子集族. 自然数$h$满足下列条件：

第一，$m \leq n + h$，$h < m$；

第二，对任意自然数$r \in [1, m - h]$，以及$[1, m]$的元素数目为$r + h$的子集$\bigcup\limits_{k\in[1,r+h]} \{i_k\}$（对任意$x \in [1, r + h]$、$y \in [1, r + h]$、$x \neq y$，均有$i_k \neq i_y$），存在$[m + 1, m + n]$的元素数目为$r$的

子集 $\bigcup\limits_{l\in[1,r]}\{j_l\}$（对任意$x\in[m+1,m+n]$、$y\in[m+1,m+n]$、$x\neq y$，均有$j_k\neq j_y$），使对任意$l\in[1,r]$，$\bigcup\limits_{k\in[1,r+h]}X_{i_k}$均和$Y_{j_l}$相交，

则存在A的有限集合B，$Card(B)\le n+h$，并且所有的X_i（$i\in[1,m]$）和所有的Y_j（$j\in[m+1,m+n]$）均和B相交.

证明：令$G=\Delta_{[1,m+n]}\cup\{(x,y)|(x\in[1,m])与(y\in[m+1,m+n])与(X_x\cap Y_y\neq\varnothing)\}$，则$G$为在$[1,m+n]$上的偏序图.

令$[1,m+n]$按$(x,y)\in G$排序，则其最长反链的长度为$n+h_0$，根据补充定理306可证.

补充定理 308. 霍尔定理

E、F为有限集合，$x\mapsto A(x)$为E到$\mathcal{P}(F)$的映射．则当且仅当对E的任意子集H均有$Card(\bigcup\limits_{x\in H}A(x))\ge Card(H)$时，存在$E$到$F$的单射$f$，使对任意$x\in E$均有$f(x)\in A(x)$.

证明：

必要性根据定义可证.

充分性：

令a、b互不相等，$G=\Delta_{(E\times\{a\})\cup(F\times\{b\})}\cup\{(x,y)|(x\in(E\times\{a\}))与(y\in(A(x)\times\{b\}))与y\in A(x)\}$，根据补充定理306，$(E\times\{a\})\bigcup\limits_{(}F\times\{b\})$存在$Card(F)$个全序集的划分$(x_i)_{i\in[0,Card(F)]}$.

对任意x_i，$Card(x_i\cap(F\times\{b\}))\le 1$，$Card(x_i\cap(E\times\{a\}))\le 1$．因此，对任意$x_i$，$Card(x_i\cap(F\times\{b\}))=1$，令$g$为映射$v\mapsto x_i(v\in E)$，其中$x_i$为$(v,a)$所在的集合，$h$为映射$x_i\mapsto pr_1(x_i\cap(F\times\{b\}))$，令$f=h\circ g$，$f$即满足要求.

补充定理 309.

E、F为有限集合，$x\mapsto A(x)$为E到$\mathcal{P}(F)$的映射，$G\subset F$．则当且仅当对E的任意子集H均有$Card(\bigcup\limits_{x\in H}A(x))\ge Card(H)$，并且对任意$L\subset G$均有$Card(\{x|x\in E与A(x)\cap L\neq\varnothing\}\ge Card(L))$时，存在$E$到$F$的单射$f$，使对任意$x\in E$均有$f(x)\in A(x)$，且$G\subset f(E)$.

证明：

必要性根据定义可证.

充分性：

对$Card(E)$用数学归纳法：

$Card(E)=0$时，命题显然成立，

设命题对$Card(E)\le n$成立，当$Card(E)=n+1$时：

根据补充定理308，存在G到E的单射f、E到F的单射g，令其图分别为P、Q，如果$f\langle G\rangle=E$，则命题成立；否则，令$x\in E-f\langle G\rangle$，如果$g(x)\in F-G$，根据归纳假设命题对$E-x$、$F-g(x)$、G成立，故命题对E、F、G成立；如果$g(x)\in G$，根据归纳假设命题对$E-x$、$F-g(x)$、$G-g(x)$成立，故命题对E、F、G成立．综上，得证.

定义 159. 流动性（*mobile*）

A为集合，R的元素都是A的有限子集，如果R满足下列条件，则称R具有流动性：

对R的任何两个不同元素X、Y，如果$z \in X \cap Y$，则存在$Z \in R$，使$Z \subset X \cup Y$且$z \notin Z$.

定义 160. 纯子集（*partie pure*）

$Q \subset A$，$R \subset \mathcal{P}(A)$，如果Q的任何子集都不是R的元素，则称Q为A关于R的纯子集.

习题 127.

（*1*）E为集合，$F(E)$是E的有限子集集合．令H为满足下列条件的$\mathcal{P}(E)$的子集G的集合：

第一，$\varnothing \in G$;

第二，对任意$X \in G$、$x \in E$，均有$X \cup \{x\} \in G$.

求证：$F(E)$是按包含关系排序的H的最小元.

（*2*）求证：E的任何两个有限子集A、B的并集是E的有限子集.

（*3*）E为有限集合，求证：$\mathcal{P}(E)$为有限集合.

证明：

（1）根据定义可证$F(E) \in H$．反过来，$\varnothing \in G$，因此基数为0的E的子集都是G的元素，设基数为n的E的子集都是G的元素，对任意基数为$n+1$的E的子集X，由于$X \neq \varnothing$，故令$x \in X$，根据定理94（2）、定理101，$Card(X - \{x\}) = n$，故$X - \{x\} \in G$，因此$X \in G$，根据证明规则61得证.

（2）令$H = \{X | X \subset E$与$X \bigcup\limits_{A}$为有限集合$\}$，则$\varnothing \in H$，并且，对任意$X \in G$、$x \in E$，$Card(X \cup A \cup \{x\})$为$Card(X \cup A)$或$Card(X \cup A) + 1$，根据定理115，$X \cup \{x\} \in G$，根据习题127（1），$F(E) \subset H$，故$B \in H$，得证.

（3）当$Card(E) = 0$时，命题显然成立，设命题对$Card(E) = n$成立，当$Card(E) = n + 1$时：

令$x \in E$，$E' = E - \{x\}$，则$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E') \cup g(\mathcal{P}(E'))$，其中$g$为$\mathcal{P}(E')$到$\mathcal{P}(E)$的映射$X \mapsto X \bigcup\limits_{\{} x\}$．由于$\mathcal{P}(E)$为有限集合，$g$为$\mathcal{P}(E')$到$g(\mathcal{P}(E')$的双射，故$g(\mathcal{P}(E')$为有限集合，根据习题127（2），$\mathcal{P}(E)$为有限集合，根据证明规则61得证.

习题 128.

求证：当且仅当任何按包含关系排序的$\mathcal{P}(E)$的非空子集均有极大元时，E为有限集合.

证明：即补充定理304.

习题 129.

E为良序集，E按相反关系排序的偏序集也是良序集，求证：E为有限集合.

证明：即补充定理305.

习题 130.

E为有限集合，其元素数目$n \geq 2$，$C \subset E \times E$，对任意$x \neq y$，(x,y)和(y,x)有且只有一个是C的元素．求证：存在$[1,n]$到E的映射f，对任意$i \in [1,n-1]$，$(f(i),f(i+1)) \in C$．

证明：将命题加强为存在双射．

$n=2$，命题显然成立．

设命题对n成立，对于元素数目为$n+1$的集合E，设$a \in E$，令$E' = E - \{a\}$，$C' = C \cap E' \times E'$，设f'为$[1,n]$到E'的双射并且关于图C'满足条件，令$A = \{x | x \in [1,n]$与$(f'(x),a) \in C\}$，$m = sup_E A$，则当$i \in [1,m]$时，$f(i) = f'(i)$，当$i = m+1$时，$f(i) = a$，如果$m < n$，则当$i \in [m+2,n+1]$时，$f(i) = f'(i-1)$．则f为满足条件的双射．根据补充证明规则88得证．

习题 131.

E为偏序集，其最长反链的长度为自然数k，求证：存在E的划分Δ_F使$Card(F) = k$，并且，F的元素，均为按E的偏序在该集合上导出的偏序排序的全序集．

证明：即补充定理306．

习题 132.

（*1*）A为集合，$(X_i)i \in [1,m]$，$(Y_j)j \in [m+1,m+n]$均为A的有限子集族．存在自然数h满足下列条件，且其中最小的为h_0：

第一，$m \leq n+h$，$h < m$；

第二，对任意自然数$r \in [1,m-h]$，以及$[1,m]$的元素数目为$r+h$的子集$\bigcup\limits_{k \in [1,r+h]} \{i_k\}$（对任意$x \in [1,r+h]$、$y \in [1,r+h]$、$x \neq y$，均有$i_k \neq i_y$），存在$[m+1,m+n]$的元素数目为$r$的子集$\bigcup\limits_{l \in [1,r]} \{j_l\}$（对任意$x \in [m+1,m+n]$、$y \in [m+1,m+n]$、$x \neq y$，均有$j_k \neq j_y$），使对任意$l \in [1,r]$，$\bigcup\limits_{k \in [1,r+h]} X_{i_k}$均和$Y_{j_l}$相交，

则存在A的有限集合B，$Card(B) \leq n+h_0$，并且所有的X_i（$i \in [1,m]$）和所有的Y_j（$j \in [m+1,m+n]$）均和B相交．

求证：存在A的有限集合B，其元素数目小于等于$n+h$，并且所有的X_i（$i \in [1,m]$）和所有的Y_j（$j \in [m+1,m+n]$）均和B相交．

（*2*）E、F为有限集合，$x \mapsto A(x)$为E到$\mathcal{P}(F)$的映射．求证：当且仅当对E的任意子集H均有$Card(\bigcup\limits_{x \in H} A(x)) \geq Card(H)$时，存在$E$到$F$的单射$f$，使对任意$x \in E$均有$f(x) \in A(x)$．

（*3*）E、F为有限集合，$x \mapsto A(x)$为E到$\mathcal{P}(F)$的映射，$G \subset F$．求证：当且仅当对E的任意子集H均有$Card(\bigcup\limits_{x \in H} A(x)) \geq Card(H)$，并且对任意$L \subset G$均有$Card(\{x | x \in E$与$A(x) \cap L \neq \varnothing\} \geq Card(L))$时，存在$E$到$F$的单射$f$，使对任意$x \in E$均有$f(x) \in A(x)$，且$G \subset f(E)$．

证明：

（1）根据补充定理307可证.

（2）即补充定理308.

（3）即补充定理309.

习题 133.

（*1*）E为有限格，求证：E的任意元素a，都是有限个不可约元素的最小上界.

（*2*）E为有限格，J为其不可约元素集合．令$S(x)=\{y|y\in J与y\le x\}$，求证：$x\mapsto S(x)$为E到按包含关系排序的$\mathcal{P}(J)$的一个子集的同构，并且，$S(inf(x,y))=S(x)\cap S(y)$.

证明：

（1）令$J=\{v|v\in E与y为E的不可约元素\}$，$H=\{u|u\in E与(\exists X)(X\subset J与sup\ X=u)\}$．如果$E-H\ne\varnothing$，则有极小元$z$，故$z=sup(x,y)$，且$x<z$、$y<z$，故$x\in H$、$y\in H$，因此$x$、$y$均为有限个不可约元素的最小上界，故$z\in H$，矛盾.

（2）根据习题133（1）可证.

习题 134.

（*1*）E为分配格，a是E的不可约元素，求证：$a\le sup(x,y)\Rightarrow a\le x或a\le y$.

（*2*）E为有限分配格，J为其不可约元素集合．令$S(x)=\{y|y\in J与y\le x\}$，求证：$x\mapsto S(x)$为E到按包含关系排序的$\mathcal{P}(J)$的一个子集的同构，并且，$S(sup(x,y))=S(x)\cup S(y)$；同时，令$J^*$为按在$J$上的偏序关系的相反关系排序的偏序集，$I=\{0,1\}$，$A(J^*,I)$为$J^*$到$I$的单增映射的集合，按$f\in A(J^*,I)与g\in A(J^*,I)与(\forall x)(x\in J^*\Rightarrow f(x)\le g(x))$排序，则$E$同构于$A(J^*,I)$.

（*3*）E为有限分配格，J为其不可约元素集合．令$S(x)=\{y|y\in J与y\le x\}$．令$(y_i)i\in[1,k]$为$]x,\to[$的所有两两不相等的极小元组成的元素族．对任意$i\in[1,k]$，令q_i为$S(y_i)-S(x)$的一个元素，求证：对任意$i\in[1,k]$、$j\in[1,k]$且$i\ne j$，q_i和q_j是不可比较的.

（*4*）E为有限分配格，J为其不可约元素集合．令$S(x)=\{y|y\in J与y\le x\}$，a为E的最小元，$P=J-\{a\}$．令$(q_i)i\in[1,k]$为P的元素族，且对任意$i\in[1,k]$、$j\in[1,k]$且$i\ne j$，q_i和q_j是不可比较的．令$u=\underset{i\in[1,k]}{sup}\ q_i$，$v_j=\underset{i\in[1,k]-\{i\}}{sup}\ q_i$（$j\in[1,k]$），$x=\underset{i\in[1,k]}{inf}\ v_i$，$y_j=\underset{i\in[1,k]-\{i\}}{inf}\ v_i$，求证：对任意$i\in[1,k]$，$v_i<u$，$x<y_i$，并且，区间$]x,\to[$有$k$个两两不相等的极小元.

证明：

（1）即补充定理199（4）.

（2）根据补充定理199（4）可证.

（3）如果$q_i=q_j$，则$y_i=y_j$，矛盾；如果$q_i<q_j$，则q_i、x均为$\{yi,yj\}$的下界，故$x<q_i$，因此$q_i<y_j$，与y_j是最小元矛盾.

（4）由于$u = sup(v_i, q_i)$，因此$v_i < u$．如果$y_i = v_i$，则对任意$j \in [1,k]$且$i \neq j$，$v_i \leq v_j$，则$v_j \geq u$，矛盾，故$x < yi$．令$A_i = \{s|s > x$与$s \leq yi\}$，如果$A_i \cap A_j \neq \varnothing$（$i \neq j$），设$t \in A_i$、$t \in A_j$，则$t \leq x$，矛盾，故$A_i \cap A_j = \varnothing$．令$A_i$的其中一个极小元为$z_i$，故$z_1$、$z_2$、$\cdots$、$z_k$为两两不相等的极小元．

习题 135.

（*1*）令$(C_i)_{i\in[1,n]}$为全序集有限族，E为其乘积．A为E的内部格，求证：A最多有n个两两不可比较的不可约元素．

（*2*）令F为有限分配格，J为其不可约元素集合．a为F的最小元，$P = J - \{a\}$．令$A = \{a|(\exists X)((X$为P的自由子集$)$与$Card(X) = a)\}$，A的最大元为n，求证：F同构于全序集有限族的乘积的某个内部格．

证明：

（1）若A有r个两两不可比较的不可约元素且$r > n$，设其组成元素族$(a_i)_{i\in[1,r]}$．令$u = \sup\limits_{i\in[1,r]} a_i$，$v_j = \sup\limits_{i\in[1,r]-\{j\}} a_i$．则对任意$i \in [1,n]$，$pr_i(v_j)$之中最多有一个不等于$pr_i(u)$，因此，存在$j \in [1,r]$，使$v_j = u$，故$a_i \leq v_i$．根据补充定理199（1）、补充定理199（2）、补充定理199（3），A为分配格．但根据补充定理199（4），运用数学归纳法可得，$a_i \leq v_i$为假，矛盾．

（2）根据补充定理306，存在的P的划分Δ_G，其中G的元素均为全序集并且元素数目为n．将最小元a加入G的每个元素，得到全序集族$(Ci)_{i\in[1,n]}$．对任意$x \in F$，令x_i为$\{b|b \in Ci$与$b \leq x\}$在C_i上的最小上界，根据定义可证，$x \mapsto \{(i,c)|(i,c)$为有序对与$(\exists i)(i \in [1,n]$与$c = x_i)\}$为F到$\prod\limits_{i\in[1,n]} C_i$的某个内部格的同构．同时，令该映射为$f$，令$f_i = pr_i f$，当$x \in F$、$y \in F$时，令$z = sup(x,y)$，则对任意$i \in [1,n]$，$f_i(z) \geq sup(f_i(x), f_i(y))$，同时，$f_i(z) \leq sup(x,y)$，根据补充定理199（4），$fi_(z) \leq x$或$f_i(z) \leq y$，故$f_i(z) \leq sup(f_i(x), f_i(y))$，因此$f_i(z) =$
$sup(f_i(x), f_i(y))$，故$f(z) = sup(f(x), f(y))$，同理可证最大下界的情况．故该映射的值域为内部格．得证．

习题 136.

（*1*）求证：当且仅当E的偏序图是n个在E上的全序图的交集时，E同构于n个全序集的乘积的某个子集．

（*2*）E为偏序集，其偏序为F，求证：当且仅当存在在E上的偏序F'，使E的任何两个不同元素x、y，仅在按其中一个偏序排序的E上是可比较的时，E同构于两个全序集的乘积的子集．

（*3*）A是元素数目为n的有限集合，$E = \{X|(\exists x)(x \in A$与$X = \{x\})\} \cup \{X|(\exists x)(x \in A$与$X = A - \{x\})\}$，求证：$E$同构于$n$个全序集的乘积的某个子集，并且，当$m < n$时，$E$不能同构于任意$m$个全序集的乘积的任意子集，.

（1）充分性：

设E的偏序图为G，$G=\bigcap\limits_{i\in[1,n]}G_i$，其中$G_i$均为在$E$上的全序图．令$E_i$为按$(x,y)\in G$排序的全序集，则$E$同构于$\prod\limits_{i\in[1,n]}E_i$的一个子集．根据定义可证．

必要性：设E同构于$\prod\limits_{i}\in[1,n]F_i$的一个子集$A$，$F=\prod\limits_{i}\in[1,n]F_i$．令$(f_i)_{i\in[1,n]}$为$[1,n]$的排列族，其中$f_i(1)=i$，$G_i$为集族$(F_{f_i(j)})_{j\in[1,n]}$的字典式乘积在$E$上导出的全序的全序图，根据定义可证，$E$的偏序图为$\bigcap\limits_{i\in[1,n]}G_i$．

（2）根据习题136（1）可证．

（3）设E的偏序图为G，根据习题136（1），G为某个全序图族$(G_i)_{i\in[1,m]}$的并集，且$m<n$．令$F=\{X|(\exists x)(x\in A与X=\{x\})\}$，令全序图族$G_i\cap F\times F$相应的最大元为$a_i$，故存在$\{x\}\in F$，使$\{x\}$不是任何$G_i\cap F\times F$的最大元，则$(\{x\},A-\{x\})\in G$，矛盾．

另一方面，令$(a_i)_{i\in[1,m]}$为所有A的单个元素的集合组成的族，$b_i=A-a_i$，全序图G_1按照a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-1}、b_n、a_n、b_{n-1}、$\cdots$、b_1排序，G_2按照a_2、a_3、$\cdots$、a_n、b_1、a_1、b_n、$\cdots$、b_2排序，以此类推，则全序图族$(G_i)_{i\in[1,m]}$的并集为G，根据习题136（1），存在性得证．

习题 137.

令$R\subset\mathcal{P}(A)$：

（1）求证：A关于R的纯子集集合有极大元，并且，A关于R的任何纯子集都是某个极大元的子集．

（2）令M为A关于R的纯子集集合的某个极大元，求证：对任意$x\in\complement_A M$，存在唯一的有限集合$E_M(x)$，满足$E_M(x)\subset M$并且$E_M(x)\cup\{x\}\in R$．并且，对任意$y\in E_M(x)$，$E_M(x)\cup\{x\}-\{y\}$是A关于R的纯子集集合的某个极大元．

（3）M、N均为A关于R的纯子集集合的极大元，并且$N\cap\complement_A M$为有限集合，求证：$Card(M)=Card(N)$．

（4） M、N均为A关于R的纯子集集合的极大元，令$N'=N\cap\complement_A M$，$M'=M\cap\complement_A N$，求证：$M'\subset EM(x)$，并且$Card(M)=Card(N)$．

证明：

（1）对于A关于R的任何纯子集E，令$X=\{M|E\subset M与M为A关于R的纯子集\}$，根据定理82，$X$有极大元，得证．

（2）前半部分根据定义可证．根据定义可证，$E_M(x)\cup\{x\}-y$是纯子集．设它不是极大元，其是极大元N的子集，则$E_M(x)\cup\{x\}\in R$、$N\cup\{y\}\in R$，矛盾．

（3）根据习题137（2），对$Card(N\cap\complement_A M)$运用数学归纳法可证．

（4）对任意$x\in N'$，存在$y\in M'$且$y\notin E_M(x)$，如果存在$z\in M'$且$z\notin E_M(x)$，则$E_M(x)\cup\{x\}-\{y\}$是A关于R的纯子集集合的某个极大元，故$(E_M(x)\cup\{x\}-\{y\})\cup\{z\}$有

一个子集是R的元素，矛盾，因此，$M' \subset E_M(x)$，且M'为有限集合，同理N'为有限集合，因此$Card(M) = Card(N)$.

注：原书习题137（4）有误.

3.5 自然数的运算（Calcul sur les entiers）

定理 125. 有限个自然数的和、积均为自然数

令$(a_i)_{i\in I}$为自然数有限族，则$\sum\limits_{i\in I} a_i$、$\underset{i\in I}{\mathsf{P}} a_i$均为自然数.

证明：

先证自然数a、b的和是自然数：

$b = 0$，$a + b = a$，命题显然成立，假设命题对b成立，即$a + b$为自然数，则$a + (b + 1) = (a + b) + 1$，根据定理115，其为自然数，得证.

令$n = Card(I)$，当$n = 0$，$\sum\limits_{i\in I} a_i = 0$，命题显然成立；设命题对$n$成立，则对于$Card(I) = n + 1$，令$I = J \cup \{k\}$，其中$k \notin J$，则$Card(J) = n$，故$\sum\limits_{i\in J} a_i$为自然数，而$\sum\limits_{i\in I} a_i = (\sum\limits_{i\in J} a_i) + a_k$，因此也是自然数.

对于乘法，根据定理99及上述证明，自然数a、b的乘积为自然数．类似加法可证.

定理 126.

令$(X_i)_{i\in I}$为有限集族，则$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$为有限集合.

证明：根据定理125，$(X_i)_{i\in I}$的和S为有限集合．根据补充定理116（1），存在S到$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$的满射，得证.

定理 127.

令$(X_i)_{i\in I}$为有限集族，则$\prod\limits_{i\in I} X_i$为有限集合.

证明：根据定理125可证.

定理 128. 自然数的自然数次幂为自然数

令a、b为自然数，则a^b为自然数.

证明：根据定理127、定理103可证.

定理 129.

有限集合的子集集合是有限集合.

证明：根据定理128、定理108可证.

定理 130.

a、b为自然数，则$a < b \Leftrightarrow (\exists c)(c > 0$与$b = a + c)$.

证明：由于$a < b$，故存在c使$b = a + c$，由于$a \neq b$，故$c > 0$；反过来，如果$b = a + c$，由于$c \geq 1$，故$a < b$.

定理 131.

令$(a_i)_{i\in I}$、$(b_i)_{i\in I}$为自然数有限族，$(\forall I)(i \in I \Rightarrow a_i \leq b_i)$，且$(\exists I)(i \in I$与$a_i < b_i)$，则$\sum\limits_{i\in I} a_i < \sum\limits_{i\in I} b_i$；如果$(\forall I)(i \in I \Rightarrow b_i \neq 0)$，则$\prod\limits_{i\in I} a_i < \prod\limits_{i\in I} b_i$.

证明：设$a_j < b_j$，则对$I - \{j\}$，根据定理110，$\sum\limits_{i\in I-\{j\}} a_i \leq \sum\limits_{i\in I-\{j\}} b_i$；令$b_j = a_j + c$，则$c > 0$，故$c + \sum\limits_{i\in I} a_i \leq \sum\limits_{i\in I} b_i$，因此$\sum\limits_{i\in I} a_i < \sum\limits_{i\in I} b_i$. 根据定理110，$\prod\limits_{i\in I-\{j\}} a_i \leq \prod\limits_{i\in I-\{j\}} b_i$，因此$\prod\limits_{i\in I} a_i \leq c \cdot \prod\limits_{i\in I-\{j\}} b_i + \prod\limits_{i\in I} b_i$. 根据定理100，$c \cdot \prod\limits_{i\in I-\{j\}} b_i > 0$，得证.

定理 132.

a、a'、b为自然数，$b > 0$，$a < a'$，则$a^b < a'^b$.

证明：根据定理103、定理131可证.

定理 133.

a、b、b'为自然数，$b < b'$，$a > 1$，则$a^b < a^{b'}$.

证明：设$b' = b + c$，则$c > 0$. $a^{b'} = a^b \cdot a^c$. 由于$c > 0$，故$a^c \geq a$，因此$a^c > 1$，故$ab < ab'$.

定理 134.

a、b、b'为自然数，则$a + b = a + b' \Leftrightarrow b = b'$，如果$a > 0$，则$ab = ab' \Leftrightarrow b = b'$.

证明：若$b < b'$，根据定理131，$a + b < a + b'$，$ab < ab'$；若$b > b'$，根据定理131，$a + b > a + b'$，$ab > ab'$；若$b = b'$，则$a + b = a + b'$，$ab = ab'$，得证.

补充定理 310.

a、b、b'为自然数，则$a + b < a + b' \Leftrightarrow b < b'$，如果$a > 0$，则$ab < ab' \Leftrightarrow b < b'$.

证明：类似定理134可证.

补充定理 311.

a、b是自然数，$b > 1$，则$a < b^a$.

证明：根据补充定理310可证.

定理 135. 自然数的差的唯一性

a、b为自然数，$a \leq b$，则存在唯一的自然数c，使$b = a + c$.

证明：根据定理109，存在性成立．若$b=a+c$、$b=a+c'$，根据定理134，$c=c'$，唯一性成立．

定义 161. 自然数的差（*différence de entiers*）

a、b、c为自然数，$b=a+c$，则称c为b和a的差，记作$b-a$．

补充定理 312.

a、b为自然数，$a\le b$，c为b和a的差，则c小于a，并且a是b和c的差．

证明：根据定理95（1）可证．

定理 136.

a、b为自然数，则映射$x\mapsto x+a$为区间$[0,b]$到区间$[a,a+b]$的同构，且为严格单增映射，$y\mapsto y-a$为其逆同构．

证明：令$y=x+a$，则$x=y-a$．根据补充定理310，$x\in[0,b]\Leftrightarrow y\in[a,a+b]$．因此，$x\mapsto x+a$、$y\mapsto y-a$均为双射，且互为逆映射．同时，$x\mapsto x+a$、$y\mapsto y-a$均为严格单增映射．根据定义得证．

定理 137.

a、b为自然数，$a\le b$，则区间$[a,b]$的元素数目为$b-a+1$．

证明：如果$a=0$，$b=0$，命题显然成立．如果命题对$[0,b]$成立，则$[0,b+1]=[0,b]\cup\{b+1\}$，显然命题对$[0,b+1]$成立．

如果$a>0$，则区间$[a,b]$同构于$[0,b-a]$，故命题也成立．

定理 138.

非空有限全序集的基数为n，则该集合同构于区间$[1,n]$．

证明：根据定理84，该非空有限全序集同构于区间$[1,n]$的某个区间，或者区间$[1,n]$同构于该非空有限全序集的某个区间．由于同构集合等势，根据定理118，得证．

定义 162. 有限序列（*suite finie*），序列的长度（*longueur d'une suite*）

如果族的指标集的是自然数有限集，则称该族为有限序列；指标集的基数，称为该序列的长度．

补充定理 313.

有限序列的长度为n，则区间$[1,n]$同构于指标集．

证明：根据定理138可证．

定义 163. 第k项（*k-éme terme*），首项（*premier terme*）

令f为区间$[1,n]$到有限序列$(t_i)_{i\in I}$的指标集I的同构，则$t_{f(k)}$称为该有限序列的第k项，$t_{f(1)}$称为该有限序列的首项．

定义 164. 特征函数（*fonction caractéristique*）

$A \subset E$，E到$\{0,1\}$的映射f满足下列条件：

当$x \in A$时，$f(x)=1$；当$x \in E-A$时，$f(x)=0$，

则称f为E的子集A的特征函数，记作ϕ_A.

补充定理 314.

对于E的子集A、B，$A=B \Leftrightarrow \phi_A=\phi_B$.

证明：根据定义可证.

定理 139.

对于E的子集A、B：

（*1*）$\phi_E-A(x)=1-\phi_A(x)$.

（*2*）$\phi_A \cap B(x)=\phi_A(x)\phi_B(x)$.

（*3*）$\phi_A \cup B(x)+\phi_A \cap B(x)=\phi_A(x)+\phi_B(x)$.

证明：根据定义可证.

定理 140. 自然数的商和余数的唯一性

a、b为自然数，$b>0$，则存在唯一的一对q、r，使q、r均为自然数，$a=bq+r$，并且$r<b$.

证明：由于$ba \geq a$，因此$\{q|q{:}6p与bq \leq a\} \subset [1,a]$，故$\{q|q{:}6p与bq \leq a\}$为全序有限集，令其最大元为$q$，则$bq \geq a$，令$r=a-bq$，$r<b$，存在性得证．令$q$、$r$和$q'$、$r'$都符合条件，则$bq+r=bq'+r'$，如果$q<q'$，设$q'=q+c$，$c>0$，则$r=bc+r'$，因此$r>b$，矛盾，同理$q'<q$也矛盾，因此$q=q'$，故$r=r'$，唯一性得证.

定义 165. 自然数的商（*quotient de entiers*），自然数的余数（*reste de entiers*），整除（*divisible*），约数（*diviseur*）

a、b为自然数，$b>0$，q、r均为自然数，$a=bq+r$，并且$r<b$，则q称为a除以b的商，记作$[a/b]$，r称为a除以b的余数．如果$r=0$，则称a能被b整除，或称b整除a，或称b是a的约数，此时商记作a/b.

补充定理 315.

a、b、c均为自然数，$b>0$，$c>0$，且b整除a、c整除b，则c整除a，且$a/c=(a/b)(b/c)$.

证明：根据定义可证.

补充定理 316.

a、b、c均为自然数，$c>0$，且c整除a、c整除b，则c整除$a+b$，且$(a+b)/c=a/c+b/c$；如果$a \geq b$，则c整除$a-b$，且$(a-b)/c=a/c-b/c$.

证明：根据定义可证.

补充定理 317.

（1）a为自然数，$a > 0$，则a整除0.

（2）a为自然数，则1整除a.

证明：根据定义可证.

补充定理 318.

a、b、c为自然数，a除以c的商为q，余数为r，b除以c的商为q'，余数为r'，则$a < b \Leftrightarrow (q < q')$或$((q = q')$与$(r < r'))$.

证明：由于$a = cq + r$，$b = cq' + r'$，如果$a < b$，且$q > q'$，则$cq \geq cq' + c$，由于$r' < c$，故$cq + r > cq' + r'$，矛盾．如果$q = q'$，则$r < r'$．反过来，如果$q < q'$，则$q + 1 \leq q'$，又因为$r < c$，故$cq + r < c(q + 1)$，因此$a < cq'$，故$a < b$.

定义 166. 偶数（*pairs*）、奇数（*impairs*）

a为自然数，如果2整除a，则称a为偶数，否则，称a为奇数.

补充定理 319.

a为自然数，则a为偶数 $\Leftrightarrow (\exists n)(n$为自然数与$a = 2n)$，$a$为奇数 $\Leftrightarrow (\exists n)(n$为自然数与$a = 2n + 1)$.

证明：根据定义可证.

定理 141.

令b、k、h为自然数，$b > 1$、$k > 0$，$(J_h)_{h \in [0,k-1]}$，对任意$h \in [0, k-1]$, $J_h \in [0, b-1]$，令E_k为该族的字典式乘积，令r为$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$，则映射$r \mapsto \sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$为$E_k$到$[0, b^k - 1]$的同构.

证明：

当$k = 1$时，命题显然成立.

如果命题对k成立，令E_k到$[0, b^k - 1]$的映射为f：

令$(r_h)_{h \in [0,k]} \in E_{k+1}$，则$\sum\limits_{h \in [0,k]} r_h b^{k-h} \leq r_0 b^k + b^k - 1$，由于$r_0 + 1 \leq b$，故$\sum\limits_{h \in [0,k]} r_h b^{k-h} < b^{k+1} - 1$，即$r \mapsto \sum\limits_{h \in [0,k]} r_h b^{k-h}$为$E_{K+1}$到$[0, b^{k+1} - 1]$的映射，设该映射为$g$.

对于$r \in E_{k+1}$（$r = (r_h)_{h \in [0,k]}$），$r' \in E_{k+1}$（$r' = ({r'}_h)_{h \in [0,k]}$），令$s = (r_{i+1})_{i \in [0,k-1]}$，$s' = ({r'}_{i+1})_{i \in [0,k-1]}$，则$g(r) = r_0 b^k + f(s)$，$g(r') = {r'}_0 b^k + f(s')$：

如果$g(r) = g(r')$，由于$f(s) < b^k$、$f(s') < b^k$，根据定理140，$r = r'$，故g为单射.

同时，对任意$x \in E_{k+1}$，根据定理140，存在$q < b$、$t < b^k$，使$x = qb^k + t$，令$r_0 = q$，$s = f^{-1}(t)$，$r_i = s_{i-1}$（$i \in [1, k]$），则$g(r) = x$，故g为满射.

如果$r < r'$，则：

若$r_0 < r'_0$，则$g(r) < r_0 b^k + b^k$，$g(r') \geq r'_0 b^k$，又因为$r_0 + 1 \leq r'_0$，因此$g(r) \leq g(r')$；

若$r_0 = r'_0$，则令j为$\{i | i \in [1, k]与r_i \neq r'_i\}$的最小元，故$r_j < r'_j$，因此$s < s'$，根据归纳假设，$f(s) < f(s')$，因此$g(r) \leq g(r')$.

故g为单增函数.

综上，根据补充定理166，得证.

补充定理 320. 自然数展开的唯一性

令a、b为自然数，$b > 1$、$a > 0$，则存在唯一的自然数k以及族$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$，使$(\forall h)(h \in [0, k-1] \Rightarrow r_k \in [0, k-1])$，$r_0 \neq 0$，并且$a = \sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$.

证明：根据补充定理311，$a < b^a$，因此$\{x | x \leq a与a < b^x\}$有最小元k，因此$b^{k-1} \leq a$，$a < b^k$. 根据定理141，存在唯一的族，$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$，使$(\forall h)(h \in [0, k-1] \Rightarrow r_k \in [0, k-1])$并且$a = \sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$. 此时，如果$r_0 = 0$，则令$s_i = r_{i+1}$（$i \leq k-2$），根据定理141，$\sum\limits_{h \in [0,k-2]} s_h b^{k-h-2} \leq b^{k-1}$，故$a \leq b^{k-1} - 1$，矛盾，因此$r0 \neq 0$.

如果另有k'满足条件，若$k' < k$，则$a \leq b^{k'} - 1$，故$a \leq b^{k-1} - 1$，矛盾；若$k < k'$，则$a \geq b^k$，同样矛盾. 得证.

定义 167. 自然数的展开（*développement d'un entier*）

令a、b为自然数，$b > 1$、$a > 0$，如果自然数k以及族$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$，使$(\forall h)(h \in [0, k-1] \Rightarrow r_k \in [0, k-1])$，$r_0 \neq 0$，并且$a = \sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$，则称$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$为$a$基于$b$的展开.

注：原书将$\sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$称为$a$基于$b$的展开，但这一式子本身等于$a$，不应作为单独的概念，故修改.

定理 142. 乘法原理

a、b为基数，$Card(E) = a$，$Card(E) = b$，f为E到F的满射，对任意$y \in F$，$Card(f^{-1}\langle y \rangle) = c$，则$a = bc$.

证明：对任意$y \neq y'$，$f^{-1}\langle y \rangle \cap f^{-1}\langle y' \rangle = \varnothing$，因此$(f^{-1}\langle y \rangle)_{y \in F}$是$E$的划分. 根据定理94（2）、定理99可证.

定义 168. 阶乘（*factorielle*）

n为自然数，则$\prod\limits_{i \in [1,n]} i$称为$n$的阶乘，记作$n!$.

补充定理 321.

$0! = 1$；$1! = 1$.

证明：根据定义可证.

定理 143.

m、n为自然数，$m \le n$，A的元素数目为m，B的元素数目为n，A到B的单射的数目为$n!/(n-m)!$.

证明：$m=0$，则$A=\varnothing$，故仅有单射$(\varnothing,\varnothing,B)$，因此元素数目为1，故命题对0成立.

设命题对m成立，考虑$m+1$：

设$a \in A$，令$A' = A - \{a\}$．F为A到B的单射，F'为A'到B的单射，g为映射$f \mapsto f'|A$，由于$f(a) \in B - f'(A')$，其元素数目为$n-m$，故对任意f'，$g^{-1}\langle f'\rangle$的元素数目为$n-m$，根据定理142，F的数目为$(n!/(n-m)!) \cdot (n-m)$，得证.

定理 144.

A的排列的数目为$n!$.

证明：根据定理143可证.

补充定理 322.

E为元素数目为n的集合，$(p_i)_{i\in[1,h]}$为自然数有限序列，$\sum\limits_{i\in[1,h]} p_i = n$．则存在两两不相交的集族$(X_i)i \in [1,h]$，其为$E$的覆盖且满足$(\forall i)(i \in [1,h] \Rightarrow Card(X_i) = p_i)$.

证明：若$h=0$，则$n=0$，$E=\varnothing$，$\varnothing$显然满足条件.

设命题对h成立，则对$h+1$：

由于E存在元素数目为$\sum\limits_{i\in[1,h]} p_i$的子集$E'$，其存在满足条件的覆盖$(X_i)_{i\in[1,h]}$．因此$E-E'$的元素数目为$p_{h+1}$，则$(p_i)_{i\in[1,h]} \cup (h+1, E-E')$是满足条件的覆盖．得证.

定理 145.

E的元素数目为n，$(p_i)_{i\in[1,h]}$为自然数有限序列，$\sum\limits_{i\in[1,h]} p_i = n$．满足$(\forall i)(i \in [1,h] \Rightarrow Card(X_i) = p_i)$且两两不相交的$E$的覆盖$(X_i)_{i\in[1,h]}$的数目为$n!/\underset{i\in[1,h]}{\mathsf{P}}(p_i!)$.

证明：令G为E的排列集合，P为满足条件的覆盖的集合．根据补充定理322，P不是空集.

令$(A_i)_{i\in[1,h]}$为符合条件的一个覆盖，对G的任何一个元素f，则$(f(A_i))_{i\in[1,h]}$也是P的元素．令该覆盖为$g(f)$.

则对任意$(X_i)_{i\in[1,h]} \in P$，如果$g(f) = (X_i)_{i\in[1,h]}$，则对任意$i \in [1,h]$，$f(A_i) = X_i$．根据定理33，集族$(f_i)_{i\in I}$（其中$f_i = f|A_i$）与f一一对应，令T_i表示A_i到X_i的双射的集合，则其数目为$p_i!$，因此使$g(f) = f(X_i)_{i\in[1,h]}$的f，与$\prod\limits_{i\in[1,h]} T_i$的元素一一对应，故其数目为$\underset{i\in[1,h]}{\mathsf{P}}(p_i!)$，由于$G$的元素数目为$n!$，根据定理142得证.

定理 146.

A的元素数目为n，$p \le n$，则元素数目为p的A的元素的子集数目为$n!/(p!(n-p)!)$.

证明：根据定理145可证.

定义 169. 组合数（*coefficient binomial*）

n、p为自然数，且$p \le n$，则$n!/(p!(n-p)!)$称为n取p的组合数，记作$\binom{n}{p}$.

补充定理 323.

n、p为自然数，且$p \le n$，则$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

证明：根据定义可证.

定理 147.

E、F均为全序有限集，元素数目分别是p、n，$p \le n$，则E到F的严格单增映射的数目为$\binom{n}{p}$.

证明：全序有限集为良序集，根据定理84，E到F的任何元素数目为p的子集的严格单增映射唯一，根据定理146可证.

定理 148.

$\sum\limits_{p \in [0,n]} \binom{n}{p} = 2^n$.

证明：根据定理108可证.

补充定理 324.

n为自然数，则$\binom{n}{0} = 1$.

证明：根据定义可证.

补充定理 325.

n为自然数且$n > 0$，则$\binom{n}{1} = n$.

证明：令A的元素数目为n，A的元素数目为1的子集和A的元素一一对应，得证.

定理 149.

$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

证明：

令E的元素数目为$n+1$，其中一个元素为a，令$E' = E - \{a\}$，F为E的元素数目为$p+1$的子集的集合，G为E'的元素数目为p或$p+1$的子集的集合.

对任意$A \in F$，$A \cap E' \in G$，因此，$A \mapsto A \cap E'$为F到G的映射，令其为f；且对任意$B \in G$，如果B的元素数目为p，则$f(B \cup \{a\}) = B$，如果B的元素数目为$p+1$，则$f(B) = B$. 令$A \ne A'$，如果$a \notin A$、$a \notin A'$，则$f(A) = A$，$f(A') = A'$，$f(A) \ne f(A')$；如果$a \in A$、$a \in A'$，则$f(A) = A - \{a\}$，$f(A') = A' - \{a\}$，$f(A) \ne f(A')$；如果$a \in A$、$a \notin A'$，则$f(A)$元素数目为p，$f(A')$元素数目为$p+1$，$f(A) \ne f(A')$ ；如果$a \in A'$、$a \notin A$，同理$f(A) \ne f(A')$.

综上，f是F到G的双射. 得证.

补充定理 326.

n为自然数且$n>1$，则$\binom{n}{2}=n(n-1)2$.

证明：$n=2$时，命题显然成立．设命题对n成立，根据定理149，$\binom{n+1}{2}=\binom{n}{2}+\binom{n}{1}$，得证.

补充定理 327.

n、m为自然数，则$\sum\limits_{i\in[0,m-1]}\binom{n+i}{n}=\binom{n+m}{n+1}$.

证明：根据定理149，对i用数学归纳法可证.

补充定理 328.

（*1*）t、r、q为自然数，则$\sum\limits_{i\in[0,r]}\binom{t+r-i}{t}\binom{q+i}{q}=\binom{q+t+r+1}{r}$.

（*2*）p、q、n为自然数，且$p\leq n$，$q<p$，则$\sum\limits_{k\in[q+1,n-p+q+1]}\binom{n-k}{p-q-1}\binom{k-1}{q}=\binom{n}{p}$.

证明：

（1）如果$t=0$，对i使用数学归纳法可证命题成立．如果$r=0$，根据定义，命题成立．根据定理149，对$r+t$使用数学归纳法可证.

（2）令$t=p-q-1$，$i=k-q-1$，$r=n-p$，根据补充定理328（1）、补充定理323可证.

定理 150.

n为自然数，且$n>0$，则满足$i\in[1,n]$、$j\in[1,n]$且$i<j$（或$i\leq j$）的有序对(i,j)的数目是$n(n-1)/2$（或$n(n+1)/2$）.

证明：满足$i\in[1,n]$、$j\in[1,n]$且$i<j$的有序对(i,j)，与$[1,n]$的元素数目为2的子集一一对应，故为$n(n-1)/2$；满足$i\in[1,n]$、$j\in[1,n]$且$i<j$的有序对(i,j)，与$[1,n]$的元素数目为2或1的子集一一对应，故为$n(n+1)/2$.

定理 151.

n为自然数，且$n>0$，则$\sum\limits_{i\in[1,n]}i=n(n+1)/2$.

证明：对于满足$i\in[1,n]$、$j\in[1,n]$且$i\leq j$的有序对(i,j)，对任意$j\in[1,n]$，有序对(i,j)的数目为j，根据定理150得证.

定理 152.

n、h为自然数，E为元素数目为h的集合，E到$[0,n]$且满足$\sum\limits_{x\in E}u(x)\leq n$（或$\sum\limits_{x\in E}u(x)=n$且$h>0$）的映射$u$的数目是$\binom{n+h}{n}$（或$\binom{n+h-1}{h-1}$）.

证明：

设g为$[1,h]$到E的双射.

对于E到$[0,n]$且满足$\sum\limits_{x\in E} u(x) \leq n$的映射$u$，定义$f_u$如下：$f_u(1)=u(g(1))+1$，当$1\leq i$与$i\leq h-1$时，$f_u(i+1)=f_u(i)+1+u(g(i+1))$；则$f_u$为$[1,h]$到$[1,n+h]$的严格单增映射. 根据定义可证$u\mapsto f_u$为双射，故$u$的集合的元素数目为$\binom{n+h}{n}$.

满足$\sum\limits_{x\in E} u(x)=n$的$u$的集合的元素数目为$\binom{n+h}{n}-\binom{n+h-1}{n-1}$，故等于$\binom{n+h-1}{h-1}$.

补充定理 329. 二项式定理

a、b、n为自然数：

（1）$(a+b)^n=\sum\limits_{i\in[0,n]}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$.

（2）如果$a\geq b$，则$(a-b)^n=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为偶数}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i-\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$.

（3）n为自然数，则：$\sum\limits_{i\in[0,n]与i为偶数}\binom{n}{i}=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}$.

证明：

（1）根据定理149，对n用数学归纳法可证.

（2）根据定理149，对n用数学归纳法可证.

（3）令$a=1$，$b=1$，根据补充定理329（2）可证.

补充定理 330.

$(a_i)_{i\in[0,n]}$、$(b_i)_{i\in[0,n]}$为自然数族，则$(\forall x)(x$为自然数$\Rightarrow \sum\limits_{i\in[0,n]}a_ix^i=\sum\limits_{i\in[0,n]}b_ix^i)\Leftrightarrow(\forall i)(i\in[0,n]\Rightarrow a_i=b_i)$.

证明：根据公理模式7，右边$\Rightarrow$ 左边；令$x=sup(sup(a_i)_{i\in I},sup(b_i)_{i\in I})+1$，根据补充定理320，左边$\Rightarrow$右边.

补充定理 331.

a、b、n、p为自然数：

（1）$\binom{n}{p}(a+b)^p=\sum\limits_{i\in[0,p]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}a^{p-i}b^i$；

（2）$\binom{n}{p}(a-b)^p=\sum\limits_{i\in[0,p]与i为偶数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}a^{p-i}b^i-\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}a^{p-i}b^i$.

（3）$\sum\limits_{i\in[0,p]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}=2^p\binom{n}{p}$.

（4）$\sum\limits_{i\in[0,p]与i为偶数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$.

证明：

（1）根据补充定理329（1），$(x+a+b)^n=\sum\limits_{p\in[0,n]}\binom{n}{p}(a+b)^px^{n-p}$；

同时，$(x+a+b)^n=\sum\limits_{i\in[0,n]}\binom{n}{i}(x+a)^{n-i}b^i$，

即$\sum\limits_{i\in[0,n]}\binom{n}{i}b^i(\sum\limits_{q\in[0,n-i]}\binom{n-i}{q}x^qa^{n-i-q})$，

即$\sum\limits_{(i,q)\in\{(x,y)|x\in[0,n]与y\in[0,n-x]\}}\binom{n}{i}\binom{n-i}{q}x^qa^{n-i-q}b^i$，

即$\sum\limits_{q\in[0,n]}(\sum\limits_{i\in[0,n-q]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{q}x^qa^{n-i-q}b^i)$，

即$\sum\limits_{p\in[0,n]}(\sum\limits_{i\in[0,p]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}x^{n-p}a^{p-i}b^i)$.

根据补充定理330，得证.

（2）考虑$(x+a-b)^n$，类似补充定理331（1）可证.

（3）令$a=1$，$b=1$，根据补充定理331（1）可证.

（4）令$a=1$，$b=1$，根据补充定理331（2）可证.

习题 138.

p、q、n为自然数，且$p\leq n$，$q<p$，求证：$\sum\limits_{k\in[q+1,n-p+q+1]}\binom{n-k}{p-q-1}\binom{k-1}{q}=\binom{n}{p}$.

证明：即补充定理328（2）.

习题 139.

n为自然数，求证：$(a-b)^n=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为偶数}\binom{n}{i}=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}$.

证明：即补充定理329（3）.

习题 140.

n、p为自然数，求证：

（*1*）$\sum\limits_{i\in[0,p]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}=2^p\binom{n}{p}$；

（*2*）$\sum\limits_{i\in[0,p]与i为偶数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$.

证明：

（1）即补充定理331（3）.

（2）即补充定理331（4）.

习题 141.

定义$[1,h]$到$[0,n]$且满足$\sum\limits_{x\in E}u(x)\leq n$的映射$u$的集合，到$[1,h]$到$[1,n+h]$的严格单增映射的集合的双射，从而证明定理*152*.

证明：参见定理152的证明.

习题 142.

（*1*）E为分配格，f为E到具有运算法则“+”的可交换幺半群M的映射，并且对任意$x\in E$、$y\in E$，$f(x)+f(y)=f(sup(x,y))+f(inf(x,y))$，求证：对$E$的任意有限子集$I$，

$f(sup(I))+\sum\limits_{n\in\{k|k>0\text{与}2k\leq Card(I)\}}(\sum\limits_{H\in\{K|K\subset I\text{与}Card(K)=2n\}}f(inf(H)))=$
$\sum\limits_{n\in\{k|2k+1\leq Card(I)\}}(\sum\limits_{H\in\{K|K\subset I\text{与}Card(K)=2n+1\}}f(inf(H)))$.

（2）A为集合，$(B_i)_{i\in I}$为A的有限子集族，$B=\bigcup\limits_{i\in I}B_i$，对任意$H\subset I$，令$B_H=\bigcap\limits_{i\in H}B_i$，求证：$Card(B)+\sum\limits_{n\in\{k|k>0\text{与}2k\leq Card(I)\}}(\sum\limits_{H\in\{K|K\subset I\text{与}Card(K)=2n\}}Card(B_H))=$
$\sum\limits_{n\in\{k|2k+1\leq Card(I)\}}(\sum\limits_{H\in\{K|K\subset I\text{与}Card(K)=2n+1\}}Card(B_H)))$.

证明：

（1）对$Card(I)$运用数学归纳法可证.

（2）根据习题142（1）可证.

注：习题142涉及尚未介绍的“可交换幺半群”知识.

习题 143.

n、h为自然数，求证：$\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为偶数与}k\in[0,n]\}}\binom{h}{i}\binom{n+h-i}{h}=\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为奇数与}k\in[0,n]\}}\binom{h}{i}\binom{n+h-i}{h}+1$.

证明：令$B=\{u|u\text{为}[1,h]\text{到}[0,n]\text{的映射与}\sum\limits_{x\in[1,h]}u(x)\leq n\}-\{u|u\text{为}[1,h]\text{到}[0,n]\text{的映射与}(\forall x)(x\in[1,h]\Rightarrow u(x)=0\}$，$B_i=\{u|u\in B\text{与}u(i)\geq 1\}$（$i\in[1,h]$），根据习题142（2）可证.

习题 144.

令$S_{n,p}$为$[1,n]$到$[1,p]$的满射的数目：

（1）求证：$\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为偶数与}k\in[0,n]\}}\binom{p}{i}(p-i)^n=S_{n,p}+\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为奇数与}k\in[0,n]\}}\binom{p}{i}(p-i)^n$.

（2）求证：$S_{n,p}=p(S_{n-1,p}+S_{n-1,p-1})$.

（3）求证：Sn+1, n=n((n+1)!)/2，Sn+2, n=n(3n+1)((n+2)!)/24.

（4）令$P_{n,p}$为满足下列条件的G的数目：

第一，Δ_G为$[1,n]$的划分；

第二，$Card(G)=p$.

求证：$S_{n,p}=p!P_{n,p}$.

证明：

（1）由于$p^n=\sum\limits_{i\in[0,n]}S_{n,p-i}\binom{p}{i}$，根据补充定理331（2）可证.

（2）根据习题144（1）、定理149可证.

（3）考虑$[1,n+1]$、$[1,n+2]$的n个集合的划分，根据定理142可证.

（4）根据定理142可证.

习题 145.

E的元素数目为n，p_n为$\{u|u$为E的排列与$(\forall x)(x\in E\Rightarrow u(x)\neq x)\}$，求证：$\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为偶数与}k\in[0,n]\}}\binom{n}{i}(n-i)!=p_n+\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为奇数与}k\in[0,n]\}}\binom{n}{i}(n-i)!$，并且，当$n$趋向无穷大时，$p_n$趋向$n!/e$.

证明：根据习题142（2）可证.

注：习题145涉及尚未介绍的“实数”和“数列极限”知识.

习题 146.

（1）E的元素数目为qn，求证：满足下列条件的集合G的数目，为$(qn)!/(n!(q!)n)$：

第一，G的元素数目为n；

第二，G的任何元素的元素数目均为p；

第三，Δ_G为E的划分.

（2）$E=[1,qn]$，令A为满足下列条件的集合G的数目，为*(qn)!/(n!(q!)n)*：

第一，G的元素数目为n；

第二，G的任何元素的元素数目均为p；

第三，Δ_G为E的划分；

第四，G的任何元素都不是区间.

则$\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为偶数与}k\in[0,n]\}}(qn-i(q-1))!/(i!(n-i)!q^{n-i})=A+\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为奇数与}k\in[0,n]\}}(qn-i(q-1))!/(i!(n-i)!q^{n-i})$.

证明：

（1）根据定理142可证.

（2）根据习题142（2）可证.

习题 147.

令$q_{n,k}$为$[1,k]$到$[1,n]$的满足下列条件的严格单增映射u的数目：对任意奇数（或偶数）$x\in[1,k]$，$u(x)$为偶数（或奇数），则$q_{n,k}=C([(n+k)/2],k)$.

证明：令$u'(x)=u(x)+x$，则$u\mapsto u'$为双射，故所求映射数目等于$[1,k]$到$[1,n+k]$中的偶数组成的集合的映射数目，得证.

习题 148.

E为n个符号组成的集合，S为将符号f添加到E得到的集合．设f的权重为2，E的元素的权重为0.

（1）M为$L_0(S)$中满足下列条件的有意义的单词的集合：

E的各元素均出现且仅出现一次．令u_n为M的元素数目，求证：$u_{n+1}=(4n-2)u_n$，并且当$n\geq 2$时，$u_n=\prod\limits_{i\in[2,n]}(4n-6)$.

（2）令x_i为E的第i个符号，求证：如果给定E的符号顺序，则M的单词数目$v_n=\binom{2n-2}{n-1}/n$，并且$v_{n+1}=\sum\limits_{i\in[1,n]}(v_iv_{n+1-i})$.

证明：

（1）长度为$2n-2$的字符串，其中$n-1$个符号为f（权重为2）、$n-1$个符号为g（权重为0），其数目为$\binom{2n-2}{n-1}$)；而其中“不合法”即存在$m<n-1$，使前m个字符权重之和小于m，对任意不合法的字符串S，对其中满足条件的最小m，从$m+1$个字符开始，将f和g调换，则得到长度$2n-2$的字符串S'，其中$n-2$个符号为f，n个符号位g．$S\mapsto S'$为双射，故“合法”的字符串为$\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n-2}=\binom{2n-2}{n-1}/n$，因此$u_n=(2n-2)!/(n-1)!$，因此$u_{n+1}=(4n-2)u_n$，用数学归纳法可证当$n\geq 2$时，$u_n=\underset{i\in[2,n]}{\mathsf{P}}(4n-6)$．

（2）根据习题148（1）可证．

习题 149.

（*1*）p、q为自然数且$p\geq 1$、$q\geq 1$，$n=2p+q$，E的元素数目为n，令$N=\binom{n}{p}$，$(X_i)_{i\in[1,n]}$为E的所有元素数目为p的子集按某种顺序排成的序列，$(Y_i)_{i\in[1,n]}$为E的所有元素数目为$p+q$的子集按某种顺序排成的序列，

求证：存在一个$[1,N]$到$[1,N]$的双射f，使对任意$i\in[1,N]$，均有$X_{f(i)}\subset Y_i$．

（*2*）h、k为自然数且$p\geq 1$、$q\geq 1$，n为自然数且$2h+k<n$，E的元素数目为n，

$(X_i)_{i\in[1,r]}$为E的若干不同的各元素数目为h的子集按某种顺序排成的序列，求证：存在E的若干不同的各元素数目为$h+k$的子集按某种顺序排成的序列$(Y_i)i\in[1,r+1]$，并且，对任意$i\in[1,r+1]$，均存在$j\in[1,r]$，使$X_j\subset Y_i$，对任意$i\in[1,r]$，均存在$j\in[1,r+1]$，使$X_i\subset Y_j$．

证明：

（1）根据补充定理308可证．

（2）对n用数学归纳法，分别考虑含有某个元素a的集合，和不含某个元素a的集合，根据习题149（1）可证．

习题 150.

m、q为自然数，E的元素数目为$2m$，且$q<m$，F是满足下列条件的$\mathcal{P}(E)$的子集G的集合：令X、Y为G的两个不同元素，且$X\subset Y$，则$Card(Y-X)\leq 2q$．

（*1*）设$\{k|(\exists M)(M\in F$与$k=Card(M))\}$的最大元为p，并且，$p=Card(M)$，$M\in F$，求证：对任意$A\in M$，$Card(A)\geq m-q$，$Card(A)\leq m+q$．

（*2*）对任意$M\in F$，求证：$Card(M)\leq\sum\limits_{k\in[0,2q]}\binom{2m}{m-q+k}$．

（*3*）将$2m$和$2q$均替换为$2m+1$、$2q+1$，试给出相应的结论．

证明：

（1）设$\{x|(\exists A)(A\in M$与$x=Card(A))\}$的最小元是$m-q-s$（$s\geq 1$），令$X=\{A|A\in M$与$Card(A)=m-q-s\}$，$Card(X)=r$，根据习题149（2），存在$r+1$个基数为$m+q-s+1$个E的子集组成集合Y，使X的任何元素都是某个Y的元素的子集，且Y的任何元素都包含X的某个元素．则$(M-X)\cup Y\in F$，且$Card((M-X)\cup Y)>Card(M)$，矛盾．

（2）根据习题150（1）可证.

（3）类似习题150（1）、150（2）可知，相应的基数为$\sum\limits_{k\in[0,2q+1]}\binom{2m+1}{m-q+k)}$.

习题 151.

E为有限集合，元素数目为n，$(a_i)_{i\in[1,n]}$为E的各元素按某种顺序排成的序列，$(A_i)i\in[1,m]$为E的若干子集按某种顺序排成的序列，

（1）令$k_j=Card(\{i|i\in[1,m]$与$a_j\in Ai\})$，$s_i=Card(A_i)$，求证：$\sum\limits_{j\in[1,n]}k_j=\sum\limits_{i}\in[1,m]s_i$.

（2）对任意$x\in E$、$y\in E$，均存在唯一的$i\in[1,n]$，使$x\in A_i$、$y\in A_i$，求证：如果$a_j\notin A_i$，则$s_i\leq k_j$.

（3）对任意$x\in E$、$y\in E$，均存在唯一的$i\in[1,n]$，使$x\in A_i$、$y\in A_i$，求证：存在$i\in[1,n]$使$A_i=E$，或者$m\geq n$.

（4）对任意$x\in E$、$y\in E$，均存在唯一的$i\in[1,n]$，使$x\in A_i$、$y\in A_i$，且$m=n$，求证：$(A_i)_{i\in[1,m]}$必然符合下列两种情况之一：

第一，$A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$，以及$A_i=\{a_i,a_n\}\Phi i\in[1,n-1]\Psi$；第二，每个子集都有$k$个元素，每个元素都属于$k$个子集.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

（3）设k是$\{a|a=k_i$与$i\in[1,n]\}$的最小元，相应的元素为a，子集为A_1、A_2、$\cdots$、A_k，令$B_i=A_i-\{a\}$，令$b_i=Card(B_i)$，设其中最大元为b_k，如果$b_k\geq k$，根据习题151（2），对任意$a_i\notin A_k$，$1+b_k\leq k_i$，根据习题151（2），$\sum\limits_{i\in[1,m]}s_i\geq(1+b_k)\sum\limits_{i\in[1,k-1]}b_i+k(b_k+1)$. 同时，$\sum\limits_{i\in[1,m]}s_i\leq k+\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i+(m-k)k$. 令$y=b_k$，$\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i=x$，由于$(y-k)(x-1)+k(k-2)\geq 0$，故$m\geq 1+x+y$. 如果$b_k<k$，根据习题151（2），$(1+\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i)k\leq k+\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i+(m-k)k$，由于$\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i\leq k(k-1)$，故$m\geq 1+\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i$.

（4）根据习题151（3）证明过程中等号成立的条件可证.

注：原书习题151（3）有误.

习题 152.

E为有限集合，X、Y为$\mathcal{P}(E)$的两个非空子集，a、b、c、d是四个不等于0的自然数，并且满足下列条件：

第一，对任意$A\in X$、$B\in Y$，$Card(A\cap B)\geq a$;

第二，对任意$A\in X$，$Card(A)\leq b$;

第三，对任意$B\in Y$，$Card(B)\leq c$;

第四，对任意$x\in E$，$X\cup Y$的元素中，含有x的数目均为d.

求证：$Card(E) \le bc/a$，并且，当且仅当满足下列条件时，等号成立：

第一，对任意$A \in X$、$B \in Y$，$Card(A \cap B) = a$；

第二，对任意$A \in X$，$Card(A) = b$；

第三，对任意$B \in Y$，$Card(B) = c$；

第四，存在$r \le d$，使对任意$x \in E$，X的元素中，含有x的元素数目均为r.

证明：令$Card(X) = s$，$Card(Y) = t$，E的元素为a_1、a_2、$\cdots$、a_n，r_i为含有a_i的X的元素的数目，则$\sum\limits_{i \in [1,n]} r_i \le sb$，$\sum\limits_{i \in [1,n]} (d - r_i) \le tc$，$\sum\limits_{i \in [1,n]} (r_i(d - r_i)) \ge ast$，对$n$用数学归纳法，可证$n \sum\limits_{i \in [1,n]} (r_i(d - r_i)) \le (\sum\limits_{i \in [1,n]} r_i)(\sum\limits_{i \in [1,n]} (d - r_i))$，故$Card(E) \le bc/a$. 其中等号成立的条件是所有$r_i$都相等、且对任意$A \in X$、$B \in Y$，$Card(A \cap B) = a$；对任意$A \in X$，$Card(A) = b$；对任意$B \in Y$，$Card(B) = c$.

习题 153.

E为有限集合，元素数目为n，X为$\mathcal{P}(E)$的非空子集，a、b、c是三个不等于0的自然数，并且满足：

第一，对X的任意不同的元素A、B，$Card(A \cap B) = a$；

第二，对任意$A \in X$，$Card(A) \le b$；

第三，对任意$x \in E$，X的元素中，含有x的元素数目均为c.

求证：$n(a-1) \le b(b-1)$.

证明：令$x \in E$，$Y = \{Q | (\exists A)(A \in X与x \in A与Q = A - \{x\})\}$，$Z = \{Q | Q \in X与x \notin Q\}$，根据习题152，$a(n-1) \le b(b-1)$，又因为$a \le n$，故$n(a-1) \le b(b-1)$.

习题 154.

i、h、k是自然数，$i \ge 1$，$h \ge i$，$k \ge i$，求证：存在满足下列条件的自然数$m_i(h,k)$：

对任意有限集合E，令$F_i(E)$为E的元素数目为i的子集的集合，如果E的元素数目不小于$m_i(h,k)$，且对满足$X \subset F_i(E)$的任意集合X，令$Y = F_i(E) - X$，则E的任意h个元素的子集都包含一个X的元素，E的任意k个元素的子集都包含一个Y的元素，不可能同时出现.

证明：根据定义，$m_1(h,k) = h + k - 1$，$m_i(i,k) = k$，$m_i(h,i) = h$.

下面证明$m_i(h,k) = m_{i-1}(m_i(h-1,k), m_i(h,k-1)) + 1$.

如果元素数目为该数的E不满足条件，即存在$X \subset F_i(E)$、$Y = F_i(E) - X$，使E的任意h个元素的子集都包含一个X的元素，E的任意k个元素的子集都包含一个Y的元素. 令$a \in E$，$E' = E - \{a\}$，E'的任意$m_i(h-1,k)$个元素的子集，其任意k个元素的子集都包含一个$Y \cup \mathcal{P}(E')$的元素，故存在某个$h-1$个元素的子集Z，其所有i个元素的子集都是$Y \cup \mathcal{P}(E')$的元素，由于$Z \cup \{a\}$包含一个X的元素U，故$a \in U$，令$X' = \{G | G \subset E'与G \cup \{a\} \in X\}$，故$U - \{a\} \in X'$，即$E'$的任意$m_i(h-1,k)$个元素的子集，包含一个$X'$的元素，

同理，令$Y' = \{G|G \subset E'$与$G \cup \{a\} \in Y\}$，则E'的任意$m_i(h, k-1)$个元素的子集，包含一个Y'的元素.

此外，$X' \subset F_{i-1}(E')$，$Y' = F_{i-1}(E') - X'$，矛盾.

习题 155.

（*1*）E为有限偏序集，元素数目为p，m、n为自然数且$mn < p$，求证：E有m元全序子集，或者有n元自由子集.

（*2*）令h、k为不等于0的自然数，令$r(h,k) = (h-1)(k-1)$，I为有限集，其元素均为自然数，且元素数目不小于$r(h,k)$，E为全序集，$(X_i)_{i \in I}$为E的元素的有限序列，求证：存在I的元素数目为h的子集H使$(x_i)_{i \in H}$为单增序列，或者存在I的元素数目为k的子集K使$(x_i)_{i \in K}$为单减序列.

证明：

（1）根据补充定理306可证.

（2）根据补充定理306可证.

注：根据序列的定义，习题151（2）的条件中，集合I的性质做了修改.

3.6 无穷集合（Ensembles infinis）

定义 170. 无穷集合（*ensemble infini*）

如果一个集合不是有限集合，则称其为无穷集合.

定义 171. 无穷基数（*cardinal infini*）

无穷集合的基数称为无穷基数.

补充定理 332. 无穷公理和自然数集合的存在性等价

$(x$为自然数$)$是x上的集合化公式$\Leftrightarrow (\exists X)(X$为无穷集合$)$.

证明：

若存在无穷集合，令a为无穷集合的基数，根据定理116，对任意自然数n，$a > n$. 根据补充定理293，存在集合$\{x|x$为基数与$x < a\}$，则任意自然数n均属于该集合，根据证明规则52可证.

反过来，如果$(x$为自然数$)$是x上的集合化公式，令该集合为E，对任意自然数n，$Card([0,n]) = n+1$，因此$Card(E) \neq n$，故E为无穷集合.

显式公理 4. 无穷公理

$(\exists X)(X$为无穷集合$)$.

元数学定义 65. 集合论（*théorie des ensembles*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*、显式公理*3*、显式公理*4*和公理模式*8*的等式理论，称为集合论.

定理 153. 存在自然数集合

(x为自然数)是x上的集合化公式.

证明：根据显式公理4、补充定理332可证.

定义 172. 自然数集合（*ensemble des entiers*）

$\{n|n$为自然数$\}$称为自然数集合，记作N.

补充定理 333.

（*1*）N为良序集.

（*2*）a为有限基数，E为无穷集合，则$a < Card(E)$.

证明：

（1）根据定理89可证.

（2）根据定理116可证.

定义 173. 序列（*suite*），元素序列（*suite d'éléments*），无穷序列（*suite infinie*）

指标集是N的子集的族（或E的元素族），称为序列（或元素序列）；序列$(x_n)_{n\in N与R}$也可以记作$(x_n)_R$；在没有歧义的情况下，$(x_n)_{n\geq 0}$和$(x_n)_{n\geq 1}$均可简记为(x_n). 指标集是N的无穷子集的序列，称为无穷序列.

定义 174. 单增序列（*suite croissante*），单减序列（*suite décroissante*），单调序列（*suite monotone*），严格单增序列（*suite strictement croissante*），严格单减序列（*suite strictement décroissante*），严格单调序列（*suite strictement monotone*）

如果序列相应的映射为单增映射（或单减映射、单调映射、严格单增映射、严格单减映射、严格单调映射），则称该序列为单增序列（或单减序列、单调序列、严格单增序列、严格单减序列、严格单调序列）.

定义 175. 仅顺序不同的序列（*suite qui ne diffèrent que par l'ordre des termes*）

如果$(x_n)_{n\in I}$和$(y_n)_{n\in I}$的指标集相同，且存在I的排列f，使$(\forall n)(n\in I\Rightarrow x_{f(n)}=y_n)$，则称$(x_n)_{n\in I}$和$(y_n)_{n\in I}$为仅顺序不同的序列.

证明规则 62.

集合论中，u为字母，T为项，则存在唯一的项U和N到U的满射f，使对任意自然数n，令$f(n)$为$[0,n[$到$f\langle[0,n[\rangle$的满射，并在$[0,n[$上和f重合，使$(f(n)|u)T=f(n)$.

证明：根据证明规则60可证.

证明规则 63.

集合论中，S和a为项，则存在唯一的项V和N到V的满射f，使$f(0)=a$，并且对任意$n\geq 1$，$f(n)=(f(n-1)|n)S$.

证明：令T为$\tau_y((u = (\varnothing,\varnothing,\varnothing)$与$(y = a))$或$(u \neq (\varnothing,\varnothing,\varnothing)$与$y = (u(M(u))|v)S))$，其中$M(u) = (u$的定义域的最小上界)，由于$f(0) = (\varnothing,\varnothing,\varnothing)$，所以$(u|f(0))T = a$；$n > 0$时，$(u|f(n))T = (f(n-1)|n)S$，根据证明规则62，得证.

定理 154.

任何无穷集合E，均存在和N等势的子集.

证明：根据定理78，在E上存在良序，令E为按该良序排序的良序集．假设E不包含和N等势的子集，则E和N的片段等势，故E为有限集合，矛盾.

定理 155.

$Card(N \times N) = Card(N)$.

证明：考虑映射$(m,n) \mapsto (m+n)(m+n)+m$，如果$(m'+n')(m'+n')+m' = (m+n)(m+n)+m$，假设$m'+n' > m+n$，则$(m'+n')(m'+n') \geq (m+n+1)(m+n+1)$，故$(m'+n')(m'+n') > (m+n)(m+n)+m$，矛盾；同理$m'+n' < m+n$也矛盾，故$m'+n' = m+n$，因此$m = m'$，$n = n'$，故该映射为$N \times N$到$N$的单射．故$Card(N \times N) \leq Card(N)$. 考虑映射$n \mapsto (n,0)$，其为$N$到$N \times N$的单射．故$Card(N) \leq Card(N \times N)$．得证.

定理 156.

a为无穷基数，则$a^2 = a$.

证明：

令$card(E) = a$，D为E的子集且D和N等势．根据定理155，$Card(D \times D) = Card(D)$.

令f_0为D到$D \times D$的双射，令$M = \{z|z$为有序对与$pr_1 z \subset E$与$D \subset pr_1 z$与$(pr_2 z$为$pr_1 z$到$pr_1 z \times pr_1 z$的双射)与$(pr_2 z$为f_0在$pr_1 z$上的延拓)$\}$，R为$z \in M$与$z' \in M$与$(pr_1 z \subset pr_1 z')$与$(pr_2 z'$为$pr_2 z$在$pr_1 z'$上的延拓)，则R为偏序关系.

因此，根据补充定理226（2），M是归纳集，因此令M的极大元是(F,f).

令$b = Card(F)$，则$b = b^2$，由于b为无穷基数，因此$b \leq 2b$，$2b \leq 3b$，$3b \leq b^2$，故$b = 2b$，$2b = 3b$.

假设$b < a$，若$Card(E-F) \leq b$，则$Card(E) \leq 2b$，即$Card(E) \leq b$，矛盾，故$Card(E-F) > b$.

因此存在$Y \subset E-F$，且Y和F等势，令$Z = F \cup Y$，则$Z \times Z = (Y \times Y) \cup (F \times Y) \cup (Y \times F)\big(F \times F)$，由于$Card(Y \times Y) = b$，$Card(Y \times F) = b$，$Card(F \times Y) = b$，故$Card(Z \times Z - F \times F) = b$，因此存在$Y$到$Z \times Z - F \times F$的双射，故存在$Z$到$Z \times Z$的双射，其为$f$的延拓，与$(F,f)$是极大元矛盾.

因此$b = a$，故$a^2 = a$.

定理 157.

a为无穷基数，n为自然数且$n > 0$，则$a^n = a$.

证明：根据定理156，用数学归纳法可证.

定理 158.

如果基数有限族$(a_i)_{i\in I}$满足$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i\neq 0)$，$\bigcup\limits_{i\in I}\{a_i\}$的最大元$a$为无穷基数，则该基数族的积等于$a$.

证明：设其积为b，I的元素数目为n，由于$b\leq a^n$，则$b\leq a$，同时，由于$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i\geq 1)$，因此$b\geq a$，故$b=a$.

定理 159.

a为无穷基数，基数族$(a_i)_{i\in I}$满足$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i\leq a)$，并且$Card(I)\leq a$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq a$，如果$(\exists i)(i\in I$与$a_i=a)$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i=a$.

证明：$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq Card(I)\cdot a$，因此$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq a^2$，故$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq a$. 如果存在$i\in I$使$a_i=a$，因为$a_i\leq\sum\limits_{i\in I}a_i$，故$\sum\limits_{i\in I}a_i=a$.

定理 160.

a、b均不为*0*，且其中至少有一个为无穷基数，则$a+b=sup(a,b)$，$ab=sup(a,b)$.

证明：根据定理158、159可证.

补充定理 334.

a、b、c、d均为基数，如果$a<c$，$b<d$，则$a+b<c+d$，$ab<cd$.

证明：如果c、d均为有限集合，根据定理131可证. 如果c、d至少有一个为无穷集合，则$c+d=sup(c,d)$，$cd=sup(c,d)$. 如果a、b均为有限集合，则$a+b$、ab为有限集合，命题成立；如果a、b至少有一个是无穷集合，则$a+b=sup(a,b)$，$ab=sup(a,b)$，命题同样成立.

补充定理 335.

E为无穷集合，则：

（*1*）$Card(E)Card(N)=Card(E)$，$Card(E)+Card(N)=Card(E)$；

（*2*）n为自然数，$nCard(E)=Card(E)$，$n+Card(E)=Card(E)$.

证明：根据定理160可证.

补充定理 336.

a为基数，b、c为无穷基数：

（*1*）$(2^b)^b=2^b$.

（*2*）如果$a\leq 2^b$且$a\geq 2$，则$a^b=2^b$.

（*3*）如果$a<b$且$b<a^c$，则$b^c=a^c$.

（*4*）$b^b=2^b$.

证明：

（1）根据定理156、定理106可证.

（2）根据定理112、补充定理336（1）可证.

（3）根据定理112，$b^c \geq a^c$，$b^c \leq a^{cc}$，根据定理156，$b^c \leq a^c$，得证.

（4）根据补充定理336（2）可证.

定义 176. 可数集合（*ensemble dénombrable*），不可数集合（*ensemble non dénombrable*）

如果A和N的某个子集等势，则称A为可数集合，否则，称A为不可数集合.

定理 161.

（1）可数集合的子集是可数集合.

（2）有限个可数集的集族的积是可数集合.

（3）各项均为可数集的序列的并集是可数集合.

证明：根据定理158、定理159可证.

定理 162.

可数无穷集合和N等势.

证明：根据定理154可证.

定理 163.

E为无穷集合，可数无穷集族$(X_i)_{i\in I}$是E的划分，则E和I等势.

证明：$Card(E) = Card(N)Card(I)$，根据定理160可证.

定理 164.

f为E到F的满射，F为无穷集合，如果对任意$y \in F$，$f^{-1}\langle y\rangle$均为可数集合，则F和E等势.

证明：根据补充定理115，$(f^{-1}\langle y\rangle)_{)y\in F}$是$E$的划分，则$Card(E) \leq Card(F)Card(N)$，根据补充定理335，$Card(E) \leq Card(F)$，又因为$f$为$E$到$F$的满射，因此$Card(E) \geq Card(F)$，得证.

定理 165.

无穷集合E的有限子集集合F，和E等势.

证明：令F_n为E的元素数目为n的子集的集合，对任意$X \in F_n$，均存在$[1,n]$到X的双射，则F_n的基数小于等于区间$[1,n]$到E的映射数目，即$(Card(E))^n$，等于$Card(E)$. 因此$Card(F) \leq Card(E)Card(N)$，等于$Card(E)$；

另一方面，$x \mapsto \{x\}$是E到F的映射，故$Card(E) \leq Card(F)$，得证.

定理 166.

无穷集合E的元素的有限序列集合S，和E等势.

证明：令F为N的有限子集集合．S即所有E^I的并集，其中$I \subset N$．由于$I \subset N$的子集，故$Card(E^I) = Card(E)$，根据定理165，$Card(F) = Card(N)$，因此$Card(S) \leq Card(E)$.

同时，E的每个元素可以单独组成有限序列，故$Card(E) \leq Card(S)$，得证.

定义 177. 连续统（*puissance du continu*）

如果E和$\{X|X \subset N\}$等势，则称E为连续统.

定理 167.

连续统是不可数集合.

证明：根据定理113可证.

定义 178. 稳定序列（*suite stationnaire*）

E的元素序列$(x_n)_{n\in N}$，如果存在自然数m，对任意$n \geq m$，$x_m = x_n$，则称其为稳定序列.

定理 168.

E为偏序集，则下列两个公式等价：

第一，E的一切非空子集都有极大元;

第二，E的一切单增元素序列$(x_n)_{n\in N}$都是稳定序列.

证明：如果第一个公式为真，设(x_n)各项组成的集合为X，则X有极大元，设为x_m，则当$n \geq m$时，$x_m = x_n$，故其为稳定序列.

如果第二个公式为真，假设E的非空子集A没有极大元，对任意$x \in A$，令$T_x = \{y|y > x$与$y \in A\}$，故$T_x \neq \varnothing$．根据定理41，存在A到A的映射f，使$f(x) > x$．设$a \in A$，则递归定义$x_0 = a$，$x_{n+1} = f(x_n)$，该序列是单增序列且不是稳定序列.

定理 169.

E为全序集，当且仅当E的一切单减元素序列$(x_n)_{n\in N}$都是稳定序列时，E为良序集.

证明：类似定理168可证.

定理 170.

偏序有限集的一切序列$(x_n)_{n\in N}$都是稳定序列.

证明：根据定理123，偏序有限集有极大元，根据定理168可证.

补充定理 337.

（1）E为集合，如果$Card(E)>1$，则存在E的排列，该排列没有不动点.

（2）E为无穷集合，则E的排列的集合，和$\mathcal{P}(E)$等势.

（3）E、F均为无穷集合，$Card(E)=Card(F)$，则E到F的满射的集合，和$\mathcal{P}(E)$等势.

（4）F为无穷集合，$Card(E)<Card(F)$，则$Card(\{X|X\subset F$与$Card(X)=E\})=Card(F^E)$；

（5）F为无穷集合，$Card(E)<Card(F)$，则$Card(\{f|f$为E到F的单射$\})=Card(F^E)$；

（6）E为无穷集合，m为自然数，则$Card(\{X|X\subset F$与$Card(X)=m\})=Card(E)$；

（7）E为无穷集合，则$Card(\{X|X\subset F$与$Card(X)$为自然数$\})=Card(E)$；

（8）F为无穷集合，$Card(E)<Card(F)$，则$Card(\{X|X\subset F$与$Card(X)\leq E\})=Card(F^E)$.

证明：

（1）对于有限集合，对其基数运用数学归纳法可证.

对于无穷集合，令$F=E\times\{0,1\}$，则$Card(F)=Card(E)$，则存在E到F的双射f.

令g为：

如果$pr_2x=0$，则$g(x)=(pr_1x,1)$；

如果$pr_2x=1$，则$g(x)=(pr_1x,0)$.

则g为F到F的双射，故排列$f^{-1}\circ g\circ f$没有不动点，得证.

（2）令E的排列的集合为F，对任意$f\in F$，均有$f\subset E\times E$，所以$Card(F)\leq Card(\mathcal{P}(E))$.

同时，对E的任意子集A，如果$Card(E-A)>1$，或者$E=A$，根据补充定理337（1），存在以A为不动点的E的排列，故$Card(F)+Card(E)\geq Card(\mathcal{P}(E))$，因此$Card(F)\geq Card(\mathcal{P}(E))$，得证.

（3）该集合的元素，为$E\times F$的子集，故其势均小于等于$\mathcal{P}(F)$.

令$a\in F$，对任意$A\subset E$且$Card(A)=Card(E)$，设A到$F-\{a\}$的双射为f，当$x\in A$，$g(x)=f(x)$，当$x\in E-A$时，$g(x)=a$，则g是E到F的满射，根据补充定理337（2），以上映射的集合，势为$\mathcal{P}(F)$.

（4）对任意X，如果$X\subset F$与$Card(X)=E$，则存在E到X的双射f，则f在F上的延拓，是F^E的元素，故$Card(\{X|X\subset F$与$Card(X)=E\})\leq Card(F^E)$. 反过来，任意$E$到$F$的映射，对应$x\mapsto(x,f(x))$，其函数图是$E\times E\times F$的子集且势为$Card(E)$，根据定理160，$Card(E\times E\times F)=Card(F)$，故$Card(\{X|X\subset F$与$Card(X)=E\})\geq Card(F^E)$，得证.

（5）根据定义，$Card(\{f|f$为E到F的单射$\})\leq Card(F^E)$. 反过来，对任意E到F的映射，对应$x\mapsto(x,f(x))$，是E到$E\times F$的单射. 得证.

（6）令$Card(\{X|X \subset F$与$Card(X) = m\}) = A$，根据定理165，$A \leq E$，同时，令B为E的子集，且$Card(B) = m-1$，则$Card(E-B) = Card(E)$．且对任意$x \in E-B$，$Card(B \cup \{x\}) = m$，故$A \geq E$，得证．

（7）根据补充定理337（6），$Card(\{X|X \subset F$与$Card(X)$为自然数$\}) = Card(E)$ $Card(N)$，得证．

（8）根据补充定理337（4），$Card(\{X|X \subset F$与$Card(X) \leq E\}) \leq Card(F^E)Card(E)$，得证．

补充定理 338.

（*1*）*在有限集合上的任何两个良序均同构.*

（*2*）*在无穷集合E上的良序的序数的集合，没有最大元.*

（*3*）*在无穷集合E上的良序的序数的集合的最小上界，不是E上的良序.*

（*4*）*a为在无穷集合E上的良序，则$Ord(N) \leq Ord(a)$.*

证明：

（1）对元素数目运用数学归纳法可证．

（2）设a为该集合最大元，根据补充定理301（3），$Card(a+1) = Card(a)+1$．

根据补充定理301（1），$Card(a) = Card(E)$，又因为E为无穷集合，根据定理160，$Card(a$
$+1) = Card(E)$，故存在E上的良序，其序数为$a+1$，而$a+1 > a$，矛盾．

（3）根据补充定理338（2）可证．

（4）如果$Ord(a) < Ord(n)$，则E同构于N的一个片段，故E为有限集合，矛盾．

定义 179. *有限序数（ordinal fini），无穷序数（ordinal infini），可数序数（ordinal dénombrable），极限序数（ordinal limite）*

如果序数是在有限集合上的良序，称其为有限序数.

如果序数是在无穷集合上的良序，称其为无穷序数.

如果序数是可数集合上的良序，称其为可数序数.

如果序数不是零也没有前导，称其为极限序数.

补充定理 339.

（*1*）*有限序数小于无穷序数.*

（*2*）*a为有限序数，b为没有前导的序数，则对任意序数$c < b$，$c+a < b$.*

（*3*）*有限个有限序数的和、有限个有限序数的积，均为有限序数.*

（*4*）*a、b为有限序数，则a^b为有限序数，并且，令$A = Card(a)$，$B = Card(b)$，则A^B $= Card(a^b)$.*

（*5*）*a为有限序数，且$a > 0$，则a有前导.*

证明：

（1）根据补充定理333（2）可证.

（2）对a用数学归纳法可证.

（3）根据定理125、补充定理301（3）可证.

（4）根据定理103，对b用数学归纳法可证.

（5）根据定理135、补充定理301（3）可证.

补充定理 340.

a为基数，则"x为序数与$Card(x) < a$"为x上的集合化公式.

证明：令p为在a上的良序，如果$p \le x$，则$Card(p) \le Card(x)$，故$a \le Card(x)$. 因此，x为序数与$Card(x) < a \Rightarrow x < p$，根据补充定理252（1）可证.

补充定理 341.

令序数$a > 0$，$O'(a)$为良序集$\{x|x$为序数与$x \le a\}$，并按下列方式定义定义域为$O'(a)$的函数f_a：

$f_a(0) = Ord(N)$，

对$x > 0$且$x \le a$，令$f_a(x)$为$\{y|y$为序数与$(\exists z)(z$为序数与$z < x$与$Card(y) \le Card(f_a(z)))\}$的最小上界.

则：

（1）令$x \le a$、$y \le a$，如果$x < y$，则$Card(f_a(x)) < Card(f_a(y))$；

（2）如果$x \le a$、$a \le b$，则$f_a(x) = f_b(x)$.

证明：

（1）根据补充定理338（3）可证.

（2）如果$x \le a$、$a \le b$，$Card(f_a(x)) \ne Card(f_b(x))$，令$\{y|y \le a$与$Card(f_a(y)) \ne Card(f_b(y))\}$的最小元是$t$，则$t \ne 0$，且对任意$z < t$，$f_a(z) = f_b(z)$，因此$f_a(t) = f_b(t)$，矛盾，因此$Card(f_a(x)) = Card(f_b(x))$.

定义 180. 初始序数（*ordinal initial*），阿列夫（*aleph*）

令序数$a \ge 0$，$O'(a)$为良序集$\{x|x$为序数与$x \le a\}$，并按下列方式定义定义域为$O'(a)$的函数f_a：

$f_a(0) = Ord(N)$，

对$x > 0$且$x \le a$，令$f_a(x)$为$\{y|y$为序数与$(\exists z)(z$为序数与$z < x$与$Card(y) \le Card(f_a(z)))\}$的最小上界.

则称$f_a(a)$为指标a的初始序数，记作ω_a，称$Card(\omega_a)$为指标a的阿列夫，记作$\aleph_a$. 其中，在没有歧义的情况下，ω_0也可以简记为ω.

补充定理 342.

（*1*）$\aleph_0 = Card(N)$.

（*2*）如果$a < b$，则$\omega_a < \omega_b$.

（*3*）初始序数都是无穷序数.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理341（1）、补充定理301（5），$f_b(a) < f_b(b)$，根据补充定理341（2），$f_a(a) < f_b(b)$，得证.

（3）根据补充定理342（2）、补充定理339（1）可证.

补充定理 343.

令a为无穷基数，$W(a)$为$\{y|y$为序数与$Card(y) < a\}$的最小上界，则：

（*1*）$W(a)$为$\{y|y$为序数与$Card(y) = a\}$的最小元；

（*2*）是$\{y|y$为序数与$Card(y) = a\}$的最小元是初始序数，并且，令其为ω_x，则$a = \aleph_x$.

证明：

（1）如果$a = Card(N)$，根据补充定理338（4）、补充定理339（1），$W(a) = OrdN$.

如果$a > Card(N)$，根据补充定理338（3）可证.

（2）如果$a = Card(N)$，根据补充定理343（1），$W(a) = OrdN$，故为初始序数.

如果$a > Card(N)$：

令$H = \{z|z$为序数与$\omega_z < u\}$，则$H \neq \varnothing$.

如果$sup\ H \in H$，则令$x = sup\ H + 1$，如果$sup\ H \notin H$，则令$x = sup\ H$．故对任意$w < x$，$Card(\omega_w) < a$，因此$\omega_x \leq u$；如果$\omega_x < W(a)$，则$x \in H$，矛盾，因此$\omega_x = W(a)$.

进而，根据定义可证$a = \aleph_x$.

补充定理 344.

令a为序数：

（*1*）$O'(a) = \{x|x$为序数与$x \leq a\}$，$W'(a) = \{x|x$为无穷基数与$x \leq \aleph_a\}$，则映射$x \mapsto \aleph_x (x \in O'(a))$为$O'(a)$到$W'(a)$的同构.

（*2*）$a \leq \omega_a$.

（*3*）$Card([0, \aleph_a[) \leq \aleph_a$；

（*4*）$Card(a) \leq \aleph_a$.

证明：

（1）根据补充定理341（1）、补充定理343（2）可证.

（2）根据补充定理344（1）可证.

（3）$Card([0, \aleph_a[) = \aleph_0 + Card([0, a[)$，因此$Card([0, \aleph_a[) = \aleph_0 + Card(a)$，故$Card([0, \aleph_a[) \leq \aleph_0 + \aleph_a$，得证.

（4）根据补充定理344（2）可证.

补充定理 345.

a为序数，则$(\forall x)(x$为基数$\Rightarrow x \le \aleph_a$或$x \ge \aleph_{a+1})$.

证明：根据补充定理344（1）可证.

补充定理 346.

令a为无穷序数、b为序数，a没有前导，则对任意定义域为$\{y|y$为序数与$y<b\}$、值域的元素都是序数的严格单增映射f，如果$a=\sup\limits_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} f(x)$，则：

（1）$\sum\limits_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_{f(x)} = \aleph_a$.

（2）$\sum\limits_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \omega_{f(x)} = \omega_a$.

证明：

（1）根据定理159，$\sum\limits_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_f(x) \le \aleph_a$.

如果$\{y|y$为序数与$y<b\}$有最大元v，则$a=f(v)$，根据定理159可证；如果$\{y|y$为序数与$y<b\}$没有最大元，则对任意序数$c<a$，均存在$x\in\{y|y$为序数与$y<b\}$，使$f(x)>c$，故$\sum\limits_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_f(x) > \aleph_c$，根据补充定理344（1），$\sum\limits_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_f(x) = \aleph_a$.

（2）根据补充定理346（1）、补充定理301（3）可证.

补充定理 347.

ω_a为标准序数函数符号.

证明：

对任意序数族$(x_i)_{i\in I}$且$i=\varnothing$，令$a=\sup\limits_{i\in I} x_i$，$b=\sup\limits_{i\in I}\omega_{x_i}$.

根据补充定理342（2），$\omega_a \ge b$.

根据补充定理301（6），对任意$i\in I$均有$\aleph_{x_i} \le Card(b)$.

根据补充定理343（2），存在序数x使$Card(b)=\aleph_x$.

根据补充定理341（1），对任意$i\in I$，$x_i\le x$.

因此，$x\ge a$.

根据补充定理342（2），$\omega_a\le\omega_x$.

根据补充定理343（1），$\omega_x\le b$.

综上，$\omega_a=b$，得证.

补充定理 348.

（1）如果有限序数$a>0$，则a有前导.

（2）如果有限序数$a>1$，则a为可约的序数.

证明：

（1）令a为在E上的良序，则$Card(E)$为非空有限集；令其最大元为y，$b = Ord(Card(E) - \{y\})$，则$a = b + 1$，得证.

（2）根据补充定理348（1）可证.

补充定理 349.

（*1*）a为序数，则ω_a没有前导.

（*2*）如果序数x没有前导，且$x > 0$，则$x \geq \omega_0$.

（*3*）ω_0是不可约的序数.

（*4*）a为序数，当且仅当$a < \omega_0$时，a为有限序数.

（*5*）$\{a|a$为有限序数$\}$的最小上界为ω_0.

（*6*）如果序数x没有前导，则存在序数y，使$x = \omega_0 y$.

（*7*）a为有限序数，则$a\omega_0 = \omega_0$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理348（1）可证.

（3）如果$\omega_0 = x + y$，其中x、y为序数，则$Card(x)$、$Card(y)$均为有限基数，但根据补充定理301（3），$Card(N) = Card(x) + Card(y)$，矛盾.

（4）如果a为有限序数，根据定义可证$a < \omega_0$. 反过来，如果$a < \omega_0$，则a同构于N的区间上的良序，故a为有限序数.

（5）设最小上界为x，则$x \leq \omega_0$. 如果x为有限序数，则$x + 1$也是有限序数，矛盾.

（6）根据补充定理262，存在y、z使$x = \omega_0 y + z$，且$z < \omega_0$. 由于x没有前导，故$z = 0$，得证.

（7）根据定义可证.

补充定理 350.

令序数$a > 0$，则：

（*1*）$a\omega_0$是不可约的序数；

（*2*）$a\omega_0 > a$；

（*3*）如果序数x不可约，且$x > a$，则$x \geq a\omega_0$.

证明：

（1）根据补充定理265、补充定理349（3）可证.

（2）根据补充定理257（3）可证.

（3）根据补充定理262可证.

补充定理 351.

令序数$a > 0$，则$(a + 1)\omega_0 = a\omega_0$.

证明：根据补充定理246（1），$(a+1)\omega_0 \geq a\omega_0$.

另一方面，根据补充定理350（1），$a\omega_0$不可约，同时，根据补充定理350（2），$a\omega_0 > a$，因此$a\omega_0 \geq a+1$，由于$a\omega_0$不可约，故$a\omega_0 > a+1$，根据补充定理350（3），$a\omega_0 \geq (a+1)\omega_0$，得证.

补充定理 352.

（*1*）a为序数，则当且仅当存在序数b，使$a = {\omega_0}^b$时，a为不可约的序数.

（*2*）a、b为序数，$a < b$，则${\omega_0}^a + {\omega_0}^b = {\omega_0}^b$.

证明：

（1）根据补充定理350（1）、补充定理276可证.

（2）根据补充定理352（1）、补充定理263可证.

补充定理 353.

（*1*）对任意序数a，以及序数$c > 1$，存在唯一的一对序数有限序列$(l_i)_{i\in[1,k]}$、$(m_i)_{i\in[1,k]}$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} c^{l_i} m_i$，其中，对任意$i \in [1,k]$，$m_i > 0$与$m_i < c$，对任意$i \in [1,k-1]$，$li > l_{i+1}$.

（*2*）对任意序数a，存在唯一的单减有限序列$(b_i)i \in [1,k]$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} {\omega_0}^{b_i}$.

证明：

（1）命题对$a=0$、$a=1$显然成立．假设命题对$[0,a[$成立，根据补充定理276，存在唯一的序数e、f、g，使$a = c^e f + g$，则$g < a$，根据证明规则59可证.

（2）根据补充定理353（1）可证.

定义 181. 序数的展开（*développement d'un ordinal*），序数的展开的最大指数（*plus grand indice d'une développement d'un ordinal*）

对任意序数$a > 0$，如果单减有限序列$(b_i)_{i\in[1,k]}$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} {\omega_0}^{b_i}$，则称$(b_i)_{i\in[1,k]}$为$a$的展开，$b_1$为$a$的展开的最大指数，记作$\phi(a)$.

补充定理 354.

a、b为序数：

（*1*）$a < {\omega_0}^{\phi(a)+1}$.

（*2*）如果$\phi(a) < \phi(b)$，则$a < b$.

（*3*）如果$a < b$，则$\phi(a) \leq \phi(b)$.

（*4*）a、b为序数，$a < {\omega_0}^b$，则$a + {\omega_0}^b = {\omega_0}^b$.

证明：

（1）根据补充定理257（3）可证.

（2）设a的展开有n项，则$a \leq {\omega_0}^{\phi(a)} n$，又因为$a < \omega_0 \phi(a)+1$，因此$a < \omega_0 \phi(b)$，故$a < b$.

（3）根据补充定理354（1）可证.

（4）根据补充定理352（2）、补充定理353（2）可证.

补充定理 355.

$w(x)$为定义在$x \geq a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \geq a_0$、$y > x$，均有$w(x) < w(y)$. 则对任意序数$x \geq a_0$和序数y，$w(x+y) \geq w(x)+y$. 进而，存在序数a，对任意序数$x \geq a$，均有$w(x) \geq x$.

证明：假设存在y使$w(x+y) < w(x)+y$，设其中最小的为y_0，则$w(x+y_0) < w(x)+y_0$，令b满足$w(x+y_0) = w(x)+b$，则$b < y_0$且$w(x+b) < w(x)+b$，矛盾，故$w(x+y) \geq w(x)+y$.

令$a = a_0\omega_0$，根据补充定理350（1），a不可约，根据补充定理263，$a = a_0+a$，故$w(a) \geq a$，进而，当$x \geq a$时，均有$w(x) \geq x$.

定义 182. 临界序数（*ordinal critique*）

令$f(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq b_0$上的序数函数符号，c为无穷序数且$c > a_0$、$c > b_0$，如果对任意序数$x \geq a_0$、$x < c$，均有$f(x,c) = c$，则称c为$f(x,y)$的临界序数.

补充定理 356.

$w(x)$为定义在$x \geq a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \geq a_0$，$w(x) \geq x$，并且，对任意序数x、y，$x < y$与$x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令$g(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq a_0$上的序数函数符号，并满足:

第一，$(x$为序数与y为序数与$x \geq a_0$与$y \geq a_0) \Rightarrow g(x,y) > x$;

第二，$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$.

$f(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq 1$上的序数函数符号，其按下列方式定义：

第一，对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,1) = w(x)$;

第二，对任意序数$x \geq a_0$， $y > 1$，$f(x,y) = \sup\limits_{z \in]0,y[} g(f(x,z),x)$.

则：

（1）对任意序数b，最多存在有限个序数y，使$f(x,y) = b$至少有一个解.

（2）$f(x,y)$的临界序数没有前导.

（3）如果存在集合A，对任意$x \in A$，$(x$为序数$)$与$f(x,c) = c$，并且，c为A的最小上界，则c为$f(x,y)$的临界序数.

（4）令$h(x) = f(x,x)$（$x \geq a_0$），序列$(a_n)_{n \in N=\{0\}}$满足$a_1 = a_0+2$、$a_{n+1} = h(a_n)$，则序列$(a_n)_{n \in N=\{0\}}$的最小上界，为$f(x,y)$的临界序数.

（5）如果集合的元素都是$f(x,y)$的临界序数，则该集合最小上界是$f(x,y)$临界序数.

（6）$f(x,y)$的临界序数是不可约的.

证明：

（1）设y组成的集合为A，$f(y)$为$\{x|f(x,y)=b\}$的最小元．如果$y<y'$，根据补充定理270（6），$f(y)>f(y')$，令$f(y)$的值域的最小元为x_0，则相应的y_0为A的最大元．由于A有最小元也有最大元，故A为有限集合．

（2）根据补充定理270（8），$f(y,y+1)\geq y+y$，得证．

（3）对任意$z<c$，存在$x\in A$使$x>z$，由于$f(x,c)=c$，故$f(z,c)\leq c$，根据补充定理270（3）可证．

（4）令$(a_n)_{n\in N=\{0\}}$的最小上界为z，对任意$i\in N-\{0\}$，$f(a_i,z)\geq z$，同时，$f(a_i,a_{i+1})\leq f(a_{i+1},a_{i+1})$，故$f(a_i,a_{i+1})\leq z$，因此$f(a_i,z)=z$，根据补充定理356（3）可证．

（5）根据补充定理356（3）可证．

（6）如果r为$f(x,y)$的临界序数，且$r=\sum\limits_{i\in[1,k]}{\omega_0}^{b_i}$（$k\geq 2$），则$f({\omega_0}^{b_1},r)\geq {\omega_0}^{b_1}+r$，故$f({\omega_0}^{b_1},r)>r$，矛盾．

补充定理 357.

a、b为序数，$a\geq 2$，b没有前导，则a^b不可约．

证明：假设$a^b=x+y$，根据补充定理353（1），x、y对a均有唯一的展开．设最大的指数分别是p、q，相应的系数分别是m、n．则$p<b$，$q<b$．如果$p\geq q$，则$x+y\leq a^p(m+n)$，故$x+y\leq a^{p+1}2$，进而$x+y\leq a^{p+2}$，由于b没有前导，故$p+2<b$，根据补充定理272，矛盾．如果$p<q$，则$x+y\leq a^{q+2}$，同样矛盾．

补充定理 358.

（1）a为有限序数，$a\geq 2$，则$a^{\omega_0}=\omega_0$．

（2）a为无穷序数，则$a^{\omega_0}={\omega_0}^{\phi(a)\omega_0}$．

证明：

（1）令b为有限序数，根据补充定理311、补充定理339（4），$a^b>b$，因此$a^{\omega_0}\geq\omega_0$．同时，由于a^b为有限序数，故$a^{\omega_0}\leq\omega_0$．得证．

（2）根据补充定理273，$a^{\omega_0}\geq{\omega_0}^{\phi(a)\omega_0}$，$a^{\omega_0}\leq{\omega_0}^{(\phi(a)+1)\omega_0}$，根据补充定理351可证．

补充定理 359.

a为有限序数，$a\geq 2$，$b=\omega_0 c$，则$a^b={\omega_0}^c$．

证明：根据补充定理358（1）、补充定理274可证．

补充定理 360.

$a>0$，则$\{x|x$为不可约的序数与$x\leq a\}$的最大元为${\omega_0}^{\phi(a)}$．

证明：根据补充定理352（2）、补充定理354（3）可证．

补充定理 361.

a为无穷序数，p为$\{x|x$为不可约的序数与$x\leq a\}$的最大元，序数b没有前导，则$a^b=p^b$．

证明：根据补充定理358（2）、补充定理274可证．

补充定理 362.

当且仅当存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$时，$c$为$xy$的临界序数．

证明：如果c是xy的临界序数．由于${\omega_0}^{\phi(c)c} > c$，故$c = {\omega_0}^{\phi(c)}$．根据补充定理263，$\phi(c)$不可约，根据补充定理352（1），存在序数$b$使$c$等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$．

反过来，如果存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$，根据补充定理352（1），$\phi(c)$不可约；由于$a < c$时，$a < {\omega_0}^{\phi(a)+1}$，因此$ac \leq {\omega_0}^{\phi(a)+1+\phi(c)}$，又因为$\phi(a)+1 < \phi(c)$，根据补充定理354（4），$ac \leq c$，同时，由于$ac \geq c$，因此$ac = c$．

补充定理 363.

令c为序数，则当且仅当存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$时，对任意序数$a > 1$、$a \leq c$，均存在$x$使$c = a^x$．

证明：如果对任意序数$a > 1$、$a \leq c$，均存在x使$c = a^x$，则令$a = {\omega_0}^{\phi(c)}$，故$c = {\omega_0}^{\phi(c)x}$，因此$\phi(c)x = \phi(c)$，故$c = {\omega_0}^{\phi(c)}$．

如果$\phi(c)$可约：若$\phi(c) = a + b$，且$a > b$，则${\omega_0}^a < c$，${\omega_0}^{a2} > c$，矛盾；若$\phi(c) = a + b$，且$a < b$，则${\omega_0}^b < c$，${\omega_0}^{b2} > c$，矛盾；若$\phi(c) = 2$，则$\omega_0 + 1 < {\omega_0}^2$，$(\omega_0 + 1)^2 > {\omega_0}^2$，矛盾；若$\phi(c) = a + a$，且$a > 1$，则${\omega_0}^{a+1} < c$，${\omega_0}^{(a+1)2} > c$，矛盾．

因此，$\phi(c)$不可约．根据补充定理352（1），存在序数b使$\phi(c) = {\omega_0}^b$．

反过来，如果$c = {\omega_0}^{\phi(c)}$，$\phi(c) = {\omega_0}^b$，根据补充定理358（1）、补充定理358（2）、补充定理266，对任意序数$a > 1$、$a \leq c$，均存在x使$c = ax$．

补充定理 364.

b为序数，$c = {\omega_0}^{{\omega_0}^b}$，则存在唯一的$x$使$c = ax$，并且$x$不可约．

证明：根据补充定理272，x具有唯一性．如果a为有限序数，根据补充定理358（1），$x = {\omega_0}^{1+b}$，故x不可约；如果a为无穷序数，根据补充定理266，x不可约．

补充定理 365.

x^y的最小的临界序数是ω_0．

证明：根据补充定理349（5）、补充定理339（4）可证．

定义 183. 艾普塞朗数（*nombre epsilon*），艾普塞朗序数（*ordinal epsilon*）

如果a为序数，${\omega_0}^a = a$，则称a为艾普塞朗数，或称a为艾普塞朗序数．

补充定理 366.

艾普塞朗数为无穷序数．

证明：由于$a = 0$不满足要求，故$a > 0$，因此$a \geq \omega_0$，故a为无穷序数．

补充定理 367. 艾普塞朗数的构建

$(x_i)_{i\in N}$为序数序列，其中对任意$i\in N$，$x_{i+1}={\omega_0}^{x_i}$，则：

（1）$\sup\limits_{i\in N} x_i$是艾普塞朗数.

（2）如果$x_0=\omega_0$，则$\sup\limits_{i\in N} x_i$是最小的艾普塞朗数.

证明：

（1）令$a=\sup\limits_{i\in N} x_i$.

如果$x_0=x_1$，则对任意$i\in N$，$x_0=x_1$，故$a=x_0$，命题得证.

如果$x_0\neq x_1$，则$(x_i)_{i\in N}$为严格单增序列. 设$\phi(a)=b$，则对任意$i\in N$，如果$b<a$，则存在$x_i\geq b+1$，故$x_{i+1}\geq a$，因此$a=x_{i+1}$，故$a<x_{i+2}$，矛盾. 因此$a=b$，即$a\geq {\omega_0}^a$. 同时，根据补充定理275，$a\leq {\omega_0}^a$，得证.

（2）如果无穷序数$b<\sup\limits_{i\in N} x_i$，则存在$i\in N$，使$x_i\leq b$，$x_{i+1}>b$，故$b$不是艾普塞朗数，得证.

补充定理 368.

艾普塞朗数是xy的临界序数.

证明：根据补充定理362可证.

补充定理 369.

当且仅当序数a是艾普塞朗数或ω_0时，a是x^y（$x\geq 2$、$y\geq 1$）的临界序数.

证明：

根据定义可证ω_0是x^y（$x\geq 2$、$y\geq 1$）的临界序数. 令a为艾普塞朗数，$x<a$且$x\geq 2$，则$x^a\leq {\omega_0}^{(\phi(x)+1)a}$，由于$a$不可约，故$\phi(x)+1<a$，因此$x^a\leq {\omega_0}^a$，进而可得$x^a=a$.

反过来，根据定义，如果a是x^y（$x\geq 2$、$y\geq 1$）的临界序数，则a是艾普塞朗数或ω_0.

定义 184. 共尾性（*caractère final*），正则序数（*ordinal régulier*），奇异序数（*ordinal singulier*）

E为全序集，其共尾良序子集的偏序类的集合的最小元，称为E的共尾性；令序数a为在E上的良序集，则E的共尾性也称为a的共尾性. 令a为序数，如果a的共尾性为a，则称a为正则序数，否则，称a为奇异序数.

补充定理 370.

a、b为序数，则$b+a$、ba的共尾性都等于a的共尾性.

证明：令$pr_1b=E$，$pr_1a=F$，E和F的和集为G，令G的偏序类最小的共尾良序子集为G'，F的偏序类最小的共尾良序子集为F'，由于$F\times\{1\}$是G的共尾子集，故$Ord(G')\leq Ord(F')$；同时，$G'\cap(F\times\{1\})$是G的共尾子集，故$Ord(G')=Ord(G'\cap(F\times\{1\}))$. 由于$pr_1(G'\cap(F\times\{1\}))$是$F$的共尾子集，故$Ord(F')\leq Ord(G')$，$b+a$的情形得证. 类似可证$ba$的情形.

补充定理 371.

（1）有前导的序数的共尾性为1.

（2）0、1是正则序数.

（3）a有限序数且$a > 0$，则a的共尾性是1.

（4）ω_0是正则序数.

（5）序数$a < b$，则a的共尾性不大于b的共尾性.

（6）$a > 0$，则a的共尾性大于0.

（7）a为无穷序数，如果a没有前导，则a的共尾性是无穷序数.

（8）b为序数，$I = \{y|y$为序数与$y < b\}$，$(x_i)_{i\in I}$为序数族，且$x \mapsto x_i$为单增函数，则$\underset{i\in I}{sup}(x_i)$的共尾性小于等于$b$，

（9）b为序数，$I = \{y|y$为序数与$y < b\}$，$(x_i)_{i\in I}$为序数族，则$\sum\limits_{i\in I} x_i$的共尾性小于等于b，

证明：

（1）根据补充定理370可证；

（2）根据定义可证；

（3）根据补充定理371（1）、补充定理339（5）可证.

（4）令$pr_1\omega_0 = E$，如果E有有限共尾子集F，设F的最大元为a，则a为E的最大元，故ω_0有前导，矛盾.

（5）根据定义可证.

（6）根据定义可证.

（7）令a为没有前导的序数，且$a > 0$，如果其共尾性为有限序数，设pr_1a的共尾良序子集种，偏序类最小的是E，则E有最大元，故pr_1a有最大元，故a有前导，矛盾.

（8）令$a = \underset{i\in I}{sup}(x_i)$，$O_a = \{x|x$为序数与$x < a\}$，$A = \bigcup\limits_{i\in I} x_i$，则根据补充定理253（1），$Ord(O_a) = a$，$Ord(I) = b$. 且$A$是$(O_a)$的共尾子集.

同时，令g为映射$i \mapsto x_i$，f为映射$y \mapsto (g^{-1}\langle y\rangle$的最小元$)$，则$f$为$A$到$I$的子集的同构，故$Ord(A) \geq b$，得证.

（9）根据补充定理371（8）可证.

补充定理 372.

无穷正则序数都是初始序数.

证明：令a为无穷正则序数，$E = Card(a)$，E上的良序集合的最小元为b. 令按b排序的E的最小元为p，定义E到$\{0,1\}$的映射f：

$f(p) = 1$；

对任意$x \in E$，$x >_b p$，如果$(\forall i)(i <_b x \Rightarrow i <_a x)$，则令$f(x) = 1$，否则$f(x) = 0$.

令$A=\{z|z\in E$与$f(z)=1\}$，按b在A上导出的偏序排序，故$Ord(A)\leq b$．如果存在$x\in E$，对任意$y\in A$，均有$x>_a y$，则$f(x)=0$，故$\{i|i\in E$与$i<_b x$与$i>_a x\}\neq\varnothing$，设其最小元为m，因此$(\forall i)(i<_b m\Rightarrow i<_a m)$，故$m\in A$，且$m>_a x$，矛盾．因此，$A$为按$a$排序的$E$的共尾良序子集．故$a$的共尾性小于等于$b$，故$a=b$，根据补充定理343（2）得证．

补充定理 373.

a为序数，如果$a=0$或a有前导，则初始序数ω_a是正则序数．

证明：

如果$a=0$，根据补充定理371（4），命题成立．

如果a有前导，令$a=b+1$，$F=pr_1\omega_a$，设初始序数ω_a的偏序类最小的共尾良序子集为E，$r\notin E$，令良序集$E'=E\cup\{r\}$，其中r为最小元．如果$Ord(E)<\omega_a$，根据补充定理345，$Card(E)\leq\aleph_b$，故$Card(E')\leq\aleph_b$．当$i\in E$时，令$X_i=\{z|z\in F$与$z\geq i$与$(\forall j)(j\in E$与$j>i\Rightarrow j>z)\}$，$X_r=\{z|z\in F$与$(\forall j)(j\in E\Rightarrow j>z)\}$，故$\sum\limits_{i\in E'}Card(X_i)=\aleph_b+1$，因此存在$m\in E'$，使$Card(X_m)=\aleph_a$．设$\omega_a$在$X_i$上导出的偏序的偏序类是$x_i$，则$\sum\limits_{i\in E'}x_i=\omega_a$，同时$x_m\geq\omega_a$，$x_m>0$，矛盾．

补充定理 374.

$a>0$，a没有前导，且$a<\omega_a$，则初始序数ω_a是奇异序数．

证明：根据补充定理346（1），$\sum\limits_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<a\}}\aleph_x=\aleph_a$．根据补充定理371（9），$\omega_a$的共尾性小于等于$a$，得证．

补充定理 375.

ω_{ω_0}是最小的奇异序数．

证明：根据补充定理373、补充定理374可证．

定义 185. 不可达序数（*ordinal inaccessible*）

如果序数a没有前导，且ω_a是正则序数，则称ω_a为不可达序数．

补充定理 376.

$a>0$，且ω_a为不可达序数，则$a=\omega_a$．

证明：根据补充定理344（2）、补充定理374可证．

补充定理 377.

ω_0是不可达序数．

证明：根据定义可证．

补充定理 378.

（*1*）令k为最小的艾普塞朗数，则ω_k的共尾性是ω_0.

（*2*）当$a > 0$、$a \le k$时，ω_a不是不可达序数.

证明：

（1）令$x_0 = \omega_0$，对于$i \in N$，令$x_{i+1} = \omega_{x_i}$，则$k = \sup_{i \in N}(x_i)$，根据补充定理367（2），k为最小的艾普塞朗数.

同时，ω_k的共尾性不大于ω_0. 而根据补充定理349（1），k没有前导，根据补充定理371（7），k的共尾性为无穷序数，故k的共尾性是ω_0.

（2）根据补充定理376可证.

注：不能确定是否存在ω_0以外的不可达序数.

补充定理 379.

E为全序集，则：

（*1*）E的共尾性是正则序数；

（*2*）如果E非空且没有最大元，则E的共尾性是初始序数.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理371（7）、补充定理372可证.

补充定理 380.

（*1*）a、a'为序数，ω_a为的共尾性为$\omega_{a'}$，I为良序集且$Ord(I) < \omega_{a'}$，$(x_i)_{i \in I}$为序数族，如果对任意$i \in I$均有$x_i < \omega_a$，则$\sum_{i \in I} x_i < \omega_a$.

（*2*） a为序数，ω_a为正则序数，I为良序集且$Ord(I) < \omega_a$，$(x_i)_{i \in I}$为序数族，如果对任意$i \in I$均有$x_i < \omega_a$，则$\sum_{i \in I} x_i < \omega_a$.

证明：

（1）设$[0, Ord(I)[$到I的同构为f，对任意序数a，令$I_a = f([0, a[)$，$s_a = \sum_{i \in I} axi$. 考虑集合$\bigcup_{i \in [0, Ord(I)[} \{si\}$，由于$Ord(I) < \omega_{a'}$，故存在$y \in [0, \omega_a[$，对任意$i \in [0, Ord(I)[$，均有$s_i < y$，即$y > \sum_{i \in I} x_i$，得证.

（2）根据补充定理380（1）可证.

定义 186. 正则基数（*cardinal régulier*），奇异基数（*cardinal singulier*）

a为序数，如果ω_a为正则序数（或奇异序数），则称$\aleph_a$为正则基数（或奇异基数）.

补充定理 381.

（1）a、a'为序数，ω_a为的共尾性为$\omega_{a'}$，$Card(I) < \aleph_{a'}$，$(x_i)_{i\in I}$为基数族，如果对任意$i \in I$均有$x_i < \aleph_a$，则$\sum\limits_{i\in I} x_i < \aleph_a$.

（2）a、a'为序数，ω_a为的共尾性为$\omega_{a'}$，$Card(I) = \aleph_{a'}$，则存在基数族$(x_i)_{i\in I}$使$\sum\limits_{i\in I} x_i = \aleph_a$.

（3）a为序数，当且仅当对任意基数族$(x_i)_{i\in I}$，若$Card(I) < \aleph_a$，且对任意$i \in I$均有$x_i < \aleph_a$，则$\sum\limits_{i\in I}(x_i)_{i\in I} < \aleph_a$时，$\aleph_a$为正则基数.

证明：

（1）根据补充定理380（1）、补充定理201可证.

（2）类似补充定理373的证明可证.

（3）根据补充定理381（1）、补充定理381（2）可证.

补充定理 382.

a为序数，基数$m \neq 0$，则：

（1）${\aleph_{a+1}}^m = {\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

（2）序数c满足$Card(c) \le m$，则${\aleph_{a+c}}^m = {\aleph_a}^m {\aleph_{a+c}}^{Card(c)}$.

（3）$Card(a) \le m$，则${\aleph_a}^m = 2^m {\aleph_a}^{Card(a)}$.

证明：

（1）如果$m \ge \aleph_{a+1}$，根据补充定理336（2），）${\aleph_{a+1}}^m = 2^m$、${\aleph_a}^m = 2^m$、$2^m > \aleph_{a+1}$，根据定理160得证.

如果$m < \aleph_{a+1}$，则$m \le \aleph_a$，由于${\aleph_{a+1}}^m \ge {\aleph_a}^m$，${\aleph_{a+1}}^m \ge \aleph_{a+1}$，根据定理160，${\aleph_{a+1}}^m \ge {\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

同时，令$\aleph_{a+1}$按其最小良序排序，该最小良序同构于ω_{a+1}. 对任意m到$\aleph_{a+1}$的映射f，根据补充定理373，$f\langle m\rangle$不是$\aleph_{a+1}$共尾子集，即$\{x|(\forall y)(y \in f(m) \Rightarrow y < x)\}$非空，令其最小元为$n_f$.

根据定理85，$Ord(S_{n_f}) < \omega_{a+1}$，故$Card(S_{n_f}) < \aleph_a$. 因此$Card(S_{n_f}) \le \aleph_a$.

令映射g为$f \mapsto n_f$，对任意$p \in \aleph_{a+1}$，$Card(g^{-1}\langle p\rangle =) = Card(S_{n_f})^m$，因此
$Card(g^{-1}\langle p\rangle)$
$= {\aleph_a}^m$.

因此，m到$\aleph_{a+1}$的映射f的数目，小于等于${\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

综上，${\aleph_{a+1}}^m = {\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

（2）使用超限归纳法：

命题对$c = 0$显然成立，对1，根据补充定理382（1）可证.

假设命题对小于$c = 1$的序数（$c > 1$）成立：

如果c有前导，根据归纳假设可证；

如果c为极限序数，根据定理160，${\aleph_{a+c}}^m \geq {\aleph_a}^m {\aleph_{a+c}}^{Card(c)}$. 同时，根据补充定理346（1）、补充定理300（1）、定理105，${\aleph_{a+c}}^m \leq \prod_{d\in[0,c[} {\aleph_{a+d}}^m$，根据归纳假设，${\aleph_{a+c}}^m \leq \prod_{d\in[0,c[}({\aleph_a}^m {\aleph_{a+d}}^{Card(d)})$，根据补充定理253（1），${\aleph_{a+c}}^m \leq {\aleph_a}^{m\cdot Card(c)} {\aleph_{a+d}}^{Card(c)Card(c)}$，根据定理160可证.

（3）根据补充定理382（2）、补充定理336（2）可证.

补充定理 383.

a、b为序数，a没有前导，$x \mapsto s_x$为$[0,\omega_b[$到$[0,a[$的严格单增映射，且$\sup\limits_{x\in[0,\omega_b[} s_x = a$，则${\aleph_a}^{\aleph_b} = \prod_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$.

证明：

$x \mapsto s_x$为$[0,\omega_b[$到$[0,a[$的严格单增映射，故$[0,a[\neq \varnothing$，因此a为无穷序数. 同时，对任意$x \in [0,\omega_b[$、$y \in [0,\omega_b[$、$x \neq y$、均有$s_x \neq s_y$.

对任意$[0,\omega_b[$到$[0,\omega_a[$的映射f，用通过超限归纳法定义$[0,\omega_b[$到$[0,\omega_b[$的映射h_f：

第一，如果$\{x|x \in [0,\omega_b[与f(0) \leq \omega_{s_x}\} = \varnothing$，令$Card(f(0)) = \aleph_z$，则对任意$x \in [0,\omega_b[$，$s_x \leq z$，故$z \geq a$，$f(0) \geq \omega_a$，矛盾，因此，$\{x|x \in [0,\omega_b[与f(0) \leq \omega_{s_x}\} \neq \varnothing$，令$h_f(0)$为其最小元.

第二，对$t \in [0,\omega_b[$，同理可证$\{x|x \in [0,\omega_b[与f(0) \leq \omega_{s_x}\} \neq \varnothing$，令$k$为其最小元. 由于$Card(k) < aleph_b$，同时$Card([0,k[) = Card(k)$，故$Card[k,\omega_b[= \aleph_b$. 因此，$\{x|x \in [[k,\omega_b[与(\forall)(i \in [0,t[\Rightarrow f(i) \neq x)\} \neq \varnothing$. 令$h_f(t)$为其最小元.

故h_f为单射.

令g为映射$f \mapsto h_f (f \in \mathcal{F}([0,\omega_b[;[0,\omega_a[, h_f \in \mathcal{F}([0,\omega_b[);[0,\omega_b[))$，

对任意$t \in [0,\omega_b[$，$Card([0,\omega_{s_{h_f(t)}}]) = \aleph s_{h_f(t)} + 1$，等于$\aleph s_{h_f(t)}$，则对任意$u \in \mathcal{F}([0,\omega_b[;[0,\omega_b[)$，$g^{-1}\langle z\rangle = \prod_{t\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_{h_t}}$，小于等于$\prod_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$，

故${\aleph_a}^{\aleph_b} \leq {\aleph_b}^{\aleph_b} \prod_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$.

又因为对任意$x \in [0,\omega_b[$，$2 \leq \aleph_{s_x}$，同时，${\aleph_b}^{\aleph_b} = 2^{\aleph_b}$，因此，$2^{\aleph_b} \leq \prod_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$，故${\aleph_a}^{\aleph_b} \leq 2^{\aleph_b} \prod_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$，因此${\aleph_a}^{\aleph_b} \leq \prod_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$.

同时，根据定理110，故${\aleph_a}^{\aleph_b} \geq \prod_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$，得证.

补充定理 384.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，则${\aleph_a}^{\aleph_{a'}} > \aleph_a$.

证明：如果$a = 0$或a有前导，根据补充定理373，$a = a'$，根据定理113可证.

如果a没有前导，设ω_a的共尾子集为A，且$Ord(A) = \omega_{a'}$.

令g为A到$[0,a[$的映射：

对任意$x \in A$，如果$Card(x)$为有限基数，则$g(x) = 0$；如果$Card(x)$为无穷基数，令其为$\aleph_y$，则$g(x) = \omega_y$.

令g的值域$= G$，则$Card(G) \le \aleph_{a'}$，同时，$\bigcup\limits_{i \in G} \{\omega_i\}$也是$\omega_a$的共尾子集，故则$Card(G) = \aleph_{a'}$．令$h$为$[0, \omega_{a'}[$到$G$的同构，则$\sup\limits_{x \in [0, \omega_{a}'[} h(x) = a$．根据补充定理383，${\aleph_a}^{\aleph_{a'}} = \prod\limits_{x \in [0, \omega_{a'}[} \aleph_{h(x)}$．根据补充定理300（2）、补充定理346（1）可证.

补充定理 385.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，c为序数，如果存在基数n使$\aleph_a = n^{\aleph_c}$，则$c < a'$.

证明：假设$c \ge a'$，则$\aleph_c \aleph_{a'} = \aleph_c$，故${\aleph_a}^{\aleph_{a'}} = \aleph_a$，矛盾.

补充定理 386.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，序数$b < a'$，则${\aleph_a}^{\aleph_b} = \sum\limits_{c \in [0, a[} {\aleph_c}^{\aleph_b}$.

证明：$\sum\limits_{c \in [0, a[} {\aleph_c}^{\aleph_b} \le Card(a) {\aleph_a}^{\aleph_b}$，由于$Card(a) \le \aleph_a$，故$\sum\limits_{c \in [0, a[} {\aleph_c}^{\aleph_b} \le {\aleph_a}^{\aleph_b}$.

另一方面，对任意$[0, \omega_b[$到$[0, \omega_a[$的映射f，均存在$c \in [0, a[$，使$f\langle [0, \omega_b[\rangle \subset [0, \omega_c[$，因此$\sum\limits_{c \in [0, a[} {\aleph_c}^{\aleph_b} \ge {\aleph_a}^{\aleph_b}$，得证.

补充定理 387.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，基数$b < \aleph_{a'}$且$b \ne 0$，则${\aleph_a}^b = \aleph_a \sum\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$.

证明：对任意b到$\aleph_a$的映射f，$Card(f(b)) < \aleph_a$，同时，当$m < \aleph_a$时，如果m为无穷基数，根据补充定理339（4）、补充定理337（6），$Card(\{x | x \subset \aleph_a 与 Card(x) = m\}) \ge \aleph_a$，因此${\aleph_a}^b \ge \aleph_a \sum\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$.

如果b为自然数，则${\aleph_a}^b = \aleph_a$，故${\aleph_a}^b \le \aleph_a \sum\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$，命题成立.

如果$b \ge \aleph_0$且$b < a$，根据补充定理386，${\aleph_a}^b \le \aleph_a \sum\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$，命题成立.

补充定理 388.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，基数$b \ge \aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^b = (\sup\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}}$.

证明：

令$(x_i)_{i \in \aleph_{a'}}$为$\omega_a$的共尾子集，则$\aleph_a = \bigcup\limits_{i \in \aleph_{a'}} ([0, x_i + 1])$，令$y_i = Card([0, x_i + 1])$，则$\aleph_a \le \sum\limits_{i \in \aleph_{a'}} y_i$，根据补充定理300（1），${\aleph_a}^b \le \prod\limits_{i \in \aleph_{a'}} y_i^b$，因此${\aleph_a}^b \le (\sup\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}}$.

另一方面，$(\sup\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}} \le {\aleph_a}^{b \aleph_{a'}}$，故$(\sup\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}} \le {\aleph_a}^b$，得证.

补充定理 389.

a为无穷基数，基数$b \ge a$，则$a^b = a \sum\limits_{m \in [0, a[} m^b$.

证明：根据补充定理336（2），$a^b=2^b$，$a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b=a(Card([0,a[)2^b$．由于$Card([0,a[$ $\leq a$，又因为$a\leq 2^b$，故$a^b=a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b$．

补充定理 390.

a为正则基数，基数$b\neq 0$，则$a^b=a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b$．

证明：根据补充定理387、补充定理389可证．

补充定理 391.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，y为基数，并且，$(\forall z)(z$为基数与$z<\aleph_a\Rightarrow z^y\leq\aleph_a)$:

（*1*）如果$y>0$与$y<\aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^y=\aleph_a$；

（*2*）如果$y\geq\aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^y={\aleph_a}^{\aleph_{a'}}$．

证明：

（1）如果y为自然数，根据定理157可证．

如果y为无穷基数，根据补充定理386，${\aleph_a}^y\leq\aleph_a Card(a)\aleph_a$，故${\aleph_a}^y\leq\aleph_a$，得证．

（2）根据补充定理388可证．

补充定理 392. 广义连续统假设下的定理*1*

如果$(\forall k)(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k}=\aleph_k+1)$，则:

（*1*）x、y均为无穷基数，则$y<x\Rightarrow 2^y\leq x$；

（*2*）a为序数，x、y均为基数，$x<\aleph_a$、$y<\aleph_a$，则$x^y\leq\aleph_a$；

（*3*）a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，y为基数，$y>0$与$y<\aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^y=\aleph_a$；

（*4*）a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，y为基数，$y\leq\aleph_a$与$y\geq\aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^y=\aleph_{a+1}$；

（*5*）a为基数且$a>0$，如果对任意基数$b\neq 0$均有$a^b=a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b$，则$a$为正则基数．

证明：

（1）令$y=\aleph_a$，$x=\aleph_b$（a、b为序数），则$a<b$，故$a+1\leq b$，得证．

（2）根据补充定理392（1），$2^x\leq\aleph_a$、$2^y\leq\aleph_a$，则$2^{xy}\leq\aleph_a$，又因为$x<2^x$，故$x^y\leq\aleph_a$．

（3）根据补充定理392（2）、补充定理391（1）可证．

（4）根据补充定理384，${\aleph_a}^y>\aleph_a$，故${\aleph_a}^y\geq\aleph_a+1$．同时，$\aleph_a y\leq{\aleph_a}^{\aleph_a}$，故${\aleph_a}^y\leq 2^{\aleph_a}$，得证．

（5）令$a=\omega_x$，$\omega_{x'}$为ω_x的共尾性，如果$x'<x$，令$b=\omega_{x'}$，则$a^b=\aleph_{x+1}$．根据补充定理392（2），$a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b\leq aaa$，故$a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b\leq a$，因此$a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b<a^b$，矛盾．

补充定理 393.

a为基数且$a>2$，对任意基数$m\in]0,a[$，均有$a^m=a$，则a为正则基数．

证明：根据补充定理384可证.

补充定理 394. 广义连续统假设的等价命题

$(\forall a)(\forall m)((a$为正则基数$)$与$(m$为基数$)$与$(m\ \in]0,a[)\ \Rightarrow\ a^m\ =\ a)\ \Leftrightarrow\ (\forall k)(k$为序数 $\Rightarrow 2^{\aleph_k}=\aleph_{k+1})$.

证明：如果广义连续统假设成立，根据补充定理392（3），左边公式为真.

反过来，如果左边公式为真，由于$\aleph_{k+1}$为正则基数，故${\aleph_{k+1}}^{\aleph_k}=\aleph_{k+1}$，由于$\aleph_{k+1}\leq 2^{\aleph_k}$，故广义连续统假设成立.

定义 187. 支配基数（*cardinal dominant*）

a为无穷基数，如果对任意基数$m<a$、$n<a$均有$m^n<a$，则称a为支配基数.

补充定理 395.

（*1*）$\aleph_0$为支配基数.

（*2*）a为序数，如果$\aleph_a$为支配基数，则a没有前序.

证明：根据定义可证.

补充定理 396.

基数$a>0$，对任意基数$m<a$，均有$2^m<a$，则a为支配基数.

证明：如果a为有限基数，1、2显然不符合条件；$a>2$时，$2^{a-1}\geq a$，矛盾，故a为无穷基数.

如果$a=\aleph_0$，a为支配基数. $a>\aleph_0$时，令$p=sup\{m,n,\aleph_0\}$. 则无穷基数$p<a$，$p^p=2^p$，故$p^p<a$，因此$m^n<a$. 得证.

补充定理 397.

递归定义基数序列$(a_i)_{i\in N}$：

$a_0=\aleph_0$，

对任意$i\in N$，$a_{i+1}=2^{a_i}$.

令$b=\sum\limits_{i\in N}a_i$，则$b$是大于$\aleph_0$的最小的支配基数.

证明：由于$a_1>\aleph_0$，故$b>\aleph_0$.

对任意基数$m<b$，存在自然数n使$m<a_n$，故$2^m<b$，根据补充定理396，b为支配基数.

对于支配基数x，如果$x>\aleph_0$，且$x<b$，则存在自然数n使$x\leq a_n$，设其中最小的为n_0，那么$2^{a_{n_0-1}}\geq x$，矛盾. 故$x\geq b$.

补充定理 398.

递归定义基数序列$(a_i)_{i\in N}$：

$a_0=\aleph_0$，

对任意$i\in N$，$a_{i+1}=2^{a_i}$.

令$b=\sum\limits_{i\in N}a_i$，则：

（*1*）$b^{\aleph_0}=2^b$；

（*2*）${\aleph_0}^b=b^{\aleph_0}$；

（*3*）$b^{\aleph_0}=(2^b)^b$.

证明：

（1）根据补充定理336（4），$b^b=2^b$，由于$b>\aleph_0$，故$b^{\aleph_0}\leq 2^b$；同时，$2^b=2^{\sum\limits_{i\in N}a^i}$，等于$\prod\limits_{i\in N-\{0\}}a_i$，故$2^b\leq b^{\aleph_0}$，得证.

（2）根据补充定理398（1）可证.

（3）由于$(2^b)^b=2^b$，得证.

定义 188. 不可达基数（*cardinal inaccessible*），强不可达基数（*cardinal fortement inaccessible*）

a为序数，如果ω_a为不可达序数，则称$\aleph_a$为不可达基数. 不可达基数同时是支配基数的，称为强不可达基数.

补充定理 399. 广义连续统假设下的定理*2*

如果$(\forall k)(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k}=\aleph_k+1)$，则不可达基数均为强不可达基数.

证明：根据补充定理396可证.

补充定理 400.

基数$a\geq 3$，当且仅当对任意基数族$(a_i)_{i\in I}$均有$Card(I)<a$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i<a)\Rightarrow \prod\limits_{i\in I}a_i<a$时，$a$为强不可达基数.

证明：

充分性：根据定义，a为支配基数；令$a=\aleph_k$，如果$k=m+1$，则$2^{\aleph_m}\geq a$，矛盾，故k没有前导；同时，根据补充定理381（3），a是正则基数. 充分性得证.

必要性：令$s=\sum\limits_{i\in I}(a_i)$，由于$a$为正则基数，根据补充定理381（3），$s<a$；因此$\prod\limits_{i\in I}a_i\leq s^{Card(I)}$，由于$a$为支配基数，必要性得证.

补充定理 401.

a为基数，则：

（*1*）如果对任意基数$b>0$且$b<a$，均有$a^b=a$，则对任意基数$b>0$，均有$a^b=a2^b$.

（*2*）a为支配基数，如果对任意基数$b>0$，均有$a^b=a2^b$，则对任意基数$b>0$且$b<a$，均有$a^b=a$.

证明：

（1）当$2^b > a$时，$a^b = 2^b$，$a2^b = 2^b$；当$a \geq 2^b$时，$b < a$，故$a^b = a$，$a2^b = a$，故$a^b = a2^b$.

（2）当$b < a$时，$2b < a$，故$a^b = a$.

补充定理 402.

a为无穷基数，当且仅当a为支配基数并且对任意基数$b > 0$且$b < a$均有$a^b = a$时，a为强不可达基数.

证明：充分性根据补充定理393可证．必要性根据补充定理391（1）可证.

定义 189. 发散映射（*application divergente*）

序数$a > 0$，$[0, a[$到$[0, a[$的映射f，如果满足对任意序数$l_0 < a$，均存在序数$m_0 < a$，使$(x$为序数与$x \geq m_0$与$x < a) \Rightarrow f(x) \geq l_0$，则称$f$为发散映射.

补充定理 403.

a、b为序数，g为$[0, b[$到$[0, a[$的严格单增映射，并且，对任意序数c，$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) = \sup\limits_{d \in [0,c[} g(d)$，$\sup\limits_{d \in [0,b[} g(d) = a$．则当且仅当存在$[0, b[$到$[0, b[$的发散映射$h$满足$(\forall x)(x \in]0, b[\Rightarrow h(x) < x)$时，存在$[0, a[$到$[0, a[$的发散映射$f$满足$(\forall x)(x \in]0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

证明：

设h存在，对任意序数$x < a$，由于$\sup\limits_{d \in [0,b[} g(d) = a$，故$sup\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\} < b$，令$f(x) = g(h(sup\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\}))$，当$x > 0$时，由于$\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) > x\} \neq \varnothing$，故可令其最小元为$c$，则$\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\} = [0, c[$，由于$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) = \sup\limits_{d \in [0,c[} g(d)$，故$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) \leq x$，因此$g(h(sup\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\})) < x$，即$(\forall x)(x \in]0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

同时，对任意$y_0 < a$，$\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \geq y_0\} \neq \varnothing$，令$l_0$为其最小元，则存在$m_0 < b$使$(x$为基数与$x \geq m_0$与$x < b) \Rightarrow h(x) \geq l_0$，令$x_0 = g(m_0)$，当$x \geq x_0$时，$sup\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\} \geq m_0$，故$h(sup\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\}) \geq l_0$，因此$g(h(sup\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\})) \geq y_0$，故$f$为$[0, a[$到$[0, a[$的发散映射.

反过来，设f存在，对任意序数$x < b$，由于$\sup\limits_{d \in [0,b[} g(d) = a$，故$\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq f(g(x))\} \neq b$，令$h(x) = sup\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq f(g(x))\}$，当$x > 0$时，由于$\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) > f(g(x))\} \neq \varnothing$，故可令其最小元为$c$，则$\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq f(g(x))\} = [0, c[$，如果$h(x) \geq x$，即$\sup\limits_{d \in [0,c[} d \geq x$，因此$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) > f(g(x))$，但$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) = \sup\limits_{d \in [0,c[} (g(d))$，故$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) \leq f(g(x))$，矛盾，即$(\forall x)(x \in]0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

同时，对任意$y_0 < b$，令$l_0 = g(y_0)$，则存在$m_0 < a$使$(x$为基数与$x \geq m_0$与$x < a) \Rightarrow f(x) \geq l_0$，$\{z | z$为序数与$z < b$与$g(z) \geq m_0\} \neq \varnothing$，令$x_0$为其最小元，当$x \geq x_0$时，$g(x) \geq m_0$，故$f(g(x)) \geq l_0$，因此$h(x) \geq y_0$．故$h$为$[0, b[$到$[0, b[$的发散映射.

补充定理 404.

a为序数，则当且仅当ω_a的共尾性为ω_0时，存在$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的发散映射f满足$(\forall x)(x \in [0,\omega_a[\Rightarrow f(x) < x)$.

证明：如果ω_a的共尾性为ω_0，令E为$[0,\omega_a[$的共尾子集，令$g(x) = \{z|z \in E$与$z > x\}$的最小元，根据补充定理403可证.

反过来，设f为$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的满足条件的发散映射，令$x_0 = 1$，$x_{n+1} = \{z|(\forall y)$ $(y$为序数与$y < \omega_a$与$y \geq z \Rightarrow f(z) > x_n\}$的最小元．假设存在序数$u < \omega_a$，且对任意$i \in N$，均有$x_i < u$．设满足条件的最小序数为$u_0$，则对任意$i \in N$，$f(u_0) > x_i$，矛盾．故$\bigcup\limits_{i \in N}\{x_i\}$为$a$的共尾子集，得证.

补充定理 405.

a、a'为为序数，且$a' > 0$，ω_a的共尾性为$\omega_{a'}$，f为$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的映射，且满足$(\forall x)$ $(x \in [0,\omega_a[\Rightarrow f(x) < x)$，则存在序数$l_0$，使$Card(\{x|x \in [0,\omega_a[$与$f(x) = l0\}) \geq \aleph_{a'}$.

证明：假设对任意$x \in [0,\omega_a[$，均存在$y \in [0,\omega_a[$使$f(y) > x$，则令$x_0 = 1$，$x_{n+1} = \{z|(\forall y)(y$为序数与$y < \omega_a$与$y \geq z \Rightarrow f(z) > x_n\}$的最小元，故$\bigcup\limits_{i \in N}\{x_i\}$为$a$的共尾子集，矛盾，故存在$x \in [0,\omega_a[$，使$(\forall x)(x \in [0,\omega_a[\Rightarrow f(x) \in [0,x])$，因此$Card(f\langle[0,\omega_a[\rangle) < \aleph_a$，令$x_i = Card(\{x|x \in [0,\omega_a[\Rightarrow f(x) = i\}$，则$\sum\limits_{f\langle[0,\omega_a[\rangle x_i} = \aleph_a$．根据补充定理381（1）可证.

补充定理 406.

F为无穷集合，其元素都是E的子集，对任意$A \in F$均有$Card(A) = Card(F)$，则：

（1）存在E的子集P使$Card(P) = Card(F)$，并且F的所有元素都不是P的子集.

（2）如果对F的任意子集G，$Card(G) < Card(F)$，均有$Card(E - \bigcup\limits_{A \in G} A) \geq Card(F)$，则存在$E$的子集$P$使$Card(P) = Card(F)$，并且对任意$A \in F$均有$Card(A \cap P) < Card(F)$.

证明：

（1）令$Card(F) = \aleph_a$，其中a为序数，h为$\{z|z$为序数与$z < \omega_a\}$到F的同构．令$f(0) = \tau_z(z \in h(0))$，$g(0) = \tau_z(z \in h(0) - \{f(0)\})$，对任意序数$x > 0$、$x < \omega_a$，令$u = h(x) - h(x) \cap (\bigcup\limits_{b为序数与b<x}\{f(b), g(b)\})$，由于$2^Card(a) < \aleph_a$，故$u \neq \varnothing$，因此令$f(x) = \tau_z(z \in u)$，$g(0) = \tau_z(z \in u - \{f(x)\})$．$f\langle\omega_a\rangle$、$g\langle\omega_a\rangle$不相交，其中至少有一个符合条件，得证.

（2）令$Card(F) = \aleph_a$，其种a为序数，h为$\{z|z$为序数与$z < F\}$到F的同构．令$f(0) = \tau_z(z \in E - h(0))$，对任意序数$x > 0$、$x < \omega_a$，令$u = E - \bigcup\limits_{b为序数与b \leq x} h(b)$，则$u \neq \varnothing$，因此令$f(x) = \tau_z(z \in u)$，$f\langle\omega_a\rangle$即符合条件，得证.

定义 190. 不相交度（*degré de disjonction*）

E为无穷集合，集族$(X_i)_{i \in I}$为E的覆盖，且对任意$i \in I$、$j \in I$且$i \neq j$，均有$X_i \neq X_j$．如果存在最小基数c，使对任意$i \in I$、$j \in I$且$i \neq j$，均有$Card(X_i \cap X_j) < c$，则称c为$(X_i)_{i \in I}$的不相交度.

补充定理 407.

E为无穷集合，集族$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，且对任意$i\in I$、$j\in I$且$i\neq j$，均有$X_i\neq X_j$，c为$(X_i)_{i\in I}$的不相交度，则$Card(I)\leq Card(E)^c$.

证明：当$c=0$时，命题显然成立.

$c>0$时，E的任意势为c的子集，最多只能是$\{A|(\exists i)(i\in I$与$Card(X_i)\geq c$与$A=X_i)\}$当中一个元素的子集，根据补充定理337（4），$Card(\{A|(\exists i)(i\in I$与$Card(X_i)\geq c$与$A=X_i)\})\leq Card(E)^c$.

同时，$\{A|(\exists i)(i\in I$与$Card(X_i)<c$与$A=X_i)\}\leq\sum\limits_{d\in[0,c[}E^d$，而$\sum\limits_{d\in[0,c[}E^d\leq cE^c$，故$\sum\limits_{d\in[0,c[}E^d\leq E^c$. 综上，$Card(I)\leq Card(E)^c$.

定义 191. 诺特集（*ensemble noethérien*）

E为偏序集，如果E的任何非空子集都有极大元，则称E为诺特集.

定理 171.

E为诺特集，$F\subset E$，并且，$((a\in E)$与$(x>a\Rightarrow x\in F))\Rightarrow(a\in F)$，则$F=E$.

证明：如果$F\neq E$，则$E-F$有极大元b，因此$b\in F$，矛盾.

补充定理 408.

（*1*）诺特集的子集也是诺特集.

（*2*） E为偏序集，则有限个按导出的偏序排序的E的诺特子集的并集，按导出的偏序排序，也是诺特集.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）对子集数目用数学归纳法可证.

补充定理 409.

E为偏序集，当且仅当对任意$a\in E$，区间$]a,\rightarrow[$均为诺特集时，E为诺特集.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 91. 按诺特集的偏序的相反关系排序的偏序集的超限归纳法

集合论中，E为偏序集，其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集. u为字母，T为项. 则存在集合U和E到U的满射f，使对任意$x\in E$，均有$f(x)=(f(x)|u)T$，其中$f(x)$是$f(x)$在区间$]\leftarrow,x[$上的限制，并且，满足条件的U和f是唯一的.

证明：设U和f、U'和f'均满足条件，$A=\{x|x\in E$与$f(x)\neq f'(x)\}$，如果$A\neq\varnothing$，则其有极小元a，则$f(a)=f'(a)$，矛盾. 唯一性得证.

设所有存在U和f的E的子集的并集为A，则A也存在U和f. 如果$A\neq E$，则$E-A$有极小元a，故$A\cup\{a\}$存在U和f，矛盾，存在性得证.

补充定理 410.

（*1*）E为诺特集，并且E的任何有限子集均有最小上界，则E有最大元.

（*2*）E为诺特集，并且E的任何有限子集均有最小上界，则E为完备格.

证明：

（1）令x为E的极大元，如果存在$y \in E$且x、y不可比较，$\{x, y\}$没有上界，矛盾，故x为E的最大元.

（2）对E的任意非空子集F，令a_0为F的任意元素，对任意$i \in N$，如果存在$x > a_i$并且x是F的某个有限子集的最小上界，则令a_{i+1}为任何一个x，否则令$a_{i+1} = a_i$．根据定理168，存在自然数m，对任意$n \geq m$，$a_m = a_n$，因此a_m为F的最小上界．得证.

习题 156.

当且仅当对任意E到E的映射f，存在E的非空子集S使$S \neq E$与$f(S) \subset S$时，E为无穷集合.

证明：对于元素数目为n有限集合，令g为E到$[1, n]$的双射，$f = ((\bigcup\limits_{i \in [1, n-1]} \{(i, i+1)\}) \cup \{(n, 1)\}, [1, n], [1, n])$．则考虑映射$g^{-1} \circ f \circ g$．对任意$S \subset E$，令$T = g(S)$，如果$g^{-1} \circ f \circ g(S) \subset S$，则$f(T) \subset T$，设$a$为$[1, n] - T$的最小元，如果$a = 1$，则$n \notin T$，设$T$的最大元为$b$，则$b < n$，$f(b) = b + 1$，而$b + 1 \notin T$，矛盾．如果$a \neq 1$，则$a - 1 \in T$，$f(a-1) = a$，而$a \notin T$，矛盾．故不存在$E$的非空子集$S$使$S \neq E$与$f(S) \subset S$.

对于无穷集合E，对任意映射f，令$x \in E$，$y_0 = x$，$y_n = f(y_{n-1})$，$S = \bigcup\limits_{i \in N} \{y_i\}$，则$f(S) \subset S$．假设$S = E$，则存在$y_n = x$，则$S = \bigcup\limits_{i \in [0, n-1]} \{y_i\}$，故$Card(S) \leq n$，矛盾.

习题 157.

a、b、c、d均为基数，如果$a < c$，$b < d$，求证：$a + b < c + d$，$ab < cd$.

证明：即补充定理334.

习题 158.

E为无穷集合，则$Card(\{X | X \subset E$与$Card(X) = Card(E)\} = Card(\mathcal{P}(E))$.

证明：

设$a \neq b$，则$Card(E \times \{a\} \cup E \times \{b\}) = E$，设$f$为$(E \times \{a\}) \cup (E \times \{b\})$到$E$的双射，令$g$为$X \mapsto f\langle (X \times \{a\}) \bigcup\limits_{(} E \times \{b\}) \rangle (X \in \mathcal{P}(E))$，

由于$Card((X \times \{a\}) \cup (E \times \{b\})) = Card(E)$，故$Cardf\langle (X \times \{a\}) \bigcup\limits_{(} E \times \{b\}) \rangle) = Card(E)$，因此$g$为$\mathcal{P}(E)$到$\{X | X \subset E$与$Card(X) = Card(E)\}$的单射，故$Card(\{X | X \subset E$与

$Card(X) = Card(E)\} \geq Card(\mathcal{P}(E))$，得证，

习题 159.

E为无穷集合，$F=\{G|\Delta_G$为E的划分$\}$，求证：$Card(F)=Card(\mathcal{P}(E))$.

证明：

令$H=\{Y|(\exists I)(I\subset E$与$Y=\{E,E-I\})\}$，根据定理142，$2^H=\mathcal{P}(E)$，根据定理160，$Card(H)=Card(\mathcal{P}(E))$.

由于$H\subset F$，故$Card(F)\geq Card(\mathcal{P}(E))$.

反过来，令f为$X\mapsto\{\{x,y\}|x=y$与$x\in X\}$，则$f(X)\subset E\times E$，故$Card(F)\leq Card(\mathcal{P}(E\times E))$，即$Card(F)\leq Card(\mathcal{P}(E))$，得证.

习题 160.

E为无穷集合，求证：E的排列的集合，和$\mathcal{P}(E)$等势.

证明：即补充定理337（2）.

习题 161.

E、F均为无穷集合，$Card(E)\leq Card(F)$，求证：E到F的满射的集合（如果$CardE=Card(F)$），E到F的映射的集合，E的子集到F的映射的集合，均和$\mathcal{P}(F)$等势.

证明：根据补充定理337（3）、补充定理336（2）可证．注：原书习题161第一部分有误.

习题 162.

E、F均为无穷集合，$Card(E)<Card(F)$，求证：$Card(\{X|X\subset F$与$Card(X)=E\})=Card(F^E)$，$Card(\{f|f$为E到F的单射$\})=Card(F^E)$.

证明：根据补充定理337（4）、补充定理337（5）可证.

注：习题162中，E为无穷集合的条件可以去掉.

习题 163.

E为无穷集合，求证：在E上的良序集合，和$\mathcal{P}(E)$等势.

证明：任何良序的图，都是$E\times E$的子集.

另一方面，令F为在E上的良序，对任意E的排列f，$f(x)\leq(y)$与$x\in E$与$y\in E$也是良序关系，对于不同的f，其相应的良序也互不相同．根据习题160可证.

习题 164.

令E为非空良序集合，对任意$x\in E$，如果x不是E的最小元，则$]\leftarrow,x[$有最大元，求证：E同构于N或者E同构于$[0,n]$（n为自然数）.

证明：如果命题为假，根据定理84，存在$x\in E$，使$]\leftarrow,x[$同构于N，矛盾.

习题 165.

（1）a为基数，求证："x为序数与$Card(x) < a$"为x上的集合化公式.

（2）令序数$a \geq 0$，$O'(a)$为良序集$\{x|x$为序数与$x \leq a\}$，并按下列方式定义定义域为$O'(a)$的函数f_a：

$f_a(0) = Ord(N)$，

对$x > 0$且$x \leq a$，令$f_a(x)$为$\{y|y$为序数与$(\exists z)(z$为序数与$z < x$与$Card(y) \leq Card(f_a(z)))\}$的最小上界.

求证：

令$x \leq a$、$y \leq a$，如果$x < y$，则$Card(f_a(x)) < Card(f_a(y))$；

如果$x \leq a$、$a \leq b$，则$f_a(x) = f_b(x)$；

特别是，$\aleph_0 = Card(N)$.

（3）求证：

令a为无穷基数，$W(a)$为$\{y|y$为序数与$Card(y) < a\}$的最小上界，则$W(a)$是初始序数，并且，设其为ω_x，则$a = \aleph_x$；进而，ω_x为$\{y|y$为序数与$Card(y) = a\}$的最小元.

令a为序数，$O'(a) = \{x|x$为序数与$x \leq a\}$，$W'(a) = \{x|x$为无穷基数与$x \leq \aleph_a\}$，则：

映射$x \mapsto \aleph_x (x \in O'(a))$为$O'(a)$到$W'(a)$的同构；

特别是，令a为序数，则$(\forall x)(x$为基数$\Rightarrow x \leq \aleph_a$或$x \geq \aleph_a + 1)$.

令a为无穷序数、b为序数，a没有前导，则：

对任意定义域为$\{y|y$为序数与$y < b\}$、值域的元素都是序数的严格单增映射f，如果$a = \sup\limits_{x \in \{y|y\text{为序数与}y<b\}} f(x)$，即有$\sum\limits_{x \in \{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_{f(x)} = \aleph_a$.

（4）求证：ω_a为标准序数函数符号.

证明：

（1）即补充定理340.

（2）即补充定理341、补充定理342（1）.

（3）第一部分根据补充定理343（1）、补充定理343（2）可证，后面得部分即补充定理344（1）、补充定理345、补充定理346（1）.

（4）即补充定理347.

注：习题165（2）开头应改为"$a \geq 0$".

习题 166.

（1）求证：

a为序数，则ω_a没有前导.

如果序数x没有前导，且$x > 0$，则$x \geq \omega_0$.

ω_0是不可约的序数.

令序数$a > 0$，则：$a\omega_0$是不可约的序数；$a\omega_0 > a$；如果序数x不可约，且$x > a$，则$x \geq a\omega_0$.

令序数$a>0$，则$(a+1)\omega_0=a\omega_0$.

（*2*）a为序数，求证：当且仅当存在序数b，使$a={\omega_0}^b$时，a为不可约的序数.

证明：

（1）即补充定理349（1）、补充定理349（2）、补充定理349（3）、补充定理350、补充定理351.

（2）即补充定理352（1）.

习题 167.

（*1*）求证：

对任意序数a，以及序数$c>1$，存在唯一的一对序数有限序列$(l_i)_{i\in[1,k]}$、$(m_i)_{i\in[1,k]}$，使$a=\sum\limits_{i\in[1,k]}c^{l_i}m_i$，其中，对任意$i\in[1,k]$，$m_i>0$与$m_i<c$，对任意$i\in[1,k-1]$，$li>l_{i+1}$.

对任意序数a，存在唯一的单减有限序列$(b_i)i\in[1,k]$，使$a=\sum\limits_{i\in[1,k]}{\omega_0}^{b_i}$.

（*2*）令n为大于0的自然数，按下列方式定义$N-\{0\}$到N的映射f：

$f(1)=1$;

$f(n)=\underset{k\in[1,n-1]}{sup}(k2^{k-1}+1)f(n-k)$.

求证：

对任意序数族$(a_i)_{i\in[1,n]}$，$Card(\{x|(\exists g)(g$为$[0,n]$的排列与$x=\sum\limits_{i\in[1,n]}a_{g(i)}\})\le f(n)$，并且存在某个序数族$(a_i)_{i\in[1,n]}$使等号成立.

同时，当$n\ge 20$时，$f(n)=81f(n-5)$.

（*3*）令g为$[0,n]$的排列，求证：对不同的g，$\sum\limits_{i\in[1,n]}(\omega_0+g(i))$各不相同.

证明：

（1）即补充定理353.

（2）考虑a_i的展开的最大指数，设其中最大指数等于最小值的有k个序数．在排列中，另外$n-k$个序数的序数和多对有$f(n-k)$种可能．考虑这些序数后面的序数：如果有序数，最后一个序数有k种可能，前面的序数有2^{k-1}种可能，不等式得证.

同时，设$f(n)=(k2^{k-1}+1)f(n-k)$，则令$a_i=\omega_0 i+i$（$i\in[1,k]$），a_{k+1}、a_{k+2}、$\cdots$、a_n为使等号成立的$n-k$个序数展开所有指数加2后得到的结果，则此时等号成立.

通过数学归纳法可证当$n\ge 20$时，$f(n)=81f(n-5)$.

（3）用数学归纳法可证$\sum\limits_{i\in[1,n]}(\omega_0+g(i))={\omega_0}^n+\sum\limits_{i\in[1,n]}{\omega_0}^{n-i}g(i)$，得证.

习题 168.

（*1*）$w(x)$为定义在$x\ge a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x\ge a_0$、$y>x$，均有$w(x)<w(y)$．求证：对任意序数$x\ge a_0$和序数y，$w(x+y)\ge w(x)+y$．进而，存在序数a，对任意序数$x\ge a$，均有$w(x)\ge x$.

（2）$w(x)$为定义在$x \geq a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \geq a_0$，$w(x) \geq x$，并且，对任意序数x、y，$x < y$与$x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令$g(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq a_0$上的序数函数符号，并满足:

第一，$(x$为序数与y为序数与$x \geq a_0$与$y \geq a_0) \Rightarrow g(x,y) > x$；

第二，$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$.

$f(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq 1$上的序数函数符号，其按下列方式定义：

第一，对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,1) = w(x)$；

第二，对任意序数$x \geq a_0$，$y > 1$，$f(x,y) = \sup\limits_{z \in]0,y[} g(f(x,z),x)$.

求证：

对任意序数b，最多存在有限个序数y，使$f(x,y) = b$至少有一个解.

（3）$f(x,y)$的临界序数没有前导.

同时，如果存在集合A，对任意$x \in A$，$(x$为序数$)$与$f(x,c) = c$，并且，c为A的最小上界，则c为$f(x,y)$的临界序数.

（4）令$h(x) = f(x,x)$（$x \geq a_0$），序列$(a_n)_{n \in N = \{0\}}$满足$a_1 = a_0 + 2$、$a_{n+1} = h(a_n)$，则序列$(a_n)_{n \in N = \{0\}}$的最小上界，为$f(x,y)$的临界序数.

（5）如果集合的元素都是$f(x,y)$的临界序数，则该集合最小上界是$f(x,y)$临界序数.

并且，$f(x,y)$的临界序数是不可约的.

证明：

（1）即补充定理355.

（2）即补充定理356（1）.

（3）即补充定理356（2）、补充定理356（3）.

（4）即补充定理356（4）.

（5）即补充定理356（5）、补充定理356（6）.

习题 169.

（1）求证：a、b为序数，$a \geq 2$，b没有前导，则a^b不可约.

a为有限序数，$a \geq 2$，$b = \omega_0 c$，则$a^b = {\omega_0}^c$.

a为无穷序数，p为$\{x|x$为不可约的序数与$x \leq a\}$的最大元，序数b没有前导，则$a^b = p^b$.

（2）求证：

令序数函数符号$f(x,y) = x^y$，c为序数，则当且仅当对任意序数$a > 1$、$a \leq c$，均存在x使$c = a^x$时，c为f的临界序数；并且，使$c = a^x$成立的x是唯一且不可约的.

反过来，对任意$a > 1$和不可约的序数p，a^p为f的临界序数.

进而，当且仅当存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$时，$c$为$f$的临界序数.

（3）令序数函数符号$f(x,y) = xy$，则f的最小的临界序数是可数序数.

证明：

（1）即补充定理357、补充定理359、补充定理361.

（2）根据补充定理362、补充定理363、补充定理364可证.

（3）根据补充定理365可证.

习题 170.

令序数$a > 0$、$c > 1$，序数有限序列$(l_i)_{i\in[1,k]}$、$(m_i)_{i\in[1,k]}$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} c^{l_i} m_i$，其中，对任意$i \in [1,k]$，$m_i > 0$与$mi < c$，对任意$i \in [1,k-1]$，$li > l_{i+1}$. 令$L(a) = \{x|(\exists i)(i \in [1,k]$与$x = l_i\}$，求证：

（1）对任意$i \in [1,k]$，$l_i \leq a$，并且，如果存在$i \in [1,k]$使$l_i = a$，则a为x^y（$x \geq 2$）的临界序数.

（2）令$L_1(a) = L(a)$，对于自然数$n > 1$，$L_n(a) = \bigcup\limits_{b\in L_{n-1}(a)} L(b)$，求证：存在自然数$n_0$，对任意自然数$n \geq n_0$，均有$L_{n+1}(a) = L_n(a)$，并且，$L_n(a)$的元素均为$x^y$的临界序数.

证明：

（1）根据补充定理275，$c^{l_i} \geq cl_i$，故$c^{l_i} \geq l_i$，又因为$a \geq c^{l_i}$，因此$l_i \leq a$. 如果存在$i \in [1,k]$使$l_i \leq a$，则$a = c^a$.

如果c为有限序数，设$a = \omega_0 d + e$（e为有限序数），则$a = {\omega_0}^d c^e$，设$d = 1 + k$，则$e = 0$，$d = {\omega_0}^k$，因此d为不可约的序数，故$d = k$或$d = 1$. 如果$d = 1$，则$a = \omega_0$，故a为x^y（$x \geq 2$）的临界序数. 如果$d = k$，则$a = {\omega_0}^a$，根据补充定理369，a为x^y（$x \geq 2$）的临界序数.

如果c为无穷序数，则$a \geq {\omega_0}^a$，故$a = {\omega_0}^a$，根据补充定理369，a为x^y（$x \geq 2$）的临界序数.

（2）令$M_n(a) = \{b|b \in Ln(a)$与$b \notin L(b)\}$，如果对任意$n \in N$，$M_n(a) \neq \varnothing$，令y_n为$M_n(a)$的最大元. 则$\{z|(\exists y)(y \in N$与$z = y_n)\}$有最小元y_m，但$y_m \notin L(ym_)$，故对任意$z \in M_{n+1}(a)$，均有$z < y_m$，即$y_{m+1} < y_m$，矛盾.

注：原书习题170关于“$a = 0$”的内容有误.

习题 171.

（1）求证：

无穷正则序数都是初始序数.

a为序数，如果$a = 0$或a有前导，则初始序数ω_a是正则序数.

$a > 0$，a没有前导，且$a < \omega_a$，则初始序数ω_a是奇异序数.

ω_{ω_0}是最小的奇异序数.

（2）求证：$a > 0$，且ω_a为不可达序数，则$a = \omega_a$.

令k为最小的艾普塞朗数，则ω_k的共尾性是ω_0.

进而，当$a > 0$、$a \leq k$时，ω_a不是不可达序数.

（3）E为全序集，求证：E的共尾性是正则序数；如果E非空且没有最大元，则E的共尾性是初始序数；进而，令ω_a的共尾性为$\omega_{a'}$，则$a' \leq a$，并且，当且仅当$a' = a$时，ω_a为正

则序数.

（*4*）a为序数，ω_a为正则序数，I为良序集且$Ord(I) < \omega_a$，$(x_i)_{i\in I}$为序数族，如果对任意$i \in I$均有$x_i < \omega_a$，求证：$\sum\limits_{i\in I} x_i < \omega_a$.

证明：

（1）即补充定理372、补充定理373、补充定理374、补充定理375.

（2）即补充定理376、补充定理378.

（3）前两部分即补充定理379，最后一部分根据定义可证.

（4）即补充定理380（2）.

习题 172.

a为序数，求证：当且仅当对任意基数族$(x_i)_{i\in I}$，若$Card(I) < \aleph_a$，且对任意$i \in I$均有$x_i < \aleph_a$，则$\sum\limits_{i\in I}(x_i)_{i\in I} < \aleph_a$时，$\aleph_a$为正则基数.

证明：即补充定理381（3）.

习题 173.

a为序数，基数$m \neq 0$，则：

（*1*）${\aleph_{a+1}}^m = {\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

（*2*）序数c满足$Card(c) \leq m$，则${\aleph_{a+c}}^m = {\aleph_a}^m {\aleph_{a+c}}^{Card(c)}$.

（*3*）$Card(a) \leq m$，则${\aleph_a}^m = 2^m {\aleph_a}^{Card(a)}$.

证明：即补充定理382.

习题 174.

（*1*）a、b为序数，a没有前导，$x \mapsto s_x$为$[0, \omega_b[$到$[0, a[$的严格单增映射，且$\underset{x\in[0,\omega_b[}{sup} s_x = a$，求证：$\aleph_a \aleph_b = \underset{x\in[0,\omega_b[}{\mathsf{P}} \aleph_{s_x}$.

（*2*）a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，则${\aleph_a}^{\aleph_{a'}} > \aleph_a$. 并且，令$c$为序数，如果存在基数$n$使$\aleph_a = n^{\aleph_c}$，则$c < a'$.

（*3*）a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，序数$b < a'$，则${\aleph_a}^{\aleph_b} = \sum\limits_{c\in[0,a[} {\aleph_c}^{\aleph_b}$.

证明：

（1）即补充定理383.

（2）即补充定理384、补充定理385.

（3）即补充定理386.

注：习题174（1）中“严格单增”的条件可以去掉.

习题 175.

（*1*）求证：a为正则基数，基数$b \neq 0$，则$a^b = a \sum_{m \in [0,a[} m^b$．并且，如果$(\forall k)(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_k + 1)$，$a$为基数且$a > 0$，如果对任意基数$b \neq 0$均有$a^b = a \sum_{m \in [0,a[} m^b$，则$a$为正则基数．

（*2*）a为基数且$a > 2$，对任意基数$m \in]0, a[$，均有$a^m = a$，求证：a为正则基数．

（*3*）求证：$(\forall a)(\forall m)((a$为正则基数$)$与$(m$为基数$)$与$(m \in]0, a[) \Rightarrow a^m = a) \Leftrightarrow (\forall k)$ $(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1})$．

证明：

（1）即补充定理390、补充定理392（5）．

（2）即补充定理393．

（3）即补充定理394．

习题 176.

（*1*）基数$a > 0$，对任意基数$m < a$，均有$2^m < a$，求证：a为支配基数．

（*2*）递归定义基数序列$(a_i)_{i \in N}$：

$a_0 = \aleph_0$，

对任意$i \in N$，$ai + 1 = 2^{a_i}$．

令$b = \sum_{i \in N} a_i$，求证：b是大于$\aleph_0$的最小的支配基数．

（*3*）递归定义基数序列$(a_i)_{i \in N}$：

$a_0 = \aleph_0$，

对任意$i \in N$，$ai + 1 = 2^{a_i}$．

令$b = \sum_{i \in N} a_i$，求证：

$b^{\aleph_0} = 2^b$；

${\aleph_0}^b = b^{\aleph_0}$；

$b^{\aleph_0} = (2^b)^b$．

证明：

（1）即补充定理396．

（2）即补充定理397．

（3）即补充定理398．

习题 177.

（*1*）求证：如果$(\forall k)(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_k + 1)$，则不可达基数均为强不可达基数．

（*2*）基数$a \geq 3$，求证：当且仅当对任意基数族$(a_i)_{i \in I}$均有$Card(I) < a$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i < a) \Rightarrow \prod_{i \in I} a_i < a$时，$a$为强不可达基数．

（*3*）a为无穷基数，求证：当且仅当a为支配基数并且满足下列条件之一时，a为强不可达基数：

第一，对任意基数$b>0$且$b<a$均有$a^b=a$；

第二，如果对任意基数$b>0$，均有$a^b=a2^b$，则对任意基数$b>0$且$b<a$，均有$a^b=a$.

证明：

（1）即补充定理399；

（2）即补充定理400；

（3）根据补充定理401、补充定理402可证.

习题 178.

（*1*）a、b为序数，g为$[0,b[$到$[0,a[$的严格单增映射，并且，对任意序数c，$g(\underset{d\in[0,c[}{sup}\ d) = \underset{d\in[0,c[}{sup}\ g(d)$，$\underset{d\in[0,b[}{sup}\ g(d)=a$．求证：当且仅当存在$[0,b[$到$[0,b[$的发散映射$h$满足$(\forall x)(x\in]0,b[\Rightarrow h(x)<x)$时，存在$[0,a[$到$[0,a[$的发散映射$f$满足$(\forall x)(x\in]0,a[\Rightarrow f(x)<x)$.

（*2*）a为序数，求证：当且仅当ω_a的共尾性为ω_0时，存在$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的发散映射f满足$(\forall x)(x\in[0,\omega_a[\Rightarrow f(x)<x)$.

（*3*）a、a'为为序数，且$a'>0$，ω_a的共尾性为$\omega_{a'}$，f为$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的映射，且满足$(\forall x)$
$(x\in[0,\omega_a[\Rightarrow f(x)<x)$，求证：存在序数$l_0$，使$Card(\{x|x\in[0,\omega_a[$与$f(x)=l0\})\geq\aleph_{a'}$.

证明：

（1）即补充定理403.

（2）即补充定理404.

（3）即补充定理405.

习题 179.

F为无穷集合，其元素都是E的子集，对任意$A\in F$均有$Card(A)=Card(F)$，求证：

（*1*）存在E的子集P使$Card(P)=Card(F)$，并且F的所有元素都不是P的子集.

（*2*）如果对F的任意子集G，$Card(G)<Card(F)$，均有$Card(E-\bigcup\limits_{A\in G}A)\geq Card(F)$，则存在$E$的子集$P$使$Card(P)=Card(F)$，并且对任意$A\in F$均有$Card(A\cap P)<Card(F)$.

证明：即补充定理406.

习题 180.

（*1*）E为无穷集合，集族$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，且对任意$i\in I$、$j\in I$且$i\neq j$，均有$X_i\neq X_j$，c为$(X_i)_{i\in I}$的不相交度，求证：$Card(I)\leq Card(E)^c$.

（*2*）a为序数，集合F满足$Card(F)\geq 2$且$Card(F)<\aleph_a$，E为$[0,\omega_a[$不同于自身的片段集合到F的映射的集合．对任意$[0,\omega_a[$到F的映射f，令K_f为f在$[0,\omega_a[$的不同于自身的片段上的限制的集合．令$G=(K_f)_{f\in\{z|z为[0,\omega_a[到F的映射\}}$．求证：$Card(E)\leq Card(F)^{\aleph_a}$，$G$为$E$的覆盖，$Card(\{z|为[0,\omega_a[到F的映射\})=Card(F)^{\aleph_a}$，并且其不相交度等于$\aleph_a$.

（3）E为无穷集合，$Card(E)=a$，基数$p>1$、$c>p$，并且，对任意基数$m<c$，均有$p^m<a$，同时$a=\sum\limits_{m\in[0,c[}p^m$．求证：存在集族$(X_i)_{i\in I}$，对任意$i\in I$，$Card(X_i)=c$，$Card(I)=p^c$，且其不相交度等于$c$．特别是，$E$为可数无穷集合时，存在$E$的覆盖$(X_i)_{i\in I}$，$Card(I)=2^{\aleph_0}$，且对任意$i\in I$、$j\in I$，$X_i\cap X_j$为有限集合．

证明：

（1）即补充定理407．

（2） $Card(E)=\sum\limits_{m\in[0,\aleph_a[}Card(F)^m$，故$Card(E)\le\aleph_a Card(F)^{\aleph_a}$，因此$Card(E)\le Card(F)^{\aleph_a}$．

根据定义可证G为E的覆盖、$Card(\{z|z$为$[0,\omega_a[$到F的映射$\})=Card(F)^{\aleph_a}$．

对任意$[0,\omega_a[$到F的映射f、g，$K_f\cap K_g=\bigcup\limits_{x\in\{x|x\in[0,\omega_a[\text{与}f|Sx=g|Sx\}}\{f|Sx\}$，故$Card(K_f\cap Kg)<\aleph_a$．同时，对任意基数$c<\aleph_a$，令$u$、$v$是$F$的不同元素，$h$为任何一个$[0,c[$到$F$的映射，令$f$、$g$为$h$在$[0,\omega_a[$上的延拓，其中，当$x\in[c,\omega_a[$时，$f(x)=u$，$g(x)=v$，则$Card(K_f\cap K_g)=c$，故$G$的不相交度等于$\aleph_a$．

（3）类似习题180（2）可证．

习题 181.

E为无穷集合，F的元素均为E的子集，$A\in F$，基数$a\ge\aleph_0$，$Card(E)=a$、$Card(A)=a$、$Card(F)=a$，求证：存在E的划分$(B_i)_{i\in I}$，使$Card(I)=a$，对任意$i\in I$均有$Card(B_i)=a$，并且对任意$i\in I$、$A\in F$均有$A\cap B_i\ne\varnothing$．

证明：令$a=\aleph_c$，h_0为$[0,\omega_c[$到F的同构．令$f_0(0)=\tau_x(x\in h_0(0))$，对于$i\in[1,\omega_c[$，$h_0(i)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,i[}\{f0(j)\})\ne\varnothing$，故令$f_0(i)=\tau_x(x\in h_0(i)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,i[}\{f0(j)\}))$，$g(0)=f_0\langle[0,\omega_c[\rangle$；对$k\in[1,\omega_c[$，$x\in[0,\omega_c[$，令$h_k(x)=h_0(x)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,k[}g(j))$，则$h_k(x)\ne\varnothing$，此时，令$f_k(0)=\tau_x(x\in h_k(0))$，对于$i\in[1,\omega_c[$，$h_k(i)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,i[}\{fk(j)\})\ne\varnothing$，故令$f_k(i)=\tau_x(x\in h_k(i)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,i[}\{fk(j)\}))$，$g(k)=f_k\langle[0,\omega_c[\rangle$．

最后令$B_0=E-\bigcup\limits_{j\in[1,\omega_c[}g(j)$，对$i\in[1,\omega_c[$，$B_i=g(i)$，$I=[0,\omega_c[$，则$(B_i)_{i\in I}$满足要求．

习题 182.

L为无穷集合，$(E_l)_{l\in L}$为非空族，对任意自然数$n>0$，$Card(\{l|l\in L$与$Card(E_l)>n\})=Card(L)$，$E=\prod\limits_{l\in L}E_l$，求证：存在$F\subset E$， $Card(F)=2^{Card(E)}$，并且，对F的元素组成的任意有限序列$(f_k)_{k\in[1,n]}$，均存在$l\in L$，使所有的$f_k(l)$各不相同．

证明：

对任意自然数n，令$A_n=\{l|l\in L$与$Card(E_l)=n\}$；如果A_n为有限集合，令g为A_n到$[0,Card(A_n)-1]$的双射，当$l\in A_n$时，$f(l)=\{g(l)\}$；如果A_n为无穷集合，令h为A_n到$N\times A_n$的双射，当$l\in A_n$时，$f(l)=pr_1(h(l))$．

对任意自然数n，令$B_n = \{l | l \in L与f(l) = n\}$，对任意自然数$j$，令$S_j = [2^j, 2^{j+1} - 1]$，$L_j = \bigcup\limits_{k \in S_j} B_k$，则对任意$l \in L_j$，$Card(E_l) \geq 2^j$，$Card(L_j) = Card(L)^j$，并且，$(L_j)_{j \in N}$是$L$的划分.

令p_j为L_j到$\prod\limits_{i \in [1,j]} L$的双射，$q_l$为$\prod\limits_{i \in [1,j]} \{0,1\}$到$E_l$的单射，$G = \mathcal{F}(L; \{0,1\})$，对任意$g \in G$，设$l \in L_j$，$p_j(l) = (x_i)_{i \in [1,j]}$，则令$f_g(l) = q_l(g(x_i)_{i \in [1,j]})$. 令$F = \bigcup\limits_{g \in G} \{f_g\}$.

对F的元素组成的任意有限序列$(f_k)_{k \in [1,n]}$，令$A = \bigcup\limits_{(i,j) \in [1,n] \times [1,n] - \Delta_{[1,n]}} \{\tau_z(g_i(z) \neq g_j(z))\}$，则$A$为有限集合，令$l = {p_{Card(A)}}^{-1}((i)_{i \in A})$，则所有的$f_k(l)$各不相同，得证.

注：原书习题182遗漏“非空”的条件.

习题 183.

E为无穷集合，n为自然数，$F_n(E)$为E的元素数目为n的子集的集合，m为自然数，$(x_i)_{i \in [1,m]}$为$F_n(E)$的划分，求证：存在$i \in [1,m]$和E的无穷子集F，使F的元素数目为n的子集，都是x_i的元素.

证明：

命题对$n = 1$显然成立；假设命题对$[1, n-1]$成立，则对任意$a \in E$，均存在$j(a) \in [1,m]$和$E - \{a\}$的无穷子集$M(a)$，使$M(a)$任意元素数目为$n-1$的子集A，都满足$A \cup \{a\}$为、、$X_j(a)$的元素.

令a_1为E的任意元素，a_2为$M(a_1)$的任意元素，a_3为$M(a_1)$按照同样方法确定的无穷子集的任意元素，以此类推. 则$\bigcup\limits_{i \in N} \{a_i\}$符合要求，得证.

习题 184.

（1）E为偏序集，求证：有限个按导出的偏序排序的E的诺特子集的并集，按导出的偏序排序，也是诺特集.

（2）E为偏序集，求证：当且仅当对任意$a \in E$，区间$]a, \rightarrow[$均为诺特集时，E为诺特集.

（3）E为偏序集，其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集. u为字母，T为项. 求证：存在集合U和E到U的映射f，使对任意$x \in E$，均有$f(x) = (f(x)|u)T$，其中$f(x)$是$f(x)$在区间$]\leftarrow, x[$上的限制，并且，满足条件的U和f是唯一的.

（4）E为诺特集，并且E的任何非空有限子集均有最小上界. 求证：如果E有最小元，则E为完备格；如果E没有最小元，则将a添加到集合E并使a为最小元得到的偏序集E'，为完备格.

证明：

（1）即补充定理408（2）.

（2）即补充定理409.

（3）即补充证明规则91.

（4）根据补充定理410（2）可证.

注：原书习题184（4）遗漏“非空”的条件.

习题 185.

E为格，其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集.

求证：

对任意$a \in E$，a可以表示为$\sup\limits_{i\in[1,n]} e_i$，其中，$n$为自然数，并且，对任意$i \in [1,n]$，$e_i$为$E$的不可约元素.

J为其不可约元素集合．令$S(x) = \{y|y \in J与y \leq x\}$，则$x \mapsto S(x)$为$E$到按包含关系排序的$\mathcal{P}(J)$的一个子集的同构，并且，$S(inf(x,y)) = S(x) \cap S(y)$.

E为分配格，J为其不可约元素集合．令$S(x) = \{y|y \in J与y \leq x\}$，则$x \mapsto S(x)$为$E$到按包含关系排序的$\mathcal{P}(J)$的一个子集的同构，并且，$S(sup(x,y)) = S(x) \cup S(y)$；同时，令$J^*$为按在$J$上的偏序关系的相反关系排序的偏序集，$I = \{0,1\}$，$A(J^*,I)$为$J^*$到$I$的单增映射的集合，按$f \in A(J^*,I)与g \in A(J^*,I)与(\forall x)(x \in J^* \Rightarrow f(x) \leq g(x))$排序,则$E$同构于$A(J^*,I)$.

E为分配格，J为其不可约元素集合．a为E的最小元，$P = J - \{a\}$．令$A = \{a|(\exists X)((X为P的自由子集)与Card(X) = a)\}$，$A$的最大元为$n$，则$E$同构于全序集有限族的乘积的某个内部格.

证明：

第一部分：设a不是不可约元素，则存在b、c使$sup(b,c) = a$且$b < a$，$c < a$．则b、c是不可比较的，令$inf(b,c) = d$．如果$\{x|x \in E与x < b与(非x \leq d)\}$为空，则$b$为不可约元素，令$e = b$；否则$\{x|x \in E与x < b与(非x \leq d)\}$存在极小元$e$，$e$为不可约元素．在两种$i$情况下均有$a = sup(e,c)$．根据定理168可证.

其他部分，类似习题133（2）、习题134（2）、习题135（2）可证.

习题 186.

A为无穷集合，E为A的无穷子集集合，并按包含关系的相反关系排序．求证：E为完全右方分支集，但不是右方无向集.

证明：根据定义可以证明E为完全右方分支集．对任意无穷集合$y \subset A$且$y \neq A$，$a \in A - y$，令$x = y \cup \{a\}$，则对任意无穷集合$z \subset x$，$z \cap y \subset A$且为无穷集合．根据补充定理212，E不是右方无向集.

习题 187.

$(M_n)_{n\in Z}$、$(P_n)_{n\in Z}$均为两两不相交且不全为空集的有限集合序列，其中，指标集Z为整数集．令$a_n = Card(M_n)$，$b_n = Card(P_n)$．如果存在自然数$k > 0$，使对任意$n \in Z$和自然数$l \geq 1$，均有：

$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+l}\leq b_{n-k}+b_{n-k+1}+\cdots+b_{n+k+l}$；

$b_n+b_{n+1}+\cdots+b_{n+l}\leq a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n+k+l}$.

令$M=\bigcup\limits_{n\in Z}M_n$，$P=\bigcup\limits_{n\in Z}P_n$.

求证：存在M到P的双射f，使对任意$n\in Z$，均有：

$f(M_n)\subset\bigcup\limits_{i\in[n-k-1,n+k+1]}P_i$，$f^{-1}(P_n)\subset\bigcup\limits_{i\in[n-k-1,n+k+1]}M_i$.

证明：令M、P按各集合全序的序数和排序，设$M_{m_0}\neq\varnothing$，其最小元为x；d为所有$b_{n-k}+b_{n-k+1}+\cdots+b_{n+k+l}-(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+l})$、$a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n+k+l}-(b_n+b_{n+1}+\cdots+b_{n+l})$（$n\in Z$、自然数$l\geq 1$）的最小值，令$g$为$M$到$P$的同构，其中$g(x)$为$\bigcup\limits_{i\in[m0-k,\rightarrow[}P_i$的最小元素.

令$S_0=0$，$S_i=\sum\limits_{j\in[-k,i-k-1]}b_{m_0+j}-\sum\limits_{j\in[0,i-1]}a_{m_0+j}$（$i>0$），$S_i=\sum\limits_{j\in[-1,i]}a_{m_0+j}-\sum\limits_{j\in[-k-1,i-k]}b_{m_0+j}$（$i<0$），$T_0=\sum\limits_{j\in[-k,k-1]}b_{m_0+j}$，$T_i=\sum\limits_{j\in[-k,k+i-1]}b_{m_0+j}-\sum\limits_{j\in[0,i-1]}a_{m_0+j}$（$i>0$），$T_i=\sum\limits_{j\in[-1,i]}a_{m_0+j}+\sum\limits_{j\in[-k,k+i-1]}b_{m_0+j}$（$i<0$且$i>-2k$），$T_{-2k}=\sum\limits_{j\in[-1,-2k]}a_{m_0+j}$，$T_i=\sum\limits_{j\in[-1,i]}a_{m_0+j}-\sum\limits_{j\in[-k-1,i+k]}b_{m_0+j}$（$i<-2k$）. 则对任意$i\in Z$、$j\in Z$，$S_i\leq T_j$，因此存在$d$，对于任意$i\in Z$，均有$S_i\leq d$，$T_i\geq d$，令$f$为$M$到$P$的同构，其中$f(x)$: $\bigcup\limits_{i\in[m_0-k,\rightarrow[}P_i$的第$d+1$个元素. 则$f$满足要求.

注：

习题187的结论可加强为$f(M_n)\subset\bigcup\limits_{i\in[n-k,n+k]}P_i$，$f^{-1}(P_n)\subset\bigcup\limits_{i\in[n-k,n+k]}M_i$.

同时，习题187涉及尚未介绍的“整数”知识.

习题 188.

a、b为基数，$a\geq 2$、$b\geq 1$，其中至少有一个是无穷基数. E为集合，$F\subset\mathcal{P}(E)$，$Card(F)>a^b$，并且对任意$X\in F$，均有$Card(X)\leq b$. 求证：存在$G\subset F$，$Card(G)>a^b$，并且G的任何两个元素都有相同的交集.

证明：

令c为大于a^b的最小基数，$G\subset F$且$Card(G)=c$，$M=\bigcup\limits_{X\in G}X$. 假设$M\leq a^b$，若$b$为有限基数，根据补充定理337（7），$Card(G)\leq a^b$，若$b$为无穷基数，根据补充定理337（8），$Card(G)\leq a^b$，矛盾，因此$Card(M)\geq c$，同时，$Card(M)\leq\sum\limits_{X\in G}Card(X)$，故$Card(M)=c$.

令M按最小良序排序，在b上的最小良序的偏序类为r. 对任意$X\in G$，令其偏序类为t_X，f_X为$[0,t_X[$到X的同构，对任意序数$i\in[0,r[$，$y_i=\bigcup\limits_{X\in\{Y|Y\in G与i<t_Y\}}\{f_X(i)\}$，由于$\bigcup\limits_{i\in[0,r[}y_i=M$，故存在序数$i\in[0,r[$，使$Card(y_i)=c$，设满足条件的最小序数为$j$，故

$Card(\bigcup\limits_{i\in[0,j[}y_i)<c$.

进而，存在$N \subset G$，使$Card(N) = c$且对任意$Y \in N$，$f_Y(j)$各不相同．令$N_0 \subset N$，使$Card(N_0) = c$且对任意$Y \in N_0$，$f_Y(0)$全部相等，进而，递归定义N_i（$i < j$），令$N_i \subset \bigcap_{k \in [0,i[} N_k$，且对任意$Y \in N_0$，$f_Y(i)$全部相等．

令$Q = \bigcup_{i \in [0,j[} f_Y(i)$，$R = \bigcap_{i \in [0,j[} N_i$，$s$为在$c$上的最小良序的偏序类．令$X_0 \in R$且$f_{X_0}(j)$是所有$f_Y(j)$（$Y \in R$）的最小元，进而，递归定义$X_i$（$i < s$），令$X_i$为所有$f_Y(j)$（$Y \in R$且$Y - Q \subset M - \bigcup_{j \in [0,i[} X_j$)的最小元．因此，对任意$i \in [0,s[$、$j \in [0,s[$且$i \neq j$，均有$X_i \cap X_j = Q$，得证．

3.7 射影极限和归纳极限（Limites projectives et limites inductives）

定义 192. 集合射影系统（*système projectif d'ensembles*），集族的射影极限（*limite projective de famille d'ensembles*），集族的射影极限到集合的规范映射（*application canonique de la limite projective da famille d'ensembles dans un ensemble*）

I为预序集，$(E_a)_{a \in I}$为集族，$(f_{ab})_{a \in I 与 b \in I 与 a \leq b}$为函数族，其中$f_{ab}$为$E_b$到$E_a$的映射，并且满足下列条件：

第一，如果$a \leq b$，$b \leq c$，则$f_{ab} \circ f_{bc} = f_{ac}$；

第二，$f_{aa} = Id_{E_a}$，

则$((E_a)_{a \in I}, (f_{ab})_{a \in I 与 b \in I 与 a \leq b})$称为关于$I$的集合射影系统，在没有歧义的情况下可以简记为$((E_a), (f_{ab}))$或$(E_a, f_{ab})$．

令$G = \prod_{a \in I} E_a$，$E = \{x | x \in G 与 (\forall a)(\forall b)(a \in I 与 b \in I 与 a \leq b \Rightarrow pr_a x = f_{ab}(pr_b x))\}$，则称$E$为集族$(E_a)_{a \in I}$对于函数$(f_{ab})_{a \in I 与 b \in I 与 a \leq b}$的射影极限，记作$\lim\limits_{\leftarrow a}(E_a, f_{ab})$，在没有歧义的情况下可以简记为$\lim\limits_{\leftarrow}(E_a, f_{ab})$或$\lim\limits_{\leftarrow} E_a$．$pr_a$在$E$上的限制称为$E$到$E_a$的规范映射．

补充定理 411.

$((E_a)_{a \in I}, (f_{ab})_{a \in I 与 b \in I 与 a \leq b})$为关于预序集$I$的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow}(E_a, f_{ab})$，对任意$a \in I$，令$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，则当$a \in I$、$b \in I$、$a \leq b$时，$f_a = f_{ab} \circ f_b$．

证明：根据定义可证．

补充定理 412.

I为按$x = y$与$x \in I$排序的预序集，$(E_a)_{a \in I}$为集族，$(f_{aa})_{a \in I}$为函数族，且对任意$a \in I$，$f_{aa} = Id_{E_a}$．则$\lim\limits_{\leftarrow} E_a = \prod_{a \in I} E_a$．

证明：由于$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow a = b$．令$G = \prod_{a \in I} E_a$，因此，对任意$x \in G$，$pr_a x = f_{aa}(pr_a x)$为真，得证．

补充定理 413.

关于$\varnothing$的集合射影系统的射影极限为$\{\varnothing\}$.

证明：根据定义可证.

补充定理 414.

(Ea, f_{ab})为关于I的集合射影系统，其中I为右方有向集，$\varprojlim E_a = E$，对任意$a \in I$，令f_a为E到E_a的规范映射，如果对任意$a \in I$、$b \in I$，f_{ab}均为单射，则对任意$a \in I$，f_a为单射.

证明：

设$x \in E$、$y \in E$，且$f_a(x) = f_a(y)$，对任意$b \in I$，存在$c \in I$使$a \leq c$、$b \leq c$，由于f_{ac}为单射，故$f_c(x) = f_c(y)$，故$f_b(x) = f_b(y)$．即对任意$b \in I$，$pr_b x = pr_b y$，因此$x = y$，得证.

补充定理 415. 限制指标集可以得到集合射影系统

I为预序集，$((E_a)_{a \in I}, (f_{ab})_{a \in I与b \in I与a \leq b})$为关于$I$的集合射影系统，$(E_a)_{a \in I}$对于$(f_{ab})_{a \in I与b \in I与a \leq b}$的射影极限为$E$，$J$为$I$的预序子集，则$((E_a)_{a \in J}, (f_{ab})_{a \in J与b \in J与a \leq b})$是关于$J$的集合射影系统，并且，令$E'$为$(E_a)a \in J$对于$(f_{ab})_{a \in J与b \in J与a \leq b}$的射影极限，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，则对任意$x \in E$，$(f_a(x))_{a \in J} \in E'$.

证明：根据定义可证.

定义 193. 通过限制得到的集合射影系统（*système projectif d'ensembles obtenu par restriction*），集族的射影极限的之间的规范映射（*application canonique entre limites projectives de familles d'ensembles*）

I为预序集，$((E_a)_{a \in I}, (f_{ab})_{a \in I与b \in I与a \leq b})$为关于$I$的集合射影系统，$J$为$I$的预序子集，则$((E_a)_{a \in J}, (f_{ab})_{a \in J与b \in J与a \leq b})$称为通过将指标集限制在$J$上得到的集合射影系统.

令$(E_a)_{a \in I}$对于$(f_{ab})_{a \in I与b \in I与a \leq b}$的射影极限为$E$，为$(E_a)a \in J$对于$(f_{ab})_{a \in J与b \in J与a \leq b}$的射影极限为$E'$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，则函数$x \mapsto (f_a(x))_{a \in J}$称为$E$到$E'$的规范映射.

补充定理 416.

I为预序集，J为I的预序子集，J'为J的预序子集，$(E_a)_{a \in I}$对于$(f_{ab})_{a \in I与b \in I与a \leq b}$的射影极限为$E$，$(E_a)_{a \in J}$对于$(f_{ab})_{a \in J与b \in J与a \leq b}$的射影极限$E'$，$(E_a)_{a \in J'}$对于$(f_{ab})_{a \in J'与b \in J'与a \leq b}$的射影极限为$E''$，$E$到$E'$的规范映射为$g$，$E'$到$E''$的规范映射为$g'$，$E$到$E''$的规范映射为$g''$，则$g'' = g' \circ g$.

证明：根据定义可证.

定理 172. 集合到集族的映射族的映射族的射影极限唯一存在

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \varprojlim E_a$，对任意$a \in I$，E到E_a的规范映射为f_a．对任意$a \in I$，令u_a为F到E_a的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ab} \circ u_b = u_a)$．则存在唯一的$F$到$E$的映射$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = f_a \circ u)$，此时，该映射$u$满足$(\forall y)(y \in F \Rightarrow u(y) = (u_a(y))a \in I)$，并且，$(\exists y)(\exists z)(\exists a)(y \in F$与$z \in F$与$a \in I$与$u_a(y) \neq u_a(z)) \Leftrightarrow (u$为单射$)$．

证明：

$u_a = f_a \circ u$，即对任意$y \in F$，$pr_a(u(y)) = u_a(y)$，因此，当且仅当$u(y) = (u_a(y))_{a \in I}$时，$u_a = f_a \circ u$；同时，当$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$时，$u_a(y) = f_{ab}(u_b(y))$，因此，$pr_a(u(y)) = f_{ab}(pr_b(u(y)))$，故$u(y) \in E$，故$u$为$F$到$E$的映射．根据定义可证$(\exists y)(\exists z)(\exists a)(y \in F$与$z \in F$与$a \in I$与$u_a(y) \neq u_a(z)) \Leftrightarrow (u$为单射$)$．

定义 194. 集合到集族的映射射影系统（*système projectif d'applications d'un ensemble dans la famille d'ensembles*），集合到集族的映射族的射影极限（*limite projective de famille d'applications d'un ensemble dans la famille d'ensembles*）

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \varprojlim E_a$，对任意$a \in I$，E到E_a的规范映射为f_a．对任意$a \in I$，令u_a为F到E_a的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ab} \circ u_b = u_a)$．则称映射族$(u_a)_{a \in I}$为$F$到$(E_a, f_{ab})$的映射射影系统．如果$F$到$E$的映射$u$使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = f_a \circ u)$，则称$u$为映射族$(u_a)_{a \in I}$的射影极限，记作$\varprojlim u_a$．

补充定理 417.

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \varprojlim E_a$，对任意$a \in I$，E到E_a的规范映射为f_a，则$(f_a)_{a \in I}$为E到$({}_E a, f_{ab})$的映射射影系统，且$\varprojlim f_a = Id_E$．

证明：根据补充定理411可证．

定理 173. 集族之间的映射族的映射族的射影极限唯一存在

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(F_a, g_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \varprojlim E_a$，$F = \varprojlim F_a$，对任意$a \in I$，E到E_a的规范映射为f_a，F到F_a的规范映射为g_a．对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F_a的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_a \circ f_{ab} = g_{ab} \circ u_b)$，则存在唯一的$E$到$F$的映射$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow ua \circ f_a = g_a \circ u)$，此时，该映射满足$u(y) = (u_a(pr_a(y)))_{a \in I}$．

证明：令$v_a = u_a \circ f_a$，则$v_a = u_a \circ f_{ab} \circ f_b$，等于$g_{ab} \circ u_b \circ f_b$，等于$g_{ab} \circ v_b$．根据定理172，存在唯一的$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow v_a = g_a \circ u)$．

定义 195. 集族之间的映射射影系统（*système projectif d'applications entre familles d'ensembles*），集族之间的映射族的射影极限（*limite projective de famille d'applications entre familles d'ensembles*）

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(F_a, g_{ab})均为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，$F = \lim\limits_{\leftarrow} F_a$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，$F$到$F_a$的规范映射为$g_a$．对任意$a \in I$，令$u_a$为$E_a$到$F_a$的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_a \circ f_{ab} = g_{ab} \circ u_b)$，则称映射族$(u_a)_{a\in I}$为$(E_a, f_{ab})$到$(F_a, g_{ab})$的映射射影系统．如果$E$到$F$的映射$u$使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a \circ f_a = g_a \circ u)$，则称$u$为映射族族$(u_a)_{a\in I}$的射影极限，记作$\lim\limits_{\leftarrow a} u_a$，在没有歧义的情况下也可以简记为$\lim\limits_{\leftarrow} u_a$．

定理 174.

I为预序集，(Ea, f_{ab})、(Fa, g_{ab})、(G_a, h_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，$F = \lim\limits_{\leftarrow} F_a$，$G = \lim\limits_{\leftarrow} G_a$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，$F$到$F_a$的规范映射为$g_a$，$G$到$G_a$的规范映射为$h_a$．对任意$a \in I$，令$u_a$为$E_a$到$F_a$的映射，$v_a$为$F_a$到$G_a$的映射，则映射族$(v_a \circ u_a)_{a\in I}$为$(E_a, f_{ab})$到$(G_a, h_{ab})$的映射射影系统，并且$\lim\limits_{\leftarrow}(v_a \circ u_a) = \lim\limits_{\leftarrow} v_a \circ \lim\limits_{\leftarrow} u_a$．

证明：令$w_a = v_a \circ u_a$．则$w_a \circ f_{ab} = v_a \circ u_a \circ f_{ab}$，等于$v_a \circ g_{ab} \circ u_b$，等于$h_{ab} \circ v_b \circ u_b$，等于$h_{ab} \circ w_b$，因此映射族$(v_a \circ u_a)_{a\in I}$为$(E_a, f_{ab})$到$(G_a, h_{ab})$的映射射影系统．

同时$h_a \circ v \circ u = v_a \circ g_a \circ u$，等于$v_a \circ u_a \circ f_a$，得证．

补充定理 418. 子集上的系统为射影系统

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，对任意$a \in I$，$M_a \subset E_a$，如果$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ab}(M_b) \subset M_a)$，当$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$时，令$g_{ab}$为$f_{ab}$在$M_b$上的限制，则$(M_a, g_{ab})$也是关于$I$的集合射影系统，并且$\lim\limits_{\leftarrow} M_a = E \cap \prod\limits_{a\in I} M_a$．

证明：根据定义可证．

定义 196. 子集射影系统（*système projectif de parties*）

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，对任意$a \in I$，$M_a \subset E_a$，如果$(\forall a)(\forall b)$ $(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ab}(M_b) \subset M_a)$，则称$(M_a, g_{ab})$为$(E_a)_{a\in I}$的子集射影系统．

定理 175.

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(E'_a, f'_{ab})均为关于I的集合射影系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，则映射族$(u_a)_{a\in I}$为映射射影系统．令$u = \lim\limits_{\leftarrow} u_a$，$E' = \lim\limits_{\leftarrow} E'_a$，则对任意$(x'_a)_{a\in I} \in E'$，$(u^{-1}(x'_a))_{a\in I}$是$(E_a)_{a\in I}$的子集射影系统，并且$\lim\limits_{\leftarrow}({u_a}^{-1}(x'_a)) = u^{-1}(x')$．

证明：设$x_b \in u^{-1}(x'_b)$，$u_a(f_{ab}(x_b)) = f'_{ab}(u_b(x_b))$，等于$f'_{ab}(x'_b)$，等于$x'_a$，因此，$({u_a}^{-1}(x'_a))_{a\in I}$是$(E_a)_{a\in I}$的子集射影系统．设$x \in E$且$u(x) = x'$，根据定理172，$u$是唯一的，且$u(x) = (u_a(x))_{a\in I}$，对任意$a \in I$，$u_a(x) = x'_a$．因此，$x \in E \Leftrightarrow u(x) \in E'$，因此，$x \in u^{-1}(x') \Rightarrow x' \in E'$，并且，$x \in u^{-1}(x') \Rightarrow x \in \prod\limits_{a\in I} u^{-1}(x'_a)$，根据补充定理418，得证．

定理 176.

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(E'_a, f'_{ab})均为关于I的集合射影系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，则映射族$(u_a)_{a\in I}$为映射射影系统．令$u = \lim\limits_{\leftarrow} u_a$，如果对任意$a \in I$，$u_a$为单射（或双射），则$u$是单射（或双射）．

证明：根据定理175可证．

补充定理 419.

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(E'_a, f'_{ab})均均为关于I的集合射影系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，则映射族$(u_a)_{a\in I}$为映射射影系统．令$u = \lim\limits_{\leftarrow} u_a$，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，$E' = \lim\limits_{\leftarrow} E'_a$，如果对任意$a \in I$，$u_a$为满射，则$(u_a(E_a))_{a\in I}$是$(E'a)_{a\in I}$的子集射影系统，$u(E) \subset \lim\limits_{\leftarrow} u_a(E_a)$．

证明：设$x'_b \in u_b(E_b)$，令$x'_b = u_b(x_b)$，$f'_{ab}(x'_b) = f'_{ab}(u_b(x_b))$，等于$u_a(f_{ab}(u_b))$，根据定义，$(u_a(E_a))_{a\in I}$是$(E'_a)_{a\in I}$的子集射影系统．同时，设$x \in E$且$u(x) = x'$，对任意$a \in I$，$u_a(x) = x'_a$，得证．

定理 177.

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，$F$为$E$的共尾子集，并且是右方有向集，令$(E_a)_{a\in J}$对于$(f_{ab})_{a\in J与b\in J与a\le b}$的射影极限为$E'$，则$E$到$E'$的规范映射$g$为双射．

证明：对$a \in J$，令f'_a为E'到E_a的规范映射，根据定理172，g是唯一满足$a \in J \Rightarrow f_a = f'_a \circ g$的映射．如果$x \in E$、$y \in E$且$x \neq y$，则存在$a \in I$使$f_a(x) \neq f_a(y)$，由于$F$为$E$的共尾子集，因此存在$b \in F$，使$a \le b$，因此$f_b(x) \neq f_b(y)$，故$f_a$为单射，因此$g$为单射．对任意$x' \in E'$，对任意$a \in I$，存在$b \in J$且$a \le b$，假设$c \in J$且$a \le b$，若$b \le c$，则$f_{ac}(x'_c) = f_{ab}(f_{bc}(x'_c))$，等于$f_{ab}(x'_b)$，因此，$f_{ab}(x'_b)$和$b$无关，令其为$x_a$．令$x = (x_a)_{a\in J}$，对任意$a \in I$，如果$a \in I$，$b \in I$且$a \le b$，则存在$b \le c$，且$c \in J$，因此$f_{ab}(x_b) = f_{ab}(f_{bc}(x'_c))$，等于$f_{ac}(x'_c)$，等于$x_a$．因此$x \in E$．当$a \in J$时，由于$x'_a = f_{aa}(x'_a)$，因此$x'_a = x_a$，因此$f_a(x) = x'_a$，故$g(x) = x'$．因此$g$为满射．

定义 197. 集族的双重射影极限（*double limite projective de famille d'ensembles*）

I、L为预序集，$I \times L$的预序关系为$(x \in I \times L与y \in I \times L与pr_1x \le pr_1y与pr_2x \le pr_2y)$，$((E_a^x)_{(a,x)\in I\times L}, (f_{ab}^{xy})_{(a,x)\in I\times L与(b,y)\in I\times L与(a,x)\le(b,y)})$为关于$I \times L$的集合射影系统，则其射影极限称为双重射影极限，记作$\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x$，在没有歧义的情况下也可以简记为$\lim\limits_{\leftarrow} E_a^x$．

补充定理 420.

I、L均为预序集，$I\times L$的预序关系为$(x \in I\times L与y \in I\times L与pr_1x \le pr_1y与pr_2x \le pr_2y)$，$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$为关于$I \times L$的集合射影系统，则$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$为关于$I$的集合射影系统，也是关于$L$的集合射影系统．并且，$(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x, g^{xy})$、$(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x, h_{ab})$分别是关于$L$的集合射影系统和关于$I$的集合射影系统，其中$g^{xy} = \lim\limits_{\leftarrow a} f_{aa}^{xy}$，$h_{ab} = \lim\limits_{\leftarrow x} f_{ab}^{xx}$．

证明：根据定义，可证(E_a^x, f_{ab}^{xy})为关于I的集合射影系统，也是关于L的集合射影系统．根据定理174，$g^{xz} = g^{xy} \circ g^{yz}$，$h_{ac} = h_{ab} \circ h_{bc}$，因此$(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x, g^{xy})$、$(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x, h_{ab})$分别是关于$L$的集合射影系统和关于$I$的集合射影系统．

定理 178.

I、L均为预序集，$I \times L$的预序关系为($x \in I \times L$与$y \in I \times L$与$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$)，(E_a^x, f_{ab}^{xy})为关于$I \times L$的集合射影系统，令$\prod\limits_{(a,x) \in I \times L} E_a^x$到$\prod\limits_{x \in L}(\prod\limits_{a \in I} E_a^x)$的规范映射为$f$，$\prod\limits_{(a,x) \in I \times L} E_a^x$到$\prod\limits_{a \in I}(\prod\limits_{x \in L} E_a^x)$的规范映射为$g$，则$f$在$(\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x)$上的限制为$(\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x)$到$\lim\limits_{\leftarrow x}(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$的双射；$g$在$(\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x)$上的限制为$(\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x)$到$\lim\limits_{\leftarrow a}(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x)$的双射．

证明：令$g^{xy} = \lim\limits_{\leftarrow a} f_{aa}^{xy}$，$F^x = \lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x$，$F = \lim\limits_{\leftarrow x} F^x$，$G = \lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x$．根据定理46，$f$为$h \mapsto (pr_{I \times \{x\}} h)_{x \in L}$．

对任意$u \in F$，如果$x \leq y$，则$pr_x u = g^{xy}(pr_y u)$；如果$a \leq b$，则$pr_a(pr_x u) = f_{ab}^{xy}(pr_b(pr_y u))$．由于$h \mapsto (pr_{I \times \{x\}} h)_{x \in L}$为双射，故令$u = (pr_{I \times \{x\}} u')_{x \in L}$，则$pr_{(a,x)} u' = f_{ab}^{xy}(pr_{(b,y)} u')$．故$u' \in G$．

反过来，如果$u' \in G$，且$a \leq b$、$x \leq y$，则$pr_{(a,x)} u' = f_{ab}^{xy}(pr_{(b,y)} u')$，令$u = (pr_{I \times \{x\}} u')_{x \in L}$，因此$pr_a(pr_x u) = f_{ab}^{xy}(pr_b(pr_y u))$，因此，对任意$a \in I$，$pr_a(pr_x u) = pr_a(g^{xy}(pr_y u))$，故$pr_x u = g^{xy}(pr_y u)$，因此$u \in F$．故$f$的限制为双射．

同理可证g的限制为双射．

补充定理 421.

I、L均为预序集，$I \times L$的预序关系为($x \in I \times L$与$y \in I \times L$与$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$)，(E_a^x, f_{ab}^{xy})、$({E'}_{ax}, {f'}_{ab}^{xy})$均为关于$I \times L$的集合射影系统，对于$(a, b) \in I \times L$，$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x) \in I \times L}$为$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统，则$(u_a^x)_{a \in I}$、$(u_a^x)_{x \in L}$均为$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统，$(\lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x)_{x \in L}$为$(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$到$(\lim\limits_{\leftarrow a} {E'}_a^x)$的映射射影系统，$(\lim\limits_{\leftarrow x} u_a^x)_{a \in I}$为$(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x)$到$(\lim\limits_{\leftarrow x} {E'}_a^x)$的映射射影系统．

证明：

根据定义可证$(u_a^x)_{a \in I}$、$(u_a^x)_{x \in L}$均为(E_a^x, f_{ab}^{xy})到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统．

令$u^x = \lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x$，$g^{xy} = \lim\limits_{\leftarrow a} f_{aa}^{xy}$，${g'}^{xy} = \lim\limits_{\leftarrow a} {f'}_{aa}^{xy}$，则当$x \leq y$时，$u_a^x \circ f_{aa}^{xy} = {f'}_{aa}^{xy} \circ u_a^y$，根据定理174，$u^x \circ g^{xy} = {g'}^{xy} \circ u^y$，因此$(\lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x)_{x \in L}$为$(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$到$(\lim\limits_{\leftarrow a} {E'}_a^x)$的映射射影系统，$(\lim\limits_{\leftarrow x} u_a^x)_{a \in I}$为$(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x)$到$(\lim\limits_{\leftarrow x} {E'}_a^x)$的映射射影系统．

定义 198. 映射族的双重射影极限（*double limite projective de famille d'applications*）

I、L均为预序集，$I \times L$的预序关系为($x \in I \times L$与$y \in I \times L$与$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$)，(E_a^x, f_{ab}^{xy})、$({E'}_{ax}, {f'}_{ab}^{xy})$均为关于$I \times L$的集合射影系统，对于$(a, b) \in I \times L$，$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的

映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统，则其射影极限称双重射影极限，记作$\lim\limits_{\leftarrow a,x} u_a^x$.

定理 179.

I、L为预序集，$I\times L$的预序关系为$(x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y)$，(E_a^x, f_{ab}^{xy})、$({E'}_{ax}, {f'}_{ab}^{xy})$均为关于$I\times L$的集合射影系统，对于$(a,b)\in I\times L$，$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统，$u_a=\lim\limits_{\leftarrow x} u_a^x$，$u^x=\lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x$，$u=\lim\limits_{\leftarrow a,x} u_a^x$. 令$\prod\limits_{(a,x)\in I\times L} E_a^x$到$\prod\limits_{x\in L}(\prod\limits_{a\in I} E_a^x)$的规范映射为$f$，$\prod\limits_{(a,x)\in I\times L} {E'}_a^x$到$\prod\limits_{x\in L}(\prod\limits_{a\in I} {E'}_a^x)$的规范映射为$f'$，$\prod\limits_{(a,x)\in I\times L} E_a^x$到$\prod\limits_{a\in I}(\prod\limits_{x\in L} E_a^x)$的规范映射为$g$，$\prod\limits_{(a,x)\in I\times L} {E'}_a^x$到$\prod\limits_{a\in I}(\prod\limits_{x\in L} {E'}_a^x)$的规范映射为$g'$. 则$\lim\limits_{\leftarrow a,x} u_a^x = {f'}^{-1}\circ \lim\limits_{\leftarrow x}(\lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x)\circ f$，$\lim\limits_{\leftarrow a,x} u_a^x = {g'}^{-1}\circ \lim\limits_{\leftarrow a}(\lim\limits_{\leftarrow x} u_a^x)\circ g$.

证明：根据定理178可证.

定理 180.

I为预序集，$(E_a^x, f_{ab}^x)_{x\in L}$为关于$I$的集合射影系统族，${f'}_{ab}$是映射族$(f_{ab}^x)_{x\in L}$在乘积上的规范扩展，则$(\prod\limits_{x\in L} E_a^x, {f'}_{ab})$是关于$I$的集合射影系统，且${pr_{\{a\}\times L}}^{-1}(\lim\limits_{\leftarrow a}\prod\limits_{x\in L} E_a^x) =$
${pr_{I\times\{x\}}}^{-1}(\prod\limits_{x\in L}\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$.

证明：令L为按$(x=y$与$x\in L)$排序的预序集，令$g_{ab}^{xy}=f_{ab}^x$，根据补充定理420、补充定理412，$(\prod\limits_{x\in L} E_a^x, {f'}_{ab})$是关于$I$的集合射影系统，并且，根据定理178、补充定理412可证
${pr_{\{a\}\times L}}^{-1}(\lim\limits_{\leftarrow a}\prod\limits_{x\in L} E_a^x) = {pr_{I\times\{x\}}}^{-1}(\prod\limits_{x\in L}\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$.

定理 181.

I为预序集，且为右方有向集，并有一个可数共尾子集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，对任意$a\in I$与$b\in I$与$a\le b$，f_{ab}为满射，令$E=\lim\limits_{\leftarrow} E_a$. 对任意$a\in I$，令$f_a$为$E$到$E_a$的规范映射，则$f_a$为满射. 进而，对任意$a\in I$，$E_a\ne\varnothing$，则$E\ne\varnothing$.

证明：令(a_n)为I的元素序列，并且各项构成I的可数共尾子集，则递归构建a的元素序列(b_n)：令$b_0=a_0$，$b_n=sup(a_n, b_{n-1})$，则(b_n)为单增序列，并且各项构成I的共尾子集. 对任意$x_{b_0}\in E_{b_0}$，由数学归纳法可知存在$x_{b_n}\in E_{b_n}$，使对任意$m<n$，$x_{b_m}=f_{b_m b_n}(x_{b_n})$，对任意$a<b_n$，令$x_a=f_{ab_n}(x_{b_n})$，则$x_a\in E$. 故$f_{b_0}$为满射. 同理可证，对任意$n\in N$，$f_{b_n}$为满射，进而，当$a\le b_n$时，$f_a$为满射. 因此，对任意$a\in I$，$E_a\ne\varnothing$，则$E\ne\varnothing$.

定理 182.

I为预序集，且为右方有向集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，对任意$a\in I$，令F_a的元素都是E_a的子集，并且：

第一，F_a的任何元素的交集也是F_a的元素；

第二，如果$G \subset F_a$，并且G中任何有限个元素的交集都不是空集（或等价公式：F_a为按包含关系排序的偏序集，G为左方有向集，且其元素都不是空集），

则$\bigcap\limits_{M \in F} G$不是空集．

同时，对任意a、b，如果满足$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$，均有：

第一，对任意$x_a \in E_a$，${f_{ab}}^{-1}(x_a) \in F_b$；

第二，对任意$M_b \in F_b$，$f_{ab}(M_b) \in F_a$．令$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，并且对任意$a \in I$，令$f_a$为$E$到$E_a$的规范映射，

则：

第一，对任意$a \in I$，$f_a(E) = \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b)$；

第二，对任意$a \in I$，$E_a \neq \varnothing$，则$E \neq \varnothing$．

证明：令S为符合下列条件的集族$(A_a)_{a \in I}$的集合：对任意$a \in I$，$A_a \neq \varnothing$，$A_a \in F_a$，并且对任意a、b满足$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$，$f_{ab}(A_b) \subset A_a$．令R为$M \in S$与$N \in S$与$N \subset M$，则E为按R排序的偏序集．令L为S的全序子集，$L_a = \{x|(\exists A)(\exists a)(A \in L与a \in I与(a, x) \in A)\}$．$B_a = \bigcap\limits_{x \in L} a_x$．则$(B_a)_{a \in I} \in S$，故$S$为归纳集．

设S的极大元为A，令${A'}_a = \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(A_b)$．对任意$a \leq b$，$b \leq c$，$f_{ac}(A_c) = f_{ab}(f_{bc}(A_c))$，因此$f_{ac}(A_c) \subset f_{ab}(A_b)$．如果$a \leq b$，$f_{ab}({A'}_b) \subset \bigcap\limits_{c \geq a与c \in I} f_{ac}({A'}_c)$，另一方面，对任意$d \geq b$，存在$c \geq d$且$c \geq b$，使$f_{ac}(A_c) \subset f_{ad}(A_d)$，故$\bigcap\limits_{c \geq a与c \in I} f_{ac}({A'}_c) \subset {A'}_a$，因此$f_{ab}({A'}_b) \subset {A'}_a$．又因为$f_{ab}(A_b) \in F$a，$f_{ab}(A_b) \neq \varnothing$，故$A' \in S$，同时，$A' \subset A$，所以$A = A'$，故对任意$a$、$b$满足$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$，$f_{ab}(A_b) = A_a$．

设$x_a \in A_a$，当$b \geq a$时，令$B_b = A_b \cap {f_{ab}}^{-1}(x_a)$，当$b < a$时，令$B_b = A_b$，如果$b < a$，对任意$c \geq b$，$f_{bc}(B_c) \subset f_{bc}(A_c)$，因此$f_{b_c}(B_c) \subset B_b$；当$b \geq a$时，对任意$c \geq b$，${f_{ac}}^{-1}(x_a) = ({f_{bc}}^{-1}({f_{ab}}^{-1}(x_a)))$，因此$f_{bc}({f_{ac}}^{-1}(x_a)) \subset {f_{ab}}^{-1}(x_a)$，又因为$f_{bc}(A_c) \subset A_b$，故$f_{bc}(B_c) \subset B_b$；同时，由于$f_{ab}(A_b) = A_a$，故$A_b \cap {f_{ab}}^{-1}(x_a) \neq \varnothing$；此外，由于${f_{ab}}^{-1}(x_a) \in F_b$，$A_b \in F_b$，$B_b \in F_b$．综上，$B \in S$，因此$A = B$，故$A_a = \{x_a\}$，且其对一切$a \in I$都成立．

根据补充定理411，$f_a(E) \subset \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b)$．另一方面，设$x_a \in \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b)$，当$b \geq a$时，令$B_b = {f_{ab}}^{-1}(x_a)$，当$b < a$时，令$B_b = E_b$．因此$B_b \neq \varnothing$，并且$b \leq c$时，$f_{bc}(B_c) \subset B_b$，故$B \in S$．根据定理81，$S$有极大元$A$，满足$A \geq B$，设$A_a = \{y_a\}$，令$y = (y_a)$，则$y \in E$．故$f_a(y) = x_a$，因此，$f_a(E) = \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b)$．如果$I = \varnothing$，则$E = \{\varnothing\}$，故$E \neq \varnothing$．如果$I \neq \varnothing$，则当$a \leq b$时，$f_{ab}(E_b) \neq \varnothing$．由于$b \leq c$时，$f_{ab}(E_b) \subset f_{ac}(E_c)$，因此$\bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b) \neq \varnothing$，故$f_a(E) \neq \varnothing$，因此$E \neq \varnothing$．

补充定理 422. 集合归纳系统涉及的公式为等价关系

I为右方有向集，$(E_a)_{a \in I}$为集族，$(f_{ba})_{a \in I与b \in I与a \leq b}$为函数族，其中$f_{ba}$为$E_a$到$E_b$的映射，并且满足下列条件：

第一，如果$a \le b$，$b \le c$，则$f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$.

第二，$f_{aa} = Id_{E_a}$.

令G为集族$(E_a)_{a\in I}$的和，令R为公式$x \in G$与$y \in G$与$(\exists c)(c \in I$与$c \ge pr_2x$与$c \ge pr_2y$与$f_{c\ pr_2x}(pr_1x) = f_{c\ pr_2y}(pr_1y)$，则$R$为在$G$上的等价关系.

证明：显然R具有反身性和对称性.

设$u \in G$、$v \in G$、$w \in G$，令$u = (x, a)$，$v = (y, b)$，$w = (z, c)$，则$x \in E_a$，$y \in E_b$，$z \in E_c$，设$l \ge a$、$l \ge b$，$f_{la}(x) = f_{lb}(y)$，$m \ge b$，$m \ge c$，$f_{mb}(y) = f_{mc}(z)$. 由于I为右方有向集，则存在$n \ge l$、$n \ge m$，故$f_{na}(x) = f_{nc}(z)$. 因此R具有传递性.

定义 199. 集合归纳系统（*système inductif d'ensembles*），集族的归纳极限（*limite inductive de famille d'ensembles*），集合到集族的归纳极限的规范映射（*application canonique de la limite inductif d'un ensemble dans la famille d'ensembles*）

I为右方有向集，$(E_a)_{a\in I}$为集族，$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\le b}$为函数族，其中$f_{ba}$为$E_a$到$E_b$的映射，并且满足下列条件：

第一，如果$a \le b$，$b \le c$，则$f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$.

第二，$f_{aa} = Id_{E_a}$，则$(E_a)_{a\in I}$，$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\le b)}$称为关于$I$的集合归纳系统，在没有歧义的情况下可以简记为$((E_a), (f_{ba}))$或$(E_a, f_{ba})$.

令G为集族$(E_a)_{a\in I}$的和，令R为等价关系$x \in G$与$y \in G$与$(\exists c)(c \in I$与$c \ge pr_2x$与$c \ge pr_2y$与$f_{c\ pr_2x}(pr_1x) = f_{c\ pr_2y}(pr_1y)$，则称商集$G/R$为集族$(E_a)_{a\in I}$对于函数族$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\le b}$的归纳极限，记作$\lim\limits_{\to a}(E_a, f_{ba})$，在没有歧义的情况下可以简记为$\lim\limits_{\to}(E_a, f_{ba})$或$\lim\limits_{\to} E_a$. 令$f$为$G$到$E/R$的规范映射，$g_a$为映射$x \mapsto (x, a)(x \in E_a)$，则映射$f \circ g_a$称为$E_a$到$\lim\limits_{\to} E_a$的规范映射.

补充定理 423.

I为右方有向集，$((E_a)_{a\in I}, (f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\le b)}$为关于$I$的集合归纳系统，$E = \lim\limits_{\to}(E_a, f_{ba})$，对任意$a \in I$，令$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，则当$a \in I$、$b \in I$、$a \le b$时，$f_a = f_b \circ f_{ba}$.

证明：对任意$x \in E_a$，$f_{bb}(f_{ba}(x)) = f_{ba}(x)$. 由于$f_{ba}(x) \in E_b$，故$f_b(f_{ba}(x)) = f_a(x)$，得证.

补充定理 424.

I为右方有向集，$((E_a)_{a\in I}, (f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\le b)}$为关于$I$的集合归纳系统，$E = \lim\limits_{\to}(E_a, f_{ba})$，对任意$a \in I$，令$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，则：

（*1*）对任意$x \in E$，存在$a \in I$、$z \in E_a$，使$f_a(z) = x$.

（*2*）$E = \bigcup\limits_{a\in I} f_a\langle E_a\rangle$.

证明：

（1）根据补充证明规则35，G到E的规范映射f为满射，因此存在$y \in G$，使$f(y) = x$．令$y = (z, a)$，则$a \in I$、$z \in E_a$，令g_a为映射$x \mapsto (x, a)(x \in E_a)$，则$g_a(z) = y$，故$f(g_a(z)) = x$，得证．

（2）对任意$x \in E_a$，$f_a(x) \in E$；反过来，对任意$x \in E$，根据补充定理424（1），存在$a \in I$、$z \in E_a$，使$f_a(z) = x$．得证．

补充定理 425.

$((E_a)_{a\in I}, (f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合归纳系统，$E = \varinjlim(E_a, f_{ba})$，对任意$a \in I$，令$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，则对任意$a \in I$、$x \in E$、$y \in E$，如果$f_a(x) = f_a(y)$，则$(\exists b)(b \in I与b \geq a与f_{ba}(x) = f_{ba}(y))$．

证明：令g_a为映射$x \mapsto (x, a)(x \in E_a)$，则$f(g_a(x)) = f(g_a(y))$，根据证明规则55，$(\exists b)(b \in I与b \geq a与f_{ba}(x) = f_{ba}(y))$．

补充定理 426.

关于$\varnothing$的集合归纳系统，其归纳极限为$\varnothing$．

证明：根据补充证明规则34（1）可证．

定理 183.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，则：

（1）令n为自然数，$(x^{(i)})_{i\in[1,n]}$为E的有限元素族，则存在$a \in I$，使$(x_a^{(i)})_{i\in[1,n]}$为E_a的有限元素族，并且，当$i \in [1, n]$时，$x^{(i)} = f_a(x_a^{(i)})$．

（2）令n为自然数，$(y^{(i)})_{i\in[1,n]}$为E的有限元素族，如果对任意$i \in [1, n]$、$j \in [1, n]$，均有$f_a(y_a^{(i)}) = fa(y_a^{(j)})$，则存在$b \geq a$，使得对任意$i \in [1, n]$、$j \in [1, n]$，均有$f_{ba}(y(i)a) = f_{ba}(y(j)a)$．

证明：

（1）根据补充定理424（1），对任意$i \in [1, n]$，存在$b_i \in I$及$z \in E_{b_i}$，使$x^{(i)} = f_{b_i}(z_{b_i})$，取$a \geq b_i$（对任意$i \in [1, n]$），则$x_a^{(i)} = f_{ab_i}(z_{b_i})$，根据补充定理423可证．

（2）根据补充定理425，对任意$i \in [1, n]$、$j \in [1, n]$，存在$c_{ij} \geq a$，使$f_{c_{ij}a}(y_a^{(i)}) = f_{c_{ij}a}(y_a^{(j)})$，进而，存在$b$，使对任意$i \in [1, n]$、$j \in [1, n]$均有$b \geq c_{ij}$，由于$f_{ba} = f_{bc_{ij}} \circ f_{c_{ij}a}$，因此$f_{ba}(y_a^{(i)}) = f_{ba}(y_a^{(j)})$．

定理 184. 集族到集合的映射族的归纳极限的性质

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I与b \in I与a \leq b \Rightarrow u_b \circ f_{ba} = u_a)$，则：

（1）存在唯一的E到F的映射u，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = u \circ f_a)$；

（2）当且仅当$F = \bigcup_{a \in I} u_a(E_a)$时，$u$为满射；

（3）当且仅当$(\forall a)(a \in I$与$x \in E_a$与$y \in E_a$与$u_a(x) = u_a(y) \Rightarrow (\exists b)(b \geq a$与$f_{ba}(x) = f_{ba}(y)))$时，$u$为单射.

证明：

（1）令G到E的规范映射为f，g_a为映射$x \mapsto (x, a)(x \in E_a)$，$F_a = g_a\langle E_a \rangle$，则 $v_a = u_a \circ {g_a}^{-1}$，故$v_a$为$F_a$到$F$的映射，令$v$为$G$到$F$的映射，且对任意$a \in I$，$v$在$F_a$上与$v_a$重合．令$R$为等价关系$x \in G$与$y \in G$与$(\exists c)(c \in I$与$c \geq pr_2 x$与$c \geq pr_2 y$与$f_{c\ pr_2 x}(pr_1 x) = f_{c\ pr_2 y}(pr_1 y)$，设$x \in F_a$，$y \in F_b$，如果$R$为真，则存在$c$，使$f_{ca}(pr_1 x) = f_{cb}(pr_1 y)$，由于$v_a = u_a \circ {g_a}^{-1}$，故$v_a(x) = u_a(pr_1 x)$，因此$v(x) = u_c(f_{ca}(pr_1 x))$，同理$v(y) = u_c(f_{cb}(pr_1 y))$，因此$R \Rightarrow v(x) = v(y)$，因此$v$是同等价关系相容的映射，根据证明规则57，存在唯一的映射u，使$u \circ f = v$．由于$u_a = v \circ g_a$，$f_a = f \circ g_a$，因此$u_a = u \circ f_a$，得证.

（2）当$F = \bigcup_{a \in I} u_a(E_a)$时，对任意$x \in F$，存在$a \in I$、$z \in E_a$，使$x = u_a(z)$，因此$x = u(f_a(z))$，故$u$为满射．反过来，若$u$为满射，则对任意$x \in F$，存在$y \in E$使$x = u(y)$，根据补充定理424（1），存在$a \in I$、$z \in E_a$，使$y = f_a(z)$，故$x = u_a(z)$，因此$x \in u_a(E_a)$.

另一方面，对任意$x \in u_a(E_a)$，存在$z \in E_a$，使$x = u_a(z)$，因此$x = u(f_a(z))$，故$x \in F$；综上，$F = \bigcup_{a \in I} u_a(E_a)$.

（3）假设$(\forall a)(a \in I$与$x \in E_a$与$y \in E_a$与$u_a(x) = u_a(y) \Rightarrow (\exists b)(b \geq a$与$f_{ba}(x) = f_{ba}(y)))$，如果$u(x) = u(y)$，且$x \in E$、$y \in E$，则存在设$a \in I$、$b \in I$、$m \in E_a$、$n \in E_a$，使$f_a(m) = x$、$f_b(n) = y$，因此$u_a(m) = u_b(n)$，故存在$c \in I$，使$c \geq a$，$c \geq b$，且$u_c(f_{ca}(m)) = u_c(f_{cb}(n))$，因此存在$d \geq c$，使$f_{da}(m) = f_{db}(n)$．根据补充定理423，$x = f_d(f_{da}(m))$，$y = f_d(f_{db}(n))$，因此$x = y$.

反过来，如果u为单射，且$a \in I$与$x \in E_a$与$y \in E_a$与$u_a(x) = u_a(y)$，则$u(f_a(x)) = u(f_a(y))$，则$f_a(x) = f_a(y)$，由于$f_a(x) \in E$，$f_a(y) \in E$，根据补充定理425，$(\exists b)(b \geq a$与$f_{ba}(x) = f_{ba}(y))$，得证.

定义 200. 集族到集合的映射归纳系统（*système inductif d'applications da famille d'ensembles dans un ensemble*），集族到集合的映射族的归纳极限（*limite inductive de famille d'applications da famille d'ensembles dans un ensemble*）

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_b \circ f_{ba} = u_a)$，则称映射族$(u_a)_{a \in I}$为$(E_a, f_{ba})$到$F$的映射归纳系统．如果$E$到$F$的映射$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = u \circ f_a)$，则称$u$为映射族$(u_a)_{a \in I}$的归纳极限，记作$\varinjlim u_a$.

补充定理 427.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，则$(f_a)_{a \in I}$为(E_a, f_{ba})到E的映射归纳系统，且$\varinjlim f_a = Id_E$.

证明：根据补充定理423可证.

定理 185. 集族之间的映射族的归纳极限的存在性和唯一性

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(F_a, g_{ba})均为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，$F = \varinjlim F_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，F_a到F的规范映射为g_a．对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F_a的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_b \circ g_{ba} = f_{ba} \circ u_a)$，则存在唯一的$E$到$F$的映射$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u \circ f_a = g_a \circ u_a)$.

证明：令$v_a = g_a \circ u_a$，则$v_b \circ f_{ba} = g_b \circ u_b \circ f_{ba}$，等于$g_b \circ g_{ba} \circ u_a$，等于$g_a \circ u_a$，等于$v_a$. 根据定理184（1），存在唯一的$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow v_a = u \circ f_a)$.

定义 201. 集族之间的映射归纳系统（*système inductif d'applications entre familles d'ensembles*），集族之间的映射族的归纳极限（*limite inductive de famille d'applications entre familles d'ensembles*）

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(F_a, g_{ba})均为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，$F = \varinjlim F_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，F_a到F的规范映射为g_a．对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F_a的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_b \circ g_{ba} = f_{ba} \circ u_a)$，则称映射族$(u_a)_{a\in I}$为$(E_a, f_{ba})$到$(F_a, g_{ba})$的映射归纳系统．如果$E$到$F$的映射$u$使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u \circ f_a = g_a \circ u_a)$，则称$u$为映射族$(u_a)_{a\in I}$的归纳极限，记作$\varinjlim_{a} u_a$，在没有歧义的情况下也可以简记为$\varinjlim u_a$.

定理 186.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(F_a, g_{ba})、(G_a, h_{ba})均为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，$F = \varinjlim F_a$，$G = \varinjlim G_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，F_a到F的规范映射为g_a，G_a到G的规范映射为h_a．对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F_a的映射，v_a为F_a到G_a的映射，则映射族$(v_a \circ u_a)_{a\in I}$为(E_a, f_{ba})到$(G_a, h_{ba}$的映射归纳系统，并且$\varinjlim(v_a \circ u_a) = \varinjlim(v_a \circ (\varinjlim u_a))$.

证明：令$w_a = v_a \circ u_a$．则$h_{ab} \circ w_a = h_{ab} \circ v_a \circ u_a$，等于$v_b \circ g_{ba} \circ u_a$，等于$w_b \circ f_{ba}$，映射族$(v_a \circ u_a)_{a\in I}$为$(E_a, f_{ba})$到$(G_a, h_{ba}$的映射归纳系统．同时$v \circ u \circ f_a = v \circ g_a \circ u_a$，等于$h_a \circ v_a \circ u_a$，得证.

定理 187.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(E'_a, f'_{ba})均为关于I的集合归纳系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，则映射族$(u_a)_{a\in I}$为映射归纳系统．令$u = \varinjlim u_a$，如果对任意$a \in I$，u_a为单射（或满射），则u是单射（或满射）.

证明：令f_a为E_a到E的规范映射，f'_a为E'_a到E'的规范映射.

如果对任意$a \in I$，u_a为单射，令$x \in E_a$，$y \in E_a$，且$f'_a(u_a(x)) = f'_a(u_a(y))$，根据定理183（2），存在$b \geq a$，使$f'_{ba}(u_a(x)) = f'_{ba}(u_a(y))$，故$u_b(f_{ba}(x)) = u_b(f_{ba}(y))$，因此$f_{ba}(x) = f_{ba}(y)$，根据定理184（3），$u$是单射.

如果对任意$a \in I$，u_a为满射，根据补充定理424（2），$E' = \bigcup_{a \in I} f'_a \langle E'_a \rangle$．因此$E = \bigcup_{a \in I} u \langle f_a \langle E_a \rangle \rangle$，故$E = u \bigcup_{a \in I} f_a \langle E_a \rangle$，因此$E' = u(E)$，故$u$是满射．

补充定理 428. 子集上的系统为归纳系统

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，对任意$a \in I$，$M_a \subset E_a$，如果$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ba}(M_a) \subset M_b)$，当$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$时，令$g_{ba}$为$f_{ba}$在$M_a$上的限制，则$(M_a, g_{ba})$也是关于$I$的集合归纳系统，并且，对任意$a \in I$，令$j_a$为$M_a$到$E_a$的规范映射，并且，$\varinjlim j_a$为$\varinjlim M_a$到$E$的单射．

证明：根据定义可证(M_a, g_{ba})为关于I的集合归纳系统．根据定理187可证，$\varinjlim j_a$为$\varinjlim M_a$到E的单射．

定义 202. 子集归纳系统（*système inductif de parties*）

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，对任意$a \in I$，$M_a \subset E_a$，如果$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ba}(M_a) \subset M_b)$，则称$(M_a)_{a \in I}$为$(E_a)_{a \in I}$的子集归纳系统．

定理 188.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(E'_a, f'_{ba})均为关于I的集合归纳系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，令$u = \varinjlim u_a$，则：

（*1*）$(M_a)_{a \in I}$为$(E_a)_{a \in I}$的子集归纳系统，则$(u_a(M_a))_{a \in I}$为$(E'_a)_{a \in I}$的子集归纳系统，并且，$\varinjlim u_a(M_a) = u(\varinjlim M_a)$．

（*2*）$I \neq \varnothing$，$(x'_a)_{a \in I}$为族，对任意$a \in I$，$x'_a \in E'_a$，当$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$时，$f_{ba}(x'_a) = x'_b$，则$u_a{}^{-1}(x'_a)$为$(E'_a)_{a \in I}$的子集归纳系统，则存在唯一的$x' \in \varinjlim E'_a$，使对任意$a \in I$，$x' = f'_a(x'_a)$，并且$\varinjlim u_a{}^{-1}(x'_a) = u^{-1}(x')$，其中$f'_a$为$E$到$\varinjlim E'_a$的规范映射．

证明：

（1）根据定义，$(u_a(M_a))_{a \in I}$为$(E'_a)_{a \in I}$的子集归纳系统．令v_a为u_a通过E_a的子集M_a和E'_a的子集$u_a(M_a)$导出的函数，则v_a为满射，根据定理187可以证明$\varinjlim u_a(M_a) = u(\varinjlim M_a)$．

（2）对任意$a \in I$，$b \in I$，$a \leq b$，$f'_a(x'_a) = f'_b(f'_{ba}(x'_a))$，因此$f'_a(x'_a) = f'_b(x'_b)$，令其为$x'$，故$x' \in \varinjlim E'_a$．令$N_a = u_a{}^{-1}(x'_a)$，如果$x_a \in N_a$，且$b \geq a$，则$x'_b = f'_b a(x'_a)$，等于$f'_b a(u'_a(x_a))$，等于$u_b(f_{ba}(x_a))$，因此$f_{ba}(x_a) \in N_b$，故$(N_a)_{a \in I}$为$(E_a)_{a \in I}$的子集归纳系统．对任意$x \in \varinjlim N_a$，存在$a \in I$、$x_a \in N_a$，使$x = f_a(x_a)$，则$u(x) = u(f_a(x_a))$，等于$f'_a(u_a(x_a))$，等于$f'_a(x'_a)$，等于$x'$，故$x \in u^{-1}(x')$．

反过来，如果$x \in u^{-1}(x')$，则存在$a \in I$、$x_a \in N_a$，使$x = f_a(x_a)$．由于$f'_a(x'_a)$等于x'，等于$u(x)$，等于$u(f_a(x_a))$，等于$f'_a(u_a(x_a))$，根据定理183（2），存在$b \geq a$，使$f'_b a(x'_a) = f'_b a(u_a(x_a))$，即$f'_b a(u_a(x_a)) = x'_b$，故$u_b(f_{ba}(x_a)) = x'_b$，因此$f_{ba}(x_a) \in N_b$，又因为$x = f_b(f_{ba}(x_a))$，因此$x \in \varinjlim N_a$．综上，$\varinjlim u_a{}^{-1}(x'_a) = u^{-1}(x')$．

补充定理 429. 限制指标集可以得到集合归纳系统

I为右方有向集，$((E_a)_{a\in I},(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合归纳系统，$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$J$为$I$的预序子集，则$((E_a)_{a\in J},(f_{ba})_{a\in J与b\in J与a\leq b})$是关于$J$的集合归纳系统.

证明：根据定义可证.

定义 203. 通过限制得到的集合归纳系统（*système inductif d'ensembles obtenu par restriction*）；集族的归纳极限的之间的规范映射（*application canonique entre limites inductives de familles d'ensembles*）

I为右方有向集，$((E_a)_{a\in I},(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合归纳系统，$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$J$为$I$的预序子集，则$((E_a)_{a\in J},(f_{ba})_{a\in J与b\in J与a\leq b})$称为通过将指标集限制在$J$上得到的集合归纳系统.

令$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$(E_a)_{a\in J}$对于$(f_{ab})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的归纳极限为$E'$，对任意$a\in I$，$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，则映射族$(f_a)_{a\in J}$的归纳极限，称为$E'$到$E$的规范映射.

补充定理 430.

I为右方有向集，J为I的预序子集，J'为J的预序子集，$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$(E_a)_{a\in J}$对于$(f_{ba})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的归纳极限$E'$，$(E_a)_{a\in J'}$对于$(f_{ba})_{a\in J'与b\in J'与a\leq b}$的归纳极限为$E''$，$E'$到$E$的规范映射为$g$，$E''$到$E'$的规范映射为$g'$，$E''$到$E$的规范映射为$g''$，则$g''=g\circ g'$.

证明：根据定义可证.

定理 189.

I为右方有向集，$((E_a)_{a\in I},(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合归纳系统，$J$为$I$的预序子集和共尾子集. 令$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$(E_a)_{a\in J}$对于$(f_{ba})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的归纳极限为$E'$，则$E'$到$E$的规范映射为双射.

证明：令E'到E的规范映射为g，根据定理184（3），g为单射. 对任意$x\in E$，根据补充定理424（1），存在$a\in I$、$z\in E_a$，使$f_a(z)=x$. 由于J为I的共尾子集，故存在$b\geq a$，且$b\in J$，根据补充定理423，$f_b(f_{ba}(z))=x$，因此$x\in\bigcup\limits_{a\in J}f_a(E_a)$；反过来，对任意$x\in\bigcup\limits_{a\in J}f_a(E_a)$，均有$x\in E$，因此$E=\bigcup\limits_{a\in J}f_a(E_a)$，根据定理184（2），$g$为满射.

定义 204. 集族的双重归纳极限（*double limite inductive de famille d'ensembles*）

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为$(x\in I\times L与y\in I\times L与pr_1x\leq pr_1y与pr_2x\leq pr_2y)$，$((E_a^x)(a,x)\in I\times L,(f_{ba}^{yx})_{(a,x)\in I\times L与(b,y)\in I\times L与(a,x)\leq(b,y)})$为关于$I\times L$的集合归纳系统，则其归纳极限称为双重归纳极限，记作$\lim\limits_{\rightarrow a,x}E_a^x$，在没有歧义的情况下也可以简记为$\lim\limits_{\rightarrow}E_a^x$.

补充定理 431.

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，$((E_a^x)(a,x)\in I\times L,(f_{ba}^{yx})_{(a,x)\in I\times L\text{与}(b,y)\in I\times L\text{与}(a,x)\le(b,y)})$为关于$I\times L$的集合归纳系统，则$(E_a^x,f_{ba}^{yx})$为关于$I$的集合归纳系统，也是关于$L$的集合归纳系统．并且，$(\lim\limits_{\to a}E_a^x,g^{yx})$、$(\lim\limits_{\to x}E_a^x,h_{ba})$分别是关于$L$的集合归纳系统和关于$I$的集合归纳系统，其中$g^{yx}=\lim\limits_{\to a}f_{aa}^{yx}$，$h_{ba}=\lim\limits_{\to x}f_{ba}^{xx}$．

证明：根据定义，可证则(E_a^x,f_{ba}^{yx})为关于I的集合归纳系统，也是关于L的集合归纳系统．根据定理186，$g^{zx}=g^{zy}\circ g^{yx}$，$h_{ca}=h_{cb}\circ h_{ba}$，因此，$(\lim\limits_{\to a}E_a^x,g^{yx})$、$(\lim\limits_{\to x}E_a^x,h_{ba})$分别是关于$L$的集合归纳系统和关于$I$的集合归纳系统．

定理 190.

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，(E_a^x,f_{ba}^{yx})为关于$I\times L$的集合归纳系统，令E_a^x到$\lim\limits_{\to a}E_a^x$的规范映射为g_a^x，$\lim\limits_{\to a}E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$的规范映射为$h_x$，$u=\lim\limits_{\to a,x}(h_x\circ g_a^x)$，则$u$为$\lim\limits_{\to a,x}E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$的双射；令$E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}E_a^x$的规范映射为$j_a^x$，$\lim\limits_{\to x}E_a^x$到$\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$的规范映射为$k_a$，$v=\lim\limits_{\to a,x}(k_a\circ j_a^x)$，则$v$为$\lim\limits_{\to a,x}E_a^x$到$\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$的双射．

证明：令$h^{yx}=\lim\limits_{\to a}f_{aa}^{yx}$，$F_x=\lim\limits_{\to a}E_a^x$，$F=\lim\limits_{\to x}F_x$，$E=\lim\limits_{\to a,x}E_a^x$．根据补充定理424（2），$F=\bigcup\limits_{x\in L}h_x(F_x)$，$F_x=\bigcup\limits_{a\in I}g_a^x(E_a^x)$，因此$F=\bigcup\limits_{x\in L}(h_x\circ g_a^x(E_a^x))$，根据定理184（2），$u$为满射．

另一方面，令$m\in E_a^x$、$n\in E_a^x$，并且$h_x\circ g_a^x(m)=h_x\circ g_a^x(n)$，因此，存在$y\ge x$，使$h^{yx}(g_a^x(m))=h^{yx}(g_a^x(n))$，故$g_a^y(f_{aa}^{yx}(m))=g_a^y(f_{aa}^{yx}(m))$，因此，存在$b\ge a$，使$f_{ba}^{yy}(f_{aa}^{yx}(m))=f_{ba}^{yy}(f_{aa}^{yx}(m))$，因此，$f_{ba}^{yx}(m)=f_{ba}^{yx}(n)$，根据定理184（3），$u$为单射．

补充定理 432.

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，(E_a^x,f_{ba}^{yx})、(E'^x_a,f'_ba^{yx})均为关于$I\times L$的集合归纳系统，对于$(a,b)_{\in I\times L}$，令u_a^x为E_a^x到E'^x_a的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x,f_{ba}^{yx})$到$(E'^x_a,f'^{yx}_{ba})$的映射归纳系统，则$(u_a^x)_{a\in I}$、$(u_a^x)_{x\in L}$均为$(E_a^x,f_{ba}^{yx})$到$(E'^x_a,f'_{ba}yx)$的映射归纳系统，$(\lim\limits_{\to a}u_a^x)_{x\in L}$为$(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$到$(\lim\limits_{\to a}E'^x_a)$的映射归纳系统，$(\lim\limits_{\to x}u_a^x)_{a\in I}$为$(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$到$(\lim\limits_{\to x}E'^x_a)$的映射归纳系统．

证明：根据定义可证$(u_a^x)_{a\in I}$、$(u_a^x)_{x\in L}$均为(E_a^x,f_{ba}^{yx})到$(E'^x_a,f'_{ba}yx)$的映射归纳系统．

令$u_x=\lim\limits_{\to a}u_a^x$，$g^{yx}=\lim\limits_{\to a}f_{aa}^{yx}$，$g'^{yx}=\lim\limits_{\to a}f'^{yx}_{aa}$，则当$x\le y$时，$u_a^y\circ f_{aa}^{yx}=f'^{yx}_{aa}\circ u_a^x$，根据定理186，$u_y\circ g^{yx}=g'^{yx}\circ u_x$，因此，$(\lim\limits_{\to a}u_a^x)_{x\in L}$为$(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$到$(\lim\limits_{\to a}E'^x_a)$的映射归纳系统．

同理可证$(\lim\limits_{\to}xu_a^x)_{a\in I}$为$(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$到$(\lim\limits_{\to x}E'^x_a)$的映射归纳系统．

定义 205. 映射族的双重归纳极限（*double limite inductive de famille d'applications*）

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\leq pr_1y$与$pr_2x\leq pr_2y$)，(E_a^x,f_{ba}^{yx})、$({E'}_a^x,{f'}_{ba}^{yx})$均为关于$I\times L$的集合归纳系统，对于$(a,b)\in I\times L$，令$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x,f_{ba}^{yx})$到$({E'}_a^x,{f'}_{ba}^{yx})$的映射归纳系统，则其归纳极限称双重归纳极限，记作$\lim\limits_{\to a,x}u_a^x$.

定理 191.

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\leq pr_1y$与$pr_2x\leq pr_2y$)，(E_a^x,f_{ba}^{yx})、$({E'}_a^x,{f'}_{ba}^{yx})$均为关于$I\times L$的集合归纳系统，对于$(a,b)\in I\times L$，令$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x,f_{ba}^{yx})$到$({E'}_a^x,{f'}_{ba}^{yx})$的映射归纳系统，$u_a=\lim\limits_{\to x}u_a^x$，$u_x=\lim\limits_{\to a}u_a^x$，$u=\lim\limits_{\to a,x}u_a^x$. 令$E_a^x$到$\lim\limits_{\to a}E_a^x$的规范映射为$g_a^x$，$\lim\limits_{\to a}E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$的规范映射为$h_x$，$u=\lim\limits_{\to a,x}(h_x\circ g_a^x)$；令$E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}E_a^x$的规范映射为$j_a^x$，$\lim\limits_{\to x}E_a^x$到$\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$的规范映射为$k_a$，$v=\lim\limits_{\to a,x}(k_a\circ j_a^x)$；令${E'}_a^x$到$\lim\limits_{\to a}{E'}_a^x$的规范映射为${g'}_a^x$，$\lim\limits_{\to a}{E'}_a^x$到$\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a}{E'}_a^x)$的规范映射为${h'}_x$，$u'=\lim\limits_{\to a,x}({h'}_x\circ{g'}_a^x)$；令${E'}_a^x$到$\lim\limits_{\to x}{E'}_a^x$的规范映射为${j'}_a^x$，$\lim\limits_{\to x}{E'}_a^x$到$\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x}{E'}_a^x)$的规范映射为${k'}_a$，$v'=\lim\limits_{\to a,x}({k'}_a\circ{j'}_a^x)$. 则$\lim\limits_{\to a,x}u_a^x={u'}^{-1}\circ\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a}u_a^x)\circ u$，$\lim\limits_{\to a,x}u_a^x={v'}^{-1}\circ\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x}u_a^x)\circ v$.

证明：根据定理190和可证.

定理 192.

I为右方有向集，(E_a,f_{ba})、$({E'}_a,{f'}_{ba})$为关于I的集合归纳系统，$E=\lim\limits_{\to a}E_a$，$E'=\lim\limits_{\to a}{E'}_a$，对任意$a\in I$，$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，${E'}_a$到$E'$的规范映射为${f'}_a$，则$(E_a\times{E'}_a,f_{ba}\times{f'}_{ba})$也是关于$I$的集合归纳系统，$(fa\times{f'}_a)$是$(E_a\times{E'}_a,f_{ba}\times{f'}_{ba})$到$E\times E'$的映射归纳系统，且$\lim\limits_{\to}(f_a\times{f'}_a)$是$\lim\limits_{\to}(E_a\times{E'}_a)$到$(\lim\limits_{\to}E_a)\times(\lim\limits_{\to}{E'}_a)$的双射.

证明：根据定义，$(E_a\times{E'}_a,f_{ba}\times{f'}_{ba})$也是关于$I$的集合归纳系统，$(f_a\times{f'}_a)$是$(E_a\times{E'}_a,f_{ba}\times{f'}_{ba})$到$E\times E'$的映射归纳系统.

令$g=\lim\limits_{\to}(f_a\times{f'}_a)$，由于$E\times E'=\bigcup\limits_{a\in I}f_a(E_a)\times{f'}_a({E'}_a)$，根据定理184（2），$g$为满射.

另一方面，设$(x,x')\in E_a\times{E'}_a$，$(y,y')\in E_a\times{E'}_a$，并且$f_a(x)=f_a(y)$、${f'}_a(x)={f'}_a(y)$，则存在$b\geq a$、$c\geq a$，使$f_{ba}(x)=f_{ba}(y)$、${f'}_{ca}(x)={f'}_{ca}(y)$，进而，存在$d\geq c$、$d\geq b$，故$f_{da}(x)=f_{da}(y)$、${f'}_{da}(x)={f'}_{da}(y)$，根据定理184（3），$g$为单射.

定义 206. 乘积的归纳极限到归纳极限的乘积的规范映射（*application canonique de la limite inductive d'un produit dans du produit de limites inductives*）

I为右方有向集，(E_a,f_{ba})、$({E'}_a,{f'}_{ba})$为关于I的集合归纳系统，$E=\lim\limits_{\to}E_a$，$E'=\lim\limits_{\to}{E'}_a$，对任意$a\in I$，$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，${E'}_a$到$E'$的规范映射为${f'}_a$，则$(f_a\times{f'}_a)$称为$\lim\limits_{\to}(E_a\times{E'}_a)$到$(\lim\limits_{\to}E_a)\times(\lim\limits_{\to}{E'}_a)$的规范映射.

定理 193.

I为右方有向集，(E_a,f_{ba})、$({E'}_a,{f'}_{ba})$、(F_a,g_{ba})、$({F'}_a,{g'}_{ba})$均为关于I的集合归纳系统，对任意$a\in I$，u_a为E_a到F_a的映射，${u'}_a$为${E'}_a$到${F'}_a$的映射，且(u_a)和$({u'}_a)$均为映射归纳系

统，则$(u_a \times u'_a)$为映射归纳系统，令$\lim\limits_{\rightarrow}(E_a \times E'_a)$到$(\lim\limits_{\rightarrow} aE_a) \times (\lim\limits_{\rightarrow} aE'_a)$的规范映射为$f$，$\lim\limits_{\rightarrow}(F_a \times F'_a)$到$(\lim\limits_{\rightarrow} F_a) \times (\lim\limits_{\rightarrow} F'_a)$的规范映射为$g$，则$\lim\limits_{\rightarrow}(u_a \times u'_a) = g^{-1} \circ ((\lim\limits_{\rightarrow} u_a) \times (\lim\limits_{\rightarrow} u'_a)) \circ f$.

证明：根据定理192可证.

习题 189.

I为右方有向预序集，$(J_l)_{l \in L}$为I的子集族，其中L为右方有向预序集，并且：

第一，J_l按在I上的预序关系导出的预序关系排序，且为右方有向集；

第二，$i \in L$与$j \in L$与$i \leq j \Rightarrow J_i \subset J_j$；

第三，$I = \bigcup\limits_{l \in L} J_l$.

(E_a, f_{ab})为集合映射系统，$\lim\limits_{\leftarrow} E_a = E$，对任意$l \in L$，对于$(E_a, f_{ab})$通过将指标集限制在$J_l$上得到的集合射影系统，令$F_l$为其集族对于其函数族的射影极限．当$i \in L$与$j \in L$与$i \leq j$时，令$g_{ij}$为$F_j$到$F_i$的规范映射．求证：$(F_i, g_{ij})$为关于$I$的集合射影系统，并且，令$F = \lim\limits_{\leftarrow} F_l$，试定义$F$到$E$的规范双射.

证明：

根据补充定理416可以证明(F_i, g_{ij})为关于I的集合射影系统.

对任意$x \in E$，根据定义可证$((f_i(x))_{i \in J_j})_{j \in L} \in F$；反过来，对任意$y \in F$、$i \in L$、$j \in L$，如果$a \in J_i \cap J_j$，则$pr_a(pr_i y) = pr_a(pr_j y)$．令$x = (pr_a(pr_{\tau_i(i \in L\text{与}a \in J_i)} y))_{a \in I}$，对任意$a \in I$、$b \in I$，存在$i \in L$，使$a \in J_i$、$b \in J_i$，因此$f_{ab}(pr_b(pr_{\tau_i(i \in L\text{与}a \in J_i)} y)) = pr_a(pr_{\tau_i(i \in L\text{与}a \in J_i)} y)$，故$x \in E$，因此，可定义$F$到$E$的规范双射为$y \mapsto (pr_a(pr_{\tau_i(i \in L\text{与}a \in J_i)} y))_{a \in I}$.

习题 190.

(Ea, f_{ab})为关于I的集合射影系统，其中I为右方有向集，$\lim\limits_{\leftarrow} E_a = E$，对任意$a \in I$，令$f_a$为$E$到$E_a$的规范映射，如果对任意$a \in I$、$b \in I$，$f_{ab}$均为单射，求证：对任意$a \in I$，$f_a$为单射.

证明：即补充定理414.

习题 191.

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(F_a, g_{ab})均为关于I的集合射影系统，映射族$(u_a)_{a \in I}$为(E_a, f_{ab})到(F_a, g_{ab})的映射射影系统．对任意$a \in I$，令G_a为u_a的图，$u = \lim\limits_{\leftarrow} u_a$．求证：$(G_a)$为某个映射射影系统的集族，并给出其射影极限.

证明：令h_{ab}为映射$(x, y) \mapsto (f_{ab}(x), g_{ab}(y))$，则$(G_a, h_{ab})$为映射射影系统，其射影极限为$\bigcup\limits_{z \in u\text{的图}} \{(pr_i(pr_1 z), pr_i(pr_2 z))_{i \in I}\}$.

习题 192.

I为非空右方有向集，且无最大元．F为满足下列条件的I的元素序列$x=(a_i)_{i\in[1,2n]}$（其中n为自然数且$n\geq 1$）的集合：

第一，当$i\in[1,n]$时，$a_{2i-1}<a_{2i}$；

第二，当$j\in[1,n]$、$i\in[1,n]$且$j<i$时，非$(a_{2i-1}\leq a_{2j-1})$．

$F\neq\varnothing$．令$r(x)=a_{2n-1}$，$s(x)=a_{2n}$，n称为x的长度．

（1）对于任意$a\in I$，令$E_a=\{x|x\in F$与$r(x)=a\}$．当$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$时，按照下列方式定义E_b到E_a的函数f_{ab}：对于$x\in E_b$，令$x=(a_i)_{i\in[1,2n]}$，令j为$\{i|i\in[1,n]$与$a\leq a_{2j-1}\}$的最小元，$f_{ab}(x)=(a_i)_{i\in[1,2j-2]}\cup\{(2j-1,a),(2j,a_{2j})\}$，求证：对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，$E_a\neq\varnothing$，$f_{ab}(E_b)=E_a$，并且，$(E_a,f_{ab})$为关于$I$的集合射影系统．

（2）令$x_a\in E_a$、$x_b\in E_b$，存在$c\in I$以及$x_c\in E_c$，使$c\geq a$、$c\geq b$，并且，$x_a=f_{ac}(x_c)$，$x_b=f_{bc}(x_c)$，如果x_a和x_b的长度相等，求证：$s(x_a)=s(x_b)$．

（3）$E=\varprojlim E_a$，且$E\neq\varnothing$，令$(a_i)\in E$，求证：$\{x|(\exists i)(i\in I$与$x=s(a_i))\}$可数并且和I共尾．

（4）令I为不可数集合A的有限子集集合，并按包含关系排序．求证：不存在I的可数共尾子集，并且，给出(E_a,f_{ab})，对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，$E_a\neq\varnothing$，$f_{ab}(E_b)$为满射，但$\varprojlim E_a=\varnothing$．

（5）给出关于I的集合射影系统(E_a,f_{ab})到(E'_a,f'_ab)的映射射影系统(u_a)，令$u=\varprojlim u_a$，对任意$a\in I$，u_a均满射，但u不是满射．

证明：

（1）对任意$a\in I$，令$d>a$，对任意$i\in[1,n]$，令$a_{2i-1}=a$，$a_{2i}=d$，故$(a_i)_{i\in[1,2n]}\in E_a$，因此$E_a\neq\varnothing$．当$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$时，对任意$x\in E_a$，均有$x\in E_b$，且$f_{ab}(x)=x$，故$f_{ab}(E_b)=E_a$．根据定义可证$f_{ac}=f_{ab}\circ f_{bc}$，故$(E_a,f_{ab})$为关于$I$的集合射影系统．

（2）根据定义可证．

（3）根据习题192（2）可证．

（4）设J为I的共尾子集，令$B=\bigcup\limits_{X\in J}X$，则$B$为可数集合，令$x\in A-B$，则不存在$Z\in J$使$\{x\}\subset Z$，矛盾，故不存在I的可数共尾子集．根据习题192（3）确定的集合射影系统符合条件．

（5）令(E_a,f_{ab})为根据习题192（3）确定的集合射影系统，对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，令E'_a均为单元素集合，f'_{ab}为E'_b到E'_a的双射，u_a为E_a到E'_a的满射，则(u_a)符合条件．

习题 193.

I为右方有向集，$(E_a)_{a\in I}$为格族，对任意$a\in I$，E_a按相反关系排序，为诺特集．对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，f_{ab}为E_b到E_a的单增映射，(E_a,f_{ab})为关于I的集合射影系统．对任意$a\in I$，G_a均为E_a的非空子集，并且满足下列条件：

第一，对任意$a\in I$，G_a的任何两个不相同元素都是不可比较的；

第二，对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，$f_{ab}(G_b)=G_a$；

第三，对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$、$x_a\in G_a$，${f_{ab}}^{-1}(x_a)$有最大元$M_{ab}(x_a)$；

第四，对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，如果$h_b\in E_b$，且存在$y_b\in G_b$且$y_b\leq h_b$，则对任意$x_a\in G_a$且$x_a\leq f_{ab}(h_b)$，均存在$x_b\in G_b$且$x_b\leq h_b$使$x_a=f_{ab}(x_b)$.

求证：子集射影系统(G_a)的射影极限不是空集.

证明：令J为I的有限子集，考虑满足下列条件的元素族$(x_a)_{a\in J}$：

第一，对任意$a\in J$、$b\in J$、$a\leq b$、$x_a\in G_a$、$x_b\in G_b$，$x_a=f_{ab}(x_b)$；

第二，对任意$c\in I$并且c是J在I上的上界，存在$x_c\in c$并且对任意$a\in J$均有$x_a=f_{ac}(x_c)$.

因此，对任意$c\in I$并且c是J在I上的上界，$\bigcap\limits_{a\in J}{f_{ac}}^{-1}(x_a)$不为空，且所有元素均为$\bigcup\limits_{a\in J}\{M_{ac}(x_a)\}$的下界. 由$\bigcup\limits_{a\in J}\{M_{ac}(x_a)\}$为有限集合，且$E_c$为格，故其在$E_c$上有最大下界，令$z=\underset{a\in J}{inf}(M_{ac}(x_a))$，$u\in\bigcap\limits_{a\in J}{f_{ac}}^{-1}(x_a)$，则$u\leq z$，故对任意$a\in J$，均有$f_{ac}(z)\geq x_a$，同时，由于$z\leq M_{ac}(x_a)$，故$f_{ac}(z)\leq x_a$，因此$f_{ac}(z)=x_a$，故$\underset{a\in J}{inf}(M_{ac}(x_a))$为$\bigcap\limits_{a\in J}{f_{ac}}^{-1}(x_a)$的最大元. 进而，对任意$y\in G_c$且$y\leq z$，以及任意$d\in J$，$f_{dc}(y)\leq x_d$，由于$f_{dc}(y)\in G_d$、$x_d\in G_d$，故$f_{dc}(y)=x_d$，因此，$\{y|y\in G_c\text{与}y\leq\underset{a\in J}{inf}(M_{ac}(x_a))\}=G_c\cap(\bigcap\limits_{a\in J}{f_{ac}}^{-1}(x_a))$.

令J为I的子集，考虑满足下列条件的元素族$(x_a)_{a\in J}$：对J的任意有限子集F，$(x_a)_{a\in F}$满足上一段的两个条件. 如果$J\neq I$，令$b\in I-J$. 对J的任意有限子集F、$F\cup\{b\}$的上界c，$\{y|y\in G_c\text{与}y\leq\underset{a\in F}{inf}(M_{ac}(x_a))\}=Gc\cap(\bigcap\limits_{a\in F}{f_{ac}}^{-1}(x_a))$. 因此$\{y|y\in G_b\text{与}y\leq f_{bc}(\underset{a\in F}{inf}(M_{ac}(x_a)))\}=f_{bc}(G_c\cap(\bigcap\limits_{a\in F}{f_{ac}}^{-1}(x_a)))$. 根据补充定理410（1），存在$F_0\subset J$以及$F_0\cup\{b\}$的上界$c_0$，对任意$J$的有限子集$F$，以及任意$F\cup\{b\}$的上界$c$，均有$\underset{a\in F}{inf}(M_{ac}(x_a))\geq\underset{a\in F_0}{inf}(M_{ac_0}(x_a))$. 令$x_b$为$\{y|y\in G_b\text{与}y\leq f_{bc_0}(\underset{a\in F_0}{inf}(M_{ac_0}(x_a)))\}$的任何一个元素，则$(x_a)_{a\in F\cup\{b\}}$符合条件.

令K为存在满足条件的元素组的I的子集的集合，则K非空. K按关于J、J'的偏序关系（存在满足条件的元素族$(x_i)_{a\in J}$和$(y_i)_{a\in J'}$并且前者是后者的子族）的包含关系排序，根据定理80，K有极大元，并且其极大元为I，故存在元素族$(x_i)_{a\in J}$符合条件，即子集射影系统(G_a)的射影极限不是空集.

习题 194.

I为右方有向预序集，$(J_l)_{l\in L}$为I的子集族，其中L为右方有向预序集，并且：

第一，J_l按在I上的预序关系导出的预序关系排序，且为右方有向集；

第二，$i\in L$与$j\in L$与$i\leq j\Rightarrow J_i\subset J_j$；

第三，$I=\bigcup\limits_{l\in L}J_l$. (E_a,f_{ba})为集合归纳系统.

令$\lim\limits_{\rightarrow}E_a=E$，对任意$l\in L$，对于$(E_a,f_{ba})$通过将指标集限制在$J_l$上得到的集合归纳系统，令$F_l$为其集族对于其函数族的归纳极限. 当$i\in L$与$j\in L$与$i\leq j$时，令$g_{ji}$为$F_i$到$F_j$的规

范映射．求证：(F_i, g_{ji})为关于I的集合归纳系统，并且，令$F = \lim\limits_{\rightarrow} F_l$，试定义$F$到$E$的规范双射．

证明：

根据补充定理430可以证明(F_i, g_{j_i})为关于I的集合归纳系统．

令G为$(E_a)_{i\in I}$的和，其等价关系为R，H为$(F_i)_{i\in L}$的和，其等价关系为S．对任意$X \in F$，令关于S的等价类的代表为K，将指标集限制在J_{pr_2k}上得到的集合归纳系统的等价关系为T，pr_1k关于T的等价类的代表为x，x关于R的等价类为$G(x)$，则$X \mapsto G(x)$为F到E的规范双射．

习题 195.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，其中，$\lim\limits_{\rightarrow} E_a = E$，对任意$a \in I$，$f_a$为$E$到$E_a$的规范映射，$R_a$为公式$(x \in E_a$与$y \in E_a$与$f_a(x) = f_a(y))$，求证：对任意$a \in I$、$b \in I$、$a \le b$，$f_{ba}$是同$R_a$和$R_b$相容的映射；令$E'_a = E_a/R_a$，$f'_{ba}$为$f_{ba}$对于$R_a$和$R_b$通过商导出的映射，则$f'_{ba}$为单射，$(E'_a, f'_{ba})$为关于$I$的集合归纳系统，试定义$E$到$\lim\limits_{\rightarrow} E'_a$的规范双射．

证明：

对任意$x \in E_a$、$y \in E_a$，如果$f_a(x) = f_a(y)$，则存在c使$f_{ac}(x) = f_{ac}(y)$．令$d = sup(b, c)$，则$f_{bd}(f_{ab}(x)) = f_{bd}(f_{ab}(y))$，故$f_b(f_{ab}(x)) = f_b(f_{ab}(y))$，因此，$f_{ba}$是同$R_a$和$R_b$相容的映射．

设$f'_{ba}(x) = f'_{ba}(y)$，$x = f_a(u)$，$y = f_a(v)$，则$f_b(f_{ab}(u)) = f_b(f_{ab}(v))$，故$f_a(u) = f_a(v)$，因此$x = y$，所以$f'_{ba}$为单射．同时，根据定义可证$(E'_a, f'_{ba})$为关于$I$的集合归纳系统．$x \mapsto \bigcup\limits_{a\in I} \{pr_1(x \cap (E_a \times \{a\})\} \times \{a\}$为$E$到$\lim\limits_{\rightarrow} E'_a$的规范双射．

习题 196.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(F_a, g_{ba})为关于I的集合归纳系统，映射族$(u_a)_{a\in I}$为(E_a, f_{ba})到(F_a, g_{ba})的映射归纳系统．对任意$a \in I$，令G_a为u_a的图，$u = \lim\limits_{\rightarrow} u_a$．求证：$(G_a)$为某个映射归纳系统的集族，并给出其归纳极限．

证明：令h_{ba}为映射$(x, y) \mapsto (f_{ba}(x), g_{ba}(y))$，则$(G_a, h_{ba})$为映射归纳系统，其归纳极限为$\bigcup\limits_{z} \in u$的图$\{\{(x, y)|x \in pr_1(pr_1 z)$与$y = u_{pr_2(pr_1 z)}(x)\}\}$．

习题 197.

I为预序集，$(E_a)_{a\in I}$为集族，$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\le b}$为函数族，其中$f_{ba}$为$E_a$到$E_b$的映射，并且满足下列条件：

第一，如果$a \le b$，$b \le c$，则$f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$．

第二，$f_{aa} = Id_{E_a}$，则$(E_a)_{a\in I}$，$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\le b)}$称为关于$I$的集合归纳系统，在没有歧义的情况下可以简记为$((E_a), (f_{ba}))$或$(E_a, f_{ba})$．

令R为公式$(x \in G$与$y \in G$与$pr_2 x \le pr_2 y$与$f_{pr_2 y pr_2 x}(pr_1 x) = pr_1 y)$，$R'$为公式：

"存在自然数$n > 0$以及$(x_i)_{i\in[0,n]}$（$(\forall i)(i \in [0,n] \Rightarrow x_i \in G)$），其中$x_0 = x$，$x_n = y$，并且，对任意$i \in [0,n-1]$，$(x_{i+1}|y)(x_i|x)R$或$(x_i|y)(x_{i+1}|x)R$为真".

令E=G/R'，则称E为集族

$(E_a)_{a\in I}$对于函数族$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限，记作$\varinjlim\limits_{a}(E_a, f_{ba})$，在没有歧义的情况下可以简记为$\varinjlim(E_a, f_{ba})$或$\varinjlim E_a$．令$f$为$G$到$E/R'$的规范映射，$g_a$为映射$x \mapsto (x,a)(x \in E_a)$，则映射$f \circ g_a$称为$E_a$到$\varinjlim E_a$的规范映射.

证明：根据定义可证I为右方有向集时，$\varinjlim E_a$,即为集族归纳系统(E_a, f_{ba})的归纳极限.
类似定理184（1）、定理185的证明，可证明u的存在性和唯一性.

Chapter 4

结构（Structures）

4.1 结构和同构（Structures et isomorphismes）

结构定义 1. 阶梯构造模式（*schéma de construction d'échelon*）

满足下列条件的自然数有序对有限序列$(a_i, b_i)_{i\in[1,m]}$，称为阶梯构造模式：

（*1*）如果$b_i = 0$，则$a_i \in [1, i-1]$；

（*2*）如果$a_i \neq 0$且$b_i \neq 0$，则$a_i \in [1, i-1]$且$b_i \in [1, i-1]$.

结构定义 2. 在n个项上的阶梯构造模式（*schéma de construction d'échelon sur n termes*）

对于阶梯构造模式$(a_i, b_i)_{i\in[1,m]}$，如果$a_1 = 0$、$b_1 > 0$且$\{x | i \in [1, m]与a_i = 0与x = b_i\}$的最大元为$n$，则称其为在$n$个项上的阶梯构造模式.

结构定义 3. 阶梯构造（*construction d'échelon*），阶梯（*échelon*）

令M为比集合论强的理论，E_1、E_2、$\cdots$、E_n为M的n个项，对于在n个项上的阶梯构造模式$S = (a_i, b_i)_{i\in[1,m]}$，如果$M$的$m$个项$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_m$满足下列条件，则称其为阶梯构造模式$S$在$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的阶梯构造，并且，其中$A_m$称为阶梯构造模式$S$在基集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的阶梯，记作$S(E_1, E_2, \cdots, E_n)$：

（*1*）如果$a_i = 0$，则A_i为项E_{b_i}；

（*2*）如果$b_i = 0$，则A_i为项$\mathcal{P}(A_{a_i})$；

（*3*）如果$a_i \neq 0$且$b_i \neq 0$，则A_i为项$A_{a_i} \times A_{b_i}$.

结构定义 4. 映射对模式的规范扩展（*extension canonique de schema d'applications*）

在比集合论强的理论中，令在n个项上的阶梯构造模式$S = (a_i, b_i)_{i\in[1,m]}$，$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$、$E'_1$、$E'_2$、$\cdots$、$E'_n$为$M$的项，$f_1$、$f_2$、$\cdots$、$f_n$为映射，且对于$i \in [1, n]$，$f_i$为$E_i$到$E'_i$的映射，设$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_m$为模式$S$在$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的阶梯构造，$A'_1$、$A'_2$、$\cdots$、

A'_m为模式S在E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的阶梯构造．如果g'_1、g'_2、$\cdots$、g'_m为映射，且对于$i \in [1,m]$，g_i为A_i到A'_i的映射，并满足下列条件，则称g_m为f_1、f_2、$\cdots$、f_n对模式S的规范扩展，记作$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^S$：

（*1*）如果$a_i = 0$，则g_i为f_{b_i}；

（*2*）如果$b_i = 0$，则g_i为g_{a_i}在子集上的规范扩展；

（*3*）如果$a_i \neq 0$且$b_i \neq 0$，则g_i为g_{a_i}和g_{b_i}在乘积集合上的规范扩展．

结构规则 1.

在比集合论强的理论中，S为在n个项上的阶梯构造模式，f_1、f_2、$\cdots$、f_n、f'_1、f'_2、$\cdots$、f'_n为映射，且对于$i \in [1,n]$，f_i为E_i到E'_i的映射，f'_i为E'_i到E''_i的映射，则$\langle f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \cdots, f'_n \circ f_n\rangle^S = \langle f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\rangle^S \circ \langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^S$.

证明：根据补充定理86、补充定理88、补充定理119（1）、补充定理119（2）可证.

结构规则 2.

在比集合论强的理论中，S为在n个项上的阶梯构造模式，f_1、f_2、$\cdots$、f_n均为单射（或满射），则$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^S$为单射（或满射）.

证明：根据补充定理85、定理36可证.

结构规则 3.

在比集合论强的理论中，S为在n个项上的阶梯构造模式，f_1、f_2、$\cdots$、f_n均为双射，则$(\langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^S)^{-1} = \langle {f_1}^{-1}, {f_2}^{-1}, \cdots, {f_n}^{-1}\rangle^S$.

证明：根据结构规则1、结构规则2可证.

补充结构规则 1.

在比集合论强的理论中，S为在n个项上的阶梯构造模式，f_1、f_2、$\cdots$、f_n均为恒等映射，则$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^S$为恒等映射.

证明：根据补充定理87、补充定理119（3），运用数学归纳法可证.

结构定义 5. 类型化（*typification*）

令M为比集合论强的理论，x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p为互不相同的字母，且都不是M的常数．A_1、A_2、$\cdots$、A_m为M的项（其中m也可以为0），并且均不包含x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p．S_1、S_2、$\cdots$、S_p均为在$n+m$个项上的阶梯构造模式，令公式T为$(s_1 \in S_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$与$s_2 \in S_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$与$\cdots$与$s_p \in S_p(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m))$，则称$T$为$s_1$、$s_2$、$\cdots$、$s_p$的类型化.

结构定义 6. 可转换的公式（*relation transportable*），可转换的公式的主要基集合（*ensemble de base principal de la relation transportable*），可转换的公式的辅助基集合（*ensemble de base auxiliaire de la relation transportable*）

令M为比集合论强的理论，x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p为互不相同的字母，且都不是M的常数．A_1、A_2、$\cdots$、A_m为M的项（其中m也可以为0），并且均不包含x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p，T为s_1、s_2、$\cdots$、s_p的类型化．

如果公式R满足下列条件，则称公式R对类型化T是可转换的，在没有歧义的情况下也可以简称R是可转换的，其中，x_1、x_2、$\cdots$、x_n称为主要基集合，A_1、A_2、$\cdots$、A_m称为辅助基集合：

设y_1、y_2、$\cdots$、y_n、f_1、f_2、$\cdots$、f_p为互不相同的字母，与x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p也均不相同，且都不是M的常数，则$(T$与$(f_1$是x_1到y_1的双射$)$与$(f_2$是x_2到y_2的双射$)$与$\cdots$与$(f_n$是x_n到y_n的双射$) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (y_1|x_1)(y_2|x_2)\cdots(y_n|x_n)$ $(s'_1|s_1)(s'_2|s_2)\cdots(s'_p|s_p)R)$，其中$s'_j = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^{S_j}(s_j)$（$j \in [1, p]$）．

结构定义 7. 结构种类（*espèce de structure*），结构种类的主要基集合（*ensemble de base principal de l'espèce de structure*），结构种类的主要基集合（*ensemble de base auxiliaire de l'espèce de structure*），结构种类的代表特征（*caractérisation typique de l'espèce de structure*），结构种类的公理（*axiome de l'espèce de structure*）

令M为比集合论强的理论，满足下列条件的文本，称为结构种类，其中x_1、x_2、$\cdots$、x_n称为结构种类的主要基集合，A_1、A_2、$\cdots$、A_m称为结构种类的辅助基集合，T称为结构种类的代表特征，R称为结构种类的公理：

第一，x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s为互不相同的字母，且都不是M的常数；

第二，A_1、A_2、$\cdots$、A_m为M的项，并且均不包含x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s（其中m也可以为0）；

第三，T为s的类型化；

第四，公式R对T是可转换的．

注：在原书中，主要讨论T为s的类型化（即$p = 1$）的情况，T为多个字母的类型化（即$p > 1$）的情况，用同样的方法也可以得到类似的结论．

结构定义 8. 通用结构（*structure générique*）

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，代表特征为$s \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$，则在理论$M_X$中，常数$s$称为通用结构．

结构定义 9. 偏序结构种类（*espèce de structure d'ordre*）

以A为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件，则称为偏序结构种类：

第一，结构种类的代表特征为$s \in \mathcal{P}(A \times A)$；

第二，结构种类的公理为$(s \circ s = s)$与$(s \cap s^{-1} = \Delta_A)$．

结构定义 10. 代数结构种类（*espèce de structure algébriques*）

以A为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件，则称为偏序结构种类：

第一，结构种类的代表特征为$F \in \mathcal{P}((A \times A) \times A)$；

第二，结构种类的公理为"F是定义域为$A \times A$的函数图".

结构定义 11. 拓扑结构种类（*espèce de structure topologique*）

以A为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件，则称为偏序结构种类：

第一，结构种类的代表特征为$V \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$；

第二，结构种类的公理为$(\forall V')((V' \subset V) \Rightarrow ((\bigcup_{X \in V'} X) \in V))$与$(A \in V)$与$(\forall X)(\forall Y)$ $((X \in V$与$Y \in V) \Rightarrow (X \cap Y \in V))$.

结构定义 12. 结构种类的理论（*théorie de espèce de structure*）

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，满足下列条件的理论，称为结构种类X的理论，记作M_X：

第一，显式公理包括M的显式公理和"R与T"；

第二，公理模式、特别符号均和M相同.

结构定义 13. 结构（*structure*），具有结构（*munis de la structure*）

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，其代表特征为T，公理为R. 令M'为比M强的理论，E_1、E_2、$\cdots$、E_n、U为M'的项，且"$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(U|s)R$与$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(U|s)T$"是$M'$的定理，则称在理论$M'$中$U$为$X$在主要基集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$和辅助基集合$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_m$上的结构，在没有歧义的情况下也可以简称在理论$M'$中$U$为$X$在主要基集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的结构，或者简称$U$为$X$在主要基集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的结构. 同时，称在理论$M'$中$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$具有$X$的结构$U$，在没有歧义的情况下也可以简称$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$具有$X$的结构$U$，或简称$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$具有结构$U$.

补充结构规则 2.

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，其代表特征为T，公理为R. 令M'为比M强的理论，E_1、E_2、$\cdots$、E_n、U为M'的项，在理论M'中U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n和辅助基集合A_1、A_2、$\cdots$、A_m上的结构. 则对M_X的任意定理B，$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots$
$(E_n|x_n)(U|s)B$
是M'的定理.

证明：根据证明规则2可证.

补充结构规则 3.

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，其代表特征为T，公理为R，S为其阶梯构造模式．令M'为比M强的理论，在理论M'中U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n和辅助基集合A_1、A_2、$\cdots$、A_m上的结构．则在理论M'中，公式"U为在理论M'中X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构"为U上的集合化公式．

证明：在理论M'中，根据定义，$U \in S(E_1, E_2, \cdots, E_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$，根据证明规则52可证．

结构定义 14. 结构种类的结构集合（*ensemble des structures d'espèce*）

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，其代表特征为T，公理为R，S为其阶梯构造模式．令M'为比M强的理论，则在理论M'中，$\{U|U$为在理论M'中X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构$\}$称为结构种类X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构集合．

结构定义 15. 结构的同构（*isomorphisme de structures*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m．S为X的代表特征中的在$n+m$个项上的阶梯构造模式，R为X的公理．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，U'为X在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的结构．对任意$i \in [1, n]$，令f_i为E_i到E'_i的双射，如果$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U) = U'$，则称$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为具有结构$U$的集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$到具有结构$U'$的集合$E'_1$、$E'_2$、$\cdots$、$E'_n$的同构，在没有歧义的情况下也可以称$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$到集合$E'_1$、$E'_2$、$\cdots$、$E'_n$的同构、或称$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为结构$U$到结构$U'$的同构，或称$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为同构，或者称具有结构$U$的集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$同构于具有结构$U'$的集合$E'_1$、$E'_2$、$\cdots$、$E'_n$．

补充结构规则 4. 逆同构的存在

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m．S为X的代表特征中的在$n+m$个项上的阶梯构造模式，R为X的公理．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，U'为X在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的结构．对任意$i \in [1, n]$，令f_i为E_i到E'_i的双射，如果$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U) = U'$，则$\langle {f_1}^{-1}, {f_2}^{-1}, \cdots, {f_n}^{-1}, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U') = U$．

证明：根据补充结构规则3可证．

结构定义 16. 结构的逆同构（*isomorphisme réciproques de structures*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m．S为X的代表特征中的在$n+m$个项上的阶梯构造模式，R为X的公理．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，U'为X在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的结构．对任意$i \in [1, n]$，令f_i为E_i到

E'_i的双射，如果$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U) = U'$，则称$({f_1}^{-1}, {f_2}^{-1}, \cdots, {f_n}^{-1})$为$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$的逆同构.

补充结构规则 5.

$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为同构，如果$({f_1}^{-1}, {f_2}^{-1}, \cdots, {f_n}^{-1})$为$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$的逆同构，则$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为$({f_1}^{-1}, {f_2}^{-1}, \cdots, {f_n}^{-1})$的逆同构.

证明：根据定义可证.

补充结构规则 6.

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m．S为X的代表特征中的在$n+m$个项上的阶梯构造模式，R为X的公理．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构．则$(Id_{E_1}, Id_{E_2}, \cdots, Id_{E_n})$为结构$U$到结构$U$的同构.

证明：根据补充结构规则1可证.

结构规则 4. 同构的复合为同构

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U、U'、U''分别为结构种类X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上、在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n

上、在主要基集合E''_1、E''_2、$\cdots$、E''_n上的结构，对任意$i \in [1, n]$，f_i为E_i到E'_i的双射，g_i为E'_i到E''_i的双射，如果$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$、$(g_1, g_2, \cdots, g_n)$均为同构，则$(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, \cdots, g_n \circ f_n)$为同构.

证明：根据结构规则1可证.

结构定义 17. 同构的复合（*composée de deux isomorphismes*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U、U'、U''分别为结构种类X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上、在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上、在主要基集合E''_1、E''_2、$\cdots$、E''_n上的结构，对任意$i \in [1, n]$，f_i为E_i到E'_i的双射，g_i为E'_i到E''_i的双射，如果$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$、$(g_1, g_2, \cdots, g_n)$均为同构，则称$(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, \cdots, g_n \circ f_n)$为$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$和$(g_1, g_2, \cdots, g_n)$的复合.

结构定义 18. 自同构（*automorphisme*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类．令M'为比M强的理论，在理论M'中，具有X的结构U的集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n到具有X的结构U的集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n的同构，称为自同构.

补充结构规则 7.

自同构的复合是自同构．自同构的逆同构是自同构.

证明：根据定义可证.

结构规则 5. 通过转换可以得到结构

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，对任意$i\in[1,n]$，f_i为E_i到E'_i的双射，则在理论M'中存在X在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的结构U'，使$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$为集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n到集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n的同构.

证明：令$U'=\langle f_1,f_2,\cdots,f_n,Id_{A_1},Id_{A_2},\cdots,Id_{A_m}\rangle^S(U)$，由于$R$是可转换的，因此，$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(U|s)R\Leftrightarrow(E'_1|x_1)(E'_2|x_2)\cdots(E'_n|x_n)(U'|s)R$，得证.

结构定义 19. 通过转换得到的结构（*structure obtenue en transportant*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，对任意$i\in[1,n]$，f_i为E_i到E'_i的双射，令$U'=\langle f_1,f_2,\cdots,f_n,Id_{A_1},Id_{A_2},\cdots,Id_{A_m}\rangle^S(U)$，则称$U'$为$U$通过映射$f_1$、$f_2$、$\cdots$、$f_n$的转换在$E'_1$、$E'_2$、$\cdots$、$E'_n$上得到的结构.

结构定义 20. 统一的结构种类（*espèce de structure univalente*）

如果结构种类的任何两个结构都存在同构，则称该结构种类为统一的.

结构定义 21. 固有项（*terme intrinsèque*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，通用结构为常数s．S是在$n+m$个项上的阶梯构造模式．如果项V满足下列条件，则称V对于常数s是固有的：

第一，V包含的字母都是理论M_X的常数；

第二，$V\in S(x_1,x_2,\cdots,x_n,A_1,A_2,\cdots,A_m)$是理论$M_X$的定理；

第三，令M'_X为理论M_X添加公理“f_i是x_i到y_i的双射”（$i\in[1,n]$）得到的理论，并且所有的字母f_i、y_i都不是理论M_X的常量且互不相同，s'为s通过映射f_1、f_2、$\cdots$、f_n的转换在y_1、y_2、$\cdots$、y_n上得到的结构，并且$(y_1|x_1)(y_2|x_2)\cdots(y_n|x_n)(s'|s)V=\langle f_1,f_2,\cdots,f_n,$ $Id_{A_1},Id_{A_2},\cdots,Id_{A_m}\rangle^S(V)$是理论$M'_X$的定理.

结构定义 22. 演绎过程（*procédé de déduction*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征是$s\in S(x_1,x_2,\cdots,x_n,A_1,A_2,\cdots,A_m)$；$Y$也是理论$M$的结构种类，其主要基集合为$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_r$，辅助基集合为$B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_p$，其代表特征是$t\in T(y_1,y_2,\cdots,y_r,B_1,B_2,\cdots,B_p)$，其公理不包含字母$x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$、$s$.

如果在理论M_X中P为Y在主要基集合U_1、U_2、$\cdots$、U_r上的结构，且P、U_1、U_2、$\cdots$、U_r对于常数s是固有的，则称P、U_1、U_2、$\cdots$、U_r为从X的结构到Y的结构的演绎过程，在没有歧义的情况下，也可以称P为从X的结构到Y的结构的演绎过程，或者称P为演绎过程.

补充结构规则 8. 从过程中演绎得到结构

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征是$s \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$；$Y$也是理论$M$的结构种类，其主要基集合为$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_r$，辅助基集合为$B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_p$，其代表特征是$t \in T(y_1, y_2, \cdots, y_r, B_1, B_2, \cdots, B_p)$，其公理不包含字母$x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$、$s$.

如果在理论M_X中P为Y在主要基集合U_1、U_2、$\cdots$、U_r上的结构，令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，则$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K|s)P$为$Y$在主要基集合$U'_1$、$U'_2$、$\cdots$、$U'_r$上的结构，其中，对任意$j \in [1, r]$，$U'_j$为$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K|s)U_j$.

证明：根据替代规则2可证.

结构定义 23. 从过程中演绎（*déduite par le procédé*），从属于结构（*subordonnée à le structure*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征是$s \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$；$Y$也是理论$M$的结构种类，其主要基集合为$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_r$，辅助基集合为$B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_p$，其代表特征是$t \in T(y_1, y_2, \cdots, y_r, B_1, B_2, \cdots, B_p)$，其公理不包含字母$x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$、$s$.

如果P、U_1、U_2、$\cdots$、U_r为从X的结构到Y的结构的演绎过程，令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，则结构$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K|s)P$称为$K$从过程$P$演绎所得，或称其从属于$K$.

结构规则 6.

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征是$s \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$；$Y$也是理论$M$的结构种类，其主要基集合为$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_r$，辅助基集合为$B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_p$，其代表特征是$t \in T(y_1, y_2, \cdots, y_r, B_1, B_2, \cdots, B_p)$，其公理不包含字母$x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$、$s$.

P、U_1、U_2、$\cdots$、U_r为从X的结构到Y的结构的演绎过程，其中，对任意$j \in [1, r]$，和U_j相关的阶梯构造模式为$\mathcal{P}(T_j)$. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(g_1, g_2, \cdots, g_n)$为具有结构K的集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n到具有结构K'的集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n的同构. 对任意$j \in [1, r]$，令$h_j = \langle g_1, g_2, \cdots, g_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^{T_j}$，$F_j = (E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K'|s)U_j$，$F'_j = (E'_1|x_1)(E'_2|x_2)\cdots(E'_n|x_n)(K'|s)U_j$，令$Q$、$Q'$分别从属于结构$K$、$K'$，则$(h_1, h_2, \cdots, h_r)$为具有结构$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K'|s)P$的集合$F_1$、$F_2$、$\cdots$、$F_r$到具有结构$(E'_1|x_1)(E'_2|x_2)\cdots(E'_n|x_n)(K'|s)P$的集合$F'_1$、$F'_2$、$\cdots$、$F'_r$的同构.

证明：根据结构规则2，h_i为双射，$\langle h_1, h_2, \cdots, h_r, Id_{B_1}, Id_{B_2}, \cdots, Id_{B_p}\rangle^T$也是双射. 由于$U_i$对于常数$s$是固有的，故$h_i\langle F_i\rangle = F'_i$. 由于$P$对于常数$s$是固有的，故$(E'_1|x_1)(E'_2|x_2)\cdots(E'_n|x_n)(K'|s)P = \langle h_1, h_2, \cdots, h_r, Id_{B_1}, Id_{B_2}, \cdots, Id_{B_p} >^T ((E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K'|s)P)$，得证.

结构定义 24. 等价的结构种类（*espèce de structure équivalente*）

令M为比集合论强的理论，X、Y是理论M的结构种类，其主要基集合均为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，通用结构分别为s、t．令P为从X的结构到Y的结构的演绎过程，Q为从Y的结构到X的结构的演绎过程，在理论M_X中，$(P|s)Q=t$是定理，在理论M_Y中，$(Q|t)P=s$是定理，则称结构种类X和Y通过演绎过程P和Q等价．

结构规则 7.

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，K为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，K'为X在主要基集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$上的结构．K_0、${K'}_0$均为结构种类Y的结构，并且分别和K、K'等价，则当且仅当$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$为K到K'的同构时，$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$为K_0到${K'}_0$的同构．

证明：根据结构规则6可证．

习题 198.

令S为符号P、X、x_1、x_2、$\cdots$、x_n组成的集合，P的权重为1，X的权重为2，其他符号的权重为0．如果$L_0(S)$的单词T是平衡单词，则称T为在x_1、x_2、$\cdots$、x_n上的阶梯类．令M为比集合论强的理论，E_1、E_2、$\cdots$、E_n为M的项，定义$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$如下：

第一，如果T为字母x_i，则$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$为集合E_i；

第二，如果T为PU的形式，则$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$为集合$\mathcal{P}(U(E_1,E_2,\cdots,E_n))$；

第三，如果T为XUV的形式，则$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$为集合$U(E_1,E_2,\cdots,E_n)\times V(E_1,E_2,\cdots,E_n)$．

求证：对任意在x_1、x_2、$\cdots$、x_n上的阶梯类T，$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$是在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的阶梯，反之，任何在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的阶梯，都可以用唯一的方法表示为$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$．此时，称$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$为阶梯类T在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的实现．进而，试用在x_1、x_2、$\cdots$、x_n上的阶梯类T表示映射的规范扩展，并证明，对于在n个项上的阶梯构造模式S和S'，如果$S(x_1,x_2,\cdots,x_n)=S'(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则$\langle f_1,f_2,\cdots,f_n\rangle^S=\langle f_1,f_2,\cdots,f_n\rangle^{S'}$．

证明：

用数学归纳法可证$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$和阶梯可相互表达并具有唯一性；

映射的规范扩展定义为：

第一，T为字母x_i，则相应的映射为f_i；

第二，T为PU的形式，则相应的映射为U相应的映射在子集上的规范扩展；

第三，T为XUV的形式，则相应的映射为U和V相应的映射在乘积集合上的规范扩展．

用数学归纳法可以证明映射的规范扩展用$T(E_1,E_2,\cdots,E_n)$表达的唯一性．故如果$S(x_1,x_2,\cdots,x_n)=S'(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则$\langle f_1,f_2,\cdots,f_n\rangle^S=\langle f_1,f_2,\cdots,f_n\rangle^{S'}$．

4.2 态射和派生结构（Morphismes et structures dérivées）

结构定义 25. 态射集合（*ensemble des morphismes*），态射（*morphisme*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类．σ为项，字母x、y、s、t互不相同，且都不是X的代表特征和公理包含的字母．

在理论M中，如果项σ满足下列条件，则称σ为X的态射集合：

第一，在理论M中，((s是X在主要基集合x上的结构)与(t是X在主要基集合y上的结构)) $\Rightarrow (\sigma \subset \mathcal{F}(x;y))$；

第二，令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'、E''在理论M'中分别具有X的结构K、K'、K''，E、E'、E''、K、K'、K''都不含字母s、t、x、y，则($f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$与$g \in (K''|t)(K'|s)(E''|y)(E'|x)\sigma) \Rightarrow g \circ f \in (K''|t)(K|s)(E''|y)(E|x)\sigma$；

第三，令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'在理论M'中分别具有X的结构K、K'，E、E'、K、K'都不含字母s、t、x、y，f为E到E'的双射，则((f)为同构) $\Leftrightarrow$ ($f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$与$f^{-1} \in (K|t)(K'|s)(E|y)(E'|x)\sigma$)．

此时，令M'为比M强的理论，在理论M'中，对具有结构K的集合E、具有结构K'的集合E'，对任意$f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$，称$f$为具有$K$的$E$到具有$K'$的$E'$的态射，在没有歧义的情况下，可以简称$f$为$E$到$E'$的$\sigma$态射，或$f$为$E$到$E'$的态射，或$f$为$\sigma$态射：

注：原书主要研究仅有一个基集合的结构种类的态射问题．对于多个基集合的结构种类的态射，也可用类似的方法下定义．

补充结构规则 9. 恒等映射为态射

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，E具有X的结构，则Id_E是σ态射．

证明：根据根据补充结构规则6，(f)为同构，根据定义可证．

结构定义 26. 满态射（*morphisme surjectif*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'分别具有X的结构U、U'，f为E到E'的σ态射．如果$\langle f\rangle^S(U) = U'$，则称$f$为满态射．

结构规则 8.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'为具有X的结构的集合，f为E到E'的σ态射，g为E'到E的σ态射，如果$g \circ f = Id_E$，$f \circ g = Id_{E'}$，则(f)为E到E'的同构，(g)为(f)的逆同构．

证明：根据定理20可证．

结构定义 27. 更细的结构（*structure plus fine*），更粗的结构（*structure plus fine*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，K_1、K_2为X在集合E上的结构，如果具有K_1的E到具有K_2的E的恒等映射是σ态射，则称K_1是比K_2更细的结构，或称K_2是比K_1更粗的结构．

注：在原书中，“更细”这个概念包括与自身相等的情况，即一个结构比自身更细．

补充结构规则 10.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，则在理论M'中，(K_1为X在集合E上的结构)与(K_2为X在集合E上的结构)与(K_1比K_2更细)是在X在E上的结构集合上的偏序关系．

证明：根据定义可证．

结构定义 28. 起始结构（*structure initiale*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合，并且，对任意$i\in I$，K_i为X在A_i上的结构，f_i为E到A_i的映射．对于X在E上的结构F，如果对任意集合E'、X在E'上的结构F'、E'到E的映射g，均有(g为E'到E的σ态射) $\Leftrightarrow$ $(\forall i)(i\in I \Rightarrow$ $f_i\circ g$为E'到A_i的σ态射)，则称F为关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构．

补充结构规则 11.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合，并且，对任意$i\in I$，K_i为X在A_i上的结构，f_i为E到A_i的映射，关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构为F，则对任意$i\in I$，f_i为具有F的E到具有K_i的A_i的σ态射．

证明：根据补充结构规则9，Id_E为σ态射，根据定义可证．

结构规则 9.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，对于集合E，如果存在X在E上的结构F，为关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构，那么，对任意X在E上的结构F'，如果对任意$i\in I$，f_i为具有F'的E到具有K_i的A_i的σ态射，则F比F'更粗，进而，F是唯一的．

证明：根据定义，对于结构F，对任意$i\in I$，f_i均为σ态射．同时，具有结构F的E的恒等映射Id_E是σ态射，根据定义，$f_i\circ Id_E$为具有F的E到具有F'的E的σ态射，因此，F比F'更粗．进而，根据定义，F是唯一的．

结构规则 10.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(Ai)_{i\in I}$为集族，E为集合，并且，对任意$i\in I$，K_i为X在A_i上的结构．$(J_l)_{l\in L}$是I的划分，$(B_l)_{l\in L}$是集族．对任意$l\in L$，h_l为E到B_l的映射；对任意$l\in L$和$i\in J_l$，g_{li}为B_l到A_i的映射，并且$f_i=g_{li}\circ h_l$．如果，对任意$l\in L$，存在X在B_l上的结构K'_l，为关于三元组族$(A_i,K_i,g_{li})_{i\in J_l}$的起始结构，则下列两个命题等价：

第一，存在X在E上、关于$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构U；

第二，存在X在E上，关于$(B_l,K'_l,h_l)_{l\in L}$的起始结构U'．

并且，$U=U'$．

证明：令F为具有结构的集合，v为F到E的映射，根据定义，($h_l\circ v$为F到B_l的σ态射) $\Leftrightarrow$ $(\forall i)(i\in J_l\Rightarrow g_{li}\circ hl\circ v$为$F$到$A_i$的$\sigma$态射)，后者即$(\forall i)(i\in J_l\Rightarrow f_i\circ v$为$F$到$A_i$的$\sigma$态射)．故$(\forall l)(l\in L\Rightarrow hl\circ v$为$F$到$B_l$的$\sigma$态射) $\Leftrightarrow$ $(\forall i)(i\in I\Rightarrow fi\circ v$为$F$到$A_i$的$\sigma$态射)．

因此，两个命题等价，同时，(v是F到具有结构U'的E的态射) $\Leftrightarrow$ (v是F到具有结构U的E的态射)，根据结构规则9，U、U'都是唯一的，得证．

结构定义 29. 结构的原像（*image réciproque d'une structure*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，关于$(A,K,f)_{i\in\{i\}}$的起始结构，称为结构K在f下的原像．

结构定义 30. 导出的结构（*structure induite*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在A上的结构，$B\subset A$，j为B到A的规范映射，如果结构K在j下的原像存在，则称其为结构K在B上导出的结构．

结构定义 31. 可采子集（*partie permise*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在A上的结构，$B\subset A$，如果K在B上导出的结构存在，则称B为A的可采子集．

结构规则 11.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$B\subset A$，$C\subset B$，K为X在A上的结构，K'为K在B上导出的结构，则当且仅当K'在C上导出的结构存在时，K在C上导出的结构存在，并且二者相等．

证明：根据结构规则10可证．

结构规则 12.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，K为X在A上的结构，K'为X在A'上的结构，$B\subset A$，$B'\subset A'$．K在B上导出的结构J存在，

K'在B'上的导出的结构J'存在．令F为A到A'的σ态射，且$f\langle B\rangle \subset B'$，令$g = f|B$，则$g$是具有结构$J$的$B$到具有结构$J'$的$B'$的$\sigma$态射．

证明：令B到A的规范映射为j，B'到A'的规范映射为j'，因此$f \circ j = j' \circ g$，由于f、j为σ态射，因此$j' \circ g$为σ态射，根据定义，g为σ态射．

结构定义 32. 乘积结构（*structure produit*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i \in I$，K_i为X在A_i上的结构．$E = \prod\limits_{i\in I} A_i$，$pr_i$为指标$i$的射影函数，则称关于$(A_i, K_i, pr_i)_{i\in I}$的起始结构为结构族$(K_i)_{i\in I}$的乘积结构．

结构定义 33. 两个结构的乘积结构（*structure produit deux stuctures*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，A、B为集合，K_A、K_B分别为X在A_i上的结构．令$E = A\times B$，如果X在E上的结构K满足下列条件，则称K为K_A和K_B的乘积结构：对任意集合E'，令F'为X在E'上的结构，g为E'到E的映射，则$(g$为E'到E的σ态射$) \Leftrightarrow ((pr_1 \circ g$为$E'$到$A$的$\sigma$态射$)$与$(pr_2 \circ g$为$E'$到$B$的$\sigma$态射$))$．

结构规则 13.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的结构．$(J_l)_{l\in L}$是I的划分．对于$l \in L$，令$B_l = \prod\limits_{i\in J_l} A_i$ ，并且$(K_i)_{i\in J_l}$的乘积结构K'_l存在，K'为$(K'_l)_{l\in L}$的乘积结构，则当且仅当$(K'_l)_{l\in L}$的乘积结构K'存在，并且$\prod\limits_{i\in I} A_i$到$\prod\limits_{l\in L} B_l$的规范映射为同构时，$(K_i)_{i\in I}$的乘积结构$K$存在．

证明：根据结构规则10可证．

结构规则 14.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的结构，$B_i \subset A_i$，K_i在B_i上导出的结构为K'_i．$(K_i)_{i\in I}$的乘积结构K_0存在，则下列两个命题等价：

第一，存在K_0在$\prod\limits_{i\in I} B_i$上导出的结构$K$；

第二，存在$(K'_i)_{i\in I}$的乘积结构K'．

并且，$K = K'$．

证明：令j_i为B_i到A_i的规范映射，j为$\prod\limits_{i\in I} B_i$到$\prod\limits_{i\in I} A_i$的规范映射，令$p_i$为$\prod\limits_{i\in I} A_i$的指标$i$的射影函数，$p'_i$为$\prod\limits_{i\in I} B_i$的指标$i$的射影函数，则$p_i \circ j = j_i \circ p'_i$．根据结构规则10，$(A_i, K_i, j_i \circ p'_i)$的起始结构为$K'$，$(A_i, K_i, p_i \circ j)$的起始结构为$K$，得证．

结构规则 15.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的结构，f_i为E到A_i的映射，K为$(K_i)_{i\in I}$的乘积结构．则当且仅当结构K在E到A的映射$x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$下存在原像时，存在关于$(A_i, K_i, f_i)_{i\in I}$的起始结构．并且，两个结构相等．

证明：令E到A的映射$x \mapsto (f_i(x))_{i\in I}$为$f$，则$f_i = pr_i \circ f$，根据结构规则10可证．

结构规则 16.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$、$(B_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的结构，K'_i为X在B_i上的结构，$(K_i)_{i\in I}$、$(K'_i)_{i\in I}$的乘积结构存在，对任意$i \in I$，f_i为A_i到B_i的σ态射，则$(f_i)_{i\in I}$为A到B的σ态射．

证明：令$f = (f_i)_{i\in I}$，p_i为$(A_i)_{i\in I}$的指标i的射影函数，q_i为$(B_i)_{i\in I}$的指标i的射影函数，则$q_i \circ f = f_i \circ p_i$，根据补充结构规则11，$p_i$为$\sigma$态射，故$q_i \circ f$为$\sigma$态射，因此$f$为$\sigma$态射．

结构规则 17.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、B分别具有结构K_A、K_B，K_A和K_B的乘积结构为K．令f为A到B的映射，$F \subset A \times B$，p为A到F的双射$x \mapsto (x, f(x))$，则当且仅当K在F上导出的结构K'存在，且p为A到具有K'的F的同构时，f为A到B的σ态射．

证明：

充分性：令j为F到$A \times B$的规范映射，则$f = pr_2 \circ j \circ p$，因此f是σ态射．

必要性：令K_F是K_A通过p的转换在F上得到的结构，j为F到$A \times B$的规范映射．根据定义，$j \circ p$为σ态射，由于p^{-1}为同构，故j为σ态射．令E为集合，g为E到F的映射，且$j \circ g$为σ态射，故$pr_1 \circ j \circ g$为σ态射，即$p^{-1} \circ g$为σ态射，故g为σ态射．综上，K_F是K在F上导出的结构，且p为A到具有K_F的F的同构，得证．

结构定义 34. 最终结构（*structure finale*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合，并且，对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的结构，f_i为A_i到E的映射．对于X在E上的结构F，如果对任意集合E'，X在E'上的结构F'，E到E'的映射g，均有(g为E到E'的σ态射) $\Leftrightarrow$ $(\forall i)(i \in I \Rightarrow g \circ f_i$为$A_i$到$E'$的$\sigma$态射)，则称$F$为关于三元组族$(A_i, K_i, f_i)_{i\in I}$的最终结构．

补充结构规则 12.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合；对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的

结构，f_i为A_i到E的映射．如果关于三元组族$(A_i, K_i, f_i)_{i\in I}$的最终结构为F，则对任意$i \in I$，f_i为具有K_i的A_i到具有F的E的σ态射．

证明：类似补充结构规则11可证．

结构规则 18.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，对于集合E，如果存在X在E上的结构F，为关于三元组族$(A_i, K_i, f_i)_{i\in I}$的最终结构，那么，对任意X在E上的结构F'，如果对任意$i \in I$，f_i为具有K_i的A_i到具有F'的E的σ态射，则F比F'更细，进而，F是唯一的．

证明：类似结构规则论10可证．

结构规则 19.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合，同时，对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的结构．$(J_l)_{l\in L}$是I的划分，$(B_l)_{l\in L}$是集族．对任意$l \in L$，h_l为B_l到E的映射；对任意$l \in L$和$i \in J_l$，g_{li}为A_i到B_l的映射，并且$f_i = h_l \circ g_{li}$．如果，对任意$l \in L$，存在X在B_l上的结构K'_l，为关于三元组族$(A_i, K_i, g_{li})_{i\in J_l}$的最终结构，则下列两个命题等价：

第一，存在X在E上、关于$(A_i, K_i, f_i)_{i\in I}$的最终结构U；

第二，存在X在E上，关于$(B_l, K'_l, h_l)_{l\in L}$的最终结构$U'$．

并且，$U = U'$．

证明：类似结构规则论11可证．

结构定义 35. 结构的直像（*image direct d'une structure*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，关于$(A, K, f)_{i\in\{i\}}$的最终结构，称为结构K在f下的直像．

结构定义 36. 商结构（*structure quotient*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在A上的结构，R为在A上的等价关系，f为A到A/R的规范映射，如果结构K在f下的直像存在，则称其为结构K对于等价关系R的商结构．

补充结构规则 13.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、B分别具有X的结构K、K'．f为A到B的σ态射，R为等价关系$f(x) = f(y)$，h为A到A/R的规范映射，j为$f\langle A\rangle$到B的规范映射．设K对于R的商结构为K_0，K'在$f\langle A\rangle$上导出的结构为K'_0，令f的规范分解为$j \circ g \circ h$，其中g为A/R到$f\langle A\rangle$的双射，则g为具有K_0的A/R到具有K'_0的$f\langle A\rangle$的σ态射．

证明：根据定义，$j \circ g$为A/R到B的σ态射，因此，g为σ态射.

结构规则 20.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、A'分别具有X的结构K、K'．R为在A上的等价关系，R'为A'上的等价关系．K对于R的商结构为K_0，K'对于R'的商结构为K'_0．如果f是A到A'的σ态射，并且是同等价关系R和R'相容的映射，g为f对于R和R'通过商导出的映射，则g为A/R到A'/R'的σ态射.

证明：令h为A到A/R的规范映射，h'为A'到A'/R'的规范映射，故$g \circ h = h' \circ f$，由于h'、f为σ态射，故$g \circ h$为σ态射，根据定义，g为σ态射.

结构规则 21.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，A为集合，K为X在A上的结构．R、S为在A上的等价关系，S比R更细，K对于R的商结构为K'，当且仅当K对于S的商结构K_0存在，并且，具有K_0的A/S到具有K''的$(A/R)/(S/R)$的规范映射为同构时，K'对于S/R的商结构K''存在.

证明：令j为A到A/R的规范映射，k为A/R到$(A/R)/(S/R)$的规范映射．根据结构规则19，K''为K'对于S/R的商结构，等价于K''为$(A, K, k \circ j)_{i \in \{i\}}$的最终结构.

如果K_0存在，且A/S到 $(A/R)/(S/R)$的规范映射为同构，根据定义，K''为$(A, K, k \circ j)_{i \in \{i\}}$的最终结构．反过来，如果$K''$为$(A, K, k \circ j)_{i \in \{i\}}$的最终结构，令$g$为$A/S$到$(A/R)/(S/R)$的规范映射，则$K_0 = g^{-1}(K'')$，则$g$为同构，并且，根据定义，$K_0$为$K$对于$S$的商结构，得证.

习题 199.

令S为符号P、P^-、X、X^-、x_1、x_2、$\cdots$、x_n组成的集合，P和P^-的权重为1，X和X^-的权重为2，其他符号的权重为0.

对于$L_0(S)$的单词A，按下列方式定义A的变异数：

令任意字母x_i、P、X的变异数为0，P^-、X^-的变异数为*1*;

如果A的符号有偶数个变异数为1的符号，则A的变异数为0，否则A的变异数为*1*.

满足下列条件之一的平衡单词A，称为有符号阶梯类：

第一，A为符号x_i;

第二，A为$fA_1A_2 \cdots A_p$的形式，其中$p = 1$或者$p = 2$，A_i（$i \in [1, p]$）均为平衡单词且为符号阶梯类，同时，如果$f = X$，则A_1、A_2的变异数均为0，如果$f = X^-$，则A_1、A_2的变异数均为1.

符号阶梯类的变异数为0的，称为协变的，变异数为1的，称为逆变的.

将有符号阶梯类中的所有P^-替换为P，X^-替换为X，得到平衡单词A^*，A^*在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的实现，称为有符号阶梯类A在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的实现，记作$A(E_1, E_2, \cdots, E_n)$.

令E_1、E_2、$\cdots$、E_n、E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n为集合，对于$i \in [1, n]$，f_i为E_i到E'_i的映射，求证：

对任意有符号阶梯类S，按照下列规则，任何$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$都是某个确定的映射：

第一，如果S是协变的，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$S(E_1, E_2, \cdots, E_n)$到$S(E'_1, E'_2, \cdots, E'_n)$的映射，如果$S$是逆变的，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$S(E'_1, E'_2, \cdots, E'_n)$到$S(E_1, E_2, \cdots, E_n)$的映射；

第二，如果S是x_i，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$f_i$；

第三，如果S是PT（或P^-T）的形式，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^T$在子集上的规范扩展（或在子集上的逆扩展）；

第四，如果S是XUV或X^-UV的形式，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^U$和$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^V$在乘积集合上的规范扩展.

$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$称为$f_1$、$f_2$、$\cdots$、$f_n$和有符号阶梯类$S$对应的规范扩展. 对于$i \in [1, n]$，$f_i$为$E_i$到$E'_i$的映射，$f'_i$为$E'_i$到$E''_i$的映射，那么：

如果S是协变的，则$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S \circ \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$.

如果S是逆变的，则$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S \circ \{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$.

并且，如果对任意$i \in [1, n]$，f_i为双射，f'_i为其反函数，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$和$\{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$均为双射且互为反函数.

同时，令S^*为将S中的所有P^-替换为P，X^-替换为X得到的阶梯类，则如果S是协变的，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle^{S^*}$，如果$S$是逆变的，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S = \langle f'_1, f'_2, \cdots, f'_n \rangle^{S^*}$.

证明：

用数学归纳法可证任何$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$都是某个确定的映射.

类似结构规则1可以证明：

如果S是协变的，则$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S \circ \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$.

如果S是逆变的，则$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S \circ \{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$.

类似结构规则2可以证明$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$和$\{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$均为双射.

并且，用数学归纳法可证$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S$是恒等对应，故$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$和$\{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$互为反函数.

根据补充定理78、补充定理88及数学归纳法可以证明：

如果S是协变的，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^{S^*}$，如果$S$是逆变的，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S = \langle f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\rangle^{S^*}$.

习题 200.

令M为比集合论强的理论，S是在$n+m$个字母上的有符号阶梯类，X是结构种类，其主要基集合是x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合是A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征为$s \in \mathcal{P}(S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_n))$.

令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，U'为X在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的结构，对于$i \in [1, n]$，f_i为E_i到E'_i的映射.

求证：按照下列条件定义的$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$是态射：

第一，如果S是协变的，则$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U) \subset U'$；第二，如果$S$是逆变的，则$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U') \subset U$.

并且，可以通过适当的选择，定义偏序结构、代数结构和拓扑结构的态射.

证明：

根据定义可证$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$的集合符合态射集合的三个条件.

对于偏序结构，单增映射为态射；对于代数结构，令A、A'上的合成运算分别为p、p'，如果$p'(f(x), f(y)) = f(p(x, y))$，则$f$为态射；对于拓扑结构，令$A$、$A'$上的拓扑分别为$V$、$V'$，如果$X' \in V' \Rightarrow f^{-1}(X') \in V$，则$f$为态射.

习题 201.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、B、C都具有结构种类X的结构，A到B映射f是满态射，B到C的映射g是态射，$g \circ f$是同构，求证：f、g都是同构.

证明：类似定理21（3）、定理21（4）、定理21（6）可证.

习题 202.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、B、C、D都具有结构种类X的结构，A到B映射f、B到C的映射g、C到D的映射h都是态射，$g \circ f$、$h \circ g$都是同构，求证：f、g、h都是同构.

证明：类似习题51可证.

习题 203.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A具有结构种类X的结构U，集合B具有结构种类X的结构U'，f为A到B的态射，g为B到A的态射，令$M = \{x | x \in A$与$g(f(x)) = x\}$，$N = \{y | y \in B$与$f(g(y)) = y\}$，M具有U在M上导出的结构，N具有U'在N上导出的结构，求证：M同构于N.

证明：类似习题84可证.

习题 204.

结构种类X的主要基集合为A，辅助基集合为k，代表特征为$s \in (\mathcal{P}(A\times A\times A)\times\mathcal{P}(A\times A\times A)\times\mathcal{P}(k\times A\times A))\times\mathcal{P}(A)$．公理为：($pr_1 s$为有单位元的$k$代数结构)与($pr_2 s$为不可约理想)．集合$A$、$A'$分别具有结构种类$X$的结构$(F,H)$、$(F',H')$，如果$f$是$A$到$A'$的$\sigma$态射，并且，其将单位元映射为单位元，同时$f(H)\subset H'$，则称$f$为$k$代数同态．在$A$上的$X$的结构的集合，按($K_1$为$X$在集合$E$上的结构)与($K_1$为$X$在集合$E$上的结构)与($K_1$比$K_2$更细)排序.

试给出X在A上的结构族(S_i)，使(S_i)的最小上界存在，但不是(A_i,S_i,Id_i)的起始结构，其中A_i是具有结构S_i的集合A，Id_i是A到A_i的规范映射.

同时，试给出X在A上的结构族(S_i)，使(S_i)的最大下界存在，但不是(A_i,S_i,Id_i)的最终结构，其中A_i是具有结构S_i的集合A，Id_i是A_i到A的规范映射.

答：对于前半段，考虑多项式环$A=k[T]$，则A的不可约理想是极大理想的幂．令F为k代数结构，p、q为A的不同极大理想．考虑X在A上的结构$A_p=(F,p)$、$A_q=(F,q)$，其最小上界是$(F,(0))$．令$B=p\cap q$，考虑B到A的映射$f=(x\mapsto x)$，其不是同态，但$f\circ Id_p$、$f\circ Id_q$是同态，故$(F,(0))$不是起始结构．对于后半段，A的对偶空间和结构A_p、A_q的转置，符合题目条件.

注：习题204涉及尚未介绍的“代数结构”知识.

习题 205.

结构种类X的主要基集合为A，辅助基集合为实数集R，代表特征为$s\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))\times\mathcal{P}(R\times A)$．公理为：$(\forall V')((V'\subset pr_1 s)\Rightarrow((\bigcup\limits_{X\in V'}X)\in pr_1 s))$与$(A\in pr_1 s)$与$(\forall X)(\forall Y)((X\in pr_1 s$与$Y\in pr_1 s)\Rightarrow(X\bigcap\limits_{Y}\in pr_1 s))$与(存在实数$a>0$，使$pr_2 s$为区间$[0,a]$到$A$对拓扑$pr_1 s$的连续单射的函数图)．集合$A$、$A'$分别具有结构种类$X$的结构$(V,f)$、$(V',f')$，定义$A$到$A'$的$\sigma$态射为：$g$为对$V$、$V'$的连续映射，并且$g$的函数图$F$满足$F\circ f\subset f'$，则称$g$为$\sigma$态射.

求证：该态射可以通过习题*199*的方式来定义；并且，对具有任意X的结构的集合A_1、A_2，存在在$A_1\times A_2$上的乘积结构.

同时，试给出一个例子，在$A_1\times A_2$上的乘积结构在pr_1下的直像所具有的结构，不是在A_1上原本的结构.

证明：

根据定义可证该态射可以通过习题199的方式来定义.

令A_1具有结构(V_1,f_1)，f_1的定义域为$[0,a_1]$，A_2具有结构(V_2,f_2)，f_2的定义域为$[0,a_2]$，则结构$(V_1\times V_2,f)$为其乘积结构，其中f为$x\mapsto(f_1(x),f_2(x))(x\in[0,a_1]\cap[0,a_2])$.

如果$a_1>a_2$，则直像的第二射影，是f_1在$[0,a_2]$上的限制.

注：习题205涉及尚未介绍的“拓扑”知识.

习题 206.

结构种类X的主要基集合为A，代表特征为$s \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times A \times A$，公理为：$(\forall V')((V' \subset pr_1pr_1s) \Rightarrow ((\bigcup_X \in V'X) \in pr_1pr_1s))$与$(A \in pr_1pr_1s)$与$(\forall X)(\forall Y)((X \in pr_1pr_1s$与$Y \in pr_1pr_1s) \Rightarrow (X \bigcap_Y \in pr_1pr_1s))$与$prr2pr_1s \neq pr_2s$．集合$A$、$A'$分别具有结构种类$X$的结构$(V,a,b)$、$(V',a',b')$，定义$A$到$A'$的$\sigma$态射为：$f$为对$V$、$V'$的连续映射，并且$f(a)=a'$，$f(b)=b'$，则称$f$为$\sigma$态射．

求证：该态射可以通过习题*199*的方式来定义；并且，对分别具有任意X的结构F、F'的集合A、B，存在在$A \times B$上的乘积结构，并且，该乘积结构在pr_1（或pr_2）下的直像所具有的结构，为A（或B）．同时，同时，试给出pr_1的截面不存在，但存在A到$A \times B$的σ态射的例子．

证明：

根据定义可证该态射可以通过习题199的方式来定义．

令A的结构为(V,a,b)，B的结构为(V',a',b')，则$(V \times V',(a,a'),(b,b'))$为其乘积结构．

令A为联通空间，B为离散空间．则pr_1的截面不存在，但存在A到$A \times B$的σ态射．

注：习题206涉及尚未介绍的“拓扑”知识．

习题 207.

X为域结构种类，

求证：

可以这样定义σ态射：f或者为K到K'的群同态，或者为f_0，其中$f_0(0)=0$，$f_0(x)=1$（$x \neq 0$）．

并且，该态射具有以下性质：对任何域K，存在K的结构在$\{0,1\}$导出的结构（同构于F_2），令R为等价关系，其等价类为$\{0\}$和K^*，其中$K^* = K - \{0\}$，存在K的结构对于R的商结构（同构于F_2）．

证明：根据定义可证．

注：习题207涉及尚未介绍的“域”知识．

习题 208.

X为有序阿基米德完全域结构种类．对任意具有X的结构的集合A，令g_A为A到R唯一同构．A、B为具有X的结构的两个集合，

求证：可以按下列方式定义A到B的σ态射：

对任意$x \in A$，均有$g_B(f(x)) \geq g_A(x)$，则称f为σ态射．

并且，尽管结构种类X是统一的，但存在不同构的双射态射．

证明：

根据定义可证σ符合态射集合的条件．

令k为映射$x \mapsto a_x$（当$x \geq 0$时，$a = 2$，当$x < 0$时，$a = 1/2$），$f = g_B^{-1} \circ k \circ g_A$，则$f$为$A$到$B$的双射态射，但不是同构.

注：习题208涉及尚未介绍的"域"知识.

习题 209.

在理论M中，结构种类X只有一个主要基集合，其代表特征为$s \in F(x)$，公理为R. $A(x)$为X在x上的结构的集合. σ为项，其符合态射的前两个条件，并符合下列条件：

令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'分别是具有X的结构K、K'的集合，E、E'、K、K'都不含字母s、t、x、y，f为E到E'的双射，则$((f)$为同构$) \Rightarrow f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$. 求证：

（1）$s \in A(x)$与$t \in A(x)$与$Id_x \in (x|y)\sigma \cap (x|y)(s|p)(t|s)(p|t)\sigma$（其中$\sigma$不含字母$p$）是在$A$上关于$s$、$t$的等价关系.

（2）令$B(x)$为商集$A(x)/q$，g_x为$A(x)$到$B(x)$的规范映射. 假设$s' \in B(x)$是可转换的，W为结构种类，其代表特征为$s' \in \mathcal{P}(F(x))$，公理为$s' \in B(x)$. 令σ'为满足下列条件的x到y的映射的集合：$s' \in B(x)$与$y' \in B(y)$，并且，存在$s \in A(x)$、$t \in B(x)$，使$s' = g_x(s)$、$t' = g_y(t)$、$f \in \sigma$. 求证：对于结构种类W，σ'为态射，并且$\sigma \subset \sigma'$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

4.3 普遍性映射（Applications universelles）

结构定义 37. 到具有结构的集合的映射（*application dans un ensemble muni d'une structure*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项. 在理论M_X中，s为通用结构，如果项α满足下列条件，则$(F|x)(K|s)\alpha$的元素，称为E到具有K的F的α映射：

第一，在理论M_X中，$\alpha \subset \mathcal{F}(E;x)$；

第二，令M'为比M强的理论，在理论M'中，K、K'分别为X在F、F'上的结构，如果f是F到F'的σ态射，则$g \in (F|x)(K|s)\alpha \Rightarrow f \circ g \in (F'|x)(K'|s)\alpha$.

结构定义 38. 具有普遍性的集合和映射（*ensemble et application universels*），普遍性映射问题的解（*solution du problème d'application universelle*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，f为E到具有K的F的α映射，如果对任意具有X的任意结构的集合G和任意E到G的α映射g，存在唯一的F到G的σ态射h，使$g = h \circ f$. 则称集

合F和α映射f具有普遍性．有序对(F,f)称为关于X、σ、α对E的普遍性映射问题的解，在没有歧义的情况下也可以简称为对E的普遍性映射问题的解．

补充结构规则 14.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，在理论M'中，(F',f')和(F'',f'')都是对E的普遍性映射问题的解，则存在F'到F''的同构g，令其逆同构为g^{-1}，使$f'=g^{-1}\circ f''$，$f''=g\circ f'$．

证明：根据定义，存在映射h_1、h_2，使$f'=h_1\circ f''$，$f''=h_2\circ f'$．因此，$h_1\circ h_2=Id_{F'}$，$h_2\circ h_1=Id_{F''}$，根据结构规则8可证．

补充结构规则 15.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，在理论M'中，F为具有X的结构的集合．f为E到F的α映射，则当且仅当(F,f)满足下列两个条件时，其为对E的普遍性映射问题的解：

第一，对任意集合G和任意E到G的α映射g，存在F到G的σ态射h，使$g=h\circ f$；

第二，对任意集合G，F到G的任何两个σ态射，如果在$f\langle E\rangle$上重合，则相等．

证明：

充分性根据定义可证．

必要性：如果(F,f)为对E的普遍性映射问题的解，对任意集合G，F到G的任何两个σ态射h、h'，如果在$f\langle E\rangle$上重合，则$h\circ f=h'\circ f$，根据定义，$h=h'$，得证．

结构规则 22.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，则在理论M'中，满足下列三个条件时，对E的普遍性映射问题的解存在：

第一，对X在任意集族上的结构族，乘积结构存在；

第二，令$(F_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i\in I$，f_i为E到F_i的α映射，则E到$\prod_{i\in I}F_i$的映射$(f_i)_{i\in I}$也是α映射；

第三，存在具有以下性质的基数m：对任意集合F和E到F的α映射，存在F的可采子集G，满足$f\langle E\rangle\subset G$、$Card(G)\leq m$、$f$通过$F$的子集$G$导出的映射也是$\alpha$映射并且任何两个以$G$为定义域的$\sigma$态射只要在$f\langle E\rangle$上重合则相等．

证明：

令$s\in S(x)$为X的类型化，L是符合下列条件的三元组(C,Q,P)的集合：

$C\subset m$，Q是X在C上的结构，P是E到具有Q的C的α映射的图．对任意$l\in L$，令$l=(C_l,Q_l,P_l)$，f_l为映射(P_l,E,C_l)，令$F=\prod_{l\in L}X_l$，f为$x\mapsto(f_l(x))_{l\in L}$，因此$f$为$\alpha$映射．

对任意E到H的映射h，令G为满足第三个条件的集合，j为G到H的规范映射，g为E到G的映射并且其图和h相等，则$h = j \circ g$，故g是E到G的α映射．令$G' \subset m$，并和G等势，令k为G到G'的双射．因此，存在l，使$X_l = G'$．故$k \circ g = f_l$，$q = j \circ k^{-1} \circ pr_l$，进而$h = q \circ f$，因而补充结构规则15的第一个条件成立．进而，根据第三个条件，补充结构规则15的第二个条件成立，得证．

结构规则 23.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，在理论M'中，(F, f)为关于X、σ、α对E的普遍性映射问题的解，则当且仅当对任意$x \in E$、$y \in E$，均存在具有X的结构的G以及E到G的α映射h使$h(x) \neq h(y)$时，f为单射．

证明：根据定义可证．

结构定义 39. 分开元素的映射（*application qui sépare les éléments*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，在理论M'中，(F, f)为关于X、σ、α对E的普遍性映射问题的解，如果f为单射，则称f为分开E的元素的映射．

习题 210.

E为拓扑空间，结构种类X和态射按照习题*205*或者习题*206*定义．α映射为E到具有结构种类X的某个集合的连续映射．求证：不存在E的普遍性映射问题的解．

证明：

按照习题205定义的情况下，令A具有结构(V, f)，其中f为$[0, a]$到A的映射，设(A', k)为A的普遍性映射问题的解，A'具有结构(V', f')，其中f'为$[0, a']$到A'的映射．考虑带有结构(V'', f'')的集合A''，和A到A''的连续映射g，其中f''为$[0, a'']$到A'的映射且不是满射，$g(0) \notin f''([0, a''])$．设$h$为使$g = h \circ k$的态射，则$h \circ k(A) \subset f''([0, a''])$，矛盾．

按照习题206定义的情况下，令A具有结构(V, a, b)，设(A', f)为A的普遍性映射问题的解，A'具有结构(V', a', b')．考虑任意带有结构(V'', f'')的集合A''，和A到A''的连续映射g，如果$f(a) = f(b)$，令$g(a) \neq g(b)$，如果$f(a) \neq f(b)$，令$g(a) = g(b)$，则均不存在态射h使$g = h \circ f$，矛盾．

注：习题210涉及尚未介绍的“拓扑”知识．

习题 211.

E为交换域，X为代数闭交换域结构种类．定义σ态射为同态，α映射为E到代数闭域的同态．F_E为E的代数闭包．求证：E到F_E的规范单射，符合普遍性的映射问题的存在性条件，但不存在E的普遍性的映射问题的解．

证明：根据定义可证．注：习题211涉及尚未介绍的“交换域”知识．

习题 212.

X为结构种类，$(A_i)_{i\in I}$为两两不相交的集族，对任意$i\in I$，K_i为X在A_i上的结构，E为$(A_i)_{i\in I}$的并集．定义X的σ态射，并定义α为E到具有X的结构的集合F并符合下列条件的映射f的集合：

对任意$i\in I$，f在A_i上的限制是态射．

令M'为比M强的理论，求证：在理论M'中，如果E的普遍性映射问题的解(F,f)存在，并且f为满射，则F具有的结构K为族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的最终结构，其中f_i为f在A_i上的限制．

此外，令G为集合，对任意$i\in I$，g_i为A_i到G的映射，如果族$(A_i,K_i,g_i)_{i\in I}$的最终结构存在，则$g_i=g\circ f_i$，其中g为F到G的态射，G具有的结构是F具有结构在f下的直像．

证明：

对任意集合F'以及F到F'的映射p，如果p为态射，根据定义，对任意$i\in I$，f_i为态射，故$p\circ f_i$为态射；反过来，如果对任意$i\in I$，$p\circ f_i$为态射，则$p\circ f$为α映射，则存在F到F'的态射p'使$p\circ f=p'\circ f$．因此$p=p'$，故p为态射．

如果族$(A_i,K_i,g_i)_{i\in I}$的最终结构存在，则对任意$i\in I$，g_i为态射，故存在F到G的态射g，且$g_i=g\circ f_i$；同时，对任意G到G'的映射q，如果q为态射，则$q\circ g$为态射，反过来，如果$q\circ g$为态射，则任意$i\in I$，$q\circ g_i$为态射，故q为态射．

注：原书习题212遗漏“f为满射”的条件．