

布尔巴基数学基础（第1卷）集合论学习笔记

何嘉惠，黄芸芸

二零二四年十月

说明

本文系《布尔巴基数学基础（第1卷）集合论》（施普林格出版社2006年版）学习笔记，包括下列内容：

元数学（*métamathématique*）：

- （1）元数学定义1-65：大部分系原书内容，部分做了调整；
- （2）记号定义1-23：大部分系原书内容，部分做了调整；
- （3）替代规则（*critère de substitution*）1-12：按原书编号；
- （4）补充替代规则1-8：即原书未编号或自行补充的替代规则，一项规则为公理模式的命题，也纳入补充替代规则；
- （5）形成规则（*critère formatif*）1-13：按原书编号；
- （6）补充形成规则1-2：即原书未编号或自行补充的形成规则；
- （7）证明规则（*critère déductif*）1-63：按原书编号；
- （8）补充证明规则1-91：即原书未编号或自行补充的证明规则；
- （9）语法定义1-10：系原书第一章附录的定义；
- （10）语法定理1-8：系原书第一章附录的定理；
- （11）补充语法定理1-2：即自行补充的语法定理；

数学（*mathématique*）：

- （1）定义1-206，原书提及的定义，部分做了调整；
- （2）公理模式1-8，原书使用的8个公理模式；
- （3）显式公理1-4，原书使用的4个显式公理；
- （4）定理1-193，原书以斜体标明的定理；
- （5）补充定理1-432，原书未以斜体标明的内容或自行补充的定理；
- （6）结构定义1-39：系原始第四章的定义；
- （7）结构规则1-23：按原书第四章的编号；
- （8）补充结构规则1-14：即原书未编号或自行补充的结构规则。

习题（*exercice*）1-212：按照原书顺序编号，它可能属于数学也可能属于元数学，不做区分。其中部分习题的表述做了调整。

注：元数学定义中可能出现“自然数”等概念，但与数学中的“自然数”等概念无关，不存在循环定义。

目录

说明	i
1 形式数学的描述 (Description de la mathématique formelle)	1
1.1 项和公式 (Termes et relations)	1
1.2 定理 (Théorèmes)	8
1.3 逻辑理论 (Théories logiques)	11
1.4 量词理论 (Théories quantifiées)	23
1.5 等式理论 (Théories égalitaires)	29
1.6 项和公式的性质 (Caractérisation des termes et des relations)	35
2 集合论 (Théorie des ensembles)	48
2.1 集合化公式 (Relations collectivisantes)	48
2.2 有序对 (Couples)	57
2.3 对应 (Correspondances)	61
2.4 集族的并集和交集 (Réunion et intersection d'une famille d'ensembles)	87
2.5 集族的乘积 (Produit d'une famille d'ensembles)	99
2.6 等价关系 (Relations d'équivalence)	114
3 偏序集, 基数, 自然数 (Ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers)	139
3.1 偏序关系, 偏序集 (Relations d'ordre, ensembles ordonnés)	139
3.2 良序集 (Ensembles bien ordonnés)	180
3.3 集合等势, 基数 (Ensembles équipotents, cardinaux)	214
3.4 自然数, 有限集合 (Entiers naturels, ensembles finis)	224
3.5 自然数的运算 (Calcul sur les entiers)	235
3.6 无穷集合 (Ensembles infinis)	251
3.7 射影极限和归纳极限 (Limites projectives et limites inductives)	293

4 结构 (Structures)	314
4.1 结构和同构 (Structures et isomorphismes)	314
4.2 态射和派生结构 (Morphismes et structures dérivées)	323
4.3 普遍性映射 (Applications universelles)	334

Chapter 1

形式数学的描述 (Description de la mathématique formelle)

1.1 项和公式 (Termes et relations)

元数学定义 1. 理论 (*théorie*)

理论是指通过预先确定的“特别符号”、“公理模式”、“显式公理”三栏内容生成的规则体系.

注: 理论是元数学的基本概念, 在元数学中, 实际上只能描述而无法定义. 其中提到的“特别符号”、“公理模式”、“显式公理”将在后面定义.

元数学定义 2. 特别符号 (*signe spécifique*)

特别符号是指理论的“特别符号”一栏列举的字符.

元数学定义 3. 特别符号的元 (*poid de signe spécifique*)

特别符号的元, 是指理论列举特殊符号时, 同时列出的对应自然数.

元数学定义 4. 逻辑符号 (*signe logique*)

逻辑符号是指 \square 、 τ 、 \vee 、 \neg 四个符号.

注:

\vee 表示“析取”, \neg 表示“否定”.

τ 与某种性质相关联: 令论域为良序集, 如果论域中存在使该性质成立的对象, 则它表示论域中具备此种性质的第一个对象; 如果论域中不存在使该性质成立的对象, 则它论域中的第一个对象. 并且, 论域的第一个对象除了与自身相等外, 不具备任何其他性质.

\square 必须与左侧的某一个 τ 用连线连接, 表示 τ 的参数; τ 可以与右侧的多个 \square 连接, 也可以独立存在, 表示没有参数.

元数学定义 5. 字母 (*lettre*)

字母是指大写或小写拉丁字母，其可以附带一个自然数下标，也可以附带有限个单引号的上标。

注：字母的数量为可数集即可，按照习惯，仅允许附带一个自然数下标和有限个单引号上标。

元数学定义 6. 符号 (*signe*)

逻辑符号、字母，特别符号统称符号。

元数学定义 7. 语句 (*assemblage*)，连线 (*lien*)

有限符号序列，可以不附加任何线，也可以附加一条或多条线，但任何一条线只能把一个符号和另一个符号连接起来，称为语句。语句附加的线，称为连线。

记号定义 1. 符号序列的连接 (*connexion de suites de signes*)

令 A 、 B 为符号有限序列， AB 表示将符号序列 B 依次写在符号序列 A 的右边而得到的序列。

记号定义 2. 蕴涵 (*implication*)

在语句中，“ $\vee \neg$ ” 简记为 “ \Rightarrow ”。

记号定义 3. 中序表达式 (*notation infixée*)

语句也可以用中序表达式表示。

中序表达式的运算符，分为五个优先级。

中序表达式的运算符，在定义时没有特别说明优先级的，如果该运算符有两个参数，且没有使用上标、下标或者 $\langle \rangle$ 、 $()$ 、 $\{ \}$ ，则为第二优先级；其他情况下，为第一优先级。

其中，第二优先级、第三优先级、第四优先级、第五优先级的运算符均为左结合，第一优先级运算符均为右结合。可以前后加括号改变符号优先级。

注：

语句采用前序表达式，但为符合通常的书写习惯，故设置改写为中序表达式的规则。

原则上，只有一个参数，或者包含上下标或各种括号，为第一优先级；对两个项进行运算得到一个新项，为第二优先级；对两个项进行运算得到一个公式，为第三优先级；析取和合取为第四优先级；蕴含和等价为第五优先级。

记号定义 4. 取得对象 (*obtention de l'objet*)

令 A 为语句， x 为字母，则用 $\tau_x(A)$ 表示这样的语句：语句 τA 当中所有的符号 x 替代为符号 \square ，并将替代得到的 \square 和开头的 τ 连线。

记号定义 5. 替代 (*substitution*)

令 A 、 B 为语句， x 为字母，则用 $(B|x)A$ 表示以 B 替代 A 当中所有的符号 x 而得到的语句。

注：原书还使用了带参数的语句取代替代记号，本文不采用这种写法，仍使用替代记号。

补充替代规则 1.

令 A 为语句， x 为字母，则 $(x|x)A$ 和 A 相同。

证明：根据定义可证。

替代规则 1.

令 A, B 为语句， x, x' 为字母，如果 A 不包含 x' ，则 $(B|x)A$ 和 $(B|x')(x'|x)A$ 相同。

证明：对 A 的长度用数学归纳法可证。

补充替代规则 2.

令 A 为语句， x, y 为字母，且 A 不包含 x ，则 $(y|x)A$ 和 A 相同。

证明：根据定义可证。

补充替代规则 3.

令 A 为语句， x, x' 为字母，如果 A 不包含 x' ，则 $(x|x')(x'|x)A$ 和 A 相同。

证明：根据替代规则1、补充替代规则1可证。

替代规则 2.

令 A, B, C 为语句， x, y 为不同字母，如果 B 不包含 y ，则 $(B|x)(C|y)A$ 和 $(C'|y)(B|x)A$ 相同，其中 C' 为 $(B|x)C$ 。

证明：对 A 的长度用数学归纳法可证。

补充替代规则 4.

令 A 为语句， x, y, z 为不同字母，且 A 不包含 z ，则 $(y|z)(x|y)(z|x)A$ 和 $(x|z)(y|x)(z|y)A$ 相同。

证明：

令 u 为不同于 x, y, z 的字母，且 A 不包含 u 。

根据替代规则1， $(x|z)(y|x)(z|y)A$ 和 $(x|z)(y|u)(u|x)(z|y)$ 相同；

根据替代规则2， $(x|z)(y|u)(u|x)(z|y)$ 和 $(y|u)(x|z)(z|y)(u|x)A$ 相同；

根据替代规则1， $(y|u)(x|z)(z|y)(u|x)A$ 和 $(y|u)(x|y)(u|x)A$ 相同；

根据补充替代规则3， $(y|u)(x|y)(u|x)A$ 和 $(y|u)(x|y)(u|z)(z|u)(u|x)A$ 相同；

根据替代规则1， $(y|u)(x|y)(u|z)(z|u)(u|x)A$ 和 $(y|u)(u|z)(x|y)(z|u)(u|x)A$ 相同；

根据替代规则1， $(y|u)(u|z)(x|y)(z|u)(u|x)A$ 和 $(y|z)(x|y)(z|x)A$ 相同。

得证。

注： $(y|z)(x|y)(z|x)A$ 和 $(x|z)(y|x)(z|y)A$ 即为将语句 A 中的 x 和 y 交换后得到的语句。

替代规则 3.

令 A 为语句, x 、 x' 为字母, 如果 A 不包含 x' , 则 $\tau_x(A)$ 和 $\tau_{x'}(A')$ 相同, 其中 A' 为 $(x'|x)A$.

证明: 对 A 的长度用数学归纳法可证.

替代规则 4.

令 A 、 B 为语句, x 、 y 为不同字母, 如果 B 不包含 x , 则 $(B|y)\tau_x(A)$ 和 $\tau_x(A')$ 相同, 其中 A' 为 $(B|y)A$.

证明: 对 A 的长度用数学归纳法可证.

替代规则 5.

令 A 、 B 、 C 为语句, x 为字母, s 为特别符号, 则 $(C|x)(\neg A)$ 、 $(C|x)(\vee AB)$ 、 $(C|x)(\Rightarrow AB)$ 、 $(C|x)(sAB)$ 分别和 $\neg A'$ 、 $\vee A'B'$ 、 $\Rightarrow A'B'$ 、 $'B'$ 相同, 其中 A' 为 $(C|x)A$, B' 为 $(C|x)B$.

证明: 对 A 的长度用数学归纳法可证.

元数学定义 8. 第一类语句 (*assemblage de première espèce*), 第二类语句 (*assemblage de deuxième espèce*)

以 τ 开头的语句或单个字母, 称为第一类语句, 其他语句称为第二类语句.

元数学定义 9. 构造 (*construction formative*) 理论 M 的一个构造是指语句有限序列, 并且序列中的语句 A 均符合下列规则之一:

(1) A 是字母;

(2) 存在位于 A 之前的第二类语句 B , 使 A 为 $\neg B$;

(3) 存在位于 A 之前的第二类语句 B 和 C , 使 A 为 $\vee BC$;

(4) 存在位于 A 之前的第二类语句 B , 以及字母 x , 使 A 为 $\tau_x(B)$;

(5) 存在一个 n 元特别符号 s , 以及位于 A 之前的 n 个第一类语句 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n , 使 A 为 $sA_1A_2\cdots A_n$.

元数学定义 10. 项 (*terme*)、公式 (*relation*)

理论 M 的项是指, 该理论的某个构造中的第一类语句; 理论 M 的公式是指, 该理论的某个构造中的第二类语句.

形成规则 1.

如果 A 和 B 都是理论 M 的公式, 则 $\vee AB$ 也是理论 M 的公式.

证明: 将包含 A 的构造和包含 B 的构造合在一起. 由于 A 和 B 都是公式, 因此可以加入语句 $\vee AB$, 故 $\vee AB$ 也是公式.

形成规则 2.

如果 A 是理论 M 的公式, 则 $\neg A$ 也是理论 M 的公式.

证明：在包含 A 的构造中，由于 A 是公式，因此可以加入语句 $\neg A$ ，故 $\neg A$ 也是公式。

形成规则 3.

如果 A 是理论 M 的公式， x 为字母，则 $\tau_x(A)$ 是理论 M 的项。

证明：在包含 A 的构造中，由于 A 是公式，因此可以加入语句 $\tau_x(A)$ ，故 $\tau_x(A)$ 是项。

形成规则 4.

如果 A_1, A_2, \dots, A_n 都是理论 M 的项， s 是理论 M 的 n 元特别符号，则 $sA_1A_2 \cdots A_n$ 是理论 M 的公式。

证明：将包含 A_1, A_2, \dots, A_n 的各构造合在一起。由于 A_1, A_2, \dots, A_n 都是项，因此可以加入语句 $sA_1A_2 \cdots A_n$ ，故 $sA_1A_2 \cdots A_n$ 是公式。

形成规则 5.

如果 A 和 B 都是理论 M 的公式，则 $\Rightarrow AB$ 也是理论 M 的公式。

证明： $\Rightarrow AB$ 即 $\vee \neg AB$ ，根据形成规则2、形成规则1可证。

形成规则 6.

如果 A_1, A_2, \dots, A_n 是理论 M 的一个构造， x, y 为字母，并且 A_1, A_2, \dots, A_n 均不包含 y ，则 $(y|x)A_1, (y|x)A_2, \dots, (y|x)A_n$ 也组成理论 M 的一个构造。

证明：

A_1 只能是字母，因此 $(y|x)A_1$ 也是字母，故命题对 A_1 成立。

设命题对 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 均成立，考虑 A_i ：

若 A_i 是字母，则 $(y|x)A_i$ 也是字母。

若 A_i 是 $\neg B, \vee BC$ 或 $sA_1A_2 \cdots A_j$ 的形式，根据替代规则5， $(y|x)A_i$ 也是同类的形式。

若 A_i 是 $\tau_z(A_j)$ 的形式：

(1) 如果 z 与 x, y 均不相同，根据替代规则4， $(y|x)(\tau_z(A_j))$ 和 $\tau_z(A_j)$ 相同，故符合构造中语句的条件；

(2) 如果 z 是 x ，即 A_i 是 $\tau_x(A_j)$ ，根据替代规则3， $\tau_x(A_j)$ 和 $\tau_y((y|x)A_j)$ 相同。又因为 $\tau_x(A_j)$ 不包含 x ，根据补充替代规则2， $\tau_x(A_j)$ 和 $(y|x)\tau_x(A_j)$ 相同。因此， $(y|x)A_i$ 和 $\tau_y((y|x)A_j)$ 相同，符合构造中语句的条件；

(3) 如果 z 是 y ，即 A_i 是 $\tau_y(A_j)$ ，即 τA_j ，则 $(y|x)A_i$ 为 $(y|x)\tau A_j$ ，即 $\tau(y|x)A_j$ ，符合构造中语句的条件。

形成规则 7.

如果 A 是理论 M 的公式（或项）， x, y 为字母，则 $(y|x)A$ 也是理论 M 的公式（或项）。

证明:

令 A_1, A_2, \dots, A_n 为包含 A 的构造.

A_1 只能是字母, 因此 $(y|x)A_1$ 也是字母, 为项, 故命题对 A_1 成立.

设命题对 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 均成立, 考虑 A_i :

若 A_i 是字母, 则 $(y|x)A_i$ 也是字母, 为项.

若 A_i 是 $\neg B, \vee BC$ 或 $sA_1A_2 \cdots A_j$ 的形式, 根据替代规则5, $(y|x)A_i$ 也是同类的形式, 根据形成规则2、形成规则3、形成规则4, 为公式.

若 A_i 是 $\tau_z(A_j)$ 的形式:

(1) 如果 z 与 x, y 均不相同, 根据替代规则4, $(y|x)(\tau_z(A_j))$ 和 $\tau_z(A_j)$ 相同, 根据形成规则3, $(y|x)A_i$ 为项;

(2) 如果 z 是 x , 即 A_i 是 $\tau_x(A_j)$, 根据替代规则3, $\tau_x(A_j)$ 和 $\tau_y((y|x)A_j)$ 相同. 又因为 $\tau_x(A_j)$ 不包含 x , 根据补充替代规则2, $\tau_x(A_j)$ 和 $(y|x)\tau_x(A_j)$ 相同. 因此, $(y|x)A_i$ 和 $\tau_y((y|x)A_j)$ 相同, 故 $(y|x)A_i$ 为项;

(3) 如果 z 是 y , 令 u 是不同于 x, y 且不出现在 A_1, A_2, \dots, A_j 中的字母, 根据形成规则6, $(y|x)(u|y)A_1, (y|x)(u|y)A_2, \dots, (y|x)(u|y)A_j$ 也组成 M 的一个构造, 根据替代规则4、替代规则3, $\tau_u((y|x)(u|y)A_j)$ 和 $(y|x)\tau_y(A_j)$ 相同, 即和 $(y|x)A_i$ 相同, 因此 $(y|x)A_i$ 为项.

形成规则 8.

如果 A 是理论 M 的公式 (或项), x 为字母, T 为理论 M 的项, 则 $(T|x)A$ 也是理论 M 的公式 (或项).

证明:

令 A_1, A_2, \dots, A_n 为包含 A 的构造, x_1, x_2, \dots, x_p 是出现在 T 当中的所有不同字母, x'_1, x'_2, \dots, x'_p 是和 x_1, x_2, \dots, x_p 均不同且不出现在 A_1, A_2, \dots, A_n 中的字母.

根据形成规则7, $(x'_1|x_1)(x'_2|x_2) \cdots (x'_p|x_p)T$ 也是项, 记作 T' .

根据形成规则1, $(T|x)A$ 与 $(x_1|x'_1)(x_2|x'_2) \cdots (x_p|x'_p)(T'|x)A$ 相同.

设命题对 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 均成立, 考虑 A_i :

若 A_i 是字母, 则 $(T'|x)A_i$ 或者为字母, 或者为 T , 故 $(T'|x)A_i$ 为项;

若 A_i 是 $\neg B, \vee BC$ 或 $sA_1A_2 \cdots A_j$ 的形式, 根据替代规则5, $(T'|x)A_i$ 也是同类的形式, 根据形成规则2、形成规则3、形成规则4, $(T'|x)A_i$ 为公式.

若 A_i 是 $\tau_z(A_j)$ 的形式:

(1) 如果 z 与 x 不同, 且不出现在 T' 中, 根据替代规则4, $(T'|x)\tau_z(A_j)$ 和 $\tau_z((T'|x)A_j)$ 相同, 根据形成规则3, $(T'|x)A_i$ 为项;

(2) 如果 z 是 x , 即 A_i 是 $\tau_x(A_j)$, 不包含 x , 故 A_i 和 $(T'|x)A_i$ 相同, 因此, $(T'|x)A_i$ 为项;

(3) 如果 z 出现在 T' 中, 因此 z 不出现在 A_1, A_2, \dots, A_n 中. 令 u 是不出现在 $(T'|x)A_1, (T'|x)A_2, \dots, (T'|x)A_n$ 的字母. 此时, $\tau_z(A_j)$ 即 τA_j , $(T'|x)A_i$ 即 $\tau(T'|x)A_j$, 也即 $\tau_u((T'|x)A_j)$, 根据形成规则3, $(T'|x)A_i$ 为项为项.

综上, $(T'|x)A_i$ 为项 (或公式), 根据形成规则7, $(T|x)A_i$ 为项 (或公式).

补充形成规则 1.

A 是理论 M 的项或公式, 则 A 的每个符号 \square 都与左侧某一个符号 τ 连线; 且每个符号 τ 或者未连线, 或者与右边一个或多个符号 \square 连线. 除此之外, 没有其他连线.

证明:

令 A_1, A_2, \dots, A_n 为包含 A 的构造.

假设命题对于前 k 个语句成立, 对于 A_{k+1} :

如果 A_{k+1} 是字母、 $\neg B$ 、 $\vee BC$ 、 $sD_1D_2 \cdots D_n$ 的形式, 由于 $B, C, D_1, D_2, \dots, D_n$ 都是构造中在 A_{k+1} 之前的语句, 满足上述性质, 且于 A_{k+1} 未添加其他连线, 因此命题对 A_{k+1} 也成立.

如果于 A_{k+1} 是 $\tau_x(B)$ 的形式, 除了 B 已有的连线满足上述性质外, A 开头的 τ 仅与 B 中的 x 替代得到的 \square 连线, 替代得到的 \square 都与开头的 τ 连线, 除此之外未添加其他连线, 故命题对 A_{k+1} 也成立.

补充形成规则 2.

A 是理论 M 的项或公式, 则 A 不能以 \square 开头.

证明: 根据定义可证.

习题 1.

理论 M 没有特别符号, 求证: M 中没有公式, 并且所有的项都是单个字母.

证明: 考虑任意构造, 用数学归纳法可证明构造中的每个语句都只能是单个字母.

习题 2.

A 是理论 M 的项或公式, 求证: A 的每个符号 \square 都与左侧某一个符号 τ 连线; 且每个符号 τ 或者未连线, 或者与右边一个或多个符号 \square 连线. 除此之外, 没有其他连线.

证明: 即补充形成规则1.

习题 3.

A 是理论 M 的项或公式, 求证: A 的每个特别符号后面只能是 \square 、 τ 或字母.

证明: 根据构造的定义, 特别符号后面的语句只能是项, 而 \neg 、 \vee 和特别符号开头的语句是公式, 故特别符号后面只能是 \square 、 τ 或字母.

习题 4.

A 是理论 M 的项或公式, B 是语句, 求证: AB 不是项也不是公式.

证明:

对 A 的符号数目用数学归纳法.

A 的符号数目为1时, A 只能是单个字母, 因此 AB 以字母开头, 不可能是项或公式, 故命题成立.

假设 A 的符号数目小于 k 时, 命题成立, 考虑 A 的符号数目为 k 的情形:

如果 A 以 \neg 开头, 设故 A 为 $\neg C$ 的形式, 如果 AB 为 $\neg D$ 的形式, 则公式 D 为 CB , 根据归纳假设, 矛盾.

如果 A 以 \vee 或特别符号开头, 同理可证.

如果 A 以 τ 开头, 设 A 为 $\tau_x(C)$, 其中 C 为公式. 假设 AB 为 $\tau_y(D)$, 其中 D 为公式, 则令 u 为一个不同于 x 和 y , 并且不出现在 C 和 D 中的字母, 根据替代规则3, AB 和 $\tau_u((u|y)D)$ 相同, A 和 $\tau_u((u|x)C)$ 相同, 因此 $((u|y)D)$ 和 $((u|x)C)B$ 相同, 根据归纳假设, 矛盾.

习题 5.

A 是理论 M 的语句, x 为字母, 求证: 如果 $\tau_x(A)$ 是 M 的项, 则 A 是 M 的公式.

证明: 设 $\tau_x(A)$ 和 $\tau_y(R)$ 相同, 其中 R 为 M 的项, y 为字母. 由定义可知, A 和 $(y|x)R$ 相同. 根据形成规则7, A 是 M 的公式.

习题 6.

A 、 B 是理论 M 的语句, 求证: 如果 A 和 $\Rightarrow AB$ 都是 M 的公式, 则 B 是 M 的公式.

证明: 假设“ $\Rightarrow AB$ ”为“ $\Rightarrow CD$ ”的形式, 其中 C 、 D 为公式. 根据习题4, C 和 A 相同, 故 B 和 D 相同, 得证.

1.2 定理 (Théorèmes)

记号定义 6. 逻辑运算符 (*opérateurs logiques*)

令 A 、 B 为语句, 定义下列中序表达式的运算符:

- (1) “非 A ”表示“ $\neg A$ ”(第一优先级);
- (2) “ A 或 B ”表示“ $\vee AB$ ”(第四优先级);
- (3) “ $A \Rightarrow B$ ”表示“ $\Rightarrow AB$ ”(第五优先级).

元数学定义 11. 显式公理 (*axiome explicite*)

显式公理, 是指理论的“显式公理”一栏列举的一系列公式.

元数学定义 12. 公理模式 (*schéma*), 隐式公理 (*axiome implicite*)

公理模式, 是指理论的“公理模式”一栏列举并且满足下列条件的规则:

- (1) 将该规则适用到一个或数个项和/或公式上, 可以生成公式;

(2) 令 T 为项, x 为字母, R 为根据该规则生成的公式, 则 $(T|x)R$ 也是根据该规则可以生成的公式.

隐式公理是指根据公理模式生成的公式.

元数学定义 13. 公理 (*axiome*)

公理是隐式公理和显式公理的总称.

元数学定义 14. 常数 (*constante*)

显式公理中的字母, 称为常数.

注: 常数表示特定对象, 其他字母表示不特定的对象. 显式公理对常数的性质做出断言, 隐式公理对不特定对象的性质做出断言.

元数学定义 15. 证明文本 (*texte démonstratif*), 证明 (*démonstration*)

理论 M 的证明文本, 是指一个辅助构造和一个公式有限序列, 并且序列其中每个公式都满足下列条件之一:

- (1) 该公式是理论 M 的显式公理;
- (2) 该公式是将理论 M 的一个公理模式适用到辅助构造中的项及公式, 得到的公式;
- (3) 设该公式为 R , 在序列中, 存在 R 之前的两个公式 S 和 T , 其中 T 是“ $S \Rightarrow R$ ”.

其中, 证明文本中的公式序列称为证明.

元数学定义 16. 定理 (*théorème*)

理论 M 的证明文本的证明中的各公式, 均称为定理.

元数学定义 17. 真公式 (*relation vraie*), 假公式 (*relation fausse*)

如果理论 M 的公式 A 是定理, 则称 A 为真, 如果公式 $\neg A$ 是定理, 则称 A 为假.

元数学定义 18. 矛盾的理论 (*théorie contradictoire*)

如果理论 M 中存在一个公式 A , 既是真又是假, 则称理论 M 有矛盾.

补充证明规则 1.

理论 M 的公理都是定理.

证明: 建立仅包含公理 A 的公式序列, 根据定理的定义, A 是定理.

证明规则 1. 三段论

令 A 、 B 为理论 M 的公式, 如果 A 和 $A \Rightarrow B$ 是理论 M 的定理, 则 B 是理论 M 的定理.

证明: 设包含 A 的证明为 R_1 、 R_2 、 \dots 、 R_n , 设包含 $A \Rightarrow B$ 的证明为 S_1 、 S_2 、 \dots 、 S_n , 则公式序列, R_1 、 R_2 、 \dots 、 R_n 、 S_1 、 S_2 、 \dots 、 S_n 、 B 是一个证明. 故 B 是定理.

记号定义 7. 理论的替代 (*substitution dans une théorie*)

令 A_1, A_2, \dots, A_n 为理论 M 所有的显式公理, T 为理论 M 的项, x 为字母, 则用 $(T|x)$ 表示这样的理论:

它的特殊符号和公理模式都与 M 相同, 而其中的显式公理为 $(T|x)A_1, (T|x)A_2, \dots, (T|x)A_n$.

证明规则 2.

令 A 为理论 M 的定理, T 为理论 M 的项, x 为字母, 则 $(T|x)A$ 是理论 $(T|x)M$ 的定理.

证明:

设包含 A 的证明为 R_1, R_2, \dots, R_n , 考虑公式序列 $(T|x)R_1, (T|x)R_2, \dots, (T|x)R_n$.

若 R_n 是 M 的显式公理, 则 $(T|x)R_n$ 是 $(T|x)M$ 的显式公理.

若 R_n 是 M 的隐式公理, 则 $(T|x)R_n$ 是 $(T|x)M$ 由同一个公理模式产生的隐式公理.

若 R_n 是 M 的其他定理, 则包含 A 的证明存在 R_i 和 $R_i \Rightarrow R_n$, 故 $(T|x)R_i, (T|x)(R_i \Rightarrow R_n)$ 都在公式序列 $(T|x)R_1, (T|x)R_2, \dots, (T|x)R_n$ 中, 根据替代规则5, $(T|x)(R_i \Rightarrow R_n)$ 即 $(T|x)R_i \Rightarrow (T|x)R_n$. 因此 $(T|x)R_n$ 是 $(T|x)M$ 的定理.

证明规则 3.

令 A 为理论 M 的定理, T 为理论 M 的项, x 为字母, 如果 x 不是理论 M 的常数, 则 $(T|x)A$ 是理论 M 的定理.

证明: 由于 M 的显式公理不包括字母 x , 故 $(T|x)M$ 和 M 相同. 根据证明规则2, $(T|x)A$ 是 M 的定理.

元数学定义 19. 更强的理论 (*théorie plus forte*), 等价的理论 (*théories équivalentes*)

如果理论 M 的所有特殊符号、显式公理、公理模式分别都是理论 M' 的特殊符号、定理、公理模式, 则称理论 M' 比理论 M 强. 如果理论 M 比理论 M' 强, 并且理论 M' 比理论 M 强, 则称 M 和 M' 等价.

注: 在原书中, “强” 这个概念包括与自身相等的情况, 即一个理论比自身强.

证明规则 4.

如果理论 M' 比理论 M 强, 则理论 M 的定理, 也是理论 M' 的定理.

证明:

设理论 M 中包含定理 R 的证明为 R_1, R_2, \dots, R_n .

R_1 为 M 公理, 因此也是 M' 的公理, 故命题对 R_1 成立.

设命题对 R_1, R_2, \dots, R_{k-1} 成立, 对于 M 的定理 R_k , 如果 R_k 是 M 的公理, 则 R_k 是 M' 的公理. 如果 R_k 不是 M 的公理, 则在对 R_1, R_2, \dots, R_{k-1} 中, 存在两个 M 的定理 R_i 和 $R_i \Rightarrow R_k$, 根据归纳假设, 它们也都是 M' 的定理, 故 R_k 也是 M' 的定理.

证明规则 5.

令 A_1, A_2, \dots, A_n 为理论 M 的显式公理, a_1, a_2, \dots, a_h 为理论 M 的常数, T_1, T_2, \dots, T_h 为理论 M 的项, 如果 $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A_i$ (其中 $i = 1, 2, \dots, n$) 都是另一个理论 M' 的定理, 而且理论 M 的所有特殊符号和公理模式分别都是理论 M' 的特殊符号和公理模式, 则对理论 M 的任何定理 A , $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A$ 都是理论 M' 的定理.

证明: 根据证明规则2, $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A$ 是理论 $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)M$ 的定理. 由于 M' 比 $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)M$ 强, 根据证明规则4得证.

习题 7.

理论 M 的显式公理为 A_1, A_2, \dots, A_n , 常数为 a_1, a_2, \dots, a_h .

(1) 理论 M' 的常数和公理模式与 M 相同, 显式公理为 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , 如果 M' 和 M 不等价, 则称 A_n 独立于其他公理. 求证: 当且仅当 A_n 不是 M' 的定理时, A_n 独立.

(2) 理论 M'' 的常数和公理模式与 M 相同, 对于 M 的项 T_1, T_2, \dots, T_h 是 M , 对 $i = 1, 2, \dots, n-1$, $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_i$ 都是 M'' 的定理, 而 $(\text{非}(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_n)$ 是 M'' 的定理, 求证: 要么在 M 中 A_n 独立于其他公理, 要么 M'' 有矛盾.

证明:

(1) M 强于 M' . 如果 A_n 不是 M' 的定理, 则 M' 不比 M 强, 因此 M' 和 M 不等价. 反过来, 若 M' 不比 M 强, 则 M 必有一个显式公理不是 M' 的定理, 该显式公理只能是 A_n .

(2) 假设 A_n 是 M' 的定理, 根据证明规则5, $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_n$ 是 M'' 的定理, 因此 M'' 有矛盾.

1.3 逻辑理论 (Théories logiques)

补充替代规则 5.

下列规则均为公理模式:

(1) 令 A 为公式, 则 $(A \text{ 或 } A) \Rightarrow A$ 是公理.

(2) 令 A, B 为公式, 则 $A \Rightarrow (A \text{ 或 } B)$ 是公理.

(3) 令 A, B 为公式, 则 $(A \text{ 或 } B) \Rightarrow (B \text{ 或 } A)$ 是公理.

(4) 令 A, B, C 为公式, 则 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \text{ 或 } A) \Rightarrow (C \text{ 或 } B))$ 是公理.

证明: 根据替代规则5可证.

公理模式 1.

令 A 为公式, 则 $(A \text{ 或 } A) \Rightarrow A$ 是公理.

注: 形式语言的表述是 $\vee \neg \vee AAA$.

公理模式 2.

令 A 、 B 为公式，则 $A \Rightarrow (A \text{ 或 } B)$ 是公理。

注：形式语言的表述是 $\forall \neg A \vee AB$ 。

公理模式 3. 析取交换律

令 A 、 B 为公式，则 $(A \text{ 或 } B) \Rightarrow (B \text{ 或 } A)$ 是公理。

注：形式语言的表述是 $\forall \neg \vee AB \vee BA$ 。

公理模式 4.

令 A 、 B 、 C 为公式，则 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \text{ 或 } A) \Rightarrow (C \text{ 或 } B))$ 是公理。

注：形式语言的表述是 $\forall \neg \vee \neg AB \vee \neg \vee CA \vee CB$ 。

元数学定义 20. 逻辑理论 (*théorie logique*)

包含公理模式1、公理模式2、公理模式3、公理模式4的理论，称为逻辑理论。

补充证明规则 2.

如果逻辑理论 M 有矛盾，则 M 中的任何一个公式均为其定理。

证明：设 A 和非 A 均为 M 的定理，对任意公式 B ，根据公理模式2，非 $A \Rightarrow$ 非 A 或 B ，根据证明规则1，非 A 或 B ，即 $A \Rightarrow B$ ，又因为 A 是定理，根据证明规则1， B 是定理。

证明规则 6. 蕴涵的传递性

令 A 、 B 、 C 为逻辑理论 M 的公式， $A \Rightarrow B$ 和 $B \Rightarrow C$ 是 M 的定理，则 $A \Rightarrow C$ 也是 M 的定理。

证明：

根据公理模式4， $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\text{非} A \text{ 或 } B) \Rightarrow (\text{非} A \text{ 或 } C))$ ，即 $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ 。

由于 $B \Rightarrow C$ ，根据证明规则1 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ ，又因为 $A \Rightarrow B$ ，根据证明规则1， $A \Rightarrow C$ 。

证明规则 7.

令 A 、 B 为逻辑理论 M 的公式，则 $B \Rightarrow (A \text{ 或 } B)$ 是 M 的定理。

证明：根据公理模式2， $B \Rightarrow (B \text{ 或 } A)$ 是定理，根据公理模式3， $(B \text{ 或 } A) \Rightarrow (A \text{ 或 } B)$ ，根据证明规则6， $B \Rightarrow (A \text{ 或 } B)$ 。

证明规则 8. 排中律之一

令 A 为逻辑理论 M 的公式，则 $A \Rightarrow A$ 是 M 的定理。

证明：根据公理模式1, $(A \text{或} A) \Rightarrow A$, 根据2, $A \Rightarrow (A \text{或} A)$, 根据证明规则6, $A \Rightarrow A$.

证明规则 9.

令 A 为逻辑理论 M 的公式, B 为 M 的定理, 则 $A \Rightarrow B$ 是 M 的定理.

证明：根据证明规则7, $B \Rightarrow (\text{非}A \text{或} B)$, 即 $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

又因为 B 是定理, 根据证明规则1, $A \Rightarrow B$ 是定理.

证明规则 10. 排中律之二

令 A 为逻辑理论 M 的公式, 则 “ A 或 $(\text{非}A)$ ” 是 M 的定理.

证明：根据证明规则8, $\text{非}A$ 或 A , 根据公理模式2, $\text{非}A$ 或 $A \Rightarrow A$ 或 $(\text{非}A)$, 根据证明规则1, A 或 $(\text{非}A)$.

证明规则 11.

令 A 为逻辑理论 M 的公式, 则 $A \Rightarrow (\text{非}(\text{非}A))$ 是 M 的定理.

证明：根据证明规则8, $(\text{非}A)$ 或 $(\text{非}(\text{非}A))$, 即 $A \Rightarrow (\text{非}(\text{非}A))$.

证明规则 12. 逆否命题和原命题等价之一

令 A 、 B 为逻辑理论 M 的公式, 则 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{非}B \Rightarrow \text{非}A)$ 是 M 的定理.

证明：

根据证明规则11, $B \Rightarrow \text{非}(\text{非}B)$;

根据公理模式4, $(B \Rightarrow \text{非}(\text{非}B)) \Rightarrow ((\text{非}A \text{或} B) \Rightarrow (\text{非}A \text{或非}(\text{非}B)))$;

根据证明规则6, $(\text{非}A \text{或} B) \Rightarrow (\text{非}A \text{或非}(\text{非}B))$;

根据公理模式3, $(\text{非}A \text{或非}(\text{非}B)) \Rightarrow (\text{非}(\text{非}B) \text{或非}A)$;

根据证明规则1, $(\text{非}A \text{或} B) \Rightarrow (\text{非}(\text{非}B) \text{或非}A)$, 即 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{非}B \Rightarrow \text{非}A)$.

证明规则 13.

令 A 、 B 、 C 为逻辑理论 M 的公式, $A \Rightarrow B$ 是 M 的定理, 则 $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ 是 M 的定理.

证明：

根据证明规则12, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\text{非}B) \Rightarrow (\text{非}A))$;

根据证明规则1, $(\text{非}B) \Rightarrow (\text{非}A)$;

根据公理模式4, $((\text{非}B) \Rightarrow (\text{非}A)) \Rightarrow ((C \text{或非}B) \Rightarrow (C \text{或非}A))$;

根据证明规则1, $(C \text{或非}B) \Rightarrow (C \text{或非}A)$;

根据公理模式3, $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (C \text{或非}B)$, $(C \text{或非}A) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

根据证明规则6, $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

证明规则 14. 辅助假设, 演绎定理

令 A 为逻辑理论 M 的公式, M' 为 M 加上公理 A 组成的理论, 如果 B 是 M' 的定理, 则 $A \Rightarrow B$ 是 M 的定理.

证明: 令公式 B_1, B_2, \dots, B_n 为包含 B 的证明.

B_1 为 M 的公理或者 A 本身, 如果 B_1 为 M 的公理, 根据补充证明规则1、证明规则9, $A \Rightarrow B_1$; 如果 B_1 为 A 本身, 根据证明规则8, $A \Rightarrow B_1$. 故命题对 B_1 成立. 设对任意 $k < i - 1$, 有 $A \Rightarrow B_k$, 以下证明 $A \Rightarrow B_i$:

若 B_i 是 M' 的公理, 则 B_i 为 M 的公理或者 A 本身, 如果 B_i 为 M 的公理, 根据补充证明规则1、证明规则9, $A \Rightarrow B_i$; 如果 B_i 为 A 本身, 根据证明规则8, $A \Rightarrow B_i$.

若 B_i 不是 M' 的公理, 则之前存在两个公式 B_j 和 $B_j \Rightarrow B_i$, 它们均为 M 的定理;

根据归纳假设, $A \Rightarrow B_j$ 和 $A \Rightarrow (B_j \Rightarrow B_i)$ 都是 M 的定理;

根据证明规则13, $(B_j \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ 是 M 的定理;

根据证明规则6, $A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$, 即非 A 或 $(A \Rightarrow B_i)$ 是 M 的定理.

根据公理模式3, $(A \Rightarrow B_i)$ 或非 A 是 M 的定理.

根据公理模式2, 非 $A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ 是 M 的定理.

根据公理模式4, $((A \Rightarrow B_i)$ 或非 $A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i)$ 或 $(A \Rightarrow B_i))$ 是 M 的定理;

根据证明规则1, $(A \Rightarrow B_i)$ 或 $(A \Rightarrow B_i)$ 是 M 的定理, 根据公理模式1、证明规则1, $A \Rightarrow B_i$ 是 M 的定理.

综上, 得证.

证明规则 15. 反证法

令 A 为逻辑理论 M 的公式, M' 为 M 加上公理“非 A ”组成的理论, 如果 M' 有矛盾, 则 A 是 M 的定理.

证明:

由于 M' 有矛盾, 根据补充证明规则1, A 是 M' 的定理.

根据证明规则14, 非 $A \Rightarrow A$ 是 M 的定理.

根据公理模式4, $(A$ 或非 $A) \Rightarrow (A$ 或 $A)$ 是 M 的定理.

根据证明规则10, “ A 或 A ”是 M 的定理.

根据公理模式1, A 是 M 的定理.

证明规则 16.

令 A 为逻辑理论 M 的公式, 则 $(\text{非}(\text{非}A)) \Rightarrow A$ 是 M 的定理.

证明: 假设“非(非 A)”为真, 而 A 为假, 即“非 A ”为真. “非 A ”和“非(非 A)”同时为真, 矛盾, 得证.

注:

上述证明系运用证明规则14和证明规则15做出的简化表述. 完整的表述是:

将“非(非 A)”作为公理加入 M 得到理论 M' , 再加入公理“非 A ”得到理论 M'' , 此时理论 M'' 中, “非(非 A)”同时为真也为假, 根据证明规则15, A 是理论 M' 的定理, 根据证明规则14, $(\text{非}(\text{非}A)) \Rightarrow A$ 是理论 M 的定理.

以下证明中, 如果运用证明规则14或证明规则15, 也同样使用简化表述.

证明规则 17. 逆否命题与原命题等价之二

令 A 、 B 为逻辑理论 M 的公式, 则 $(\text{非}B \Rightarrow \text{非}A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ 是 M 的定理.

证明: 假设 $\text{非}B \Rightarrow \text{非}A$ 、 A 为真, B 为假, 即 $\text{非}B$ 为真, 则 $\text{非}A$ 为真, 矛盾, 得证.

证明规则 18. 分情况讨论

令 A 、 B 、 C 为逻辑理论 M 的公式, 如果 A 或 B 、 $A \Rightarrow C$ 、 $B \Rightarrow C$ 都是 M 的定理, 则 C 是 M 的定理.

证明: 根据公理模式4, $(A \text{或} B) \Rightarrow (A \text{或} C)$ 、 $(C \text{或} A) \Rightarrow (C \text{或} C)$, 再根据公理模式1、公理模式3得证.

证明规则 19. 辅助常数

令 x 为字母, A 、 B 为逻辑理论 M 的公式, 其中, x 不是论 M 的常数, B 也不包含 x , 并且存在 M 的项 T , 使 $(T|x)A$ 为定理, 那么, 令 M' 为 M 加上公理 A 组成的理论, 如果 B 是 M' 的定理, 则 B 是 M 的定理.

证明: 根据证明规则14, $A \Rightarrow B$ 是 M 的定理, 根据证明规则3, $(T|x)(A \Rightarrow B)$ 是 M 的定理. 由于 B 不包含 x , 根据替代规则3, $(T|x)(A \Rightarrow B)$ 和 $((T|x)A) \Rightarrow B$ 相同, 又因为 $(T|x)A$ 是 M 的定理, 因此 B 是 M 的定理.

注: 只要 $(\exists x)R$ (即 $(\tau_x(R)|x)R$) 是定理, 就可以运用添加辅助常数的方法.

记号定义 8. 合取 (conjunction)

令 A 、 B 为语句, x 为字母, 则用“ A 与 B ”表示“非 $((\text{非}A) \text{或} (\text{非}B))$ ” (第四优先级).

替代规则 6.

令 A 、 B 、 T 为语句, x 为字母, 则 $(T|x)(A \text{与} B)$ 和 $((T|x)A \text{与} (T|x)B)$ 相同.

证明: $A \text{与} B$ 即非 $((\text{非}A) \text{或} (\text{非}B))$, 根据替代规则5可证.

形成规则 9.

如果 A 、 B 是理论 M 的公式, 则 $A \text{与} B$ 也是理论 M 的公式.

证明: 根据形成规则1、形成规则2可证.

证明规则 20.

令 A 、 B 为逻辑理论 M 的定理, 则“ $A \text{与} B$ ”也是 M 的定理.

证明：假设“ A 与 B ”为假，则“非非((非 A)或(非 B))”，根据证明规则16，“非 A 或非 B ”，即“ $A \Rightarrow$ 非 B ”，又因为 A 为真，故“非 B ”为真，和 B 为真矛盾，得证。

证明规则 21.

令 A 、 B 为逻辑理论 M 的公式，则 $(A$ 与 $B) \Rightarrow A$ 和 $(A$ 与 $B) \Rightarrow B$ 是 M 的定理。

证明：

根据公理模式2、证明规则7，非 $A \Rightarrow$ (非 A 或非 B)，非 $B \Rightarrow$ (非 A 或非 B)。

根据证明规则11，(非 A 或非 $B) \Rightarrow$ 非 $(A$ 与 $B)$ 。

根据证明规则6，非 $A \Rightarrow$ 非 $(A$ 与 $B)$ ，非 $B \Rightarrow$ 非 $(A$ 与 $B)$ 。

根据证明规则17， $(A$ 与 $B) \Rightarrow A$ ， $(A$ 与 $B) \Rightarrow B$ 。

记号定义 9. 等价 (*équivalence*)

令 A 、 B 为语句， x 为字母，则用“ $A \Leftrightarrow B$ ”表示“ $(A \Rightarrow B)$ 与 $(B \Rightarrow A)$ ”(第五优先级)。

替代规则 7.

令 A 、 B 、 T 为语句， x 为字母，则 $(T|x)(A \Leftrightarrow B)$ 和 $((T|x)A \Leftrightarrow (T|x)B)$ 相同。

证明： $A \Leftrightarrow B$ 即 $(A \Rightarrow B)$ 与 $(B \Rightarrow A)$ ，根据替代规则5、替代规则6可证。

形成规则 10.

如果 A 、 B 是理论 M 的公式，则 $A \Leftrightarrow B$ 也是理论 M 的公式。

证明：根据形成规则5、形成规则9可证。

补充证明规则 3. 等价的反身性

令 A 为逻辑理论 M 的公式，则 $A \Leftrightarrow A$ 是 M 的定理。

证明：根据证明规则8可证。

证明规则 22. 等价的对称性和传递性

(1) 令 A 、 B 为逻辑理论 M 的公式，如果 $A \Leftrightarrow B$ 是 M 的定理，则 $B \Leftrightarrow A$ 是 M 的定理。

(2) 令 A 、 B 、 C 为逻辑理论 M 的公式，如果 $A \Leftrightarrow B$ 和 $B \Leftrightarrow C$ 是 M 的定理，则 $A \Leftrightarrow C$ 是 M 的定理。

证明：

(1) 根据证明规则21， $A \Rightarrow B$ 、 $B \Rightarrow A$ ，根据证明规则20， $(B \Rightarrow A)$ 与 $(A \Rightarrow B)$ ，即 $B \Leftrightarrow A$ 。

(2) 根据证明规则21、证明规则6可证。

补充证明规则 4.

令 A 为逻辑理论 M 的定理，则 $B \Leftrightarrow (A$ 与 $B)$ 和 $B \Leftrightarrow (B$ 与 $A)$ 是 M 的定理。

证明：假设 B 为真，根据证明规则20， A 与 B 、 B 与 A 均为真，根据证明规则9， $B \Rightarrow (A$ 与 $B)$ 、 $B \Rightarrow (B$ 与 $A)$ 。再根据证明规则21可证。

证明规则 23.

令 A 、 B 、 C 为逻辑理论 M 的公式，如果 $A \Leftrightarrow B$ 是 M 的定理，则下列公式都是 M 的定理：

- (1) $(\text{非}A) \Leftrightarrow (\text{非}B)$;
- (2) $(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$;
- (3) $(C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$;
- (4) $(A$ 与 $C) \Leftrightarrow (B$ 与 $C)$;
- (5) $(A$ 或 $C) \Leftrightarrow (B$ 或 $C)$ 。

证明：

(1) 因为 $A \Leftrightarrow B$ ，根据证明规则21、根据证明规则1， $A \Rightarrow B$ 、 $B \Rightarrow A$ 。根据证明规则12， $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{非}B \Rightarrow \text{非}A)$ 、 $(B \Rightarrow A) \Rightarrow (\text{非}A \Rightarrow \text{非}B)$ 。根据证明规则20可证。

(2) 因为 $A \Leftrightarrow B$ ，根据证明规则21、根据证明规则1， $A \Rightarrow B$ 、 $B \Rightarrow A$ 。若 $A \Rightarrow C$ ，根据证明规则6， $B \Rightarrow C$ 。反过来，若 $B \Rightarrow C$ ，根据证明规则6， $A \Rightarrow C$ 。根据证明规则20可证。

(3) 类似证明规则23 (2) 可证。

(4) 因为 $A \Leftrightarrow B$ ，根据证明规则21、根据证明规则1， $A \Rightarrow B$ 、 $B \Rightarrow A$ 。根据证明规则21， $(A$ 与 $C) \Rightarrow C$ 、 $(A$ 与 $C) \Rightarrow A$ 。根据证明规则6， $(A$ 与 $C) \Rightarrow B$ 。根据证明规则20， $(A$ 与 $C) \Rightarrow (B$ 与 $C)$ 。同理可证 $(B$ 与 $A) \Rightarrow (A$ 与 $C)$ 。根据证明规则20可证。

(5) 因为 $A \Leftrightarrow B$ ，根据证明规则21、根据证明规则1， $A \Rightarrow B$ 、 $B \Rightarrow A$ 。根据公理模式4， $(C$ 或 $A) \Rightarrow (C$ 或 $B)$ 、 $(C$ 或 $B) \Rightarrow (C$ 或 $A)$ 。根据公理模式3、证明规则6， $(A$ 或 $C) \Rightarrow (B$ 或 $C)$ 、 $(B$ 或 $C) \Rightarrow (A$ 或 $C)$ 。根据证明规则20可证。

证明规则 24.

令 A 、 B 、 C 为逻辑理论 M 的公式，则下列公式都是 M 的定理：

- (1) $(\text{非}(\text{非}A)) \Leftrightarrow A$;
- (2) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{非}B) \Rightarrow (\text{非}A))$;
- (3) $(A$ 与 $A) \Leftrightarrow A$;
- (4) $(A$ 与 $B) \Leftrightarrow (B$ 与 $A)$;
- (5) $(A$ 与 $(B$ 与 $C)) \Leftrightarrow ((A$ 与 $B)$ 与 $C)$;
- (6) $(A$ 或 $B) \Leftrightarrow (\text{非}((\text{非}A)$ 与 $(\text{非}B)))$;
- (7) $(A$ 或 $A) \Leftrightarrow A$;
- (8) $(A$ 或 $B) \Leftrightarrow (B$ 或 $A)$;
- (9) $(A$ 或 $(B$ 或 $C)) \Leftrightarrow ((A$ 或 $B)$ 或 $C)$;

(10) $(A \text{ 与 } (B \text{ 或 } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ 与 } B) \text{ 或 } (A \text{ 与 } C));$

(11) $(A \text{ 或 } (B \text{ 与 } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ 或 } B) \text{ 与 } (A \text{ 或 } C));$

(12) $(A \text{ 与 } (\text{非} B)) \Leftrightarrow (\text{非}(A \Rightarrow B));$

(13) $(A \text{ 或 } B) \Leftrightarrow ((\text{非} A) \Rightarrow B).$

证明:

(1) 根据证明规则11、证明规则16、证明规则20可证.

(2) 根据证明规则12、证明规则17、证明规则20可证.

(3) 根据证明规则20、证明规则21可证.

(4) 根据公理模式3、证明规则20, $\text{非} A \text{ 或 } \text{非} B \Leftrightarrow \text{非} B \text{ 或 } \text{非} A$, 根据证明规则23 (1) 可证.

(5) 若 $A \text{ 与 } (B \text{ 与 } C)$, 根据证明规则21, A, B, C 均为真, 根据证明规则20, $(A \text{ 与 } B) \text{ 与 } C$. 反之亦然. 根据证明规则20可证.

(6) 根据证明规则24 (1), $\text{非非} A \Leftrightarrow A, \text{非非} B \Leftrightarrow B$. 根据证明规则23 (5), “ $\text{非非} A \text{ 或 } \text{非非} B \Leftrightarrow A \text{ 或 } B$ ”. 根据证明规则23, $\text{非非}(\text{非非} A \text{ 或 } \text{非非} B) \Leftrightarrow A \text{ 或 } B$, 即 $(A \text{ 或 } B) \Leftrightarrow (\text{非}((\text{非} A) \text{ 与 } (\text{非} B)))$.

(7) 根据公理模式1、公理模式2、证明规则20可证.

(8) 根据公理模式3、证明规则20可证.

(9) 根据证明规则24 (1)、证明规则24 (2)、证明规则23 (5), $(A \text{ 或 } B) \text{ 或 } C \Leftrightarrow \text{非} C \Rightarrow (\text{非} A \Rightarrow B)$, $A \text{ 或 } (B \text{ 或 } C) \Leftrightarrow \text{非} A \Rightarrow (\text{非} C \Rightarrow B)$.

若非 $C \Rightarrow (\text{非} A \Rightarrow B)$ 、 $\text{非} A$ 、 $\text{非} C$ 为真, 根据证明规则6, B 为真, 即 $(\text{非} C \Rightarrow (\text{非} A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\text{非} A \Rightarrow (\text{非} C \Rightarrow B))$.

反过来, 若非 $A \Rightarrow (\text{非} C \Rightarrow B)$ 、 $\text{非} C$ 、 $\text{非} A$ 为真, 根据证明规则6, B 为真, 即 $(\text{非} A \Rightarrow (\text{非} C \Rightarrow B)) \Rightarrow (\text{非} C \Rightarrow (\text{非} A \Rightarrow B))$.

综上, 根据证明规则20得证.

(10) 假设 $A \text{ 与 } (B \text{ 或 } C)$, 根据证明规则21, $A, B \text{ 或 } C$ 为真, 即 $\text{非} B \Rightarrow C$. 假设 $A \Rightarrow \text{非} B$, 则 $\text{非} B$ 为真, 根据证明规则6, C 为真, 根据证明规则20, $A \text{ 与 } C$ 为真, 即 $A \text{ 与 } (B \text{ 或 } C) \Rightarrow ((A \Rightarrow \text{非} B) \Rightarrow (A \text{ 与 } C))$, 即 $A \text{ 与 } (B \text{ 或 } C) \Rightarrow ((A \text{ 与 } B) \text{ 或 } (A \text{ 与 } C))$.

反过来, 若 $(A \text{ 与 } B) \text{ 或 } (A \text{ 与 } C)$, 即 $(\text{非} A \text{ 或 } \text{非} B) \Rightarrow (A \text{ 与 } C)$, 根据证明规则21, $(\text{非} A \text{ 或 } \text{非} B) \Rightarrow A$ 、 $(\text{非} A \text{ 或 } \text{非} B) \Rightarrow C$. 假设 $\text{非} A$ 为真, 根据公理模式1, $(\text{非} A \text{ 或 } \text{非} B)$, 所以 A 为真, 矛盾. 故 A 为真. 由于 $(\text{非} A \text{ 或 } \text{非} B) \Rightarrow C$, 假设 $\text{非} B$, 则 C 为真, 即 $\text{非} B \Rightarrow C$ 为真, 根据证明规则23 (5)、证明规则24 (1), $B \text{ 或 } C$. 由于 $A, B \text{ 或 } C$ 为真, 根据证明规则20, $A \text{ 与 } (B \text{ 或 } C)$.

综上, 根据证明规则20得证.

(11) 根据证明规则21, $(B \text{ 与 } C) \Rightarrow B$, 根据公理模式4, $A \text{ 或 } (B \text{ 与 } C) \Rightarrow A \text{ 或 } B$, 同理 $A \text{ 或 } (B \text{ 与 } C) \Rightarrow A \text{ 或 } C$, 根据证明规则20, $A \text{ 或 } (B \text{ 与 } C) \Rightarrow (A \text{ 或 } B) \text{ 与 } (A \text{ 或 } C)$.

反过来, 假设 $(A \text{或} B)$ 与 $(A \text{或} C)$, 根据证明规则21, $A \text{或} B$ 、 $A \text{或} C$, 即 $\text{非}A \Rightarrow B$ 、 $\text{非}A \Rightarrow C$, 根据证明规则20, $\text{非}A \Rightarrow (B \text{与} C)$, 即 $A \text{或} (B \text{与} C)$. 因此, $(A \text{或} B)$ 与 $(A \text{或} C) \Rightarrow A \text{或} (B \text{与} C)$, 得证.

(12) 根据证明规则24 (1)、证明规则23 (2) 可证.

(13) 根据证明规则24 (1)、证明规则23 (5) 可证.

证明规则 25.

(1) 如果 A 为逻辑理论 M 的定理, B 为 M 的公式, 则 $(A \text{与} B) \Leftrightarrow B$ 是 M 的定理.

(2) 如果 $(\text{非}A)$ 为逻辑理论 M 的定理, B 为 M 的公式, 则 $(A \text{或} B) \Leftrightarrow B$ 是 M 的定理.

证明:

(1) 根据证明规则21, $(A \text{与} B) \Rightarrow B$. 根据补充证明规则4, $B \Rightarrow (A \text{与} B)$, 故 $(A \text{与} B) \Leftrightarrow B$ 是逻辑理论 M 的定理.

(2) 根据证明规则25 (1), $\text{非}A$ 与 $\text{非}B \Leftrightarrow \text{非}B$, 根据证明规则23 (1), $\text{非}(\text{非}A \text{与} \text{非}B) \Leftrightarrow \text{非}(\text{非}B)$, 根据证明规则24 (1)、证明规则23 (1), $(A \text{或} B) \Leftrightarrow B$.

补充证明规则 5.

令 A 、 B 、 C 、 D 为逻辑理论 M 的公式, 则以下公式都是 M 的定理:

(1) $((A \Rightarrow B) \text{与} (C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A \text{或} C) \Rightarrow (B \text{或} D));$

(2) $((A \Leftrightarrow B) \text{与} (C \Leftrightarrow D)) \Rightarrow ((A \text{或} C) \Leftrightarrow (B \text{或} D));$

(3) $((A \Rightarrow B) \text{与} (C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A \text{与} C) \Rightarrow (B \text{与} D));$

(4) $((A \Leftrightarrow B) \text{与} (C \Leftrightarrow D)) \Rightarrow ((A \text{与} C) \Leftrightarrow (B \text{与} D));$

(5) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \text{或} C) \Rightarrow (B \text{或} C));$

(6) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \text{或} C) \Leftrightarrow (B \text{或} C));$

(7) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \text{与} C) \Rightarrow (B \text{与} C));$

(8) $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \text{与} C) \Leftrightarrow (B \text{与} C));$

(9) $A \Leftrightarrow (A \text{或} A);$

(10) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \text{或} B) \Rightarrow C));$

(11) $(A \text{或} B) \Leftrightarrow (B \text{或} A);$

(12) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \text{与} C)));$

(13) $(A \text{与非} A) \Rightarrow B;$

(14) $B \text{或} (A \text{与非} A) \Leftrightarrow B;$

(15) $B \text{或} (A \text{与非} A \text{与} C) \Leftrightarrow B;$

(16) $(A \text{与} B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \text{与非} C \Rightarrow \text{非} B).$

证明:

(1) $G((A \Rightarrow B) \text{与} (C \Rightarrow D))$, 根据证明规则21, $A \Rightarrow B$ 、 $C \Rightarrow D$, 根据公理模式4、公理模式2、公理模式3, $(A \text{或} C) \Rightarrow (C \text{或} A)$ 、 $(C \text{或} A) \Rightarrow (C \text{或} B)$ 、 $(C \text{或} B) \Rightarrow (B \text{或} C)$ 、 $(B \text{或} C) \Rightarrow (B \text{或} D)$, 根据证明规则6可证.

- (2) 根据补充证明规则5 (1)、证明规则20可证.
- (3) 假设 $(A \Rightarrow B)$ 与 $(C \Rightarrow D)$, 根据证明规则21, $A \Rightarrow B$ 、 $C \Rightarrow D$, 根据证明规则12, 非 $B \Rightarrow$ 非 A , 非 $D \Rightarrow$ 非 C , 根据公理模式4、公理模式2、公理模式3、证明规则6, $(\text{非}B \text{或非}D) \Rightarrow (\text{非}A \text{或非}C)$, 根据证明规则12, $(A \text{与} C) \Rightarrow (B \text{与} D)$.
- (4) 根据补充证明规则5 (3)、证明规则20可证.
- (5) 根据证明规则8, $C \Rightarrow C$, 根据证明规则20、证明规则21, $(A \Rightarrow B)$ 与 $(C \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$, 根据补充证明规则5 (1) 可证.
- (6) 根据证明规则8、证明规则20, $C \Leftrightarrow C$, 根据证明规则20、证明规则21, $(A \Leftrightarrow B)$ 与 $(C \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$, 根据补充证明规则5 (2) 可证.
- (7) 根据证明规则8, $C \Rightarrow C$, 根据证明规则20、证明规则21, $(A \Rightarrow B)$ 与 $(C \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$, 根据补充证明规则5 (3) 可证.
- (8) 根据证明规则8、证明规则20, $C \Leftrightarrow C$, 根据证明规则20、证明规则refC21, $(A \Leftrightarrow B)$ 与 $(C \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$, 根据补充证明规则5 (4) 可证.
- (9) 根据公理模式1、公理模式2、证明规则20可证.
- (10) 根据证明规则14、证明规则18可证.
- (11) 根据公理模式3、证明规则20可证.
- (12) 假设 $A \Rightarrow B$ 、 $A \Rightarrow C$ 、 A 为真, 则 B 、 C 均为真, 根据证明规则20, B 与 C , 得证.
- (13) 根据证明规则11、证明规则16, $((A \text{与非} A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \text{或非} A \text{或} B$. 根据证明规则10、公理模式2, $A \text{或非} A \text{或} B$, 得证.
- (14) 根据公理模式1, $B \Rightarrow B \text{或} (A \text{与非} A)$, 根据证明规则18、补充证明规则5 (13), $B \text{或} (A \text{与非} A) \Rightarrow B$, 得证.
- (15) 根据公理模式1, $B \Rightarrow B \text{或} (A \text{与非} A \text{与} C)$. 根据证明规则21, $(A \text{与非} A \text{与} C) \Rightarrow (A \text{与非} A)$, 根据补充证明规则5 (14), $B \text{或} (A \text{与非} A \text{与} C) \Rightarrow B$, 得证.
- (16) 根据证明规则24 (1)、证明规则23 (5), $(A \text{与} B \Rightarrow C) \Leftrightarrow \text{非} A \text{或非} B \text{或} C$ 、 $(A \text{与非} C \Rightarrow \text{非} B) \Leftrightarrow \text{非} A \text{或} C \text{或非} B$, 根据证明规则24 (8)、证明规则24 (9) 可证.

习题 8.

令 A 、 B 、 C 为逻辑理论 M 的公式, 求证:

- (1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;
- (2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
- (3) $A \Rightarrow (\text{非} A \Rightarrow B)$;
- (4) $(A \text{或} B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$;
- (5) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \text{与} B) \text{或} (\text{非} A \text{与非} B))$;
- (6) 非 $((\text{非} A) \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$;
- (7) $(A \Rightarrow (B \text{或} (\text{非} C))) \Leftrightarrow ((C \text{与} A) \Rightarrow B)$;

- (8) $(A \Rightarrow (B \text{或} C)) \Leftrightarrow (B \text{或} (A \Rightarrow C))$;
 (9) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \text{与} C)))$;
 (10) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \text{或} B) \Rightarrow C))$;
 (11) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \text{与} C) \Rightarrow (B \text{与} C))$;
 (12) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \text{或} C) \Rightarrow (B \text{或} C))$;

证明:

(1) 假设 A 为真, 根据证明规则9, $B \Rightarrow A$, 故 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

(2) 假设 $A \Rightarrow B$ 、 $B \Rightarrow C$, 根据证明规则6, $A \Rightarrow C$, 故 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

(3) 假设 A 、非非 A 为真, 则“非非 A 或 B ”为真, 即非 $A \Rightarrow B$, 因此 $A \Rightarrow (\text{非}A \Rightarrow B)$.

(4) 假设 $A \text{或} B$ 、 $A \Rightarrow B$, 又因为 $B \Rightarrow B$, 根据证明规则18, $(A \text{或} B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$; 假设 $(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, 即非(非 $A \text{或} B$)或 B . 根据证明规则23, 非(非 $A \text{或} B$) \Leftrightarrow 非(非 A 或非非 B), 即 $(A \text{与非} B) \text{或} B$, 根据证明规则21, $A \text{与非} B \Rightarrow A$, 根据公理模式2、证明规则6 $A \text{与非} B \Rightarrow A \text{或} B$. 根据证明规则7, $B \Rightarrow (A \text{或} B)$, 根据证明规则18, $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A \text{或} B)$, 得证.

(5) 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $((A \text{与} B) \text{或} (\text{非}A \text{与非} B)) \Leftrightarrow A \text{或非} A$, 根据证明规则10, $((A \text{与} B) \text{或} (\text{非}A \text{与非} B))$. 反过来, 若 $(A \text{与} B) \text{或} (\text{非}A \text{与非} B)$, 假设 A 为真, 根据证明规则25 (2), $B \text{或} (\text{非}A \text{与非} B)$, 即非 $(A \text{或} B) \text{或} B$, 即 $(A \text{或} B) \Rightarrow B$. 又因为 A 为真, 根据公理模式2, $A \text{或} B$, 因此 B 为真, 因此, $A \Rightarrow B$, 同理可证 $B \Rightarrow A$, 故 $A \Leftrightarrow B$.

(6) $(\text{非}A) \Rightarrow B$ 即(非非 A)或 B , 根据证明规则16、证明规则23 (5), $(\text{非非}A) \text{或} B \Leftrightarrow A \text{或} B$. 而 $B \Rightarrow (\text{非}A)$, 即非 B 或非 A .

根据证明规则20, $((\text{非}A) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \text{或} B) \text{与} (\text{非}A \text{或非} B)$. 根据证明规则23 (10), 非 $((\text{非}A) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \text{与非} A) \text{或} (A \text{与非} B) \text{或} (B \text{与非} A) \text{或} (B \text{与非} B)$, 进而, 根据证明规则23 (10)、公理模式2、证明规则24 (4), 非 $((\text{非}A) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{非}A \text{或} B) \text{与} (\text{非}B \text{或} A))$, 即“非 $((\text{非}A) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$ ”.

(7) $A \Rightarrow (B \text{或} (\text{非}C))$ 即非 A 或 $(B \text{或} \text{非}C)$, $(C \text{与} A) \Rightarrow B$ 即(非非(非 C 或非 A))或 B , 根据证明规则24 (1)、证明规则24 (8)、证明规则24 (9) 可证.

(8) $A \Rightarrow (B \text{或} C)$ 即非 A 或 $(B \text{或} C)$, $B \text{或} (A \Rightarrow C)$ 即 $B \text{或} (\text{非}A \text{或} C)$ 、证明规则24 (8)、证明规则24 (9) 可证.

(9) 即补充证明规则5 (12).

(10) 即补充证明规则5 (10).

(11) 假设 $A \Rightarrow B$, $A \text{与} C$, 根据证明规则21, A 、 C 为真, 则 B 为真, 根据证明规则20, $B \text{与} C$, 得证.

(12) 根据公理模式4、公理模式3可证.

习题 9.

A 为逻辑理论 M 的公式, $A \Leftrightarrow \text{非}A$ 是 M 的定理, 求证: M 存在矛盾.

证明:

$A \Rightarrow \text{非}A$, 即非 A 或非 A , 根据公理模式1, “非 $A \wedge A$ ”为真.

非 $A \Rightarrow A$, 即非非 A 或真, 根据证明规则24 (1)、证明规则23 (5), A 或 A , 根据公理模式1, A 为真.

故 M 存在矛盾.

习题 10.

令 A_1, A_2, \dots, A_n 为逻辑理论 M 的公式, 求证:

(1) 要证明 A_1 或 A_2 或 \dots 或 A_n , 只需要在 M 添加显式公理非 A_1 、非 A_2 、 \dots 、非 A_{n-1} 得到的理论 M' 中, 证明 A_n 即可.

(2) 若 A_1 或 A_2 或 \dots 或 A_n 是 M 的定理, 要证明 A 是 M 的定理, 只需要证明 $A_1 \Rightarrow A$ 、 $A_2 \Rightarrow A$ 、 \dots 、 $A_n \Rightarrow A$ 即可.

证明:

(1) 对 n 用数学归纳法:

$n=2$ 时, 根据证明规则14, “非非 A_1 或 A_2 ”是 M 的定理, 根据证明规则24 (1)、证明规则23 (5), A_1 或 A_2 是 M 的定理.

假设命题对 $n = i$ 成立, 当 $n = i+1$ 时, 令添加公理非 A_1 、非 A_2 、 \dots 、非 A_{i-1} 得到的理论为 M' , 再添加公理非 A_i 得到的理论为 M'' , 根据证明规则14、证明规则24 (1)、证明规则23 (5), 若 M'' 中 A_{i+1} 为真, 则 M' 中 A_i 或 A_{i+1} 为真, 因此 M 中的 A_1 或 A_2 或 \dots 或 A_{i-1} 或(A_i 或 A_{i+1})为真, 根据证明规则24 (9), 可证.

(2) 对 n 用数学归纳法, 根据证明规则18可证.

习题 11.

A, B 为逻辑理论 M 的公式, 令 $A|B$ 表示(非 A 或非 B), 求证:

(1) 非 $A \Leftrightarrow (A|A)$;

(2) $(A \text{ 或 } B) \Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$;

(3) $(A \text{ 与 } B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$;

(4) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A|(B|B))$.

证明:

(1) 根据补充证明规则5 (9) 可证.

(2) 根据习题11 (1), (非非 A)或(非非 B) $\Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$, 根据证明规则23 (5)、证明规则24 (1) 可证.

(3) 根据习题11 (1), 非 $(A|B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$, 即 $(A \text{ 与 } B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$.

(4) 根据习题11 (1), $(A| \text{非} B) \Leftrightarrow (A|(B|B))$, 根据证明规则23 (5)、证明规则24 (1) 可证.

注：

习题11中的连接词“|”仅在该题中使用，和替代记号“|”不可混淆。

习题11表明，连接词“|”具有完全性。

习题 12.

令 A_1, A_2, \dots, A_n 为逻辑理论 M 的显式公理，求证：当且仅当符号和公理模式与 M 相同、显式公理为 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} 、非 A_n 的理论没有矛盾时， A_n 是独立的显式公理。

证明：

令理论 M' 为符号和公理模式与 M 相同、显式公理为 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} 的理论，理论 M'' 为符号和公理模式与 M 相同、显式公理为 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} 、非 A_n 的理论。

假设 A_n 不独立，则 M' 与 M 等价，故 A_n 是 M' 的定理。由于 M'' 比 M' 强，根据证明规则4， A_n 是 M'' 的定理，因此 M'' 有矛盾。

假设 M'' 有矛盾，根据证明规则15， A_n 是 M' 的定理，故 M' 和 M 等价，即 A_n 不独立。综上所述，得证。

1.4 量词理论 (Théories quantifiées)

记号定义 10. 量词 (*quantificateur*)

令 A, R 为语句， x 为字母，则用“ $(\exists x)R$ ”表示“ $(\tau_x(R)|x)R$ ”，用“ $(\forall x)R$ ”表示“非 $((\exists x)(\text{非}R))$ ”。

替代规则 8.

令 R 为语句， x, x' 为字母，如果 R 不包含 x' ，则 $(\exists x)R, (\forall x)R$ 分别和 $(\exists x')R', (\forall x')R'$ 相同，其中 R' 为 $(x'|x)R$ 。

证明：根据替代规则1， $(\exists x)R$ 和 $(\tau_x(R)|x')R'$ 相同，根据替代规则3， $\tau_x(R)$ 和 $\tau_{x'}(R')$ 相同，故 $(\exists x)R$ 和 $(\exists x')R'$ 相同。同理并结合替代规则5，可证 $(\forall x)R$ 和 $(\forall x')R'$ 相同。

替代规则 9.

令 R, U 为语句， x, y 为字母，如果 U 不包含 x ，则 $(U|y)(\exists x)R, (U|y)(\forall x)R$ 分别和 $(\exists x)R', (\forall x)R'$ 相同，其中 R' 为 $(U|y)R$ 。

证明：根据替代规则2， $(U|y)(\exists x)R$ 和 $(T|x)(U|y)R$ 相同，其中 T 为 $(U|y)\tau_x(R)$ ，根据替代规则4， $(T|x)(U|y)R$ 和 $(\exists x)R'$ 相同。同理可证 $(U|y)(\forall x)R$ 和 $(\forall x)R'$ 相同。

形成规则 11.

如果 R 是理论 M 的公式， x 为字母，则 $(\exists x)R$ 和 $(\forall x)R$ 也是理论 M 的公式。

证明：根据形成规则3、形成规则8、形成规则2，可证。

证明规则 26.

令 R 为逻辑理论 M 的公式, x 为字母, 则 $(\forall x)R \Leftrightarrow (\tau_x(\text{非}R)|x)R$ 是 M 的定理.

证明: 根据替代规则5, $(\forall x)R$ 即 “非非 $(\tau_x(\text{非}R)|x)R$ ”, 得证.

证明规则 27.

令 R 为逻辑理论 M 的定理, x 为不是常数的字母, 则 $(\forall x)R$ 是 M 的定理.

证明: 根据证明规则26, $(\forall x)R \Leftrightarrow (\tau_x(\text{非}R)|x)R$, 得证.

证明规则 28.

令 R 为逻辑理论 M 的公式, x 为字母, 则 $(\text{非}((\forall x)R)) \Leftrightarrow (\exists x)(\text{非}R)$ 是 M 的定理.

证明: $(\text{非}((\forall x)R))$ 即 “非非 $(\tau_x(\text{非}R)|x)(\text{非}R)$ ”, 得证.

补充替代规则 6.

“令 R 为公式, x 为字母, T 为项, 则 $(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$ 是公理” 是公理模式.

证明:

以下证明 $(U|y)((T|x)R \Rightarrow (\exists x)R)$ 也是该规则产生的公式:

若 U 不包含 x 且 x 、 y 不同, 根据替代规则2、替代规则9, $(T|x)(U|y)R \Rightarrow (\exists x)(U|y)R$ 和 $(U|y)((T|x)R \Rightarrow (\exists x)R)$ 相同.

若 U 包含 x 或 x 、 y 相同, 则令 R' 为 $(x'|x)R$, 其中 x' 为与 y 不同的字母且 U 不包含 x' , 根据替代规则1、替代规则8及上述结论, 得证.

公理模式 5.

令 R 为公式, x 为字母, T 为项, 则 $(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$ 是公理.

元数学定义 21. 量词理论 (*théorie quantifiée*)

包含公理模式5的逻辑理论, 称为量词理论.

证明规则 29.

令 R 为量词理论 M 的公式, x 为字母, 则 “非 $((\exists x)R) \Leftrightarrow (\forall x)(\text{非}R)$ ” 是 M 的定理.

证明:

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 :

由于 $R \Leftrightarrow \text{非非}R$, 根据证明规则3, $(\exists x)R \Rightarrow (\tau_x(R)|x)(\text{非非}R)$ 、 $(\exists x)(\text{非非}R) \Rightarrow (\tau_x(\text{非非}R)|x)R$.

根据公理模式5, $(\tau_x(R)|x)(\text{非非}R) \Rightarrow (\exists x)(\text{非非}R)$ 、 $(\tau_x(\text{非非}R)|x)R \Rightarrow (\exists x)R$.

故 $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)(\text{非非}R)$.

又因为 $(\exists x)(\text{非非}R) \Leftrightarrow \text{非非}(\exists x)(\text{非非}R)$, 后者即非 $(\forall x)(\text{非}R)$, 因此非 $((\exists x)R) \Leftrightarrow (\forall x)(\text{非}R)$.

由于 M 强于 M_0 ，因此上述结论对理论 M 也成立。

注：如果已知条件中不包括任何含常数的定理，可以用这种方法。从而，在证明过程中，可以运用“字母不是常数”的条件。

证明规则 30.

令 R 为量词理论 M 的公式， T 为 M 的项， x 为字母，则 $(\forall x)R \Rightarrow (T|x)R$ 是 M 的定理。

证明：根据公理模式5， $(T|x)(\neg R) \Rightarrow (\exists x)\neg R$ ，即非 $(T|x)R \Rightarrow$ 非 $(\tau_x(\neg R)|x)R$ ，因此 $\tau_x(\neg R)|x)R \Rightarrow (T|x)R$ ，根据证明规则26，得证。

补充证明规则 6.

x 不是量词理论 M 的常数，则当且仅当 R 为 M 的定理时， $(\forall x)R$ 为 M 的定理。

证明：根据证明规则30、证明规则27可证。

证明规则 31.

令 R 、 S 为量词理论 M 的公式， x 为字母，并且 x 不是量词理论 M 的常数。如果 $R \Rightarrow S$ 是 M 的定理，则 $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ 和 $(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$ 也是 M 的定理；如果 $R \Leftrightarrow S$ 是 M 的定理，则 $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$ 和 $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$ 也是 M 的定理。

证明：

如果 $R \Rightarrow S$ ，假设 $(\forall x)R$ 为真，根据证明规则30， R 为真，因此 S 为真，根据证明规则27， $(\forall x)S$ 为真，故 $(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$ 。

如果 $R \Rightarrow S$ ，则非 $S \Rightarrow$ 非 R ，根据上述结论故 $(\forall x)(\neg R) \Rightarrow (\forall x)(\neg S)$ ，根据证明规则29，非 $(\exists x(S)) \Rightarrow$ 非 $(\exists x(R))$ ，故 $(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$ 。

根据上述结论可证，如果 $R \Leftrightarrow S$ 是量词理论 M 的定理，则 $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$ 和 $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$ 。

证明规则 32.

令 R 、 S 为量词理论 M 的公式， x 为字母，则 $(\forall x)(R \text{与} S) \Leftrightarrow ((\forall x)R) \text{与} ((\forall x)S)$ ， $(\exists x)(R \text{或} S) \Leftrightarrow ((\exists x)R) \text{或} ((\exists x)S)$ 是 M 的定理。

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 ：

若 $(\forall x)(R \text{与} S)$ 为真，根据补充证明规则4， R 与 S 为真，即 R 、 S 为真，根据补充证明规则4， $((\forall x)R) \text{与} ((\forall x)S)$ 为真。反之亦然。根据证明规则29， $(\exists x)(R \text{或} S) \Leftrightarrow ((\exists x)R) \text{或} ((\exists x)S)$ 。

由于 M 强于 M_0 ，因此上述结论对理论 M 也成立。

证明规则 33.

令 R 、 S 为量词理论 M 的公式， x 为字母，并且 R 不包含 x ，则 $(\forall x)(R \text{或} S) \Leftrightarrow (R \text{或} (\forall x)S)$ 和 $(\exists x)(R \text{与} S) \Leftrightarrow (R \text{与} (\exists x)S)$ 是 M 的定理。

证明:

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 :

R 或 S 即非 $R \Rightarrow S$, 将非 R 作为公理添加到 M_0 , 则 S 是定理, 根据证明规则27, $(\forall x)S$ 是定理, 因此, 非 $R \Rightarrow (\forall x)S$, 即 R 或 $(\forall x)S$. 反之亦然.

根据证明规则29, $(\exists x)(R \text{与} S) \Leftrightarrow (R \text{与} (\exists x)S)$.

由于 M 强于 M_0 , 因此上述结论对理论 M 也成立.

证明规则 34.

令 R 为量词理论 M 的公式, x, y 为字母, 则以下公式都是 M 的定理:

(1) $(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)R$;

(2) $(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)R$;

(3) $(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\forall y)(\exists x)R$;

证明:

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 :

若 $(\forall x)(\forall y)R$, 根据证明规则30, R 为真, 根据证明规则27, $(\forall y)(\forall x)R$, 反之依然, 即第一式成立.

根据证明规则29, 可证第二式.

根据证明规则31, 证明规则30, $(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\exists x)R$, 若 $(\exists x)(\forall y)R$, 则 $(\exists x)R$, 根据证明规则27, $(\forall y)(\exists x)R$, 第三式得证.

由于 M 强于 M_0 , 因此上述结论对理论 M 也成立.

记号定义 11. 类别量词 (*quantificateur typique*)

令 A, R 为语句, x 为字母, 则用“ $(\exists_A x)R$ ”表示“ $(\exists x)(A \text{与} R)$ ”, 用“ $(\forall_A x)R$ ”表示“非 $((\exists_A x)(\text{非} R))$ ”.

注: 原书很少使用类别量词.

替代规则 10.

令 A, R 为语句, x, x' 为字母, 如果 R 不包含 x' , 则 $(\exists_A x)R$ 、 $(\forall_A x)R$ 分别和 $(\exists_{A'x'})R'$ 、 $(\forall_{A'x'})R'$ 相同, 其中 R' 为 $(x'|x)R$, A' 为 $(x'|x)A$.

证明: 根据替代规则8、替代规则5、替代规则6可证.

替代规则 11.

令 A, R, U 为语句, x, y 为字母, 如果 U 不包含 x , 则 $(U|y)(\exists_A x)R$ 、 $(U|y)(\forall_A x)R$ 分别和 $(\exists_{A'x})R'$ 、 $(\forall_{A'x})R'$ 相同, 其中 R' 为 $(U|y)R$, A' 为 $(x'|x)A$.

证明: 根据替代规则9、替代规则5、替代规则6可证.

形成规则 12.

如果 A 、 R 是理论 M 的公式， x 为字母，则 $(\exists_A x)R$ 和 $(\forall_A x)R$ 也是理论 M 的公式.

证明：根据形成规则11、形成规则9、形成规则2，可证.

证明规则 35.

令 A 、 R 为量词理论 M 的公式， x 为字母，则 $(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall x)(A \Rightarrow R)$ 是 M 的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 ：

$(\forall_A x)R$ 即非 $(\exists x)(A$ 与非 $R)$ ，又因为 $(A$ 与非 $R) \Leftrightarrow (\text{非}(A \Rightarrow R))$ ，根据证明规则31，
 $(\forall_A x)R \Leftrightarrow \text{非}(\exists x)(\text{非}(A \Rightarrow R))$ ，即 $(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall x)(A \Rightarrow R)$.

由于 M 强于 M_0 ，因此上述结论对理论 M 也成立.

证明规则 36.

令 A 、 R 为量词理论 M 的公式， x 为字母， M' 为量词理论 M 加上公理 A 组成的量词理论，如果 x 不是 M 的常数，并且 R 是量词理论 M' 的定理，则 $(\forall_A x)R$ 是 M 的定理.

证明：在理论 M 中， $A \Rightarrow R$ ，根据证明规则27、证明规则35可证.

证明规则 37.

令 A 、 R 为量词理论 M 的公式， x 为字母， M' 为理论 M 加上公理 A 与 $(\text{非}R)$ 组成的理论，如果 x 不是 M 的常数，并且 M' 有矛盾，则 $(\forall_A x)R$ 是量词理论 M 的定理.

证明： M' 即 M 加入公理 $(\text{非}(A \Rightarrow \text{非非}R))$ 得到的理论，因此 $A \Rightarrow (\text{非非}R)$ 是 M 的定理，故 $A \Rightarrow R$ ，根据证明规则27、证明规则35可证.

证明规则 38.

令 A 、 R 为量词理论 M 的公式， x 为字母，则 $(\text{非}(\exists_A x(R))) \Leftrightarrow (\forall_A x)(\text{非}R)$ 和 $(\text{非}(\forall_A x(R))) \Leftrightarrow (\exists_A x)(\text{非}R)$ 都是 M 的定理.

证明：类似证明规则29可证.

证明规则 39.

令 A 、 R 、 S 为量词理论 M 的公式， x 为字母，并且 x 不是量词理论 M 的常数. 如果 $A \Rightarrow (R \Rightarrow S)$ 是 M 的定理，则 $(\forall_A x)R \Rightarrow (\forall_A x)S$ 和 $(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists_A x)S$ 也是 M 的定理；如果 $A \Rightarrow (R \Leftrightarrow S)$ 是 M 的定理，则 $(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)S$ 和 $(\exists_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)S$ 也是 M 的定理.

证明：类似证明规则31可证.

证明规则 40.

令 A 、 R 、 S 为量词理论 M 的公式， x 为字母，则 $(\forall_A x)(R$ 与 $S) \Leftrightarrow ((\forall_A x)R$ 与 $(\forall_A x)S)$ 和 $(\exists_A x)(R$ 或 $S) \Leftrightarrow ((\exists_A x)R$ 或 $(\exists_A x)S)$ 是 M 的定理.

证明：类似证明规则32可证。

证明规则 41.

令 A 、 R 、 S 为量词理论 M 的公式， x 为字母，并且 R 不包含 x ，则 $(\forall Ax)(R \text{ 或 } S) \Leftrightarrow (R \text{ 或 } (\forall Ax)S)$ 和 $(\exists Ax)(R \text{ 与 } S) \Leftrightarrow (R \text{ 与 } (\exists Ax)S)$ 是 M 的定理。

证明：类似证明规则33可证。

证明规则 42.

令 A 、 B 、 R 为量词理论 M 的公式， x 、 y 为字母，则以下公式都是 M 的定理：

- (1) $(\exists Ax)(\exists By)R \Leftrightarrow (\exists By)(\exists Ax)R$;
- (2) $(\forall Ax)(\forall By)R \Leftrightarrow (\forall By)(\forall Ax)R$;
- (3) $(\exists Ax)(\forall By)R \Rightarrow (\forall By)(\exists Ax)R$;

证明：类似证明规则34可证。

习题 13.

令 A 、 B 为量词理论 M 的公式， x 为字母，且 A 不包含 x ，求证： $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$ 。

证明：根据证明规则33可证。

习题 14.

令 A 、 B 为量词理论 M 的公式， x 为字母且不是 M 的常数，并且 A 不包含 x ，如果 $B \Rightarrow A$ 是 M 的定理，求证： $(\exists x)B \Rightarrow A$ 是 M 的定理。

证明：根据证明规则31， $(\exists x)B \Rightarrow (\exists x)A$ 。由于 A 不包含 x ，故 $(\exists x)A$ 和 A 相同，得证。

习题 15.

令 A 为量词理论 M 的公式， x 、 y 为字母，求证： $(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)(x|y)A$ 、 $(\exists x)(x|y)A \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$ 是 M 的定理。

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 ：

根据证明规则30、证明规则31， $(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)(x|y)A$ ，根据公理模式5、证明规则31， $(\exists x)(x|y)A \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$ 。

由于 M 强于 M_0 ，因此上述结论对理论 M 也成立。

习题 16.

令 A 、 B 为量词理论 M 的公式， x 为字母，求证：

- (1) $(\forall x)(A \text{ 或 } B) \Rightarrow ((\forall x)A \text{ 或 } (\exists x)B)$;
- (2) $((\forall x)A \text{ 与 } (\exists x)B) \Rightarrow (\exists x)(A \text{ 与 } B)$ 。

证明:

(1) 根据公理模式4、公理模式5, $(A \text{ 或 } B) \Rightarrow (A \text{ 或 } (\exists x)B)$, 根据证明规则31、证明规则33可证.

(2) 根据习题16 (1)、证明规则12, $(\forall x)A \text{ 与 } (\exists x)B \Rightarrow \text{非}(\forall x)(A \text{ 或 } B)$, 根据证明规则29可证.

习题 17.

令 A, B 为量词理论 M 的公式, x, y 为字母, 且 B 不包含 x 、 A 不包含 y , 求证: $(\forall x)(\forall y)(A \text{ 与 } B) \Rightarrow ((\forall x)A \text{ 与 } (\forall y)B)$.

证明: 根据证明规则31、证明规则33可证.

习题 18.

令 A, R 为量词理论 M 的公式, x 为字母, 求证: $(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$, $(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$.

证明: 根据证明规则31、证明规则21, $(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$. 根据证明规则12, $(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$.

习题 19.

令 A, R 为量词理论 M 的公式, x 为字母且不是 M 的常数. 求证: 如果 $R \Rightarrow A$ 是 M 的定理, 则 $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$ 是 M 的定理. 如果 $(\text{非} R) \Rightarrow A$ 是 M 的定理, 则 $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$ 是 M 的定理. 特别是, 如果 A 是 M 的定理, 则 $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$ 、 $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$ 都是 M 的定理.

证明:

如果 $R \Rightarrow A$ 是 M 的定理, 则 $R \Leftrightarrow (A \text{ 与 } R)$, 根据证明规则31, $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$.

如果 $(\text{非} R) \Rightarrow A$ 是 M 的定理, 则 $(\text{非} R) \Leftrightarrow (A \text{ 与 非 } R)$, 根据证明规则31、证明规则12, $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$. 如果 A 是 M 的定理, 则 $R \Rightarrow A$ 、 $(\text{非} R) \Rightarrow A$, 根据上述结论, $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$ 、 $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$ 都是 M 的定理.

习题 20.

令 A, R 为量词理论 M 的公式, T 是 M 的项, x 为字母, 如果 $(T|x)A$ 是 M 的定理, 求证: $(T|x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$ 、 $(\forall_A x)R \Rightarrow (T|x)R$ 是 M 的定理.

证明: 由于 $(T|x)A$ 是 M 的定理, 因此 $(T|x)R \Rightarrow (T|x)(R \text{ 与 } A)$. 根据公理模式5, $(T|x)(R \text{ 与 } A) \Rightarrow (\exists_A x)R$, 故 $(T|x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$. 根据证明规则12, $(\forall_A x)R \Rightarrow (T|x)R$.

1.5 等式理论 (Théories égalitaires)

记号定义 12. 等式 (*égalité*)

令 T 、 U 为语句， x 为字母，则“用 $T = U$ ”表示“ $= TU$ ”（第三优先级）；用“ $T \neq U$ ”表示“非 $(T = U)$ ”（第三优先级）。

补充替代规则 7.

下列规则均为公理模式：

(1) 令 x 为字母， T 和 U 为项， R 为公式，则 $(T = U) \Rightarrow ((T|x)R \Leftrightarrow (U|x)R)$ 是公理。

(2) 令 R 和 S 为公式， x 为字母，则 $(\forall x)(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ 是公理。

证明：

令原公式为 A ，以下证明 $(V|y)A$ 也是该规则产生的公式：

若 V 不包含 x 且 x 、 y 不同，根据替代规则2、替代规则5，可证明(1)，根据替代规则4、替代规则7，可证明(2)。

若 V 包含 x 或 x 、 y 相同，则令 R' 为 $(x'|x)R$ ，其中 x' 为与 y 不同的字母且 U 不包含 x' ，根据替代规则1、替代规则8及上述结论可证。

公理模式 6. :

令 x 为字母， T 和 U 为项， R 为公式，则 $(T = U) \Rightarrow ((T|x)R \Leftrightarrow (U|x)R)$ 是公理。

注：即相等的量有相同的性质。

公理模式 7. :

令 R 和 S 为公式， x 为字母，则 $(\forall x)(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ 是公理。

元数学定义 22. 等式理论 (*théorie égalitaire*)

等式理论是指，定义了2元特别符号“ $=$ ”，并且包含公理模式6、公理模式7的量词理论。

证明规则 43.

令 x 为字母， T 和 U 为等式理论 M 的项， R 为 M 的公式，则 $((T = U) \text{ 与 } (T|x)R) \Leftrightarrow ((T = U) \text{ 与 } (U|x)R)$ 是 M 的定理。

证明：

假设 $((T = U) \text{ 与 } (T|x)R)$ ，则 $T = U$ 。

由于 $(T|x)R$ ，根据公理模式6， $(U|x)R$ 。

反之亦然。

注：下文中提及的所有定理、补充定理，都是基于前文已提及的特别符号、公理模式、显式公理组成的理论。它们也适用于更强的理论。

定理 1. 等式的反身性

$x = x$ 。

证明:

设理论为 M , 考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 :

对任意公式 R , 根据证明规则27, $\forall x(R \Leftrightarrow R)$, 根据公理模式7, $\tau_x(R) = \tau_x(R)$, 即 $(\tau_x(R)|x)(x = x)$, 令 R 为非 $(x = x)$, 根据证明规则26, $(\forall x)(x = x)$, 根据证明规则30, $x = x$.

由于 M 强于 M_0 , 因此上述结论对理论 M 也成立.

补充证明规则 7. 同一律

令 T 为等式理论 M 的项, 则 $T = T$.

证明:

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 : 根据定理1、证明规则27, $(\forall x)(x = x)$, 根据证明规则30, $T = T$. 由于 M 强于 M_0 , 因此上述结论对理论 M 也成立.

补充证明规则 8.

令 T 为等式理论 M 的项, 则 $(\exists x)(x = T)$, $(\exists x)(T = x)$.

证明: 根据补充证明规则7、替代规则9、公理模式5可证.

定理 2. 等式的对称性

$(x = y) \Leftrightarrow (y = x)$.

证明: 假设 $x = y$, 根据公理模式6, $(x|y)(y = x) \Leftrightarrow (y|y)(y = x)$, 即 $(x = x) \Leftrightarrow (y = x)$, 根据定理1, $y = x$. 反之亦然.

定理 3. 等式的传递性

$((x = y) \text{ 与 } (y = z)) \Rightarrow (x = z)$.

证明: 假设 $x = y$ 、 $y = z$, 根据公理模式6, $(x = y) \Rightarrow ((x = z) \Leftrightarrow (y = z))$, 因此, $(x = z) \Leftrightarrow (y = z)$, 因此, $x = z$.

证明规则 44.

令 T 、 U 、 V 为等式理论 M 的项, x 为字母, 则 $(T = U) \Rightarrow ((T|x)V = (U|x)V)$ 是 M 的定理.

证明:

令 y 、 z 为和 x 不同的字母, 且不出现在 T 、 U 、 V 中.

假设 $y = z$, 则 $(y|z)((y|x)V = (z|x)V) \Leftrightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$, 即 $((y|x)V = (y|x)V) \Leftrightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$, 根据定理1, $(y|x)V = (y|x)V$, 故 $(y|x)V = (z|x)V$.

因此, $(y = z) \Rightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$, 进而 $(T|y)(U|z)((y = z) \Rightarrow ((y|x)V = (z|x)V))$, 即 $(T = U) \Rightarrow ((T|x)V = (U|x)V)$.

元数学定义 23. 单一公式 (relation univoque), 唯一 (il existe au plus un)

令 R 为等式理论 M 的公式, x, y, z 为不同的字母, 并且 R 不包含 y 和 z , 如果 $(\forall y)(\forall z)((y|x)R \text{ 与 } (z|x)R) \Rightarrow (y = z)$ 是 M 的定理, 则称在 M 中, R 是 x 上的单一公式, 或称在 M 中, 满足 R 的 x 是唯一的.

元数学定义 24. 函数性公式 (relation fonctionnelle), 有且仅有一个 (il existe un et un seul)

令 R 为等式理论 M 的公式, x 为字母, 如果在 M 中, R 是 x 上的单一公式, 并且 $(\exists x)R$ 是 M 的定理, 则称在 M 中, R 是 x 上的函数性公式, 或称在 M 中, 有且仅有一个 x 满足 R .

证明规则 45.

令 R 为等式理论 M 的公式, x 为字母并且不是 M 的常数. 如果在 M 中, R 是 x 上的单一公式, 则 $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ 是 M 的定理. 反之, 如果存在等式理论 M 的项 T , 使 $R \Rightarrow (x = T)$ 为 M 的定理, 则在 M 中, R 是 x 上的单一公式.

证明:

当 $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ 时, 假设 R 为真, 根据公理模式5, $(\tau_x(R)|x)R$, 因此 R 与 $(\tau_x(R)|x)R$, 由于 R 是 x 上的单一公式, 因此 R 与 $(\tau_x(R)|x)R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$. 根据证明规则30可证.

反过来, 当 $R \Rightarrow (x = T)$ 时, 令 y, z 是和 x 不同且不出现在 R 中的字母, 则 $(y|x)R \Rightarrow (y = T)$ 、 $(z|x)R \Rightarrow (z = T)$. $G(\forall y)(\forall z)((y|x)R \text{ 与 } (z|x)R)$, 根据证明规则30, $(y|x)R$ 与 $(z|x)R$, 因此 $y = T$ 、 $z = T$, 根据3, 得证.

证明规则 46.

令 R 为等式理论 M 的公式, x 为字母并且不是等式理论 M 的常数. 如果在 M 中, R 是 x 上的函数性公式, 则 $R \Leftrightarrow (x = \tau_x(R))$ 是 M 的定理. 反之, 如果存在等式理论 M 的项 T , 使 $R \Leftrightarrow (x = T)$ 为理论 M 的定理, 则在 M 中, R 是 x 上的函数性公式.

证明:

当 R 是 x 上的函数性公式时, 根据证明规则45, $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$. 同时, 根据公理模式5, $(\exists x)R$. 根据公理模式6, $(x = \tau_x(R)) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (\exists x)R)$. 当 $x = \tau_x(R)$ 时, $R \Leftrightarrow (\exists x)R$, 又因为 $(\exists x)R$, 因此 R 为真. 综上, 前一部分得证.

反之, 如果 $R \Leftrightarrow (x = T)$, 根据证明规则45, R 是 x 上的单一公式. 又因为 $(T|x)R \Leftrightarrow (T = T)$, 根据定理1, $(T|x)R$, 根据公理模式5, $(\exists x)R$, 得证.

证明规则 47.

令 R, S 为等式理论 M 的公式, x 为字母并且不是等式理论 M 的常数. 如果在 M 中, R 是 x 上的函数性公式, 则 $(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow (\exists x)(R \text{ 与 } S)$.

证明:

根据证明规则46, $R \Leftrightarrow (x = \tau_x(R))$.

根据证明规则43, $(x = \tau_x(R))$ 与 $S \Leftrightarrow (x = \tau_x(R))$ 与 $(\tau_x(R)|x)S$.

因此, R 与 $(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow R$ 与 S .

由于 $(\tau_x(R)|x)S$ 不包含 x , 根据证明规则33, $(\exists x)R$ 与 $(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow (\exists x)(R$ 与 $S)$.

由于 R 是 x 上的函数性公式, 故 $(\exists x)R$, 因此 $(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow (\exists x)(R$ 与 $S)$.

补充证明规则 9.

令 T 为等式理论 M 的项, x 为字母且 T 不包含 x , 则在 M 中, $x = T$ 是 x 上的函数性公式.

证明:

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 :

根据证明规则46可证.

由于 M 强于 M_0 , 因此上述结论对理论 M 也成立.

补充证明规则 10.

令 R 为等式理论 M 的公式, T 是 M 的项, x 为字母且 T 不包含 x , 则 $(\exists x)(x = T$ 与 $R) \Leftrightarrow (T|x)R$.

证明:

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论 M_0 :

根据补充证明规则9, $x = T$ 是 x 的函数性公式; 根据证明规则47, $(\tau_x(x = T)|x)R \Leftrightarrow (\exists x)(x = T$ 与 $R)$.

根据证明规则46, $(x = T) \Leftrightarrow (x = \tau_x(x = T))$. 根据补充证明规则8, $(\exists x)(x = T)$, 即 $\tau_x(x = T) = T$. 根据公理模式6, $(\tau_x(x = T)|x)R \Leftrightarrow (T|x)R$. 得证.

由于 M 强于 M_0 , 因此上述结论对理论 M 也成立.

习题 21.

令 M 为等式理论, 求证: 在 M 中, $x = y$ 是 x 上的函数性公式.

证明: 根据补充证明规则9可证.

习题 22.

令 R 为等式理论 M 的公式, x, y 是不同的字母. 求证: $(\exists x)(x = y$ 与 $R) \Leftrightarrow (y|x)R$.

证明: 根据补充证明规则10可证.

习题 23.

令 R, S 为等式理论 M 的公式, T 为 M 的项, x, y 为字母, y 不是 M 的常数, T 不包含 x . 令理论 M' 为 M 添加显式公理 S 形成的理论. 在理论 M' 中, R 是 x 上的函数性公式, $(T|y)S$ 是理论 M 的定理. 求证: 在 M 中, $(T|y)R$ 是 x 上的函数性公式.

证明:

在理论 M 中, 根据证明规则14, $S \Rightarrow (\exists x)R$. 根据证明规则3、替代规则5, $(T|y)S \Rightarrow (T|y)(\exists x)R$.

根据替代规则9, $(T|y)(\exists x)Rs(\exists x)(T|y)R$, 故 $(\exists x)(T|y)R$.

令 u 、 v 为不同于 x 、 y 且不出现在 R 和 T 中的字母, 在理论 M 中, 根据证明规则14, $S \Rightarrow (\forall u)(\forall v)((u|x)R \text{ 与 } (v|x)R) \Rightarrow (u = v)$.

根据证明规则3、替代规则9、替代规则2、替代规则5, $(T|y)S \Rightarrow (\forall u)(\forall v)((u|x)(T|y)R \text{ 与 } (v|x)(T|y)R) \Rightarrow (u = v)$.

因此, $(\forall u)(\forall v)((u|x)(T|y)R \text{ 与 } (v|x)(T|y)R) \Rightarrow (u = v)$.

综上, 得证.

习题 24.

令 R 、 S 为等式理论 M 的公式, x 为字母且不是 M 的常数. 若 R 是 x 上的函数性公式, $R \Leftrightarrow S$ 是定理, 求证: S 是 x 上的函数性公式.

证明:

根据证明规则31, $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$, 又因为 R 是 x 上的函数性公式, 故 $(\exists x)S$.

令 y 、 z 为不同且不同于 x 的字母, 并且 R 不包含 y 和 z , 又因为 R 是 x 上的函数性公式, 所以 $(\forall y)(\forall z)((y|x)R \text{ 与 } (z|x)R) \Rightarrow (y = z)$.

根据证明规则3、替代规则7, $(y|x)R \Leftrightarrow (y|x)S$, $(z|x)R \Leftrightarrow (z|x)S$.

根据补充证明规则5 (4), $(y|x)R \text{ 与 } (z|x)R \Leftrightarrow (y|x)S \text{ 与 } (z|x)S$. 根据证明规则31, $(\forall y)(\forall z)((y|x)R \text{ 与 } (z|x)R) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall z)((y|x)S \text{ 与 } (z|x)S)$, 因此 $(\forall y)(\forall z)((y|x)S \text{ 与 } (z|x)S) \Rightarrow (y = z)$.

习题 25.

令 R 、 S 、 T 为等式理论 M 的公式, x 为字母, 若 R 是 x 上的函数性公式, 求证: 下列公式是 M 的定理:

- (1) $(\neg(\exists x)(R \text{ 与 } S)) \Leftrightarrow ((\exists x)R \text{ 与 } (\neg S))$;
- (2) $(\exists x)(R \text{ 与 } (S \text{ 与 } T)) \Leftrightarrow ((\exists x)(R \text{ 与 } S) \text{ 与 } (\exists x)(R \text{ 与 } T))$;
- (3) $(\exists x)(R \text{ 与 } (S \text{ 或 } T)) \Leftrightarrow ((\exists x)(R \text{ 与 } S) \text{ 与 } (\exists x)(R \text{ 或 } T))$.

证明:

(1) 根据证明规则47, $\neg(\exists x)(R \text{ 与 } S) \Leftrightarrow \neg(\tau_x(R)|x)S$ 、 $(\exists x)R \text{ 与 } (\neg S) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)(\neg S)$, 根据替代规则5可证.

(2) 根据证明规则47, $(\exists x)(R \text{ 与 } (S \text{ 与 } T)) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)(S \text{ 与 } T)$ 、 $(\exists x)(R \text{ 与 } S) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)S$ 、 $(\exists x)(R \text{ 与 } T) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)T$, 根据替代规则6可证.

(3) 根据证明规则47, $(\exists x)(R \text{ 与 } (S \text{ 或 } T)) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)(S \text{ 或 } T)$ 、 $(\exists x)(R \text{ 与 } S) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)S$ 、 $(\exists x)(R \text{ 与 } T) \Leftrightarrow (\tau_x(R)|x)T$, 根据替代规则5可证.

习题 26.

求证: $(\exists x)R \Rightarrow R$ 不是公理模式.

证明:

令 x, y 为不同的字母, R 是包含 x, y 的公式.

根据替代规则5, $(y|x)((\exists x)R \Rightarrow R)$ 即 $(\exists x)R \Rightarrow (y|x)R$.

假设该公式具有 $(\exists z)R' \Rightarrow R'$ 的形式, 则该公式是 \forall 开头的平衡语句, 因此, 它能唯一的表示为 $\forall BC$ 的形式, 即 $(\exists x)R$ 和 $(\exists z)R'$ 相同, $(y|x)R$ 和 R' 相同. 即 $(\exists x)R$ 和 $(\exists z)(y|x)R$ 相同.

假设 z 和 x 相同, 则 $(\tau_x(R)|x)R$ 和 $(y|x)R$ 相同, 但 $\tau_x(R)$ 至少包含两个字符, 二者字符数量不同, 矛盾. 故 z 和 x 不同.

由于 $(\exists z)(y|x)R$ 不包含 z , 因此 $(\exists x)R$ 不包含 z , 即 R 不包含 z . 故 $(\tau_x(R)|x)R$ 和 $(y|x)R$ 相同, 但 $\tau_x(R)$ 显然至少包含两个字符, 二者字符数量不同, 同样矛盾. 得证.

注: 习题26涉及尚未介绍的“平衡片段唯一性”的知识.

习题 27.

求证: $(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ 不是公理模式.

证明:

令 x, y 为不同的字母, R, S 是包含 x, y 的公式.

根据替代规则5、替代规则7, $(y|x)((R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S)))$ 即 $((y|x)R \Leftrightarrow (y|x)S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$.

假设该公式具有 $(R' \Leftrightarrow S') \Rightarrow (\tau_z(R') = \tau_z(S'))$ 的形式, 则 $R', S', \tau_z(R'), \tau_z(S')$ 分别和 $(y|x)R, (y|x)S, \tau_x(R), \tau_x(S)$ 相同. 即 $\tau_z((y|x)R), \tau_z((y|x)S)$ 分别和 $\tau_x(R), \tau_x(S)$ 相同.

若 z 和 x 相同, 由于 $(y|x)R, (y|x)S$ 不包含 x , 而 R, S 包含 x , $\tau_x((y|x)R), \tau_x((y|x)S)$ 没有连线, 而 $\tau_x(R), \tau_x(S)$ 有连线, 矛盾.

因此 z 和 x 不同, 由于 $\tau_z((y|x)R), \tau_z((y|x)S)$ 不包含 z , 因此 $(y|x)R, (y|x)S$ 不包含 z . 故 $\tau_z((y|x)R), \tau_z((y|x)S)$ 没有连线, 而 $\tau_x(R), \tau_x(S)$ 有连线, 同样矛盾. 得证.

注: 习题27证明使用习题26的结论, 同样涉及尚未介绍的“平衡片段唯一性”的知识.

1.6 项和公式的性质 (Caractérisation des termes et des relations)

语法定义 1. 单词 (mot), 单词幺半群 (monoïde de mots)

令 S 为理论的符号集合, 在 S 上按照下列规则构建的自由幺半群 $L_0(S)$, 称为单词幺半群, 其元素称为单词:

第一, 其元素为所有有限个符号组成的序列 $s_0 s_1 \cdots s_n$ (也可以记作 $(s_i)_{i \in [0, n]}$);

第二, 元素 A 和 B 的乘法运算, 为序列 A 和序列 B 连接成的序列, 记作 AB ;

第三，其单位元为零个元素组成的序列。

语法定义 2. 长度 (*longueur*)

单词 A 的长度，为 A 包含的符号集合的元素数目，记作 $l(A)$ 。

语法定义 3. 权重 (*poid*)

建立符号集到非负整数集的映射。定义单词 A 的权重为 A 包含的各符号对应的数值之和，记作 $n(A)$ 。

补充语法定理 1. A 、 B 为单词，则 $l(AB)=l(A)+l(B)$ 。

证明：根据定义可证。

补充语法定理 2. A 、 B 为单词，则 $n(AB)=n(A)+n(B)$ 。

证明：根据定义可证。

语法定义 4. 单词的片段 (*segment d'un mot*)，单词的真片段 (*segment propre d'un mot*)，单词的头 (*segment initial d'un mot*)，单词的真头 (*segment initial propre d'un mot*)，单词的尾 (*segment final d'un mot*)，单词的真尾 (*segment final propre d'un mot*)

A 、 A' 、 B 、 A'' 均为单词，如果 $A = A'BA''$ ，则称 B 为 A 的片段，如果 $B \neq A$ ，则称 B 为 A 的真片段。如果 $A' = \emptyset$ ，则称 B 为 A 的头，此时，如果 $B \neq A$ ，则称 B 为 A 的真头。如果 $A'' = \emptyset$ ，则称 B 为 A 的尾，此时，如果 $B \neq A$ ，则称 B 为 A 的真尾。

语法定义 5. 不相交的单词片段 (*segments disjoint d'un mot*)，相交的单词片段 (*segments d'un mot qui rencontrent*)

令 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 为单词，如果 $A = BCDEF$ ，则称 C 和 E 为 A 的不相交的片段，反之，则称两个片段相交。

语法定义 6. 有意义的序列 (*suit significative*)，有意义的单词 (*mot significatif*)

单词群 $L_0(S)$ 的单词序列 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n ，当序列中每个元素 A_i ($0 \leq i \leq n$) 均满足下列条件之一时，称为有意义的序列：

(1) A_i 仅包含一个权重为0的符号；

(2) 在 A_i 之前有 p 个元素 A_{i_1} 、 A_{i_2} 、 \dots 、 A_{i_p} ，以及一个权重为 p 的字符 f ，使 $A_i = fA_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_p}$ 。

有意义的序列中的各元素，称为有意义的单词。

语法定理 1.

如果 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_p 都是有意义的单词，符号 f 是权重为 p 的元素，则 $fA_1A_2\dots A_p$ 为有意义的单词。

证明：将 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_p 所在的有意义的序列合并在一起，然后加入 $fA_1A_2\cdots A_p$ ，仍能得到一个有意义的序列，得证。

语法定义 7. 平衡单词 (*mot équilibré*)

单词 A ，同时满足下列两个条件的，称为平衡单词：

- (1) $l(A) = n(A) + 1$;
- (2) 对 A 的任何真头 B ， $l(B) \leq n(B)$.

语法定理 2.

A 是平衡单词，对任意 $0 \leq k < l(A)$ ，存在唯一的从 A 的第 $k + 1$ 个符号开始的平衡片段 S .

证明：

根据定义，任何平衡单词的真头，不可能是平衡单词，故唯一性成立。

下面证明存在性：

令 $A = BC$ ，其中 $l(B) = k$ ，则 $l(C) = l(A) - l(B) \geq n(A) + 1 - n(B) = n(C) + 1$.

令 C_q 为 C 的前 q 个字符组成的序列，则 $l(C_0) = n(C_0) = 0$.

设 i 是使 $l(C_i) \leq n(C_i)$ 成立的最大非负整数，即 $l(C_{i+1}) = i + 1 \geq n(C_{i+1}) + 1$ ，则 $n(C_{i+1}) + 1 \leq i + 1$ ， $i + 1 \leq n(C_i) + 1$ ， $n(C_i) + 1 \leq n(C_{i+1}) + 1$ ，因此三个式子中的等号全部成立，故 $l(C_{i+1}) = n(C_{i+1}) + 1$ ，所以 C_{i+1} 即为所求片段。

语法定理 3.

任何平衡单词 A 都可以写成 $fA_1A_2\cdots A_p$ 的形式，其中 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_p 均为平衡单词，且 $n(f) = p$.

证明：

设 A 的第一个符号是 f 。根据语法定理2， A 的其他符号可以分为 p 个平衡单 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_p 均为平衡单词。

又因为 $l(A) = 1 + l(A_1) + l(A_2) + \cdots + l(A_p)$,

故 $l(A) = 1 + p + n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_p)$,

进而 $l(A) = 1 + p + n(A) - n(f)$.

又因为 $l(A) = 1 + n(A)$,

所以 $n(f) = p$ ，得证。

语法定理 4.

当且仅当一个单词平衡时，该单词有意义。

证明：

充分性：

令 A 为有意义的单词，设其属于单词序列 A_1, A_2, \dots, A_n . A_1 只能是权重为0的符号，显然是平衡单词.

假设对任意 $j < k$, A_j 均为平衡单词，考虑单词 A_k :

若 A_k 是权重为0的符号，显然是平衡单词.

若 $A_k = fB_1B_2 \cdots B_p$, 其中 $n(f) = p$, 且 B_1, B_2, \dots, B_p 均为序列之前的单词，即为平衡单词，则:

由于 $l(A_k) = 1 + l(B_1) + l(B_2) + \cdots + l(B_p)$,

故 $l(A_k) = 1 + p + n(B_1) + n(B_2) + \cdots + n(B_p)$,

因此, $l(A_k) = 1 + n(f) + n(B_1) + n(B_2) + \cdots + n(B_p)$,

所以, $l(A_k) = 1 + n(A_k)$.

同时, 对于 A 的任何一个真头 $C = fB_1B_2 \cdots B_qD$, 有:

$l(C) = 1 + l(f) + l(B_1) + l(B_2) + \cdots + l(B_q) + l(D)$,

所以 $l(C) \leq 1 + q + n(f) + n(B_1) + n(B_2) + \cdots + n(B_q) + n(D)$,

进而 $l(C) \leq p + n(f) + n(B_1) + n(B_2) + \cdots + n(B_q) + n(D)$

故 $l(C) \leq n(C)$, 故 A_k 是平衡单词.

必要性:

对单词的长度运用数学归纳法. 长度为1的平衡单词, 权重为0, 显然为有意义的单词.

设长度 $i < l(A)$ 的平衡单词均有意义, 根据语法定理3, A 可以写成 $fA_1A_2 \cdots A_p$ 的形式, 其中 A_1, A_2, \dots, A_p 均为平衡单词, 因此 A_1, A_2, \dots, A_p 均有意义, 根据语法定理1, A 有意义.

语法定理 5.

A 是有意义的单词, 对任意 $k \in [0, l(A)[$, 存在唯一的从 A 的第 $k+1$ 个符号开始的有意义的片段 S .

证明: 根据语法定理4、语法定理2可证.

语法定理 6.

A 是有意义的单词, 则 A 可以唯一表示为 $fA_1A_2 \cdots A_p$ 的形式, 其中 A_1, A_2, \dots, A_p 均为有意义的单词, 且 $n(f) = p$.

证明:

存在性: 根据语法定理4、语法定理3可证.

唯一性: 根据语法定理2, A 可以唯一表示为 $fA_1A_2 \cdots A_p$ 的形式, 其中 A_1, A_2, \dots, A_p 均为平衡单词, 即都是有意义的单词.

而 $l(A) = 1 + l(A_1) + l(A_2) + \cdots + l(A_p)$,

故 $l(A) = 1 + p + n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_p)$,

因此 $l(A) = 1 + n(A) - n(f) + p$,

又因为 $l(A) = 1 + n(A)$,
所以 $n(f) = p$, 唯一性得证.

语法定义 8. 平衡语句 (*assemblage équilibré*)

如果语句 A 去掉连线后产生的字符序列 A^* 是平衡单词, 则称 A 为平衡语句.

语法定义 9. 语句的片段 (*segment d'un assemblage*), 语句的真片段 (*segment propre d'un assemblage*), 语句的头 (*segment initial d'un assemblage*), 语句的真头 (*segment initial propre d'un assemblage*), 语句的尾 (*segment final d'un assemblage*), 语句的真尾 (*segment final propre d'un assemblage*), 不相交的语句片段 (*segments disjoint d'un assemblages*), 相交的语句片段 (*segments d'un assemblages qui rencontrent*)

对于语句 A , 去掉连线后产生的字符序列 A^* 的任何 (真) 片段 S^* , 如果 A 在 S^* 的相应位置有连线, 则在 S^* 内部添加相应连线后, 形成的语句 S , 称为 A 的 (真) 片段. 如果片段 S^* 是 A^* 的头 (尾), 则称相应的语句 S 为 A 的头 (尾). 如果语句 A 的两个片段, 在去掉连线后产生的字符序列 A^* 中相应的片段相交 (不相交), 则称语句 A 的这两个片段相交 (不相交).

语法定理 7.

对于理论 M , 令 S 为 M 的符号集合, 并构建单词群 $L_0(S)$, 其中 $n(\tau) = n(\neg) = 1$, $n(\vee) = 2$, $n(\square) = 0$, $n(x) = 0$ (x 为字母), $n(s) = m$ (s 为特别符号, m 为该特别符号的元). 则理论 M 的公式和项均为平衡语句.

证明: 对包含 A 的构造为 A_1, A_2, \dots, A_p . 用数学归纳法, 根据语法定理1可证.

语法定义 10. 先行语句 (*assemblage antécédent*), 完美平衡 (*parfaitement équilibré*)

对于以 \neg, \vee 或特别符号开头的平衡语句 A , 将去掉连线后产生的平衡单词 A^* 表示为 $fA_1^*A_2^*\dots A_p^*$ 的形式, 其中 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_p^*$ 均为平衡单词. 在各平衡单词 $A_1^*, A_2^*, \dots, A_p^*$ 内部, 如果 A 的相应位置有连线, 则相应恢复连线, 得到的语句 A_1, A_2, \dots, A_p 称为 A 的先行语句.

此时, 如果 A 和 $fA_1A_2\dots A_p$ 完全相同, 则称 A 为完美平衡语句.

对于以 τ 开头的平衡语句 A , 将去掉连线后产生的平衡单词 A^* 表示为 τB^* 的形式, 选择任意一个 B^* 中未包含的字母 x , 将与开头的 τ 连线的所有 \square 替换为 x , 然后按照 A 当中的其他连线位置重新恢复连线, 得到的语句 B 称为 A 的先行语句.

此时, 如果 A 和 $\tau_x(B)$ 完全相同, 则称 A 为完美平衡语句.

语法定理 8.

设 A 为理论 M 的平衡语句, 当且仅当 A 满足下列条件之一时, A 是 M 的项:

第一, A 是单个字母;

第二, A 是以 τ 开头的完美平衡语句, 且 A 的先行语句是 M 的公式.

当且仅当 A 满足下列条件之一时, A 是 M 的公式:

第一, A 是以 \neg 或 $\forall k$ 开头的完美平衡语句, 且先行语句都是 M 的公式;

第二, A 是以特别符号开头的完美平衡语句, 且先行语句都是 M 的项.

证明:

根据形成规则1、形成规则2、形成规则3、形成规则4, 可证得充分性.

反过来, 如果 A 是公式, 则 A 是 $\neg B$ 、 $\forall B C$ 或 $s D_1 D_2 \cdots D_n$ 的形式, 因此 A 是完美平衡语句, 且先行语句 B 、 C 是公式, D_1 、 D_2 、 \cdots 、 D_n 是项.

如果 A 是项, 则 A 是单个字母或者以 τ 开头. 如果 A 以 τ 开头, 则 A 可以表示为 $\tau_x(B)$ 的形式, 因此 A 是完美平衡语句, 且先行语句 B 是项.

综上, 必要性成立.

习题 28.

令 S 为理论的符号集合, A 为 $L_0(S)$ 的单词, B 、 C 是 A 的两个有意义的片段. 求证: 或者 B 是 C 的片段, 或者 C 是 B 的片段, 或者 B 和 C 不相交.

证明: 根据语法定理4, B 、 C 是平衡单词.

如果 B 和 C 相交:

设 C 的开头在 B 的开头之后, 令 C 开头符号为 f , 根据语法定理2, 在平衡单词 B 中, 以 f 开头的片段中, 存在唯一的平衡片段 D . 因此 D 也是 C 的片段. 在平衡单词 C 中, 根据语法定理2, D 和 C 相同, 即 C 是 B 的片段.

设 C 的开头在 B 的开头之前, 同理可证 B 是 C 的片段.

若 C 和 B 开头相同, 则 C 是 B 的片段, 或者 B 是 C 的片段.

综上得证.

习题 29.

令 S 为理论的符号集合, A 为 $L_0(S)$ 的有意义的单词, 其形式为 $A'BA''$, 其中 B 有意义. 求证: 若 C 有意义, 则 $A'CA''$ 有意义.

证明:

若 A 长度为1, 则 A' 、 A'' 均为单位元, $A = B$, 故 $A'CA'' = C$, 命题成立.

设命题对长度小于 k 的单词成立, 对长度为 k 的单词, 根据语法定理6, A 可以表示为 $f A_1 A_2 \cdots A_p$, 其中 A_1 、 A_2 、 \cdots 、 A_p 均有意义. 若其中与 B 相交的多于1个, 根据语法定理2, 矛盾. 故只有1个与 B 相交, 设其为 A_i , 根据习题28, B 是 A_i 的真片段, 即 A_i 可表示为 $A'_i B A''_i$, 因此 $A'_i C A''_i$ 也是有意义的单词. 因此, $A'CA'' = f A_1 A_2 \cdots A'_i C A''_i \cdots A_p$ 也是有意义的单词.

习题 30.

令 E 为集合, f 为 $E \times E$ 到 E 的映射. 令 $S = E \cup f$. 令 $n(f) = 2$, 对于 $x \in E$, 令 $n(x) = 0$:

(1) 令 M 为 $L_0(S)$ 有意义的单词的集合, 求证: 存在 M 到 E 且满足下列条件的唯一映射 v :

第一, 对所有 $x \in E$, $v(x) = x$;

第二, 对任意两个有意义的单词 A, B , $v(fAB) = f(v(A), v(B))$.

(2) 设 $A = (s_i)_{i \in [0, n]}$ 为 $L_0(S)$ 的单词, 定义 A^* 为其子串, 其下标序列 i_1, i_2, \dots, i_k 是所有满足 $S_{i_j} \neq f$ 的下标 i 按照递增顺序排序而成. 若 A, B 为 $L_0(S)$ 的单词, 且满足 $A^* = B^*$, 则称 A, B 相似. 求证: 如果 f 满足结合律 (即 $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$), 则对任意有意义的单词 A, B , $v(A) = v(B)$.

证明:

(1) 根据定义, 存在性成立, 根据语法定理6, 唯一性成立.

(2) 对任意有意义的单词 A , 若 $A^* = A_1 A_2 \cdots A_n$, 则称 $f A_1 f A_2 \cdots f A_{n-1} A_n$ 为 A 的标准化单词, 记作 A' . 则 A 存在唯一的标准化单词, 且 A 和 A' 相似.

对于 $n = 1$, 显然 $v(A) = v(A')$, 设命题 $v(A) = v(A')$ 对 $n < k$ 成立, 则对 $n = k$:

令 $A = fBC$, 其中 $B^* = A_1 A_2 \cdots A_i$, $C^* = A_{i+1} A_{i+2} \cdots A_k$, 则 $v(A) = f(v(B), v(C)) = f(v(B'), v(C'))$.

若 $i = 1$, 则 $v(A) = f(v(A_1), v(C')) = v(A')$ 显然成立.

设 $v(A) = v(A')$ 对 $i < j$ 成立, 则对 $i = j$: 根据 f 的结合律,

$$v(A) = f(f(A_1, v(f A_2 f A_3 \cdots f A_{j-1} A_j)), v(f A_{j+1} f A_{j+2} \cdots f A_{k-1} A_k)) = f(A_1, f(v(f A_2 f A_3 \cdots f A_{j-1} A_j), v(f A_{j+1} f A_{j+2} \cdots f A_{k-1} A_k))).$$

令 $D = f f A_2 f A_3 \cdots f A_{j-1} A_j f A_{j+1} f A_{j+2} \cdots f A_{k-1} A_k$, 因此 $D' = f A_2 \cdots f A_{n-1} A_n$, 根据归纳假设, $v(D) = v(D')$, 故 $v(A) = f(A_1, v(D')) = v(A')$. 得证.

习题 31.

令 A 为理论 M 的项或公式. 考虑下列语句序列:

先写 A , 如果 A 是单个字母, 则结束. 否则, 写下 A 的先行语句 (如果 A 以 τ 开头, 则写下任何一个先行语句). 如有一个或数个新写出的先行语句不是字母, 则继续写这些先行语句的先行语句, 直至新写出的语句全部是单个字母为止.

(1) 求证: 将上述语句序列的顺序颠倒, 则形成一个构造.

(2) 若平衡语句 B 是 A 的片段, 且在语句 A 中, 没有 B 内部和 B 外部之间的连线, 求证: B 是 M 的项或公式.

(3) 若 B 是项 (或公式), 则将 A 中的 B 替代为另一个项 (或公式). 求证: 若 A 是项 (或公式), 则得到的新语句是项 (或公式).

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 对语句 A 的长度用数学归纳法可知, 该语句序列中存在语句 C , 和 B 的起始位置相同,

根据语法定理2, C 和 B 长度相同. 同时, 由于没有 B 内部和 B 外部之间的连线, 故 B 中的 \square 没有被替代掉, 即 B 和 C 相同. 因此 B 是 M 的项或公式.

(3) 设 A 为 $A'BA''$, 以 C 替代 A .

若 A 的长度为1, 则 A 和 B 相同, 命题成立.

设命题对长度小于 k 的语句成立, 则当 A 的长度为 k 时, 根据习题2929证明过程, A 的先行语句中, 只有一个和 B 相交, 且 B 为该先行语句的片段.

设该语句为 A_p , 将 A_p 中的 B 替代为 C 得到 A'_p , 若 A'_p 为项 (或公式), 则 A'_p 相应为项 (或公式). 因此, 若 A 为项 (或公式), 则 A 的先行公式 A_p 替代为 A'_p , 根据语法定理8, 得到的 $A'CA''$ 也是项 (或公式).

习题 32.

令 A 为理论 M 的语句, T 为 M 的项, x 为字母. 求证, 若 $(T|x)A$ 为项 (或公式), 则 A 为项 (或公式).

证明: 根据习题31 (3) 可证.

习题 33.

理论 M 的公式, 如果以特别符号开头, 则称该公式逻辑上不可约. 令 R_1, R_2, \dots, R_n 为 M 中逻辑上不可约的不同公式. 对于 M 的语句序列 A_1, A_2, \dots, A_n , 如果其中每个语句 A_i 都满足下列条件之一, 则称该序列为基于令 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造:

第一, A_i 是公式 R_1, R_2, \dots, R_n 中的一个;

第二, 在 A_i 之前有一个语句 A_j 使 A_i 为 $\neg A_j$;

第三, 在 A_i 之前有两个语句 A_j, A_k , 使 A_i 为 $\vee A_j A_k$.

(1) 求证: 基于 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造的每个语句均为理论 M 的公式.

(2) 基于 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造的每个语句, 称为 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造公式. 求证: 若 R, S 为 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造公式, 则 $\neg R, \vee RS, \Rightarrow RS, R$ 与 $S, R \Leftrightarrow S$ 均为为 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造公式.

(3) 令 R 为 M 的公式. 考虑下列语句序列: 先写 R , 如果 R 逻辑上不可约, 则结束. 否则, 写下 R 的先行语句. 如有一个或数个先行语句不是逻辑上不可约的公式, 则然后继续写这些先行语句的先行语句, 直至新写出的语句全部是逻辑上不可约的公式为止. 若 R_1, R_2, \dots, R_n 为上述语句序列中不同的逻辑上不可约公式, 则称 R_1, R_2, \dots, R_n 为 R 的逻辑成分. 求证: R 为其各逻辑成分的逻辑构造公式, 且若从其逻辑成分中去掉一个公式, 则 R 不是其剩余公式的逻辑构造公式.

(4) 令 R 为 M 的公式, 令 R_1, R_2, \dots, R_n 为 M 中逻辑上不可约的不同公式, 并且:

第一, R 为 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造公式;

第二, 从 R_1, R_2, \dots, R_n 中去掉任何一个公式, R 不是其剩余公式的逻辑构造公式, 求证: R 的逻辑成分是为 R_1, R_2, \dots, R_n .

证明:

(1) 对于 A_1 , 其为公式 R_1, R_2, \dots, R_n 中的一个, 显然为公式. 设命题对 $i < k$ 成立, 则对 A_k , 其为公式 R_1, R_2, \dots, R_n 中的一个, 或为 $\neg A_j$, 或为 $\vee A_j A_k$, 根据形成规则1、形成规则2, A_k 为公式. 得证.

(2) 类似形成规则1、形成规则2、形成规则5、形成规则9、形成规则10的证明, 可证.

(3) 将语句序列的顺序颠倒, 根据定义, R 为其各逻辑成分的逻辑构造公式. 下面证明, 去掉 R_n 后, R 不是剩余公式的逻辑构造公式:

若 R 长度为2, 则 R 本身逻辑上不可约, 仅有一个逻辑成分, 去掉后则无法产生逻辑构造公式, 显然成立.

设待证命题对于小于 k 的公式成立, 则对于长度为 k 的公式, 若 R 本身逻辑上不可约, 显然成立; 若 R 为 $\neg A$ 的形式, R 和 A 的逻辑成分相同, 假设 R 是剩余公式的逻辑构造公式, 则该逻辑构造包含 A , 与 A 不是剩余公式的逻辑构造公式矛盾; 若 R 为 $\vee B C$ 的形式, 则 B, C 必有一个公式的逻辑成分包含 R_n , 设该公式为 B , 假设 R 是剩余公式的逻辑构造公式, 则该逻辑构造包含 B, C , 与 B 不是剩余公式的逻辑构造公式矛盾. 综上, 得证.

(4) 按照 (3) 写下公式序列. 若存在 R_i ($1 \leq i \leq n$) 不在公式序列中, 则去掉 R_i , R 仍是剩余公式的逻辑构造公式, 矛盾. 得证.

习题 34.

令 R_1, R_2, \dots, R_n 为理论 M 中逻辑上不可约的公式, 序列 A_1, A_2, \dots, A_n 为基于 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造.

先将每个 R_i 对应符号0或1, 然后按照下列规则将每个 A_i 对应0或1:

第一, 若存在 j 使 A_i 与 R_j 相同, 则 A_i 与 R_j 对应相同的符号;

第二, 若存在 j 使 A_i 与 $\neg A_j$ 相同, 而 A_j 对应0 (或1), 则 A_i 对应1 (或0);

第三, 若存在 j, k 使 A_i 与 $\vee A_j A_k$ 相同, 在 A_j, A_k 均为1的情况下, A_i 为1, 其他情况下 A_i 为0.

(1) 求证: 根据上述方法, 每个 A_i 有且仅有一个对应的符号.

(2) 令 R 为 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造公式, 求证: R 对应的符号, 与选择哪一个基于 R_1, R_2, \dots, R_n 且包含 R 的逻辑构造无关.

(3) 令 R, S 为 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造公式, R 和 $\Rightarrow RS$ 对应的符号均为0, 求证: S 对应的符号为0.

(4) 设理论 M 的公理仅包含公理模式1、公理模式2、公理模式3、公理模式4生成的公理, R 是 M 的定理, R_1, R_2, \dots, R_n 是 R 的逻辑成分. 求证: 不论各公式 R_1, R_2, \dots, R_n 对应的符号是0还是1, R 对应的符号均为0.

(5) 令 R 为理论 M 逻辑上不可约的公式. 求证: R 、非 R 都不是 M 的定理, 并且, M 没有矛盾.

(6) 令 R_1, R_2, \dots, R_n 为理论 M 中逻辑上不可约的公式. 令 S_1, S_2, \dots, S_p 为所有 $(R'_1$ 或 R'_2 或 \dots 或 $R'_n)$ 形式的公式, 其中 R'_i 为 R_i 或者“非 R_i ”其中之一. 令 T_1, T_2, \dots, T_q 为所有 S_{i_1} 与 S_{i_2} 与 \dots 与 S_{i_r} 形式的公式, 其中 i_1, i_2, \dots, i_r 为严格递增的下标序列. 令 T_0 为 M 中的定理“ R_1 或非 R_1 ”, 求证: 令 R_1, R_2, \dots, R_n 的一切逻辑构造公式, 与且仅与 $T_0, T_1, T_2, \dots, T_q$ 中的一个公式等价.

(7) 令 R 为理论 M 的公式, R_1, R_2, \dots, R_n 为其逻辑成分. 求证: 当且仅当 R 为定理时, 不论各公式 R_1, R_2, \dots, R_n 对应的符号是0还是1, R 对应的符号是0.

证明:

(1) 根据定义, 存在性成立; 根据语法定理6, 唯一性成立.

(2) 若 R 长度为2, 则 R 只能是 R_1, R_2, \dots, R_n 其中之一, 其对应的符号不取决于逻辑构造, 故命题对长度为2的 R 成立.

设公式对长度小于 k 的 R 成立, 对于长度为 k 的 R :

若 R 为 R_1, R_2, \dots, R_n 之一, 命题显然成立; 若 R 为 $\neg A_j$ 或 $\vee A_j A_k$, 由于 A_j (以及 A_k) 对应的符号不取决于逻辑构造; 另一方面, 根据语法定理6, R 的表示形式唯一, 故 R 对应的符号也不取决于逻辑构造.

(3) 根据习题34 (1)、习题34 (2), S 对应的符号唯一. R 对应0, 则 $\neg R$ 对应1, 若 S 对应1, 则 $\Rightarrow RS$ 对应1, 矛盾, 因此 S 对应0.

(4) 考虑包含 R 的证明: 若 R 为公理, 对于公理模式1、公理模式2、公理模式3、公理模式4, 无论 A, B, C 对应的符号是0还是1, R 对应的符号均为0. 若 R 不是公理, 则根据习题34 (3) 可证.

(5) R 逻辑上不可约, 故 R 、非 R 的逻辑成分仅有公式 R . 非 R 对应的符号因 R 对应的符号而变, 根据习题34 (4), R 、非 R 都不是定理. 另一方面, 如果 M 有矛盾, 即存在定理 S 和定理非 S , 根据习题34 (4), S 、非 S 对应的符号均为0. 但 S 对应的符号为0, 非 S 对应的符号为1. 根据习题34 (1)、34 (2), S 对应的符号唯一, 矛盾. 因此 M 没有矛盾.

(6) 唯一性:

若某个 S_{i_1} 与 S_{i_2} 与 \dots 与 S_{i_r} 和 T_0 等价, 则 S_{i_1} 与 S_{i_2} 与 \dots 与 S_{i_r} 为定理, 因此, S_{i_1} 为定理, 根据习题34 (4), S_{i_1} 对应的符号恒为0, 但设 S_{i_1} 为 R'_1 或 R'_2 或 \dots 或 R'_n , 令其中各公式 R'_i 对应的符号均为1, 则 S_{i_1} 对应的符号为1, 根据习题34 (1)、习题34 (2), 矛盾.

若存在 $(S_{i_1}$ 与 S_{i_2} 与 \dots 与 $S_{i_r}) \Leftrightarrow (S_{j_1}$ 与 S_{j_2} 与 \dots 与 $S_{j_{r'}})$, 则序列 i_1, i_2, \dots, i_r 和 $j_1, j_2, \dots, j_{r'}$ 必不完全相同, 设 j_m 不在 i_1, i_2, \dots, i_r 之中, 则 $(S_{i_1}$ 与 S_{i_2} 与 \dots 与 $S_{i_r}) \Rightarrow S_{j_m}$, 设 S_{j_m} 为 R'_1 或 R'_2 或 \dots 或 R'_n , 令其中各公式 R'_i 对应的符号均为1, 则 S_{j_m} 对应的符号为1, 而 $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$ 对应的符号均为0, 因此 S_{i_1} 与 S_{i_2} 与 \dots 与 S_{i_r} 对应的符号为0, 故 $(S_{i_1}$ 与 S_{i_2} 与 \dots 与 $S_{i_r}) \Rightarrow S_{j_m}$ 对应的符号为1, 根据习题34 (1)、习题34 (2), 矛盾.

综上，唯一性得证.

存在性:

先证引理:

引理1: 对于 R_1, R_2, \dots, R_n 构成的所有 S_1, S_2, \dots, S_p ($p = 2^n$), 非 S_1 或非 S_2 或 \dots 或非 S_p 为定理.

令 U_n 为 n 个逻辑上不可约的不同公式构成的“非 S_1 或非 S_2 或非 \dots 或非 S_p ” ($p = 2^n$). 对 $n = 1$, R_1 与非 R_1 为定理, 显然命题成立. 设公式对 $n < k$ 成立, 对于 $n = k$, U_k 等价于 $(U_{k-1} \text{与} R_k)$ 或 $(U_{k-1} \text{与非} R_k)$, 等价于“ R_n 与非 R_n ”, 显然命题成立, 引理1得证.

引理2: 对于 R_1, R_2, \dots, R_n 构成的所有 S_1, S_2, \dots, S_p ($p = 2^n$), 对任意 $i \neq j$, S_i 或 S_j 均为定理.

由于 $i \neq j$, S_i 或 S_j 中必有 R_i 和非 R_i , 故引理2得证.

引理3: 对于 R_1, R_2, \dots, R_n 构成的所有 $T_0, T_1, T_2, \dots, T_q$, 则对任意 i , R_i 、非 R_i 分别等价于其中某个 $T_m, T_{m'}$.

设 S_1, S_2, \dots, S_p 中所有包含 R_i 的公式为 $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$, 又因为 U_{n-1} 为真, 故 $(S_{i_1} \text{与} S_{i_2} \text{与} \dots \text{与} S_{i_r}) \Leftrightarrow (\text{非}(U_{n-1}) \text{或} R_i)$, 因此 $(S_{i_1} \text{与} S_{i_2} \text{与} \dots \text{与} S_{i_r}) \Leftrightarrow (U_{n-1} \Rightarrow R_i)$, 故 $(S_{i_1} \text{与} S_{i_2} \text{与} \dots \text{与} S_{i_r}) \Leftrightarrow R_i$. 同理可证存在等价于非 R_i 的某个 $T_{m'}$. 引理3得证.

引理4: 对于 R_1, R_2, \dots, R_n 构成的所有 S_1, S_2, \dots, S_p ($p = 2^n$), 则对任意 i , $S_1 \text{与} S_2 \text{与} \dots \text{与} S_i \Leftrightarrow \text{非}(S_{i+1} \text{与} S_{i+2} \text{与} \dots \text{与} S_p)$.

根据引理1, 非 S_1 或非 S_2 或非 \dots 或非 S_p , 则非 $(S_1 \text{与} S_2 \text{与} \dots \text{与} S_i)$ 或非 $(S_{i+1} \text{与} S_{i+2} \text{与} \dots \text{与} S_p)$, 故 $(S_1 \text{与} S_2 \text{与} \dots \text{与} S_i) \Rightarrow \text{非}(S_{i+1} \text{与} S_{i+2} \text{与} \dots \text{与} S_p)$.

反过来, 考虑 $(S_1 \text{与} S_2 \text{与} \dots \text{与} S_i)$ 或 $(S_{i+1} \text{与} S_{i+2} \text{与} \dots \text{与} S_p)$, 用分配律展开, 根据引理2, 各项均为真, 故 $(S_1 \text{与} S_2 \text{与} \dots \text{与} S_i)$ 或 $(S_{i+1} \text{与} S_{i+2} \text{与} \dots \text{与} S_p)$, 因此非 $(S_{i+1} \text{与} S_{i+2} \text{与} \dots \text{与} S_p) \Rightarrow (S_1 \text{与} S_2 \text{与} \dots \text{与} S_i)$, 引理4得证.

考虑任何一个基于 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造 A_1, A_2, \dots, A_m , A_1 必为 R_i 的形式, 根据引理3, 存在性对公式 A_1 成立.

设存在性对公式 A_1, A_2, \dots, A_{i-1} 成立, 对于 A_i :

如果 A_i 为 R_j 的形式, 根据引理3, 存在性成立.

如果 A_i 是 $\neg A_j$ 的形式, 若 $A_j \Leftrightarrow T_0$, 根据引理1, $A_i \Leftrightarrow (S_1 \text{与} S_2 \text{与} \dots \text{与} S_p)$; 在其他情况下, 令 $A_j \Leftrightarrow (S_{i_1} \text{与} S_{i_2} \text{与} \dots \text{与} S_{i_r})$, 设剩余公式为 $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_{r'}}$, 则根据引理4, $A_i \Leftrightarrow \text{非} A_j \Leftrightarrow \text{非}(S_{i_1} \text{与} S_{i_2} \text{与} \dots \text{与} S_{i_r}) \Leftrightarrow (S_{j_1} \text{与} S_{j_2} \text{与} \dots \text{与} S_{j_{r'}})$. 以上两种情况下, 存在性均成立.

如果 A_i 是 $\vee A_j A_k$ 的形式, 若 $A_j \Leftrightarrow T_0$ 或者 $A_k \Leftrightarrow T_0$, 则 $A_i \Leftrightarrow T_0$; 在其他情况下, 令 $A_j \Leftrightarrow (S_{i_1} \text{与} S_{i_2} \text{与} \dots \text{与} S_{i_r})$, $A_k \Leftrightarrow (S_{j_1} \text{与} S_{j_2} \text{与} \dots \text{与} S_{j_{r'}})$, 若 A_j 包含的各项与 A_k 包含的各项没有相同的, 则 A_j 或 A_k 用分配律展开, 各项均为真, 故 $A_i \Leftrightarrow T_0$, 若 A_j 包含的各项与 A_k 包含的各项中有相同项 $S_{l_1}, S_{l_2}, \dots, S_{l_{r''}}$ 为相同项, 则 $A_i \Leftrightarrow S_{l_1} \text{与} S_{l_2} \text{与} \dots \text{与} S_{l_{r''}}$. 以上两种情况下, 存在性均成立.

综上, 存在性成立.

(7) 根据习题34 (4), 必要性成立.

若 R 对应的符号恒为0, 根据习题34 (6), 存在唯一的 T_m , 使 $R \Leftrightarrow T_m$. 如果 $R \Leftrightarrow T_0$, 则 R 为定理. 否则, 存在 $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$, 使 $R \Leftrightarrow (S_{i_1} \text{与} S_{i_2} \text{与} \dots \text{与} S_{i_r})$, 则 S_{i_1} 与 S_{i_2} 与 \dots 与 S_{i_r} 对应的符号恒为0, 非(S_{i_1} 与 S_{i_2} 与 \dots 与 S_{i_r})即(非 S_{i_1} 或非 S_{i_2} 或非 \dots 或非 S_{i_r}), 故其对应的符号恒为1, 因此 $S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}$ 对应的符号均恒为0. 但设 S_{i_1} 为 R'_1 或 R'_2 或 \dots 或 R'_n , 令其中各公式 R'_i 对应的符号均为1, 则 S_{i_1} 对应的符号为1, 根据习题34 (1)、习题34 (2), 矛盾.

注:

习题34 (6) 表明主合取范式的存在性和唯一性 (同理可证主析取范式的存在性和唯一性).

习题34 (4)、(7) 表明逻辑理论的可靠性.

习题34 (5) 表明逻辑理论的一致性.

习题 35.

令 R_1, R_2, \dots, R_n 为理论 M 中逻辑上不可约的公式, 将每个 R_i 对应符号0、1或2, 对于基于 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造的一切公式, 按照下列规则确定其对应的符号: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\neg 2 = 2$, $\vee 00 = \vee 01 = \vee 02 = \vee 10 = \vee 20 = \vee 22 = 0$, $\vee 11 = 1$, $\vee 12 = \vee 21 = 2$.

(1) 求证: 令 R 为 R_1, R_2, \dots, R_n 的逻辑构造公式, 求证: R 对应的符号不取决于基于 R_1, R_2, \dots, R_n 且包含 R 的逻辑构造.

(2) 设理论 M 的公理仅包含公理模式2、公理模式3、公理模式4生成的公理, R 是 M 的定理. 求证: 不论 R 的各逻辑成分对应的符号是0、1还是2, R 对应的符号都是0. 同时, 如果 S 为逻辑上不可约的公式, 并且对应的符号为2, 则 $(S \text{或} S) \Rightarrow S$ 对应的符号为2, 进而, M 不可能等价于一个符号与 M 相同并且仅包含公理模式1、公理模式2、公理模式3、公理模式4生成的公理的理论.

(3) 对于仅包含公理模式公理模式1、公理模式3、公理模式4生成的公理的理论, 适用下列规则: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\neg 2 = 2$, $\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = 0$, $\vee 11 = 1$, $\vee 12 = \vee 21 = 1$; $\vee 22 = 2$; 对于仅包含公理模式公理模式1、公理模式2、公理模式4生成的公理的理论, 适用下列规则: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 2$, $\neg 2 = 0$, $\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 21 = 0$, $\vee 11 = \vee 12 = 1$; $\vee 22 = 2$. 求证与 (1)、(2) 类似的结论.

(4) 对于仅包含公理模式公理模式1、公理模式2、公理模式3生成的公理的理论, 适用下列规则: $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\neg 2 = 3$, $\neg 3 = 0$, $\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = \vee 03 = \vee 30 = \vee 23 = \vee 32 = 0$, $\vee 11 = 1$, $\vee 12 = \vee 21 = \vee 22 = 2$, $\vee 13 = \vee 31 = \vee 33 = 3$. 求证与 (1)、(2) 类似的结论.

证明:

(1) 类似习题34 (2) 可证.

(2) 第一点：类似习题34 (4) 可证.

第二点：若公理模式1生成的公理是 M 的定理，则 $(S \text{或} S) \Rightarrow S$ 对应的符号为0. 又因为 $(S \text{或} S) \Rightarrow S$ 对应的符号为2，类似习题34 (1)、习题34 (2)， S 对应的符号唯一，矛盾.

(3) 类似习题35 (1)、习题35 (2) 可证.

(4) 类似习题35 (1)、习题35 (2) 可证. 注：习题35表明逻辑理论的独立性.

Chapter 2

集合论 (Théorie des ensembles)

2.1 集合化公式 (Relations collectivisantes)

元数学定义 25. 集合 (*ensemble*)

在包含二元特别符号 \in 的理论中, 项又称集合.

注: 集合论中, 项与集合为同义词, 万物皆为集合.

记号定义 13. 属于 (*appartenance*)

令 T 、 U 为语句, x 为字母, 则用“ $T \in U$ ”表示“ $\in TU$ ”(第三优先级); “ $T \notin U$ ”表示“非($T \in U$)”(第三优先级).

定义 1. 元素 (*élément*)

如果 $A \in B$, 则称 A 为 B 的元素.

定义 2. 包含于 (*contenu dans*), 包含 (*contenir*), 子集 (*partie/sous-ensemble*)

如果不包含字母 z 的公式 $(\forall z)((z \in x) \Rightarrow (z \in y))$ 为真, 则称 x 包含于 y , y 包含 x , 或者 x 是 y 的子集, 记作 $x \subset y$ (第三优先级).

记号定义 14. 非子集 (*non partie/non sous-ensemble*)

“非($x \subset y$)”记作 $x \not\subset y$ (第三优先级).

替代规则 12.

令 T 、 U 、 V 为语句, x 为字母, 则 $(V|x)(T \subset U)$ 和 $(V|x)T \subset (V|x)U$ 相同.

证明: 根据替代规则9、替代规则5可证.

形成规则 13.

令 T 、 U 为包含2元特别符号 \in 的理论 M 的项, 则 $T \subset U$ 是 M 的公式.

证明: 根据形成规则8, 可证.

定理 4. 子集的反身性

$$x \subset x.$$

证明：令 z 为不是常数的字母，则 $(z \in x) \Rightarrow (z \in x)$ ，根据证明规则27可证。

定理 5. 子集的传递性

$$((x \subset y) \text{ 与 } (y \subset z)) \Rightarrow (x \subset z).$$

证明：令 u 为不是常数的字母，根据证明规则30， $(u \in x) \Rightarrow (u \in y)$ 、 $(u \in y) \Rightarrow (u \in z)$ ，故 $(u \in x) \Rightarrow (u \in z)$ 。根据证明规则31可证。

补充定理 1.

$$(\forall x)(\forall y)((x \subset y) \text{ 与 } (y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Leftrightarrow (\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))).$$

证明：

由于待证公式不包含字母，故可令 x 、 y 为不同字母且都不是常数。

令 R 为公式 $(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$ ，根据证明规则32， $(\forall x)(\forall y)((x \subset y) \text{ 与 } (y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x = y))$ 。

假设 $(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x = y))$ ，则 $R \Rightarrow (x = y)$ 。同时，根据公理模式6， $(x = y) \Rightarrow R$ ，故 $R \Leftrightarrow x = y$ 。根据公理模式7， $\tau_x(R) = \tau_x(x = y)$ 。根据定理1， $y = y$ ，根据补充证明规则8， $(\exists x)(x = y)$ ，即 $\tau_x(x = y) = y$ ，根据定理3， $y = \tau_x(R)$ ，根据证明规则27， $(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$ 。故 $(\forall x)(\forall y)((x \subset y) \text{ 与 } (y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Rightarrow (\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$ 。

反过来，令 x' 、 x'' 是与 x 、 y 、 z 不同的字母，假设 $(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$ 。

若 $(\forall x')(\forall x'')((x'|x)R \text{ 与 } (x''|x)R)$ ，根据证明规则30， $(x'|x)R$ 、 $(x''|x)R$ ，因此 $(x'|x)R \Leftrightarrow (x''|x)R$ ，根据证明规则27， $(\forall y)((x'|x)R \Leftrightarrow (x''|x)R)$ ，根据公理模式7， $\tau_y((x'|x)R) = \tau_y((x''|x)R)$ ，进而， $x' = \tau_y((x'|x)R)$ 、 $x'' = \tau_y((x''|x)R)$ ，根据定理3， $x' = x''$ ，即 R 是 y 上的单一公式。

根据证明规则45， $R \Rightarrow (y = \tau_y(R))$ 。假设 $(\forall x)(\forall y)((x \subset y) \text{ 与 } (y \subset x))$ ，根据证明规则32， $(\forall x)(\forall y)R$ ，根据证明规则27， R 为真，故 $y = \tau_y(R)$ 。又因为 $(\forall x)(x = \tau_y(R))$ ，根据证明规则27， $x = \tau_y(R)$ ，根据定理3， $x = y$ ，故 $(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)((x \subset y) \text{ 与 } (y \subset x) \Rightarrow (x = y))$ 。

注：左边为本文的外延公理，右边是外延公理的另一种表述，包含相同元素的集合相等。本补充定理表明，外延公理的两种表述方式是等价的。

显式公理 1. 外延公理

$$(\forall x)(\forall y)((x \subset y) \text{ 与 } (y \subset x) \Rightarrow (x = y)).$$

补充定理 2.

$$(\forall z)((z \in x) \Leftrightarrow (z \in y)) \Rightarrow (x = y).$$

证明：根据显式公理1可证。

证明规则 48.

令 R 为包含2元特别符号 \in 和显式公理1的等式理论 M 的公式， x 、 y 为不同的字母，并且 R 不包含 y ，则在 M 中， $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ 是 y 上的单一公式。

证明：令 z 、 z' 为不同于 x 且不出现在 R 中的字母。假设 $(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow R)$ 与 $(\forall x)((x \in z') \Leftrightarrow R)$ ，则 $(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow R)$ 与 $(x \in z') \Leftrightarrow R$ ，因此 $(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (x \in z'))$ ，即 $(z \subset z')$ 与 $(z' \subset z)$ ，根据显式公理1， $z = z'$ ，得证。

记号定义 15. 集合化 (collectivisante)

如果公式 R 不包含 y ， x 、 y 是不同的字母，则语句 $(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ 记作 $Coll_x R$ 。

注：如果 $Coll_x R$ 为真，则意味着满足 R 的 x 的集合存在。

元数学定义 26. 集合化公式 (relation collectivisante)，满足公式的元素集合 (ensemble de éléments tels que une relation)

在包含2元特别符号 \in 的理论 M 中，如果 R 不包含 y ， x 、 y 是不同的字母，如果 $Coll_x R$ 是定理，则称在 M 中， R 为 x 上的集合化公式，称不含 y 的项 $\tau_y((\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R))$ 为满足 R 的 x 的集合，记作 $\{x|R\}$ 。

补充定理 3.

$Coll_x(x \in y)$ 。

证明： $(x \in y) \Leftrightarrow (x \in y)$ ，得证。

补充定理 4. 罗素悖论，所有不属于自身的项不能组成集合

非 $Coll(x \notin x)$ 。

证明：令 y 为不是常数的字母，由于 $y \notin y$ 或 $y \in y$ ，故非 $((y \in y) \Leftrightarrow (y \notin y))$ ，根据公理模式5， $(\exists x)(\text{非}((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x)))$ ，因此，非 $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x))$ ，根据证明规则27， $(\forall y)(\text{非}(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x)))$ ，因此，非 $(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x))$ 。

证明规则 49.

令 R 为包含2元特别符号 \in 和显式公理1的等式理论 M 的公式， x 、 y 为不同的字母，并且 R 不包含 y ，如果在 M 中， R 是 x 上的集合化公式，则在 M 中，公式 $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ 是 y 上的函数性公式。

证明：根据证明规则48可证。

补充证明规则 11.

令 R 为包含2元特别符号 \in 和显式公理1的等式理论 M 的公式， x 为字母，如果在 M 中， R 是 x 上的集合化公式，则 $(x \in \{x|R\}) \Leftrightarrow R$ 是 M 的定理。

证明：根据定义， $Coll_x R$ 和 $(\forall x)(x \in \{x|R\}) \Leftrightarrow R$ 相同，根据证明规则30可证。

补充证明规则 12.

令 R 、 S 为包含2元特别符号 \in 和显式公理1的等式理论 M 的公式， x 为字母，如果在 M 中， R 是 x 上的集合化公式，且 $R \Leftrightarrow S$ ，则 S 也是 x 上的集合化公式。

证明：由于 $R \Leftrightarrow S$ ，因此 $Coll_x R \Leftrightarrow Coll_x S$ ，得证。

证明规则 50.

令 R 、 S 为包含2元特别符号 \in 和显式公理1的等式理论 M 的公式， x 为字母，如果在 M 中， R 和 S 都是 x 上的集合化公式，则 $(\forall x)(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow \{x|R\} \subset \{x|S\}$ ， $(\forall x)(R \Leftrightarrow S) \Leftrightarrow \{x|R\} = \{x|S\}$ 。

证明：根据补充证明规则11、显式公理1可证。

显式公理 2. 配对公理

$(\forall x)(\forall y)Coll_z(z = x \text{ 或 } z = y)$ 。

注：本公理表明，任何两个项均可构成集合。

定义 3. 二元集合 (*ensemble à deux éléments*)，仅有一个元素的集合 (*ensemble réduit à un élément*)，仅有两个元素的集合 (*ensemble réduit à deux éléments*)

$\{z|z = x^-z = y\}$ 称为二元集合，记作 $\{x, y\}$ 。 $\{x, x\}$ 称为仅有一个元素的集合，记作 $\{x\}$ 。如果 $x \neq y$ ，则 $\{x, y\}$ 称为仅有两个元素的集合。

定义 4. 二元子集 (*partie à deux éléments*)

如果某个二元集合是另一个集合的子集，则称其为二元子集。

补充定理 5.

$\{x, y\} = \{y, x\}$ 。

证明：根据证明规则50可证。

补充定理 6.

$x \in \{y\} \Leftrightarrow x = y$ 。

证明：根据补充证明规则12， $x \in \{y\} \Leftrightarrow (x = y^-x = y)$ ，得证。

补充定理 7.

$\{z|z = x\} = \{x\}$ 。

证明： $\{x\}$ 即 $\{z|z = x \text{ 或 } z = x\}$ ，根据证明规则50、公理模式1可证。

补充定理 8.

$$(\{x\} \subset X) \Leftrightarrow (x \in X).$$

证明:

令 z 为不是常数的字母, $\{x\} \subset X$ 即 $(\forall z)((z \in \{x\}) \Rightarrow (z \in X))$, 根据补充定理6, $(\forall z)((z \in \{x\}) \Rightarrow (z \in X)) \Leftrightarrow (\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$. 若 $\{x\} \subset X$, 则 $(\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$, 故 $(x = x) \Rightarrow (x \in X)$, 因此 $x \in X$.

反过来, 假设 $x \in X$, 则 $(z = x) \Rightarrow (z \in X)$, 进而 $(\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$. 得证.

补充定理 9.

$$(\{x\} = \{y\}) \Leftrightarrow (x = y).$$

证明:

令 z 为不是常数的字母, 根据补充定理7、补充证明规则7, $z \in \{x\} \Leftrightarrow z = x$, $z \in \{y\} \Leftrightarrow z = y$. 由于 $\{x\} = \{y\}$, 根据公理模式6, $z \in \{x\} \Leftrightarrow z \in \{y\}$, 则 $(z = x) \Leftrightarrow (z = y)$. 根据证明规则27, $(\forall z)((z = x) \Leftrightarrow (z = y))$, 根据证明规则30, $(x = x) \Leftrightarrow (x = y)$, 根据定理1, $x = y$, 故 $(\{x\} = \{y\}) \Rightarrow (x = y)$.

反过来, 根据证明规则44, $(x = y) \Rightarrow (\{x\} = \{y\})$.

补充替代规则 8.

“令 R 为公式, x 、 y 、 X 、 Y 为不同字母, 并且 R 不包含 X 和 Y , 则 $(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)Coll_x((\exists y)((y \in Y \text{ 与 } R))$ 是公理”是公理模式.

证明: 根据替代规则8可证.

公理模式 8. 搜集和并集公理模式

令 R 为公式, x 、 y 、 X 、 Y 为不同字母, 并且 R 不包含 X 和 Y , 则 $(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)Coll_x((\exists y)((y \in Y \text{ 与 } R))$ 是公理.

注: 该公理模式的含义是, 对任何一个 y 值, 能使公式 R (含参数 x 、 y) 成立的 x 值, 都属于某个集合, 则对任何一个集合, 它的所有元素 y 值对应的能使公式 R 成立的 x 值, 构成一个集合.

证明规则 51. 分类定理

令 P 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的公式, x 为字母, A 为不包含 x 的项, 则在 M 中, “ P 与 $x \in A$ ”是 x 上的集合化公式.

证明:

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论 M_0 , 则 M_0 不包含任何常数:

令 R 为公式 P 与 $x = y$, 其中 y 是不同于 x 且不出现在 P 、 A 中的字母. 根据证明规则27, $(\forall x)(R \Rightarrow x \in \{y\})$, 即 $(\{y\}|X)(R \Rightarrow x \in X)$.

由于 x 、 y 是不同字母, 根据公理模式5、证明规则27, $(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X))$, 由于 A 不包含 x 、 y , 根据公理模式8、证明规则30, $Coll_x((\exists y)((y \in A \text{ 与 } R))$. 根据证明规则43, $(y \in Y \text{ 与 } R) \Leftrightarrow (x = y \text{ 与 } x \in A \text{ 与 } R)$, 由于 y 不出现在 P 、 A 中, 根据证明规则33, $(\exists y)(y \in Y \text{ 与 } R) \Leftrightarrow ((\exists y)(x = y)) \text{ 与 } x \in A \text{ 与 } R$. 根据补充证明规则8, $(\exists y)(x = y)$, 因此 $(\exists y)(y \in Y \text{ 与 } R) \Leftrightarrow (x \in A \text{ 与 } R)$ 即 $Coll_x(x \in A \text{ 与 } R)$.

由于 M 强于 M_0 , 因此上述结论对理论 M 也成立.

证明规则 52.

令 R 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的公式, x 为字母, A 为不包含 x 的项, 如果 $R \Rightarrow (x \in A)$ 是 M 的定理, 则在 M 中, R 是 x 上的集合化公式.

证明: $R \Rightarrow (x \in A)$, 因此 $R \Leftrightarrow R \text{ 与 } (x \in A)$, 根据证明规则51可证.

补充证明规则 13.

令 R 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的定理, x 为字母, 则(非 $Coll_x(R)$)为真.

证明:

如果 M 存在矛盾, 根据补充证明规则2, 任何公式均为真.

如果 M 不存在矛盾, 假设 $Coll_x(R)$ 为真, 根据补充证明规则11, $(x \in \{x|R\}) \Leftrightarrow R$, 即 $x \in \{x|R\}$, 因此对任意公式 R' , $R' \Rightarrow x \in \{x|R\}$, 根据证明规则52, R' 是 x 上的集合化公式. 与补充定理4矛盾. 故“非 $Coll_x(R)$ ”.

补充定理 10. 所有的项不能组成集合

(1) 非 $(\exists y)(\forall x)(x \in y)$;

(2) $(\forall y)(\exists x)(x \notin y)$.

证明: 根据补充证明规则13可证.

证明规则 53.

令 T 、 A 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的项, x 和 y 为不同的字母, 如果 T 不包含 y , A 不包含 x 和 y , 则在 M 中, $(\exists x)(y = T \text{ 与 } x \in A)$ 是 y 上的集合化公式.

证明: 令 R 为公式 $y = T$, 则 $(\forall y)((y = T) \Rightarrow (y \in \{T\}))$, 令 X 为不同于 y 且不出现在 R 的字母, 则 $(\forall x)(\exists X)(\forall y)((y = T) \Rightarrow (y \in X))$. 根据公理模式8, $(\forall A)Coll_y((\exists x)((x \in A \text{ 与 } y = T))$, 根据证明规则30, $(\exists x)((x \in A \text{ 与 } y = T)$ 是 y 上的集合化公式.

元数学定义 27. 形式为项的对象集合 (*ensemble des objets de la forme d'un terme*)

令 T 、 A 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的项, x 和 y 为不同的字母, 如果 T 不包含 y , A 不包含 x 和 y , 则称 $\{y | (\exists x)(y = T \text{ 与 } x \in A)\}$ 为“对于 $x \in A$ 形式为 T 的对象集合”.

补充定理 11. 补集的存在性

$x \notin A$ 与 $x \in X$ 是 x 上的集合化公式.

证明: 根据证明规则51可证.

定义 5. (*complémentaire d'un ensemble*)

如果 $A \subset X$, 则称 $\{x | x \notin A \text{ 与 } x \in X\}$ 为 A 的补集, 记作 $\mathbb{C}_X A$ 或 $X - A$.

补充定理 12.

如果 $A \subset X$, 则 $\mathbb{C}_X(\mathbb{C}_X A) = A$.

证明: 根据补充证明规则12, $x \notin \{x | x \notin A \text{ 与 } x \in X\} \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in A)$, 又因为 $x \in X \Rightarrow x \in A$, 所以 $((x \in X \Rightarrow x \in A) \text{ 与 } x \in X) \Leftrightarrow x \in A$, 进而 $\mathbb{C}_X(\mathbb{C}_X A) = A$.

补充定理 13.

如果 $A \subset X$, $B \subset X$, 则 $(A \subset B) \Leftrightarrow (\mathbb{C}_X B \subset \mathbb{C}_X A)$.

证明: 令 x 为字母, $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$, 因此 $A \subset B \Leftrightarrow ((x \notin B) \Rightarrow (x \notin A))$, 故 $A \subset B \Leftrightarrow ((x \notin B) \text{ 与 } (x \in X) \Rightarrow (x \notin A) \text{ 与 } (x \in X))$, 因此 $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{C}_X B \subset \mathbb{C}_X A$.

补充证明规则 14.

令 R 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的定理, x 为字母, 则 $Coll_x(\text{非}R)$ 为真.

证明:

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论 M_0 , 则 M_0 不包含任何常数:

先证 $((x \in y) \Leftrightarrow (\text{非}R)) \Leftrightarrow (x \notin y)$.

若 $(x \notin y)$, 则 $(x \in y) \Leftrightarrow (\text{非}R)$ 即 $((x \notin y) \text{ 或非 } R) \text{ 与 } ((x \in y) \text{ 或 } R)$, 显然为真. 反过来, 若 $(x \in y) \Leftrightarrow (\text{非}R)$, 即 $(x \notin y) \Leftrightarrow R$, 因此 $x \notin y$.

由于“非 $(x \in Y \text{ 与 } x \notin Y)$ ”, 故 $(\forall x)(x \notin \mathbb{C}_Y Y)$, 则 $(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$, 即 $(\exists X)(\forall x)(x \notin X) \Leftrightarrow (\exists X)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (\text{非}R))$, 得证.

由于 M 强于 M_0 , 因此上述结论对理论 M 也成立.

定理 6. 空集的存在性和唯一性

$(\forall x)(x \notin X)$ 是 X 上的函数性公式.

证明：

$(\forall x)(x \notin X)$ 即 $(\forall x)\text{非}(x \in X)$ ，而 $(\forall x)\text{非}(x \in X) \Rightarrow (\forall x)\text{非}(x \in X) \text{或} (\forall T)(\forall x)(x \in T)$.
根据证明规则33， $(\forall x)\text{非}(x \in X) \text{或} (\forall T)(\forall x)(x \in T) \Leftrightarrow (\forall T)(\forall x)(\text{非}(x \in X) \text{或} (x \in T))$ ，
即 $(\forall T)(X \subset T)$. 因此， $(\forall x)(x \notin X) \Rightarrow (\forall T)(X \subset T)$.

若 $(\forall x)(x \notin Y)$ 与 $(\forall x)(x \notin Z)$ ，则 $(\forall T)(Y \subset T)$ 、 $(\forall T)(Z \subset T)$. 因此 $Y \subset Z$ 、 $Z \subset Y$.
根据显式公理1， $Y = Z$ ，即 $(\forall x)(x \notin X)$ 是 X 上的单一公式.

另一方面，由于“非 $(x \in Y \text{与} x \notin Y)$ ”，故 $(\forall x)(x \notin \mathbb{C}_Y Y)$ ，则 $(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$ ，得证.

定义 6. 空集 (*ensemble vide*)，非空 (*n'est pas l'ensemble vide*)

不包含 X 和 x 的项 $\tau_X((\forall x)(x \notin X))$ ，称为空集，记作 \emptyset .

如果 $E \neq \emptyset$ ，则称 E 非空.

注：用形式语言表示，空集是 $\overline{\overline{\tau \neg \neg \neg \neg \in \tau \neg \neg \neg \neg \in \square \square \square}}$.

补充定理 14.

$(\forall x)(x \notin X) \Leftrightarrow (X = \emptyset)$ ， $(\exists x)(x \in X) \Leftrightarrow (X \neq \emptyset)$.

证明：根据定理6、证明规则46可证.

补充定理 15.

$(\forall x)(x \notin \emptyset)$.

证明：根据补充定理14 (1)、补充证明规则7可证.

补充定理 16.

- (1) $\{x\} \neq \emptyset$;
- (2) $\{\{x\}\} \neq \{\emptyset\}$;
- (3) $\{\{\{x\}\}\} \neq \{\{\emptyset\}\}$.

证明：

(1) 根据补充定理6， $x \in \{x\}$ ，根据公理模式5， $(\exists y)(y \in \{x\})$ ，根据补充定理14 (2) 可证.

(2) 根据补充定理9、补充定理16 (1) 可证.

(3) 根据补充定理9、补充定理16 (2) 可证.

补充定理 17.

- (1) $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$;
- (2) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \neq y \text{与} y \neq z \text{与} x \neq z)$;
- (3) $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)(x \neq y \text{与} y \neq z \text{与} x \neq z \text{与} x \neq t \text{与} y \neq t \text{与} z \neq t)$.

证明：根据补充定理16、补充定理9， $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ 、 $\{\{\emptyset\}\}$ 、 $\{\emptyset\}$ 、 \emptyset 互不相等，得证。

补充定理 18.

(1) $(\forall X)(\emptyset \subset X)$.

(2) $X \subset \emptyset \Rightarrow X = \emptyset$.

(3) $X \subset \{x\} \Leftrightarrow (X = \{x\}) \text{ 或 } (X = \emptyset)$.

(4) 如果 $(\forall y)(y \in X \Rightarrow y = x)$ ，则 $(X = \{x\}) \text{ 或 } (X = \emptyset)$.

证明：

(1) 令 z 为不是常数的字母，根据补充定理15， $z \notin \emptyset$ ，因此 $(z \in \emptyset) \Rightarrow (z \in y)$ ，故 $(\forall z)((z \in \emptyset) \Rightarrow (z \in y))$ ，得证。

(2) 假设 $X \not\subset \emptyset$ ，则 $(\exists x)(x \in X)$ ，设 $y \in X$ ，则 $y \in \emptyset$ ，和补充定理15矛盾，得证。

(3) 根据定理4、补充定理18 (1)， $(X = \{x\}) \text{ 或 } (X = \emptyset) \Rightarrow X \subset \{x\}$ 。反过来，假设 $X \subset \{x\}$ 与 $X \neq \emptyset$ ，根据补充定理6， $(\forall z)((z \in X) \Rightarrow (z = x))$ 。由于 $X \neq \emptyset$ ，根据补充定理14 (2)， $(\exists x)(x \in X)$ 。添加辅助常数 x 、 X 以及公理 $x \in X$ 。根据补充定理8， $\{x\} \subset X$ ，根据显式公理1， $X = \{x\}$ ，根据证明规则19得证。

(4) 根据补充定理6， $y = x \Leftrightarrow y \in \{x\}$ ，因此 $(\forall y)(y \in X \Rightarrow y = x) \Leftrightarrow X \subset \{x\}$ ，根据补充定理18 (3) 得证。

习题 36.

求证： $(x = y) \Leftrightarrow (\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$ 。

证明：

根据公理模式6、证明规则27， $(x = y) \Rightarrow (\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$ 。反过来，假设 $(\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$ ，根据证明规则31， $(\{x\} | X)((x \in X) \Rightarrow (y \in X))$ ，即 $(x \in \{x\}) \Rightarrow (y \in \{x\})$ ，因此 $y \in \{x\}$ ，根据补充定理6， $x = y$ 。

习题 37.

求证：

(1) $\emptyset \neq \{x\}$.

(2) $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$.

证明：

(1) 即补充定理16 (1)。

(2) 即补充定理17 (1)。

习题 38.

如果 $A \subset X$ 、 $B \subset X$ ，求证： $(B \subset \mathbb{C}_X A) \Leftrightarrow (\mathbb{C}_X B \subset A)$ 、 $(A \subset \mathbb{C}_X B) \Leftrightarrow (\mathbb{C}_X A \subset B)$ 。

证明：根据补充定理12、补充定理13可证。

习题 39.

求证: $X \subset \{x\} \Leftrightarrow (X = \{x\}) \text{ 或 } (X = \emptyset)$.

证明: 即补充定理18 (3).

习题 40.

求证: $\emptyset = \tau_X(\tau_x(x \in X) \notin X)$.

证明: 由于待证公式不包含 X , 故令 X 为不是常数的字母.

$\tau_x(x \in X) \notin X$ 非 $(\tau_x(x \in X) \in X)$, 即非 $(\exists x)(x \in X)$, 根据证明规则29, $\tau_x(x \in X) \notin X \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin X)$, 根据证明规则27, $(\forall X)(\tau_x(x \in X) \notin X \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin X))$, 根据公理模式7, 得证.

习题 41.

令 M 为包含特别符号 \in 的等式理论, 并有显式公理1': $(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$, 求证: 显式公理1是 M 的定理.

证明: 根据补充定理1可证.

2.2 有序对 (Couples)

定理 7.

$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \Leftrightarrow (x = x' \text{ 与 } y = y')$.

证明:

根据证明规则44, $(x = x' \text{ 与 } y = y') \Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$.

反过来, 假设 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$, 若 $x \neq x'$, 根据补充定理9, $\{x\} \neq \{x'\}$, 则 $\{x\} = \{x', y'\}$, 根据证明规则50, $(\forall x)((z = x) \Leftrightarrow (z = x') \text{ 或 } (z = y))$, 因此 $x = x'$, 矛盾. 故 $x = x'$, 同理可证 $y = y'$.

记号定义 16. 有序对的记号 (*signe d'un couple*), 三元组的记号 (*signe d'un triplet*), 四元组的记号 (*signe d'un quadlet*)

$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ 记作 (x, y) . $((x, y), z)$ 记作 (x, y, z) . $((x, y, z), t)$ 记作 (x, y, z, t) .

定义 7. 有序对 (couple)

如果 $(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$, 则称 z 为有序对.

定义 8. 三元组 (triplet)

如果 $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(u = (x, y, z))$, 则称 u 为三元组.

定义 9. 四元组 (quadlet)

如果 $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)(u = ((x, y, z), t))$, 则称 u 为四元组.

补充定理 19.

(x, y) 为有序对.

证明: 根据定理1, $(x, y) = (x, y)$, 根据公理模式5, $(\exists u)(\exists v)((u, v) = (x, y))$, 得证.

补充定理 20. 有序对的第一元素和第二元素存在且唯一

$(\exists y)(z = (x, y))$ 是 x 上的函数性公式, $(\exists x)(z = (x, y))$ 是 y 上的函数性公式.

证明: 根据定理7可证.

定义 10. 有序对的第一元素 (*première coordonnée d'un couple/première projection d'un couple*), 有序对的第二元素 (*seconde coordonnée d'un couple/seconde projection d'un couple*)

令 z 为有序对, 则不包含 x 、 y 的项 $\tau_x((\exists y)(z = (x, y)))$ 称为 z 的第一元素, 记作 pr_1z , 不包含 x 、 y 的项 $\tau_y((\exists x)(z = (x, y)))$ 称为 z 的第二元素, 记作 pr_2z .

记号定义 17. 用有序对表示字母 (*remplacer le lettre par couple*)

如果某个字母 z 只能是有序对, 则可以选择两个不会引起混淆的新字母, 令第一个新字母是 x , 第二个新字母是 y , 此时, 可用 x 表示 pr_1z , 用 y 表示 pr_2z , 在其他情况下用 (x, y) 表示 z . 此时, 公式中的 “ (x, y) 为有序对与” 可以省略.

注:

使用该记号的例子, 如:

$\{z | (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } R\}$ 可以表示为 $\{(x, y) | R\}$;

$(X_{pr_1k} \cap Y_{pr_2k})_{(k \text{ 为有序对}) \text{ 与 } k \in K}$ 可以表示为 $(X_i \cap Y_j)_{(i, j) \in K}$,

在本文中, 公式记号过于复杂的情况下, 会使用这种表述方式,

补充定理 21.

$$(1) (pr_1z = x) \Leftrightarrow (\exists y)(z = (x, y));$$

$$(2) (pr_2z = y) \Leftrightarrow (\exists x)(z = (x, y)).$$

证明: 根据补充定理20、证明规则46可证.

补充定理 22.

$$(1) (z = (x, y)) \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z = x) \text{ 与 } (pr_2z = y).$$

$$(2) (z = (x, y)) \text{ 与 } x \in X \text{ 与 } y \in Y \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z \in X) \text{ 与 } (pr_2z \in Y).$$

$$(3) (z = (pr_1z, pr_2z)) \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}).$$

$$(4) pr_1(x, y) = x, pr_2(x, y) = y.$$

证明:

(1) 根据补充定理21 (1)、补充定理21 (2), $(z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z = x) \text{ 与 } (pr_2z = y) \Leftrightarrow$

$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(z = (x', y') \text{ 与 } z = (x, y'') \text{ 与 } z = (x'', y)).$

根据定理7, $(z = (x', y') \text{ 与 } z = (x, y'') \text{ 与 } z = (x'', y))$ 等价于 $(z = (x, y) \text{ 与 } x = x' \text{ 与 } x = x'' \text{ 与 } y = y' \text{ 与 } y = y'')$, 进而等价于 $(z = (x, y)) \text{ 与 } (\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(x = x' \text{ 与 } x = x'' \text{ 与 } y = y' \text{ 与 } y = y'')$, 根据定理1, $(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(x = x' \text{ 与 } x = x'' \text{ 与 } y = y' \text{ 与 } y = y'')$, 则 $(z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z = x) \text{ 与 } (pr_2z = y) \Leftrightarrow (z = (x, y)).$

(2) 根据补充定理20, $(\exists y)(z = (x, y))$ 是 x 上的函数性公式, $(\exists x)(z = (x, y))$ 是 y 上的函数性公式, 根据补充证明规则10, $(pr_1z = x) \text{ 与 } (x \in X) \Leftrightarrow (pr_1z \in X)$ 、 $(pr_2z = y) \text{ 与 } (y \in Y) \Leftrightarrow (pr_2z \in Y)$. 因此, $(z = (x, y)) \text{ 与 } x \in X \text{ 与 } y \in Y \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z = x) \text{ 与 } (pr_2z = y) \text{ 与 } x \in X \text{ 与 } y \in Y$, 进而等价于 $(z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z \in X) \text{ 与 } (pr_2z \in Y)$, 得证.

(3) 根据补充定理22 (1), $(z = (pr_1z, pr_2z)) \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z = pr_1z) \text{ 与 } (pr_2z = pr_2z)$, 得证.

(4) 根据补充定理22 (1) 可证.

补充证明规则 15.

令 R 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的公式, x, y 为不同字母, z 为与 x, y 不同的字母且 R 不包含 z , 则:

(1) $(\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \text{ 与 } R) \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z|x)(pr_2z|y)R.$

(2) $(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists z)((z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z|x)(pr_2z|y)R).$

(3) $(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z \text{ 为有序对}) \Rightarrow (pr_1z|x)(pr_2z|y)R)).$

证明:

(1) 根据补充定理22 (1), $(\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \text{ 与 } R) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z = x) \text{ 与 } (pr_2z = y) \text{ 与 } R).$

根据证明规则33, $(\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \text{ 与 } R) \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (\exists x)(\exists y)((pr_1z = x) \text{ 与 } (pr_2z = y) \text{ 与 } R).$

根据证明规则47, $(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)((\exists x)(z = (x, y)) \text{ 与 } R)$, 根据补充定理21 (2), $(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)(R \text{ 与 } (pr_2z = y)).$

根据替代规则9, $(pr_1z|x)(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)(pr_1z|x)(R \text{ 与 } (pr_2z = y))$, 即等价于 $(\exists y)((pr_1z|x)R \text{ 与 } (pr_2z = y))$, 根据证明规则47、补充定理21 (1), $(pr_1z|x)(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)((\exists x)(R \text{ 与 } (pr_1z = x)) \text{ 与 } (pr_2z = y))$, 即等价于 $(\exists x)(\exists y)((pr_1z = x) \text{ 与 } (pr_2z = y) \text{ 与 } R).$

综上, 得证.

(2) 根据补充证明规则15 (1), $(\exists z)((z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z|x)(pr_2z|y)R) \Leftrightarrow (\exists z)(\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \text{ 与 } R)$, 根据证明规则33, 其等价于 $(\exists z)(\exists x)(\exists y)(z = (x, y)) \text{ 与 } (\exists x)(\exists y)R$. 根据定理1, $(\exists z)(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$, 因此其等价于 $(\exists x)(\exists y)R$.

(3) 令 R' 为非 R , 根据补充证明规则15 (2), $\neg(\exists x)(\exists y)R' \Leftrightarrow \neg(\exists z)((z \text{ 为有序对}) \wedge (pr_1z|x)(pr_2z|y)R')$, 即 $(\forall x)(\forall y)(\neg\neg R) \Leftrightarrow (\forall z)(\neg((z \text{ 为有序对}) \vee (pr_1z|x)(pr_2z|y)\neg\neg R))$, 因此 $(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z \text{ 为有序对}) \Rightarrow (pr_1z|x)(pr_2z|y)R))$.

定理 8. 两个集合的乘积的存在性

$$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall z)((z \in Z) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y)).$$

证明:

由于待证公式不含 y , 故令 y 为不是常数的字母.

根据证明规则53, $(\exists x)(z = (x, y) \wedge x \in X)$ 在 z 上是集合化公式, 令 $A_y = \{z | (\exists x)(z = (x, y) \wedge x \in X)\}$, 则 $(\forall z)((z \in A_y) \Leftrightarrow (\exists x)(z = (x, y) \wedge x \in X))$, 根据公理模式5、证明规则27, $(\forall y)(\exists x)(\forall z)((z = (x, y) \wedge x \in X) \Rightarrow (z \in A))$, 根据公理模式8, $(\exists y)((y \in Y) \wedge (\exists x)(z = (x, y) \wedge x \in X))$ 是 z 上的集合化公式, 又因为 $(\exists y)((y \in Y) \wedge (\exists x)(z = (x, y) \wedge x \in X)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((z = (x, y)) \wedge x \in X \wedge y \in Y)$, 因此 $(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall z)((z \in Z) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y))$.

定义 11. 两个集合的乘积 (*produit de deux ensembles*)

$\{z | (\exists x)(\exists y)((z = (x, y)) \wedge x \in X \wedge y \in Y)\}$ 称为 X 和 Y 的乘积, 记作 $X \times Y$.

定理 9.

如果 $A' \neq \emptyset$ 、 $B' \neq \emptyset$, 则 $(A' \times B') \subset (A \times B) \Leftrightarrow (A' \subset A) \wedge (B' \subset B)$.

证明:

令 z 为不是常数的字母.

$(A' \times B') \subset (A \times B)$ 等价于 $(\forall z)(z \in (A' \times B') \Rightarrow z \in (A \times B))$, 进而等价于 $(\forall z)((\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \wedge x \in A' \wedge y \in B') \Rightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B))$.

根据补充定理22 (2), $(A' \times B') \subset (A \times B) \Leftrightarrow ((z \text{ 为有序对}) \wedge pr_1z \in A' \wedge pr_2z \in B' \Rightarrow (z \text{ 为有序对}) \wedge pr_1z \in A \wedge pr_2z \in B)$.

若 $(A' \subset A) \wedge (B' \subset B)$, 则 $pr_1z \in A' \Rightarrow pr_1z \in A$ 、 $pr_2z \in B' \Rightarrow pr_2z \in B$, 根据补充证明规则5 (3), $(A' \times B') \subset (A \times B)$.

反过来, 若 $(A' \times B') \subset (A \times B)$, 假设 $x \in A'$, 由于 $B' \neq \emptyset$, 故 $(\exists y)(y \in B')$, 即 $\tau_y(y \in B') \in B'$, 则 $(x, \tau_y(y \in B')) \in (A' \times B')$, 因此 $(x, \tau_y(y \in B')) \in (A \times B)$, 故 $x \in A$, 所以, $A' \subset A$, 同理 $B' \subset B$.

补充定理 23.

(1) $z \in X \times Y \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \wedge (pr_1z \in X) \wedge (pr_2z \in Y)$.

(2) $(x, y) \in X \times Y \Leftrightarrow (x \in X) \wedge (y \in Y)$.

(3) $X \times Y = X' \times Y' \Leftrightarrow X = X' \wedge Y = Y'$.

证明:

- (1) 根据补充定理22 (2) 可证.
- (2) 根据补充定理23 (1)、补充定理19可证.
- (3) 根据定理9可证.

定理 10.

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \text{ 或 } (B = \emptyset).$$

证明: 假设 $A \times B \neq \emptyset$, 根据补充定理14 (2), $(\exists x)(x \in (A \times B))$, 即 $\tau_x(x \in (A \times B)) \in X \times Y \Rightarrow (pr_1(\tau_x(x \in (A \times B))) \in X)$ 与 $(pr_2(\tau_x(x \in (A \times B))) \in Y)$, 则 $A \neq \emptyset$ 、 $B \neq \emptyset$.

反过来, 若 $A \neq \emptyset$ 、 $B \neq \emptyset$, 则 $\tau_x(x \in A) \in A$ 、 $\tau_y(y \in B) \in B$, 故 $(\tau_x(x \in A), \tau_y(y \in B)) \in (A \times B)$, 因此 $A \times B \neq \emptyset$. 得证.

补充定理 24.

- (1) $(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow x = x' \text{ 与 } y = y' \text{ 与 } z = z'.$
- (2) $(x, y, z, t) = (x', y', z', t') \Leftrightarrow x = x' \text{ 与 } y = y' \text{ 与 } z = z' \text{ 与 } t = t'.$

证明: 根据定理7可证.

习题 42.

令 R 为公式, x 、 y 为不同字母, z 为与 x 、 y 不同的字母且 R 不包含 z . 求证:

- (1) $(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists z)((z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1 z | x)(pr_2 z | y)R);$
- (2) $(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z \text{ 为有序对}) \Rightarrow (pr_1 z | x)(pr_2 z | y)R)).$

证明:

- (1) 即补充证明规则15 (2);
- (2) 即补充证明规则15 (3).

2.3 对应 (Correspondances)

定义 12. 图 (*graphe*)

如果 $(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z \text{ 为有序对}))$, 则称 G 为图.

补充定理 25.

$G' \subset G$, G 为图, 则 G' 为图.

证明: 令 z 为不是常数的字母. 由于 G 是图, 故 $(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z \text{ 为有序对}))$. 又因为 $G' \subset G$, 故 $(\forall z)(z \in G' \Rightarrow z \in G)$, 根据证明规则27、证明规则30, $(\forall z)(z \in G' \Rightarrow (z \text{ 为有序对}))$, 得证.

补充定理 26.

$X \times Y$ 为图.

证明: 令 z 为不是常数的字母, 根据补充定理23 (1), $z \in X \times Y \Leftrightarrow (z \text{为有序对})$ 与 $(pr_1z \in X)$ 与 $(pr_2z \in Y)$, 因此, $z \in X \times Y \Rightarrow (z \text{为有序对})$, 进而 $(\forall z)(z \in X \times Y \Rightarrow (z \text{为有序对}))$, 得证.

定义 13. 通过图对应 (*correspond par graphe*)

令 G 为图, 如果 $(x, y) \in G$, 则称 y 通过 G 对应 x .

元数学定义 28. 生成图的公式 (*relation qui admet un graphe*), 公式的图 (*graphe de relation*)

包含2元特别符号 \in 和显式公理1、显式公理2、公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为公式, 如果 $(\exists G)((G \text{为图}) \text{与} (\forall x)(\forall y)((x, y) \in G \Leftrightarrow R))$, 则称 R 为对于 x, y 生成图 G 的公式. 项 $\tau_G((G \text{为图}) \text{与} ((x, y) \in G \Leftrightarrow R))$ 称为公式 R 关于 x, y 的图.

补充证明规则 16.

包含2元特别符号 \in 和显式公理1、显式公理2、公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为对于 x, y 生成图 G 的公式, 则:

(1) $(x, y) \in G \Leftrightarrow R$.

(2) 如果 R 不包含 z , 则 $z \in G \Leftrightarrow (z \text{为有序对}) \text{与} (pr_1z|x)(pr_2z|y)R$.

证明:

(1) 根据证明规则21可证.

(2) 根据补充证明规则16 (1), $(z \text{为有序对}) \text{与} (pr_1z, pr_2z) \in G \Leftrightarrow (z \text{为有序对}) \text{与} (pr_1z|x)(pr_2z|y)R$, 根据补充定理22 (3), $(z = (pr_1z, pr_2z)) \text{与} (pr_1z, pr_2z) \in G \Leftrightarrow (z \text{为有序对}) \text{与} (pr_1z|x)(pr_2z|y)R$, 根据证明规则43, $(z = (pr_1z, pr_2z)) \text{与} z \in G \Leftrightarrow (z \text{为有序对}) \text{与} (pr_1z|x)(pr_2z|y)R$.

由于 G 为图, 因此 $z \in G \Rightarrow (z \text{为有序对})$, 进而 $z \in G \Rightarrow z = (pr_1z, pr_2z)$, 故 $z \in G \Leftrightarrow (z \text{为有序对}) \text{与} (pr_1z|x)(pr_2z|y)R$.

补充定理 27.

G_1, G_2 为图, 则:

(1) 如果 $(\forall x)(\forall y)((x, y) \in G_1 \Leftrightarrow (x, y) \in G_2)$, 则 $G_1 = G_2$.

(2) 如果 $(\forall x)(\forall y)((x, y) \in G_1 \Rightarrow (x, y) \in G_2)$, 则 $G_1 \subset G_2$.

证明:

(1) 令 z 为不是常数的字母. 故 $(pr_1z, pr_2z) \in G_1 \Leftrightarrow (pr_1z, pr_2z) \in G_2$, 根据补充定理22 (3), $(z = (pr_1z, pr_2z)) \text{与} (pr_1z, pr_2z) \in G_1 \Leftrightarrow (z = (pr_1z, pr_2z)) \text{与} (pr_1z, pr_2z) \in G_2$, 因此, $(z = (pr_1z, pr_2z)) \text{与} z \in G_1 \Leftrightarrow (z = (pr_1z, pr_2z)) \text{与} z \in G_2$, 故 $z \in G_1 \Leftrightarrow z \in G_2$, 得证.

(2) 与补充定理27 (1) 同理可证.

补充证明规则 17. 公式的图的唯一性

包含2元特别符号 \in 和显式公理1、显式公理2、公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x 、 y 生成图的公式, 则 R 关于 x 、 y 的图是唯一的.

证明: 设 G_1 、 G_2 均为 R 的图, $(x, y) \in G_1 \Leftrightarrow R$, $(x, y) \in G_2 \Leftrightarrow R$, 因此 $(x, y) \in G_1 \Leftrightarrow (x, y) \in G_2$, 根据补充定理27 (1) 可证.

补充证明规则 18.

包含2元特别符号 \in 和显式公理1、显式公理2、公理模式8的等式理论 M 中, Z 为不同于 x 、 y 的字母, 且 R 不包含 Z , 如果 $(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x, y) \in Z)$, 则 R 为生成图的公式.

证明:

由于 $(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x, y) \in Z)$ 不包含 x 、 y , 故令 x 、 y 为不是常数的字母.

添加辅助常数 Z , 令 $(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x, y) \in Z)$ 为公理, 则 $R \Rightarrow (x, y) \in Z$.

根据证明规则51, $z \in Z$ 与 $(z$ 为有序对)与 $(pr_1 z | x)(pr_2 z | y)R$ 是 z 上的集合化公式. 令 G 为 $\{z | z \in Z \text{ 与 } (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1 z | x)(pr_2 z | y)R\}$, 则 $z \in G \Leftrightarrow z \in Z \text{ 与 } (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1 z | x)(pr_2 z | y)R$, 即 $(z \in G \Rightarrow (z \text{ 为有序对}))$, 因此, G 为图.

进而, $(x, y) \in G \Leftrightarrow (x, y) \in Z \text{ 与 } ((x, y) \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1(x, y) | x)(pr_2(x, y) | y)R$. 根据补充定理20, (x, y) 为有序对, 根据补充定理22 (4), $pr_1(x, y) = x$ 、 $pr_2(x, y) = y$. 因此, $(pr_1(x, y) | x)(pr_2(x, y) | y)R \Leftrightarrow R$, 故 $(x, y) \in G \Leftrightarrow (x, y) \in Z \text{ 与 } R$, 又因为 $R \Rightarrow (x, y) \in Z$, 因此 $(x, y) \in G \Leftrightarrow R$.

综上, 根据证明规则19, 得证.

补充证明规则 19.

包含2元特别符号 \in 和显式公理1、显式公理2、公理模式8的等式理论 M 中, T 为不包含 x 、 y 的项, 且字母 x 、 y 不是 M 的常数, 如果 $(R \Rightarrow (x, y) \in T)$, 则 R 为生成图的公式.

证明: 由于 $R \Rightarrow (x, y) \in T$ 且 x 、 y 不是常数, 根据证明规则27, 因此 $(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x, y) \in T)$, 由于 T 不包含 x 、 y , 令 Z 为不同于 x 、 y 的字母且 R 不包含 Z , 根据替代规则9, $(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x, y) \in Z)$, 根据补充证明规则18可证.

补充证明规则 20.

包含2元特别符号 \in 和显式公理1、显式公理2、公理模式8的等式理论 M 中, A 、 B 为项, x 、 y 为不同的字母, 且 A 、 B 均不包含 x 、 y , 则“ $x \in A$ 与 $y \in B$ ”为生成图的公式.

证明: 根据补充定理23, $(x \in A \text{ 与 } y \in B) \Rightarrow (x, y) \in A \times B$, 根据补充证明规则19可证.

定理 11. 图的第一射影和第二射影存在且唯一

G 为图, 则有且仅有一个 A 满足 $(\exists y)((x, y) \in G) \Leftrightarrow x \in A$, 有且仅有一个 B 满足 $(\exists x)((x, y) \in G) \Leftrightarrow y \in B$.

证明：根据证明规则53， $(\exists z)(x = pr_1z \text{ 与 } z \in G)$ 为集合化公式。令 $A = \{x | (\exists z)(x = pr_1z \text{ 与 } (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } z \in G)\}$ ，根据补充证明规则11， $(\exists z)(x = pr_1z \text{ 与 } (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } z \in G) \Leftrightarrow x \in A$ 。

由于 G 为图，故 $z \in G \Rightarrow (z \text{ 为有序对})$ ，因此 $(z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } z \in G \Leftrightarrow z \in G$ 。

根据补充定理21 (1)， $(\exists z)(x = pr_1z \text{ 与 } z \in G) \Leftrightarrow (\exists z)((\exists y)(z = (x, y)) \text{ 与 } z \in G)$ ，后者即 $(\exists z)(\exists y)(z = (x, y) \text{ 与 } z \in G)$ ，即 $(\exists y)(\exists z)(z = (x, y) \text{ 与 } z \in G)$ 。

根据补充证明规则10， $(\exists z)(z = (x, y) \text{ 与 } z \in G) \Leftrightarrow (x, y) \in G$ 。综上， $x \in A \Leftrightarrow (\exists y)(x, y) \in G$ 。A的存在性得证。

A的唯一性，根据显式公理1可证。同理可证B的存在性和唯一性。

定义 14. 图的第一射影 (*première projection d'un graphe*)，图的定义域 (*ensemble de définition d'un graphe*)，图的第二射影 (*seconde projection d'un graphe*)，值域 (*ensemble des valeurs d'un graphe*)

G 为图，则 $\{x | (\exists y)((x, y) \in G)\}$ 称为 G 的第一射影，或称为 G 的定义域，记作 pr_1G ； $\{y | (\exists x)((x, y) \in G)\}$ 称为 G 的第二射影，或称为 G 的值域，记作 pr_2G 。

补充证明规则 21.

包含2元特别符号 \in 和显式公理1、显式公理2、公理模式8的等式理论 M 中， R 为不包含字母 G 的公式，如果 $(\exists y)R$ 或者 $(\exists x)R$ 是 M 的定理，则“非 $(\exists G)((G \text{ 为图}) \text{ 与 } (\forall x)(\forall y)((x, y) \in G \Leftrightarrow R))$ ”是 M 的定理。

证明：

若 $(\exists y)R$ ，假设 $(\exists G)((G \text{ 为图}) \text{ 与 } (\forall x)(\forall y)((x, y) \in G \Leftrightarrow R))$ ，令 G 为该图，则 $(\exists y)((x, y) \in G) \Leftrightarrow (\exists y)R$ ，因此 $(\exists y)((x, y) \in G)$ ，根据定理11， $(\exists A)(\forall x)(x \in A)$ ，与补充定理10矛盾。同理可证 $(\exists x)R$ 为真的情况。

补充定理 28.

- (1) 非 $(\exists G)((G \text{ 为图}) \text{ 与 } (\forall x)(\forall y)((x, y) \in G \Leftrightarrow x = y))$ ；
- (2) 非 $(\exists G)((G \text{ 为图}) \text{ 与 } (\forall x)(\forall y)((x, y) \in G \Leftrightarrow x \in y))$ ；
- (3) 非 $(\exists G)((G \text{ 为图}) \text{ 与 } (\forall x)(\forall y)((x, y) \in G \Leftrightarrow x \subset y))$ ；
- (4) 非 $(\exists G)((G \text{ 为图}) \text{ 与 } (\forall x)(\forall y)((x, y) \in G \Leftrightarrow x = \{y\}))$ 。

证明：根据补充证明规则21可证。

补充定理 29.

$(x, y) \in G \Rightarrow x \in pr_1G$ ， $(x, y) \in G \Rightarrow y \in pr_2G$ 。

证明：假设 $(x, y) \in G$ ，则 $(\exists y)((x, y) \in G)$ ，根据补充证明规则11， $x \in pr_1G$ 。

同理可证 $y \in pr_2G$ 。

补充定理 30.

G 为图, 则 $G \subset pr_1G \times pr_2G$.

证明: 令 x, y 为不是常数的字母. 设 $(x, y) \in G$. 根据补充定理29, $x \in pr_1G, y \in pr_2G$. 根据补充定理22 (1), $(x, y) \in pr_1G \times pr_2G$. 即 $(x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in pr_1G \times pr_2G$, 根据补充定理27 (2) 得证.

补充定理 31.

(1) \emptyset 为图.

(2) G 为图, 如果 $pr_1G = \emptyset$ 或 $pr_2G = \emptyset$, 则 $G = \emptyset$.

(3) $pr_1\emptyset = \emptyset, pr_2\emptyset = \emptyset$.

(4) 如果 $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$, 则 $pr_1(X \times Y) = X, pr_2(X \times Y) = Y$.

证明:

(1) 根据补充定理15可证.

(2) 根据补充定理30, $G \subset \emptyset$, 根据补充定理18 (2) 得证.

(3) 令 x, y 为不是常数的字母, 根据补充定理15, $(x, y) \notin \emptyset$, 因此“非 $(\exists y)((x, y) \in \emptyset)$ ”, 即 $x \notin pr_1\emptyset$, 根据补充定理14 (1) 可证.

(4) $\{x | (\exists y)((x, y) \in X \times Y)\} = \{x | (\exists y)(x \in X \text{ 与 } y \in Y)\}$, 等于 $\{x | x \in X \text{ 与 } (\exists y)(y \in Y)\}$, 等于 $\{x | x \in X\}$, 得证.

补充定理 32.

G_1, G_2 为图, 且 $G_1 \subset G_2$, 则 $pr_1G_1 \subset pr_1G_2, pr_2G_1 \subset pr_2G_2$.

证明: 令 x, y 为不是常数的字母, 由于 $G_1 \subset G_2$, 因此 $(x, y) \in G_1 \Rightarrow (x, y) \in G_2$.

根据证明规则31, $(\exists y)((x, y) \in G_1 \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in G_2, (\exists x)((x, y) \in G_1 \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in G_2$, 根据证明规则50可证.

定义 15. 对应 (*correspondance*), 对应的图 (*graphe d'une correspondance*)、出发域 (*ensemble de départ*)、到达域 (*ensemble d'arrivée*), 通过一个对应对应 (*correspond par une correspondance*)、对应的定义域 (*ensemble de définition d'une correspondance/domaine d'une correspondance*)、对应的值域 (*ensemble des valeurs d'une correspondance/image d'une correspondance*)

G 为图, 如果 $pr_1G \subset A$ 且 $pr_2G \subset B$, 则称三元组 (G, A, B) 为 A 到 B 的对应, 称 G 为 (G, A, B) 的图, A 为 (G, A, B) 的出发域, B 为 (G, A, B) 的到达域. 如果 $(x, y) \in G$, 则称 y 通过 (G, A, B) 对应 x , pr_1G 称为 (G, A, B) 的定义域, pr_2G 称为 (G, A, B) 的值域.

定义 16. 元素到元素的公式 (*relation entre un élément et un élément*)、公式定义的对对应 (*correspondance définie par la relation*)

如果 R 为对于 x, y 生成图 G 的公式, A, B 满足 $pr_1G \subset A, pr_2G \subset B$, 则称 R 为对于 x, y 从 A 的元素到 B 的元素的公式, (G, A, B) 称为 R 定义对于 x, y 的 A 到 B 的对应.

补充定理 33.

G 为图, 则 $(x \in X$ 与 $(x, y) \in G)$ 为对于 x, y 生成图 G' 的公式, 并且 $pr_2 G' = \{y | (\exists x)(x \in X$ 与 $(x, y) \in G)\}$.

证明: 令 $G' = \{z | pr_1 z \in X$ 与 $z \in G\}$, 则 $G' \subset G$, 根据补充定理25, G' 为图. 根据补充定理22 (4), $(x, y) \in G' \Leftrightarrow (x \in X$ 与 $(x, y) \in G)$, 根据公理模式5, $(x \in X$ 与 $(x, y) \in G)$ 为对于 x, y 生成图的公式. 又因为 $(x, y) \in G' \Leftrightarrow (x \in X$ 与 $(x, y) \in G)$, 因此 $pr_2 G' = \{y | (\exists x)(x \in X$ 与 $(x, y) \in G)\}$.

定义 17. 在图下的像 (*image par une image*), 在对应下的像 (*image par une image correspond*)

G 为图, 则 $\{y | (\exists x)(x \in X$ 与 $(x, y) \in G)\}$ 称为 X 在 G 下的像, 记作 $G\langle X \rangle$. 令 F 为对应, 且 F 的图为 G , 则 X 在 G 下的像也称为 X 在 F 下的像.

补充定理 34.

G 为图, 则 $G\langle X \rangle \subset pr_2 G$.

证明: 由于 $z \in G\langle X \rangle \Leftrightarrow (\exists x)(x \in X$ 与 $(x, y) \in G)$, $z \in pr_2 G \Leftrightarrow (\exists x)((x, y) \in G)$, 根据证明规则31, $z \in G\langle X \rangle \Rightarrow z \in pr_2 G$, 得证.

补充定理 35.

G 为图, 则 $G\langle pr_1 G \rangle = pr_2 G$.

证明: 根据公理模式5, $(x, y) \in G \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in G)$, 因此, $(x \in \{y | (\exists x)((x, y) \in G)\})$ 与 $(x, y) \in G \Leftrightarrow (x, y) \in G$, 得证.

补充定理 36.

G 为图, 则 $G\langle \emptyset \rangle = \emptyset$.

证明: 根据补充定理15, $x \notin \emptyset$, 则非 $(x \in \emptyset$ 与 $(x, y) \in G)$, 因此非 $(\exists x)(x \in \emptyset$ 与 $(x, y) \in G)$, 即 $(\exists x)(x \in \emptyset$ 与 $(x, y) \in G) \Leftrightarrow x \in \emptyset$, 故 $G\langle \emptyset \rangle = \emptyset$.

定理 12.

G 为图, 则 $X \subset Y \Rightarrow G\langle X \rangle \subset G\langle Y \rangle$.

证明: 根据证明规则50可证.

定理 13.

G 为图, $pr_1 G \subset A$, 则 $G\langle A \rangle = pr_2 G$.

证明: 根据定理12、补充定理32、补充定理34、显式公理1可证.

定义 18. 切割 (*coupe*)

令 G 为图, x 为字母, 则称 $G\langle\{x\}\rangle$ 为 G 对 x 的切割, 也可以记作 $G(x)$. 令 F 为 A 到 B 的对应, 其图为 G , 则 $G\langle\{x\}\rangle$ 也称为 F 对 x 的切割, 记作 $F\langle\{x\}\rangle$ 或 $F(x)$.

补充定理 37.

G 为图, 则 $y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (x, y) \in G$.

证明: $y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (\exists x')(x' \in \{x\} \text{ 与 } (x', y) \in G)$, 即 $y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (\exists x')(x' = x \text{ 与 } (x', y) \in G)$, 根据证明规则43, $y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (\exists x')(x' = x \text{ 与 } (x, y) \in G)$, 因此, $y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (\exists x')(x' = x) \text{ 与 } (x, y) \in G$. 根据补充证明规则8, $(\exists x')(x' = x)$, 因此, $y \in G\langle\{x\}\rangle \Leftrightarrow (x, y) \in G$.

补充定理 38.

G, G' 均为图, 则:

(1) $G \subset G' \Leftrightarrow (\forall x)(G\langle x \rangle \subset G'\langle x \rangle)$.

(2) $G \subset G' \Rightarrow G\langle A \rangle \subset G'\langle A \rangle$.

证明:

(1) 根据补充定理37可证.

(2) 由于 $G \subset G'$, 因此 $(x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in G'$, 故 $x \in A$ 与 $(x, y) \in G \Rightarrow x \in A$ 与 $(x, y) \in G'$, 因此 $(\exists x)(x \in A \text{ 与 } (x, y) \in G) \Rightarrow (\exists x)(x \in A \text{ 与 } (x, y) \in G')$, 得证.

补充定理 39. 逆图是图

(1) (z 为有序对)与 $(pr_2z, pr_1z) \in G$ 是 z 上的集合化公式.

(2) $\{z | (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_2z, pr_1z) \in G\}$ 为图.

证明:

(1) 如果(z 为有序对)与 $(pr_2z, pr_1z) \in G$, 根据补充定理29, $pr_2z \in pr_1G$, $pr_1z \in pr_2G$, 故 $z \in pr_2G \times pr_1G$, 根据证明规则52可证.

(2) 根据定义可证.

定义 19. 逆图 (*graphe réciproque*)

G 为图, 则 $\{z | (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_2z, pr_1z) \in G\}$ 称为 G 的逆图, 记作 G^{-1} .

补充定理 40.

G 为图, 则 $(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G^{-1}$.

证明: 根据定义, $(y, x) \in G^{-1} \Leftrightarrow ((y, x) \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (x, y) \in G$, 根据补充定理19, (y, x) 为有序对, 得证.

补充定理 41.

$\emptyset^{-1} = \emptyset$.

证明：令 z 为不是常数的字母，则 $z \in \emptyset^{-1} \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_2z, pr_1z) \in \emptyset, z \notin \emptyset^{-1} \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 或 } (pr_2z, pr_1z) \notin \emptyset$ ，故 $(\forall z)z \notin \emptyset^{-1}$ ，因此 $\emptyset^{-1} = \emptyset$ 。

补充定理 42.

G 为图，则 $pr_1G^{-1} = pr_2G, pr_2G^{-1} = pr_1G$ 。

证明： pr_1G^{-1} 即 $\{y | (\exists x)((x, y) \in G^{-1})\}$ ，因此， $pr_1G^{-1} = \{y | (\exists x)((y, x) \in G)\}$ ，即 $pr_1G^{-1} = pr_2G$ ，同理可证 $pr_2G^{-1} = pr_1G$ 。

补充定理 43.

$(X \times Y)^{-1} = Y \times X$ 。

证明：令 z 为不是常数的字母， $z \in (X \times Y)^{-1} \Leftrightarrow \{z | (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_2z, pr_1z) \in (X \times Y)\}$ 。根据补充定理23 (1)， $z \in (X \times Y) \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1z \in X) \text{ 与 } (pr_2z \in Y)$ ，因此， $z \in (X \times Y)^{-1} \Leftrightarrow \{z | (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } pr_2z \in X \text{ 与 } pr_1z \in Y\}$ 。根据补充定理23 (1)，得证。

补充定理 44.

G 为图，则 $(G^{-1})^{-1} = G$ 。

证明：令 z 为不是常数的字母， $z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_2z, pr_1z) \in G^{-1}$ 。根据补充定理40， $(pr_2z, pr_1z) \in G^{-1} \Leftrightarrow (pr_1z, pr_2z) \in G$ ，根据补充定理22 (3)， $z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (z = (pr_1z, pr_2z)) \text{ 与 } (pr_1z, pr_2z) \in G$ 。根据证明规则43， $z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (z = (pr_1z, pr_2z)) \text{ 与 } z \in G$ ，根据补充定理22 (3)， $z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } z \in G$ ，又因为 $z \in G \Rightarrow (z \text{ 为有序对})$ ，因此， $z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow z \in G$ ，得证。

补充定理 45.

G_1, G_2 为图，则：

(1) $G_1 \subset G_2 \Leftrightarrow G_1^{-1} \subset G_2^{-1}$ 。

(2) 如果 $G_1 \subset G_2$ ，则 $(G_2 - G_1)^{-1} = G_2^{-1} - G_1^{-1}$ 。

证明：

(1) 根据补充定理40可证。

(2) 根据定义， $(x, y) \in (G_2 - G_1)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in G_2 \text{ 与 } (y, x) \notin G_1$ ，得证。

定义 20. 在图下的原像 (*image réciproque par une image*)

G 为图， $G^{-1}\langle X \rangle$ 称为 X 在 G 下的原像。

定义 21. 对称图 (*graphe symétrique*)

对于图 G ，如果 $G = G^{-1}$ ，则称 G 是对称图。

补充定理 46. 逆对应是对应

如果 (G, A, B) 为 A 到 B 的对应，则 (G^{-1}, B, A) 为 B 到 A 的对应。

证明：根据定义和补充定理39， G 、 G^{-1} 为图， $pr_1G \subset A$ ， $pr_2G \subset B$ ，根据补充定理42， $pr_1G^{-1} \subset B$ ， $pr_2G^{-1} \subset A$ ，因此 (G^{-1}, B, A) 为 B 到 A 的对应。

定义 22. 逆对应 (*correspondance réciproque*)，在对应下的原像 (*image réciproque par une corespondance*)

令 F 为 A 到 B 的对应，且 F 的图为 G ，则 B 到 A 的对应 (G^{-1}, B, A) ，称为 F 的逆对应，记作 F^{-1} 。 X 在 G 下的原像，也称为 X 在 F 下的原像。

补充定理 47. 图的复合是图

G 、 G' 为图，则 $(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G') \Rightarrow (x, z) \in pr_1G \times pr_2G'$ ，且 $(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G')$ 为生成图的公式。

证明：根据补充定理28， $(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G') \Rightarrow (x \in pr_1G \text{ 与 } z \in pr_2G')$ ，根据补充定理23 (1)， $(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G') \Rightarrow (x, z) \in pr_1G \times pr_2G'$ 。根据补充证明规则18，可知其为生成图的公式。

定义 23. 图的复合 (*composée de deux graphes*)

令 G 、 G' 为图，则公式 $(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G')$ 关于 x 、 z 的图，称为 G 和 G' 的复合，记作 $G' \circ G$ 或者 $G'G$ 。

定理 14.

G 、 G' 为图，则 $(G' \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ G'^{-1}$ 。

证明：令 z 、 x 为不是常数的字母，根据补充定理39， $(x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G' \Leftrightarrow (z, y) \in G'^{-1} \text{ 与 } (y, x) \in G^{-1}$ ，即 $(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G') \Leftrightarrow (\exists y)((z, y) \in G'^{-1} \text{ 与 } (y, x) \in G^{-1})$ ，根据补充证明规则16 (1)， $(x, z) \in G' \circ G \Leftrightarrow (z, x) \in G^{-1} \circ G'^{-1}$ ，根据补充定理39， $(z, x) \in (G' \circ G)^{-1} \Leftrightarrow (z, x) \in G^{-1} \circ G'^{-1}$ ，根据补充定理27 (1) 可证。

定理 15. 图的复合的结合律

G_1 、 G_2 、 G_3 为图，则 $(G_3 \circ G_2) \circ G_1 = G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$ 。

证明： $(x, t) \in (G_3 \circ G_2) \circ G_1 \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G_1 \text{ 与 } (\exists z)((y, z) \in G_2 \text{ 与 } (z, t) \in G_3))$ ，根据证明规则33， $(x, t) \in (G_3 \circ G_2) \circ G_1 \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)((x, y) \in G_1 \text{ 与 } (y, z) \in G_2 \text{ 与 } (z, t) \in G_3)$ 。同理可得， $(x, t) \in G_3 \circ (G_2 \circ G_1) \Leftrightarrow (\exists z)(\exists y)((x, y) \in G_1 \text{ 与 } (y, z) \in G_2 \text{ 与 } (z, t) \in G_3)$ 。根据补充定理27 (1) 可证。

定理 16.

G 、 G' 为图，则 $G' \circ G\langle A \rangle = G'\langle G\langle A \rangle \rangle$ 。

证明：令 z 为不是常数的字母，根据证明规则33， $z \in G' \circ G\langle A \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(x \in A \text{ 与 } (x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G')$ ，故 $z \in G \circ G'\langle A \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in G\langle A \rangle \text{ 与 } (y, z) \in G')$ ，即 $z \in G \circ G'\langle A \rangle \Leftrightarrow z \in G'\langle G\langle A \rangle \rangle$ 。得证。

补充定理 48.

G, G' 为图, 则 $pr_1(G' \circ G) = G^{-1}\langle pr_1 G' \rangle$.

证明: 令 x 为不是常数的字母, 则 $x \in pr_1(G' \circ G) \Leftrightarrow (\exists z)((x, z) \in G' \circ G)$, 即 $(\exists z)(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G')$. 同时, $x \in G^{-1}\langle pr_1 G' \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_1 G' \text{ 与 } (y, x) \in G^{-1})$, 即 $x \in G^{-1}\langle pr_1 G' \rangle \Leftrightarrow (\exists y)((\exists z)((y, z) \in G') \text{ 与 } (y, x) \in G^{-1})$, 因此, $x \in G^{-1}\langle pr_1 G' \rangle \Leftrightarrow (\exists z)(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G')$, 得证.

补充定理 49.

G, G' 为图, 则 $pr_2(G' \circ G) = G'\langle pr_2 G \rangle$.

证明: 令 x 为不是常数的字母, 则 $x \in pr_2(G' \circ G) \Leftrightarrow (\exists z)((z, x) \in G' \circ G)$, 即 $(\exists z)(\exists y)((z, y) \in G' \text{ 与 } (y, x) \in G)$. 同时, $x \in G'\langle pr_2 G \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G \text{ 与 } (y, x) \in G)$, 即 $x \in G'\langle pr_2 G \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)((z, y) \in G' \text{ 与 } (y, x) \in G)$, 得证.

补充定理 50.

G 为图, 则 $X \subset pr_1 G \Leftrightarrow X \subset G^{-1}\langle G \langle X \rangle \rangle$.

证明: 假设 $X \subset pr_1 G$, 令 x 为不是常数的字母, 则 $x \in X \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in G)$, 因此 $x \in X \Rightarrow (\exists y)(x \in X \text{ 与 } (x, y) \in G)$, 根据公理模式5, $x \in X \text{ 与 } (x, y) \in G \Rightarrow (\exists z)(z \in X \text{ 与 } (z, y) \in G)$, 故 $x \in X \Rightarrow (\exists z)(z \in X \text{ 与 } (z, y) \in G)$.

同时, 根据补充定理40, $(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G^{-1}$, 则 $x \in X \Rightarrow (\exists y)((y, x) \in G^{-1})$. 因此, $x \in X \Rightarrow (\exists y)((\exists z)(z \in X \text{ 与 } (z, y) \in G) \text{ 与 } (y, x) \in G^{-1})$. 进而, $X \subset pr_1 G \Rightarrow X \subset G^{-1}\langle G \langle X \rangle \rangle$. 反过来, 根据补充定理34, $G^{-1}\langle G \langle X \rangle \rangle \subset pr_2 G^{-1}$, 根据补充定理42, $G^{-1}\langle G \langle X \rangle \rangle \subset pr_1 G$. 故 $X \subset G^{-1}\langle G \langle X \rangle \rangle \Rightarrow X \subset pr_1 G$. 综上, 得证.

补充定理 51.

(1) G_1, G_2, G'_1, G'_2 为图, $G_1 \subset G_2, G'_1 \subset G'_2$, 则 $G'_1 \circ G_1 \subset G'_2 \circ G_2$.

(2) G, G' 为图, 则 $pr_1(G' \circ G) \subset pr_1 G, pr_2(G' \circ G) \subset pr_2 G'$.

证明:

(1) 由于 $G_1 \subset G_2, G'_1 \subset G'_2$, 则 $(x, y) \in G_1 \Rightarrow (x, y) \in G_2, (y, z) \in G'_1 \Rightarrow (y, z) \in G'_2$, 因此 $(\exists y)((x, y) \in G_1 \text{ 与 } (y, z) \in G'_1) \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in G_2 \text{ 与 } (y, z) \in G'_2)$, 根据证明规则50得证.

(2) $(\exists z)(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G') \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G) \text{ 与 } (\exists z)(\exists y)(y, z) \in G'$. 因此 $(\exists z)(\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G') \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in G)$. 根据证明规则50, $pr_1(G' \circ G) \subset pr_1 G$ 得证. 同理可证 $pr_2(G' \circ G) \subset pr_2 G'$.

补充定理 52.

G 为图, 则:

(1) $G \circ \emptyset = \emptyset, \emptyset \circ G = \emptyset$.

(2) 当且仅当 $G = \emptyset$ 时, $G^{-1} \circ G = \emptyset$.

证明:

(1) 令 y 为不是常数的字母, 则 $(x, z) \in G \circ \emptyset \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in \emptyset \text{ 与 } (y, z) \in G)$, 非 $(x, y) \in \emptyset$, 因此非 $(x, z) \in G \circ \emptyset$, 根据补充定理14 (1), $G \circ \emptyset = \emptyset$. 同理, $\emptyset \circ G = \emptyset$.

(2) $G = \emptyset$ 时, 根据补充定理52 (1), $G^{-1} \circ G = \emptyset$. 反过来, 如果 $G^{-1} \circ G = \emptyset$, 令 x, y 为不是常数的字母, 则 $(x, x) \in \emptyset \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } (x, y) \in G))$. 假设 $z \in G$, 则 z 为有序对, 故 $(pr_1 z, pr_2 z) \notin G$, 矛盾, 因此 $z \notin G$, 故 $G = \emptyset$.

补充定理 53. 对应的复合是对应

令 F 为 A 到 B 的对应, 其图为 G , F' 为 B 到 C 的对应, 其图为 G' , 则 $(G' \circ G, A, C)$ 为 A 到 C 的对应.

证明: 根据补充定理51 (2), $pr_1(G' \circ G) \subset pr_1 G$, $pr_2(G' \circ G) \subset pr_2 G'$. 而 $pr_1 G \subset A$, $pr_2 G' \subset C$, 因此 $pr_1(G' \circ G) \subset A$, $pr_2(G' \circ G) \subset C$, 得证.

定义 24. 对应的复合 (*composée de deux correspondances*)

令 F 为 A 到 B 的对应, 其图为 G , F' 为 B 到 C 的对应, 其图为 G' , 则称 $(G' \circ G, A, C)$ 为 F 和 F' 的复合, 记作 $F' \circ F$ 或者 $F'F$.

补充定理 54.

F, F' 为对应, 则:

- (1) $F' \circ F \langle X \rangle = F' \langle F \langle X \rangle \rangle$.
- (2) $(F' \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ F'^{-1}$.

证明:

- (1) 根据定理16可证.
- (2) 根据定理14可证.

补充定理 55. 对角集合的存在性

(z 为有序对)与 $pr_1 z = pr_2 z$ 与 $pr_1 z \in A$ 是 z 上的集合化公式.

证明: 如果(z 为有序对)与 $pr_1 z = pr_2 z$ 与 $pr_1 z \in A$, 根据补充定理29, $pr_2 z \in A$, $pr_1 z \in A$, 故 $z \in A \times A$, 根据证明规则52可证.

定义 25. 对角集合 (*ensemble de la diagonale*)

$\{z | (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } pr_1 z = pr_2 z \text{ 与 } pr_1 z \in A\}$ 称为 $A \times A$ 的对角集合, 记作 Δ_A .

补充定理 56.

$\Delta_A \subset A \times A$.

证明: 令 z 为不是常数的字母. 根据补充定理23 (1), $z \in A \times A \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (pr_1 z \in A) \text{ 与 } (pr_2 z \in A)$. 而(z 为有序对)与 $pr_1 z = pr_2 z$ 与 $pr_1 z \in A \Rightarrow$ 与 $(pr_1 z \in A)$ 与 $(pr_2 z \in A)$, 得证.

补充定理 57.

Δ_A 为图.

证明: 根据定义可证.

补充定理 58.

$$pr_1\Delta_A = A, pr_2\Delta_A = A.$$

证明: 令 x 为不是常数的字母, 则 $x \in pr_1\Delta_A \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in \Delta_A)$, 即 $x \in pr_1\Delta_A \Leftrightarrow (\exists y)(x = y \text{ 与 } x \in A)$, 因此 $x \in pr_1\Delta_A \Leftrightarrow x \in A$, 前半部分得证. 同理可证后半部分.

补充定理 59.

$$(x, y) \in \Delta_A \Leftrightarrow (x = y) \text{ 与 } (x \in A), (x, x) \in \Delta_A \Leftrightarrow (x \in A).$$

证明: 根据补充定理19、补充定理22 (4) 可证.

补充定理 60.

G 为图, 则:

(1) 如果 $pr_1G \subset A$, 则 $G \circ \Delta_A = G$.

(2) 如果 $pr_2G \subset B$, 则 $\Delta_B \circ G = G$.

证明:

(1) 令 x, z 为不是常数的字母, $(\exists y)((x, y) \in \Delta_A \text{ 与 } (y, z) \in G) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in A \text{ 与 } x = y \text{ 与 } (y, z) \in G)$, 因此 $(\exists y)((x, y) \in \Delta_A \text{ 与 } (y, z) \in G) \Leftrightarrow x \in A \text{ 与 } (\exists y)(x = y \text{ 与 } (y, z) \in G)$. 根据补充定理29, $(x, z) \in G \Rightarrow x \in pr_1G$, 又因为 $pr_1G \subset A$, 因此 $(x, z) \in G \Rightarrow x \in A$. 而根据补充证明规则8, $(\exists y)(x = y)$. 因此 $(\exists y)((x, y) \in \Delta_A \text{ 与 } (y, z) \in G) \Leftrightarrow (x, z) \in G$, 根据证明规则50可证.

(2) 与补充定理60 (1) 同理可证.

补充定理 61.

$$\Delta_A^{-1} = \Delta_A$$

证明: 令 z 为不是常数的字母, 根据证明规则44, $(z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } pr_1z = pr_2z \text{ 与 } pr_1z \in A \Leftrightarrow (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } pr_1z = pr_2z \text{ 与 } pr_2z \in A$, 根据证明规则50得证.

定义 26. 恒等对应 (*correspondance identique*)

对应 (Δ_A, A, A) 称为恒等对应, 记作 Id_A .

补充定理 62.

如果 F 为 A 到 B 的对应, 则 $F \circ Id_A = F, Id_B \circ F = F$.

证明: 根据补充定理60 (1)、补充定理60 (2) 可证.

定义 27. 函数图 (*graphe fonctionnel*), 函数 (*fonction*), 函数的定义域 (*ensemble de définition d'une fonction*)、函数的值域 (*ensemble des valeurs d'une fonction*), 映射 (*application*), 函数的值 (*valeur de fonction*)

如果图 F 满足 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x, y) \in F \text{ 与 } (x, z) \in F \Rightarrow (y = z))$, 则称 F 为函数图. 如果 F 为函数图, 且 $pr_2 F \subset B$, 则对应 $(F, pr_1 F, B)$ 称为函数, $pr_1 F$ 称为函数 $(F, pr_1 F, B)$ 的定义域; $pr_2 F$ 称为函数 $(F, pr_1 F, B)$ 的值域. 函数 (F, A, B) 也可称为 A 到 B 的映射. 如果 f 为函数, 其图为 F , 且 $x \in pr_1 F$, 则 $\tau_y((x, y) \in F)$ 称为函数 f 对于 x 的值, 记作 $f(x)$ 、 f_x 、 $F(x)$ 或 F_x .

注: 如果 x 不属于函数 f 的定义域, 根据定义可知, $f(x)$ 表示论域的第一个对象, 该对象除了与自身相等外, 不具有任何其他性质.

定义 28. 族 (*famille*), 集族 (*famille d'ensembles*), 元素族 (*famille d'éléments*), 指标集 (*ensemble des indices*), 双族 (*famille double*), 子集族 (*famille de parties*), 空族 (*famille vide*), 非空族 (*famille non vide*)

函数 (X, I, E) 的图也可以称为族或集族, 或称为 E 的元素族, 令 i 为不出现在 X 、 I 、 E 的任何字母, 则族可以记作 $(X_i)_{i \in I} (X_i \in E)$, 在没有歧义的情况下也可以简记为 $(X_i)_{i \in I}$, 当 I 为 $\{i | R\}$ 时, 也可以记作 $(X_i)R$. 此时, I 称为族的指标集.

如果 I 可以表示为 $A \times B$ 的形式, 则称其为双族.

如果族满足 $(\forall x)(x \in E \Rightarrow x \subset F)$, 则称其为 F 的子集族.

如果族的指标集为空集, 则称其为空族. 如果族的指标集非空, 则称其为非空族.

注: 在本文中, “非空集族” 只表示该族的值域各元素均非空集; “非空族” 则表示该族的指标集为空, 以避免歧义.

补充定理 63.

F 为函数图, $x \in pr_1 F$, 则 $(x, y) \in F$ 为 y 上的函数性公式.

证明: 根据定义可证.

补充定理 64. 函数的值的基本性质

(1) f 为函数, 其图为 F , 则 $(x \in pr_1 F \text{ 与 } (y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in F$.

(2) $x \in pr_1 F \Leftrightarrow (x, f(x)) \in F$.

(3) $x \in pr_1 F \Rightarrow f(x) \in pr_2 F$.

证明:

(1) 如果 $(x \in pr_1 F)$, 根据证明规则46、补充定理63, $(y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in F$. 根据补充定理29, $(x, y) \in F \Rightarrow (x \in pr_1 F)$. 得证.

(2) 根据补充定理64 (1) 可证.

(3) 根据补充定理64 (2)、补充定理29可证.

补充定理 65.

F 为函数图, $(\forall x)(x \in pr_1 F \Rightarrow f(x) \in A)$, 则 $pr_2 F \subset A$.

证明: 令 x 为不是常数的字母, 由于 $x \in pr_1 F \Rightarrow f(x) \in A$, 根据补充定理64 (1), $(x, y) \in F \Rightarrow (y = f(x))$ 与 $(f(x) \in A)$, 其等价于 $(y = f(x))$ 与 $(y \in A)$, 因此 $(\exists x)((x, y) \in F) \Rightarrow y \in A$, 得证.

补充定理 66.

(1) \emptyset 为函数图, $(\emptyset, \emptyset, A)$ 为函数.

(2) Id_A 为函数.

(3) 函数 f 为 $(F, A, pr_2 F)$, 且 $x \in A \Leftrightarrow f(x) = x$, 则 $f = Id_A$.

(4) 如果 $X \subset A$, 则 $Id_A \langle X \rangle = X$.

证明:

(1) 根据补充定理31 (1), \emptyset 为图; 根据补充定理31 (3), $pr_1 \emptyset = \emptyset$, $pr_2 \emptyset = \emptyset$, 则 $pr_2 \emptyset \subset A$; 令 x, y, z 为不是常数的字母, 根据补充定理15, $(x, y) \in \emptyset$ 为假、 $(x, z) \in \emptyset$ 为假, 故 $(x, y) \in F$ 与 $(x, z) \in F \Rightarrow (y = z)$, 因此 $(\emptyset, \emptyset, A)$ 为函数.

(2) 根据补充定理57, Δ_A 为图. 根据补充定理59, $pr_1 \Delta_A = A$, $pr_2 \Delta_A = A$. 根据补充定理59, $(x, y) \in \Delta_A \Rightarrow x = y$, $(x, z) \in \Delta_A \Rightarrow x = z$, 得证.

(3) 令 f 的图为 F , 则 $(x, y) \in F \Leftrightarrow (x \in A \text{ 与 } f(x) = y)$, 又因为 $x \in A \Leftrightarrow f(x) = x$, 则 $(x, y) \in F \Leftrightarrow (x \in A \text{ 与 } x = y)$, 根据补充定理59、补充证明规则17, $F = \Delta_A$, 根据补充定理58, $pr_2 F = A$, 得证.

(4) $Id_A \langle X \rangle = \{y | (\exists x)(x \in X \text{ 与 } (x, y) \in \Delta_A)\}$, 等于 $\{y | (\exists x)(x \in X \text{ 与 } y \in A \text{ 与 } x = y)\}$, 等于 $\{y | y \in X\}$, 等于 X , 得证.

定义 29. 恒等映射 (*application identique*), 恒等函数 (*fonction identique*)

恒等对应又称恒等映射或恒等函数.

补充定理 67.

f, g 为函数, 其图分别为 F, G , 且 $F \subset G$, 则 $(f \text{ 的定义域}) \subset (g \text{ 的定义域})$.

证明: 根据补充定理32可证.

补充定理 68.

f, g 为函数, 其图分别为 F, G , 且 $pr_1 F = pr_1 G$, $(\forall x)(x \in pr_1 F \Rightarrow f(x) = g(x))$, 则 $F = G$. 如果 $(f \text{ 的到达域}) = (g \text{ 的到达域})$, 则 $f = g$.

证明: 根据补充定理64 (1), $(x \in pr_1 F)$ 与 $(y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in F$, $(x \in pr_1 G)$ 与 $(y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in G$. $(x, y) \in F \Rightarrow (x \in pr_1 F)$ 与 $y = g(x)$, 因此 $(x, y) \in F \Rightarrow (x, y) \in G$, 同理可证 $(x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in F$, 根据补充定理27 (1), $F = G$. 进而, 如果 $(f \text{ 的到达域}) = (g \text{ 的到达域})$, 根据定义, $f = g$.

补充定理 69.

G 为图, BG 为函数图 $\Leftrightarrow (\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X \rangle \rangle \subset X)$.

证明: $(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X \rangle \rangle \subset X) \Leftrightarrow (\forall X)(\exists x)(\exists y)(x \in X \text{ 与 } (y, x) \in G \text{ 与 } (y, z) \in G \Rightarrow z \in X)$. 如果 G 为函数图, 则 $(y, x) \in G$ 与 $(y, z) \in G \Rightarrow z = x$, 故 $x \in X$ 与 $(y, x) \in G$ 与 $(y, z) \in G \Rightarrow z \in X$, 因此 $(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X \rangle \rangle \subset X)$. 反过来, 如果 $(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X \rangle \rangle \subset X)$, 当 $(y, x) \in G$ 与 $(y, z) \in G$ 时, $(\exists x)(x \in \{x\}) \Rightarrow z \in \{x\}$, 故 $z = x$, 因此 G 为函数图, 得证.

补充定理 70.

f 为 A 到 B 的映射, 则:

- (1) $x \in f^{-1}\langle X \rangle \Leftrightarrow f(x) \in X$ 与 $x \in A$.
- (2) $f^{-1}\langle B \rangle = A$.
- (3) $x \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$ 与 $x \in A$.
- (4) $x \in f^{-1}(f(x)) \Leftrightarrow x \in A$.
- (5) $X \subset A$, 则 $x \in X \Rightarrow f(x) \in f\langle X \rangle$.
- (6) $x \in A \Rightarrow \{f(x)\} = f\langle \{x\} \rangle$.
- (7) $X \subset A \Rightarrow X \subset f^{-1}\langle f\langle X \rangle \rangle$.
- (8) $(X \subset (f \text{ 的值域})) \Rightarrow (X = f\langle f^{-1}\langle X \rangle \rangle)$.

证明:

(1) 令 f 的图为 F , 则 $x \in f^{-1}\langle X \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in X \text{ 与 } (x, y) \in F)$, 根据补充定理64 (1), 等价于 $(\exists y)(y \in X \text{ 与 } (x \in A) \text{ 与 } (y = f(x)))$, 等价于 $(\exists y)(y = f(x))$ 与 $x \in A$ 与 $f(x) \in X$. $x \in A \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in F)$, 根据补充定理64(1), $x \in A \Rightarrow (\exists y)(y = f(x))$, 因此 $x \in f^{-1}\langle X \rangle \Leftrightarrow x \in A$ 与 $f(x) \in X$.

(2) 由于 f 为 A 到 B 的映射, 根据补充定理64 (3), $f(x) \in B$, 根据补充定理70 (1), $x \in f^{-1}\langle B \rangle \Leftrightarrow x \in A$.

(3) $x \in f^{-1}(y)$ 即 $x \in f^{-1}\langle \{y\} \rangle$, 根据补充定理70 (1) 可证.

(4) 根据补充定理70 (3) 可证.

(5) 令 f 的图为 F , $f(x) \in f\langle X \rangle \Leftrightarrow (\exists z)(z \in X \text{ 与 } (z, f(x)) \in F)$. 由于 $x \in X$, 因此 $x \in A$, 根据补充定理64 (2), $(x, f(x)) \in F$, 因此 $x \in X$ 与 $(x, f(x)) \in F$, 故 $(\exists z)(z \in X \text{ 与 } (z, f(x)) \in F)$, 得证.

(6) $f\langle \{x\} \rangle = \{y | (\exists z)(z \in \{x\} \text{ 与 } (z, y) \in F)\}$, 等于 $\{y | (\exists z)(z = x \text{ 与 } (x, y) \in F)\}$, 等于 $\{y | (x, y) \in F\}$, 等于 $\{y | y = f(x)\}$, 即 $\{f(x)\}$.

(7) 令 f 的图为 F , 则 $u \in f^{-1}f\langle X \rangle \Leftrightarrow (\exists y)((\exists x)((x, y) \in F \text{ 与 } x \in X) \text{ 与 } (u, y) \in F)$, 等价于 $(\exists y)(\exists x)((x, y) \in F \text{ 与 } x \in X \text{ 与 } (u, y) \in F)$. 同时, $X \subset A$, 则 $u \in X \Rightarrow (\exists y)((u, y) \in F)$, 故 $(\exists y)((u, y) \in F \text{ 与 } u \in X)$, 因此 $(\exists y)(\exists x)((x, y) \in F \text{ 与 } x \in X \text{ 与 } (u, y) \in F)$, 得证.

(8) 当 $X \subset (f \text{ 的值域})$ 时, 令 f 的图为 F , 则 $u \in f\langle f^{-1}\langle X \rangle \rangle \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } y \in X \text{ 与 } (x, u) \in F)$. 由于 F 为函数图, 故 $(\exists x)(\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } y \in X \text{ 与 } (x, u) \in F) \Rightarrow u = y$, 因此 $(\exists x)(\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } y \in X \text{ 与 } (x, u) \in F) \Rightarrow u \in X$.

反过来, 由于 $X \subset (f \text{ 的值域})$, 故 $u \in X \Rightarrow (\exists x)((x, u) \in F)$, 因此 $u \in X \Rightarrow (\exists x)(\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } y \in X \text{ 与 } (x, u) \in F)$, 得证.

定义 30. 常数函数 (*fonction constante*), 常数映射 (*application constante*)

令 f 为函数, 且 $(\forall x)(\forall x')(x \in (fI) \text{ 与 } x' \in (fI) \Rightarrow f(x) = f(x'))$, 则称 f 为常数函数或常数映射.

定义 31. 不动点 (*élément invariant*)

令 f 为映射, 如果 $x \in (f \text{ 的定义域})$ 与 $f(x) = x$, 则称 x 为 f 的不动点.

定义 32. 重合 (*coïncident*)

令 f, g 为函数, $E \subset f \text{ 的定义域}$, $E \subset g \text{ 的定义域}$, 并且 $(\forall x)((x \in E) \Rightarrow f(x) = g(x))$, 则称 f 和 g 在 E 上重合.

定义 33. 延拓 (*prolongement*)

令 $f = (F, A, B)$ 和 $g = (G, C, D)$ 为函数, $F \subset G$, 并且 f 和 g 在 A 上重合, 则称 g 为 f 在 C 上的延拓.

补充定理 71. 函数的限制是函数

f 为函数, 定义域为 A , $X \subset A$, 则 $(x \in X \text{ 与 } y = f(x))$ 为对于 x, y 生成图的公式, 并且, 其对于 x, y 生成的图 G 为函数图, 且 $pr_1 G = X$.

证明: 令 f 的图为 F , 根据补充定理64 (1), $(x \in A \text{ 与 } y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in F$, 根据补充证明规则18, $(x \in X \text{ 与 } y = f(x))$ 为对于 x, y 生成图的公式.

因此, $(x, y) \in G \Leftrightarrow x \in X \text{ 与 } y = f(x)$, 令 f 的图为 F , 根据补充定理64 (1), 等价于 $x \in X \text{ 与 } (x, y) \in F$, 则 $pr_1 G = \{x | x \in X \text{ 与 } x \in A\}$, 即 $pr_1 G = X$. 对于 $(x, y) \in G$, $(x, y') \in G$, 有 $(x, y) \in F$ 、 $(x, y') \in F$, 由于 F 为函数图, 故 $y = y'$, 因此, G 为函数图.

定义 34. 限制 (*restriction*)

函数 $f = (F, A, B)$, $X \subset A$, $(x \in X \text{ 与 } y = f(x))$ 对于 x, y 生成的图为 G , 则称 (G, X, B) 为函数 f 在 X 上的限制, 记作 $f|X$.

补充定理 72.

f 为函数, $x \subset (f \text{ 的定义域})$, 则 $f|X$ 和 f 在 X 上重合, 并且, f 为 $f|X$ 在其定义域上的延拓.

证明：令 f 的图为 F ， $f|X$ 的图为 G ， x 、 y 为不是常数的字母．由于 $(x \in X \text{ 与 } y = f(x)) \Rightarrow y = f(x)$ ，因此， $F \subset G$ ．根据补充定理64 (1)、补充证明规则16 (1)， $(x \in X \text{ 与 } y = f(x)) \Leftrightarrow y = f|X(x)$ ，则 $x \in X \Leftrightarrow f(x) = f|X(x)$ ，因此， $f|X$ 和 f 在 X 上重合．又因为 X 为 $f|X$ 的定义域，因此， f 为 $f|X$ 在其定义域上的延拓．

补充定理 73.

函数 $f = (F, A, B)$ ， $X \subset A$ ，则：

(1) $x \in X \Rightarrow f(x) = (f|X)(x)$ ．

(2) $f|X = f \circ Id_X$ ．

证明：

(1) 设 $x \in X$ ，根据补充定理64 (1)， $(x, f(x)) \in F$ ．令 $f|X$ 的图为 G ，则 $y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in G$ ，即 $y = f(x) \Leftrightarrow y = f|X(x)$ ，因此 $f(x) = f|X(x)$ ．

(2) $(x, z) \in F \circ \Delta_X \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in \Delta_X \text{ 与 } (y, z) \in F)$ ，根据补充定理59，等价于 $x \in X$ 与 $(x, z) \in F$ ，根据补充定理64 (1)，等价于 $x \in X$ 与 $y = f(x)$ ，得证．

证明规则 54.

令 T 、 A 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的项， x 、 y 为不同的字母， A 不包含 x ， A 、 T 均不包含 y ． R 为公式 $x \in A$ 与 $y = T$ ．则其为对于 x 、 y 生成图的公式．设其生成的图为 F ，则 F 为函数图， $pr_1 F = A$ ， $pr_2 F = (\text{对于 } x \in A \text{ 形式为 } T \text{ 的对象集合})$ ，且 $x \in A \Leftrightarrow F(x) = T$ ．

证明：

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论 M_0 ，则 M_0 不包含任何常数：

令 B 为对于 $x \in A$ 形式为 T 的对象集合，则 B 不包含 x 、 y ． $R \Rightarrow (x, y) \in A \times B$ ，由于 A 、 B 都不包含 x 、 y ，根据补充证明规则19， R 为对于 x 、 y 生成图的公式．

令 z 为不同于 M 中常数的字母，则根据补充证明规则16 (1)， $(x, y) \in F$ 与 $(x, z) \in F \Leftrightarrow x \in A$ 与 $y = T$ 与 $z = T$ ，因此， $(x, y) \in F$ 与 $(x, z) \in F \Rightarrow (y = T) \text{ 与 } (z = T)$ ，根据定理3， $(x, y) \in F$ 与 $(x, z) \in F \Rightarrow y = z$ ，故 F 为函数图．

由于 A 不包含 y ，因此 $(\exists y)(x \in A \text{ 与 } y = T) \Leftrightarrow x \in A \text{ 与 } (\exists y)(y = T)$ ，其等价于 $x \in A$ ，因此 $pr_1 F = A$ ．

根据定义， $pr_2 F = (\text{对于 } x \in A \text{ 形式为 } T \text{ 的对象集合})$ ．

根据补充定理64 (1)， $y = F(x) \Leftrightarrow x \in A$ 与 $y = T$ ．假设 $x \in A$ ，则 $y = F(x) \Leftrightarrow y = T$ ，因此 $F(x) = T$ ．故 $x \in A \Rightarrow F(x) = T$ ．

反过来，假设 $F(x) = T$ ，则 $x \in A$ 为真．故 $x \in A \Leftrightarrow F(x) = T$ ．

由于 M 强于 M_0 ，因此上述结论对理论 M 也成立．

元数学定义 29. 用项定义的函数 (*fonction par un terme*)

令 T 、 A 、 C 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2和公理模式8的等式理论 M 的项， x 、 y 为不同的字母， A 不包含 x ， A 、 T 、 C 均不包含 y 。如果(对于 $x \in A$ 形式为 T 的对象集合) $\subset C$ ，公式 $x \in A$ 与 $y = T$ 对于 x 、 y 生成图的公式为 F ，则 (F, A, C) 称为用 T 定义的函数，记作 $x \rightarrow T(x \in A, T \in C)$ ，在没有歧义的情况下也可以简记为 $x \rightarrow T(x \in A)$ 、 $(T)x \in A$ 、 $x \rightarrow T$ 或者 T 。

定理 17. 函数的复合是函数

f 为 A 到 B 的映射， g 为 B 到 C 的映射，则 $g \circ f$ 为 A 到 C 的映射。

证明：令 f 、 g 的图分别为 F 、 G ， x 、 y 、 z 均为不是常数的字母，则 $(x, z) \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } (y, z) \in G)$ ， $(x, z') \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } (y, z') \in G)$ 。添加辅助常数 y 、 y' ，设 $(x, y) \in F$ 与 $(y, z) \in G$ ， $(x, y') \in F$ 与 $(y', z') \in G$ 。则根据函数定义， $y = y'$ ，故 $z = z'$ 。故 $g \circ f$ 为函数。

f 的定义域 $A = \{x | (\exists y)(x, y) \in F\}$ ， g 的定义域为 $B = \{y | (\exists z)(y, z) \in G\}$ 。令 $g \circ f$ 的定义域 $A' = \{x | (\exists z)((\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } (y, z) \in G))\}$ 。则 $(\exists z)((\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } (y, z) \in G)) \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in F)$ ，故 $A' \subset A$ 。另一方面， $(\exists x)(x, y) \in F \Rightarrow (\exists z)(y, z) \in G$ ，又因为 $(x, y) \in F \Rightarrow (\exists x)(x, y) \in F$ ，因此， $(\exists y)((x, y) \in F) \Rightarrow (\exists z)((\exists y)((x, y) \in F \text{ 与 } (y, z) \in G))$ ，故 $A \subset A'$ 。根据补充定理51 (2)， $pr_2 G \circ F \subset C$ 。

综上，得证。

定义 35. 单射 (*injection/application injective*)，满射 (*surjection/application surjective*)，双射 (*bijection/application bijective*)

令 f 为 A 到 B 的映射。如果 $(\forall x)(\forall y)(x \in A \text{ 与 } y \in A \text{ 与 } f(x) = f(y) \Rightarrow (x = y))$ ，则称 f 为 A 到 B 的单射；如果 $f(A) = B$ ，则称 f 为 A 到 B 的满射。如果 f 是 A 到 B 的单射，也是 A 到 B 的满射，则称 f 为 A 到 B 的双射。

定义 36. 排列 (*permutation*)

A 到 A 的双射称为 A 的排列。

补充定理 74.

- (1) 函数 $(\emptyset, \emptyset, A)$ 为单射，函数 $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ 为双射。
- (2) 函数 $(F, \{x\}, A)$ 为单射，函数 $(F, \{x\}, \{y\})$ 为双射。
- (3) 函数 Id_A 为双射。
- (4) 如果 $A \subset B$ ，则函数 (Δ_A, A, B) 为单射。
- (5) $x \rightarrow (x, x)(x \in A, (x, x) \in A \times A)$ 为单射。

证明：根据定义可证。

定义 37. 子集的规范映射 (*application canonique de partie*)，子集的规范单射 (*injection canonique de partie*)

如果 $A \subset B$ ，则映射 (Δ_A, A, B) 称为 A 到 B 的规范映射或规范单射。

定义 38. 到两个集合的乘积的对角映射 (*application diagonale dans produit de deux ensembles*)

映射 $x \rightarrow (x, x) (x \in A, (x, x) \in A \times A)$ 称为对角映射.

补充定理 75.

f 为 A 到 B 的单射, $X \subset A$, 则 $f|X$ 为 X 到 B 的单射.

证明: $X \subset A$, 故 $x \in X \Rightarrow x \in A$, 根据定义可证.

定理 18.

f 为 A 到 B 的映射, 则 f^{-1} 为函数 $\Leftrightarrow f$ 为双射.

证明:

令 f 的图为 F , 则 f^{-1} 的图为 F^{-1} . 令 x, y, z 为不是常数的字母.

由于 f 为 A 到 B 的映射, 故 $pr_1 F = A$, 根据补充定理42, $pr_2 F^{-1} = A$.

根据补充定理35、补充定理42, f 为满射 $\Leftrightarrow pr_1 F^{-1} = B$.

根据补充定理64 (1), $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((y, x) \in F \text{ 与 } (z, x) \in F \Rightarrow (y = z))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A \text{ 与 } z \in A \text{ 与 } x = f(y) \text{ 与 } x = f(z) \Rightarrow (y = z))$. 假设 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A \text{ 与 } z \in A \text{ 与 } x = f(y) \text{ 与 } x = f(z) \Rightarrow (y = z))$, 则 $(\forall y)(\forall z)(y \in A \text{ 与 } z \in A \text{ 与 } f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$, 进而 $(\forall y)(\forall z)(y \in A \text{ 与 } z \in A \text{ 与 } f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$.

反过来, 假设 $(\forall y)(\forall z)(y \in A \text{ 与 } z \in A \text{ 与 } f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$, 由于 $y \in A \text{ 与 } z \in A \text{ 与 } x = f(y) \text{ 与 } x = f(z) \Rightarrow f(y) = f(z)$, 故 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A \text{ 与 } z \in A \text{ 与 } x = f(y) \text{ 与 } x = f(z) \Rightarrow (y = z))$.

综上, 得证.

定义 39. 逆映射 (*application réciproque*), 反函数 (*fonction réciproque*)

令 f 为 A 到 B 的双射, 则称 f^{-1} 为 f 的逆映射或反函数.

定义 40. 对合函数 (*fonction involutive*)

令 f 为函数, 如果 $f^{-1} = f$, 则称 f 为对合函数.

补充定理 76.

f 为 A 到 B 的双射, 则 f^{-1} 为 B 到 A 的双射.

证明: 根据补充定理44, $(f^{-1})^{-1}$ 的图与 f 的图相同, 根据定理18可证.

补充定理 77.

Id_A 的反函数是 Id_A .

证明: 根据补充定理61可证.

补充定理 78.

f 为 A 到 B 的双射, 则 $(\forall X)(X \subset A \Rightarrow f^{-1}\langle f\langle X \rangle \rangle = X)$.

证明: 根据补充定理44, $(f)^{-1})^{-1} = f$, 根据补充定理70 (8) 可证.

定理 19. 左逆和右逆的存在性

f 为 A 到 B 的映射, 如果存在 B 到 A 的映射 r (或 s), 使 $r \circ f = Id_A$ (或 $f \circ s = Id_B$), 则 f 为单射 (或满射).

反过来, 如果 f 为满射, 则存在 B 到 A 的映射 s , 使 $f \circ s = Id_B$; 如果 f 为单射, 且 $A \neq \emptyset$, 则存在 B 到 A 的映射 r , 使 $r \circ f = Id_A$.

证明:

如果 $r \circ f$ 为 Id_A , 则 $(x \in A \text{ 与 } y \in A) \Rightarrow (r(f(x)) = x \text{ 与 } r(f(y)) = y)$. 根据公理模式6、补充定理29, $f(x) = f(y) \Rightarrow r(f(x)) = r(f(y))$ 与 $x \in A \text{ 与 } y \in A$, 因此 $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, 故 f 为单射.

如果 $f \circ s = Id_B$, 则 $f\langle s\langle B \rangle \rangle = B$, 同时, 根据定理12, $f\langle s\langle B \rangle \rangle \subset f\langle A \rangle$, 又因为 $f\langle A \rangle \subset f\langle B \rangle$, 故 $f\langle A \rangle = f\langle B \rangle$, 因此 f 为满射.

如果 f 为满射, 则 $f\langle A \rangle = B$, 根据补充定理35, $x \in B \Leftrightarrow (\exists y)((y, x) \in F)$, 根据补充定理64 (1), $(y, x) \in F \Leftrightarrow y \in A \text{ 与 } x = f(y)$. 令 T 为项 $\tau_y(y \in A \text{ 与 } x = f(y))$, 根据证明规则54, $x \in B \Leftrightarrow f(T) = x$. 令 s 为映射 $x \rightarrow T(x \in B, T \in A)$, 则 $x \in B \Leftrightarrow f(s(x)) = x$, 即 $f \circ s = Id_B$. 如果 f 为单射, 且 $A \neq \emptyset$, 根据补充定理14 (2), $(\exists x)(x \in A)$, 因此可以添加辅助常数 a , 令 $a \in A$. 令 f 的图为 F , R 为公式 $(y, x) \in F$ 或 $(y = a \text{ 与 } x \in B - f\langle A \rangle)$. 由于 $(y, x) \in F \Rightarrow y \in A \text{ 与 } x \in B$, 因此 $R \Rightarrow (x, y) \in B \times A$, 因此, 该公式为对于 x, y 生成图的公式. 令其生成的图为 P .

R 与 $(z|y)R \Leftrightarrow ((y, x) \in F \text{ 与 } (z, x) \in F) \text{ 或 } (y = a \text{ 与 } z = a \text{ 与 } x \in B - f\langle A \rangle) \text{ 或 } ((y, x) \in F \text{ 与 } z = a \text{ 与 } x \in B - f\langle A \rangle) \text{ 或 } ((z, x) \in F \text{ 与 } y = a \text{ 与 } x \in B \text{ 与 } x \notin f\langle A \rangle)$. $1(z, x) \in F \Rightarrow x \in f\langle A \rangle$, $(y, x) \in F \Rightarrow x \in f\langle A \rangle$, 根据补充证明规则5 (13), R 与 $(z|y)R \Rightarrow y = z$, 故 P 为函数图.

$(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists y)((y, x) \in F) \text{ 或 } (\exists y)(y = a \text{ 与 } x \in B - f\langle A \rangle)$, 等价于 $(\exists y)((y, x) \in F) \text{ 或 } x \in B - f\langle A \rangle$, 等价于 $x \in f\langle A \rangle \text{ 或 } x \in B - f\langle A \rangle$, 等价于 $x \in B$, 故 $pr_1 P = B$. $(\exists x)R \Leftrightarrow y \in A \text{ 或 } (y = a \text{ 与 } (\exists x)(x \in B - f\langle A \rangle))$, 又由于 $y = a \Rightarrow y \in A$, 故 $(y = a \text{ 与 } (\exists x)(x \in B - f\langle A \rangle)) \Rightarrow y \in A$, 故 $(\exists x)R \Leftrightarrow y \in A$, 故 $pr_2 P = A$. 由此可知, (P, B, A) 是函数, 令其为 r , 则 $r \circ f(x) = x \Leftrightarrow (x, f(x)) \in F \text{ 或 } (x = a \text{ 与 } f(x) \in B - f\langle A \rangle)$, $r \circ f(x) = x \Leftrightarrow x \in A \text{ 或 } (x = a \text{ 与 } f(x) \in B \text{ 与 } f(x) \notin f\langle A \rangle)$. $1a \in A \Rightarrow f(x) \in f\langle A \rangle$, 根据补充证明规则5 (15), $r \circ f(x) = x \Leftrightarrow x \in A$, 故 $r \circ f = Id_A$.

定理 20.

f 为 A 到 B 的映射, g 为 B 到 A 的映射, 且 $g \circ f = Id_A$, $f \circ g = Id_B$, 则 f 和 g 均为双射, 且 $g = f^{-1}$.

证明：根据定理19， f 和 g 均为双射。

令 f 的图为 F ， g 的图为 G ，假设 $(x, y) \in F$ ，则 $y \in B$ ， $y = f(x)$ 。由于 $g(f(x)) = x$ ，因此 $g(y) = x$ ，根据补充定理64 (1)， $(y, x) \in G$ 。

假设 $(y, x) \in G$ ，同理可得 $(x, y) \in F$ 。

因此 $(x, y) \in F \Leftrightarrow (y, x) \in G$ ，即 $(y, x) \in F^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in G$ ，根据补充定理27 (2)， $G = F^{-1}$ 。又因为 g 为 B 到 A 的映射，故 $g = f^{-1}$ 。

定义 41. 回缩 (*rétractions*)，截面 (*section*)，左逆 (*inverse à gauche*)，右逆 (*inverse à droite*)

令 f 为 A 到 B 的单射 (或满射)，如果 B 到 A 的映射 r (或 s) 使 $r \circ f = Id_A$ (或 $f \circ s = Id_B$)，则称 r (或 s) 为 f 的回缩 (或截面)，或称为 f 的左逆 (或右逆)。

补充定理 79.

如果 g 是 f 的左逆，则 f 是 g 的右逆；如果 f 是 g 的右逆，则 g 是 f 的左逆。

证明：根据定义可证。

补充定理 80.

单射的左逆是满射，满射的右逆是单射。

证明：根据补充定理79、定理19可证。

补充定理 81. 右逆的唯一性

令 f 为 A 到 B 的满射， s, s' 都是 f 的右逆，如果 $s(B) = s'(B)$ ，则 $s = s'$ 。

证明：

如果 $B = \emptyset$ ，根据补充定理31 (2)， s, s' 的图均为 \emptyset ，则 $s = s'$ 。

如果 $B \neq \emptyset$ ，添加辅助常数 x, y ，使 $x \in B, y \in B$ ，且 $s(x) = s'(y)$ 。由于 $f(s(x)) = x$ ， $f(s'(y)) = y$ ，因此 $s(x) = s'(x)$ 。根据补充定理68，得证。

定理 21.

令 f 为 A 到 B 的映射， f' 为 B 到 C 的映射， $f'' = f' \circ f$ ，则：

(1) 如果 f, f' 为单射，则 $f' \circ f$ 为单射；如果 r, r' 分别为 f, f' 的左逆，则 $r \circ r'$ 是 f'' 的左逆；

(2) 如果 f, f' 为满射，则 $f' \circ f$ 为满射；如果 s, s' 分别为 f, f' 的左逆，则 $r \circ r'$ 是 f'' 的左逆；

(3) 如果 f'' 为单射，则 f 为单射；如果 r'' 是 f'' 的左逆，则 $r'' \circ f'$ 是 f 的左逆；

(4) 如果 f'' 为满射，则 f' 为满射；如果 s'' 是 f'' 的右逆，则 $f \circ s''$ 是 f' 的右逆；

(5) 如果 f'' 为满射， f' 为单射，则 f 为满射；如果 s'' 是 f'' 的右逆，则 $s'' \circ f'$ 是 f 的右逆；

(6) 如果 f'' 为单射， f 为满射，则 f' 为单射；如果 r'' 是 f'' 的左逆，则 $f \circ r''$ 是 f 的左逆。

证明:

(1) 如果 $A = \emptyset$, 则 f, f', r, r' 均为 $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, 显然成立. 如果 $A \neq \emptyset$, 则 $r \circ f = Id_A$, $r' \circ f' = Id_B$. $r \circ r' \circ f' \circ f = r \circ Id_B \circ f$, 等于 $r \circ f$, 等于 Id_A .

此外, 根据定理19, $f' \circ f$ 为单射.

(2) 类似定理21 (1) 可证.

(3) 如果 $A = \emptyset$, 则 f, f', r, r' 均为 $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, 显然成立. 如果 $A \neq \emptyset$, $r'' \circ f'' = Id_A$, 则 $(r'' \circ f'') \circ f = Id_A$. 此外, 根据定理19, f 为单射.

(4) 类似定理21 (3) 可证.

(5) $f'' \circ s'' = Id_C$, 根据定理21 (4), f' 为双射, 则 $f \circ (s'' \circ f') = (f'^{-1} \circ f') \circ f \circ (s'' \circ f')$, 等于 $f'^{-1} \circ f'' \circ s'' \circ f'$, 等于 $f'^{-1} \circ f'$, 等于 Id_B . 此外, 根据定理19, f 为满射.

(6) 类似定理21 (5) 可证.

定理 22. 函数唯一存在的条件

(1) 令 g 为 E 到 F 的满射, f 为 E 到 G 的映射, 则当且仅当 $(\forall x)(\forall y)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y))$ 时, 存在 F 到 G 的映射 h , 使 $f = h \circ g$; 并且, h 是唯一的, 令 s 为 g 的右逆, 则 $h = f \circ s$.

(2) 令 g 为 F 到 E 的单射, f 为 G 到 E 的映射, 则当且仅当 $f(G) \subset g(F)$ 时, 存在 G 到 F 的映射 h , 使 $f = g \circ h$; 并且, h 是唯一的, 令 r 为 g 的左逆, $h = r \circ f$.

证明:

(1) 若 $f = h \circ g$, 则 $(\forall x)(\forall y)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y))$. 同时, s 为 g 的右逆, 则 $h = h \circ (g \circ s)$, 因此 $h = f \circ s$, 故 h 是唯一的.

反过来, 假设 $(\forall x)(\forall y)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y))$, 令 $h = f \circ s$, 则当 $x \in E$ 时, $g(s(g(x))) = g(x)$, $s(g(x)) \in E$, 因此 $f(s(g(x))) = f(x)$, 即 $h(g(x)) = f(x)$. 因此 $f = h \circ g$.

(2) 若 $f = g \circ h$, 根据补充定理51 (2), $f(G) \subset g(F)$. 同时, r 为 g 的左逆, 则 $h = (r \circ g) \circ h$, 因此 $h = r \circ f$.

反过来, 假设 $f(G) \subset g(F)$, 令 $h = r \circ f$. 由于 $f(G) \subset g(F)$, 因此 $(\exists x)(x \in G \text{ 与 } y = f(x)) \Rightarrow (\exists x)(x \in F \text{ 与 } y = g(x))$, 因此, $(\exists x)(x \in G \text{ 与 } f(z) = f(x)) \Rightarrow (\exists x)(x \in F \text{ 与 } f(z) = g(x))$. 如果 $G = \emptyset$, 则 f 为 $(\emptyset, \emptyset, E)$, h 为 $(\emptyset, \emptyset, F)$, 因此 $f = h \circ g$. 如果 $G \neq \emptyset$, 则添加辅助变量 z 使 $z \in G$, 故 $(\exists x)(x \in F \text{ 与 } f(z) = g(x))$, 添加辅助变量 y , 使 $f(z) = g(y)$, 因此 $g(h(z)) = g(r(f(z)))$, 进而等于 $g(r(g(y)))$, 进而等于 $g(y)$, 最后等于 $f(z)$. 因此, $f = g \circ h$.

定义 42. 二元函数 (*fonction de deux arguments*)

如果函数 f 的定义域为图 G , 则称 f 为二元函数. 当 $(x, y) \in G$ 时, 函数 f 对于 (x, y) 的值记作 $f(x, y)$.

定义 43. 偏映射 (*application partielle*)

令 f 为二元函数, 定义域为 D , 到达域为 C , 令 $A_y = D^{-1}\langle\{y\}\rangle$, 则映射 $x \rightarrow f(x, y)$ ($x \in A - y, f(x, y) \in C$) 称为 f 关于第二个参数值为 y 的偏映射, 记作 $f(., y)$ 、 $f(., y)$ 或 f_y . 令 $A_x = D\langle\{x\}\rangle$, 则映射 $y \rightarrow f(x, y)$ ($y \in B_x, f(x, y) \in C$) 称为 f 关于第一个参数值为 x 的偏映射, 记作 $f(x, .)$ 、 $f(x, .)$ 或 f_x .

补充定理 82.

(1) 令 f 为二元函数, 定义域为 D , 则 $(x, y) \in D \Leftrightarrow f(., y)(x) = f(x, y)$, $(x, y) \in D \Leftrightarrow f(x, .)(y) = f(x, y)$.

(2) 令 f 、 g 为二元函数, 定义域均为 D , 如果 $(x, y) \in D \Rightarrow f(., y)(x) = g(., y)(x)$, 或者 $(x, y) \in D \Rightarrow f(x, .)(y) = g(x, .)(y)$, 则 f 和 g 在 D 上重合.

证明:

(1) 根据证明规则54可证.

(2) 当 $(x, y) \in D$ 时, 如果 $(x, y) \in D \Rightarrow f(., y)(x) = g(., y)(x)$, 则 $f(., y)(x) = g(., y)(x)$, 根据补充定理82 (1), $f(x, y) = g(x, y)$. 同理可证 $(x, y) \in D \Rightarrow f(x, .)(y) = g(x, .)(y)$ 的情况.

定义 44. 不依赖于参数 (*ne dépend pas de argument*)

令 f 为二元函数, 如果 $f(., y)$ (或 $f(x, .)$) 为常数函数, 则称 f 不依赖于第一个参数 (或第二个参数).

补充定理 83.

令 g 为 B 到 C 的映射, 则映射 $z \rightarrow g(pr_2 z)$ ($z \in A \times B, g(pr_2 z) \in C$) 不依赖于第一个参数.

证明: 如果 $B \neq \emptyset$, 若 $y \in B$, 则该映射关于第二个参数的偏映射是 $x \rightarrow g(y)$ ($x \in A_y, g(y) \in C$), 若 $y \notin B$, 则该映射关于第二个参数的偏映射是 $(\emptyset, \emptyset, C)$; 如果 $B = \emptyset$, 则关于第二个参数的偏映射是 $(\emptyset, \emptyset, C)$, 均为常数函数, 得证.

定义 45. 映射在乘积集合上的规范扩展 (*extension canonique de applications aux ensembles produits*), 映射的乘积 (*produit de applications*)

令 u 为 A 到 C 的映射, v 为 B 到 D 的映射, 则称映射 $z \rightarrow (u(pr_1 z), v(pr_2 z))$ ($z \in A \times B, (u(pr_1 z), v(pr_2 z)) \in C \times D$) 为 u 和 v 在乘积集合上的规范扩展, 或称 u 和 v 的乘积, 记作 $u \times v$ 或 (u, v) .

补充定理 84.

u 为 A 到 C 的映射, v 为 B 到 D 的映射, 则 u 和 v 的乘积的值域为 $u\langle A \rangle \times v\langle B \rangle$.

证明: 令 u 的图为 U , v 的图为 V , 则 $u\langle A \rangle \times v\langle B \rangle = \{z | (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } (\exists x)(x, pr_1 z) \in U \text{ 与 } (\exists x)(x, pr_2 z) \in V\}$. u 和 v 的乘积的值域为 $\{z | (\exists w)(w \in A \times B \text{ 与 } z = (u(pr_1 w), v(pr_2 w)))\}$.

由于 $(z$ 为有序对)与 $(\exists x)(x, pr_1 z) \in U$ 与 $(\exists x)(x, pr_2 z) \in V \Leftrightarrow (z$ 为有序对)与 $(\exists x)(\exists y)((x, pr_1 z) \in U$ 与 $(y, pr_2 z) \in V)$ ，而 $(\exists w)(w \in A \times B, z = (u(pr_1 w), v(pr_2 w))) \Leftrightarrow (z$ 为有序对)与 $(\exists w)((w$ 为有序对)与 $pr_1 w \in A$ 与 $pr_2 w \in B$ 与 $pr_1 z = u(pr_1 w)$ 与 $pr_2 z = v(pr_2 w))$ ，等价于 $(z$ 为有序对)与 $(\exists w)((w$ 为有序对)与 $(pr_1 w, pr_1 z) \in U$ 与 $(pr_2 w, pr_2 z) \in U)$ ，根据补充证明规则15，得证。

补充定理 85.

u, v 为函数，如果 u, v 都是单射（或满射），则 $u \times v$ 为单射（或满射）。

证明：如果 u, v 都是单射，根据定理7可证。如果 u, v 都是满射，根据补充定理84可证。

补充定理 86.

u 为 A 到 C 的映射， v 为 B 到 D 的映射， u' 为 C 到 E 的映射， v' 为 D 到 F 的映射，则 $u' \times v' \circ u \times v = u' \circ u \times v' \circ v$ 。

证明：若 $z \in A \times B$ ，则 $((u' \times v') \circ (u \times v))(z) = (u' \times v')(u(pr_1 z), v(pr_2 z))$ ，等于 $(u'(u(pr_1 z), v'(v(pr_2 z))))$ ，得证。

补充定理 87.

$$Id_A \times Id_B = Id_{A \times B}.$$

证明：若 $z \in A \times B$ ，则 $(Id_A \times Id_B)(z) = (Id_A(pr_1 z), Id_B(pr_2 z))$ ，即等于 z ，得证。

补充定理 88.

u, v 都是双射，则 $u \times v$ 为双射，且其反函数为 $u^{-1} \times v^{-1}$ 。

证明：根据补充定理85， $u \times v$ 为双射。

令 u 的定义域为 A ， v 的定义域为 B ，根据补充定理86， $u^{-1} \times v^{-1} \circ u \times v = Id_A \times Id_B$ ，根据补充定理87得证。

习题 43.

求证： $x \in y, x \subset y, x = \{y\}$ 都不是对于 x, y 生成图的公式。

证明：即补充定理28 (2)、补充定理28 (3)、补充定理28 (4)。

习题 44.

G 为图，求证： $X \subset pr_1 G \Leftrightarrow X \subset G^{-1} \langle G \langle X \rangle \rangle$ 。

证明：即补充定理50。

习题 45.

G 和 F 为图，求证： $pr_1 H \subset pr_1 G \Leftrightarrow H \subset H \circ G^{-1} \circ G$ ，并且 $G \subset G \circ G^{-1} \circ G$ 。

证明:

如果 $pr_1 H \subset pr_1 G$, 设 $(h, h') \in H$, 则 $h \in pr_1 G$, 故 $(\exists g)(h, g) \in G$, 则 $(\exists g)(\exists i)((h, g) \in G \text{ 与 } (i, g) \in G \text{ 与 } (i, h') \in H)$, 故 $(h, h') \in H \circ G^{-1} \circ G$, 即 $H \subset H \circ G^{-1} \circ G$.

由于 $pr_1 G \subset pr_1 G$, 故 $G \subset G \circ G^{-1} \circ G$.

习题 46.

G 为图, 求证:

- (1) $G \circ \emptyset = \emptyset, \emptyset \circ G = \emptyset$;
- (2) 当且仅当 $G = \emptyset$ 时, $G^{-1} \circ G = \emptyset$.

证明: 即补充定理52.

习题 47.

G 为图, 求证:

- (1) $(A \times B) \circ G = G^{-1} \langle A \rangle \times B$.
- (2) $G \circ (A \times B) = A \times G \langle B \rangle$.

证明:

(1) 令 x, y, z 为不是常数的字母, $(x, z) \in (A \times B) \circ G \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } y \in A \text{ 与 } z \in B)$, $(x, z) \in G^{-1} \langle A \rangle \times B \Leftrightarrow (\exists y)(y \in A \text{ 与 } (x, y) \in G \text{ 与 } z \in B)$, 得证.

(2) 令 x, y, z 为不是常数的字母, $(x, z) \in G \circ (A \times B) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in A \text{ 与 } y \in B \text{ 与 } (y, z) \in G)$, $(x, z) \in A \times G \langle B \rangle \Leftrightarrow x \in A \text{ 与 } (\exists y)(y \in B \text{ 与 } (y, z) \in G)$, 得证.

习题 48.

对任意图 G , 用 G' 表示 $pr_1 G \times pr_2 G - G$, 求证:

- (1) $(G^{-1})' = (G')^{-1}$.
- (2) 如果 $pr_1 G \subset A, pr_2 G \subset B$, 则 $G \circ (G^{-1})' \subset (\Delta_B)'$, $(G^{-1})' \circ G \subset (\Delta_A)'$.
- (3) 当且仅当 $G \circ (G^{-1})' \circ G = \emptyset$ 时, $G = pr_1 G \times pr_2 G$.

证明:

(1) 根据补充定理42、补充定理45可证.

(2) 令 x, y, z 为不是常数的字母, $(x, y) \in (G^{-1})' \Leftrightarrow (x \in A \text{ 与 } y \in B \text{ 与 } (y, x) \notin G)$, 则 $(x, z) \in G \circ (G^{-1})' \Leftrightarrow (\exists y)(x \in B \text{ 与 } y \in A \text{ 与 } (y, x) \notin G \text{ 与 } (y, z) \in G)$, $(x, z) \in (\Delta_B)' \Leftrightarrow (x \in B \text{ 与 } z \in B \text{ 与 } x \neq z)$. 由于 $(y, z) \in G \Rightarrow z \in B$, $(y, x) \notin G \text{ 与 } (y, z) \in G \Rightarrow x \neq z$, 故 $(x, z) \in G \circ (G^{-1})' \Rightarrow (x, z) \in (\Delta_B)'$, 即 $G \circ (G^{-1})' \subset (\Delta_B)'$. 同理可证 $(G^{-1})' \circ G \subset (\Delta_A)'$.

(3) 如果 $G = pr_1 G \times pr_2 G$, 则 $(G^{-1})' = \emptyset$, 根据补充定理52 (1), $G \circ (G^{-1})' \circ G = \emptyset$. 如果 $G \circ (G^{-1})' \circ G = \emptyset$, 则 $(\exists y)(\exists z)((x, y) \in G \text{ 与 } y \in pr_2 G \text{ 与 } z \in pr_1 G \text{ 与 } (z, y) \notin G \text{ 与 } (z, t) \in G)$ 为假, 即 $(x, y) \notin G$ 或 $y \notin pr_2 G$ 或 $z \notin pr_1 G$ 或 $(z, y) \in G$ 或 $(z, t) \notin G$, 即 $(x, y) \in G$ 与 $y \in pr_2 G$ 与 $z \in pr_1 G$ 与 $(z, t) \in G \Rightarrow (z, y) \in G$, 因此, $(\exists x)((x, y) \in G) \text{ 与 } (\exists t)((z, t) \in G) \text{ 与 } y \in$

pr_2G 与 $z \in pr_1G \Rightarrow (z, y) \in G$, 又因为 $y \in pr_2G \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in G)$, $z \in pr_1G \Rightarrow ((z, t) \in G)$, 因此 $y \in pr_2G$ 与 $z \in pr_1G \Rightarrow (z, y) \in G$, 因此 $G = pr_1G \times pr_2G$.

习题 49.

G 为图, 求证: G 为函数图 $\Leftrightarrow (\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X \rangle \rangle \subset X)$.

证明: 即补充定理70.

习题 50.

令 F 是 A 到 B 的对应, F' 是 B 到 A 的对应. 如果 $(\forall x)(x \in A \Rightarrow F'(F(x)) = \{x\})$ 、 $(\forall y)(y \in B \Rightarrow F(F'(y)) = \{y\})$, 求证: F 、 F' 均为双射, 且 F' 为 F 的逆映射.

证明: 令 G 、 G' 分别是 F 、 F' 的图, 假设 $(x, y) \in G$ 、 $(x, y') \in G$, 则 $y \in F(x)$, 因此 $F'(y) \subset F'(F(x))$. 又因为 $F(F'(y)) = \{y\}$, 故 $F'(y) \neq \emptyset$, 因此 $F'(y) = \{x\}$, 同理 $F'(y') = \{x\}$, 因此 $F'(F(y)) = F'(F(y'))$, 因此 $y = y'$, 故 G 为函数图, 同时, 对于 $x \in A$, 由于 $F'(F(x)) \neq \emptyset$, 因此 $F(x) \neq \emptyset$, 故 $pr_1G = A$, 因此, F 为映射, 同理 F' 为映射. 根据定理20得证.

习题 51.

f 为 A 到 B 的映射, g 为 B 到 C 的映射, h 为 C 到 D 的映射, 且 $g \circ f$ 和 $h \circ g$ 为双射, 求证: f 、 g 、 h 为双射.

证明: 根据定理21 (3)、定理21 (4), g 为双射. 根据定理21 (5)、定理21 (6), f 和 h 也是双射.

习题 52.

f 为 A 到 B 的映射, g 为 B 到 C 的映射, h 为 C 到 A 的映射, 求证: 如果 $h \circ g \circ f$ 、 $g \circ f \circ h$ 、 $f \circ h \circ g$ 之中两个满射一个单射, 或者两个单射一个满射, 则 f 、 g 、 h 都是双射.

证明:

假设 $h \circ g \circ f$ 、 $g \circ f \circ h$ 为满射, $f \circ h \circ g$ 为单射, 根据定理15、定理21 (3)、定理21 (4), g 为双射、 h 为满射、 $h \circ g$ 为双射、 $g \circ f$ 为满射, 根据定理21 (5)、定理21 (6), h 、 f 为双射.

假设 $h \circ g \circ f$ 、 $g \circ f \circ h$ 为单射, $f \circ h \circ g$ 为满射, 根据定理15、定理21 (3)、定理21 (4), $f \circ h$ 为双射、 f 为双射、 $g \circ f$ 为单射、 h 为单射, 根据定理21 (5)、定理21 (6), g 、 h 为双射.

习题 53.

试找到以下推理的错误: 令 N 为自然数集, A 为满足 $n > 2$ 且存在不等于0的自然数 x 、 y 、 z 使 $x^n + y^n = z^n$ 成立的, 则 A 不为空集 (即费马大定理为假). 设 $B = \{A\}$, $C = \{N\}$, 由于 B 、 C 均为仅有一个元素的集合, 因此存在 B 到 C 的双射 f . 因此 $f(A) = N$, 如果 $A = \emptyset$, 则 $f(\emptyset) = \emptyset$, 故 $N = \emptyset$, 矛盾.

答： $f(\emptyset) = \emptyset$ 推理错误。混淆了 $f(\emptyset)$ 与 $f\langle\emptyset\rangle$ ，即将函数的值和在对应下的像混淆。
 注：习题53涉及尚未介绍的“自然数”知识。

2.4 集族的并集和交集 (Réunion et intersection d'une famille d'ensembles)

补充定理 89. 并集定理

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族，则 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i)$ 是 x 上的集合化公式。

证明：由于 $(\forall x)((i \in I \text{ 与 } x \in X_i) \Rightarrow (x \in X_i))$ ，根据公理模式5， $(\forall i)(\forall x)(\exists Z)((i \in I \text{ 与 } x \in X_i) \Rightarrow (x \in Z))$ ，根据公理模式8得证。

定义 46. 集族的并集 (*réunion d'une famille*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族，集合 $\{x | (\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i)\}$ 称为该集族的并集，记作 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 。

补充定理 90.

E 的子集族的并集，是 E 的子集。

证明：如果 $i \in I$ ，则 $X_i \subset E$ ，因此 $x \in X_i \Rightarrow x \in E$ ，则 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i) \Rightarrow x \in E$ ，得证。

补充定理 91.

$$\bigcup_{i \in \emptyset} X_i = \emptyset.$$

证明： $i \in \emptyset$ 为假，故 $(\exists i)(i \in \emptyset \text{ 与 } x \in X_i)$ 为假，得证。

补充定理 92. 交集定理

对于集族 $(X_i)_{i \in I}$ ，如果 $I \neq \emptyset$ ，则 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$ 是 x 上的集合化公式。

证明：设 $a \in I$ ，则 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i) \Rightarrow x \in X_a$ ，根据证明规则52得证。

补充定理 93. 空族的交集不存在

非 $\text{Coll}_x(\forall i)(i \in \emptyset \Rightarrow x \in X_i)$ 。

证明： $i \in \emptyset$ 为假，因此 $i \in \emptyset \Rightarrow x \in X_i$ 为真，根据证明规则13可证。

补充定理 94. 子集族的交集存在

$(X_i)_{i \in I}$ 为 F 的子集族，则 $x \in F$ 与 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)$ 是 x 上的集合化公式。

证明：根据证明规则51可证。

定义 47. 集族的交集 (*intersection d'une famille*); 子集族的交集 (*intersection d'une famille*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, 且 $I \neq \emptyset$, 则集合 $\{x | (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}$ 称为该集族的交集, 记作 $\bigcap_{i \in I} X_i$. 如果 $(X_i)_{i \in I}$ 为 F 的子集族, 则集合 $\{x | x \in F \text{ 与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}$ 称为该子集族的交集, 同样记作 $\bigcap_{i \in I} X_i$.

补充定理 95. 空子集族的交集

$(X_i)_{i \in \emptyset}$ 为 F 的子集族, 则 $\bigcap_i \in \emptyset X_i = F$.

证明: 根据定义可证.

补充定理 96.

(1) E 的子集族的交集, 是 E 的子集.

(2) 如果集族同时是 E 的子集族, 且指标集不为空集, 则该集族的交集也是该子集族的交集.

证明:

(1) $x \in E$ 与 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x \in X_i) \Rightarrow x \in E$, 得证.

(2) 根据补充定理96 (1) 可证.

定理 23. 并集和交集的交换律

$(X_i)_{i \in I}$ 为集族, f 为 K 到 I 的满射, 则 $\bigcup_{k \in K} X_{f(k)} = \bigcup_{i \in I} X_i$; 如果 $I \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{k \in K} X_{f(k)} = \bigcap_{i \in I} X_i$. 如果 $(X_i)_{i \in I}$ 为子集族, 在 $I = \emptyset$ 的情况下, $\bigcap_{k \in K} X_{f(k)} = \bigcap_{i \in I} X_i$ 也为真.

证明:

对于并集:

设 $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, 则存在 $i \in I$, 使 $x \in X_i$, 由于 $f(K) = I$, 因此存在 $k \in K$, 使 $i = f(k)$, 故 $x \in X_{f(k)}$, 因此 $x \in \bigcup_{k \in K} X_{f(k)}$.

反过来, 设 $x \in \bigcup_{k \in K} X_{f(k)}$, 因此存在 $k \in K$, 使 $x \in X_{f(k)}$, 设 $i = f(k)$, 则 $x \in X_i$, 因此 $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$.

对于交集:

设 $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$, 对任意 $k \in K$, 都有 $f(k) \in I$, 即 $x \in X_{f(k)}$, 因此 $x \in \bigcap_{k \in K} X_{f(k)}$.

反过来, 设 $x \in \bigcap_{k \in K} X_{f(k)}$, $i \in I$, 则存在 $k \in K$, 使 $i = f(k)$, 因此 $x \in X_i$, 故 $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$.

设 $(X_i)_{i \in I}$ 为 F 的子集族, 在 $I = \emptyset$ 的情况下, f 为 K 到 I 的满射, 则 $K = \emptyset$, 因此 $\bigcap_{k \in K} X_{f(k)} = F$, $\bigcap_{i \in I} X_i = F$, 得证.

定理 24. $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $(\forall i)(\forall k)(i \in I \text{ 与 } k \in I \Rightarrow X_i = X_k)$, 则 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i = X_a)$, 当 $I \neq \emptyset$ 时, $(\forall a)(a \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} X_i = X_a)$.

证明: 令 f 为常数映射 $i \rightarrow a (i \in I, a \in \{a\})$, 其为 I 到 $\{a\}$ 的满射, 根据定理 23 可证.

定义 48. 多个集合的并集 (*réunion d'ensembles*), 多个集合的交集 (*intersection d'ensembles*)

集族 Id_F 的并集, 也称为 F 的并集, 记作 $\bigcup_{X \in F} X$; 当 $F \neq \emptyset$ 时, 集族 Id_F 的交集, 称为 F 的交集, 记作 $\bigcap_{X \in F} X$.

补充定理 97.

(1) 如果 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 为集族, 且 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \subset Y_i)$, 则 $\bigcup_{i \in I} X_i \subset \bigcup_{i \in I} Y_i$; 如果 $I \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{i \in I} X_i \subset \bigcap_{i \in I} Y_i$.

(2) 如果 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, 且 $J \subset I$, 则 $\bigcup_{i \in J} X_i \subset \bigcup_{i \in I} X_i$; 如果 $J \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{i \in I} X_i \subset \bigcap_{i \in J} X_i$.

证明:

(1) 设 $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, 则存在 $i \in I$, 使 $x \in X_i$, 因此 $x \in Y_i$, 故 $x \in \bigcup_{i \in I} Y_i$.

另一方面, 设 $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$, 则对任意 $i \in I$, $x \in X_i$, 因此 $x \in Y_i$, 故 $x \in \bigcap_{i \in I} Y_i$. 得证.

(2) 设 $x \in \bigcup_{i \in J} X_i$, 则存在 $i \in J$, 使 $x \in X_i$. 由于 $J \subset I$, 因此 $i \in I$, 故 $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$.

另一方面, 设 $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$, 则对任意 $i \in I$, $x \in X_i$. 由于 $J \subset I$, 因此对任意 $i \in J$, 故 $x \in \bigcap_{i \in J} X_i$. 得证.

定理 25. 并集和交集的结合律

$(X_i)_{i \in I}$ 为集族, 其指标集 $I = \bigcup_{l \in L} J_l$, 则 $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{l \in L} (\bigcup_{i \in J_l} X_i)$, 如果 $L \neq \emptyset$, 并且对任意 $l \in L$, $J_l \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{l \in L} (\bigcap_{i \in J_l} X_i)$.

证明:

对于并集:

设 $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$, 则存在 $i \in I$, 使 $x \in X_i$, 由于 $I = \bigcup_{l \in L} J_l$, 因此存在 $l \in L$, 使 $i \in J_l$, 因此 $x \in \bigcup_{i \in J_l} X_i$, 故 $x \in \bigcup_{l \in L} (\bigcup_{i \in J_l} X_i)$.

反过来, 设 $x \in \bigcup_{l \in L} (\bigcup_{i \in J_l} X_i)$, 则存在 $l \in L$, 使 $x \in \bigcup_{i \in J_l} X_i$, 因此存在 $i \in J_l$, 使 $x \in X_i$, 由于 $I = \bigcup_{l \in L} J_l$, 因此 $i \in I$, 故 $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$.

对于交集:

设 $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$, 则对任意 $i \in I$, $x \in X_i$, 对任意 $l \in L$, 由于 $J_l \subset I$, 因此 $x \in \bigcap_{i \in J_l} X_i$, 故 $x \in \bigcap_{l \in L} (\bigcap_{i \in J_l} X_i)$.

反过来, 设 $x \in \bigcap_{l \in L} (\bigcap_{i \in J_l} X_i)$, 则对任意 $l \in L$, $x \in \bigcap_{i \in J_l} X_i$, 由于 $I = \bigcup_{l \in L} J_l$, 因此对任意 $i \in I$, 存在 $l \in L$, 使 $i \in J_l$, 因此 $x \in X_i$, 故 $x \in \bigcap_{i \in I} X_i$.

补充定理 98.

$(X_i)_{i \in I}$ 为子集族, 其指标集 $I = \bigcup_{l \in L} J_l$, 则 $\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{l \in L} (\bigcap_{i \in J_l} X_i)$.

证明:

设 $(X_i)_{i \in I}$ 为 F 的子集族.

如果 $L \neq \emptyset$, 并且对所有 $l \in L$, $J_l \neq \emptyset$, 根据定理25、补充定理96 (2) 可证.

如果 $L = \emptyset$, 根据补充定理91, $I = \emptyset$, 故 $\bigcap_{i \in I} X_i = F$, $\bigcap_{l \in L} (\bigcap_{i \in J_l} X_i) = F$.

如果 $L \neq \emptyset$, 但存在 l , 使 $J_l = \emptyset$, 则 $\bigcap_{i \in J_l} X_i = F$. 类似定理25仍然可证.

定理 26.

$(X_i)_{i \in I}$ 为 A 的子集族, F 为 A 到 B 的对应, 则 $F\langle \bigcup_{i \in I} X_i \rangle = \bigcup_{i \in I} F\langle X_i \rangle$, $F\langle \bigcap_{i \in I} X_i \rangle \subset \bigcap_{i \in I} F\langle X_i \rangle$.

证明:

$(\exists x)(x \in \bigcup_{i \in I} X_i \text{ 与 } y \in F(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i \text{ 与 } y \in F(x))$, 等价于 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } y \in F(X_i))$, 因此 $y \in \bigcup_{i \in I} F\langle X_i \rangle$.

对任意 $i \in I$, $\bigcap_{i \in I} X_i \subset X_i$, 根据定理12, $F\langle \bigcup_{i \in I} X_i \rangle \subset F\langle X_i \rangle$, 故 $F\langle \bigcap_{i \in I} X_i \rangle \subset \bigcap_{i \in I} F\langle X_i \rangle$.

定理 27.

f 为 A 到 B 的映射, $(Y_i)_{i \in I}$ 为 B 的子集族, 则 $f^{-1}\langle \bigcap_{i \in I} Y_i \rangle = \bigcap_{i \in I} f^{-1}\langle Y_i \rangle$.

证明: 设 $x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}\langle Y_i \rangle$, 根据补充定理70 (1), $x \in A$, 且对任意 $i \in I$, $f(x) \in Y_i$, 因此 $f(x) \in \bigcap_{i \in I} Y_i$, 故 $x \in f^{-1}\langle \bigcap_{i \in I} Y_i \rangle$. 另一方面, 根据定理26, $f^{-1}\langle \bigcap_{i \in I} Y_i \rangle \subset \bigcap_{i \in I} f^{-1}\langle Y_i \rangle$. 得证.

定理 28.

$(X_i)_{i \in I}$ 为 A 的子集族, f 为 A 到 B 的单射, 且 $I \neq \emptyset$, 则 $f\langle \bigcap_{i \in I} X_i \rangle = \bigcap_{i \in I} f\langle X_i \rangle$.

证明: 设 f 的图为 F , 令 $i = (\Delta_f\langle A \rangle, f\langle A \rangle, B)$, $g = (F, A, f\langle A \rangle)$. 则 g 为双射, i 为单射, $f = i \circ g$. 令 h 为 g 的逆映射, 则对任意 $X \subset A$, $f\langle X \rangle = h^{-1}\langle X \rangle$, 根据定理27得证.

定理 29.

设 $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的子集族, 则 $\mathbb{C}_E(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{C}_E X_i)$, $\mathbb{C}_E(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{C}_E X_i)$.

证明：设 $x \in \bigcup_{i \in I} \mathbb{C}_E(X_i)$ ，则 $x \in E$ ，且对任意 $i \in I$ ， $x \notin X_i$ ， $x \in \mathbb{C}_E X_i$ ，因此 $x \in \bigcap_{i \in I} (\mathbb{C}_E X_i)$ 。

反过来，设 $x \in \bigcap_{i \in I} (\mathbb{C}_E X_i)$ ，根据补充定理96 (1)， $x \in E$ ，同时，若 $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$ ，则存在 i ，使 $x \in X_i$ ，与 $x \in \bigcap_{i \in I} (\mathbb{C}_E X_i)$ 矛盾，故 $x \notin \bigcup_{i \in I} X_i$ ，因此， $x \in \mathbb{C}_E(\bigcup_{i \in I} X_i)$ 。故 $\mathbb{C}_E(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{C}_E X_i)$ 。根据补充定理12， $\mathbb{C}_E(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{C}_E X_i)$ 。

定义 49. 两个集合的并集与交集 (*réunion et intersection de deux ensembles*)，迹 (*trace*)

$\bigcup_{X \in \{A, B\}} X$ 称为 A 和 B 的并集，记作 $A \cup B$ ， $\bigcap_{X \in \{A, B\}} X$ 称为 A 和 B 的交集，记作 $A \cap B$ 。 $A \cap B$ 又称 A 在 B 上的迹。

定义 50. 三元集合 (*ensemble à trois éléments*)，四元集合 (*ensemble à quatre éléments*)

$\{x, y\} \cup \{z\}$ 称为三元集合，记作 $\{x, y, z\}$ ； $\{x, y, z\} \cup \{t\}$ 称为四元集合，记作 $\{x, y, z, t\}$ 。

补充定理 99.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x | x \in A \text{ 与 } x \in B\}.$$

证明： $A \cup B = \{x | (\exists i)(i \in \{A, B\} \text{ 与 } x \in i)\}$ ，等于 $\{x | (\exists i)((i = A \text{ 与 } x \in A) \text{ 或 } (i = B \text{ 与 } x \in B))\}$ ，等于 $\{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。同理可证 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 与 } x \in B\}$ 。

补充定理 100.

- (1) $A \cup B = B \cup A$;
- (2) $A \cap B = B \cap A$;
- (3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- (4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$;
- (6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$;
- (7) $\mathbb{C}_E(A \cup B) = (\mathbb{C}_E A) \cap (\mathbb{C}_E B)$;
- (8) $\mathbb{C}_E(A \cap B) = (\mathbb{C}_E A) \cup (\mathbb{C}_E B)$;
- (9) $A \cup \mathbb{C}_E A = E$;
- (10) $A \cap \mathbb{C}_E A = \emptyset$.

证明：根据补充定理99可证。

补充定理 101.

- (1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
- (2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

证明：根据补充定理99可证.

补充定理 102.

令 G 为 E 到 F 的对应, A 和 B 是 E 的子集, 则 $G(A \cup B) = G(A) \cup G(B)$, $G(A \cap B) \subset G(A) \cap G(B)$.

证明：根据定理26可证.

补充定理 103.

令 f 为 F 到 E 的映射, A 和 B 是 E 的子集, 则 $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

证明：根据定理27可证.

补充定理 104.

令 G 为图, $X \subset pr_1 G$, $pr_2 G \subset B$, 则 $pr_1(G \cap X \times B) = X$.

证明： $(x, y) \in (G \cap X \times B) \Leftrightarrow (x, y) \in G$ 与 $x \in X$ 与 $y \in B$, 由于 $pr_2 G \subset B$, 故 $(x, y) \in G \Rightarrow y \in B$, 因此 $(x, y) \in (G \cap X \times B) \Leftrightarrow (x, y) \in G$ 与 $x \in X$, 故 $(\exists y)((x, y) \in (G \cap X \times B)) \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G)$ 与 $x \in X$, 又因为 $X \subset pr_1 G$, 故 $(\exists y)((x, y) \in (G \cap X \times B)) \Leftrightarrow x \in X$, 得证.

定义 51. 通过子集导出的函数 (*fonction déduite par passage au le sous-ensemble*), 通过子集导出的映射 (*application déduite par passage au le sous-ensemble*)

令函数 $f = (F, A, B)$, $X \subset A$, 则 $(F \cap X \times B, X, B)$ 称为 f 通过 A 的子集 X 导出的函数, 或称为 f 通过 A 的子集 X 导出的映射. 如果 $pr_2 F \subset Y$, 则 (F, A, Y) 称为 f 通过 B 的子集 Y 导出的函数, 或称为 f 通过 B 的子集 Y 导出的映射. 如果 $(pr_2 F \cap X \times B) \subset Z$, 则 $(F \cap X \times B, X, Z)$ 称为 f 通过 A 的子集 X 和 B 的子集 Z 导出的函数, 或称为 f 通过 A 的子集 X 和 B 的子集 Z 导出的映射.

补充定理 105.

令函数 $f = (F, A, B)$, $X \subset A$, 则 $(f$ 通过 A 的子集 X 导出的函数) $= f|X$, 并且 f 通过 A 的子集 X 导出的函数和 f 在 X 上重合.

证明：设 $f|X$ 的图为 G , 根据补充定理64 (1), $x \in X$ 与 $y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in G$, $x \in A$ 与 $y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in F$. 根据补充定理23 (2), $x \in X$ 与 $y \in B \Leftrightarrow (x, y) \in X \times B$. 根据补充定理64 (3), $x \in A \Rightarrow f(x) \in B$. 因此 $(x, y) \in (F \cap X \times B) \Leftrightarrow x \in A$ 与 $y = f(x)$ 与 $x \in X$ 与 $y \in B$, 等价于 $x \in X$ 与 $y = f(x)$, 得证.

补充定理 106.

令函数 $f = (F, A, B)$, $X \subset A$, $pr_2 F \subset Y$, $(pr_2 F \cap X \times B) \subset Z$, 如果 f 为单射, 则 f 通过 A 的子集 X 导出的函数、 f 通过 B 的子集 Y 导出的函数、 f 通过 A 的子集 X 和 B 的子集 Z 导出的函数均为单射.

证明：根据补充定理105、补充定理72可证.

定理 30.

f 为 A 到 B 的映射, $Y \subset B$, 则 $f^{-1}(B - Y) = f^{-1}(B) - f^{-1}(Y)$.

证明：设 $x \in f^{-1}(B - Y)$, 根据补充定理70 (1), $x \in A$, 且 $f(x) \in B - Y$. 因此 $f(x) \in B$, 且 $f(x) \notin Y$, 根据补充定理70 (1), $x \in (f^{-1}(B) - f^{-1}(Y))$. 反过来, $x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(Y)$, 根据补充定理70 (1), $x \in A$, $f(x) \in B$, 且 $f(x) \notin Y$, 因此 $f(x) \in (B - Y)$, 根据补充定理70 (1), $x \in f^{-1}(B - Y)$.

定理 31.

f 为 A 到 B 的单射, $X \subset A$, 则 $f(A - X) = f(A) - f(X)$.

证明：设 f 的图为 F , 令 $i = (\Delta_{f(A)}, f(A), B)$, $g = (F, A, f(A))$. 则 g 为双射, i 为单射, $f = i \circ g$. 令 h 为 g 的逆映射, 则对任意 $X \subset A$, $f(X) = h^{-1}(X)$, 根据定理30得证.

定义 52. 覆盖 (recouvrement), 更细的覆盖 (recouvrement plus fin)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, 如果 $E = \bigcup_{i \in I} X_i$, 则称 $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的覆盖.

如果 $(X_i)_{i \in I}$ 和 $(Y_k)_{k \in K}$ 都是 E 的覆盖, 并且 $(\forall k)(k \in K \Rightarrow (\exists i)(Y_k \subset X_i))$, 则称 $(Y_k)_{k \in K}$ 为比 $(X_i)_{i \in I}$ 更细的覆盖.

注:

从上下文来看, 原书对覆盖的定义有误.

在原书中, “更细” 这个概念包括与自身相等的情况, 即一个覆盖比自身更细.

补充定理 107.

覆盖 R 比覆盖 R' 更细, 覆盖 R' 比覆盖 R'' 更细, 则覆盖 R 比覆盖 R'' 更细.

证明：根据定义可证.

补充定理 108.

$(X_i)_{i \in I}$ 和 $(X_i)_{i \in J}$ 都是 E 的覆盖, 且 $J \subset I$, 则 $(X_i)_{i \in J}$ 比 $(X_i)_{i \in I}$ 更细.

证明：根据定义可证.

补充定理 109.

$I \neq \emptyset$, $K \neq \emptyset$, $(X_i)_{i \in I}$ 和 $(Y_k)_{k \in K}$ 都是 E 的覆盖, 则 $(X_i \cap Y_k)_{(i,k) \in I \times K}$ 也是 E 的覆盖, 并且比 $(X_i)_{i \in I}$ 和 $(Y_k)_{k \in K}$ 更细.

证明：设 $x \in E$, 则存在 i, k , 使 $x \in X_i$, $x \in Y_k$, 则 $x \in (X_i \cap Y_k)$, 且 $(i, k) \in I \times K$, 故 $x \in (X_i \cap Y_k)_{(i,k) \in I \times K}$. 如果 $k \in K$, 则 $X_i \cap Y_k \subset Y_k$, 故 $(X_i \cap Y_k)_{(i,k) \in I \times K}$ 比 $(Y_k)_{k \in K}$ 更细, 同理可证比 $(X_i)_{i \in I}$ 更细.

补充定理 110.

$I \neq \emptyset, K \neq \emptyset, (X_i)_{i \in I}, (Y_k)_{k \in K}, (Z_l)_{l \in L}$ 都是 E 的覆盖, 如果对任意 $l \in L$, 均存在 i, k , 使 $Z_l \subset X_i, Z_l \subset Y_k$, 则 $(Z_l)_{l \in L}$ 是比 $(X_i \cap Y_k)_{(i,k) \in I \times K}$ 更细的覆盖.

证明: 对任意 $l \in L$, 均存在 i, k , 使 $Z_l \subset X_i, Z_l \subset Y_k$, 则 $Z_l \subset X_i \cap Y_k$, 得证.

定义 53. 覆盖的像 (*image du recouvrement*), 覆盖的原像 (*image réciproque du recouvrement*)

如果 $(X_i)_{i \in I}$ 为 A 的覆盖, f 为 A 到 B 的满射, 则 $(f(X_i))_{i \in I}$ 称为 $(X_i)_{i \in I}$ 在 f 下的像.

如果 $(X_i)_{i \in I}$ 是 A 的覆盖, g 是 C 到 A 的映射, 则 $(g^{-1}(X_i))_{i \in I}$ 称为 $(X_i)_{i \in I}$ 在 g 下的原像.

补充定理 111. 覆盖和像和原像都是覆盖

如果 $(X_i)_{i \in I}$ 为 A 的覆盖, f 为 A 到 B 的满射, g 为 C 到 A 的映射, 则 $(X_i)_{i \in I}$ 在 f 下的像是 B 的覆盖, $(X_i)_{i \in I}$ 在 g 下的原像是 C 的覆盖.

证明: 根据定理26可证.

定义 54. 覆盖的乘积 (*produit des recouvrements*)

$(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的覆盖, $(Y_k)_{k \in K}$ 为 F 的覆盖, 则 $(X_i \times Y_k)_{(i,k) \in I \times K}$ 称为 E 的覆盖 $(X_i)_{i \in I}$ 和 F 的覆盖 $(Y_k)_{k \in K}$ 的乘积.

补充定理 112.

$(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的覆盖, $(Y_k)_{k \in K}$ 为 F 的覆盖, 则两个覆盖的乘积是 $E \times F$ 的覆盖.

证明: 设 $z \in E \times F$, 则 $pr_1 z \in E, pr_2 z \in F$. 存在 $i \in I$, 使 $pr_1 z \in X_i$, 存在 $k \in K$, 使 $pr_2 z \in Y_k$. 因此 $z \in X_i \times Y_k$, 得证.

定理 32.

(1) $(X_i)_{i \in I}$ 是 E 的覆盖, f, g 是两个定义域为 E 的函数, 如果对任意 $i \in I$, f 和 g 均在 X_i 上重合, 则 f 和 g 在 E 上重合.

(2) $(X_i)_{i \in I}$ 是 E 的覆盖, $(f_i)_{i \in I}$ 是集族, 其中, 对任意 $i \in I$, f_i 均为函数, 且定义域为 X_i , 到达域为 F . 如果 $(\forall i)(\forall k)((i, k) \in (I \times I) \Rightarrow (f_i \text{ 和 } f_k \text{ 在 } X_i \cap X_k \text{ 上重合}))$, 则存在唯一的函数 f , 以 E 为定义域, 以 F 为到达域, 且当 $i \in I$ 时, 是 f_i 在 E 上的延拓.

证明:

(1) 设 $x \in E$, 则存在 $i \in I$, 使 $x \in X_i$, 故 $f(x) = g(x)$, 得证.

(2) 令 f_i 的图为 G_i , $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, 设 $(x, y) \in G, (x, y') \in G$, 则存在 $i \in I, k \in I$, 使 $(x, y) \in G_i, (x, y') \in G_k$. 因此 $x \in X_i \cap X_k, y = f_i(x), y' = f_k(x)$, 因此 $y = y'$, 故 G 为函数图. 又因为 $pr_1 G = (\exists y)((x, y) \in \bigcup_{i \in I} G_i)$, 即 $(\exists y)(\exists i)(i \in I \text{ 与 } (x, y) \in G_i)$, 即 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } (\exists y)(x, y) \in G_i)$, 即 $\bigcup_{i \in I} pr_1 G_i$, 即 $\bigcup_{i \in I} X_i$, 即 E . 令 (G, E, F) 为函数 f , 当 $i \in I$ 时, $(x, y) \in$

$G_i \Rightarrow (x, y) \in G$, 因此当 $x \in X_i$ 时, $f_i(x) = f(x)$, 即 f 是 f_i 在 E 上的延拓. 因此, 函数 f 即为所求. 同时, 根据定理 32 (1), f 具有唯一性. 得证.

注: 因原书对覆盖的定义更正, 本定理也做相应更正.

定义 55. 不相交的集合 (*ensembles disjoint*), 相交的集合 (*ensembles qui rencontrent*), 两两不相交的集合 (*ensembles mutuellement disjoint/ensembles deux à deux disjoint*)

如果 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 和 B 不相交. 如果 $A \cap B \neq \emptyset$, 则称 A 和 B 相交. 对于集族 $(X_i)_{i \in I}$, 如果 $(\forall i)(\forall k)(i \in I \text{ 与 } k \in I \text{ 与 } i \neq k \Rightarrow X_i \cap X_k = \emptyset)$, 则称该集族两两不相交.

补充定理 113.

f 为 A 到 B 的映射, $(Y_i)_{i \in I}$ 为 B 的子集族且两两不相交, 则 $(f^{-1}(Y_i))_{i \in I}$ 为 A 的子集族且两两不相交.

证明: 根据定理 27 可证.

定理 33.

$(X_i)_{i \in I}$ 是两两不相交的集族, $(f_i)_{i \in I}$ 是函数族, 且定义域为 X_i , 到达域为 F , 则存在唯一的函数 f , 以 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 为定义域, 以 F 为到达域, 且当 $i \in I$ 时, 是 f_i 在 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 上的延拓.

证明: 根据定理 32 (2) 可证.

定义 56. 划分 (*partition*)

如果一个两两不相交的集族是 E 的覆盖, 则称其为 E 的划分.

补充定理 114.

- (1) E 的划分的并集是 E .
- (2) “ Δ_G 为 E 的划分” 是 G 上的集合化公式.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 如果 Δ_G 为 E 的划分, 根据补充定理 114 (1), 对任意 $x \in G$, $x \subset E$, 故 $G \subset \mathcal{P}(E)$, 根据证明规则 52 可证.

注: 集合 $\{G | \Delta_G \text{ 为 } E \text{ 的划分}\}$ 的与严肃数目. 为 E 的划分数目 (仅指标集不同的划分, 为同一个划分).

补充定理 115.

f 为 E 到 F 的映射, 则集族 $(f^{-1}(y))_{y \in f(E)}$ 是 E 的划分.

证明：设 $x \in f^{-1}(y_1)$ 、 $x \in f^{-1}(y_2)$ ，根据补充定理70 (3)， $f(x) = y_1$ ， $f(x) = y_2$ ，因此 $y_1 = y_2$ ，故集族 $(f^{-1}(y))_{y \in f(E)}$ 两两不相交。对任意 $x \in f^{-1}(y)$ ，根据补充定理70 (3)， $x \in E$ ，

反过来，如果 $x \in E$ ，根据补充定理70 (4)， $x \in f^{-1}(f(x))$ ，因此 $\bigcup_{y \in f(E)} (f^{-1}(y)) = E$ 。

定理 34.

对于集族 $(X_i)_{i \in I}$ ，存在满足下列性质的 X ：存在两两不相交的集族 $(X'_i)_{i \in I}$ ，使 $X = \bigcup_{i \in I} (X'_i)_{i \in I}$ ，并且，对任意 $i \in I$ ，存在 X_i 到 X'_i 的双射。

证明：令 $A = \bigcup_{i \in I} X_i$ 。由于 $(z \text{ 为有序对})$ 与 $pr_1 z \in X_i$ 与 $pr_2 z = i \Rightarrow z \in A \times I$ ，因此其为集合化公式，令 X'_i 为 $\{z | (z \text{ 为有序对}) \text{ 与 } pr_1 z \in X_i \text{ 与 } pr_2 z = i\}$ ，如果 $i \in I$ ，则 $x \rightarrow (x, i) (x \in X_i)$ 为 X_i 到 X'_i 的双射，且当 $i \neq k$ 时，假设 $z \in (X'_i \cap X'_k)$ ，则 $pr_1 z = i$ ， $pr_1 z = k$ ，矛盾，故 $X'_i \cap X'_k = \emptyset$ ，因此， $(X'_i)_{i \in I}$ 两两不相交。

定义 57. 集族的和 (somme d'une famille)，到和的规范映射 (application canonique dans somme)

$(X_i)_{i \in I}$ 为集族，则称 $\bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})_{i \in I}$ 为其和。对任意 $i \in I$ ，映射 $x \rightarrow (x, i) (x \in X_i)$ 称为 X_i 到 $(X_i)_{i \in I}$ 的和的规范映射。

定义 58. 集合和单元素集合的和 (somme d'un ensemble et un ensemble à un seul élément)，将元素添加到集合得到的集合 (ensemble obtenu par adjonction d'un élément à un ensemble)

如果 $a \notin X$ ，则 $X \cup \{a\}$ 称为 X 和 $\{a\}$ 的和，或称为将 a 添加到 X 得到的集合。

定理 35.

$(X_i)_{i \in I}$ 为两两不相交的集族， A 为其并， S 为其和，则存在 A 到 S 的双射。

证明：对任意 $i \in I$ ， $x \rightarrow (x, i) (x \in X_i)$ 为 X_i 到 $X_i \times \{i\}$ 的双射，根据定理33，存在唯一的函数 f ，以 A 为定义域，以 $A \times I$ 为到达域，且当 $i \in I$ 时，是 $x \rightarrow (x, i) (x \in X_i)$ 在 A 上的延拓。 f 即为 A 到 S 的双射。

补充定理 116.

(1) $(X_i)_{i \in I}$ 为集族， A 为其并， S 为其和，则存在 S 到 A 的满射，存在 A 到 S 的单射。

(2) $(X_i)_{i \in I}$ 为集族， S 为其和，对任意 $i \in I$ ，令 f_i 为 X_i 到 S 的规范映射， $Y_i = f_i(X_i)$ ，则 $(Y_i)_{i \in I}$ 为 S 的划分。

(3) $(X_i)_{i \in I}$ 为集族，对任意 $i \in I$ ，令 f_i 为 X_i 到 S 的规范映射， $Y_i = f_i(X_i)$ ，则对任意 $i \in I$ ， $x \rightarrow (x, i) (x \in X_i)$ 为 X_i 到 Y_i 的双射。

(4) $(X_i)_{i \in \emptyset}$ 的和为 \emptyset 。

(5) $(\emptyset)_{i \in I}$ 的和为 \emptyset 。

证明:

- (1) $z \rightarrow pr_1 z (z \in S)$ 为 S 到 A 的满射. 其右逆为 A 到 S 的单射.
- (2) 根据定义可证.
- (3) 根据定义可证.
- (4) 根据定义可证.
- (5) 根据定义可证.

习题 54.

G 为图, 求证以下三个公式等价:

公式一: G 为函数图;

公式二: $G^{-1}(X \cap Y) = G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y)$;

公式三: $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y) = \emptyset$.

证明:

$(G^{-1}(X \cap Y) = G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y)) \Leftrightarrow ((\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } y \in X) \text{ 与 } (\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } y \in Y)) \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G \text{ 与 } y \in X \text{ 与 } y \in Y)$. 如果 G 为函数图, 则等价于 $f(x) \in X$ 与 $x \in pr_1 G$ 与 $f(x) \in Y \Leftrightarrow f(x) \in X$ 与 $x \in pr_1 G$ 与 $f(x) \in Y$, 故公式一 \Rightarrow 公式二.

$X \cap Y = \emptyset$, 则 $G^{-1}(X \cap Y) = \emptyset$, 如果 $G^{-1}(X \cap Y) = G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y)$, 则 $G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y) = \emptyset$, 即公式二 \Rightarrow 公式三.

如果 $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y) = \emptyset$, 设 $(x, y) \in G$ 、 $(x, y') \in G$, 假设 $y \neq y'$, 则 $\{y\} \cap \{y'\} = \emptyset$, 则 $G^{-1}(\{y\}) \cap G^{-1}(\{y'\}) = \emptyset$, 但 $x \in G^{-1}(\{y\})$ 、 $x \in G^{-1}(\{y'\})$, 矛盾, 故公式三 \Rightarrow 公式一.

习题 55.

G 为图, 求证:

- (1) $G(X) = pr_2(G \cap (X \times pr_2 G))$;
- (2) $G(X) = G(X \cap pr_1 G)$.

证明:

(1) $pr_2(G \cap (X \times pr_2 G)) = \{y | (\exists x)((x, y) \in G \text{ 与 } x \in X \text{ 与 } y \in pr_2 G)\}$, 根据补充定理29, $(x, y) \in G \Rightarrow y \in pr_2 G$, 故其等于 $\{y | (\exists x)((x, y) \in G \text{ 与 } x \in X)\}$, 即 $G(X)$.

(2) $G(X \cap pr_1 G) = \{y | (\exists x)((x, y) \in G \text{ 与 } x \in X \text{ 与 } x \in pr_1 G)\}$, 根据补充定理29, $(x, y) \in G \Rightarrow x \in pr_1 G$, 故其等于 $\{y | (\exists x)((x, y) \in G \text{ 与 } x \in X)\}$, 即 $G(X)$.

习题 56.

求证: 如果 $Y \cap Y' = \emptyset$, 则 $(Y' \times Z) \circ (X \times Y) = \emptyset$; 如果 $Y \cap Y' \neq \emptyset$, 则 $(Y' \times Z) \circ (X \times Y) = X \times Z$.

证明: $(x, z) \in (Y' \times Z) \circ (X \times Y) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in X \text{ 与 } y \in Y \text{ 与 } y \in Y' \text{ 与 } z \in Z)$, 根据补充定理23 (2), 等价于 $(x \in X \text{ 与 } z \in Z) \text{ 与 } (\exists y)(y \in (Y \cap Y'))$, 等价于 $(x, z) \in X \times Z \text{ 与 } (\exists y)(y \in (Y \cap Y'))$. 得证.

习题 57.

$(G_i)_{i \in I}$ 为图族, 求证: 对任意 X , $(\bigcup_{i \in I} G_i) \langle X \rangle = \bigcup_{i \in I} G_i \langle X \rangle$, 对任意 x , $(\bigcap_{i \in I} G_i) \langle \{x\} \rangle = \bigcap_{i \in I} G_i \langle \{x\} \rangle$, 并给出图 G, H 的例子, 使 $G \langle X \rangle \cap H \langle X \rangle \neq (G \cap H) \langle X \rangle$.

证明:

对于并集:

若 $y \in (\bigcup_{i \in I} G_i) \langle X \rangle$, 则存在 $x \in X$, 使 $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} G_i$, 故存在 $i \in I$, 使 $(x, y) \in G_i$, 因此 $y \in G_i \langle X \rangle$, 故 $y \in \bigcup_{i \in I} G_i \langle X \rangle$.

反过来, 若 $y \in \bigcup_{i \in I} G_i \langle X \rangle$, 则存在 $i \in I$, 使 $y \in G_i \langle X \rangle$, 故存在 $x \in X$, 使 $(x, y) \in G_i$, 因此 $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} G_i$, 故 $y \in (\bigcup_{i \in I} G_i) \langle X \rangle$.

对于交集:

若 $y \in (\bigcap_{i \in I} G_i) \langle \{x\} \rangle$, 则 $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} G_i$, 故对任意 $i \in I$, $(x, y) \in G_i$, 因此 $y \in G_i \langle \{x\} \rangle$, 故 $y \in \bigcap_{i \in I} G_i \langle \{x\} \rangle$.

反过来, 若 $y \in \bigcap_{i \in I} G_i \langle \{x\} \rangle$, 则对任意 $i \in I$, $y \in G_i \langle \{x\} \rangle$, 故 $(x, y) \in G_i$, 则 $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} G_i$, 因此 $y \in (\bigcap_{i \in I} G_i) \langle \{x\} \rangle$.

设 a, b, c 互不相等, 令 $G = \{(b, a), (a, b), (b, c)\}$, $H = \{(b, b), (b, a), (b, c)\}$, $X = \{a, b\}$, 则 $G \langle X \rangle \cap H \langle X \rangle = \{a, b, c\}$, $(G \cap H) \langle X \rangle = \{a, c\}$.

习题 58.

$(G_i)_{i \in I}$ 为图族, H 为图, 求证: $(\bigcup_{i \in I} G_i) \circ H = \bigcup_{i \in I} (G_i \circ H)$, $H \circ (\bigcup_{i \in I} G_i) = \bigcup_{i \in I} (H \circ G_i)$.

证明:

若 $(x, z) \in (\bigcup_{i \in I} G_i) \circ H$, 则存在 y , 使 $(x, y) \in H$, $(y, z) \in \bigcup_{i \in I} G_i$, 故对任意 $i \in I$, $(y, z) \in G_i$, 因此 $(x, z) \in G_i \circ H$, 故 $(x, z) \in \bigcup_{i \in I} (G_i \circ H)$.

反过来, 若 $(x, z) \in \bigcup_{i \in I} (G_i \circ H)$, 则对任意 $i \in I$, $(x, z) \in G_i \circ H$, 则存在 y , 使 $(x, y) \in H$, $(y, z) \in G_i$, 故 $(y, z) \in \bigcup_{i \in I} G_i$, 因此 $(x, z) \in (\bigcup_{i \in I} G_i) \circ H$.

同理可证 $H \circ (\bigcup_{i \in I} G_i) = \bigcup_{i \in I} (H \circ G_i)$.

习题 59.

G, H, H' 为图, 求证: 当且仅当 $(\forall H)(\forall H')((H \cap H') \circ G = (H \circ G) \cap (H' \circ G))$ 时, G 为函数图.

证明:

如果 G 为函数图, 设 $(x, z) \in (H \cap H') \circ G$, 则存在 y , 使 $(x, y) \in G$, $(y, z) \in H \cap H'$, 因此 $(x, z) \in (H \circ G) \cap (H' \circ G)$.

反过来, 如果 $(x, z) \in (H \circ G) \cap (H' \circ G)$, 则存在 y, y' , 使 $(x, y) \in G$, $(y, z) \in H$, $(x, y') \in G$, $(y', z) \in H'$. 由于 G 为函数图, 因此 $y = y'$, 故 $(x, z) \in (H \cap H') \circ G$.

如果 $(H \cap H') \circ G = (H \circ G) \cap (H' \circ G)$, 设 $(x, y) \in G$, $(x, y') \in G$, 令 $H = \{(y, z)\}$, $H' = \{(y', z)\}$, 如果 $y \neq y'$, 则 $H \cap H' = \emptyset$, 故 $(H \cap H') \circ G = \emptyset$. 但 $(x, z) \in (H \circ G) \cap (H' \circ G)$, 矛盾. 故 $y = y'$, 因此 G 为函数图.

习题 60.

G, H, K 为图, 求证: $(H \circ G) \cap K \subset (H \cap (K \circ G^{-1})) \circ (G \cap (H^{-1} \circ K))$.

证明: 若 $(x, z) \in (H \circ G) \cap K$, 则 $(x, z) \in K$, 且存在 y , 使 $(x, y) \in G$, $(y, z) \in H$. 则 $(x, y) \in H^{-1} \circ K$, 因此 $(x, y) \in (G \cap (H^{-1} \circ K))$. 同时, $(y, z) \in K \circ G^{-1}$, 因此 $(y, z) \in (H \cap (K \circ G^{-1}))$. 故 $(x, z) \in (H \cap (K \circ G^{-1})) \circ (G \cap (H^{-1} \circ K))$. 得证.

习题 61.

$H = (X_i)_{i \in I}$ 和 $G = (Y_k)_{k \in K}$ 都是 E 的覆盖,

(1) 如果 G 是 E 的划分, H 是比 G 更细的覆盖, 且对任意 $k \in K$, $Y_k \neq \emptyset$. 求证: 对任意 $k \in K$, 存在 $i \in I$, 使 $X_i \subset Y_k$.

(2) 写出 E 的两个覆盖 H 和 G , H 是比 G 更细的覆盖, 但(1)中的性质不成立.

(3) 写出 E 的两个划分 H 和 G , 对任意 $k \in K$, 存在 $i \in I$, 使 $X_i \subset Y_k$, 但 H 并不是比 G 更细的覆盖.

证明:

(1) 对任意 $k \in K$, 设 $x \in Y_k$, 故存在 $i \in I$, 使 $x \in X_i$, 由于 H 是比 G 更细的覆盖, 因此存在 $k' \in K$, 使 $X_i \subset Y_{k'}$. 假设 $k \neq k'$, 由于 G 是 E 的划分, 故 $Y_{k'} \cap Y_k = \emptyset$, 矛盾, 因此 $k = k'$, 故 $X_i \subset Y_k$.

(2) 设 a, b 互不相等, $E = \{a, b\}$, $H = \Delta_{\{E\}}$, $G = \Delta_{\{\{a\}, E\}}$.

(3) 设 a, b, c, d 互不相等, $E = \{a, b, c, d\}$, $H = \Delta_{\{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}}$, $G = \Delta_{\{\{a, b\}, \{c, d\}\}}$.

2.5 集族的乘积 (Produit d'une famille d'ensembles)

显式公理 3. 幂集公理

$(\forall X) \text{Coll}_Y(Y \subset X)$.

定义 59. 幂集 (ensemble des parties)

$\{Y | Y \subset X\}$ 称为 X 的幂集, 记作 $\mathcal{P}(X)$ 或 2^X .

补充定理 117.

- (1) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$;
- (2) $\mathcal{P}(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$.

证明:

- (1) 根据补充定理18 (2) 可证.
- (2) 根据补充定理18可证.

补充定理 118.

$$(X \subset Y) \Rightarrow (\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)).$$

证明: 设 $x \in \mathcal{P}(X)$, 则 $x \subset X$, 故 $x \subset Y$, 因此 $x \in \mathcal{P}(Y)$, 得证.

定义 60. 在子集上的规范扩展 (*extension canonique aux ensembles de parties*), 在子集上的逆扩展 (*extension réciproque aux ensembles de parties*)

令 F 为 A 到 B 的对应, 函数 $X \rightarrow F\langle X \rangle (X \in \mathcal{P}(A), F\langle X \rangle \in \mathcal{P}(B))$ 称为 F 在子集上的规范扩展, 记作 \hat{F} . 函数 $Y \rightarrow F^{-1}\langle Y \rangle (Y \in \mathcal{P}(B), F^{-1}\langle Y \rangle \in \mathcal{P}(A))$, 称为 F 在子集上的逆扩展.

补充定理 119.

- (1) 令 F 为 A 到 B 的对应, F' 为 B 到 C 的对应, 则 $F' \circ F$ 在子集上的规范扩展为 $\hat{F}' \circ \hat{F}$.
- (2) 令 F 为 A 到 B 的双射, 则 F^{-1} 在子集上的规范扩展为 $(\hat{F})^{-1}$.
- (3) Id_A 在子集上的规范扩展为 $Id_{\mathcal{P}(A)}$.

证明:

- (1) 根据定理16, $F' \circ F\langle X \rangle = F'\langle F\langle X \rangle \rangle$, 且定义域均为 $\mathcal{P}(A)$ 、到达域均为 $\mathcal{P}(C)$, 得证.
- (2) 根据补充定理78可证.
- (3) 根据补充定理66 (4) 可证.

定理 36.

- (1) 设 f 为 E 到 F 的满射, 则 \hat{f} 是 $\mathcal{P}(E)$ 到 $\mathcal{P}(F)$ 的满射.
- (2) 设 f 为 E 到 F 的单射, 则 \hat{f} 是 $\mathcal{P}(E)$ 到 $\mathcal{P}(F)$ 的单射.

证明:

- (1) 设 s 是 f 的右逆, 则 $f \circ s = Id_F$, 根据补充定理119 (1), $\hat{f} \circ \hat{s} = Id_{\mathcal{P}(F)}$, 得证.
- (2) 如果 $E = \emptyset$, 根据补充定理18 (2), $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$, 根据补充定理74 (2), \hat{f} 是单射. 如果 $E \neq \emptyset$, 设 r 是 f 的左逆, 则 $r \circ f = Id_E$, 根据补充定理119 (1), $\hat{r} \circ \hat{f} = Id_{\mathcal{P}(E)}$, 则 \hat{f} 是单射.

补充定理 120. 所有从一个集合到另一个集合的映射的图能够组成集合

(G 为图) 与 $(pr_1 G = E)$ 与 $(pr_2 G \subset F)$ 是 G 上的集合化公式.

证明: $(G \text{ 为图}) \text{ 与 } (pr_1 G = E) \text{ 与 } (pr_2 G \subset F) \Rightarrow G \subset E \times F$, 因此 $G \in \mathcal{P}(E \times F)$, 根据证明规则52得证.

定义 61. 映射的图的集合 (*ensemble des graphe d'applications*)

$\{G | (G \text{ 为图}) \text{ 与 } (pr_1 G = E) \text{ 与 } (pr_2 G \subset F)\}$ 称为 E 到 F 的映射的图的集合, 记作 F^E .

补充定理 121.

$$F^E \subset \mathcal{P}(E \times F).$$

证明: 设 $G \in F^E$, 则 $(G \text{ 为图}) \text{ 与 } (pr_1 G = E) \text{ 与 } (pr_2 G \subset F) \Rightarrow G \subset E \times F$, 因此 $G \in \mathcal{P}(E \times F)$, 得证.

补充定理 122. 所有从一个集合到另一个集合的映射能够组成集合

$(f \text{ 为 } A \text{ 到 } B \text{ 的映射})$ 是 f 上的集合化公式.

证明: $(f \text{ 的图}) \in A \times B$, 故 $f \in A \times B \times A \times B$, 根据证明规则52得证.

定义 62. 映射的集合 (*ensemble des applications*)

$\{f | f \text{ 为 } A \text{ 到 } B \text{ 的映射}\}$ 称为 A 到 B 的映射的集合, 记作 $\mathcal{F}(A; B)$.

补充定理 123.

$G \rightarrow (G, A, B)$ 是 A^B 到 $\mathcal{F}(A; B)$ 的双射.

证明: 对任意 $G \in A^B$, $(G, A, B) \in \mathcal{F}(A; B)$, 因此该映射的定义域是 A^B ; $G = G' \Leftrightarrow (G, A, B) = (G', A, B)$, 因此该对应是映射并且是单射; 对任意 $f \in \mathcal{F}(A; B)$, f 为 A 到 B 的映射, 并且 f 的图 $\in A \times B$, 因此该映射为满射. 得证.

定义 63. 映射的图的集合到映射的集合的规范映射 (*application canonique de ensemble des graphe d'applications dans ensemble des applications*)

A^B 到 $\mathcal{F}(A; B)$ 的映射 $G \rightarrow (G, A, B)$, 称为 A^B 到 $\mathcal{F}(A; B)$ 的规范映射.

定理 37.

(1) 令 u 为 A' 到 A 的满射, v 为 B' 到 B 的单射, f 为 A 到 B 的映射, 则 $f \rightarrow v \circ f \circ u$ ($f \in \mathcal{F}(A; B)$) 是单射.

(2) 令 u 为 A' 到 A 的单射, v 为 B' 到 B 的满射, f 为 A 到 B 的映射, 则 $f \rightarrow v \circ f \circ u$ ($f \in \mathcal{F}(A; B)$) 是满射.

证明:

(1) 令 s 为 u 的右逆, r 为 v 的左逆, 则 $r \circ (v \circ f \circ u) \circ s = Id_F \circ f \circ Id_E$, 即等于 f . 得证.

(2) 令 s 为 v 的右逆, r 为 u 的左逆, 则对任意 f , $v \circ (s \circ f \circ r) \circ u = Id_F \circ f \circ Id_E$, 即等于 f . 得证.

定理 38.

令 u 为 A' 到 A 的双射, v 为 B' 到 B 的双射, f 为 A 到 B 的映射, 则 $f \rightarrow v \circ f \circ u (f \in \mathcal{F}(A; B))$ 是双射.

证明: 根据定理37可证.

定理 39.

f 为 $B \times C$ 到 A 的映射, 令 g 为映射 $y \rightarrow f_y (y \in C, f_y \in \mathcal{F}(B; A))$, 则 $f \rightarrow g (f \in \mathcal{F}(B \times C; A), g \in \mathcal{F}(C; \mathcal{F}(B; A)))$ 为双射.

证明:

f 为 $B \times C$ 到 A 的映射, 则 f_y 是 B 到 A 的映射, 因此 $y \rightarrow f_y$ 是 C 到 $\mathcal{F}(B; A)$ 的映射.

反过来, 设 g 为 C 到 $\mathcal{F}(B; A)$ 的映射, 令二元函数 $f = (g(y))(x)$, 其定义域为 $B \times C$, 则当 $y \in C$ 时, $f_y = g(y)$. 同时, 设定义域为 $B \times C$ 的二元函数 f' 也满足 $f'_y = g(y)$, 则当 $y \in C$ 时, $f_y = f'_y$, 即当 $x \in B, y \in C$ 时, $f_y(x) = f'_y(x)$, 根据补充定理82 (2), $f = f'$, 即 f 是唯一的, 得证.

定义 64. 映射的集合之间的规范映射 (*application canonique entre deux ensembles des applications*)

f 为 $B \times C$ 到 A 的映射, 令 g 为映射 $y \rightarrow f_y (y \in C, f_y \in \mathcal{F}(B; A))$, 则 $f \rightarrow g (f \in \mathcal{F}(B \times C; A), g \in \mathcal{F}(C; \mathcal{F}(B; A)))$ 称为 $\mathcal{F}(B \times C; A)$ 到 $\mathcal{F}(C; \mathcal{F}(B; A))$ 的规范映射.

补充定理 124. 集族的乘积是集合

(F 为函数图)与 $(pr_1 F = I)$ 与 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)$ 是 F 上的集合化公式.

证明: $(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)$, 因此 $i \in I \Rightarrow F(i) \in \bigcup_{i \in I} X_i$, 根据补充定理65, $pr_2 F \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, 又因为 $pr_1 F = I$, 故 $F \subset I \times \bigcup_{i \in I} X_i$, 因此 $F \in \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i \in I} X_i)$, 根据证明规则52得证.

定义 65. 集族的乘积 (*produit d'une famille d'ensembles*), 因子 (*facteur*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $\{F | (F \text{ 为函数图}) \text{ 与 } (pr_1 F = I) \text{ 与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)\}$ 称为该集族的乘积, 记作 $\prod_i \in IX_i$. 当 $i \in I$ 时, X_i 称为乘积 $\prod_{i \in I} X_i$ 的指标 i 的因子.

补充定理 125.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $i \in I$, 则(对于 $F \in \prod_{i \in I} X_i$ 形式为 $F(i)$ 的对象集合) $\subset X_i$.

证明: $y \in (\text{对于 } F \in \prod_{i \in I} X_i \text{ 形式为 } F(i) \text{ 的对象集合}) \Leftrightarrow (\exists F)(y = F(i) \text{ 与 } F \in \prod_{i \in I} X_i)$, 因此 $y \in (\text{对于 } F \in \prod_{i \in I} X_i \text{ 形式为 } F(i) \text{ 的对象集合}) \Rightarrow (\exists F)(y = F(i) \text{ 与 } F(i) \in X_i)$, 故 $y \in (\text{对于 } F \in \prod_{i \in I} X_i \text{ 形式为 } F(i) \text{ 的对象集合}) \Rightarrow (\exists F)(y = F(i) \text{ 与 } y \in X_i)$, 故 $y \in (\text{对于 } F \in \prod_{i \in I} X_i \text{ 形式为 } F(i) \text{ 的对象集合}) \Rightarrow y \in X_i$, 得证.

定义 66. 坐标函数 (*fonction coordonnée*), 射影函数 (*fonction projection*), 坐标 (*coordonnée*), 射影 (*projection*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $i \in I$, 映射 $F \rightarrow F(i)$ ($F \in \prod_{i \in I} X_i, F(i) \in X_i$) 称为指标 i 的坐标函数或射影函数, 记作 pr_i , $pr_i(F)$ 可以简记为 $pr_i F$. 其中, $F(i)$ 称为 F 的指标 i 的坐标或射影.

定义 67. 乘积的子集的射影 (*projection d'une partie de la produit*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $A \subset \prod_{i \in I} X_i$, 则 $pr_i \langle A \rangle$ 称为 A 的指标 i 的射影.

补充定理 126.

$(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $A \subset \prod_{i \in I} X_i$, 则 $A \subset \prod_{i \in I} pr_i \langle A \rangle$.

证明: 设 $F \in A$, 则 F 为函数图、 $pr_1 F = I$, 且对任意 $i \in I$, $F(i) \in pr_i \langle A \rangle$, 即 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)$, 因此 $F \in \prod_{i \in I} pr_i \langle A \rangle$, 得证.

补充定理 127.

(1) $(X_i)_{i \in \emptyset}$ 的乘积为 $\{\emptyset\}$.

(2) $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, 如果存在 $i \in I$, 使 $X_i = \emptyset$, 则 $(X_i)_{i \in I}$ 的乘积为 \emptyset .

证明:

(1) 一方面, \emptyset 为函数图且 $pr_1 \emptyset = \emptyset$. 另一方面, 设 $F \in \prod_{i \in \emptyset} X_i$, 则 $pr_1 F = \emptyset$, 因此 $F = \emptyset$, 得证.

(2) 根据定义可证.

补充定理 128.

$(X_i)_{i \in I}$ 为集族, 如果 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i = E)$, 则 $\prod_{i \in I} X_i = E^I$.

证明: $F \in \prod_{i \in I} X_i \Leftrightarrow ((F \text{ 为函数图}) \text{ 与 } (pr_1 F = I) \text{ 与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in E))$, 如果 $F \in \prod_{i \in I} X_i$, 则 $pr_1 F = I$ 、 $pr_2 F \subset E$, 则 $F \in E^I$.

反过来, 如果 $F \in E^I$, 则 F 为 I 到 E 的映射的图, 根据补充定理 64 (3), $i \in I \Rightarrow F(i) \in E$, 故 $F \in \prod_{i \in I} X_i$. 得证.

补充定理 129.

$(X_i)_{i \in I}$ 为集族, 如果 $\bigcup_{i \in I} X_i \subset E$, 则 $\prod_{i \in I} X_i \subset E^I$.

证明: $F \in \prod_{i \in I} X_i \Leftrightarrow ((F \text{ 为函数图}) \text{ 与 } (pr_1 F = I) \text{ 与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i))$, 由于 $\bigcup_{i \in I} X_i \subset E$, 故对任意 $i \in I$, 均有 $X_i \subset E$, 因此 $F \in \prod_{i \in I} X_i \Rightarrow ((F \text{ 为函数图}) \text{ 与 } (pr_1 F = I) \text{ 与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in E))$, 根据补充定理 128, $F \in \prod_{i \in I} X_i \Rightarrow F \in E^I$, 得证.

补充定理 130.

$\prod_{i \in \{a\}} X_i = X_a^{\{a\}}$, 且指标 i 的坐标函数为 $X_a^{\{a\}}$ 到 X_a 的双射.

证明: 如果 $i \in \{a\}$, 则 $i = a$, $X_i = X_a$, 根据补充定理128, $\prod_{i \in \{a\}} X_i = X_a^{\{a\}}$. 设 $F \in X_a^{\{a\}}$, $F' \in X_a^{\{a\}}$, 且 $F(a) = F'(a)$, 则 $i \in \{a\} \Rightarrow F(i) = F'(i)$, 故 $F = F'$. 对任意 $b \in X_a$, 令 F 为 $\{(a, b)\}$, 则 $F \in X_a^{\{a\}}$, 且 $F(a) = b$. 故 $F \rightarrow F(a)$ ($F \in X_a^{\{a\}}, F(a) \in X_a$)为双射.

定义 68. 乘积和集合之间的规范映射 (application canonique entre le produit et un ensemble)

$\prod_{i \in \{a\}} X_i$ 的指标 i 的坐标函数, 称为 $X_a^{\{a\}}$ 到 X_a 的规范映射, 其逆映射称为 X_a 到 $X_a^{\{a\}}$ 的规范映射.

补充定理 131.

如果 $a \neq b$, 则 $\prod_{i \in \{a, b\}} X_i = \{F | (\exists x)(\exists y)(x \in X_a \text{ 与 } y \in X_b \text{ 与 } F = \{(a, x), (b, y)\})\}$, 并且, $(x, y) \rightarrow \{(a, x), (b, y)\}$ 是 $X_a \times X_b$ 到 $\prod_{i \in \{a, b\}} X_i$ 的双射.

证明:

$(\exists x)(\exists y)(x \in X_a \text{ 与 } y \in X_b \text{ 与 } F = \{(a, x), (b, y)\}) \Rightarrow pr_1 F = (a, b) \text{ 与 } pr_2 F \subset X_a \cup X_b$, 因此, 其为 F 上的集合化公式.

$\prod_{i \in \{a, b\}} X_i = \{F | (F \text{ 为函数图}) \text{ 与 } (pr_1 F = \{a, b\}) \text{ 与 } F(a) \in X_a \text{ 与 } F(a) \in X_b\}$. 如果 $(\exists x)(\exists y)(x \in X_a \text{ 与 } y \in X_b \text{ 与 } F = \{(a, x), (b, y)\})$, 显然 $F \in \prod_{i \in \{a, b\}} X_i$.

反过来, 如果 $F \in \prod_{i \in \{a, b\}} X_i$, 则 F 为函数图, 设 $(u, v) \in F$, 则 $u = a$ 或 $u = b$, 如果 $u = a$, 则 $v = f(a)$, 如果 $u = b$, 则 $v = f(b)$, 因此 $F = \{(a, f(a)), (b, f(b))\}$, 又因为 $x \in X_a$ 与 $y \in X_b$, 故 $(\exists x)(\exists y)(x \in X_a \text{ 与 } y \in X_b \text{ 与 } F = \{(a, x), (b, y)\})$.

综上, $\prod_{i \in \{a, b\}} X_i = \{F | (\exists x)(\exists y)(x \in X_a \text{ 与 } y \in X_b \text{ 与 } F = \{(a, x), (b, y)\})\}$.

因此, $(x, y) \rightarrow \{(a, x), (b, y)\}$ 是 $X_a \times X_b$ 到 $\prod_{i \in \{a, b\}} X_i$ 的映射, 对任意 $F \in \prod_{i \in \{a, b\}} X_i$, $(\exists x)(\exists y)(x \in X_a \text{ 与 } y \in X_b \text{ 与 } F = \{(a, x), (b, y)\})$, 因此该映射为满射; 对于 $(x, y) \in X_a \times X_b$, $(x', y') \in X_a \times X_b$, 由于 $a \neq b$, 若 $\{(a, x), (b, y)\} = \{(a, x'), (b, y')\}$, 则 $x = x'$, $y = y'$, 故该映射为单射. 得证.

补充定理 132.

$\prod_{i \in I} \{a_i\} = \{(a_i)_{i \in I}\}$.

证明: $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } z = (i, a_i)) \Rightarrow z \in \times_{i \in I} \bigcup \{a_i\}$, 因此为 z 上的集合化公式. $F \in \prod_{i \in I} \{a_i\} \Leftrightarrow ((F \text{ 为函数图}) \text{ 与 } (pr_1 F = I) \text{ 与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) = a_i))$. 如果 $z \in F$, 则 $(\exists i)(i \in$

$I \sim z = (i, a_i)$, 则 z 为有序对, 故 F 为图; 若 $(x, y) \in F$ 、 $(x, y') \in F$, 则 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x = i \text{ 与 } y = a_i) \text{、} (\exists i)(i \in I \text{ 与 } x = i \text{ 与 } y' = a_i)$, 故 $y = y'$, 因此 F 为函数图; 同时, $(\exists y)((x, y) \in F) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x = i \text{ 与 } y = a_i)$, 等价于 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x = i)$, 等价于 $x \in I$, 故 $pr_1 F = I$; 此外, 若 $i \in I$, 则 $(i, a_i) \in F$, 同时 $F(i) = a_i$. 因此, $F \in \prod_{i \in I} \{a_i\}$.

反过来, 如果 $F \in \prod_{i \in I} \{a_i\}$, $F' \in \prod_{i \in I} \{a_i\}$, 则 $i \in I \Rightarrow F(i) = a_i$ 、 $i \in I \Rightarrow F'(i) = a_i$, 则 $i \in I \Rightarrow F(i) = F'(i)$, 因此 $F = F'$. 故 $x \in \prod_{i \in I} \{a_i\} \Rightarrow x = F$, 又 $F \in \prod_{i \in I} \{a_i\}$, 因此 $x \in \prod_{i \in I} \{a_i\} \Leftrightarrow x = F$, 得证.

补充定理 133.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $F \in \prod_{i \in I} X_i$, 则 $F = (F(i))_{i \in I}$.

证明: 由于 $(F$ 为函数图)与 $(pr_1 F = I)$ 与 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)$, 因此 $(x, y) \in F \Leftrightarrow x \in I$ 与 $y = F(x)$, $(x, y) \in (F(i))_{i \in I} \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I \text{ 与 } x = i \text{ 与 } y = F(i))$, 等价于 $x \in I$ 与 $y = F(x)$, 得证.

补充定理 134. 对角映射是单射

(1) $pr_1 z \in I$ 与 $pr_2 z = x$ 是 z 上的集合化公式.

(2) 令 G_x 表示图 $\{z | pr_1 z \in I \text{ 与 } pr_2 z = x\}$, 则 G_x 为函数图, 并且 $(\exists x)(x \in E \text{ 与 } G = G_x)$ 是 G 上的集合化公式. 同时, $\{G | (\exists x)(x \in E \text{ 与 } G = G_x)\} \subset E^I$, 且 $x \rightarrow G_x$ 是 E 到 E^I 的单射.

证明:

(1) $pr_1 z \in I$ 与 $pr_2 z = x \Rightarrow z \in I \times \{x\}$, 因此是集合化公式.

(2) 设 $a \in I$ 、 $b \in I$, 且 $(a, b) \in G_x$, $(a, b') \in G_x$, 则 $b = x$, $b' = x$, 故 G 为函数图. 而 $(\exists x)(x \in E \text{ 与 } G = G_x) \Rightarrow G \subset I \times E$, 因此 $G \in E^I$. 因此, $(\exists x)(x \in E \text{ 与 } G = G_x)$ 是 G 上的集合化公式, 且 $\{G | (\exists x)(x \in E \text{ 与 } G = G_x)\} \subset E^I$.

设 $x \in E$ 、 $x' \in E$, 若 $G_x = G_{x'}$, 则 $(\forall z)(pr_1 z \in I \text{ 与 } pr_2 z = x \Leftrightarrow pr_1 z \in I \text{ 与 } pr_2 z = x')$, 故 $x = x'$, 因此该映射为单射.

定义 69. 到映射的图的集合的对角映射 (*application diagonale dans ensemble des graphe d'applications*)

令 G_x 为函数图 $\{z | pr_1 z \in I \text{ 与 } pr_2 z = x\}$, 则映射 $x \rightarrow G_x (x \in E, G_x \in E^I)$ 称为对角映射.

定理 40.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, u 是 K 到 I 的双射, 其图为 U , 则映射 $F \rightarrow F \circ U$ 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{k \in K} X_{u(k)}$ 的双射.

证明：根据定理23， $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{k \in K} X_{u(k)}$ ，设其为 A ，根据定理37，映射 $F \rightarrow F \circ U$ ($F \in A^I$)为 A^I 到 A^K 的双射，根据补充定理75， $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{k \in K} X_{u(k)}$ 的映射 $F \rightarrow F \circ U$ 为单射。由于 u 为 K 到 I 的双射，因此，若对任意 $i \in I$ ， $F(i) \in X_i$ ，则对任意 k ，设 $k = u^{-1}(i)$ ，则 $F \circ U(k) \in X_{u(k)}$ ，反之，同理可证 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i) \Leftrightarrow (\forall k)(k \in K \Rightarrow F \circ U(k) \in X_{u(k)})$ 。因此，对于 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{k \in K} X_{u(k)}$ 的映射 $F \rightarrow F \circ U$ ，若 $F \circ U \in \prod_{k \in K} X_{u(k)}$ ，则 $F \in \prod_{i \in I} X_i$ ，故为满射，得证。

定义 70. 部分乘积 (*produit partiel*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族， $J \subset I$ ，则称 $\prod_{i \in J} X_i$ 为其部分乘积。

补充定理 135.

$(X_i)_{i \in I}$ 为集族， $J \subset I$ ， f 为函数，其图为 F ，且 $F \in \prod_{i \in I} X_i$ ，则 $F \circ \Delta_J$ 为 $f|J$ 的图。

证明：根据补充定理73 (2) 可证。

补充定理 136.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族， $J \subset I$ ， f 为函数，其图为 F ，且 $F \in \prod_{i \in I} X_i$ ，则 $F \circ \Delta_J \in \prod_{i \in J} X_i$ 。

证明：根据补充定理135， $F \circ \Delta_J$ 为 $f|J$ 的图。因此 $(x, y) \in F \circ \Delta_J \Leftrightarrow x \in J$ 与 $(x, y) \in F$ 。

设 $i \in J$ ，由于 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)$ ，故 $F(x) \in X_i$ ，根据补充定理73 (1)， $F \circ \Delta_J \in X_i$ ，即 $(\forall i)(i \in J \Rightarrow F \circ \Delta_J(i) \in X_i)$ ，同时，根据定理17， $F \circ \Delta_J$ 为函数图且定义域为 J ，根据定义， $F \circ \Delta_J \in \prod_{i \in J} X_i$ 。

定义 71. 指标集的子集的射影 (*projection de partie de ensemble des indices*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族， $J \subset I$ ， F 为函数图，则映射 $F \rightarrow F \circ \Delta_J$ ($F \in \prod_{i \in I} X_i, F \circ \Delta_J \in \prod_{i \in J} X_i$)称为指标 J 的射影，记作 pr_J 。

定理 41.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族， $J \subset I$ ，如果对任意 $i \in I$ ，均有 $X_i \neq \emptyset$ ，令 $A = \bigcup_{i \in I} X_i$ ，设 g 为 J 到 A 的映射，并且 $(\forall i)(i \in J \Rightarrow g(i) \in X_i)$ ，则存在映射 f ，为 g 在 I 上的延拓，

证明：对于 $i \in I - J$ ，令 $T_i = \tau_y(y \in X_i)$ ，由于 $X_i \neq \emptyset$ ，因此 $T_i \in X_i$ 。设 g 的图为 G ，令 $F = G \cup (\bigcup_{i \in I} -J(i, T_i))$ ，由于 $(\exists y)((x, y) \in G) \Leftrightarrow x \in I$ ，当 $x \in J$ 时， $(\exists y)((x, y) \in G)$ ，则 $(\exists y)((x, y) \in F)$ ，当 $x \in I - J$ 时， $(x, T_x) \in F$ ，当 $x \notin I$ 时， $(\exists y)((x, y) \in G)$ 为假，若存在 y 使 $(x, y) \in \bigcup_{i \in I-J} (i, T_i)$ ，则存在 $i \in I - J$ ，使 $(i, T_i) = (x, y)$ ，则 $x \in I$ ，矛盾。故 $pr_1 F = I$ 。类似可证 $pr_2 F \subset A$ 。令 $f = (F, I, A)$ ，则 f 和 g 在 J 上重合，故 f 为 g 在 I 上的延拓。

定理 42.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $J \subset I$, 如果对任意 $i \in I$, 均有 $X_i \neq \emptyset$, 则 pr_J 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{i \in J} X_i$ 的满射.

证明: 根据定理41可证.

定理 43.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $J \subset I$, 如果对任意 $i \in I$, 均有 $X_i \neq \emptyset$, 则对 $a \in I$, pr_a 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 X_a 的满射.

证明: 根据补充定理130, $\prod_{i \in J} X_{\{a\}} = X_a^{\{a\}}$, 根据定理42, $pr_{\{a\}}$ 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $X_a^{\{a\}}$ 的满射, 令其图为 G_1 .

同时, $pr_{\{a\}}$ 为 $F \rightarrow F \circ \{(a, a)\}$, 且 $F \circ \{(a, a)\} \in \prod_{i \in \{a\}} X_i$. 根据补充定理130, $\prod_{i \in \{a\}} X_i$ 的指标 i 的坐标函数为 $X_a^{\{a\}}$ 到 X_a 的满射, 令该函数为 g , 其图为 G_2 .

由于 $F \circ \{(a, a)\}(a) = F(a)$, 即对任意 $F \in \prod_{i \in I} X_i$, $(F, F \circ \{(a, a)\}) \in G_1$, $(F \circ \{(a, a)\}, F(a)) \in G_2$, 因此 $pr_a = g \circ pr_{\{a\}}$, 根据定理21 (2), pr_a 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 X_a 的满射.

定理 44.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, 则 $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I \text{ 与 } X_i = \emptyset)$.

证明: 如果 $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$, 假设 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \neq \emptyset)$, 设 $x \in X_a$, 根据定理43, 存在 $F \in \prod_{i \in I} X_i$, 使 $F(a) = x$, 矛盾, 故 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } X_i = \emptyset)$.

反过来, 如果 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } X_i = \emptyset)$, 假设 $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, 根据定理43, 对任意 $a \in I$, $pr_a(\prod_{i \in I} X_i) \subset X_a$, 则 $X_a \neq \emptyset$, 矛盾, 故 $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$.

定理 45.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 为有相同指标集 I 的集族, 如果 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \subset Y_i)$, 则 $\prod_{i \in J} X_i \subset \prod_{i \in J} Y_i$; 反过来, 如果 $\prod_{i \in J} X_i \subset \prod_{i \in J} Y_i$, 且对任意 $i \in I$, 均有 $X_i \neq \emptyset$, 则 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \subset Y_i)$.

证明: $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \subset Y_i)$, 则对任意 $F \in \prod_{i \in J} X_i$, $F(i) \in X_i \Rightarrow F(i) \in Y_i$, 故 $F \in \prod_{i \in J} Y_i$.

反过来, 根据定理43, 对任意 $a \in I$, $pr_a(\prod_{i \in J} X_i) = X_a$, $pr_a(\prod_{i \in J} Y_i) = Y_a$, 由于 $\prod_{i \in J} X_i \subset \prod_{i \in J} Y_i$, 因此 $pr_a(\prod_{i \in J} X_i) \subset pr_a(\prod_{i \in J} Y_i)$, 得证.

补充定理 137.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $\{a_i\}_{i \in I}$ 为有相同指标集 I 的集族，如果 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i \in X_i)$ ，则 $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ ；反过来，如果 $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ ，则 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i \in X_i)$ 。

证明：根据定理45可证。

定理 46. 乘积的结合律

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族， $(J_l)_{l \in L}$ 为 I 的划分，则映射 $f \rightarrow (pr_{J_l} f)_{l \in L}$ 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{l \in L} (\prod_{i \in J_l} X_i)$ 的双射。

证明：根据补充定理135， $pr_{J_l} f = f|_{J_l}$ 。设 $w \in \prod_{l \in L} (\prod_{i \in J_l} X_i)$ ，则当 $l \in L$ 时， $w(l) \in \prod_{i \in J_l} X_i$ ，即 $(w(l), J_l, \bigcup_{i \in J_l} X_i)$ 为映射，又因为 $J_l \subset I$ ，因此 $(w(l), J_l, \bigcup_{i \in I} X_i)$ 为映射，将其记为 v_l 。对于集族 $(v_l)_{l \in L}$ ，根据定理32，存在唯一的 I 到 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 的映射 u ，使对任意 $l \in L$ ， u 在 J_l 上的限制为 v_l 。得证。

补充定理 138.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族， $(J_l)_{l \in \{a, b\}}$ 为 I 的划分，则映射 $f \rightarrow (pr_{J_a} f, pr_{J_b} f)$ 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $(\prod_{i \in J_a} X_i) \times (\prod_{i \in J_b} X_i)$ 的双射。如果对任意 $i \in J_b$ ， X_i 均为单元元素集合，则 $f \rightarrow pr_{J_a} f$ 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{i \in J_a} X_i$ 的双射。

证明：根据定理46， $f \rightarrow (pr_{J_l} f)_{l \in \{a, b\}}$ 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{l \in \{a, b\}} (\prod_{i \in J_l} X_i)$ 的双射，令其为 f 。

根据补充定理131， $(x, y) \rightarrow \{(a, x), (b, y)\}$ 是 $\prod_{i \in J_a} X_i \times \prod_{i \in J_b} X_i$ 到 $\prod_{l \in \{a, b\}} (\prod_{i \in J_l} X_i)$ 的双射，令其为 g 。

则 $g^{-1} \circ f$ 即为映射 $f \rightarrow (pr_{J_a} f, pr_{J_b} f)$ ，前半部分得证。如果对任意 $i \in J_b$ ， X_i 均为单元元素集合，根据补充定理132，令 $\prod_{i \in J_b} X_i = \{y\}$ ，则对任意 $z \in (\prod_{i \in J_a} X_i) \times (\prod_{i \in J_b} X_i)$ ， $pr_2 z = y$ ，因此， $z \rightarrow pr_1 f$ 为 $(\prod_{i \in J_a} X_i) \times (\prod_{i \in J_b} X_i)$ 到 $\prod_{i \in J_a} X_i$ 的双射，后半部分得证。

补充定理 139.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 为集族，则映射 $f \rightarrow ((pr_1(pr_i f))_{i \in I}, (pr_2(pr_i f))_{i \in I})$ 为 $\prod_{i \in I} (X_i \times Y_i)$ 到 $(\prod_{i \in I} X_i) \times (\prod_{i \in I} Y_i)$ 的双射。

证明：

设 $f \in \prod_{i \in I} (X_i \times Y_i)$ ，则当 $i \in I$ 时， $f(i) \in X_i \times Y_i$ ，故 $pr_1 f(i) \in X_i$ ，因此 $(pr_1(pr_i f))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ ，同理 $(pr_2(pr_i f))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i$ ，故 $((pr_1(pr_i f))_{i \in I}, (pr_2(pr_i f))_{i \in I}) \in (\prod_{i \in I} X_i) \times (\prod_{i \in I} Y_i)$ 。

对任意 $x \in (\prod_{i \in I} X_i)$ ， $y \in (\prod_{i \in I} Y_i)$ ，设 f 为 $i \rightarrow (pr_i x, pr_i y)$ ，则 $(pr_1(pr_i f))_{i \in I} = (pr_i x)_{i \in I}$ ，根据补充定理133， $(pr_1(pr_i f))_{i \in I} = x$ ，同理 $(pr_2(pr_i f))_{i \in I} = y$ 。同时，当 $i \in I$ 时， $pr_i x \in X_i$ ， $pr_i y \in Y_i$ ，因此 $(pr_i x, pr_i y) \in X_i \times Y_i$ ，所以 $f \in \prod_{i \in I} (X_i \times Y_i)$ ，故该映射为满射。

对任意 $f \in \prod_{i \in I} (X_i \times Y_i)$, $f' \in \prod_{i \in I} (X_i \times Y_i)$, 若 $(pr_1(pr_i f))_{i \in I} = (pr_1(pr_i f'))_{i \in I}$, 令其为 A , 则对任意 $i' \in I$, $(i', pr_1 f(i')) \in A$, 因此 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } i = i' \text{ 与 } pr_1 f(i) = pr_1 f'(i))$, 因此 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_1 f(i) = pr_1 f'(i))$, 同理 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_2 f(i) = pr_2 f'(i))$, 故 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow f(i) = f'(i))$, 根据补充定理133, $f = f'$, 故该映射为单射. 得证.

定义 72. 两个集族乘积之间的规范映射 (*application canonique entre deux produits d'familles d'ensembles*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $(J_l)_{l \in L}$ 为 I 的划分, 则映射 $f \rightarrow (pr_{J_l} f)_{l \in L}$ 称为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{l \in L} (\prod_{i \in J_l} X_i)$ 的规范映射.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $(J_l)_{l \in \{a, b\}}$ 为 I 的划分, 则映射 $f \rightarrow (pr_{J_a} f, pr_{J_b} f)$ 称为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $(\prod_{i \in J_a} X_i) \times (\prod_{i \in J_b} X_i)$ 的规范映射.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 为集族, 则映射 $f \rightarrow ((pr_1(pr_i f))_{i \in I}, (pr_2(pr_i f))_{i \in I})$ 称为 $\prod_{i \in I} (X_i \times Y_i)$ 到 $(\prod_{i \in I} X_i) \times (\prod_{i \in I} Y_i)$ 的规范映射.

定理 47. 并集和交集的分配律

令 $((X_{l,i})_{i \in I})_{l \in L}$ 为集族, 且 $L \neq \emptyset$ 、 $(\forall l)(l \in L \Rightarrow J_l \neq \emptyset)$. 令 $I = \prod_{l \in L} J_l$, 则:

$$(1) \bigcup_{l \in L} \left(\bigcap_{i \in J_l} X_{l,i} \right) = \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{l \in L} X_{l,f(l)} \right).$$

$$(2) \bigcap_{l \in L} \left(\bigcup_{i \in J_l} X_{l,i} \right) = \bigcup_{f \in I} \left(\bigcap_{l \in L} X_{l,f(l)} \right).$$

证明:

(1) 设 $x \in \bigcup_{l \in L} \left(\bigcap_{i \in J_l} X_{l,i} \right)$, 则存在 $l \in L$, 使 $x \in \bigcap_{i \in J_l} X_{l,i}$, 因此对任意 $f \in I$, $x \in X_{l,f(l)}$, 即对任意 $f \in I$, $x \in \bigcup_{l \in L} X_{l,f(l)}$, 因此 $x \in \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{l \in L} X_{l,f(l)} \right)$.

反过来, 设 $x \notin \bigcup_{l \in L} \left(\bigcap_{i \in J_l} X_{l,i} \right)$, 则对任意 $l \in L$, $x \notin \bigcap_{i \in J_l} X_{l,i}$, 即对任意 $l \in L$, 存在 J_l , 使 $i \in J_l$ 且 $x \notin X_{l,i}$. 由于 $i \in J_l$ 与 $x \notin X_{l,i}$ 为集合化公式, 可令 $J'_l = \{i | i \in J_l \text{ 与 } x \notin X_{l,i}\}$, 根据定理43, 存在函数图 f , 定义域为 I , 且对任意 $l \in L$, $f(l) \in J'_l$. 因此 $f \in I$, 且对任意 $l \in L$, $x \notin X_{l,f(l)}$. 则 $x \notin \bigcup_{l \in L} X_{l,f(l)}$, 故 $x \notin \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{l \in L} X_{l,f(l)} \right)$, 得证.

(2) 令 $A = \bigcup_{l \in L} \left(\bigcup_{i \in J_l} X_{l,i} \right)$, 令 $Y_{l,i} = \mathbb{C}_A X_{l,i}$, 根据定理29、定理47 (1) 可证.

定理 48.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_k)_{k \in K}$ 为集族, 则:

$$(1) \text{ 若 } I \neq \emptyset, K \neq \emptyset, \text{ 则 } \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \cup \left(\bigcap_{k \in K} Y_k \right) = \bigcap_{(i,k) \in I \times K} (X_i \cup Y_k).$$

$$(2) \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \cap \left(\bigcup_{k \in K} Y_k \right) = \bigcup_{(i,k) \in I \times K} (X_i \cap Y_k).$$

证明: 令 $L = \{a, b\}$, $J_a = I$, $J_b = K$. 根据补充定理131, 存在 $\prod_{i \in \{a, b\}} J_i$ 到 $A \times B$ 的双射, 令其为 f , 根据定理47可证.

定理 49. 并集和交集对乘积的分配律

令 $((X_{l,i})_{i \in I})_{l \in L}$ 为集族, $I = \prod_{l \in L} J_l$, 则:

$$(1) \prod_{l \in L} (\bigcup_{i \in J_l} X_{l,i}) = \bigcup_{f \in I} (\prod_{l \in L} X_{l,f(l)}).$$

$$(2) \text{ 若 } L \neq \emptyset, (\forall l)(l \in L \Rightarrow J_l \neq \emptyset), \text{ 则 } \prod_{l \in L} (\bigcap_{i \in J_l} X_{l,i}) = \bigcap_{f \in I} (\prod_{l \in L} X_{l,f(l)}).$$

证明:

(1) 若 $L = \emptyset$, 左边 = $\{\emptyset\}$, 右边 = $\{\emptyset\}$; 若存在 $l \in L$, 使 $J_l = \emptyset$, 则左边 = \emptyset , 右边 = \emptyset .

在其他情况下, 设 $g \in \prod_{l \in L} (\bigcup_{i \in J_l} X_{l,i})$, 则对任意 $l \in L$, 存在 $i \in J_l$, 使 $g(l) \in X_{l,i}$. 由于 $i \in J_l$ 与 $g(l) \in X_{l,i}$ 是 i 上的集合化公式, 令 $H_l = \{i | i \in J_l \text{ 与 } g(l) \in X_{l,i}\}$, 则 $H_l \neq \emptyset$. 令 $f = \bigcup_{l \in L} (i, \tau_y(y \in H_l))$, 则 f 为函数图且对任意 $l \in L$, $f(l) \in H_l$, 且 $f \in I$. 因此 $g(l) \in X_{l,f(l)}$, 故 $g \in \prod_{l \in L} X_{l,f(l)}$, 因此 $g \in \bigcup_{f \in I} (\prod_{l \in L} X_{l,f(l)})$.

反过来, 如果 $g \in \bigcup_{f \in I} (\prod_{l \in L} X_{l,f(l)})$, 则存在 $f \in I$, 使 $g \in \prod_{l \in L} X_{l,f(l)}$, 因此对任意 $l \in L$, 均有 $g(l) \in X_{l,f(l)}$, 由于 $f(l) \in J_l$, 因此 $g(l) \in \bigcup_{i \in J_l} X_{l,i}$, 故 $g \in \prod_{l \in L} (\bigcup_{i \in J_l} X_{l,i})$. 得证.

(2) 类似定理49 (1) 可证.

定理 50.

如果对任意 $l \in L$, 集族 $(X_{l,i})_{i \in J_l}$ 为 $\bigcup_{i \in J_l} X_{l,i}$ 的划分, 则集族 $(\prod_{l \in L} X_{l,f(l)})_{f \in I}$ 是 $\prod_{l \in L} (\bigcup_{i \in J_l} X_{l,i})$ 的划分.

证明: 令 $P_f = \prod_{l \in L} X_{l,f(l)}$. 设 $f \in I$, $g \in I$, 且 $f \neq g$, 则存在 $l \in L$, 使 $f(l) \neq g(l)$, 故 $X_{l,f(l)} \cap X_{l,g(l)} = \emptyset$, 如果 $P_f \cap P_g \neq \emptyset$, 则令 $G \in P_f \cap P_g$, 因此 $G(l) \in X_{l,f(l)}$, $G(l) \in X_{l,g(l)}$, 矛盾. 因此, $P_f \cap P_g = \emptyset$, 得证.

定理 51.

令 $(X_i)_{i \in I}$, $(Y_k)_{k \in K}$ 为集族, 则:

$$(1) (\bigcup_{i \in I} X_i) \times (\bigcup_{k \in K} Y_k) = \bigcup_{(i,k) \in I \times K} (X_i \times Y_k).$$

$$(2) \text{ 若 } I \neq \emptyset, K \neq \emptyset, \text{ 则 } (\bigcap_{i \in I} X_i) \times (\bigcap_{k \in K} Y_k) = \bigcap_{(i,k) \in I \times K} (X_i \times Y_k).$$

证明: 类似定理48的证明, 根据定理49可证.

定理 52.

令 $(X_{i,k})_{(i,k) \in I \times K}$ 为集族, $K \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{k \in K} (\prod_{i \in I} X_{i,k}) = \prod_{i \in I} (\bigcap_{k \in K} X_{i,k})$.

证明:

$f \in \bigcap_{k \in K} (\prod_{i \in I} X_{i,k}) \Leftrightarrow (\forall k)(k \in K \Rightarrow f \in \prod_{i \in I} X_{i,k})$. 等价于 (f 为函数图) 与 (f 的定义域为 I) 与 $(\forall k)(\forall i)(k \in K \text{ 与 } i \in I \Rightarrow f(i) \in X_{i,k})$.

另一方面, $f \in \prod_{i \in I} (\bigcap_{k \in K} X_{i,k}) \Leftrightarrow (f \text{ 为函数图}) \text{ 与 } (f \text{ 的定义域为 } I) \text{ 与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow f(i) \in \bigcap_{k \in K} X_{i,k})$, 等价于 $(f \text{ 为函数图}) \text{ 与 } (f \text{ 的定义域为 } I) \text{ 与 } (\forall k)(\forall i)(k \in K \text{ 与 } i \in I \Rightarrow f(i) \in X_{i,k})$, 得证.

定理 53.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 为指标集相同的集族, 且 $I \neq \emptyset$, 则:

- (1) $(\prod_{i \in I} X_i) \cap (\prod_{i \in I} Y_i) = \prod_{i \in I} (X_i \cap Y_i)$.
- (2) $(\prod_{i \in I} X_i) \times (\prod_{i \in I} Y_i) = \prod_{i \in I} (X_i \times Y_i)$.

证明: 类似定理48的证明, 根据定理52可证.

补充定理 140.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 为指标集相同的集族. 对任意 $i \in I$, g_i 为 X_i 到 Y_i 的映射. 对任意 $f \in \prod_{i \in I} X_i$, 令 u_f 为映射 $i \rightarrow g_i(f(i)) (i \in I)$, 则 $u_f \in \prod_{i \in I} Y_i$.

证明: 对任意 $f \in \prod_{i \in I} X_i$ 、任意 $i \in I$, $g_i(f(i)) \in Y_i$, 故 $u_f \in \prod_{i \in I} Y_i$.

定义 73. 映射族在乘积上的规范扩展 (*extension canonique de famille d'applications aux produit*), 映射族的乘积 (*produit de famille d'applications*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 为指标集相同的集族, $(g_i)_{i \in I}$ 为函数族, 且对任意 $i \in I$, g_i 为 X_i 到 Y_i 的映射. 对任意 $f \in \prod_{i \in I} X_i$, 令 u_f 为映射 $i \rightarrow g_i(f(i)) (i \in I)$ 的图, 则映射 $f \rightarrow u_f (f \in \prod_{i \in I} X_i, u_f \in \prod_{i \in I} Y_i)$ 称为映射族 $(g_i)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展, 或称为映射族的乘积.

定理 54.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 、 $(Z_i)_{i \in I}$ 为指标集相同的集族, $(g_i)_{i \in I}$ 、 $(g'_i)_{i \in I}$ 为指标集相同的函数族, 且对任意 $i \in I$, g_i 为 X_i 到 Y_i 的映射, g'_i 为 Y_i 到 Z_i 的映射. 设 g 和 g' 分别为 $(g_i)_{i \in I}$ 和 $(g'_i)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展, 则 $g' \circ g$ 为 $(g'_i \circ g_i)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展.

证明: 根据定义可证.

补充定理 141.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $\prod_{i \in I} X_i = A$, 则 $(Id_{x_i})_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展为 Id_A .

证明: 令 u_f 为映射 $i \rightarrow Id_{x_i}(f(i)) (i \in I)$ 的图, 即为映射 $i \rightarrow f(i)$ 的图, 因此, $u_f = f$, 得证.

定理 55.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 、 $(Y_i)_{i \in I}$ 为指标集相同的集族, $(g_i)_{i \in I}$ 为函数族, 且对任 $i \in I$, g_i 为 X_i 到 Y_i 的单射 (或满射), 则 $(g_i)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{i \in I} Y_i$ 的单射 (或满射).

证明:

如果存在 $i' \in I$, 使 $X'_{i'} = \emptyset$, 则 $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$. 如果对任意 $i \in I$, g_i 均为单射, 其在乘积上的规范扩展为 $(\emptyset, \emptyset, \prod_{i \in I} Y_i)$, 是单射. 如果对任意 $i \in I$, g_i 均为满射, 则 $Y'_{i'} = \emptyset$, 故 $\prod_{i \in I} Y_i = \emptyset$, 因此其在乘积上的规范扩展为 $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, 是满射.

如果对任意 $i \in I$, 均有 $X_i \neq \emptyset$:

对于单射的情况, 令 r_i 为 g_i 的左逆, r 为 $(r_i)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展, 根据定理 54, $r \circ g$ 为 $(Id_{x_i})_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展, 根据补充定理 140, 即 $Id_{\prod_{i \in I} X_i}$, 其为双射, 故 $(g_i)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展为 $\prod_{i \in I} X_i$ 到 $\prod_{i \in I} Y_i$ 的单射.

对于满射的情况, 令 s_i 为 g_i 的右逆, 同理可证.

补充定理 142.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, f 为 E 到 $\prod_{i \in I} X_i$ 的映射, \tilde{f} 为 $(pr_i \circ f)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展, d 为 E 到 E^I 的对角映射, 则 $f = \tilde{f} \circ d$.

证明: 设 $x \in E$, 则 $d(x) = \{z | pr_1 z \in I \text{ 与 } pr_2 z = x\}$, $\tilde{f} \circ d(x)$ 为映射 $i \rightarrow pr_i \circ f(x) (i \in I)$, 即为映射 $i \rightarrow (f(x))(i) (i \in I)$, 即为映射 $f(x)$, 得证.

补充定理 143.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $(f_i)_{i \in I}$ 为函数族, 且对任意 $i \in I$, f_i 为 E 到 X_i 的映射, \tilde{f} 为 $(f_i)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展, d 为 E 到 E^I 的对角映射, 则对任意 $i \in I$, $pr_i \circ (\tilde{f} \circ d) = f_i$.

证明: 设 $x \in E$, 则 $d(x) = \{z | pr_1 z \in I \text{ 与 } pr_2 z = x\}$, $\tilde{f} \circ d(x)$ 为映射 $i \rightarrow f_i(x)$, 故 $pr_i \circ (\tilde{f} \circ d) = f_i$.

补充定理 144.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $(f_i)_{i \in I}$ 为函数族, 且对任意 $i \in I$, f_i 为 E 到 X_i 的映射, \tilde{f} 为 $(f_i)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展, 则 $f \rightarrow \tilde{f}$ 为 $(\prod_{i \in I} X_i)^E$ 到 $\prod_{i \in I} (X_i^E)$ 的双射.

证明: 根据补充定理 142、补充定理 143 可证.

定义 74. 积和映射的图的集合之间的规范映射 (*application canonique entre le produit et la ensemble des graphe d'applications*)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为集族, f 为 E 到 $\prod_{i \in I} X_i$ 的映射, 令 \tilde{f} 为 $(pr_i \circ f)_{i \in I}$ 在乘积上的规范扩展, 则称映射 $f \rightarrow \tilde{f}$ 为 $(\prod_{i \in I} X_i)^E$ 到 $\prod_{i \in I} (X_i^E)$ 的规范映射, 其逆映射为 $\prod_{i \in I} (X_i^E)$ 到 $(\prod_{i \in I} X_i)^E$ 的规范映射.

习题 62.

$(X \subset Y) \Rightarrow (\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)).$

证明：即补充定理118.

习题 63.

f 为 $\mathcal{P}(E)$ 到 $\mathcal{P}(E)$ 的映射, 且 $(\forall X)(\forall Y)(X \in \mathcal{P}(E) \text{ 与 } Y \in \mathcal{P}(E) \text{ 与 } X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y))$. 令 $V = \bigcap_{Z \subset E \text{ 与 } f(Z) \subset Z} Z$, $W = \bigcup_{Z \subset E \text{ 与 } Z \subset f(Z)} Z$, 求证: $V = f(V)$, $W = f(W)$, 并且, $(\forall Z)(Z \subset E \text{ 与 } f(Z) = Z \Rightarrow V \subset Z \text{ 与 } Z \subset W)$.

证明: 对任意 $Z \in \{Z | Z \subset E \text{ 与 } f(Z) \subset Z\}$, 都有 $V \subset Z$, 因此 $f(V) \subset f(Z)$, 则 $f(V) \subset Z$, 故 $f(V) \subset V$, 因此 $f(f(V)) \subset f(V)$, 故 $f(V) \in \{Z | Z \subset E \text{ 与 } f(Z) \subset Z\}$, 因此 $V \subset f(V)$, 综上, $V = f(V)$. 同理可证 $W = f(W)$.

此外, $f(Z) = Z$, 则 $Z \in \{Z | Z \subset E \text{ 与 } f(Z) \subset Z\}$ 、 $Z \in \{Z | Z \subset E \text{ 与 } Z \subset f(Z)\}$, 根据定义 $V \subset Z$ 与 $Z \subset W$.

习题 64.

$(X_i)_{i \in I}$ 为集族, $I \neq \emptyset$, 而集族 $(Y_i)_{i \in I}$ 满足 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow Y_i \subset X_i)$, 求证: $\prod_{i \in I} Y_i = \bigcap_{i \in I} pr_i^{-1}(Y_i)$.

证明:

设 $f \in \prod_{i \in I} Y_i$, 则对任意 $i \in I$, $pr_i f \in Y_i$. 故 $f \in pr_i^{-1}(Y_i)$, 因此 $f \in \bigcap_{i \in I} pr_i^{-1}(Y_i)$.

反过来, 设 $f \in \bigcap_{i \in I} pr_i^{-1}(Y_i)$, 则对任意 $i \in I$, $f \in pr_i^{-1}(Y_i)$, 因此 $pr_i f \in Y_i$, 且 f 是定义域为 I 的函数图, 故 $f \in \prod_{i \in I} Y_i$. 得证.

习题 65.

对任意 $G \subset A \times B$, 令 \tilde{G} 为 A 到 $\mathcal{P}(B)$ 的映射 $x \rightarrow G\langle\{x\}\rangle$, 求证: $G \rightarrow \tilde{G}$ 为 $\mathcal{P}(A \times B)$ 到 $(\mathcal{P}(B))^A$ 的双射.

证明: 对任意 A 到 $\mathcal{P}(B)$ 的映射 f , 令 $G = \bigcup_{x \in A} (\{x\} \times f(x))$, 则对任意 $x \in A$, $G\langle\{x\}\rangle = f(x)$; 设对任意 $x \in A$, $G'\langle\{x\}\rangle = f(x)$, 则 $G'\langle\{x\}\rangle = G\langle\{x\}\rangle$, 故 $\{y | (x, y) \in G\} = \{y | (x, y) \in G'\}$, 则 $G = G'$, 故 G 具有唯一性. 因此 $G \rightarrow f$ 为 $\mathcal{P}(A \times B)$ 到 $\mathcal{F}(A; \mathcal{P}(B))$ 的双射. 根据补充定理123, $\tilde{G} \rightarrow f$ 为 $(\mathcal{P}(B))^A$ 到 $\mathcal{F}(A; \mathcal{P}(B))$ 的双射. 根据定理21 (3)、21 (5) 得证.

习题 66.

设 $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ 为集族. 对任意 $[1, n]$ 的子集 H , 令 $P_H = \bigcup_{i \in H} X_i$, $Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i$. 令 F_k 为 $[1, n]$ 中元素数目为 k 的子集集合, 求证:

(1) 如果 $k \leq (n+1)/2$, 则 $\bigcap_{H \in F_k} P_H \subset \bigcup_{H \in F_k} Q_H$.

(2) 如果 $k \geq (n+1)/2$, 则 $\bigcup_{H \in F_k} Q_H \subset \bigcap_{H \in F_k} P_H$.

证明:

如果 $f \in I$, 根据定理47, $\bigcap_{H \in F_k} P_H = \bigcup_{f \in I} (\bigcap_{H \in F_k} X_f(H))$, 其中 $I = \prod_{H \in F_k} H$. 如果 $f \in I$, 则 $f(H) \in H$.

(1) 如果 $k \leq (n+1)/2$, 设 $x \in \bigcap_{f \in I} (\bigcup_{H \in F_k} X_f(H))$, 则存在 $f \in I$, 使 $x \in \bigcap_{H \in F_k} X_f(H)$. 假设 $pr_2 f$ 的元素数目小于 k , 则 $[1, n] - pr_2 f$ 的元素数目大于等于 k , 因此存在 $[1, n]$ 的 k 个元素的子集 H , 是 $[1, n] - pr_2 f$ 的子集, 因此 $H \cap pr_2 f = \emptyset$. 而 $f(H) \in H \cap pr_2 f$, 矛盾. 因此, 存在 k 个元素的子集 H , 即 $H \in F_k$, 使 $x \in \bigcap_{i \in H} X_i$. 因此, $x \in \bigcup_{H \in F_k} Q_H$.

(2) 如果 $k \geq (n+1)/2$, 设 $x \in \bigcup_{H \in F_k} Q_H$, 则存在 $H' \in F_k$, 使 $x \in \bigcap_{i \in H'} X_i$. 对任意 $H \in F_k$, $H \cap H' \neq \emptyset$, 根据定理44, $\prod_{H \in F_k} (H \cap H') \neq \emptyset$, 根据定理45, $\prod_{H \in F_k} (H \cap H') \subset I$. 因此存在 $f \in \prod_{H \in F_k} (H \cap H')$, 且 $f \in I$. 因此对任意 $H \in F_k$, $f(H) \in H \cap H'$, 即存在 $i \in H'$, 使 $i = f(H)$, 因此 $X_i = X_{f(H)}$, 由于 $X_{f(H)} \subset \bigcap_{i \in H'} X_i$, 故 $x \in X_{f(H)}$. 因而 $x \in \bigcap_{H \in F_k} X_{f(H)}$, 故 $x \in \bigcap_{H \in F_k} P_H$. 注: 习题66涉及尚未介绍的“自然数”知识.

2.6 等价关系 (Relations d'équivalence)

元数学定义 30. 对称性 (*symétrique*)

令 R 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 的公式, x, y, z 为不同的不是常数的字母, 且 R 不包含 z , 如果 $R \Rightarrow (x|z)(y|x)(z|y)R$, 则称 R 关于 x, y 具有对称性, 在没有歧义的情况下也可以简称 R 具有对称性.

注: $(x|z)(y|x)(z|y)R$ 即为将 R 中的 x, y 对换得到的公式.

元数学定义 31. 传递性 (*transitive*)

令 R 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 的公式, x, y, z 为不同的不是常数的字母, 且 R 不包含 z , 如果 R 与 $(y|x)(z|y)R \Rightarrow (z|y)R$, 则称 R 关于 x, y 具有传递性, 在没有歧义的情况下也可以简称 R 具有传递性.

元数学定义 32. 等价关系 (*relation d'équivalence*)

令 R 为包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 的公式, 如果 R 关于 x, y 具有对称性和传递性, 则称 R 为关于 x, y 的等价关系, 或称 x 模 R 等价于 y , 记作 $x \equiv y \pmod{R}$, 在没有歧义的情况下也可以简称 R 为等价关系.

补充证明规则 22.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, R 为关于 x, y 的等价关系, 则:

(1), 令 A 、 B 为项, 如果 A 不包含 y 、 B 不包含 x , 则 $(A|x)(B|y)$ 为关于 x 、 y 的等价关系;

(2) R 为关于 x 、 y 的等价关系, 令 u 、 v 为字母, 如果 R 不包含 u 、 v , 则 $(u|x)(v|y)R$ 为关于 u 、 v 的等价关系.

证明: 根据定义可证.

记号定义 18. 两个项的等价 (*équivalence de deux termes*)

R 为关于 x 、 y 的等价关系, 如果 A 不包含 y 、 B 不包含 x , 则 $(A|x)(B|y)R$ 记作 $A \equiv B(mod R)$.

补充证明规则 23.

如果公式 R 为关于 x 、 y 的等价关系, 则 $R \Rightarrow (y|x)R$ 与 $(x|y)R$.

证明: 令 z 为不同于 x 、 y 的不是常数的字母, 且 R 不包含 z . 如果 R 为真, 则 $(x|z)(y|x)(z|y)R$, 同时 R 与 $(y|x)(z|y)R \Rightarrow (z|y)R$. 因此 $(x|z)(y|x)(z|y)R \Rightarrow (x|z)(z|y)R$, 故 $(x|z)(z|y)R$, 即 $(y|x)R$. 因此, $(x|z)(y|x)(z|y)R$. 根据补充替代规则4, $(x|z)(y|x)(z|y)R$ 和 $(y|z)(x|y)(z|x)R$ 相同, 故同理可证 $(x|y)R$.

补充证明规则 24.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, R 、 S 均为关于 x 、 y 的等价关系, 则 “ $(R \text{ 与 } S)$ ” 为关于 x 、 y 的等价关系.

证明: 根据定义可证.

元数学定义 33. 反身性 (*réflexive*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为公式, x 、 y 为不同的不是常数的字母, 如果 $(x|y)R \Leftrightarrow x \in E$, 则称 R 关于 x 、 y 在 E 上具有反身性, 在没有歧义的情况下也可以简称 R 在 E 上具有反身性, 或简称 R 具有反身性.

元数学定义 34. 在集合上的等价关系 (*relation d'équivalence dans un ensemble*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x 、 y 的等价关系, 并且 R 关于 x 、 y 在 E 上具有反身性, 则称 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系, 在没有歧义的情况下也可以简称 R 为在 E 上的等价关系..

补充证明规则 25.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 公式 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系, 则 $R \Rightarrow x \in E$, $R \Rightarrow y \in E$.

证明: 根据补充证明规则23可证.

补充证明规则 26.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 公式 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系, 则 R 为生成图的公式.

证明: 根据补充证明规则25, $R \Rightarrow (x, y) \in E \times E$, 根据补充证明规则18可证.

定义 75. 等价图 (*graphe d'équivalence*)

G 为图, 如果 $(x, y) \in G$ 为在 E 上的等价关系, 则称 G 为在 E 上的等价图.

补充定理 145.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, $(G_i)_{i \in I}$ 为集族, 且 $(\forall I)(i \in I \Rightarrow G_i \text{ 为在 } E \text{ 上的等价图})$, 则 $\bigcap_{i \in I} G_i$ 为在 E 上的等价图.

证明:

如果 $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} G_i$, 则对任意 $i \in I$, $(x, y) \in G_i$, 因此 $(y, x) \in G_i$, 故 $(y, x) \in \bigcap_{i \in I} G_i$, 因此对称性成立.

同理可证传递性.

对任意 $i \in I$, $x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G_i$, 因此 $x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G_i$, 故反身性成立.

综上得证.

补充证明规则 27.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 如果公式 R 为关于 x 、 y 的等价关系, 则 $(\exists y)R \Leftrightarrow (x|y)R$, $(\exists x)R \Leftrightarrow (y|x)R$.

证明: 根据公理模式5, $(x|y)R \Rightarrow (\exists y)R$. 另一方面, 根据补充证明规则23, $(\exists y)R \Rightarrow (\exists y)(x|y)R$, 后者即 $(x|y)R$. 综上, 则 $(\exists y)R \Leftrightarrow (x|y)R$.

同理可证 $(\exists x)R \Leftrightarrow (y|x)R$.

补充证明规则 28.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 如果公式 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系, G 为其生成的图, 则: $x \in pr_1 G \Leftrightarrow (x|y)R$, $pr_1 G = E$, $y \in pr_2 G \Leftrightarrow (y|x)R$, $pr_2 G = E$.

证明: 根据补充证明规则27可证.

补充证明规则 29.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 公式 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系, G 为其生成的图, 则:

- (1) $x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G$;
- (2) $(x, y) \in G$ 与 $(y, z) \in G \Rightarrow (y, z) \in G$;
- (3) $(x, y) \in G \Rightarrow (x, x) \in G$ 与 $(y, y) \in G$.
- (4) $x \in E \Rightarrow x \in G(x)$.

证明：根据补充证明规则23可证。

补充证明规则 30.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中：

(1) 如果公式 R 、 S 均为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系，则“ R 与 S ”为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系。

(2) 如果公式 S 为关于 x 、 y 在 F 上的等价关系， f 为 E 到 F 的满射，则 $(f(y)|y)(f(x)|x)S$ 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系。

(3) 如果公式 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系， S 为关于 x 、 y 在 F 上的等价关系， f 为 E 到 F 的映射，则 R 与 $(f(y)|y)(f(x)|x)S$ 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系。

证明：

(1) 根据补充证明规则24可证。

(2) 对称性和传递性根据补充证明规则22 (1)、补充证明规则22 (2) 可证。根据替代规则2， $(f(x)|y)(f(x)|x)S$ 和 $(f(x)|x)(x|y)S$ 相同，故 $(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow f(x) \in F$ ，等价于 $x \in E$ ，得证。

(3) 对称性和传递性根据补充证明规则22 (1)、补充证明规则22 (2) 可证。根据替代规则2， $(f(x)|y)(f(x)|x)S$ 和 $(f(x)|x)(x|y)S$ 相同，故 R 与 $(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow x \in E$ 与 $f(x) \in F$ ，由于 $x \in E \Rightarrow f(x) \in F$ ，故 R 与 $(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow x \in E$ ，得证。

补充定理 146.

(1) $x = y$ 为等价关系，但不是在任何集合上的等价关系。

(2) $x = y$ 与 $x \in E$ 为在 E 上的等价关系。

(3) $(\exists F)(F \text{ 为 } X \text{ 到 } Y \text{ 的双射})$ 为等价关系，但不是在任何集合上的等价关系。

(4) $x \in E$ 与 $y \in E$ 为在 E 上的等价关系。

(5) 如果 $A \subset E$ ，则 $(x \in E - A \text{ 与 } y = x)$ 或 $(x \in A \text{ 与 } y \in A)$ 为在 E 上的等价关系。

(6) 令 f 为函数，其定义域为 E ，则公式“ $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $f(x) = f(y)$ ”为在 E 上的等价关系。

证明：根据定义可证以上各式的等价关系。

对于 $x = y$ 、 $(\exists F)(F \text{ 为 } X \text{ 到 } Y \text{ 的双射})$ ，根据补充定理10可以证明其不是在任何集合上的等价关系。

定义 76. 在集合上的等价对应 (*correspondance d'équivalence dans un ensemble*)

如果 F 为在 E 上的等价图，则 (F, E, E) 称为在 E 上的等价对应。

定理 56.

当且仅当同时满足下列三个条件时， X 到 X 的对应 F 为在 X 上的等价对应：

- 第一, X 为 F 的定义域;
- 第二, $F = F^{-1}$;
- 第三, $F \circ F = F$.

证明: 令 $F = (G, X, X)$. 如果 F 为在 X 上的等价对应, 则 $x \in X \Leftrightarrow (x, x) \in G$, 故 F 的定义域为 X ; 由于 $(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G$, 故 $F = F^{-1}$; 由于 $(x, y) \in G$ 与 $(y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \in G$, 故 $G \circ G \subset G$, 同时, $(x, y) \in G \Rightarrow (x, x) \in G$, 故 $(x, y) \in G \circ G$, 故 $G \subset G \circ G$, 因此 $G \circ G = G$.

反过来, 由于 $F = F^{-1}$, 因此 $(x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G$, 由于 $F \circ F = F$, 因此 $(x, y) \in G$ 具有传递性. 由于 F 的定义域为 X , 因此对于 $x \in X$, 存在 $(x, y) \in G$, 则 $(y, x) \in G$, 因此 $(x, x) \in G$; 同时, 如果 $(x, x) \in G$, 则 $x \in X$, 故 $(x, y) \in G$ 在 X 上具有反身性. 因此, F 为在 X 上的等价对应.

定义 77. 同函数相关的等价关系 (*relation d'équivalence associée à une fonction*)

令 f 为函数, 其定义域为 E , 其图为 F , 则公式 $(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } f(x) = f(y))$ 称为同 f 相关的等价关系.

补充定理 147.

如果 f 的图为 F , 则同 f 相关的等价关系生成的图为 $F^{-1} \circ F$.

证明: $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $f(x) = f(y) \Leftrightarrow (\exists z)((x, y) \in F \text{ 与 } (y, z) \in F)$, 进而等价于 $(\exists z)((x, y) \in F \text{ 与 } (y, z) \in F^{-1})$, 等价于 $(x, y) \in F^{-1} \circ F$, 得证.

元数学定义 35. 等价类 (*classe d'équivalence*), 代表 (*représentant*)

包含 2 元特别符号 \in 、显式公理 1、显式公理 2、显式公理 3 和公理模式 8 的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, R 生成的图为 G , 且 $x \in E$, 则称 $G(x)$ 为 x 关于 R 的等价类. 如果 $z \in (x \text{ 关于 } R \text{ 的等价类})$, 则称 z 为该等价类的代表.

补充证明规则 31.

包含 2 元特别符号 \in 、显式公理 1、显式公理 2、显式公理 3 和公理模式 8 的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, R 生成的图为 G , 且 $x \in E$, 则 $(x \text{ 关于 } R \text{ 的等价类}) \subset E$.

证明: 根据补充证明规则 25 可证.

补充证明规则 32.

包含 2 元特别符号 \in 、显式公理 1、显式公理 2、显式公理 3 和公理模式 8 的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, 则 $x \in (x \text{ 关于 } R \text{ 的等价类})$.

证明: 根据补充证明规则 29 (1) 可证.

补充证明规则 33.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, R 生成的图为 G , 则 $(\exists x)(x \in E \text{ 与 } X = G(x))$ 为关于 X 的集合化公式.

证明: 根据补充证明规则31, $(\exists x)(x \in E \text{ 与 } X = G(x)) \Rightarrow X \subset E$, 即 $x \in \mathcal{P}(E)$, 根据证明规则52得证.

元数学定义 36. 商集 (*ensemble quotient*), 到商集的规范映射 (*l'application canonique dans l'ensemble quotient*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, R 生成的图为 G , 则称 $\{X | (\exists x)(x \in E \text{ 与 } X = G(x))\}$ 为 E 除以 R 的商集, 记作 E/R . $x \rightarrow G(x)((x \in E, G(x) \in E/R)$ 称为 E 到 E/R 的规范映射.

补充证明规则 34.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, 则:

- (1) $E = \emptyset \Leftrightarrow E/R = \emptyset$;
- (2) 对任意 $X \in E/R$, $X \neq \emptyset$.

证明:

(1) 如果 $E = \emptyset$, 则 $x \in E$ 为假, 根据定义, $E/R = \emptyset$; 同时, 如果 $E \neq \emptyset$, 对任意 $x \in E$, $G(x) \in E/R$, 故 $E/R \neq \emptyset$, 得证.

(2) 令 R 生成的图为 G , 若 $X = \emptyset$, 则 $(\exists x)(x \in E \text{ 与 } \emptyset = G(x))$, 故 $(\exists x)(\emptyset = G(x))$, 但 $x \in G(x)$, 矛盾, 得证.

补充证明规则 35.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, 则 E 到 E/R 的规范映射为满射.

证明: 根据定义可证.

证明规则 55.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, p 为 E 到 E/R 的规范映射, 则 $R \Leftrightarrow (x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } p(x) = p(y))$.

证明: 令 R 生成的图为 G , 则 $R \Leftrightarrow (x, y) \in G$. 假设 $(x, y) \in G$, 则 $x \in E$ 与 $y \in E$, 且 $y \in G(x)$, 因此 $G(y) \subset G \circ G(x)$. 根据定理56, $G(y) \subset G(x)$. 同时, 由于 $(x, y) \in G$, 故 $(y, x) \in G$, 同理 $G(x) \subset G(y)$, 因此 $G(x) = G(y)$. 反过来, 假设 $G(x) = G(y)$, 由于 $y \in G(y)$, 故 $y \in G(x)$, 因此 $(x, y) \in G$.

补充证明规则 36.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系， p 为 E 到 E/R 的规范映射，则：

- (1) $(\forall x)(\forall y)(x \in E \Rightarrow (p(y) = p(x) \Leftrightarrow y \in p(x)))$;
- (2) $(\forall x)(\forall X)(x \in E \text{ 与 } X \in E/R \Rightarrow (X = p(x) \Leftrightarrow x \in X))$.

证明：

(1) 令 R 生成的图为 G ，在 $x \in E$ 的情况下，如果 $y \in p(x)$ ，则 $(x, y) \in G$ ，因此 $p(x) = p(y)$.

反过来，如果 $p(x) = p(y)$ ，根据补充证明规则32， $y \in p(y)$ ，故 $y \in p(x)$.

(2) 假设 $x \in E$ 、 $X \in E/R$ ，则存在 $y \in E$ ，使 $p(y) = X$ ，如果 $X = p(x)$ ，则 $p(x) = p(y)$ ，根据补充证明规则36 (1)， $x \in X$.

反过来，如果 $x \in X$ ，根据补充证明规则36 (1)， $p(x) = p(y)$ ，故 $p(x) = X$. 得证.

元数学定义 37. 集合对于公式的截面 (*section d'un ensemble pour une relation*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系， p 为 E 到 E/R 的规范映射，则 p 的右逆称为 E 对于 R 的截面.

补充证明规则 37.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系，则 $\Delta_{E/R}$ 为 E 的划分.

证明：如果 $E = \emptyset$ ，根据补充证明规则34 (1)， $E/R = \emptyset$ ， $\Delta_{\emptyset} = \emptyset$ ，根据划分的定义可证.

如果 $E \neq \emptyset$ ，设 R 生成的图为 G ， $X \in E/R$ ， $X' \in E/R$ ，设 $X = G(x)$ ， $X' = G(x')$ ，设 $a \in X \cap X'$ ，则 $(x, a) \in G$ ， $(x', a) \in G$ ，故 $(x, x') \in G$ ，因此 $G(x) = G(x')$ ，所以 $X = X'$. 同时，对任意 $x \in E$ ， $x \in G(x)$. 综上得证.

注： $\Delta_{E/R}$ 即集族 $(X)_{X \in E/R}$.

补充证明规则 38.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系，则：

- (1) $R \Leftrightarrow ((\exists X)(x \in X \text{ 与 } y \in X \text{ 与 } X \in E/R))$.
- (2) $X = G(x) \Leftrightarrow X \in E/R \text{ 与 } x \in X$.

证明：

(1) 设 R 生成的图为 G ，则 $R \Leftrightarrow (x, y) \in G$ ，如果 $(x, y) \in G$ ，则 $(\exists X)(x \in X \text{ 与 } X \in E/R)$. 若 $x \in X$ ，根据证明规则55，则 $G(y) = X$ ，故 $y \in X$ ，因此 $(\exists X)(x \in X \text{ 与 } y \in X \text{ 与 } X \in E/R)$.

反过来, 若 $(\exists X)(x \in X \text{ 与 } y \in X \text{ 与 } X \in E/R)$, 则 $x \in E$ 、 $y \in E$, 且 $G(x) = G(y)$, 根据证明规则55, $(x, y) \in G$.

(2) 如果 $X = G(x)$, 根据定义, $X \in E/R$ 、 $x \in X$. 反过来, 如果 $X \in E/R$ 、 $x \in X$, 由于 $G(x) \in E/R$, 如果 $X \neq G(x)$, 则 $X \bigcap_G (x) = \emptyset$, 矛盾, 故 $X = G(x)$.

补充定理 148.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的划分, 且 $i \neq \emptyset$, $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \neq \emptyset)$, 设 R 为 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i \text{ 与 } y \in X_i)$, 则 R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系, 且 $i \rightarrow X_i (i \in I)$ 为 I 到 E/R 的双射.

证明: $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i \text{ 与 } y \in X_i) \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I \text{ 与 } y \in X_i \text{ 与 } x \in X_i)$, 故该公式具有对称性. 若 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i \text{ 与 } y \in X_i)$ 、 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } y \in X_i \text{ 与 } z \in X_i)$, 设 $i \in I$ 、 $i' \in I$, $x \in X_i$ 与 $y \in X_i$, 使 $y \in X'_i$ 、 $z \in X'_i$, 故 $i = i'$, 因此 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i \text{ 与 } z \in X_i)$, 即该公式具有传递性. 若 $x \in E$, 则存在 i , 使 $(i \in I \text{ 与 } x \in X_i)$, 故反身性成立. 综上, R 为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系.

令 R 生成的图为 G , 对任意 $i \in I$, 设 $x \in X_i$, 则 $y \in G(x) \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i \text{ 与 } y \in X_i)$, 等价于 $y \in X_i$, 故 $G(x) = X_i$. 所以 $X_i \in E/R$, 即该映射到达域为 E/R . 对任意 $X \in E/R$, 设 $x \in X$, 故 $X = G(x)$, 同时存在 $i \in I$, 使 $x \in X_i$. 则 $X = X_i$, 故该映射为满射. 又因为 $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的划分, 且 $i \neq \emptyset$, $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \neq \emptyset)$, 故 $X_i = X'_i \Rightarrow i = i'$, 因此该映射为单射.

定义 78. 代表系统 (système de représentants)

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的划分, 且 $i \neq \emptyset$, $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \neq \emptyset)$, 设 R 为 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } x \in X_i \text{ 与 } y \in X_i)$, $S \subset E$, 且 $(\forall i)(\exists x)(S \cap X_i = \{x\})$, 则称 S 为 R 的等价类的代表系统.

元数学定义 38. 同等价关系相容的公式 (relation compatible avec une relation d'équivalence)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x 、 x' 在 E 上的等价关系, P 为公式:

如果 P 不包含 x' , 且 P 与 $R \Rightarrow (x'|x)P$, 则称 P 关于 x 同等价关系 R 相容, 在没有歧义的情况下也可以简称 P 同等价关系 R 相容;

如果 P 不包含 x' 、 y' , R 不包含 y 、 y' , 且 P 与 R 与 $(y|x)(y'|x')R \Rightarrow (x'|x)(y'|y)P$, 则称 P 关于 x 、 y 同等价关系 R 相容, 在没有歧义的情况下也可以简称 P 同等价关系 R 相容.

证明规则 56.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x 、 x' 在 E 上的等价关系, P 为公式, t 为字母, 如果 P 关于 x 同等价关系 R 相容, 则 $t \in E/R$ 与 $(\exists x)(x \in t \text{ 与 } P) \Leftrightarrow t \in E/R$ 与 $(\forall x)(x \in t \Rightarrow P)$.

证明：在 $t \in E/R$ 的情况下，如果 $(\exists x)(x \in t \text{ 与 } P)$ 为真，即存在 $a \in t$ ，使 $(a|x)P$ 、 $(x|x')(a|x)R$ 对一切 $x \in t$ 为真，故 P 对一切 $x \in t$ 为真，因此 $(\forall a)(a \in t \Rightarrow (a|x)P)$ ；反过来，若 $(\forall x)(x \in t \Rightarrow P)$ ，由于 $t \neq \emptyset$ ，则 $(\exists x)(x \in t \text{ 与 } P)$ 。得证。

补充证明规则 39.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 x' 在 E 上的等价关系， P 为公式， t 为字母，如果 R 不包含 y ，且 P 关于 x 、 y 同等价关系 R 相容，则 $t \in E/R$ 与 $u \in E/R$ 与 $(\exists x)(\exists y)(x \in t \text{ 与 } y \in u \text{ 与 } P) \Leftrightarrow t \in E/R$ 与 $u \in E/R$ 与 $(\forall x)(\forall y)(x \in t \text{ 与 } y \in u \Rightarrow P)$ 。

证明：类似证明规则56可证。

元数学定义 39. 通过商导出的公式 (*relation déduite par passage au quotient*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 x' 在 E 上的等价关系，且 $E \neq \emptyset$ ， P 为公式：

如果 P 关于 x 同等价关系 R 相容， t 为字母且 P 不包含 t ，则 $t \in E/R$ 与 $(\exists x)(x \in t \text{ 与 } P)$ 称为 P 关于 x 对于 R 通过商导出的公式，在没有歧义的情况下也可以简称为 P 对于 R 通过商导出的公式。

如果 R 不包含 y ，且 P 关于 x 、 y 同等价关系 R 相容， t 、 u 为字母且 P 不包含 t 、 u ，则 $t \in E/R$ 与 $u \in E/R$ 与 $(\exists x)(\exists y)(x \in t \text{ 与 } y \in u \text{ 与 } P)$ 称为 P 关于 x 、 y 对于 R 通过商导出的公式，在没有歧义的情况下也可以简称为 P 对于 R 通过商导出的公式。

补充证明规则 40.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 x' 在 E 上的等价关系， P 为公式， t 为字母：

(1) 如果 P 关于 x 同等价关系 R 相容， P' 为 P 为关于 x 对于 R 通过商导出的公式， f 为 E 到 E/R 的规范映射，则 $z \in E$ 与 $(f(z)|t)P' \Leftrightarrow z \in E$ 与 $(z|x)P$ 。

(2) 如果 R 不包含 y ，且 P 关于 x 、 y 同等价关系 R 相容， P' 为 P 为关于 x 、 y 对于 R 通过商导出的公式， f 为 E 到 E/R 的规范映射，则 $z \in E$ 与 $w \in E$ 与 $(f(z)|t)(f(w)|u)P' \Leftrightarrow z \in E$ 与 $w \in E$ 与 $(z|x)(w|y)P$ 。

证明：

(1) 若 $z \in E$ ，根据证明规则56， $(f(z)|t)P' \Leftrightarrow (\forall x)(x \in f(z) \Rightarrow P)$ 。如果 $(\forall x)(x \in f(z) \Rightarrow P)$ ，则 $(z|x)P$ 。反过来，如果 $(z|x)P$ ，根据证明规则56， $(\forall x)(x \in f(z) \Rightarrow P)$ 。得证。

(2) 类似补充证明规则40 (1) 可证。

元数学定义 40. 浸润子集 (*partie saturée*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， $A \subset E$ ，如果 $x \in A$ 关于 x 同等价关系 R 相容，则称 A 为 E 对于 R 的浸润子集。

补充证明规则 41.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， $A \subset E$ ，则：

(1) 如果 A 为 E 对 R 的浸润子集，则 $x \in A \Rightarrow G(x) \subset A$ 。

(2) $(\exists F)(F \subset E/R \text{ 与 } A = \bigcup_{X \in F} X) \Leftrightarrow (A \text{ 为 } E \text{ 对于 } R \text{ 的浸润子集})$ 。

证明：令 R 生成的图为 G 。

(1) 如果 A 为 E 对于 R 的浸润子集，则 $x \in A$ 与 $(x, y) \in G \Rightarrow y \in A$ 。对任意 $y \in G(x)$ ， $x \in A \Rightarrow y \in A$ ，因此 $x \in A \Rightarrow G(x) \subset A$ 。

(2) 假设存在 $F \subset E/R$ ，使 $A = \bigcup_{X \in F} X$ ，设 $x \in A$ ，则存在 $X \in F$ ，使 $x \in X$ ，则 $X \in E/R$ ，故 $X = G(x)$ 。对于 $(x, y) \in G$ ，可得 $y \in X$ ，故 $y \in A$ ，因此 A 为 E 对于 R 的浸润子集。

反过来，如果 A 为 E 对于 R 的浸润子集，则 $x \in A$ 与 $(x, y) \in G \Rightarrow y \in A$ 。令 $F = \{X | (X \in E/R \text{ 与 } X \cap A \neq \emptyset)\}$ ，故 $F \subset E/R$ 。当 $x \in A$ 时， $G(x) \in F$ ，故 $x \in \bigcup_{X \in F} X$ ；反过来，若 $x \in \bigcup_{X \in F} X$ ，则存在 $X \in F$ ，使 $x \in X$ ，因此 $X = G(x)$ ，根据补充证明规则41 (1)， $G(x) \subset A$ ，故 $x \in A$ 。因此， $(\exists F)(F \subset E/R \text{ 与 } A = \bigcup_{X \in F} X)$ 。注：本补充证明规则表明，当且仅当子集是若干个等价类的并集时，其为浸润子集。

补充证明规则 42.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， f 为 E 到 E/R 的规范映射， $A \subset E$ ，则 $f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle = A \Leftrightarrow (A \text{ 为 } E \text{ 对于 } R \text{ 的浸润子集})$ 。

证明：设 f 的图为 G 。如果 A 为 E 对于 R 的浸润子集，对任意 $x \in A$ ， $f\langle\{x\}\rangle = f(x)$ ，即等于 $G(x)$ ，设 $y \in E$ 且 $f(y) = G(x)$ ，根据证明规则55， $(x, y) \in G$ ，故 $y \in G(x)$ ，因此 $f^{-1}f\langle\{x\}\rangle \subset G(x)$ ，根据补充证明规则41 (1)， $f^{-1}f\langle\{x\}\rangle \subset A$ ，因此 $f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle \subset A$ ，根据补充定理50， $f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle = A$ 。另一方面，若 $f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle = A$ ，对任意 $x \in A$ ，则 $f(x) \in f\langle A \rangle$ 。令 $K = f(x)$ ，根据补充证明规则36 (1)， $y \in K \Leftrightarrow f(y) = K$ ，故 $f^{-1}\langle\{K\}\rangle = K$ ，因此 $K \subset f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle$ ，所以 $K \subset A$ 。因此， A 为 E 对于 R 的浸润子集。

补充证明规则 43.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的子集族， $(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \text{ 为 } E \text{ 对于 } R \text{ 的浸润子集})$ ，则 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 和 $\bigcap_{i \in I} X_i$ 都是 E 对于 R 的浸润子集。

证明：根据定理26、定理27、补充证明规则42可证。

补充证明规则 44.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， A 为 E 对于 R 的浸润子集，则 $\mathbb{C}_E A$ 也是 E 对于 R 的浸润子集。

证明：令 f 为 E 到 E/R 的规范映射，根据补充证明规则42， $A = f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle$ 。根据补充定理70 (2)， $E = f^{-1}\langle E/R \rangle$ 。根据定理30， $\mathbb{C}_E A = f^{-1}\langle E/R - f\langle A \rangle \rangle$ ，根据补充证明规则42得证。

补充证明规则 45.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， f 为 E 到 E/R 的规范映射， $A \subset E$ ，则 $f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle$ 为 E 对于 R 的浸润子集。

证明：令 R 生成的图为 G 。设 $x \in f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle$ ，则 $f(x) \in f\langle A \rangle$ 。若 $(x, y) \in G$ ，根据证明规则55， $f(y) \in f\langle A \rangle$ ，故 $y \in f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle$ ，得证。

补充证明规则 46.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， f 为 E 到 E/R 的规范映射， $A \subset E$ ，若 A' 为 E 对于 R 的浸润子集，且 $A \subset A'$ ，则 $f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle \subset A'$ 。

证明：由于 $A \subset A'$ ，因此 $f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle \subset f^{-1}\langle f\langle A' \rangle \rangle$ ，根据补充证明规则42，得证。

元数学定义 41. 子集的浸润子集 (*partie saturée d'une partie*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， f 为 E 到 E/R 的规范映射， $A \subset E$ ，则称 $f^{-1}\langle f\langle A \rangle \rangle$ 为 A 对于 R 的浸润子集。

补充证明规则 47.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的子集族，对任意 $i \in I$ ，令 A_i 为 X_i 对于 R 的浸润子集，则 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 为 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 对于 R 的浸润子集。

证明：根据定理26、补充证明规则42可证。

元数学定义 42. 同等价关系相容的映射 (*application compatible avec une relation d'équivalence*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， f 是定义域为 E 的函数， z 为字母， R 不包含 z ，如果 $z = f(x)$ 关于 x 同等价关系 R 相容，则称 f 为同等价关系 R 相容的映射。

注：同等价关系相容的映射，意味着同一个等价类的元素的函数值相等。

补充证明规则 48.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， g 为 E 到 E/R 的规范映射， f 是定义域为 E 的函数， z 为字母， R 不包含 z ，则当且仅当 $z = f(x)$ 关于 x 同等价关系 R 相容时， $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$ 。

证明：

充分性： $z = f(x)$ 与 $R \Rightarrow z = f(y)$ ，因此 $R \Rightarrow f(x) = f(y)$ ，根据证明规则55得证。

必要性：如果 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$ ，当 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x \equiv y(mod R)$ 时， $g(x) = g(y)$ ，故 $f(x) = f(y)$ ，因此 $z = f(x)$ 关于 x 同等价关系 R 相容。

证明规则 57.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， g 为 E 到 E/R 的规范映射，对任意 E 到 F 的映射 f ，当且仅当存在 E/R 到 F 的映射 h 使 $f = h \circ g$ 时， f 为同等价关系 R 相容的映射。并且，对任意 f ， h 是唯一确定的且 $h = f \circ s$ ，其中 s 是 g 的右逆。

证明：根据定理22（1）可证。

元数学定义 43. 通过商导出的映射 (*application déduite par passage au quotient*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 在 E 上的等价关系， g 为 E 到 E/R 的规范映射，对 E 到 F 的映射 f ，如果 f 为同等价关系 R 相容的映射， s 是 g 的右逆，则称 $f \circ s$ 为 f 对于 R 通过商导出的映射。

补充定理 149.

令 f 为 E 到 F 的映射， R 为同 f 相关的等价关系，则 f 为同等价关系 R 相容的映射。

证明：根据定义可证。

补充定理 150.

令 f 为 E 到 F 的映射， R 为同 f 相关的等价关系，则 f 对于 R 通过商导出的映射为 E/R 到 F 的单射。

证明：设 f 对于 R 通过商导出的映射为 h ， $t \in E/R$ ， $t' \in E/R$ ，若 $h(t) = h'(t)$ ，则对任意 $x \in t$ 、 $x \in t'$ ， $f(x) = h(t)$ ， $f(x') = h(t')$ ，故 $f(x) = f(x')$ ，根据 R 的定义， $x = x'$ ，得证。

补充定理 151.

令 f 为 E 到 F 的映射， R 为同 f 相关的等价关系， f 对于 R 通过商导出的映射 h 的值域为 $f\langle E \rangle$ ，并且，令 k 为 h 通过 F 的子集 $f\langle E \rangle$ 导出的函数，则 k 为 E/R 到 $f\langle E \rangle$ 的双射。

证明： E 到 E/R 的规范映射为 g ，其右逆为 s 。由于 $h = f \circ s$ ，故 $(h \text{ 的值域}) \subset f(E)$ 。而对任意 $a \in f(E)$ ，存在 $x \in E$ ，使 $a = f(x)$ ，则 $h(g(x)) = a$ ，故 h 的值域为 $f(E)$ ，并且， k 为满射，同时，根据补充定理150， h 为单射，故 k 为单射，因此 k 为双射。

补充定理 152.

令 f 为 E 到 F 的映射， R 为同 f 相关的等价关系， h 为 f 对于 R 通过商导出的映射， k 为 h 通过 F 的子集 $f(E)$ 导出的函数， g 为 E 到 E/R 的规范映射， j 为 $f(E)$ 到 F 的规范映射，则 $f = j \circ k \circ g$ 。

证明：根据证明规则57可证。

定义 79. 规范分解 (*décomposition canonique*)

令 f 为 E 到 F 的映射， R 为同 f 相关的等价关系， h 为 f 对于 R 通过商导出的映射， k 为 h 通过 F 的子集 $f(E)$ 导出的函数， g 为 E 到 E/R 的规范映射， j 为 $f(E)$ 到 F 的规范映射，则称 $j \circ k \circ g$ 为 f 的规范分解。

元数学定义 44. 同两个等价关系相容的映射 (*application compatible avec deux relations d'équivalence*) 包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 f 为 E 到 F 的映射， R 为在 E 上的等价关系， S 为在 F 上的等价关系， v 为 S 到 F/S 的规范映射。如果 $v \circ f$ 为同等价关系 R 相容的映射，则称 f 为同等价关系 R 和 S 相容的映射。

注：同两个等价关系相容的映射，意味着第一个等价关系的同一个等价类的元素的函数值，属于第二个等价关系的同一个等价类。

补充证明规则 49.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 f 为 E 到 F 的映射， R 为在 E 上的等价关系， S 为在 F 上的等价关系， v 为 S 到 F/S 的规范映射， u 为 E 到 E/R 的规范映射，当且仅当 f 为同等价关系 R 和 S 相容的映射时，存在从 E/R 到 F/S 的映射 h ，使 $v \circ f = h \circ u$ ，且 h 是唯一的，同时，令 s 为 u 的右逆， $h = v \circ f \circ s$ 。

证明：

必要性： $v \circ f$ 为同等价关系 R 相容的映射，则 $R \Rightarrow v \circ f(x) = v \circ f(y)$ ，又因为 $R \Leftrightarrow x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $u(x) = u(y)$ ，根据定理22 (1) 可证存在性和唯一性，以及， $h = v \circ f \circ s$ 。

充分性：如果存在从 E/R 到 F/S 的映射 h ，使 $v \circ f = h \circ u$ ，则当 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x \equiv y(mod R)$ ，均有 $h \circ u(x) = h \circ u(y)$ ，即 $v \circ f(x) = v \circ f(y)$ ，故 f 为同等价关系 R 和 S 相容的映射。

元数学定义 45. 通过两个商导出的映射 (*application déduite par passage au deux quotients*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 f 为 E 到 F 的映射， R 为在 E 上的等价关系， S 为在 F 上的等价关系， v 为 S 到 F/S 的规范映射， u 为 E 到 E/R 的规范映射，如果 E/R 到 F/S 的映射 h 满足 $v \circ f = h \circ u$ ，则称 h 为 f 对于 R 和 S 通过商导出的映射。

元数学定义 46. 等价关系的原像 (*Image réciproque d'une relation d'équivalence*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 f 为 E 到 F 的映射， S 为在 F 上的等价关系， v 为 F 到 F/S 的规范映射，则同 $v \circ f$ 相关的等价关系称为 S 在 f 下的原像。

补充证明规则 50.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 f 为 E 到 F 的映射， S 为在 F 上的等价关系， v 为 F 到 F/S 的规范映射，令 R 为 S 在 f 下的原像，则 $R \Leftrightarrow x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $(f(y)|y)(f(x)|x)S$ 。

证明： R 即为 $(x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $v(f(x)) = v(f(y)))$ 。设 S 的图为 G ，则 $R \Leftrightarrow (x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $G\langle f(x) \rangle = G\langle f(y) \rangle)$ ，等价于 $(x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $(f(x), f(y)) \in G)$ ，得证。

补充证明规则 51.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 f 为 E 到 F 的映射， S 为在 F 上的等价关系， v 为 F 到 F/S 的规范映射，令 R 为 S 在 f 下的原像，则任何一个关于 R 的等价类，都是某个关于 S 的等价类在 f 下的原像，且该等价类与 $f\langle E \rangle$ 的交集不为空；反过来，任何关于 S 的等价类，如果与 $f\langle E \rangle$ 的交集不为空，则其在 f 下的原像是 R 的等价类。

证明：设 R 生成的的图为 G ， S 生成的图为 F ，则对于任何 $x \in E$ ， R 的等价类为 $G(x)$ ，对于 S 的等价类 $F(f(x))$ ，满足 $f(x) \in F(f(x))$ ，故其与 $f\langle E \rangle$ 的交集不为空，同时，当 $y \in E$ 时， $y \in G(x) \Leftrightarrow v(f(x)) = v(f(y))$ ，即 $F(f(x)) = F(f(y))$ ，等价于 $f(y) \in F(f(x))$ ，等价于 $y \in f^{-1}(F(f(x)))$ 。故 y 为关于 S 的等价类 $F(f(x))$ 的原像。

反过来，任何关于 S 的等价类 X ，如果与 $f\langle E \rangle$ 的交集不为空，设 $a \in X \cap f\langle E \rangle$ ，则存在 x ，使 $f(x) = a$ ，则 $X = F(f(x))$ ，如上所述，其在 f 下的原像是 R 的等价类 $G(x)$ 。

元数学定义 47. 导出的等价关系 (*relation d'équivalence induite*) 包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为在 E 上的等价关系， $A \subset E$ ， j 为 A 到 E 的规范映射，则 R 在 j 下的原像，称为在 A 上由 R 导出的等价关系，记作 R_A 。

补充证明规则 52.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为在 E 上的等价关系， $A \subset E$ ，则 $R_A \Leftrightarrow x \in A$ 与 $y \in A$ 与 R 。

证明：根据补充证明规则50可证。

补充证明规则 53.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为在 E 上的等价关系， $A \subset E$ ，则对任意 $x \in A$ ， x 关于 R_A 的等价类，是 x 关于 R 的等价类在 A 上的迹。

证明：设 R_A 的图为 G ， R 的图为 F ， $G(x) = \{y | (x, y) \in G\}$ ， $F(x) = \{y | (x, y) \in F\}$ 。由于 $R_A \Leftrightarrow x \in A$ 与 $y \in A$ 与 R ，因此 $G(x) = \{y | x \in A$ 与 $y \in A$ 与 $(x, y) \in F\}$ ，由于 $x \in A$ ，故 $G(x) = F(x) \bigcap_A$ ，得证。

补充证明规则 54.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为在 E 上的等价关系， $A \subset E$ ， j 为 A 到 E 的规范映射，则 j 为同等价关系 R 和 R_A 相容的映射。

证明：设 E 到 E/R 的规范映射为 v ，则 R_A 为 $x \in A$ 与 $y \in A$ 与 $v(j(x)) = v(j(y))$ ，因此 $z = v(j(x))$ 与 $R \Rightarrow z = v(j(y))$ ，故 $v \circ j$ 为同等价关系 R_A 相容的映射，得证。

补充证明规则 55.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为在 E 上的等价关系， $A \subset E$ ， j 为 A 到 E 的规范映射， E 到 E/R 的规范映射为 v ， h 为 j 对于 R_A 和 R 通过商导出的映射，则：

(1) h 为 A/R_A 到 E/R 的单射。

(2) $h\langle A/R_A \rangle = v\langle A \rangle$ 。

证明：设 A 到 A/R_A 的规范映射为 u ，

(1) 当 $x \in A$ 、 $y \in A$ 时， $h(u(x)) = h(u(y)) \Leftrightarrow v(j(x)) = v(j(y))$ ，即等价于 $v(x) = v(y)$ ，故 $(x, y) \in R_A$ 生成的图，因此 $u(x) = u(y)$ ，得证。

(2) 当 $x \in A$ 时， $v(x) = v(j(x))$ ，等于 $h(u(x))$ ，因此 $v\langle A \rangle \subset h\langle A/R_A \rangle$ 。反过来，对于 $y \in A/R_A$ ，由于 u 为满射，则存在 $x \in A$ 使 $y = u(x)$ ，则 $h(y) = v(x)$ ，因此， $h\langle A/R_A \rangle \subset v\langle A \rangle$ 。得证。

元数学定义 48. 商之间的规范映射 (*application canonique entre deux quotients*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为在 E 上的等价关系， $A \subset E$ ， j 为 A 到 E 的规范映射， E 到 E/R 的规范映射为 v ， h 为 j 对于 R_A 和 R 通过商导出的映射，则 h 通过 E/R 的子集 $v\langle A \rangle$ 导出的映射，称为 A/R_A 到 $v\langle A \rangle$ 的规范映射，其逆映射称为 $v\langle A \rangle$ 到 A/R_A 的规范映射。

元数学定义 49. 更细的等价关系 (*relations d'équivalence plus fin*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 如果 R 、 S 均为关于 x 、 y 的等价关系, 且 $S \Rightarrow R$, 则称 S 为比 R 更细的等价关系.

注: 在原书中, “更细”这个概念包括与自身相等的情况, 即一个等价关系比自身更细.

补充证明规则 56.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 如果 R 、 S 均为关于 x 、 y 的等价关系, 且 S 为比 R 更细的等价关系, 则任何一个 S 的等价类, 都是 R 的一个等价类的子集.

证明: 设 R 生成的图为 G , S 生成的图为 F , 则 $F \subset G$. 则 $F(x) \subset G(x)$, 得证.

补充证明规则 57.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 如果 R 、 S 均为关于 x 、 y 的等价关系, 且 S 为比 R 更细的等价关系, f 为 E 到 E/R 的规范映射, 则 f 为同等价关系 S 相容的映射.

证明: 根据定义可证.

元数学定义 50. 等价关系的商 (*quotient de relations d'équivalence*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 、 S 均为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系, 且 S 为比 R 更细的等价关系, f 、 g 分别为 E 到 E/R 和 E 到 E/S 的规范映射, h 为 f 对于 S 通过商集导出的映射, 则同 h 相关的等价关系称为 R 除以 S 的商, 记作 R/S .

补充证明规则 58.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 、 S 均为关于 x 、 y 在 E 上的等价关系, 且 S 为比 R 更细的等价关系, f 、 g 分别为 E 到 E/R 和 E 到 E/S 的规范映射, h 为 f 对于 S 通过商集导出的映射, 则:

(1) $f = h \circ g$.

(2) $x \equiv y(\text{mod } R) \Leftrightarrow g(x) \equiv g(y)(\text{mod } R/S)$.

(3) 关于 R/S 的等价类, 是关于 R 的等价类在 g 下的像.

证明:

(1) 令 $j = Id_E$, 则 $f \circ j = f$, 因此 $f = h \circ g$.

(2) 根据补充证明规则58 (1) 可证.

(3) 令 R 的图为 G , R/S 的图为 F , 对任意 $x \in E$, 考虑 R 的等价类 $G(x)$ 和 R/S 的等价类 $F(g(x))$. 当 $y \in E$ 时, $y \in G(x) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, 等价于 $h(g(y)) = h(g(x))$, 等价

于 $g(y) \in F(g(x))$. 同时, 当 $z \in E/S$ 时, $z \in g\langle G(x) \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in G(x) \text{ 与 } g(y) = z)$, 等价于 $(\exists y)(g(y) \in F(g(x)) \text{ 与 } g(y) = z)$, 等价于 $z \in F(g(x)) \text{ 与 } (\exists y)(g(y) = z)$, 根据补充证明规则35, g 为 E 到 E/S 的满射, 故 $(\exists y)(g(y) = z)$, 因此 $z \in g\langle G(x) \rangle \Leftrightarrow z \in F(g(x))$, 得证.

补充证明规则 59.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 S 为关于 x, y 在 E 上的等价关系, T 为关于 x, y 在 E/S 上的等价关系, g 为 E 到 E/S 的规范映射, R 为 T 在 g 下的原像, 则 S 为比 R 更细的等价关系, 并且 $T \Leftrightarrow R/S$.

证明: $R \Leftrightarrow x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } (g(y)|y)(g(x)|x)T$, 同时, 根据证明规则55, $S \Rightarrow (x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } g(x) = g(y))$, 当 $g(x) = g(y)$ 时, $(g(y)|y)(g(x)|x)T \Leftrightarrow (g(x)|y)(g(x)|x)T$, 后者即 $(g(x)|x)(x|y)T$, 其为真, 因此 $S \Rightarrow R$.

令 f 为 E 到 E/R 的规范映射, h 为 f 对于 S 通过商集导出的映射, 则 $f = h \circ g$, 当 $x \in E$ 、 $y \in E$ 时, $(g(y)|y)(g(x)|x)T \Leftrightarrow h(g(x)) = h(g(y))$, 由于 g 为满射, 故对任意 $x \in E/S$ 、 $y \in E/S$, 均存在 $g(a) = x$ 、 $g(b) = y$, 故 $T \Leftrightarrow h(x) = h(y)$. 又因为 $T \Rightarrow x \in E/S$ 、 $T \Rightarrow y \in E/S$, 因此 $T \Leftrightarrow R/S$.

补充证明规则 60.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, R 为关于 x, y 的等价公式, R' 为关于 x', y' 的等价公式, 令 S 为 $(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u = (x, x') \text{ 与 } v = (y, y') \text{ 与 } R \text{ 与 } (y'|y)(x'|x)R)$, 则 S 为关于 u, v 的等价公式.

证明: 根据定义可证.

元数学定义 51. 等价关系的积 (*produit de relations d'équivalence*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, R 为关于 x, y 的等价公式, R' 为关于 x', y' 的等价公式, 则称关于 u, v 的等价公式 $(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u = (x, x') \text{ 与 } v = (y, y') \text{ 与 } R \text{ 与 } R')$ 为 R 和 R' 的积, 记作 $R \times R'$.

补充证明规则 61.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, R 为关于 x, y 在 E 上的等价公式, R' 为关于 x', y' 在 E' 上的等价公式, 则 $R \times R'$ 为在 $E \times E'$ 上的等价公式.

证明: 令 S 为 $(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u = (x, x') \text{ 与 } v = (y, y') \text{ 与 } R \text{ 与 } (y'|y)(x'|x)R)$, 则 $(u|v)S \Leftrightarrow (\exists x)(\exists x')(u = (x, x') \text{ 与 } (x|y)R \text{ 与 } (x'|y')R')$, 等价于 $(\exists x)(\exists x')(u = (x, x') \text{ 与 } x \in E \text{ 与 } x' \in E')$, 等价于 $u \in E \times E'$, 得证.

补充证明规则 62.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为关于 x, y 在 E 上的等价公式， R' 为关于 x', y' 在 E' 上的等价公式， f 和 f' 分别为 E 到 E/R 和 E' 到 E'/R' 的规范映射， g 为 $E \times E'$ 到 $(E \times E')/(R \times R')$ 的映射，则：

$$(1) g((x, x')) = f(x) \times f'(x').$$

(2) 关于 $R \times R'$ 的等价类，是关于 R 的等价类和关于 R' 的等价类的积，反过来，关于 R 的等价类和关于 R' 的等价类的积，是关于 $R \times R'$ 的等价类。

证明：

(1) 令 $x \in E$ ， $x' \in E'$ ， $u = (x, x')$ ，则 $R \times R' \Leftrightarrow (\exists y)(\exists y')(v = (x, x') \text{ 与 } R \text{ 与 } R')$ ，令 R 和 R' 的图分别为 G 和 G' ， $R \times R'$ 的图为 F ，则 $R \times R' \Leftrightarrow v \in G(x) \times G'(x')$ ，因此， $(u, v) \in F \Leftrightarrow v \in G(x) \times G'(x')$ ，即 $F(u) = G(x) \times G'(x')$ ，得证。

(2) 根据补充证明规则62 (1) 可证。

补充证明规则 63.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为关于 x, y 在 E 上的等价公式， R' 为关于 x', y' 在 E' 上的等价公式， f 和 f' 分别为 E 到 E/R 和 E' 到 E'/R' 的规范映射，则同 $f \times f'$ 相关的等价关系等价于 $R \times R'$ 。

证明： $f \times f'((x, x')) = (f(x), f'(x'))$ ，因此，同 $f \times f'$ 相关的等价关系即 $x \in E$ 与 $x' \in E'$ 与 $y \in E$ 与 $y' \in E'$ 与 $u = (x, x')$ 与 $v = (y, y')$ 与 $f(x) = f(y)$ 与 $f'(x') = f'(y')$ ，由于 $R \Leftrightarrow x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $f(x) = f(y)$ ， $R' \Leftrightarrow x' \in E'$ 与 $y' \in E'$ 与 $f'(x') = f'(y')$ ，得证。

补充证明规则 64.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为关于 x, y 在 E 上的等价公式， R' 为关于 x', y' 在 E' 上的等价公式， f 和 f' 分别为 E 到 E/R 和 E' 到 E'/R' 的规范映射， g 为 $E \times E'$ 到 $(E \times E')/(R \times R')$ 的规范映射，则存在唯一的映射 h ，使 $f \times f' = h \circ g$ ，且 h 为 $(E \times E')/(R \times R')$ 到 $(E/R) \times (E'/R')$ 的双射。

证明：根据补充证明规则62 (1)， $g((x, x')) = f(x) \times f'(x')$ ， $f \times f'((x, x')) = (f(x), f'(x'))$ ，根据定理22 (1)，存在唯一的 h ，使 $f \times f' = h \circ g$ 。由于 $f \times f'$ 为满射，故 h 为满射。

同时，设 $h(a) = h(b)$ ，由于 g 为满射，故存在 a, b 使 $a = g(x, x')$ 、 $b = g(y, y')$ ，因此 $h(a) = (f(x), f'(x'))$ ， $h(b) = (f(y), f'(y'))$ ，故 $f(x) = f(y)$ ， $f'(x') = f'(y')$ ，故 $g((x, x')) = g((y, y'))$ ，因此 $a = b$ ，所以 h 为单射。

综上， h 为双射。

补充证明规则 65.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x, y 的等价关系，则：

- (1) $(x'|y)R \Rightarrow \tau_y(R) = \tau_y((x'|x)R)$.
 (2) $(x|y)R \Leftrightarrow (\tau_y(R)|y)R$.
 (3) $(x|y)R$ 与 $(x'|x)(x'|y)R$ 与 $\tau_y(R) = \tau_y((x'|x)R) \Leftrightarrow (x'|y)R$.

证明:

(1) 如果 $(x'|y)R$, 则 $R \Leftrightarrow (x'|x)R$, 根据公理模式7可证.

(2) $(\tau_y(R)|y)R$ 即 $(\exists y)R$. 根据补充证明规则27可证.

(3) 如果 $(x'|y)R$, 根据补充证明规则23, $(x|y)R$ 与 $(x'|x)(x'|y)R$, 根据补充证明规则65

(1), $(x'|y)R \Rightarrow (x|y)R$ 与 $(x'|x)(x'|y)R$ 与 $\tau_y(R) = \tau_y((x'|x)R)$.

反过来, 如果 $(x|y)R$ 与 $(x'|x)(x'|y)R$ 与 $\tau_y(R) = \tau_y((x'|x)R)$, 根据公理模式6, $(\tau_y((x'|x)R)|y)(x'|x)R \Leftrightarrow (\tau_y(R)|y)(x'|x)R$, 根据补充证明规则65 (2), $(x'|x)(x'|y)R \Leftrightarrow (\tau_y((x'|x)R)|y)(x'|x)$, 故 $(\tau_y(R)|y)(x'|x)R \Leftrightarrow (x'|x)(x'|y)R$, 因此 $(\tau_y(R)|y)(x'|x)R$, 根据补充证明规则65 (2), $(x|y)R \Leftrightarrow (\tau_y(R)|y)R$, 故 $(\tau_y(R)|y)R$, 因此 $(x'|x)R$. 得证.

元数学定义 52. 等价的对象类 (*classe d'objets équivalents*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x 、 y 的等价关系, 则 $\tau_y(R)$ 称为关于 R 等价于 x 的对象类.

补充证明规则 66.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x 、 y 的等价关系, T 为项且不包含 x , 如果 $(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T \text{ 与 } R))$, 则 $(\exists x)((x|y)R \text{ 与 } z = \tau_y(R))$ 为 z 上的集合化公式.

证明: 根据证明规则53, $x \in T$ 与 $z = \tau_y(R)$ 为 z 上的集合化公式, 令 $X = \{z|x \in T \text{ 与 } z = \tau_y(R)\}$, 如果 $(x|y)R$, 则存在 $x \in T$, 使 R 为真, 则 $\tau_y(R) = (y|x)\tau_y(R)$, 由于 $\tau_y(R) \in X$, 故 $(y|x)\tau_y(R) \in X$, 因此 $(y|x)R \Rightarrow (y|x)\tau_y(R) \in X$, 因此 $(x|y)R \Rightarrow \tau_y(R) \in X$, 故 $(\exists x)((x|y)R \text{ 与 } z = \tau_y(R)) \Rightarrow z \in X$, 根据证明规则52得证.

元数学定义 53. 等价的对象类的集合 (*ensemble de classes d'objets équivalents*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x 、 y 的等价关系, 如果存在不包含 x 的项 T , 使 $(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T \text{ 与 } R))$, 则称 $\{z|(\exists x)((x|y)R \text{ 与 } z = \tau_y(R))\}$ 为等价的对象类的集合.

补充证明规则 67.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x 、 y 的等价关系, 存在不包含 x 的项 T , 使 $(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T \text{ 与 } R))$, X 为等价的对象类的集合, $(x|y)R$ 为真, 则存在唯一的 z , 满足 $z \in X \wedge (z|y)R$ 为真.

证明: $\tau_y(R)$ 满足上述条件, 存在性得证.

另一方面, 设 $z = \tau_y((u|x)R)$ 且 $(u|y)R$, 因此 $(u|x)(z|y)R$ 为真, 因此 $(u|y)R$ 为真, 根据补充证明规则65 (1), $\tau_y((u|x)R) = \tau_y(R)$, 故 $z = \tau_y(R)$, 唯一性得证.

习题 67.

求证: 当且仅当满足下列三个条件时, G 为在 E 上的等价关系生产的图:

第一, $pr_1G = E$, $pr_2G = E$,

第二, $G \circ G^{-1} \circ G = G$,

第三, $\Delta_E \subset G$.

证明:

如果 G 为在 E 上的等价关系生产的图: 根据补充证明规则25, $(x, y) \in G \Rightarrow x \in E$, $(x, y) \in G \Rightarrow y \in E$, 同时, $x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G$, 故 $(\exists y)((x, y) \in G) \Leftrightarrow x \in E$ 、 $(\exists x)((x, y) \in G) \Leftrightarrow y \in E$, 即 $pr_1G = E$, $pr_2G = E$.

$(x, t) \in G \Rightarrow (x, x) \in G$ 与 $(x, x) \in G$ 与 $(x, t) \in G$, 故 $(\exists y)(\exists z)((x, y) \in G$ 与 $(z, y) \in G$ 与 $(z, t) \in G)$, 另一方面, 如果 $(\exists y)(\exists z)((x, y) \in G$ 与 $(z, y) \in G$ 与 $(z, t) \in G)$, 则 $(x, t) \in G$, $EG \circ G^{-1} \circ G = G$.

$x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G$, 根据补充定理59, $(x, y) \in \Delta_E \Leftrightarrow x \in E$ 与 $y = x$, 由于 $x \in E \Leftrightarrow (x, x) \in G$, $(x, y) \in \Delta_E \Rightarrow (x, y) \in G$, 因此 $\Delta_E \subset G$.

反过来, 如果三个条件成立: 由于 $pr_1G = E$, $pr_2G = E$, $\Delta_E \subset G$, 反身性成立.

如果 $(x, y) \in G$, $(y, z) \in G$, 由于 $(y, y) \in G^{-1}$, 故 $(x, z) \in G \circ G^{-1} \circ G$, 因此 $(x, z) \in G$, 传递性成立.

若 $(x, y) \in G$, 由于 $(y, y) \in G$, 因此 $(y, x) \in G^{-1}$, $(x, x) \in G$, 因此 $(y, x) \in G$, 对称性成立.

习题 68.

G 为图, 且 $G \circ G^{-1} \circ G = G$, 求证: $G^{-1} \circ G$ 和 $G \circ G^{-1}$ 分别为在 pr_1G 上和 pr_2G 上的等价图.

证明: 当 $x \in pr_1G$ 时, $(\exists y)((x, y) \in G)$, 则 $(y, x) \in G^{-1}$, 故 $(x, x) \in G^{-1} \circ G$; 反过来, 若 $(x, x) \in G^{-1} \circ G$, $(\exists y)((x, y) \in G)$, 故 $x \in pr_1G$, 反身性成立.

若 $(x, y) \in G^{-1} \circ G$, $(y, z) \in G^{-1} \circ G$, 则 $(\exists z)((x, z) \in G)$, $(y, z) \in G$, 因此 $(y, x) \in G$, 对称性成立.

若 $(x, y) \in G^{-1} \circ G$, 则 $y \in pr_1G$, 因此 $(y, y) \in G$, 故 $(x, y) \in G \circ G^{-1} \circ G$, 因此 $(x, y) \in G$; 由于 $(y, z) \in G^{-1} \circ G$, 则 $(z, y) \in G^{-1} \circ G$, 同理 $(z, y) \in G$, 因此 $(x, z) \in G^{-1} \circ G$, 传递性成立.

故 $G^{-1} \circ G$ 为在 pr_1G 上的等价图. 同理可证 $G \circ G^{-1}$ 为在 pr_2G 上的等价图.

习题 69.

$A \subset E$, R 是同恒等映射 $X \rightarrow X \cap A (X \in \mathcal{P}(E), X \bigcap_A \in \mathcal{P}(E))$ 相关的等价关系. 求证: 存在 $\mathcal{P}(A)$ 到 $\mathcal{P}(E)/R$ 的双射.

证明: 令映射 $X \rightarrow X \cap A (X \in \mathcal{P}(E), X \bigcap_A \in \mathcal{P}(E))$ 为 f , 对任意 $Y \in \mathcal{P}(A)$, $Y \cap A = Y$, 故 $f(Y) = Y$, 因此 $f(\mathcal{P}(E)) = \mathcal{P}(A)$, 对 f 做规范分解 $f = g \circ k \circ j$, 其中, k 为 E/R 到 $\mathcal{P}(A)$ 的映射, 根据补充定理150得证.

习题 70.

G 为在 E 上的等价图, 如果 $A \subset G$ 且 $pr_1 A = E$ (或 $pr_2 A = E$), B 为图, 则: $G \circ A = G$ (或 $A \circ G = G$), $(G \cap B) \circ A = G \cap (B \circ A)$ (或 $A \circ (G \cap B) = G \cap (A \circ B)$).

证明:

若 $pr_1 A = E$, 如果 $(x, z) \in G$, 则 $x \in E$, 故存在 y 使 $(x, y) \in A$, 同时 $(y, z) \in G$, 故 $(x, z) \in G \circ A$; 反过来, 如果 $(x, z) \in G \circ A$, 则存在 y 使 $(x, y) \in A$ 与 $(y, z) \in G$, 故 $(x, z) \in G$, 因此 $G \circ A = G$.

如果 $(x, z) \in G \cap (B \circ A)$, 则 $(x, z) \in G$, 且存在 y , 使 $(x, y) \in A$, $(y, z) \in B$, 因此 $(y, z) \in G$, 故 $(y, z) \in G \cap B$, 故 $(x, z) \in (G \cap B) \circ A$. 反过来, 如果 $(x, z) \in (G \cap B) \circ A$, 则存在 y , 使 $(x, y) \in A$, $(y, z) \in G \cap B$, 故 $(y, z) \in B$, $(y, z) \in G$, 因此 $(x, z) \in B \circ A$, $(x, z) \in G$, 因此 $(G \cap B) \circ A = G \cap (B \circ A)$.

同理可证 $pr_2 A = E$ 的情形.

习题 71.

求证: 在 E 上的多个等价图的交集, 是在 E 上的等价图. 并给出在 E 上的两个等价集, 其并集不是在 E 上的等价集.

证明: 证明部分即补充定理145. 令 a, b, c 互不相等, $G = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \cup \{(a, b), (b, a)\}$, $H = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \cup \{(a, c), (c, a)\}$, 则 G, H 均为在 $\{a, b, c\}$ 上的等价图, 但 $G \cup H = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \cup \{(a, b), (b, a)\} \cup \{(a, c), (c, a)\}$, $(b, a) \in G \cup H$, $(a, c) \in G \cup H$, 但 $(b, c) \notin G \cup H$, 故 $G \cup H$ 不是等价图.

习题 72.

G, H 均为在 E 上的等价图, 求证: 当且仅当 $G \circ H = H \circ G$ 时, $G \circ H$ 为在 E 上的等价图, 并且, 这种情况下, 令 $I = \{X | G \subset X \text{ 与 } H \subset X \text{ 与 } (H \text{ 为在 } E \text{ 上的等价图})\}$, 则 $G \circ H = \bigcap_{X \in I} X$.

证明:

对任意 $x \in E$, $(x, x) \in G$, $(x, x) \in H$, 故 $(x, x) \in G \circ H$, 反过来, 如果 $(x, x) \in G \circ H$, 则存在 y 使 $(x, y) \in H$, 故 $x \in E$, 因此 $G \circ H$ 具有反身性.

如果 $(x, y) \in G \circ H$, 则存在 z 使 $(x, z) \in H, (z, y) \in G$, 因此 $(y, x) \in H \circ G$, 反之亦然. 故当且仅当 $G \circ H = H \circ G$ 时, $G \circ H$ 具有对称性.

如果 $G \circ H = H \circ G$, 则当 $(x, y) \in G \circ H, (y, z) \in G \circ H$ 时, $(x, z) \in G \circ H \circ G \circ H$, 因此 $(x, z) \in G \circ G \circ H \circ H$. 根据定理56, $G \circ G = G, H \circ H = H$, 因此 $(x, z) \in G \circ H$, 即 $G \circ H$ 具有传递性.

综上, 当且仅当 $G \circ H = H \circ G$ 时, $G \circ H$ 为在 E 上的等价图.

设 $(x, y) \in G \circ H$, 则存在 z , 使 $(x, z) \in G, (z, y) \in H$, 因此对任意 $X \in I, (x, y) \in X$, 故 $X \in \bigcap_{X \in I} X$, 反过来, 若 $(x, y) \in \bigcap_{X \in I} X$, 则对任意 $X \in I, (x, y) \in X$, 因此 $(x, y) \in G, (x, y) \in H$, 故 $(x, y) \in G \circ H$, 得证.

习题 73.

令 R 为在 F 上的等价关系, f 为 E 到 F 的映射, S 为 R 在 f 下的原像. $A = f\langle E \rangle$, 试给出 E/S 到 R/R_A 的双射.

答: 设 j 为 A 到 F 的规范映射, 则 j 为单射; h 为 f 对于 R 与 S 通过商集导出的映射, 根据补充定理150, h 为 E/S 到 F/R 的单射; l 为 j 对于 R_A 与 R 通过商集导出的映射, 根据补充证明规则55 (1), l 为 A/R_A 到 F/R 的单射.

令 p 为 F 到 F/R 的规范映射, 根据补充证明规则55 (2), $l\langle A/R_A \rangle = p\langle A \rangle$, 令 l' 为 l 通过 F/R 的子集 $p\langle A \rangle$ 导出的函数, 则 l' 为双射. 同时, 设 E 到 E/S 的规范映射为 k , 则 $p \circ f = h \circ k$. 对任意 $x \in p\langle A \rangle$, 则存在 $y \in E$, 使 $p(f(y)) = x$, 故 $x = h(k(y))$, 反过来, 对任意 $z \in E/S$, 设 $z = G(u)$, 则 $h(z) = p(f(u))$, 故 $h(z) \in p\langle A \rangle$. 因此, 令 h' 为 h 通过 F/R 的子集 $p\langle A \rangle$ 导出的函数, 则 h' 为双射.

因此 $l'^{-1} \circ h'$ 为 E/S 到 R/R_A 的双射.

习题 74.

R 为在 F 上的等价关系, p 为 F 到 F/R 的规范映射, f 为 G 到 F/R 的满射, 求证: 存在 E , 以及 E 到 F 的满射 g 、 E 到 G 的满射 h , 使 $p \circ g = f \circ h$.

证明: $(\exists X)(z \in p^{-1}\langle X \rangle \times f^{-1}\langle X \rangle \text{ 与 } X \in F/R) \Rightarrow z \in F \times G$, 故 $(\exists X)(z \in p^{-1}\langle X \rangle \times f^{-1}\langle X \rangle \text{ 与 } X \in F/R)$ 为集合化公式, 令 $E = \{z | (\exists X)(z \in p^{-1}\langle X \rangle \times f^{-1}\langle X \rangle \text{ 与 } X \in F/R)\}$, 映射 g 为 $z \rightarrow pr_1z (z \in E, pr_1z \in F)$, 映射 h 为 $z \rightarrow pr_2z (z \in E, pr_2z \in G)$. 对任意 $z \in E$, 设 $z \in p^{-1}\langle X \rangle \times f^{-1}\langle X \rangle$ 与 $X \in F/R$, 故 $p(g(z)) = X, f(h(z)) = X$, 同时, 由于 p, f 均为满射, 故对任意 $x \in F$, 令 $G(x) = X$, 故 $p^{-1}\langle X \rangle \times f^{-1}\langle X \rangle \neq \emptyset$, 因此存在 $z \in E$, 使 $g(z) = x$, 故 g 为满射, 同理可证 h 为满射.

习题 75.

(1) 令 R 为公式, 求证: 公式 R 与 $(x|z)(y|x)(z|y)R$ 关于 x, y 具有对称性, 在什么情况下, 该公式为关于 x, y 在 E 上具有反身性?

(2) 令 R 为公式, R 关于 x, y 具有对称性并且在 E 上具有反身性, 令其生成的图为 G , 且 $G \subset E \times E$. S 为公式:

“存在自然数 $n > 0$ 以及 $(x_i)_{i \in [0, n]}$ $((\forall i)(i \in [0, n] \Rightarrow x_i \in G))$, 其中 $x_0 = x, x_n = y$, 并且, 对任意 $i \in [0, n-1]$, $(x_{i+1}|y)(x_i|x)R$ 为真”.

求证: S 是关于 x, y 在 E 上的等价关系, 并且, 包含 G 的一切等价图, 均包含 S 的图.

(3) 当 $x \in E$ 时, (2) 中的 S 的等价类, 称为 x 所在的 E 关于 R 的连通分量, 在没有歧义的情况下可以简称 E 关于 R 的连通分量. 令 $F = \{A | A \subset E \text{ 与 } (\forall y)(\forall z)(y \in A \text{ 与 } z \in E - A \Rightarrow \text{非}(y|x)(z|y)R)\}$, 求证: 对任意 $x \in E$, $\bigcap_{A \in \{A | A \in F \text{ 与 } x \in A\}} A$ 为 E 关于 R 的连通分量.

证明:

(1) 对称性根据定义可证. $(x|y)R$ 与 $(x|y)(x|z)(y|x)(z|y)R \Leftrightarrow x \in E$, 即 $(x|y)R \Leftrightarrow x \in E$, 故当且仅当 R 在 E 上具有反身性时, 公式 R 与 $(x|z)(y|x)(z|y)R$ 在 E 上具有反身性.

(2) 令 R 的图为 G , S 的图为 F . 假设 $(x, y) \in F$, 由于 R 具有对称性, 令 $y_i = x_{n-i}$, 则 $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ 满足 S , 故 $(y, x) \in F$, 因此 S 具有对称性.

假设 $x \in E$, 由于 R 具有反身性, 令 $y_i = x$ ($0 \leq i \leq n$), 则 $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ 满足 S ; 反过来若 $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ 满足 S , 且其中 $x_0 = x, x_n = x$, 则 $(x, x_1) \in G$, 由于 $G \subset E \times E$, 故 $x \in E$, 因此 S 在 E 上具有反身性.

假设 $(x, y) \in F, (y, z) \in F$, 将相应的 $(x_i)_{i \in [0, n]}, (Y_i)_{i \in [0, m]}$ 合在一起组成 $(Z_i)_{i \in [0, n+m+1]}$ (当 $i \in [0, n]$ 时, $Z_i = X_i$, 当 $i \in [n+1, n+m+1]$ 时, $Z_i = Y_{i-n-1}$), 因此 $(x, z) \in F$, 因此 S 具有传递性. 令 $G^1 = G, G^n = G^{n-1} \circ G$, 则 $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} G^n$. 对满足 $G \subset G'$ 的任意 G' , 如果 G 为在 E 上的等价关系, 根据定理56, 对任意自然数 $n > 0, G^n \subset G'$, 因此 $F \subset G'$, 得证.

(3) 令 R 的图为 G, S 的图为 F , 则当 $A \in F$ 且 $x \in A$ 时, 如果 $(x, y) \in F$, 则存在满足 S 的 $(x_i)_{i \in [0, n]}$, 如果存在 i 使 $x_{i-1} \in A$ 但 $x_i \notin A$, 则 $(x_{i-1}, x_i) \notin G$, 矛盾, 因此 $y \in A$, 故 $y \in \bigcap_{A \in \{A | A \in F \text{ 与 } x \in A\}} A$.

反过来, 如果 $(x, y) \notin F$, 则 $y \notin F(x), x \in F(x), F(x) \in F$, 因此 $y \notin \bigcap_{A \in \{A | A \in F \text{ 与 } x \in A\}} A$. 得证.

注: 习题75 (2)、(3) 涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 76.

(1) 公式 R 具有对称性并且在 E 上具有反身性. 如果对任意互不相等的 $x, y, z, t, x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $z \in E$ 与 $t \in E$ 与 R 与 $(z|y)R$ 与 $(t|y)R$ 与 $(y|x)(z|y)R$ 与 $(y|x)(t|y)R \Rightarrow (t|y)(z|x)R$, 则称 R 具有1级非传递性. 如果 $A \subset E$, 并且 $x \in A$ 与 $y \in A \Rightarrow R$, 则称 A 关于 R 稳定. 如果 $a \in E, b \in E, a \neq b$, 并且 $(b|y)(a|x)R$ 为真, 令 $C(a, b) = \{x | x \in E \text{ 与 } (x|y)(a|x)R \text{ 与 } (x|y)(b|x)R\}$, 求证: $C(a, b)$ 关于 R 稳定; 任意 $x \in C(a, b), y \in C(a, b) \vee x \neq y$, 均有 $C(x, y) = C(a, b)$; 此时, 集合 $C(a, b)$ 称为 E 关于 R 的组成部分, 则 $C(a, b)$ 是 E 关于 R 的连通分量; E

的两个不同组成部分的交集最多有一个元素，并且对于 E 的三个不同组成部分 A 、 B 、 C ， $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $C \cap A$ 至少有一个为空或者三者相同。

(2) 反过来，设 $(X_l)_{l \in L}$ 为 E 的覆盖，其中 $l \in L \Rightarrow X_l \neq \emptyset$ ，并且：

第一，对任意 $l \in L$ 、 $m \in L$ 且 $l \neq m$ ， $X_l \cap X_m$ 最多有一个元素；

第二，对任意 $l \in L$ 、 $m \in L$ 、 $n \in L$ 且三者互不相等， $X_l \cap X_m$ 、 $X_l \cap X_n$ 、 $X_m \cap X_n$ 至少有一个为空或者三者相同。

令公式 R 为 $(\exists l)(l \in L \text{ 与 } x \in X_l \text{ 与 } y \in X_l)$ ，求证： R 在 E 上具有反身性、具有对称性，并且具有1级非传递性。

(3) 公式 R 具有对称性并且在 E 上具有反身性。如果对于 E 的 n 个互不相等的元素 $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ，只要 $(x_i|x)(x_j|y)R$ ($1 \in [1, n]$ ， $j \in [1, n]$ ， $i \neq j$ ，且 $(i, j) \neq (n-1, n)$ ， $(i, j) \neq (n, n-1)$) 均为真，就有 $(x_{n-1}|x)(x_n|y)R$ 为真，则称 R 具有 $n-3$ 级非传递性。试类比习题76(1)、习题76(2)，给出具有任意级非传递性的充分必要条件，并证明：具有 p 级非传递性的公式，也具有 q 级非传递性 ($q > p$)。

证明：

(1) 设 $x \in C(a, b)$ 、 $y \in C(a, b)$ ，则 $R(a, x)$ 、 $R(b, x)$ 、 $R(a, y)$ 、 $R(b, y)$ 、 $R(a, b)$ ，且 $a \in E$ 、 $b \in E$ 、 $x \in E$ 、 $y \in E$ ，根据定义，无论 a 、 b 、 x 、 y 中是否有相等的， R 均为真。故 $C(a, b)$ 关于 R 稳定。如果 $x \in C(a, b)$ 、 $y \in C(a, b)$ 并且 $x \neq y$ ，则对任意 $z \in C(x, y)$ ，则 $z \in E$ 并且 $(z|y)(a|x)R$ 、 $(z|y)(b|x)R$ ，故 $z \in C(a, b)$ ，反之，同理可证对任意 $z \in C(a, b)$ ，有 $z \in C(x, y)$ ，因此 $C(x, y) = C(a, b)$ 。对任意 $x \in C(a, b)$ ，则 $(x|y)(a|x)R$ 成立，反过来，如果 x 是 a 所在的 E 关于 R 的连通分量的元素，根据数学归纳法可证 $x \in C(a, b)$ ，故 $C(a, b)$ 是 a 所在的 E 关于 R 的连通分量。若 E 的两个不同组成部分的交集有两个元素 x 、 y ，则二者均为 $C(x, y)$ ，矛盾，故最多有一个元素。假设 $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $C \cap A$ 均不为空，设 $A \cap B = \{a\}$ ， $B \cap C = \{b\}$ ， $C \cap A = \{c\}$ ，若其中 $a = b$ ，则 $a = c$ ，三者相同，若三者均不相同，则 $A = C(a, c)$ ， $B = C(a, b)$ ， $C = C(b, c)$ ，因此 $(b|y)(a|x)R$ 、 $(a|y)(c|x)R$ 、 $(c|y)(b|x)R$ ，因此 $b \in A$ 、 $c \in B$ 、 $a \in C$ ，故 $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $C \cap A$ 均有不少于三个公共元素，矛盾。得证。

(2) $(\exists l)(l \in L \text{ 与 } x \in X_l)$ 为真，故 R 具有反身性； $(\exists l)(l \in L \text{ 与 } x \in X_l \text{ 与 } y \in X_l) \Leftrightarrow (\exists l)(l \in L \text{ 与 } y \in X_l \text{ 与 } x \in X_l)$ ，故 R 具有对称性。对任意互不相等的 x 、 y 、 z 、 t 如果 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $z \in E$ 与 $t \in E$ 与 R 与 $(z|y)R$ 与 $(t|y)R$ 与 $(y|x)(z|y)R$ 与 $(y|x)(t|y)R$ ，则存在 $l \in L$ ，使 $\{x, y\} \subset X_l$ ，存在 $m \in L$ ，使 $\{y, z\} \subset X_m$ ，存在 $n \in L$ ，使 $\{z, x\} \subset X_n$ ，因此 l 、 m 、 n 相等，故 $\{x, y, z\} \subset X_l$ ，同理存在 $l' \in L$ ，使 $\{x, y, t\} \subset X_{l'}$ ，因此 $l = l'$ ，故 $\{x, y, z, t\} \subset X_l$ ，因此， $(t|y)(z|x)R$ ，故 R 具有1级非传递性。

(3) 充分必要条件为：

第一，集族任意两个元素的交集最多有 $n-3$ 个元素；

第二，集族中任意三个集合 A 、 B 、 C ，如果 $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $C \cap A$ 均有 $n-3$ 个元素，且其中 $n-4$ 个元素是三个集合共有的，则全部 $n-3$ 个元素均为三个集合共有。

如果上述性质成立，考虑任何元素 x ，集族中包含 x 的集合，去掉 x 后，剩下的集合产生的公式具有 $n-4$ 级非传递性，故充分性成立；如果 R 具有 $n-3$ 级非传递性，对任意元素 $x \in E$ ，考虑与 x 满足 R 的元素集合 E' （不包含元素 x ），令 $R' = R \cap (E' \times E')$ ，则 R' 具有 $n-4$ 级非传递性，因此任意集合 $A、B、C$ ，上述性质对 $n-1$ 成立，则对于 $A \cup \{x\}、B \cup \{x\}、C \cup \{x\}$ ，上述性质对 n 成立，必要性成立。

如果公式 R 具有 p 级非传递性，则集族任意两个元素的交集最多有 p 个元素，由于 $q > p$ ，故 q 级非传递性的条件一成立；同时，如果集族中任意三个集合 $A、B、C$ ，如果 $A \cap B、B \cap C、C \cap A$ 均有 q 个元素，且其中 $q-1$ 个元素是三个集合共有的，则令 M 有 $q-p$ 个元素且 $M \subset (A \cap B \cap C)$ ，令 $A' = A - M、B' = B - M、C' = C - M$ ，则 $A' \cap B'、B' \cap C'、C' \cap A'$ 均有 $p-3$ 个元素，且其中 $p-4$ 个元素是三个集合共有的，故全部 $p-3$ 个元素均属于 $A' \cap B' \cap C'$ ，也就是说， q 级非传递性的条件二成立。综上， R 具有 q 级非传递性。

注：习题76（1）、（3）涉及尚未介绍的“自然数”知识。

Chapter 3

偏序集，基数，自然数 (Ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers)

3.1 偏序关系，偏序集 (Relations d'ordre, ensembles ordonnés)

元数学定义 54. 偏序关系 (*relation d'ordre*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为公式， x 、 y 、 z 为不同的不是常数的字母，且 R 不包含 z ，如果下列三个公式为真：

第一， R 关于 x 、 y 具有传递性；

第二， R 与 $(x|z)(y|x)(z|y)R \Rightarrow x = y$ ；

第三， $R \Rightarrow (x|y)R$ 与 $(y|x)R$ ，

则称 R 为关于 x 、 y 的偏序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为 R 为偏序关系。

补充证明规则 68.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为关于 x 、 y 的偏序关系，则 $(x|z)(y|x)(z|y)R$ 也是关于 x 、 y 的偏序关系。

证明：根据定义可证。

元数学定义 55. 在集合上的偏序关系 (*relation d'ordre dans un ensemble*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 y 的偏序关系，并且 R 关于 x 、 y 在 E 上具有反身性，则称 R 为关于 x 、 y 在 E 上的偏序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为 R 为在 E 上的偏序关系。

补充定理 153.

- (1) $x = y$ 为关于 x, y 的偏序关系.
- (2) $x \subset y$ 为关于 x, y 的偏序关系.
- (3) $x = y$ 与 $x \in E$ 为关于 x, y 在 E 上的偏序关系.
- (4) $F \subset \mathcal{P}(E)$, 则 $x \subset y$ 与 $x \in F$ 与 $y \in F$ 为关于 x, y 在 F 上的偏序关系.
- (5) E, F 为集合, H 的元素都是 E 的子集到 F 的映射, 则 $x \in H$ 与 $y \in H$ 与 (y 为 x 的延拓) 为关于 x, y 在 H 上的偏序关系.
- (6) E 为集合, $F = \{A | (\Delta_A \text{ 为 } E \text{ 的划分})\}$, $X \in F$ 与 $Y \in F$ 与 Δ_X 为比 Δ_Y 更细) 为关于 X, Y 在 F 上的偏序关系.

证明: 根据定义可证.

补充证明规则 69.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 公式 R 为关于 x, y 在 E 上的偏序关系, 则 $R \Rightarrow x \in E, R \Rightarrow y \in E$.

证明: 根据定义可证.

补充证明规则 70.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 公式 R 为关于 x, y 在 E 上的偏序关系, 则 R 与 $(x|z)(y|x)(z|y)R \Leftrightarrow x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x = y$.

证明: 根据定义, R 与 $(x|z)(y|x)(z|y)R \Rightarrow x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x = y$. 另一方面, 如果 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x = y$, 则 $R \Leftrightarrow (y|x)R, R \Leftrightarrow (x|y)R$, 进而 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x = y \Rightarrow R$ 与 $(x|z)(y|x)(z|y)R$.

补充证明规则 71.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 公式 R 为关于 x, y 在 E 上的偏序关系, 则 R 为生成图的公式.

证明: 根据补充证明规则69, $R \Rightarrow (x, y) \in E \times E$, 根据补充证明规则118可证.

定义 80. 偏序图 (*graphe d'ordre*)

G 为图, 如果 $(x, y) \in G$ 为在 E 上的偏序关系, 则称 G 为在 E 上的偏序图.

定义 81. 在集合上的偏序对应 (*correspondance d'ordre dans un ensemble*), 偏序 (*ordre*)

如果 F 为在 E 上的偏序图, 则 (F, E, E) 称为在 E 上的偏序对应, 或称为在 E 上的偏序.

定理 57. 当且仅当同时满足下列两个条件时, 对应 (G, E, E) 为在 E 上的偏序对应:

- 第一, $G \circ G = G$;
- 第二, $G \cap G^{-1} = \Delta_E \times E$.

证明：如果 (G, E, E) 为偏序关系，由于 $(x, y) \in G$ 与 $(y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \in G$ ，故 $G \circ G \subset G$ ，同时， $(x, y) \in G \Rightarrow (y, y) \in G$ ，故 $(x, y) \in G \circ G$ ，故 $G \subset G \circ G$ ，因此 $G \circ G = G$ ；根据补充证明规则70， $G \cap G^{-1} = \Delta_E \times E$ 。

反过来，如果 $G \circ G = G$ ，则 $(x, y) \in G$ 与 $(y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \in G$ ；如果 $G \cap G^{-1} = \Delta_E \times E$ ，故 $(x, y) \in G$ 与 $(y, x) \in G \Rightarrow x = y$ ； $\Delta_E \times E \subset G$ ，故 $x \in E \Rightarrow (x, x) \in G$ ，又因为 $pr_1 G = E$ ， $pr_2 G \subset E$ ，因此 $(x, x) \in G \Rightarrow x \in G$ ， $(x, y) \in G \Rightarrow x \in E$ ， $(x, y) \in G \Rightarrow y \in E$ ，因此 $(x, y) \in G \Rightarrow (x, x) \in G$ 与 $(y, y) \in G$ 。故 F 为在 E 上的偏序图。

元数学定义 56. 预序关系 (*relation de préordre*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为公式， x, y, z 为不同的不是常数的字母，且 R 不包含 z ，如果以下二个公式为真：

(1) R 关于 x, y 具有传递性；

(2) $R \Rightarrow (x|y)R$ 与 $(y|x)R$ ，

则称 R 为关于 x, y 的预序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为 R 为预序关系。

补充证明规则 72.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为关于 x, y 的预序关系，则 $(x|z)(y|x)(z|y)R$ 也是关于 x, y 的预序关系。

证明：根据定义可证。

补充证明规则 73.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为偏序关系，则 R 为预序关系。

证明：根据定义可证。

元数学定义 57. 相反关系 (*relation opposée*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为预序关系，则 $(x|z)(y|x)(z|y)R$ 称为 R 的相反关系。

补充证明规则 74.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为预序关系（或偏序关系），则 R 的相反关系也是预序关系（或偏序关系）。

证明：根据补充证明规则68、补充证明规则72可证。

补充证明规则 75.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为预序关系，则 R 与 $(R$ 的相反关系)是等价关系。

证明：根据定义可证。

元数学定义 58. 在集合上的预序关系 (*relation d'préordre dans un ensemble*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为关于 x 、 y 的预序关系，并且 R 关于 x 、 y 在 E 上具有反身性，则称 R 为关于 x 、 y 在 E 上的预序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为 R 为在 E 上的预序关系。

补充证明规则 76.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 R 为在 E 上的预序关系， S 为 R 与 (Rs) ， x' 、 y' 为与 x 、 y 不同的字母且 R 不包含 x' 、 y' ，则 $(x'|y)S$ 与 $(y|x)(y'|y)S$ 也是在 E 上的等价关系，并且 R 关于 x 、 y 同等价关系“ $(x'|y)S$ 与 $(y|x)(y'|y)S$ ”相容。

证明：根据定义， $(x'|y)S$ 与 $(y|x)(y'|y)S$ 是等价关系，同时，根据传递性， R 与 $(x'|y)S$ 与 $(y|x)(y'|y)S \Rightarrow (x'|x)(y'|y)R$ ，得证。

补充证明规则 77.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，公式 R 为关于 x 、 y 在 E 上的预序关系，则 $R \Rightarrow x \in E$ ， $R \Rightarrow y \in E$ 。

证明：根据定义可证。

补充证明规则 78.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为关于 x 、 y 在 E 上的预序关系，令 S 为 R 与 $(R$ 的相反关系)， R' 为公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $(\exists x)(\exists y)(x \in X$ 与 $y \in Y$ 与 $R)$ ，则 R' 为关于 X 、 Y 在 E/S 上的偏序关系。

证明： R' 与 $(Y|X)(Z|Y)R' \Leftrightarrow X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $Z \in E/S$ 与 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X$ 与 $y \in Y$ 与 $z \in Z \Rightarrow R$ 与 $(y|x)(z|y)R)$ ，由于 R 具有传递性，故 R' 具有传递性。

R' 与 $(X|Z)(Y|X)(Z|Y)R' \Leftrightarrow X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $(\forall x)(\forall y)(x \in X$ 与 $y \in Y \Rightarrow R$ 与 $(x|z)(y|x)(z|y)R)$ ，等价于 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $(\forall x)(\forall y)(x \in X$ 与 $y \in Y \Rightarrow S)$ ，如果 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ ， $x \in X$ 与 $y \in Y$ ，根据补充证明规则38 (1)， $S \Leftrightarrow (\exists X)(x \in X$ 与 $y \in X$ 与 $X \in E/S)$ ，则 $(\exists X)(x \in X$ 与 $y \in X$ 与 $X \in E/S)$ ，因此 $X = Y$ 。故 R' 与 $(X|Z)(Y|X)(Z|Y)R' \Rightarrow X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $X = Y$ 。

同时，由于 $R \Rightarrow (x|y)R$ 与 $(y|x)R$ ，因此 $R' \Rightarrow X \in E/S$ 与 $(\forall X)(x \in X \Rightarrow (x|y)R)$ ， $R' \Rightarrow Y \in E/S$ 与 $(\forall y)(y \in Y \Rightarrow (y|x)R)$ ，故 $R' \Rightarrow (X|Y)R'$ 与 $(Y|X)R'$ 。

另外，由于 $x \in E \Leftrightarrow (y|x)R$ ，故 $X \in E/S \Rightarrow (X|Y)R'$ 。

综上，得证。

补充证明规则 79.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中,
 R 为偏序关系 (或预序关系), R' 为 R 与 $x \in E$ 与 $y \in E$, 如果 $x \in E \Rightarrow (y|x)R$, 则 R' 为在 E 上的
的偏序关系 (或预序关系).

证明: $x \in E \Rightarrow (y|x)R$, 故 $x \in E \Rightarrow (y|x)R'$, 同时, $R' \Rightarrow x \in E$, 得证.

补充证明规则 80.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中,
公式 R 为关于 x, y 在 E 上的预序关系, 则 R 为生成图的公式.

证明: 根据补充证明规则77, $R \Rightarrow (x, y) \in E \times E$, 根据补充证明规则18可证.

定义 82. 预序图 (*graphe d'préordre*)

对于图 G , 如果 $(x, y) \in G$ 为在 E 上的预序关系, 则称 G 为在 E 上的预序图.

定义 83. 在集合上的预序对应 (*correspondance d'préordre dans un ensemble*), 预序 (*préordre*)

如果 F 为在 E 上的预序图, 则 (F, E, E) 称为在 E 上的预序对应, 或称为在 E 上的预序.

补充定理 154.

(1) 当且仅当同时满足下列两个条件时, 对应 (G, E, E) 为在 E 上的预序对应:

第一, $G \circ G \subset G$;

第二, $\Delta_{E \times E} \subset G$.

(2) G 为在 E 上的预序图, 则 $(x, y) \in G$ 与 $(y, x) \in G$ 为生成图的公式, 其生成的图
为 $G \cap G^{-1}$.

证明:

(1) $G \circ G \subset G$ 等价于传递性, $\Delta_E \times E \subset G$ 与预序的第二个性质等价, 得证.

(2) $(x, y) \in G$ 与 $(y, x) \in G \Rightarrow (x, y) \in G$, 故其为生成图的公式. 根据定义可证其生成
的图为 $G \cap G^{-1}$.

补充定理 155.

(1) 在 \emptyset 上的唯一的预序图是 \emptyset , 在 \emptyset 上的唯一的预序是 $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$. 并且, 该预序图
(或预序) 是偏序图 (或偏序).

(2) 在 x 上的唯一的预序图是 $\{(x, x)\}$, 在 x 上的唯一的预序是 $(\{(x, x)\}, x, x)$. 并且, 该
预序图 (或预序) 是偏序图 (或偏序).

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 根据补充定理154 (1) 可证.

补充定理 156.

G 为在 E 上的预序图, 令 S 为公式 $(x, y) \in G$ 与 $(y, x) \in G$, 令 R' 为公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $(\exists x)(\exists y)(x \in X$ 与 $y \in Y$ 与 $(x, y) \in G)$, 则该公式生成的图 G' 为 $(E/S) \times (E/S)$ 的子集, 并且是 G 在 $E \times E$ 到 $(E \times E)/(S \times S)$ 的规范映射下的像.

证明: $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $(\exists x)(\exists y)(x \in X$ 与 $y \in Y$ 与 $(x, y) \in G) \Rightarrow X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$, 故该公式生成的图 G' 为 $(E/S) \times (E/S)$ 的子集.

令 S 的图为 F , 则 $F = G \cap G^{-1}$. 令 f 为 E 到 E/S 的规范映射, g 为 $E \times E$ 到 $(E \times E)/(S \times S)$ 的规范映射, 根据补充证明规则62 (1), $g(x, y) = f(x) \times f(y)$. 则 $(u, v) \in g\langle G \rangle \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(u = f(x)$ 与 $v = f(y)$ 与 $(x, y) \in G)$, 等价于 $(\exists x)(\exists y)(u = F\langle x \rangle$ 与 $v = F\langle y \rangle$ 与 $(x, y) \in G)$, 根据补充证明规则38 (2), 等价于 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $(\exists x)(\exists y)(x \in X$ 与 $y \in Y$ 与 $(x, y) \in G)$, 得证.

记号定义 19. 不等式 (*inégalité*)

令 R 为关于 x, y 的预序关系或偏序关系, 在没有歧义的情况下, R 可以记作 $x \leq y$. $x \leq y$ 也可以记作 $y \geq x$, $x \leq y$ 与 $x \neq y$ 记作 $x < y$, $x \geq y$ 与 $x \neq y$ 记作 $x > y$.

令 G 为在 E 上的预序图或偏序图, $S = (G, E, E)$, 则 $(x, y) \in G$ 可以记作 $x \leq_S y$. $x \leq_S y$ 也可以记作 $y \geq_S x$, $x \leq_S y$ 与 $x \neq_S y$ 记作 $x <_S y$, $x \geq_S y$ 与 $x \neq_S y$ 记作 $x >_S y$. 在没有歧义的情况下, 可以分别简记为 $x \leq y$ 、 $y \geq x$ 、 $x < y$ 、 $x > y$.

定义 84. 更细的预序 (*préordre plus fin*), 更细的偏序 (*ordre plus fin*)

(F, E, E) 、 (F', E, E) 均为在 E 上的预序 (或偏序), 如果 $F' \subset F$, 则称 (F, E, E) 为比 (F', E, E) 更细的预序 (或偏序).

注: 在原书中, “更细” 这个概念包括与自身相等的情况, 即一个预序 (或偏序) 比自身更细.

证明规则 58.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中:

- (1) $x \leq y \Leftrightarrow x < y$ 或 $x = y$;
- (2) $x \leq y$ 与 $y < z \Rightarrow x < z$;
- (3) $x < y$ 与 $y \leq z \Rightarrow x < z$;
- (4) $x \leq y$ 与 $y < z \Rightarrow x < z$.

证明: 根据定义可证.

定义 85. 偏序集 (*ensemble ordonné*), 预序集 (*ensemble préordonné*)

F 是在 E 上的偏序 (或预序), 则称 E 为按偏序 (或预序) F 排序的偏序集 (或预序集), 或称 E 为按偏序关系 (或预序关系) $y \in F\langle x \rangle$ 或与之等价的公式排序的偏序集 (或预序集).

定义 86. 集合的同构 (*isomorphisme de ensembles*), 集合的逆同构 (*isomorphisme réciproque de ensembles*), 同构于一个集合 (*isomorphe à un ensemble*)

如果 E 、 E' 分别为按 F 、 F' 排序的偏序集 (或预序集), f 为 E 到 E' 的双射, 且 $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$, 则称 f 为 E 到 E' 的同构, f 的逆映射称为 f 的逆同构. 如果存在 E 到 E' 的同构, 则称 E 同构于 E' .

补充定理 157. 同构的逆映射为同构

令 f 为 E 到 E' 的同构, 则 f 的逆映射为 E' 到 E 的同构.

定义 87. 集合的逆同构 (*isomorphisme réciproque de ensembles*)

令 f 为 E 到 E' 的同构, 则 f 的逆映射称为 f 的逆同构.

定义 88. 按包含关系排序的偏序集 (*ensemble ordonné par inclusion*)

$F \subset \mathcal{P}(E)$, 则按偏序关系 $x \subset y$ 与 $x \in F$ 与 $y \in F$ 排序的偏序集 F , 称为按包含关系排序的偏序集.

定义 89. 可比较的 (*comparable*), 不可比较的 (*incomparable*)

令 E 为预序集, 如果 $x \leq y$ 或 $y \leq x$, 则称 x 和 y 为可比较的. 否则, 称 x 和 y 为不可比较的.

补充定理 158.

令 E 为按 F 排序的偏序集 (或预序集), F 的图为 G , $A \subset E$, 则 $(x, y) \in G \cap (A \times A)$ 为在 A 上关于 x 、 y 的偏序关系 (或预序关系), $(G \cap (A \times A), A, A)$ 是在 A 上的偏序对应 (或预序对应).

证明: 根据定义可证.

元数学定义 59. 导出的偏序 (*ordre induits*), 导出的预序 (*préordre induits*), 导出的偏序关系 (*relation de ordre induits*), 导出的预序关系 (*relation de préordre induits*), 偏序子集 (*partie ordonné*), 预序子集 (*partie préordonné*), 偏序的延拓 (*prolongements de l'ordre*), 预序的延拓 (*prolongements de l'relation de ordre induits*), 偏序关系的延拓 (*prolongements de l'ordre*), 预序关系的延拓 (*prolongements de relation de l'ordre induits*)

包含 2 元特别符号 \in 、显式公理 1、显式公理 2、显式公理 3 和公理模式 8 的等式理论 M 中, 令 E 为按 F 排序的偏序集 (或预序集), F 的图为 G , $A \subset E$, 则 $(G \cap (A \times A), A, A)$ 称为 F 在 A 上导出的偏序 (或预序); $(x, y) \in G \cap (A \times A)$ 或与之等价的公式, 称为偏序关系 $(x, y) \in G$ 或与之等价的公式在 A 上导出的偏序关系 (或预序关系); 按该偏序关系 (或预序关系) 在 A 上导出的偏序排序的偏序集, 称为 E 的偏序子集 (或预序子集). 同时, F 称为偏序 (或预序) $(G \cap (A \times A), A, A)$ 在 E 上的延拓; $(x, y) \in G$ 或与之等价的公式, 称为偏序关系 (或预序关系) $(x, y) \in G \cap (A \times A)$ 或与之等价的公式在 E 上的延拓.

补充定理 159.

偏序集（或预序集）的偏序子集（或预序子集）的偏序子集（或预序子集），也是该偏序集（或预序集）的偏序子集（或预序子集）。

证明：根据定义可证。

补充定理 160.

令 $(E_i)_{i \in I}$ 为集族，对任意 $i \in I$ ， F_i 为在 E_i 上的偏序（或预序），其图为 G_i ，将关于 x_i 、 y_i 的偏序关系（或预序关系） $(x_i, y_i) \in G_i$ 记作 $x_i \leq y_i$ ，令 $F = \prod_{i \in I} E_i$ ，则公式 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_i x \leq pr_i y)$ 是关于 x 、 y 在 F 上的偏序关系（或预序关系）。

证明：根据定义可证。

定义 90. 偏序的乘积 (*ordre produit*)，预序的乘积 (*préordre produit*)，偏序关系的乘积 (*relation du ordre produit*)，预序关系的乘积 (*relation du préordre produit*)，偏序集的乘积 (*produit d'ensembles ordonnés*)，预序集的乘积 (*produit d'ensembles préordonnés*)

令 $(E_i)_{i \in I}$ 为集族，对任意 $i \in I$ ， F_i 为在 E_i 上的偏序（或预序），其图为 G_i ，将关于 x_i 、 y_i 的偏序关系（或预序关系） $(x_i, y_i) \in G_i$ 记作 $x_i \leq y_i$ ，令 $F = \prod_{i \in I} E_i$ ， G 为公式 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_i x \leq pr_i y)$ 生成的图，则 (G, F, F) 称为偏序（或预序） $(F_i)_{i \in I}$ 的乘积， $x \leq y$ 称为上述各偏序（或预序）相应的偏序关系（或预序关系）的乘积，按 $(F_i)_{i \in I}$ 的乘积排序的 F 称为偏序集（或预序集） $(E_i)_{i \in I}$ 的乘积。

补充定理 161.

令 F_1 为在 E_1 上的偏序（或预序）， F_2 为在 E_2 上的偏序（或预序），则公式 $pr_1 x \leq pr_1 y$ 与 $pr_2 x \leq pr_2 y$ 是关于 x 、 y 在 $E_1 \times E_2$ 上的偏序关系（或预序关系）。

证明：根据定义可证。

定义 91. 两个偏序的乘积 (*produit de deux ordres*)，两个预序的乘积 (*produit de deux préordres*)，两个偏序关系的乘积 (*relation du produit de deux ordres*)，两个预序关系的乘积 (*relation du produit de deux préordres*)，两个偏序集的乘积 (*produit de deux ensembles ordonnés*)，两个预序集的乘积 (*produit de deux ensembles préordonnés*)

令 F_1 为在 E_1 上的偏序（或预序）， F_2 为在 E_2 上的偏序（或预序）， G 为公式 $pr_1 x \leq pr_1 y$ 与 $pr_2 x \leq pr_2 y$ 生成的图，则 $(G, E_1 \times E_2, E_1 \times E_2)$ 称为偏序（或预序） F_1 和 F_2 的乘积。 $x \leq y$ 称为上述两个偏序（或预序）相应的偏序关系（或预序关系）的乘积， F_1 和 F_2 的乘积排序的 $E_1 \times E_2$ 称为偏序集（或预序集） E_1 和 E_2 的乘积。

补充定理 162.

令 $(E_i)_{i \in I}$ 为集族, 对任意 $i \in I$, F_i 为在 E_i 上的偏序 (或预序), 其图为 G_i , 将关于 x_i 、 y_i 的偏序关系 (或预序关系) $(x_i, y_i) \in G_i$ 记作 $x_i \leq y_i$, 令 $F = \prod_{i \in I} E_i$, G 为上述偏序关系 (或预序关系) 的乘积生成的图, 则 G 为 $\prod_{i \in I} G_i$ 在 $\prod_{i \in I} (E_i \times E_i)$ 到 $F \times F$ 的规范映射下的像.

证明:

令该规范映射为 F , 对任意 $f \in \prod_{i \in I} G_i$, 则 $F(f) = ((pr_1(pr_i f))_{i \in I}, (pr_2(pr_i f))_{i \in I})$, 等于 $((pr_1 f(i))_{i \in I}, (pr_2 f(i))_{i \in I})$, 令 $f(i) = (x_i, y_i)$, $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$, 故 $F(f) = (x, y)$. 并且, 对任意 $i \in I$, $(x_i, y_i) \in G_i$, 故 $(x, y) \in G$. 反过来, 如果 $(x, y) \in G$, 则对任意 $i \in I$, $(x_i, y_i) \in G_i$, 因此 $((x_i, y_i))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$. 综上, 得证.

补充定理 163.

令 h 为 B^A 到 $\mathcal{F}(A; B)$ 的规范映射, F 为偏序集 (或预序集), R 为公式 $f \in \mathcal{F}(A; B)$ 与 $g \in \mathcal{F}(A; B)$ 与 $x \in A \Rightarrow f(x) \leq g(x)$, R' 为公式 $F \in B^A$ 与 $g \in B^A$ 与 $x \in A \Rightarrow (F, A, B)(x) \leq (G, A, B)(y)$, 则 R 为在 $\mathcal{F}(A; B)$ 上的偏序关系 (或预序关系), R' 为在 B^A 上的偏序关系 (或预序关系), 并且 h 为 B^A 到 $\mathcal{F}(A; B)$ 的同构.

证明: 根据定义可证 R 和 R' 为偏序关系 (或预序关系), 根据补充定理 123, $G \rightarrow (G, A, B)$ 为双射, 得证.

定义 92. 单增映射 (*application croissante*), 单减映射 (*application décroissante*), 单调映射 (*application monotone*), 严格单增映射 (*application strictement croissante*), 严格单减映射 (*application strictement décroissante*), 严格单调映射 (*application trictement monotone*)

令 E 、 F 为预序集, f 为 E 到 F 的映射, 如果 $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, 则称 f 为单增映射, 如果 $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, 则称 f 为单减映射, 如果 f 是单增映射或单减映射, 则称 f 为单调映射. 如果 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, 则称 f 为严格单增映射, 如果 $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, 则称 f 为严格单减映射, 如果 f 是严格单增的或严格单减的, 则称 f 为严格单调映射.

补充定理 164.

令 E 、 F 为偏序集, f 为 E 到 F 的映射, 把 E 、 F 其中之一的偏序关系替代为其相反关系, 如果 f 原来是单增映射 (或单减映射), 则变为单减映射 (或单增映射).

证明: 根据定义可证.

补充定理 165.

(1) 如果常数函数的定义域和到达域为偏序集, 则该常数函数是单增映射, 也是单减映射.

(2) 如果函数是单调映射 (或单增映射、单减映射), 并且是单射, 则该函数是严格单调映射 (或单增映射、单减映射)

证明：根据定义可证。

补充定理 166.

E 、 F 为偏序集， f 为 E 到 F 的双射，则 f 为单增映射、 f^{-1} 为单增映射、 f 为 E 到 F 的同构三者等价。

证明：根据定义可证。

定义 93. 单增子集族 (*famille de parties croissante*)，单减子集族 (*famille de parties décroissante*)，严格单增子集族 (*famille de parties strictement croissante*)，严格单减子集族 (*famille de parties strictement décroissante*)

$(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的子集族，其指标集 I 为偏序集， $\mathcal{P}(E)$ 为按包含关系排序的偏序集，如果映射 $i \rightarrow X_i (i \in I, X_i \in \mathcal{P}(E))$ 为单增映射（或单减映射、严格单增映射、严格单减映射），则称 $(X_i)_{i \in I}$ 为单增子集族（或单减子集族、严格单增子集族、严格单减子集族）。

定理 58.

如果 E 、 E' 为偏序集， E 到 E' 的映射 u 和 E' 到 E 的映射 v 均为单减映射，并且对任意 $x \in E$ 、 $x' \in E'$ ， $v(u(x)) \geq x$ ， $u(v(x')) \geq x'$ ，则 $u \circ v \circ u = u$ 、 $v \circ u \circ v = v$ 。

证明： $v(u(x)) \geq x$ ，故 $u(v(u(x))) \leq u(x) \circ u(v(u(x))) \geq x$ ，故 $u(v(u(x))) \geq u(x)$ ，因此 $u \circ v \circ u = u$ ，同理可证 $v \circ u \circ v = v$ 。

补充证明规则 81.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中：

(1) E 为预序集， $x \leq y$ 为在 E 上的预序关系， S 为在 E 上的等价关系，令 R 为公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$ 与 $x \leq y)))$ ，则 R 为关于 X 、 Y 在 E/S 上的预序关系。

(2) E 为偏序集， $x \leq y$ 为在 E 上的偏序关系， S 为在 E 上的等价关系，令 R 为公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$ 与 $x \leq y)))$ ，如果 $x \leq y$ 与 $y \leq z$ 与 $x \equiv z(mod S) \Rightarrow x \equiv y(mod S)$ ，则 R 为关于 X 、 Y 在 E/S 上的偏序关系。

证明：

(1) 如果 $(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$ 与 $x \leq y))$ 、 $((\forall y)(y \in Y \Rightarrow (\exists z)(z \in Z$ 与 $y \leq z)))$ ，则 $(y \in Y$ 与 $x \leq y) \Rightarrow (\exists z)(z \in Z$ 与 $y \leq z)$ 与 $x \leq y$ ，因此 $(y \in Y$ 与 $x \leq y) \Rightarrow (\exists z)(z \in Z$ 与 $x \leq z)$ ，故 $((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists z)(z \in Y$ 与 $x \leq z)))$ ，传递性得证。

由于 $(x \in X \Rightarrow (x \in X$ 与 $x \leq x))$ ，故 $(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in X$ 与 $x \leq y))$ 。得证。

(2) 如果 $(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$ 与 $x \leq y))$ 、 $((\forall y)(y \in Y \Rightarrow (\exists z)(z \in X$ 与 $y \leq z)))$ ，则 $x \in X \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(y \in Y$ 与 $x \leq y$ 与 $z \in X$ 与 $y \leq z)$ ，故 $x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in X$ 与 $y \in Y)$ ，因此 $X = Y$ ，得证。

元数学定义 60. 预序关系的商 (*quotient relation de préordre*), 商预序集 (*ensemble préordonné quotient*), 偏序关系的商 (*quotient relation de ordre*), 商偏序集 (*ensemble ordonné quotient*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中:

E 为预序集, S 为在 E 上的等价关系, 公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \text{ 与 } x \leq y)))$ 称为预序关系 $x \leq y$ 除以 S 的商, 按该预序排序的 E/S , 称为预序集 E 除以 S 的商预序集, 或称为 E/S 的商预序集.

E 为偏序集, S 为在 E 上的等价关系, 如果 $x \leq y$ 与 $y \leq z$ 与 $x \equiv z(mod S) \Rightarrow x \equiv y(mod S)$, 则公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \text{ 与 } x \leq y)))$ 称为偏序关系 $x \leq y$ 除以 S 的商, 按该偏序排序的 E/S , 称为偏序集 E 除以 S 的商偏序集, 或称为 E/S 的商偏序集.

补充证明规则 82.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, E 为预序集, S 为在 E 上的等价关系, f 为 E 到 E/S 的规范映射:

(1) 对任何 E/S 的商预序集到预序集 F 的映射 g , 如果 $g \circ f$ 为单增映射, 则 g 为单增映射.

(2) 当且仅当 S 满足下列条件时, f 为单增映射: $(x \leq y \text{ 与 } x \equiv x'(mod S)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E \text{ 与 } y \equiv y'(mod S) \text{ 与 } x' \leq y')$.

证明:

(1) 如果 $X \leq Y$, 则对任意 $x \in X$, 存在 $y \in Y$, 并且 $x \leq y$. 根据补充证明规则36 (2), $f(x) = X$, $f(y) = Y$, 由于 $g(f(x)) \leq g(f(y))$, 故 $g(X) \leq g(Y)$, 得证.

(2) 如果 f 是单增映射, 对任意 E 的元素 x 、 y 、 x' , 如果 $x \leq y$ 、 $x \equiv x'(mod S)$, 则 $f(x) \leq f(y)$, 故 $f(x') \leq f(y)$, 因此, 存在 $y' \in f(y)$, 使 $x' \leq y'$.

反过来, 对任意 E 的元素 x 、 y , $x \leq y$, 则对任意 $x' \in f(x)$, 都存在 $y' \in f(y)$, 且 $x' \leq y'$, 故 $f(x) \leq f(y)$, 得证.

元数学定义 61. 同预序关系弱相容 (*faiblement compatible avec une relation de préordre*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, E 为预序集, S 为在 E 上的等价关系, E/S 为商预序集, f 为 E 到 E/S 的规范映射, 如果 f 为单增映射, 则称 S 在 x 、 y 上同在 E 上的预序关系 $x \leq y$ 弱相容, 在没有歧义的情况下, 也可以简称为 S 同在 E 上的预序关系 $x \leq y$ 弱相容.

补充证明规则 83.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， E 为预序集， S 为在 E 上的等价关系， f 为 E 到 E/S 的规范映射，如果 $x \leq y$ 在 x 上同 S 相容，则 S 同 $x \leq y$ 弱相容。

证明：根据补充证明规则82（2）可证。

补充定理 167.

I 为偏序集， $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族，令 F 为集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的和， $G = \{(x, y) | (x, y) \text{ 为有序对与 } x \in F \text{ 与 } y \in F \text{ 与 } (pr_2x < pr_2y \text{ 或 } (pr_2x = pr_2y \text{ 与 } (在E_{pr_2x} \text{ 上 } pr_1x \leq pr_1y)))\}$ ，则 G 为在 F 上的偏序。

证明：根据定义可证。

定义 94. 偏序集族的序数和 (*somme ordinale de la famille d'ensembles ordonnés*)

I 为偏序集， $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族，令 F 为集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的和， $G = \{(x, y) | (x, y) \text{ 为有序对与 } x \in F \text{ 与 } y \in F \text{ 与 } (pr_2x < pr_2y \text{ 或 } (pr_2x = pr_2y \text{ 与 } (在E_{pr_2x} \text{ 上 } pr_1x \leq pr_1y)))\}$ ，则称按 G 排序的 F 为偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和。

注：偏序类族的序数和通常不满足交换律。

补充定理 168.

I 为偏序集， $(E_i)_{i \in I}$ 、 $(F_i)_{i \in I}$ 为偏序集族，对任意 $i \in I$ ， E_i 同构于 F_i ，则 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和同构于 $(F_i)_{i \in I}$ 的序数和。

证明：令 E_i 到 F_i 的同构为 f_i ，则映射 $x \rightarrow (f_{pr_2x}(pr_1x), pr_2x)$ 为 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和到 $(F_i)_{i \in I}$ 的序数和的同构。

补充定理 169. 偏序集族的序数和的结合律

L 为偏序集， I 为偏序集族 $(J_l)_{l \in L}$ 的序数和，令 F_l 为偏序集族 $(E_i)_{i \in J_l}$ 的序数和，则集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和同构于集族 $(F_l)_{l \in L}$ 的序数和。

证明：令 f 为映射 $x \rightarrow ((pr_1x, pr_1(pr_2x)), pr_2(pr_2x))$ ，其为同构。

定义 95. 极大元 (*élément maximal*)，极小元 (*éléments minimal*)

E 为预序集， $a \in E$ ，如果 $x \leq a \Rightarrow x = a$ （或 $x \geq a \Rightarrow x = a$ ），则称 a 为极大元（或极小元）。

补充定理 170.

令 E 为预序集， a 为极小元（或极大元），把 E 的预序关系替代为其相反关系，则 a 变为极大元（或极小元）。

证明：根据定义可证。

定义 96. 最大元 (*éléments plus petit*), 最小元 (*éléments plus grand*)

E 为预序集, $a \in E$, 如果 $x \in E \Rightarrow x \leq a$ (或 $x \in E \Rightarrow x \geq a$), 则称 a 为 E 的最小元 (或最大元).

补充定理 171.

偏序集最多只有一个最小元, 一个最大元.

证明: 设 a, b 均为最小元, 则 $a \leq b, b \leq a$, 因此 $a = b$.

补充定理 172.

令 E 为偏序集, a 为最小元 (或最大元), 把 E 的偏序关系替代为其相反关系, 则 a 变为最大元 (或最小元).

证明: 根据定义可证.

补充定理 173.

令 f 为偏序集 E 到偏序集 F 的同构, 如果 E 有最小元 (或最大元) a , 则 F 有最小元 (或最大元) $f(a)$.

证明: 根据定义可证.

定理 59.

令 E 为偏序集, $a \notin E$, E' 为 E 和 $\{a\}$ 的和, 则存在唯一的在 E' 上的偏序, 其为在 E 上的偏序在 E' 上的延拓, 且 a 为最大元 (或最小元).

证明: 对于最大元的情况, 令在 E 上的偏序为 G , 令 $G' = G \cup \{z | pr_2 z = a \text{ 与 } pr_1 z \in E'\}$, 则 G' 符合条件.

设 G'' 也符合条件, 则 $G \subset G'$, 且对任意 $x \in E'$, $(x, a) \in G''$, 故 $G' \subset G''$, 同时, 设 $z \in G''$, 如果 $pr_1 z \in E$ 且 $pr_2 z \in E$, 由于 $G'' \cap E \times E = G$, 故 $z \in G$, 因此 $z \in G'$, 如果 $pr_1 z \in E$ 且 $pr_2 z = a$, 则 $z \in G'$, 如果 $pr_1 z = a$, 由于 $x \geq a \Rightarrow x = a$, 故 $z = (a, a)$, 因此 $z \in G'$, 综上, $G' = G''$.

同理可证最小元的情况.

定义 97. 向集合添加最大元得到的偏序集 (*ensemble ordonné obtenu adjoignant à un ensemble un plus grand élément*), 向集合添加最小元得到的偏序集 (*ensemble ordonné obtenu adjoignant à un ensemble un plus petit élément*)

令 E 为偏序集, $a \notin E$, E' 为 E 和 $\{a\}$ 的和, 令偏序 F 为在 E 上的偏序在 E' 上的延拓, 且 a 为最大元 (或最小元), 则按该偏序排序的 E' , 称为向 E 添加最大元 (或最小元) a 得到的偏序集.

定义 98. 共尾子集 (*partie cofinale*), 共首子集 (*partie coinitiale*) 令 E 为预序集, $A \subset E$, 如果 $(\forall x)(x \in E \Rightarrow (\exists y)(y \in A \text{ 与 } x \leq y))$, 则称 A 为 E 的共尾子集; 如果 $(\forall x)(x \in E \Rightarrow (\exists y)(y \in A \text{ 与 } x \geq y))$, 则称 A 为 E 的共首子集.

补充定理 174.

任何预序集都是自身的共尾子集和共首子集.

证明: 根据定义可证.

补充定理 175.

当且仅当 $\{a\}$ 是偏序集 E 的共尾子集 (或共首子集) 时, a 是 E 的最大元 (或最小元).

证明: 根据定义可证.

定义 99. 下界 (*minorant*), 上界 (*majorant*), 严格下界 (*minorant strict*), 严格上界 (*majorant strict*)

E 为预序集, $X \subset E$, $x \in E$, 如果 $(\forall y)(y \in X \Rightarrow x \leq y)$, 则称 x 为 X 在 E 上的下界, 在没有歧义的情况下也可以简称为 X 的下界; 如果 $(\forall y)(y \in X \Rightarrow x \geq y)$, 则称 x 为 X 在 E 上的上界, 在没有歧义的情况下也可以简称为 X 的上界. 如果上界不属于 X , 则称其为严格上界; 如果下界不属于 X , 则称其为严格下界.

补充定理 176.

(1) 令 E 为预序集, $X \subset E$, x 为 X 在 E 上的下界 (或上界), 把 E 的预序关系替代为其相反关系, 则 x 变为 X 在 E 上的上界 (或下界).

(2) 令 E 为预序集, $X \subset E$, x 为 X 在 E 上的下界 (或上界), $x \leq z$ (或 $x \geq z$), 则 z 为 X 在 E 上的下界 (或上界).

证明: 根据定义可证.

补充定理 177.

令 E 为预序集, $X \subset E$, $Y \subset X$, x 为 X 在 E 上的下界 (或上界), 则 x 为 Y 在 E 上的下界 (或上界).

证明: 根据定义可证.

补充定理 178.

E 为偏序集, $X \subset E$, 且 X 为 E 的偏序子集, 则当且仅当 $(\exists x)((x \text{ 为 } X \text{ 在 } E \text{ 上的下界}) \text{ 与 } x \in X)$ 时, X 有最小元; 当且仅当 $(\exists x)((x \text{ 为 } X \text{ 在 } E \text{ 上的上界}) \text{ 与 } x \in X)$ 时, X 有最大元.

证明: 根据定义可证.

补充定理 179.

偏序集的子集如果有最大元，则最大元是其上界；如果有最小元，则最小元是其下界。

证明：根据定义可证。

补充定理 180.

E 为预序集， $X \subset E$ ，则“ x 为 X 在 E 上的下界（或上界）”为关于 x 的集合化公式。

证明： x 为 X 的下界 $\Rightarrow x \in E$ ，根据证明规则52，下界的情况得证，上界的情况同理可证。

定义 100. 下界集 (*ensemble des minorant*)，上界集 (*majorant*)

E 为预序集， $X \subset E$ ，则 $\{x|x \text{ 为 } X \text{ 在 } E \text{ 上的下界}\}$ ($\{x|x \text{ 为 } X \text{ 在 } E \text{ 上的上界}\}$) 称为 X 在 E 上的下界集（或上界集），在没有歧义的情况下也可以简称为 X 的下界集（或上界集）。

定义 101. 有下界 (*minorée*)，有上界 (*majorée*)，有界 (*bornée*)

E 为预序集， $X \subset E$ ，如果“ X 在 E 上的下界集（或上界集） $\neq \emptyset$ ”，则称 X 在 E 上有下界（或有上界）。如果 X 在 E 上有下界或有上界，则称 X 在 E 上有界。在没有歧义的情况下也可以简称为 X 有上界（或有下界、有界）。

补充定理 181.

E 为预序集， $X \subset E$ ， $Y \subset X$ ， X 在 E 上有上界（或有下界、有界），则 Y 在 E 上有上界（或有下界、有界）。

证明：根据补充定理177可证。

定义 102. 有下界的映射 (*application minorée*)，有上界的映射 (*application majorée*)，有界的映射 (*application bornée*)

E 为预序集， f 为 A 到 E 的映射，如果 $f\langle A \rangle$ 在 E 上有下界（或有上界、有界），则称 f 为有下界的映射（或有上界的映射、有界的映射）。

定义 103. 集合的最大下界 (*borne inférieure d'un ensemble*)，集合的最小上界 (*borne supérieure d'un ensemble*)，族的最大下界 (*borne inférieure d'une famille*)，族的最小上界 (*borne supérieure d'une famille*)

令 E 为偏序集， $X \subset E$ ，如果 X 在 E 上的下界集（或上界集）有最大元（或最小元），则称其为 X 在 E 上的最大下界（或最小上界），记作 $\inf_E X$ （或 $\sup_E X$ ），在没有歧义的情况下也可以简记为 $\inf X$ （或 $\sup X$ ）。

如果 X 为二元集合 $\{x, y\}$ 、三元集合 $\{x, y, z\}$ 、四元集合 $\{x, y, z, t\}$ ，为 X 在 E 上的最大下界（或最小上界）也可以记作 $\inf_E(x, y)$ 、 $\inf_E(x, y, z)$ 、 $\inf_E(x, y, z, t)$ （或 $\sup_E(x, y)$ 、 $\sup_E(x, y, z)$ 、 $\sup_E(x, y, z, t)$ ），在没有歧义的情况下也可以简记为 $\inf(x, y)$ 、 $\inf(x, y, z)$ 、 $\inf(x, y, z, t)$ （或 $\sup(x, y)$ 、 $\sup(x, y, z)$ 、 $\sup(x, y, z, t)$ ）。

对于族 $(a_i)_{i \in I}$, 如果 $\bigcup_{i \in I} \{a_i\} \subset E$, 则称 $\bigcup_{i \in I} \{a_i\}$ 的最大下界 (或最小上界) 为该族的最大下界 (或最小上界), 记作 $\inf_E (a_i)_{i \in I}$ (或 $\sup_E (a_i)_{i \in I}$), 在没有歧义的情况下也可以简记为 $\inf (a_i)_{i \in I}$ (或 $\sup (a_i)_{i \in I}$), 或者简记作 $\inf a_i$ (或 $\sup a_i$).

补充定理 182.

令 E 为偏序集, $X \subset E$, 把 E 的偏序关系替代为其相反关系, 则 X 在 E 上的最小上界变为最大下界, 在 E 上的最大下界变为最小上界.

证明: 根据定义可证.

补充定理 183.

令 E 为偏序集, X 是 E 的偏序子集:

(1) 如果 X 有最大元 (或最小元), 则 X 在 E 上的最小上界 (或最大下界) 是其最大元 (或最小元).

(2) 如果 X 在 E 上有最小上界 (或最大下界) x , 且 $x \in X$, 则 x 是 X 的最大元 (或最小元).

证明:

(1) 根据补充定理179可证.

(2) 根据定义可证.

补充定理 184.

令 E 为偏序集, X 是 E 的偏序子集, 且 $X \neq \emptyset$, 如果 x 是 X 的最小上界, 也是 X 的最大下界, 则 $X = \{x\}$.

证明: 对任意 $y \in X$, $x \leq y$ 、 $y \leq x$, 故 $x = y$, 因此 $X \subset \{x\}$, 又因为 $X \neq \emptyset$, 故 $X = \{x\}$.

定义 104. 映射的最大下界 (*borne inférieure d'une application*), 映射的最小上界 (*borne supérieure d'une application*)

E 为预序集, f 为 A 到 E 的映射, $f(A)$ 的最大下界称为映射 f 的最大下界, 令 x 为不出现在 f 的图、 A 、 E 的任何一个字母, 则记作 $\inf_{x \in A} f(x)$, $f(A)$ 的最小上界称为映射 f 的最小上界, 记作 $\sup_{x \in A} f(x)$.

定理 60.

令 E 为偏序集, $A \subset E$, 并且有在 E 上的最大下界和最小上界, 当 $A \neq \emptyset$ 时, $\inf A \leq \sup A$; 当 $A = \emptyset$ 时, $\inf A$ 为 E 的最大元, $\sup A$ 为 E 的最小元.

证明: 根据定义可证.

定理 61.

令 E 为偏序集, A 、 B 均为 E 的子集, 并且均有在 E 上的最大下界 (或最小上界), 如果 $A \subset B$, 则 $\inf A \geq \inf B$ ($\sup A \leq \sup B$).

证明: 根据定义可证.

定理 62.

令 E 为偏序集, E 的元素族 $(x_i)_{i \in I}$ 有在 E 上的最小上界 (或最大下界), 则对任意 $J \subset I$, $(x_i)_{i \in J}$ 也有在 E 上的最小上界 (或最大下界), 并且 $\sup_{i \in J} x_i \leq \sup_{i \in I} x_i$ ($\inf_{i \in J} x_i \geq \inf_{i \in I} x_i$).

证明: 根据定义可证.

定理 63.

令 E 为偏序集, E 的元素族 $(x_i)_{i \in I}$ 、 $(y_i)_{i \in I}$ 是两个 E 的子集族, 其指标集相同且均有最小上界 (或最大下界), 如果 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq y_i)$ 则 $\sup_{i \in I} x_i \leq \sup_{i \in I} y_i$ ($\inf_{i \in I} x_i \leq \inf_{i \in I} y_i$).

证明: 设 $a = \sup_{i \in I} y_i$, 则 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow y_i \leq a)$, 故 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq a)$, 因此 $a/(x_i)_{i \in I}$ 的上界, 上界的情况得证. 下界的情况同理可证.

定理 64.

令 E 为偏序集, $(x_i)_{i \in I}$ 是 E 的元素族, $(J_l)_{l \in L}$ 为指标集 I 的覆盖, 对任意 $l \in L$, $(x_i)_{i \in J_l}$ 有在 E 上的最小上界 (或最大下界), 则当且仅当 $(\sup_{i \in J_l} x_i)_{l \in L}$ 有在 E 上的最小上界 (或最大下界) 时, $(x_i)_{i \in I}$ 有在 E 上的最小上界 (或最大下界), 且 $\sup_{i \in I} x_i = \sup_{l \in L} (\sup_{i \in J_l} x_i)$ ($\inf_{l \in L} (\inf_{i \in J_l} x_i) = \inf_{i \in I} x_i$).

证明: 令 $b_l = \sup_{i \in J_l} x_i$, 设 $(x_i)_{i \in I}$ 有最小上界 a , 根据定理61, 对任意 $l \in L$, $a \geq b_l$. 另一方面, 由于 $(J_l)_{l \in L}$ 为指标集 I 的覆盖, 故若 c 满足对任意 $l \in L$, $c \geq b_l$, 则对任意 $i \in I$, $c \geq x_i$, 故 $c/(x_i)_{i \in I}$ 的上界, 因此 $c \geq a$, 故 $a = \sup_{l \in L} (\sup_{i \in J_l} x_i)$. 反过来, 如果 $(\sup_{i \in J_l} x_i)_{l \in L}$ 有最小上界 a' , 则对任意 $l \in L$, $a' \geq b_l$. 另一方面, 如果 c' 满足对任意 $l \in L$, $c' \geq b_l$, 则对任意 $l \in L$, $c' \geq b_l$, 因此 $c' \geq a'$, 故 $a = \sup_{i \in I} x_i$.

最大下界的情况同理可证.

定理 65.

令 E 为偏序集, E 的元素族 $(x_{l,m})_{(l,m) \in L \times M}$ 为双族, 如果对任意 $m \in M$, $(x_{l,m})_{l \in L}$ 在 E 上有最小上界 (或最大下界), 则当且仅当 $(\sup_{l \in L} x_{l,m})_{m \in M}$ 在 E 上有最小上界 (或最大下界) 时, $(x_{l,m})_{(l,m) \in L \times M}$ 在 E 上有最小上界 (或最大下界), 且 $\sup_{(l,m) \in L \times M} x_{l,m} = \sup_{m \in M} (\sup_{l \in L} x_{l,m})$ ($\inf_{(l,m) \in L \times M} x_{l,m} = \inf_{m \in M} (\inf_{l \in L} x_{l,m})$).

证明：根据定理64可证.

定理 66.

令 $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族, $E = \prod_{i \in I} E_i$, E 为按各偏序的乘积排序的偏序族, $A \subset E$, 对任意 $i \in I$, 令 $A_i = pr_i A$, 则当且仅当对任意 $i \in I$, A_i 在 E_i 上有最小上界(或最大下界)时, A 在 E 上有最小上界(或最大下界), 且 $\sup A = \sup_{i \in I} pr_i A$.

证明：如果存在 $E_i = \emptyset$, 则 $E = \emptyset$, A_i 和 A 均无上界和下界, 无需考虑.

如果对任意 $i \in I$, $E_i \neq \emptyset$, 令 A_i 的最小上界为 b_i , 设 $(c_i)_{i \in I}$ 为 A 的上界, 则对任意 $i \in I$, $c_i \geq b_i$, 故 $(b_i)_{i \in I}$ 为 A 的最小上界. 反过来, 设 A 的最小上界为 $(a_i)_{i \in I}$, 对任意 $i \in I$, $x_i \in A_i$, 根据定理41, 存在 $x \in A$, 使 $pr_i x = x_i$; 由于 $x \leq (a_i)_{i \in I}$, 故 $x_i \leq a_i$, 因此, 对任意 $i \in I$, a_i 为 A_i 的上界; 另一方面, 假设 a'_i 为 A_i 的上界, 令 $c = (a - (i, a_i)) \cup (i, a'_i)$, 由于 $c \geq a$, 故 $a'_i \geq a_i$, 因此, 对任意 $i \in I$, a_i 为 A_i 的最小上界. 最大下界的情况同理可证.

补充定理 185.

E 为偏序集, f 为 E 到 E 的单增映射, 令 $A = \{z | z \in E \text{ 与 } f(z) \leq z\}$, $B = \{z | z \in E \text{ 与 } z \leq f(z)\}$, 则:

- (1) 如果 A 有最小上界 v , 则 $v = f(v)$;
- (2) 如果 B 有最大下界 w , 则 $w = f(w)$.

证明:

(1) 对任意 $z \in A$, $v \leq z$, 因此 $f(v) \leq f(z)$, 则 $f(v) \leq z$, 故 $f(v)$ 是 A 的下界, 因此 $f(v) \leq v$, 故 $f(f(v)) \leq f(v)$, 因此 $f(v) \in A$, $v \leq f(v)$, 综上, $v = f(v)$.

(2) 类似补充定理185 (1) 可证.

注: 本补充定理是习题63的推广.

定理 67.

令 E 为偏序集, $F \subset E$, $A \subset F$, 如果 A 在 E 上和 F 上均有最小上界(或最大下界), 则 $\sup_E A \leq \sup_F A$ ($\inf_E A \geq \inf_F A$); 如果 A 在 E 上有最小上界, 且 $\sup_E A \in F$, 则 $\sup_E A = \sup_F A$.

证明：根据定义可证.

定义 105. 右方有向集 (*ensemble filtrant à droite/ensemble filtrant croissant*), 左方有向集 (*ensemble filtrant à gauche/ensemble filtrant décroissant*)

E 是预序集, 如果 E 的任意二元子集在 E 上都有上界(有下界), 此时称 E 为右方有向集(左方有向集).

定理 68.

E 是偏序集, 如果 E 是右方有向集(或左方有向集), 则 E 的极大元是最大元(或极小元是最小元).

证明：设 E 是右方有向集， a 为极大元．对任意 $x \in E$ ，设 $\{x, a\}$ 的上界为 y ，则 $a \leq y$ ， $x \leq y$ ，故 $a = y$ ，因此 $x \leq a$ ，因此 a 为最大元．左方有向集的情形同理可证．

补充定理 186.

令 E 为偏序集，如果 E 为右方有向集（或左方有向集），把 E 的偏序关系替代为其相反关系，则 E 变为左方有向集（或右方有向集）．

证明：根据定义可证．

补充定理 187.

I 、 L 均为右方有向集， $I \times L$ 的预序关系为 $(x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y)$ ，则 $I \times L$ 为右方有向集．

证明：设 $(a, b) \in I \times L$ ， $(c, d) \in I \times L$ ， $\{a, c\}$ 在 I 上的上界为 x ， $\{b, d\}$ 在 L 上的上界为 y ，则 $(x, y) \in I \times L$ ，且 (x, y) 为 $\{(a, b), (c, d)\}$ 在 $I \times L$ 上的上界，得证．

定义 106. 格 (*ensemble réticulé*)

如果偏序集 E 的任何二元子集都有在 E 上的最大下界和最小上界，则称 E 为格．

补充定理 188.

- (1) 格的乘积是格．
- (2) 格的偏序子集为格．
- (3) 如果格有极小元，则其为格的最小元；如果格有极大元，则其为格的最大元．

证明：

- (1) 根据定理66可证．
- (2) 根据定义可证．
- (3) 根据定义可证．

定义 107. 不可约元素 (*élément irréductible*)

E 为格， $a \in E$ ，如果 $(\forall x)(\forall y)(x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $\sup(x, y) = a \Rightarrow x = a$ 或 $y = a)$ ，则称 a 为 E 的不可约元素．

补充定理 189.

E 为格， a 为 E 的最小元，则 a 为 E 的不可约元素．

证明：根据定义可证．

定义 108. 内部格 (*ensemble coréticulée*)

E 为格， $A \subset E$ ，如果对任意 $x \in A$ 、 $y \in A$ ，均有 $\sup_E(x, y) \in A$ 、 $\inf_E(x, y) \in A$ ，则称 A 为 E 的内部格．

定义 109. 全序集 (*ensemble totalement ordonné*), 全序 (*ordre total*), 全序关系 (*relation d'ordre total*), 全序图 (*graphe d'ordre total*), 全序子集 (*partie totalement ordonné*), 链 (*chaîne d'ensemble*)

令 E 为偏序集, 如果 E 的任何两个元素都是可比较的, 则称 E 为全序集. E 的偏序称为全序, E 的偏序关系称为全序关系, 其偏序图称为全序图.

令 E 为偏序集, 如果 E 的偏序子集是全序集, 则称其为 E 的全序子集, 或称其为 E 的链.

补充定理 190.

(1) E 为全序集, x, y 为 E 的元素, 则 $x = y$ 或 $x < y$ 或 $x > y$.

(2) 令 E 为全序集, 把 E 的全序关系替代为其相反关系, 则 E 仍为全序集.

证明: 根据定义可证.

补充定理 191.

全序集是左方有向集, 是右方有向集, 也是格.

证明: 根据定义可证.

补充定理 192. 偏序集族的序数和为右方有向集、全序集、格的条件

令 F 为偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和, 且对任意 $i \in I$, $E_i \neq \emptyset$:

(1) 当且仅当 I 为右方有向集且对 I 的任意极大元 i , 并且 E_i 均为右方有向集时, F 为右方有向集.

(2) 当且仅当 I 为全序集, 且对任意 $i \in I$, E_i 均为全序集时, F 为全序集.

(3) 当且仅当满足下列条件时, F 为格:

第一, I 为格, 并且, 对任意 $i \in I, j \in I$, 如果 i 和 j 是不可比较的, 则 $E_{\sup(i,j)}$ 有最小元, $E_{\inf(i,j)}$ 有最大元;

第二, 对任意 $i \in I$, 如果 $x \in E_i, y \in E_i$, 且 $\{x, y\}$ 在 E_i 上有上界 (或下界), 则 $\{x, y\}$ 在 E_i 上有最小上界 (或最大下界);

第三, 对任意 $i \in I$, 如果 $x \in E_i, y \in E_i$, 且 $\{x, y\}$ 在 E_i 上没有上界 (或下界), 则 $\{k | k \in I \text{ 与 } k > i\}$ (或 $\{k | k \in I \text{ 与 } k < i\}$) 有最小元 (或最大元) j , 且 E_j 有最大元 (或最小元).

证明:

(1) 充分性:

对任意 $x \in F, y \in F$, 如果 $pr_2 x = pr_2 y$, 那么: 若存在 $j \in I$ 使 $j > pr_2 x$, 设 $z \in E_j$, 则 z 为 $\{x, y\}$ 的上界; 若 $pr_2 x$ 为 I 的极大元, 则存在 z 使 $z \geq pr_1 x$ 且 $z \geq y$, 则 z 为 $\{x, y\}$ 的上界;

如果 $pr_2 x \neq pr_2 y$, 则存在 $j \geq pr_2 x, j \geq pr_2 y$: 若 $j > pr_2 x, j > pr_2 y$, 设 $z \in E_j$, 则 z 为 $\{x, y\}$ 的上界; 若 $j > pr_2 x, j = pr_2 y$, 则 y 为 $\{x, y\}$ 的上界, 若 $j = pr_2 x, j > pr_2 y$, 则 x 为 $\{x, y\}$ 的上界.

必要性:

对任意 $i \in I, j \in I, i \neq j$, 设 $x \in E_i, y \in E_j$, 则存在 $z \geq (x, i), z \geq (y, j)$, 设 $z \in E_k$, 则 k 为 $\{i, j\}$ 的上界;

对 I 的任意极大元 i , 设 $x \in E_i, y \in E_i$, 则存在 $z \geq (x, i), z \geq (y, i)$, 故 $pr_2 z = i$, 因此 $pr_1 z \geq x, pr_1 z \geq y$, 所以 E_i 为右方有向集.

(2) 充分性:

对任意 $x \in F, y \in F$:

如果 $pr_2 x = pr_2 y$, 由于 $pr_1 x$ 和 $pr_1 y$ 是可比较的, 因此 x 和 y 是可比较的;

如果 $pr_2 x \neq pr_2 y$, 由于 $pr_2 x$ 和 $pr_2 y$ 是可比较的, 因此 x 和 y 是可比较的;

必要性: 对任意 $i \in I, j \in I, i \neq j$, 设 $x \in E_i, y \in E_j$, 由于 (x, i) 和 (y, j) 是可比较的, 因此 i 和 j 是可比较的, 所以 I 为全序集;

对任意 $i \in I$, 设 $x \in E_i, y \in E_i$, 由于 (x, i) 和 (y, i) 是可比较的, 因此 x 和 y 是可比较的, 所以 E_i 为全序集.

(3) 充分性:

对任意 $x \in F, y \in F$:

如果 $pr_2 x = pr_2 y$, 根据第二个条件和第三个条件, 其有最小上界和最大下界;

如果 $pr_2 x \neq pr_2 y$, 根据第一个条件, 其有最小上界和最大下界.

必要性:

对任意 $i \in I, j \in I, i \neq j$, 设 $x \in E_i, y \in E_j$, 由于 (x, i) 和 (y, j) 有最大上界和最小下界, 因此第一个条件成立;

对任意 $i \in I$, 设 $x \in E_i, y \in E_i$, 由于 (x, i) 和 (y, i) 有最大上界和最小下界, 因此第二个条件、第三个条件成立.

定理 69.

全序集 E 到全序集 F 的严格单调映射, 为单射. 如果 f 为严格单增映射, 则 f 为 E 到 $f(E)$ 的同构.

证明: 如果 $x \neq y$, 则 $x < y$ 或 $x > y$, 故 $f(x) < f(y)$ 或 $f(y) < f(x)$, 因此 $f(x) \neq f(y)$, 故 f 为单射. 如果 f 为严格单增映射, 则 $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, 同时 $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$, 故 $f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \leq y$, 因此 f 为 E 到 $f(E)$ 的同构.

定理 70.

令 E 为全序集, $X \subset E$, 当且仅当 b 为 X 在 E 上的上界 (或下界), 并且 $(\forall c)(c \in E \text{ 与 } c < b \Rightarrow (\exists x)(x \in X \text{ 与 } c < x \text{ 与 } x \leq b))$ (或 $(\forall c)(c \in E \text{ 与 } c > b \Rightarrow (\exists x)(x \in X \text{ 与 } c > x \text{ 与 } x \geq b))$) 时, b 为 X 在 E 上的最小上界 (或最大下界).

证明: 如果 $(\forall c)(c \in E \text{ 与 } c < b \Rightarrow (\exists x)(x \in X \text{ 与 } c < x \text{ 与 } x \leq b))$, 同时 b 为上界, 则对任意 $c \in E$ 且 $c < b$, c 都不是 X 的上界, 故 b 是最小上界;

反过来, 如果 b 是最小上界, 则 b 是上界, 同时, 对任意 $c \in E$ 且 $c < b$, 由于 c 不是 X 的上界, 故存在 $x \in X$, 使 $c < x$, 同时, 由于 b 是上界, 故 $x \leq b$, 得证.

下界的情况同理可证.

定义 110. 自由子集 (*partie libre*), 反链 (*antichaine d'ensemble*)

令 E 为偏序集, $X \subset E$, 如果 X 的任何两个不同元素都是不可比较的, 则称 X 为 E 的自由子集, 或称 X 为 E 的反链.

补充定理 193.

$F = \{X | X \text{ 为 } E \text{ 的自由子集}\}$, 则:

(1) $X \in F$ 与 $Y \in F$ 与 $(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \text{ 与 } x \leq y))$ 为关于 X, Y 在 F 上的偏序关系;

(2) F 按 (1) 的偏序关系排序, 则 $x \rightarrow \{x\}$ 为 E 到 F 的子集的同构;

(3) F 按 (1) 的偏序关系排序, 则如果 $X \in F, Y \in F, X \subset Y$, 则 $X \leq Y$;

(4) F 按 (1) 的偏序关系排序, 则当且仅当 E 为全序集、 E 到 F 存在同构时, F 为全序集.

证明:

(1) 如果 $x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \text{ 与 } x \leq y)$, $y \in Y \Rightarrow (\exists x)(x \in X \text{ 与 } y \leq x)$, 那么对任意 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 且 $x \leq y$, 故存在 $x' \in X$ 且 $y \leq x'$, 因此 $x \leq x'$, 故 $x = x'$, 故 $x = y$, 故 $X \subset Y$, 同理 $Y \subset X$, 因此 $X = Y$; 另外两个条件类似补充定理 81 (1) 可证.

(2) 根据定义, $x \leq y \Leftrightarrow \{x\} \leq \{y\}$, 得证.

(3) 根据定义可证.

(4) 充分性根据定义可证. 如果 F 为全序集, 则 E 为全序集, 故 $F = \{X | (\exists x)(X = \{x\})\}$, 因此 E 到 F 存在同构, 必要性得证.

定义 111. 完备格 (*ensemble réticulé achevé*)

如果偏序集 E 的任何子集在 E 上都有最大下界和最小上界, 则称 E 为完备格.

补充定理 194.

如果偏序集 E 的任何子集在 E 上都有最小上界, 则 E 为完备格.

证明: 对任意 $F \subset E$, 令 $G = \{x | x \text{ 为 } F \text{ 在 } E \text{ 上的下界}\}$, G 在 E 上有最小上界 x , 如果存在 $y \in F$ 且 $y < x$, 则 y 也是 G 的上界, 矛盾, 故 x 是 F 的下界, 所以 $x \in G$, 故 x 是 G 的最大元, 因此 F 有最大下界, 得证.

补充定理 195.

当且仅当各偏序集都是完备格时, 偏序集的积是完备格.

证明: 根据定义可证.

补充定理 196. 偏序集的序数和为完备格的条件

当且仅当集族 $(E_i)_{i \in I}$ 满足下列条件时, 其序数和为完备格:

第一, I 为完备格;

第二, 对任意 $J \subset I$, 如果 J 没有最大元, 令 $d = \sup J$, 则 E_d 有最小元;

第三, 对任意 $i \in I$ 和任意 E_i 的子集, 如果在 E_i 上有上界, 则有最小上界;

第四, 对任意 $i \in I$, 如果 E_i 没有最大元, 则 $\{x | x > i \text{ 与 } x \in I\}$ 有最小元 a , 并且 E_a 有最小元,

证明:

必要性:

如果 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和为完备格, 对 I 的任意子集 K , $(E_i)_{i \in K}$ 的序数和有最大下界 x 和最小上界 y , 故 K 有最大下界 pr_2x 和最小上界 pr_2y ; 如果 $J \subset I$, 且 J 没有最大元, 令 $(E_i)_{i \in J}$ 的最小上界 x , 则 $pr_2x = d$, pr_1x 为 d 的最小元; 令 $E_i \times \{i\}$ 的最小上界为 x , 则 $pr_2x = a$, 其最小元为 pr_1x .

充分性:

对 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和的任意子集 K , 令 $J = pr_2K$, 则 J 有最小上界 d . 如果 $d \notin J$, 则 E_d 有最小元 a , (a, d) 即为 K 的最小上界, 如果 $d \in J$, 那么, 若 $K \cap E_d$ 有上界, 则有最小上界 y , (y, d) 即为 K 的最小上界, 若 $K \cap E_d$ 没有上界, 则 E_d 没有最大元, 故 $\{x | x > d \text{ 与 } x \in I\}$ 有最小元 b , 并且 E_b 有最小元 z , (z, b) 即为 K 的最小上界.

补充定理 197.

E, F 为偏序集, 令 $A(E, F) = \{X | X \in FE \text{ 与 } ((X, E, F) \text{ 为单增函数})\}$, 并为按 $f \in A(E, F)$ 与 $g \in A(E, F)$ 与 $(\forall x)(x \in E \Rightarrow f(x) \leq g(x))$ 排序的关于 f, g 的偏序集, 则当且仅当 F 为完备格时, $A(E, F)$ 为完备格.

证明:

充分性:

对 $A(E, F)$ 的任何子集 G , 映射 $x \rightarrow (\{y | (y, E, F)(x)\} \text{ 的最小上界})$ 的图, 是 G 的最小上界, 同理可证 G 有最大下界.

必要性:

对任意 $X \subset F$, 令 $G = \{A | (\exists x)(A = E \times \{x\} \text{ 与 } x \in X)\}$, 设 G 的最小上界为 H , 对任意 $z \in E$, 令 $u = (H, E, F)(z)$, 则 u 是 X 的上界, 如果 $u' < u$ 且为 X 的上界, 则令 $H' = (H - \{(z, u)\}) \cup \{(z, u')\}$, $H' < H$, 且 H' 也是 G 的上界, 矛盾, 故 u 是 X 的最小上界, 同理可证 X 的最大下界存在.

定义 112. 闭包 (fermeture)

E 为偏序集, E 到 E 的映射 f 如果满足下列条件, 则称 f 为在 E 上的闭包, 在没有歧义的情况下也可以简称 f 为闭包:

第一, f 是单增映射;

第二, 对任意 $x \in E$, $f(x) \geq x$;

第三, 对任意 $x \in E$, $f(f(x)) = f(x)$.

补充定理 198. 分配格的判定和性质

E 为格, 则以下五个公式等价:

第一, $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } z \in E \Rightarrow \sup(x, \inf(y, z)) = \inf(\sup(x, y), \sup(x, z)))$;

第二, $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } z \in E \Rightarrow \inf(x, \sup(y, z)) = \sup(\inf(x, y), \inf(x, z)))$;

第三, $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } z \in E \Rightarrow \sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)) = \inf(\sup(x, y), \sup(y, z), \sup(z, x)))$;

第四, $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } z \in E \Rightarrow \inf(z, \sup(x, y)) \leq \sup(x, \inf(y, z)))$;

第五, $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } z \in E \Rightarrow \inf(\sup(x, y), \sup(z, \inf(x, y))) = \sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)))$.

证明:

以上五个公式分别记作 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 :

如果 $\sup(x, \inf(y, z)) = \inf(\sup(x, y), \sup(x, z))$, 则 $\sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)) = \sup(\inf(\sup(x, \inf(y, z)), \sup(y, \inf(y, z))), \inf(z, x))$, 等于 $\sup(\inf(\sup(x, y), \sup(x, z)), y, \sup(y, z), \inf(z, x))$, 等于 $\inf(\sup(x, y, z), \sup(x, z), \sup(y, z), \sup(x, y))$, 等于 $\inf(\sup(x, y), \sup(y, z), \sup(z, x))$, 即 $R_1 \Rightarrow R_3$.

同理可证 $R_2 \Rightarrow R_3$.

根据定义可证 $\sup(z, \inf(x, y)) = \inf(x, \sup(y, z))$. 并且, $\sup(\sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)), x) = \sup(\inf(\sup(x, y), \sup(y, z), \sup(z, x)), x)$, 左边 = $\sup(x, \inf(y, z))$, 右边 = $\inf(\sup(x, z), \sup(x, y), \sup(x, y, z))$, 等于 $\inf(\sup(x, y), \sup(x, z))$, 即 $R_3 \Rightarrow R_1$.

同理可证 $R_3 \Rightarrow R_2$.

如果 $\inf(x, \sup(y, z)) = \sup(\inf(x, y), \inf(x, z))$, 则 $\inf(z, \sup(x, y)) \leq \sup(x, \inf(y, z))$, 即 $R_2 \Rightarrow R_4$.

如果 $\inf(z, \sup(x, y)) \leq \sup(x, \inf(y, z))$, 则 $\sup(\inf(x, y), \inf(x, z)) \geq \inf(x, \sup(\inf(x, y), z))$, 故 $\sup(\inf(x, y), \inf(x, z)) \geq \inf(x, \sup(y, z))$, 同时, 由于 $\inf(x, y) \leq x$ 、 $\inf(x, y) \leq \sup(y, z)$, 故 $\inf(x, y) \leq \inf(x, \sup(y, z))$, 同理 $\inf(x, z) \leq \inf(x, \sup(y, z))$, 因此 $\sup(\inf(x, y), \inf(x, z)) = \inf(x, \sup(y, z))$. 因此 $R_4 \Rightarrow R_2$.

如果 $\inf(x, \sup(y, z)) = \sup(\inf(x, y), \inf(x, z))$, 则 $\inf(\sup(x, y), \sup(z, \inf(x, y))) = \sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x))$, 即 $R_2 \Rightarrow R_5$.

如果 $\inf(\sup(x, y), \sup(z, \inf(x, y))) = \sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x))$, 而 $\inf(z, \sup(x, y)) \leq \inf(\sup(x, y), \sup(z, \inf(x, y)))$, $\sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)) \leq$

$\sup(x, \inf(y, z))$, 故 $R_5 \Rightarrow R_4$.

定义 113. 分配格 (*ensemble réticulé distributif*)

E 为格, 如果 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } z \in E \Rightarrow \sup(x, \inf(y, z)) = \inf(\sup(x, y), \sup(x, z)))$, 则称 E 为分配格.

补充定理 199.

- (1) 全序集是分配格.
- (2) 按偏序的乘积排列的分配格的乘积, 是分配格.
- (3) 分配格的内部格是分配格.
- (4) E 为分配格, a 是 E 的不可约元素, 则 $a \leq \sup(x, y) \Rightarrow a \leq x$ 或 $a \leq y$.

证明:

- (1) 根据定义可证.
- (2) 根据定理66可证.
- (3) 根据定义可证.
- (4) 由于 $\inf(z, \sup(x, y)) = z$, 故 $\sup(\inf(x, z), \inf(y, z)) = z$, 因此 $\inf(x, z) = z$ 或 $\inf(y, z) = z$, 得证.

定义 114. 互补格 (*ensemble réticulé relativement complémenté*), 补 (*complément relatif*)

令 E 为格, 并且有最小元 a , 如果对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $x \leq y$, 均存在 $x' \in E$, 使 $\sup(x, x') = y$, $\inf(x, x') = a$, 则称 E 为互补格, x' 称为 x 对 y 的补.

补充定理 200.

E 为分配格和互补格, 则对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $x \neq y$, x 对 y 的补唯一.

证明: 设 t 、 t' 均为 x 对 y 的补, 根据补充定理198, $\inf(t, t') = \sup(t, t')$, 根据补充定理184 (3), $t = t'$.

定义 115. 布尔网络 (*réseau booléen*)

如果 E 是分配格, 也是互补格, 并且有最大元, 则称 E 为布尔网络.

补充定理 201.

E 为布尔网络, 最大元为 z , 对任意 $x \in E$, 令 x^* 为 x 对 z 的补, 则 $x \rightarrow x^*$ 为 E 到按在 E 上的偏序关系的相反关系排序的偏序集的同构, 并且 $(x^*)^* = x$.

证明: 根据定义可证 $(x^*)^* = x$. 对任意 $x \leq y$, $\sup(y, \inf(x^*, y^*)) = \sup(y, x^*)$. 根据定理63, $\sup(y, x^*) \geq \sup(x, x^*)$, 故 $\sup(y, x^*) = z$, 因此 $\sup(y, \inf(x^*, y^*)) = z$, 又因为 $\inf(y, \inf(x^*, y^*)) = a$, 因此 $\inf(x^*, y^*) = y^*$, 所以 $x^* \geq y^*$, 得证.

补充定理 202.

对任意集合 A , 按包含关系排序的 $\mathcal{P}(A)$, 是布尔网络.

证明: 根据定义可证.

补充定理 203.

E 为布尔网络, 且为完备格, $(x_i)_{i \in I}$ 为 E 的元素族, 求证: $\inf(y, \sup(x_i)_{i \in I}) = \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I}$.

证明:

令 E 的最大元为 z , 对任意 $x \in E$, 令 x^* 为 x 对 z 的补. 则:

$$\inf(y, \sup(y^*, \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I})) = \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I},$$

$$\inf(y, \sup(y^*, \sup(x_i)_{i \in I})) = \inf(y, \sup(x_i)_{i \in I}).$$

$$\text{根据定理63, } \inf(y, \sup(y^*, \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I})) \leq \inf(y, \sup(y^*, \sup(x_i)_{i \in I})),$$

$$\text{因此 } \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I} \leq \inf(y, \sup(x_i)_{i \in I}).$$

$$\text{同时, } \inf(y, \sup(x_i)_{i \in I}) \leq y,$$

$$\sup(\inf(y, x_i))_{i \in I} \leq y.$$

$$\text{对任意 } i \in I, \inf(y, x_i) \leq \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I},$$

$$\text{根据定理63, } \sup(y, x_i) \leq \sup(y^*, \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I}),$$

$$\text{因此 } x_i \leq \sup(y^*, \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I}),$$

$$\text{因此, } \sup(x_i)_{i \in I} \leq \sup(y^*, \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I}),$$

$$\text{所以 } \inf(y, \sup(x_i)_{i \in I}) \leq \inf(y, \sup(y^*, \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I})),$$

$$\text{故 } \inf(y, \sup(x_i)_{i \in I}) \leq \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I}.$$

补充定理 204.

令 E 为偏序集, a, b 是 E 的元素, 则 $x \in E$ 与 $a \leq x$ 与 $x \leq b$ 、 $x \in E$ 与 $a < x$ 与 $x \leq b$ 、 $x \in E$ 与 $a \leq x$ 与 $x < b$ 、 $x \in E$ 与 $a < x$ 与 $x < b$ 均为关于 x 的集合化公式.

证明: 根据证明规则52可证.

定义 116. 闭区间 (*interval fermé*), 左半开区间 (*intervalle semi-ouvert à gauche*), 右半开区间 (*intervalle semi-ouvert à droite*), 开区间 (*intervalle ouvert*)

令 E 为偏序集, a, b 是 E 的元素, $a \leq b$, 则称 $\{x | x \in E \text{ 与 } a \leq x \text{ 与 } x \leq b\}$ 为在 E 上以 a 为起点、以 b 为终点的闭区间, 记作 $[a, b]$; $\{x | x \in E \text{ 与 } a < x \text{ 与 } x \leq b\}$ 为在 E 上以 a 为起点、以 b 为终点的左半开区间, 记作 $]a, b]$; $\{x | x \in E \text{ 与 } a \leq x \text{ 与 } x < b\}$ 为在 E 上以 a 为起点、以 b 为终点的右半开区间, 记作 $[a, b[$; $\{x | x \in E \text{ 与 } a < x \text{ 与 } x < b\}$ 为在 E 上以 a 为起点、以 b 为终点的开区间, 记作 $]a, b[$. 在没有歧义的情况下, 也可以省略“在 E 上”字样.

定义 117. 左无穷闭区间 (*interval fermé illimité à gauche*), 左无穷开区间 (*intervalle semi-ouvert à gauche*), 右无穷闭区间 (*interval fermé illimité à droite*), 右无穷开区间 (*intervalle semi-ouvert à droite*)

令 E 为偏序集, a 是 E 的元素, 则称 $\{x|x \in E \text{ 与 } x \leq a\}$ 为在 E 上以 a 为终点的左无穷闭区间, 记作 $] \leftarrow, a]$; $\{x|x \in E \text{ 与 } x < a\}$ 为在 E 上以 a 为终点的左无穷开区间, 记作 $] \leftarrow, a[$; $\{x|x \in E \text{ 与 } a \leq x\}$ 为在 E 上以 a 为起点的右无穷闭区间, 记作 $[a, \rightarrow [$; $\{x|x \in E \text{ 与 } a < x\}$ 为在 E 上以 a 为起点的右无穷开区间, 记作 $[a, \rightarrow [$. 在没有歧义的情况下, 也可以省略“在 E 上”字样.

定义 118. 区间 (*interval*)

左半开区间、右半开区间、闭区间、开区间、左无穷闭区间、左无穷开区间、右无穷闭区间、右无穷开区间统称为区间.

定理 71.

格的任何两个区间的交集和并集, 都是区间.

证明: 根据定义可证.

定义 119. 无间隙的偏序集 (*ensemble ordonné sans trou*)

E 为偏序集, 且至少有一对可比较的不同元素, 并且, 对 E 的任何一对可比较的元素 x 、 y , 如果 $x < y$, 则 $]x, y[\neq \emptyset$, 则称 E 为无间隙的.

定义 120. 离散的偏序集 (*ensemble ordonné dispersé*)

E 为偏序集, 如果 E 的任何偏序子集, 都不是无间隙的, 则称 E 为离散的.

补充定理 205.

离散集合的任何偏序子集都是离散的.

证明: 根据定义可证.

定义 121. 开集 (*ensemble ouvert*), 正则开集 (*ensemble ouvert régulier*)

E 为偏序集, 如果 E 的子集 U 满足对任意 $x \in U$, $[x, \rightarrow [\subset U$, 则称 U 为开集; 如果 U 为开集, 且不存在开集 V , 满足 $U \neq V$ 且 U 是 V 的共尾子集, 则称 U 为正则开集.

补充定理 206.

(1) 开集族的并集仍是开集.

(2) E 为偏序集, 对任意 $x \in E$, $[x, \rightarrow [$ 为开集.

证明: 根据定义可证.

补充定理 207.

E 为偏序集, 则:

- (1) 对任意开集 $U \subset E$, 存在唯一的正则开集 \tilde{U} , 使 U 为 \tilde{U} 的共尾子集.
- (2) U 为开集, $x \in E$, 如果对任意 $y \geq x$, 均存在 $z \in U$ 使 $y \leq z$, 则 $x \in \tilde{U}$.
- (3) $\mathcal{P}(E)$ 按包含关系排序, 则映射 $U \rightarrow \tilde{U}$ 为单增映射.
- (4) $\mathcal{P}(E)$ 按包含关系排序, 则映射 $U \rightarrow \tilde{U}$ 为闭包.
- (5) 对开集 U, V , 如果 $U \cap V = \emptyset$, 则 $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$.

证明:

(1) 令 $K = \{V | (V \text{ 为开集}) \text{ 与 } (U \neq V) \text{ 与 } (U \text{ 是 } V \text{ 的共尾子集})\}$, $\tilde{U} = \bigcup_{X \in K} X$, 根据补充定理206 (1), \tilde{U} 为开集; 根据定义可证, \tilde{U} 为正则开集.

同时, 如果存在正则开集 U' 也满足条件, 则 $U' \subset \tilde{U}$, 根据正则开集的定义, $U' = \tilde{U}$, \tilde{U} 的唯一性得证.

(2) 由于 $U \cup [x, \rightarrow [$ 也是开集并且 U 是其共尾子集, 根据补充定理207 (1) 的证明过程, $U \cup [x, \rightarrow [\subset \tilde{U}$, 得证.

(3) 设 $U \subset V$, $x \in \tilde{U}$, 对任意 $y \geq x$, 由于 $y \in \tilde{U}$, 故存在 $z \geq y$ 且 $z \in U$, 因此 $z \in V$, 根据补充定理207 (2), $x \in \tilde{V}$, 因此映射 $U \rightarrow \tilde{U}$ 为单增映射.

(4) 根据补充定理207 (1)、补充定理207 (3) 可证.

(5) $U \rightarrow \tilde{U}$ 为单增映射. 若存在 $a \in \tilde{U}$ 且 $a \in \tilde{V}$, 则存在 $x \geq a$ 且 $x \in U$, 因此 $x \in \tilde{V}$, 故存在 $y \geq x$ 且 $y \in V$, 因此 $y \in U$, 矛盾, 得证.

补充定理 208.

E 为偏序集, U, V 为正则开集, 则 $U \cap V$ 为正则开集.

证明: 令 \tilde{X} 为正则开集且使 U 为 \tilde{X} 的共尾子集, f 为映射 $X \rightarrow \tilde{X}$.

根据补充定理207 (3), $f(U \cap V) \subset f(U)$, $f(U \cap V) \subset f(V)$, 故 $f(U \cap V) \subset f(U)$. 根据补充定理207 (1), $f(U) = U$, $f(V) = V$, 因此 $f(U \cap V) \subset U \cap V$. 又因为 $U \cap V \subset f(U \cap V)$, 得证.

补充定理 209.

E 为偏序集, 令 $R(E)$ 为 E 的正则开子集集合, 并按包含关系排序:

- (1) \emptyset 为 $R(E)$ 的最小元, E 为 $R(E)$ 的最大元.
- (2) $R(E)$ 为完备格.
- (3) $R(E)$ 为互补格.
- (4) 对任意 $U \in R(E)$, $V \in R(E)$, $U \cap V \in R(E)$, 且 $\inf(U, V) = U \cap V$.
- (5) $R(E)$ 为分配格,
- (6) $R(E)$ 布尔网络.
- (7) 当且仅当 E 非空且为右方有向集时, $R(E)$ 为仅有两个元素的结合.

证明：对于 E 的子集 X ，令 \tilde{X} 表示正则开集，并且 X 为其共尾子集：

(1) 根据定义可证。

(2) 对 E 的任意子集族，令其并集为 F ，则 \tilde{F} 为其上界，假设存在 $H \in R(E)$ 、 $F \subset H$ 且 $H \subset \tilde{F}$ ，则 $H = \tilde{H}$ ，并且，根据补充定理207 (3)， $\tilde{(F)} \subset \tilde{H}$ ，故 $H = \tilde{F}$ ，即 \tilde{F} 是其最小上界，故 E 为完备格。

(3) 设 $X \in R(E)$ ， $Y \in R(E)$ ，令 $Z = \{x | x \in Y \text{ 与 } (\forall y)(y \in X \Rightarrow (\text{非} x \leq y))\}$ ，则 Z 为开集，根据补充定理207 (2)， $Y \subset X \cup \tilde{Z}$ ，同时， $X \cap Z = \emptyset$ ，根据补充定理207 (5)， $X \cap \tilde{Z} = \emptyset$ 。又因为 $Z \subset Y$ ，故 $\tilde{Z} \subset Y$ ，又 $X \subset Y$ ，因此 $Y = X \cup \tilde{Z}$ ，即 \tilde{Z} 是 X 对 Y 的补，因此 E 为互补格。

(4) 根据补充定理208可证。

(5) 设 $X \in R(E)$ ， $Y \in R(E)$ ， $Z \in R(E)$ ，令 $x \in Z \cap \sup(X, Y)$ ，故存在 $y \geq x$ 使 $y \in X \cap Y$ ，同时 $y \in Z$ ，又因为 $Z \cap (X \cup Y) \subset X \cup (Y \cap Z)$ ，故 $y \in \sup(X, Y \cap Z)$ ，根据补充定理198， E 为分配格。

(6) 根据定义可证。

(7) 如果 E 不是右方有向集，则存在 x, y ，使 $[x, \rightarrow [\cap [y, \rightarrow [= \emptyset$ ，根据补充定理207 (5)， $R(E)$ 至少有两个非空集元素；反过来，如果 E 是右方有向集，设 $U \in R(E)$ ，且 $U \neq \emptyset$ 。令 $x \in U$ ，对任意 $y \in E$ ，对任意 $z \geq y$ ，存在 $t \in \{x, z\}$ 的上界，则 $t \in U$ ，根据补充定理207 (2)， $y \in U$ ，故 $U = E$ ，因此 $R(E) = \{\emptyset, E\}$ 。

定义 122. 区间到正则开集的规范映射 (*application canonique de interval dans ensemble ouvert régulier*)

E 为偏序集，令 $R(E)$ 为 E 的正则开子集集合， $R_0(E) = R(E) - \{\emptyset\}$ 。对任意 $x \in E$ ，令 $r(x)$ 为正则开集，且 $[x, \rightarrow [$ 是其共尾子集，则 r 称为 E 到 $R_0(E)$ 的规范映射。

补充定理 210.

E 为偏序集，令 $R(E)$ 为 E 的正则开子集集合， $R_0(E) = R(E) - \{\emptyset\}$ ，并按包含关系的相反关系排序。 r 为 E 到 $R_0(E)$ 的规范映射，则 r 为单增映射，并且 $r(E)$ 的像是 $R_0(E)$ 的共尾子集。

证明：根据补充定理207 (3)， r 为单增映射。对任意 $X \in R_0(E)$ ， $x \in X$ ， $r(x) \subset X$ ，故 $r(E)$ 的像是 $R_0(E)$ 的共尾子集。

补充定理 211.

E 为偏序集，令 $R(E)$ 为 E 的正则开子集集合， $R_0(E) = R(E) - \{\emptyset\}$ ，并按包含关系的相反关系排序。 r 为 E 到 $R_0(E)$ 的规范映射，则：

(1) $x \in E$ 、 $y \in E$ ，则当且仅当对任意 $z \geq y$ 且 $z \in E$ ， $\{x, z\}$ 在 E 上均有上界时， $y \in r(x)$ 。

(2) $x \in E, y \in E$, 则当且仅当存在 $z \geq y$ 且 $z \in E$, 使 $[x, \rightarrow [\cap [z, \rightarrow [= \emptyset$ 时, $y \notin r(x)$.

(3) $x \in E, y \in E$, 如果 $x \in r(y), y \in r(x)$, 则 $r(x) = r(y)$.

证明:

(1) 如果 $y \in r(x)$, 则 $[y, \rightarrow [\subset r(x)$, 由于 $[x, \rightarrow [$ 是 $r(x)$ 的共尾子集, 故对任意 $z \geq y$, $\{x, z\}$ 在 E 上均有上界; 反过来, 如果对任意 $z \geq y$, $\{x, z\}$ 在 E 上均有上界, 根据补充定理207 (2), $y \in r(x)$.

(2) 根据补充定理211 (1) 可证.

(3) 如果 $x \in r(y), y \in r(x)$, 则 $[x, \rightarrow [\subset r(y), [y, \rightarrow [\subset r(x)$, 根据补充定理207 (3), $r(y) \subset r(x), r(x) \subset r(y)$, 得证.

定义 123. 右方无向集 (*ensemble filtrant à droite*)

E 为偏序集, 令 $R(E)$ 为 E 的正则开子集集合, $R_0(E) = R(E) - \{\emptyset\}$. 对任意 $x \in E$, 令 $r(x)$ 为区间 $[x, \rightarrow [$ 相应的正则开集. 如果 r 为单射, 则称 E 为右方无向集.

补充定理 212. 偏序集为右方无向集的条件

E 为偏序集, 当且仅当同时满足下列两个条件时, E 为右方无向集:

第一, 对任意 $x \in E, y \in E, x < y$, 均存在 $z \in E, x < z$, 使 $[y, \rightarrow [\cap [z, \rightarrow [= \emptyset$;

第二, 令 x, y 是 E 的一对不可比较的元素, 那么, 或者存在 $x' \geq x$, 使 $[x', \rightarrow [\cap [y, \rightarrow [= \emptyset$, 或者存在 $y' \geq y$, 使 $[x, \rightarrow [\cap [y', \rightarrow [= \emptyset$.

证明:

令 $R(E)$ 为 E 的正则开子集集合, $R_0(E) = R(E) - \{\emptyset\}$. r 为 E 到 $R_0(E)$ 的规范映射,

根据补充定理211 (2), 两个条件等价于 $x \notin r(y)$ 或 $y \notin r(x)$. 如果 r 为单射, 即当 $x \neq y$ 时, $r(x) \neq r(y)$, 根据补充定理211 (3), $x \notin r(y)$ 或 $y \notin r(x)$. 反过来, 当 $x \neq y$ 时, 如果 $x \notin r(y)$ 或 $y \notin r(x)$, 则 $r(x) \neq r(y)$, 得证.

定义 124. 右方分叉集 (*ensemble fourchu à droite*)

E 为偏序集, 如果对任意 $x \in E$, 均存在 $y \in E, z \in E$ 并且 $x \leq y, x \leq z$, 使 $[y, \rightarrow [\cap [z, \rightarrow [= \emptyset$, 在则称 E 为右方分叉集.

补充定理 213.

(1) 右方分叉集没有极大元.

(2) E 为右方分叉集, $x \in E$, 则存在 $y \in E, z \in E$, 使 $x < y, x < z$ 且 y 和 z 不可比较.

(2) 没有极大元的右方无向集, 是右方分叉集.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 根据定义可证.

(3) 根据补充定理212可证.

定义 125. 右方分支集 (*ensemble ramifié à droite*), 完全右方分支集 (*ensemble complément ramifié à droite*)

E 为偏序集, 如果对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $x < y$, 均存在 $z \in E$ 、 $x < z$, 使 y 和 z 是不可比较的, 则称 E 为右方分支集. 没有极大元的右方分支集, 称为完全右方分支集.

补充定理 214.

右方无向集都是右方分支集.

证明: 根据补充定理212可证.

习题 77.

E 为偏序集, 且至少有一对可比较的不同元素, 令 R 为 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x < y$, 求证: R 满足偏序关系前两个条件, 不满足第三个条件.

证明: 由于 E 的偏序具有传递性, 因此 $x \leq y$ 与 $y \leq z \Rightarrow x \leq z$. 如果 $x < y$ 、 $y < z$ 且 $x = z$, 则 $x = y$, 矛盾, 故 R 具有传递性; 由于 $x < y$ 与 $y < x$ 为假, 故第二式为真. 但 E 的两个不同的可比较的元素 x 、 y 若满足 $x < y$, 而 $x < x$ 、 $y < y$ 为假, 故第三式为假.

习题 78.

(1) E 为预序集, $x \leq y$ 为在 E 上的预序关系, 令 R 为公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$ 与 $x \leq y)))$. 求证: R 为关于 X 、 Y 在 E/S 上的预序关系.

(2) f 为 E 到 E/S 的规范映射, 求证:

对任意 E/S 的商预序集到预序集 F 的映射 g , 如果 $g \circ f$ 为单增映射, 则 g 为单增映射.

当且仅当 S 满足下列条件时, f 为单增映射:

$$(x \leq y \text{ 与 } x \equiv x'(\text{mod } S)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E \text{ 与 } y \equiv y'(\text{mod } S) \text{ 与 } x' \leq y').$$

如果 $x \leq y$ 关于 x 同 S 相容, 则 S 同 $x \leq y$ 弱相容.

(3) E_1 、 E_2 为预序集, 令 S_1 为公式 $pr_1 z = pr_1 z'$, 求证: S_1 在 z 、 t 上同在 $E_1 \times E_2$ 上的预序关系的乘积 $z \leq t$ 弱相容; 并且, 令 h_1 为 $E_1 \times E_2$ 到 $(E_1 \times E_2)/S_1$ 的规范映射, $pr_1 = f_1 \circ h_1$, 则 f_1 是 $(E_1 \times E_2)/S_1$ 到 E_1 的同构.

(4) E 为偏序集, $x \leq y$ 为在 E 上的偏序关系, S 为在 E 上的等价关系, 令 R 为公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$ 与 $x \leq y)))$, 且 $x \leq y$ 与 $y \leq z$ 与 $x \equiv z(\text{mod } S) \Rightarrow x \equiv y(\text{mod } S)$. 求证: R 为关于 X 、 Y 在 E/S 上的偏序关系.

(5) 给出元素数目为4的全序集 E 以及在 E 上的等价关系 S , 使 E/S 为一个偏序集, 但“ $(x \leq y \text{ 与 } x \equiv x'(\text{mod } S)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E \text{ 与 } y \equiv y'(\text{mod } S) \text{ 与 } x' \leq y')$ ”、“ $x \leq y$ 与 $y \leq z$ 与 $x \equiv z(\text{mod } S) \Rightarrow x \equiv y(\text{mod } S)$ ”都不成立.

(6) E 、 F 为偏序集, f 为 E 到 F 的单增函数, S 为公式 $f(x) = f(y)$ 与 $x \in E$ 与 $y \in E$, 则 $x \leq y$ 与 $y \leq z$ 与 $x \equiv z(mod S) \Rightarrow x \equiv y(mod S)$.

令 R 为公式 $X \in E/S$ 与 $Y \in E/S$ 与 $((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$ 与 $x \leq y)))$, E/S 为按 R 排序的偏序集. 当且仅当 $x' \in E$ 与 $x \leq y$ 与 $f(x) = f(x') \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$ 与 $x' \leq y'$ 与 $f(y) = f(y')$)时, $(x \leq y$ 与 $x \equiv x'(mod S)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$ 与 $y \equiv y'(mod S)$ 与 $x' \leq y')$.

令 $f = g \circ h$, h 为 E 到 E/S 的规范映射, 则当且仅当下列两个条件同时成立时, g 为 E/S 到 $f\langle E \rangle$ 的同构:

第一, $x' \in E$ 与 $x \leq y$ 与 $f(x) = f(x') \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$ 与 $x' \leq y'$ 与 $f(y) = f(y')$);

第二, $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $f(x) \leq f(y) \Rightarrow (\exists x')(\exists y')(f(x) = f(x')$ 与 $f(y) = f(y')$ 与 $x' \leq y')$.

证明:

(1) 即补充证明规则81 (1).

(2) 即补充证明规则82、补充证明规则83.

(3) 根据定义可证 S_1 在 z 、 t 上同在 $E_1 \times E_2$ 上的预序关系的乘积 $z \leq t$ 弱相容, 根据补充证明规则82 (1) 可证 f_1 是单增映射, 即 $X \leq Y \Rightarrow f_1(X) \leq f_1(Y)$.

反过来, 如果 $f_1(X) \leq f_1(Y)$, 对任意 $x \in X$, 设 $y \in Y$, 令 $y' = (pr_1 y, pr_2 x)$, 则 $y' \in Y$, 且 $pr_1 x \leq pr_1 y'$, 故 $x \leq y'$, 因此 $X \leq Y$.

(4) 即补充证明规则81 (2).

(5) 设 a 、 b 、 c 、 d 互不相等, 令 $E = \{a, b, c, d\}$, $S = \{(a, b), (b, a), (a, d), (d, a), (b, d), (d, b), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, 在 E 上的偏序的图为 $\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, 则符合要求.

(6) 第一部分、第二部分根据定义可证.

对于第三部分:

如果 g 为 E/S 到 $f\langle E \rangle$ 的同构, 则当 $X \in E/s$ 、 $Y \in E/s$ 时, $X \leq Y \Leftrightarrow g(X) \leq g(Y)$. 对任意 E 的元素 x 、 y 、 x' , 如果 $x \leq y$ 以及 $x \equiv x'(mod S)$, 则 $g(h(x)) \leq g(h(y))$, 故 $h(x) \leq h(y)$, 因此 $h(x') \leq h(y)$, 因此存在 $y' \in h(y)$ 且 $x' \leq y'$; 同时, 如果 $f(x) \leq f(y)$, 则 $g(h(x)) \leq g(h(y))$, 故对任意 $x' \in h(x)$, 存在 $y' \in h(y)$ 且 $x' \leq y'$.

反过来, 如果两个条件成立, 若 $X \leq Y$, 则对任意 $x \in X$, 存在 $y \in Y$, 使 $x \leq y$, 故 $g(h(x)) \leq g(h(y))$, 因此 $g(X) \leq g(Y)$; 如果 $g(X) \leq g(Y)$, 则对任意 $x \in X$ 、 $y \in Y$, 有 $X = h(x)$ 、 $Y = h(y)$, 故 $f(x) \leq f(y)$, 因此, 存在 x' 、 y' , 使 $f(x) = f(x')$ 、 $f(y) = f(y')$ 且 $x' \leq y'$, 故存在 $y'' \in Y$ 使 $x \leq y''$, 因此 $X \leq Y$, 得证.

习题 79.

I 为偏序集, $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集非空族:

(1) 令 F 为集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和, $G = \{(x, y) | (x, y)$ 为有序对与 $x \in F$ 与 $y \in F$ 与 $(pr_2 x < pr_2 y$ 或 $(pr_2 x = pr_2 y$ 与在 $E_{pr_2 x}$ 上 $pr_1 x \leq pr_1 y))\}$, 求证:

G 为在 F 上的偏序.

令 S 为公式 $x \in F$ 与 $y \in F$ 与 $pr_2x = pr_2y$, 则:

第一, $(x \leq y$ 与 $x \equiv x'(\text{mod } S)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$ 与 $y \equiv y'(\text{mod } S)$ 与 $x' \leq y')$;

第二, $x \leq y$ 与 $y \leq z$ 与 $x \equiv z(\text{mod } S) \Rightarrow x \equiv y(\text{mod } S)$.

E/S 的商偏序集, 同构于 I .

(2) L 为偏序集, I 为偏序集族 $(J_l)_{l \in L}$ 的序数和, 令 F_l 为偏序集族 $(E_i)_{i \in J_l}$ 的序数和, 求证: 集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和同构于集族 $(F_l)_{l \in L}$ 的序数和. 但令 I 为全序集 $\{1, 2\}$, E_1 、 E_2 为偏序集, $F_2 = E_1$, $F_1 = E_2$, 偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和不同构于偏序集族 $(F_i)_{i \in I}$ 的序数和. (1) 求证: 当且仅当 I 为右方有向集且对 I 的任意极大元 i , 并且 E_i 均为右方有向集时, F 为右方有向集.

(2) 求证: 当且仅当 I 为全序集, 且对任意 $i \in I$, E_i 均为全序集时, F 为全序集.

(3) 求证: 当且仅当满足下列条件时, F 为格:

第一, I 为格, 并且, 对任意 $i \in I$ 、 $j \in I$, 如果 i 和 j 是不可比较的, 则 $E_{\sup(i,j)}$ 有最小元, $E_{\inf(i,j)}$ 有最大元;

第二, 对任意 $i \in I$, 如果 $x \in E_i$, $y \in E_i$, 且 $\{x, y\}$ 在 E_i 上有上界 (或下界), 则 $\{x, y\}$ 在 E_i 上有最小上界 (或最大下界);

第三, 对任意 $i \in I$, 如果 $x \in E_i$, $y \in E_i$, 且 $\{x, y\}$ 在 E_i 上没有上界 (或下界), 则 $\{k | k \in I$ 与 $k > i\}$ (或 $\{k | k \in I$ 与 $k < i\}$) 有最小元 (或最大元) j , 且 E_j 有最大元 (或最小元).

证明:

(1) 第一部分即补充定理167.

第二部分根据定义可证.

第三部分: 令 g 为映射 $x \rightarrow E_x \times x (x \in I)$, 则 g 为双射, 且 g^{-1} 为 E/S 到 I 的同构,

(2) 前一部分即补充定理169. 设 a 、 b 、 c 互不相等, $E_1 = \{a\}$, $E_2 = \{b, c\}$, 均按偏序关系 $x = y$ 排序, 则偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和不同构于偏序集族 $(F_i)_{i \in I}$ 的序数和.

(3) 即补充定理192 (1).

(4) 即补充定理192 (2).

(5) 即补充定理192 (3).

习题 80.

E 为偏序集, $(E_i)_{i \in I}$ 为 E 的划分, 并且均为 E 关于公式 $(x = y$ 或 x 和 y 是不可比较的)的连通分量:

(1) 求证: 如果 $i \leq k$, $x \in E_i$, $y \in E_k$, 则 x 和 y 是可比较的; 并且, 如果 $x \leq y$, $y' \in E_k$, $y \neq y'$, 则 $x \leq y'$.

(2) 令 S 为公式 $x \in F$ 与 $y \in F$ 与 $(\exists i)(i \in I$ 与 $x \in E_i$ 与 $y \in E_i)$, 求证: $x \leq y$ 关于 x 、 y 同 S 相容, 且 E/S 的商预序集为全序集.

(3) F 、 G 为全序集, E 为 F 和 G 两个全序集的乘积, 那么, E 的连通分量是什么?

证明:

(1) 根据定义可证 x 和 y 是可比较的; 如果 $y' < x$, 则 $y' \leq y$, 又因为 $y \in E_k$ 、 $y' \in E_k$, 故 $y = y'$, 矛盾, 因此, $x \leq y'$.

(2) 根据习题80 (1) 可证 $x \leq y$ 关于 y 同 S 相容, 同理可证 $x \leq y$ 关于 x 同 S 相容, 根据习题80 (1) 和定义, 可证 E/S 的商预序集为全序集.

(3) 如果 F 、 G 分别有最小元 a 、 b 和最大元 c 、 d , 则 E 的连通分量为 $\{(a, b)\}$ 、 $\{(c, d)\}$ 、 $E - \{(a, b), (c, d)\}$; 如果 E 、 F 至少有一个没有最小元, 并且至少有一个没有最大元, 则 E 的连通分量为 E ; 如果 E 、 F 至少有一个没有最小元, 分别有最大元 a 、 b , 或者至少有一个没有最大元, 分别有最小元 a 、 b , 则 E 的连通分量为 $\{(a, b)\}$ 、 $E - \{(a, b)\}$.

注: 习题80中的概念“联通分量”, 涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 81.

$F = \{X | X \text{ 为 } E \text{ 的自由子集}\}$, 求证:

(1) $X \in F$ 与 $Y \in F$ 与 $(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \text{ 与 } x \leq y))$ 为关于 X 、 Y 在 F 上的偏序关系;

(2) F 按 (1) 的偏序关系排序, 则 $x \rightarrow \{x\}$ 为 E 到 F 的子集的同构;

(3) F 按 (1) 的偏序关系排序, 则如果 $X \in F$ 、 $Y \in F$ 、 $X \subset Y$, 则 $X \leq Y$;

(4) F 按 (1) 的偏序关系排序, 则当且仅当 E 为全序集、 E 到 F 存在同构时, F 为全序集.

证明: 即补充定理193.

习题 82.

E 、 F 为偏序集, 令 $\mathcal{A}(E, F) = \{X | X \in FE \text{ 与 } ((X, E, F) \text{ 为单增函数})\}$, 并为按 $f \in \mathcal{A}(E, F)$ 与 $g \in \mathcal{A}(E, F)$ 与 $(\forall x)(x \in E \Rightarrow f(x) \leq g(x))$ 排序的关于 f 、 g 的偏序集:

(1) E 、 F 、 G 均为偏序集, $F \times G$ 为按 $x \in F \times G$ 与 $y \in F \times G$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y$ 排序的关于 x 、 y 的偏序集, 求证: $\mathcal{A}(E, F \times G)$ 同构于偏序集 $\mathcal{A}(E, F)$ 和 $\mathcal{A}(E, G)$ 的积.

(2) E 、 F 、 G 均为偏序集, $E \times F$ 为按 $x \in E \times F$ 与 $y \in E \times F$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y$ 排序的关于 x 、 y 的偏序集, 求证: $\mathcal{A}(E \times F, G)$ 同构于 $\mathcal{A}(E, \mathcal{A}(F, G))$.

(3) $E \neq \emptyset$, 求证: 当且仅当 F 为格时, $\mathcal{A}(E, F)$ 为格.

(4) $E \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$, 求证: 当且仅当满足下列条件之一时, $\mathcal{A}(E, F)$ 为全序集: 第一, F 的元素数目为1; 第二, E 的元素数目为1且 F 为全序集; 第三, E 为全序集, F 的元素数目为2并且为全序集.

证明:

(1) 映射 $X \rightarrow (x \rightarrow pr_1(X, E, F \times G)(x))$ 的图, $x \rightarrow pr_2(X, E, F \times G)(x)$ 的图), 为其同构, 得证.

(2) 映射 $X \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow (X, E \times F, G)(x, y))$ 的图), 为其同构, 得证.

(3) 类似补充定理197可证.

(4) 充分性根据定义可证.

必要性: $\mathcal{A}(E, F)$ 为全序集, 则 F 为全序集. 如果 F 的元素数目大于2, E 的元素数目大于1, 设 $x \in E$, $y \in E$, 且 $x \neq y$, $\{a, b, c\} \in F$, 且 $a < b$, $b < c$, 则对任意 $y \in E$, 令 $f(x) = b$, 对任意 $z \leq x$, 令 $g(z) = a$, 对任意 $u \geq y$, 令 $g(u) = c$, 对其他 $v \in E$, 令 $g(v) = b$, 则 f 和 g 是不可比较的, 矛盾, 故 E 的元素数目为1;

如果 F 的元素数目为2, 设 $\{a, b\} \in F$, 且 $a < b$, 如果 $x \in E$, $y \in E$, 且 x 和 y 不可比较, 则对任意 $z \leq x$, 令 $f(z) = a$, 对其他 $v \in E$, 令 $f(v) = b$, 对任意 $z \leq y$, 令 $g(z) = a$, 对其他 $v \in E$, 令 $g(v) = b$, 则 f 和 g 是不可比较的, 矛盾, 故 E 为全序集. 必要性得证.

注: 习题82中的概念“元素数目”, 涉及尚未介绍的知识.

习题 83.

E 为偏序集, F 为元素数目不少于2的偏序集, 求证: 当且仅当 E 为关于公式“($x = y$ 或 x 和 y 是不可比较的)”的连通分量时, 下列公式为真:

(f 为 E 到 F 的映射) 与 (f 是单增映射) 与 (f 是单减映射) \Rightarrow (f 是常数映射).

特别是, 当 E 为右方有向集或左方有向集时, 满足上述条件.

证明: 根据定义可证.

注: 习题83中的概念“联通分量”, 涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 84.

E 、 F 为偏序集, f 为 E 到 F 的单增映射, g 为 F 到 E 的单增映射, $A = \{x | x \in E \text{ 与 } g(f(x)) = x\}$, $B = \{y | y \in F \text{ 与 } f(g(y)) = y\}$, 求证: A 同构于 B .

证明: 当 $x \in A$ 时, $f(x) = f(g(f(x)))$, 故 $f(x) \in B$, 因此, 令 f' 为 f 通过 A 和 B 导出的函数, 类似的, 可以令 g' 为 g 通过 B 和 A 导出的函数. 则 f' 和 g' 为单增映射, $f' \circ g' = Id_B$, $g' \circ f' = Id_A$, 根据定理20, f' 和 g' 均为双射, 得证.

习题 85.

E 为格, I 、 J 均为有限集合, 对任意 $i \in I$ 、 $j \in J$, $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ 为 E 的元素族, 求证: $\sup(\inf(x_{i,j})_{i \in I})_{j \in J} \leq \inf(\sup(x_{i,j})_{j \in J})_{i \in I}$.

证明:

E 为格, I 、 J 均为有限集合, 故 $\inf(x_{i,j})_{i \in I}$ 、 $\sup(x_{i,j})_{j \in J}$ 存在, $\sup(\inf(x_{i,j})_{i \in I})_{j \in J}$ 、 $\inf(\sup(x_{i,j})_{j \in J})_{i \in I}$ 也存在.

对任意 $i \in I$ 、 $j \in J$, $(\inf(x_{i,j})_{i \in I} \leq x_{i,j})$, 根据定理63, 对任意 $i \in I$, $\sup(\inf(x_{i,j})_{i \in I})_{j \in J} \leq \sup(x_{i,j})_{j \in J}$, 得证.

注: 习题85涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 86.

E 、 F 为格, f 为 E 到 F 的映射, 求证: 当且仅当对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 均有 $f(\inf(x, y)) \leq \inf(f(x), f(y))$ 时, f 为单增函数. N 为自然数集, $N \times N$ 为偏序集 N 和 N 的乘积, 并试给出 $N \times N$ 到 N 的单增映射 f , 且存在 (x, y) , 使 $f(\inf(x, y)) = \inf(f(x), f(y))$ 不成立.

证明:

必要性: 如果 $x \leq y$, 则 $f(x) \leq f(y)$, 故 $f(\inf(x, y)) \leq \inf(f(x), f(y))$.

充分性: 如果 $x \leq y$, 则 $f(x) \leq \inf(f(x), f(y))$, 故 $f(x) \leq f(y)$.

不成立的例子: 令 f 为 $(x, y) \rightarrow x + y$, $x = (0, 1)$, $y = (1, 0)$, 则 $f(\inf(x, y)) = 0$, $\inf(f(x), f(y)) = 1$.

注: 习题86涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 87.

(1) 求证: 如果偏序集 E 的任何子集在 E 上都有最小上界, 则 E 为完备格.

(2) 求证: 当且仅当各偏序集都是完备格时, 偏序集的积是完备格.

(3) 求证: 当且仅当集族 $(E_i)_{i \in I}$ 满足下列条件时, 其序数和为完备格:

第一, I 为完备格;

第二, 对任意 $J \subset I$, 如果 J 没有最大元, 令 $d = \sup J$, 则 E_d 有最小元;

第三, 对任意 $i \in I$ 和任意 E_i 的子集, 如果在 E_i 上有上界, 则有最小上界;

第四, 对任意 $i \in I$, 如果 E_i 没有最大元, 则 $\{x | x > i \text{ 与 } x \in I\}$ 有最小元 a , 并且 E_a 有最小元,

(4) E 、 F 为偏序集, 令 $A(E, F) = \{X | X \in FE \text{ 与 } ((X, E, F) \text{ 为单增函数})\}$, 并为按 $f \in A(E, F)$ 与 $g \in A(E, F)$ 与 $(\forall x)(x \in E \Rightarrow f(x) \leq g(x))$ 排序的关于 f 、 g 的偏序集, 求证: 当且仅当 F 为完备格时, $A(E, F)$ 为完备格.

证明:

(1) 即补充定理194.

(2) 即补充定理195.

(3) 即补充定理196.

(4) 即补充定理197.

习题 88.

E 为 A 到 A 的映射集合, $F = \{X | X \subset A \text{ 与 } f(X) \subset X \text{ 与 } f \in E\}$, 且为按包含关系排序的偏序集, 则 F 为完备格.

证明: F 的任何子集的最小上界, 是其并集, 得证.

习题 89.

E 为偏序集, f 为闭包; 令 F 为 f 的不动点集合:

(1) 求证:

对任意 $x \in E$, 令 $F_x = \{y | y \in F \text{ 与 } x \leq y\}$, 则其有最小元 $f(x)$.

反过来, 如果 $G \subset E$, 对任意 $x \in E$, $\{y | y \in G \text{ 与 } x \leq y\}$ 均有最小元 $g(x)$, 则 g 为闭包, 且 G 为 g 的不动点集合.

(2) E 为完备格, 求证: F 的任何非空子集在 E 上的最大下界属于 F .

(3) 如果 E 为格, 求证: 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$, $f(\sup(x, y)) = \sup(f(x), f(y))$.

证明:

(1) $f(x) \geq x$, 因此 $f(x) \in F_x$; 设 $y \in F_x$, 则 $x \leq y$, 故 $f(x) \leq f(y)$, $y \geq f(x)$, 故 $f(x)$ 为最小元. 反过来, 根据定义可证对任意 $x \in E$, $g(x) \geq x$, $g(x) \in G$, 故 $g(g(x)) = g(x)$, 同时, 当 $x \leq y$ 时, $\{z | z \in G \text{ 与 } y \leq z\} \subset \{z | z \in G \text{ 与 } x \leq z\}$, 故 $g(x) \leq g(y)$, 因此, G 为闭包. 另外, 对任意 $x \in G$, $x = g(x)$, 同时, 对任意 $x = g(x)$, $x \in G$, 得证.

(2) 如果该子集的最大下界 x 不属于 F , 则 $f(x) > x$, 且 $f(x)$ 也是该子集的下界, 矛盾.

(3) 设 $z = \sup(x, y)$, 对任意 u , 如果使 $f(x) \leq u$, $f(y) \leq u$, 则 $x \leq f(u)$, $y \leq f(u)$, 故 $z \leq f(u)$, 因此 $f(z) \leq u$, 所以 $f(z) = \sup(f(x), f(y))$, 得证.

习题 90.

$R \subset A \times B$, 对 $X \subset A$ 、 $Y \subset B$, 令映射 $r(X) = \{y | y \in B \text{ 与 } (\forall x)(x \in X \Rightarrow (x, y) \in R)\}$, $s(Y) = \{x | x \in A \text{ 与 } (\forall y)(y \in Y \Rightarrow (x, y) \in R)\}$, $\mathcal{P}(A)$ 、 $\mathcal{P}(B)$ 为按包含关系排序的偏序集, 求证: r 、 s 为单减映射, 并且映射 $s \circ r$ 、 $r \circ s$ 均为闭包.

证明: 根据定义可证, r 、 s 为单减映射, 因此, $s \circ r$ 、 $r \circ s$ 为单增映射. 对任意 $x \in X$, 令 $Y = r(X)$, 则对任意 $y \in Y$, $(x, y) \in R$, 故 $x \in s(r(X))$, 因此 $s(r(X)) \geq X$, 同理 $r(s(Y)) \geq Y$. 因此 $r(s(r(X))) \geq r(X)$, 同时, 由于 r 为单减函数, 故 $r(s(r(X))) \leq r(X)$, 因此 $r(s(r(X))) = r(X)$, 故 $s(r(s(r(X)))) = s(r(X))$, 同理 $r(s(r(s(Y)))) = r(s(Y))$, 根据定义, $s \circ r$ 、 $r \circ s$ 均为闭包.

习题 91.

(1) E 为偏序集, 对任意 $X \subset E$, 令 $r(X) = \{A | A \text{ 为 } X \text{ 在 } E \text{ 上的上界}\}$, $s(X) = \{A | A \text{ 为 } X \text{ 在 } E \text{ 上的下界}\}$, 映射 i 为 $x \rightarrow s(\{x\})$.

求证:

令 $E' = \{X | X \subset E \text{ 与 } X = s(r(X))\}$, 并按包含关系排序, 则 E' 是完备格.

并且, 映射 i 是 E 到 E' 的一个子集的同构.

同时, 对任意 $x_i \in E$, 如果 $\{x_i\}$ 有最小上界 a , 则在 E' 上, $i(a)$ 是 $\{i(\{x_i\})\}$ 的最小上界.

(2) 求证: 对任意 $X \subset E$, $s(r(X))$ 是 $i(X)$ 在 E' 上的最小上界. 同时, 确定对 E 到完备格 F 的任意单增映射 f , 是否存在唯一的 E' 到 F 的单增映射 f' , 使 $f = f' \circ i$, 并且, 对 E' 的任意子集 Z , 均有 $f'(\sup Z) = \sup(f'(Z))$.

(3) 如果 E 为全序集, 求证: E' 为全序集.

证明:

(1) 令 $f = s \circ r$, 根据定义, f 是闭包. 因此, 对 E' 的子集 I , 令 $J = \bigcup_{X \in I} X$, $f(J)$ 为 I 的最小上界. 根据补充定理194, E' 是完备格.

根据定义, $s \circ r$ 、 $r \circ s$ 为增函数, r 为减函数, 故 $s(r(s(\{x\}))) \geq s(\{x\})$, $s(r(s(\{x\}))) \leq s(\{x\})$, 所以 $s(r(s(\{x\}))) = s(\{x\})$, 因此映射 i 是 E 到 E' 的子集 $i(E)$ 的双射. 同时, 如果 $x \leq y$, 则 $s(\{x\}) \leq s(\{y\})$, 故 i 是 E 到 $i(E)$ 的同构. 根据定义可证, $i(a)/\{i(\{xi\})\}$ 的最小上界.

(2) 根据定义, $s(r(\{x\})) = s(\{x\})$, 由于 $s \circ r$ 为增函数, 因此, 对任意 $x \in X$, $s(r(X)) \geq s(\{x\})$. 如果对任意 $x \in X$, $Y \geq s(\{x\})$ 且 $s(r(Y)) = Y$, 则 $Y \geq \bigcup_{x \in X} s(\{x\})$, 因此 $Y \geq s(r(\bigcup_{x \in X} s(\{x\})))$, 又因为 $r(\bigcup_{x \in X} s(\{x\})) = r(X)$, 故 $s(r(X)) = (r(\bigcup_{x \in X} s(\{x\})))$, 因此 $Y \geq s(r(X))$, 故 $s(r(X))$ 是 $i(X)$ 在 E' 上的最小上界.

设 a 、 b 、 c 互不相等, 令 $E = \{a, b, c\}$, 按 $(\{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}, \{a, c\}, \{b, c\})$ 排序, $F = \{a, b, c\}$, 按 $(\{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\})$ 排序, 映射 $f = Id_E$, $Z = \{\{a\}, \{b\}\}$, 则 $f'(\sup Z) = c$, $\sup(f'(Z)) = b$, 故为反例.

(3) 根据定义可证.

注: 原书习题91 (2) 后半部分是假命题.

习题 92.

E 为格:

(1) 求证: 如果以下两个条件之中任何一个成立, 则对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $z \in E$, 均有 $\sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)) = \inf(\sup(x, y), \sup(y, z), \sup(z, x))$:

第一, 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $z \in E$, $\sup(x, \inf(y, z)) = \inf(\sup(x, y), \sup(x, z))$;

第二, 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $z \in E$, $\inf(x, \sup(y, z)) = \sup(\inf(x, y), \inf(x, z))$.

(2) 求证: 如果对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $z \in E$, 均有 $\sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)) = \inf(\sup(x, y), \sup(y, z), \sup(z, x))$, 则当 $x \geq z$ 时, $\sup(z, \inf(x, y)) = \inf(x, \sup(y, z))$, 并且, (1) 当中的两个条件都成立. 即对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $z \in E$, $\sup(x, \inf(y, z)) = \inf(\sup(x, y), \sup(x, z))$ 、 $\inf(x, \sup(y, z)) = \sup(\inf(x, y), \inf(x, z))$ 、 $\sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)) = \inf(\sup(x, y), \sup(y, z), \sup(z, x))$ 都等价.

(3) 求证: 下列两个条件中的任何一个, 均为 E 为分配格的充分必要条件:

第一, 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $z \in E$, $\inf(z, \sup(x, y)) \leq \sup(x, \inf(y, z))$;

第二, 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $z \in E$, $\inf(\sup(x, y), \sup(z, \inf(x, y))) = \sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x))$.

证明: 即补充定理198.

习题 93.

(1) 求证: 按包含关系排序的维数不小于2的向量空间的子空间集合 E , 是互补格. 但对 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $x \neq y$, 通常 x 对 y 的补不是唯一的.

(2) E 为分配格和互补格, 求证: 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $x \neq y$, x 对 y 的补唯一. 如果 E 为分配格和互补格, 并且有最大元 z , 则称 E 为布尔网络. 对任意 $x \in E$, 令 x^* 为 x 对 z 的补, 则 $x \rightarrow x^*$ 为 E 到按在 E 上的偏序关系的相反关系排序的同构, 并且 $(x^*)^* = x$. 对任意集合 A , 按包含关系排序的 $\mathcal{P}(A)$, 是布尔网络.

(3) E 为布尔网络, 且为完备格, $(x_i)_{i \in I}$ 为 E 的元素族, 求证: $\inf(y, \sup(x_i)_{i \in I}) = \sup(\inf(y, x_i))_{i \in I}$.

证明:

(1) 对 E 的任何两个元素, 其交集为最大下界, 其和为最小上界, 故 E 为格. 对任意 $x \leq y$, 将 x 的基扩展为 y 的基, 则扩展的基, 为 x 对 y 的补, 故 E 为互补格. 同时, 当 y 不是 E 的最大元时, 扩展的基和 x 的基线性组合可以得到不同的补, 故 x' 存在且通常不是唯一的.

(2) 即补充定理200、补充定理201、补充定理202.

(3) 即补充定理203.

注: 习题93(1)涉及尚未介绍的“向量空间”知识.

习题 94.

A 的元素数目不小于 $3F = \{A | (\Delta_A \text{为} E \text{的划分})\}$, 并按偏序关系“ $X \in F$ 与 $Y \in F$ 与 Δ_X 为比 Δ_Y 更细”排序. 求证: F 是完备格, 不是分配格, 但是互补格.

证明: 对 F 的任意子集 X , $\{B | B \neq \emptyset \text{与} (\forall x)(\forall z)(x \in B \text{与} z \in X \Rightarrow (\exists t)(t \in z \text{与} x \in t \text{与} t \subset B))\}$ 为其最小上界, $\{C | C \neq \emptyset \text{与} (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in C \text{与} y \in C \text{与} z \in X \Rightarrow (\exists t)(t \in z \text{与} x \in t \text{与} y \in t))\}$ 为其最大下界, 故 F 为完备格.

对 F 的任意子集 X 、 Y , 且 $X \leq Y$, 对任意 $z \in Y$, 令 $H_z = \{x | x \in X \text{与} x \subset z\}$, $T_z = \bigcup_{x \in H_z} \{\tau_u(u \in x)\}$. $D = \{u | (\exists z)(u = T_z \text{与} z \in Y)\}$, $E = A - \bigcup_{x \in D} x$, $K = D \cup \{X | (\exists x)(X = \{x\} \text{与} x \in E)\}$, 则 K 为 X 的补.

F 不是分配格的反例:

令 x 、 y 、 z 互不相等, $A = \{x, y, z\}$, $X = \{\{x\}, \{y, z\}\}$, $Y = \{\{y\}, \{x, z\}\}$, $Z = \{\{z\}, \{x, y\}\}$, 则 $\sup(X, \inf(Y, Z)) \neq \inf(\sup(X, Y), \sup(X, Z))$.

注: 证明互补格时, K 的含义是: 从 Y 的每个集合对应的 X 的各集合中, 各取一个元素, 组成若干个新集合(D), 然后将 A 剩下的每个元素均作为一个集合.

习题 95.

求证: 当且仅当集族 $(E_i)_{i \in I}$ 满足下列条件时, 其序数和为无间隙的:

第一, I 至少有一对可比较的不同元素, 或者存在 $i \in I$ 使 E_i 至少有一对可比较的不同元素;

第二, 对任意 $i \in I$, 如果 E_i 至少有一对可比较的不同元素, 则 E_i 为无间隙的;

第三, $a \in I$ 、 $b \in I$, $a < b$ 且 a, b 为空, 则 E_a 没有极大元或者 E_b 没有极小元.

特别是:

对任意 $i \in I$, E_i 都是无间隙的, 且没有极大元 (或极小元), 则其序数和是无间隙的.

如果 I 是无间隙的, 并且对任意 $i \in I$, E_i 都是无间隙的或者没有可比较的元素, 则其序数和是无间隙的.

证明: 根据定义可证.

习题 96.

(1) E 是离散的, 求证: 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$ 、 $x < y$, 存在 $x' \in E$ 、 $y' \in E$, 使 $x \leq x'$ 、 $x' < y'$ 、 $y' \leq y$, 且 $[x', y'] = \emptyset$. 并给出一个满足该条件, 但不是离散的全序集.

(2) $(E_i)_{i \in I}$ 为集族, 其中 $I \neq \emptyset$, 对任意 $i \in I$, $E_i \neq \emptyset$, 求证: 当且仅当 I 为离散的, 并且对任意 $i \in I$, E_i 为离散的, 该集族的序数和是离散的,

证明:

(1) 根据定义可证. 康托尔集是一个例子.

(2) 令 E 为其序数和.

必要性: 如果 E 是离散的, 根据习题96 (1), 对任意 $i \in I$, $E_i \times \{i\}$ 是离散的, 因此 E_i 是离散的; 同时, 令 $F = \{x | (\exists i)(i \in I \text{ 与 } x = \tau_y(y \in E_i))\}$, 则 F 是离散的, 因此 I 是离散的, 必要性得证.

充分性: 对 E 的任何偏序子集 F , 令 $J = pr_2 F$, 则 F 为集族 $(E_i \cap F)_{i \in J}$ 的序数和, 如果 F 是无间隙的, 根据习题95, J 至少有一对可比较的不同元素, 令其为 x 、 y 且 $x < y$, 则存在 $x' \in E$ 、 $y' \in E$, 使 $x \leq x'$ 、 $x' < y'$ 、 $y' \leq y$, 且 $[x', y'] = \emptyset$. 同时, 根据习题95, 对任意 $i \in J$, $E_i \cap F$ 没有可比较的不同元素, 因此, 对任意 $i \in J$, $E_i \cap F$ 有极大元也有极小元, 矛盾.

注: 习题96 (1) 反例部分部分涉及尚未介绍的“康托尔集”知识.

习题 97.

E 为非空全序集, 公式 S 为 ($[x, y]$ 是离散的), 求证: S 和在 E 上的偏序 $x \leq y$ 弱相容; 关于 S 的等价类是离散的; E/S 的商偏序集存在, 其或者是仅有一个元素的集合, 或者是无间隙的. 并且, E 同构于某个离散集合族的序数和, 其指标集或者是仅有一个元素的集合, 或者是无间隙的.

证明: 根据补充定理169, S 和在 E 上的偏序 $x \leq y$ 弱相容.

考虑关于 S 的某个等价类的任何偏序子集 F , 设 $x \in F$, $y \in F$, 则 $[x, y]$ 是离散的, 令 $G = F \cap [x, y]$, 根据习题96 (3), 存在 $x' \in G$ 、 $y' \in G$, 使 $x \leq x'$ 、 $x' < y'$ 、 $y' \leq y$, 且 $[x', y'] = \emptyset$, 因此, 关于 S 的等价类是离散的.

同时, E 同构于集族 $(X)_{X \in E/S}$ 的序数和. 如果 E 是离散的, 根据习题96 (1), 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$, $[x, y]$ 都是离散的, 故 $E/S = \{E\}$, 即是仅有一个元素的集合; 如果 E 不是离散的, 则集族 $(X)_{X \in E/S}$ 的序数和也不是离散的, 根据习题96 (4), E/S 不是离散的, 得证.

习题 98.

(1) E 为偏序集, 求证: 对任意开集 $U \subset E$, 存在唯一的正则开集 \tilde{U} , 使 U 为 \tilde{U} 的共尾子集, 并且, 映射 $U \rightarrow \tilde{U}$ 为单增映射. 同时, 对开集 U, V , 如果 $U \cap V = \emptyset$, 则 $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$.

(2) E 为偏序集, 令 $R(E)$ 为 E 的正则开子集集合, 并按包含关系排序, 求证: $R(E)$ 为布尔网络, 且为完备格. 并且, 当且仅当 E 非空且为右方有向集时, $R(E)$ 为仅有两个元素的结合.

(3) 令 F 为 E 的共尾子集, $R(E), R(F)$ 均按包含关系排序, 求证: 映射 $U \rightarrow U \cap F$ 为 $R(E)$ 到 $R(F)$ 的同构.

(4) E_1, E_2 为偏序集, $E_1 \times E_2$ 按偏序关系 $(pr_1x \leq pr_1y)$ 与 $(pr_2x \leq pr_2y)$ 排序, 求证: $E_1 \times E_2$ 的任意开集, 均可表示为 $U_1 \times U_2$ 的形式, 其中 U_1, U_2 分别为在 E_1 上的开集、在 E_2 上的开集. 并确定 $R(E_1 \times E_2)$ 是否同构于 $R(E_1) \times R(E_2)$.

证明:

(1) 即补充定理207 (1)、补充定理207 (3)、补充定理207 (5).

(2) 即补充定理209 (2)、补充定理209 (6)、补充定理209 (7).

(3) $U \in R(E)$, 因此在 F 上 $U \cap F$ 是开集, 设 $U \cap F$ 在 F 上相应的正则开集是 V , 对任意 $x \in V$, 显然 $x \in F$, 同时, 对任意 $y \geq x$, 存在 $z \in F$ 且 $y \leq z$, 因此, $z \in V$, 因此存在 $z \leq t$ 且 $t \in U \cap F$, 根据补充定理207 (2), $x \in \tilde{U}$, 故 $x \in U$, 因此 $x \in U \cap F$, 所以 $U \cap F$ 在 F 上是正则开集.

对任意 $V \in R(F)$, 设 V 在 E 上相应的正则开集为 U , 则 U 是唯一的; 同时, 对任意 $x \in U \cap F$, 对任意 $y \geq x$ 且 $y \in F$, 存在 $z \in F$ 且 $y \leq z$, 故 $z \in U \cap F$, 故存在 $t \in V$ 使 $t \geq z$, 根据补充定理207 (2), $x \in V$, 因此, $U \cap F = V$. 因此, $U \rightarrow U \cap F$ 为 $R(E)$ 到 $R(F)$ 的双射. 根据定义 $U \subset V \Rightarrow U \cap F \subset V \cap F$; 反过来, 如果 $U \cap F \subset V \cap F$, 如果 $x \in U$, 对任意 $y \geq x$, 存在 $z \in F$ 且 $y \leq z$, 因此 $z \in V$, 根据补充定理207 (2), $x \in V$, 故 $U \subset V$, 综上, 该映射为同构.

(4) 对于 $F \subset E_1 \times E_2$, 且 F 为开集, 令 $U_1 = pr_1F, U_2 = pr_2F$, 根据定义可证 $F = U_1 \times U_2$ 且 U_1, U_2 均为开集.

令 $E_1 = \{a\}, E_2 = \{b\}$, 则 $R(E_1 \times E_2)$ 不同构于 $R(E_1) \times R(E_2)$.

注: 原书习题98 (4) 后半部分是假命题.

习题 99.

E 为偏序集, 令 $R(E)$ 为 E 的正则开子集集合, $R_0(E) = R(E) - \{\emptyset\}$, 并按包含关系的相反关系排序. 令为 E 到 $R_0(E)$ 的规范映射:

(1) 求证: r 为单增映射, 并且 $r(E)$ 的像是 $R_0(E)$ 的共尾子集.

(2) 求证: E 为偏序集, 当且仅当同时满足下列两个条件时, E 为右方无向集:

第一, 对任意 $x \in E, y \in E, x < y$, 均存在 $z \in E, x < z$, 使 $[y, \rightarrow] \cap [z, \rightarrow] = \emptyset$;

第二, 令 x, y 是 E 的一对不可比较的元素, 那么, 或者存在 $x' \geq x$, 使 $[x', \rightarrow [\cap [y, \rightarrow [= \emptyset$, 或者存在 $y' \geq y$, 使 $[x, \rightarrow [\cap [y', \rightarrow [= \emptyset$.

(3) 求证: $R_0(E)$ 为右方无向集, 并且 $R_0(E)$ 到 $R_0(R_0(E))$ 的规范映射为双射.

证明:

(1) 即补充定理210.

(2) 即补充定理212.

(3) 对任意 $X \in R_0(E)$ 、 $Y \in R_0(E)$, 如果 $Y \subset X$ 或者 Y, X 不可比较, 根据补充定理209 (3), 存在 $Z \in R_0(E)$ 且 $Z \subset X$ 、 $Z \cap Y = \emptyset$; 根据补充定理212, $R_0(E)$ 为右方无向集, 并且 $R_0(E)$ 到 $R_0(R_0(E))$ 的规范映射为单射. 对任意 $U \in R_0(R_0(E))$, 设其最小元为 X , 则对任意 $Y \subset X$, 存在 $X \cap Y \subset U$, 根据补充定理207 (2), $X \in U$, 故 $[X, \rightarrow [\subset U$, 因此 $r(X) = U$, 得证.

习题 100.

(1) 求证: 没有极大元的右方无向集, 是右方分叉集.

(2) E 为实数区间 $[k2 - n, (k + 1)2 - n]$ (n 为自然数, k 为整数且 $k \in [0, 2^n - 1]$) 的集合, 按包含关系的相反关系排列, 求证: E 为右方分叉集, 并且没有极大元.

(3) 给出一个右方分叉集, 其不存在右方无向的共尾子集.

(4) 给出偏序集, 它不是右方分叉集, 但存在右方分叉的共尾子集.

证明:

(1) 即补充定理213 (3).

(2) 根据补充定理212、补充定理213 (3) 可证.

(3) 设 E 为习题100 (2) 所称的集合, F 为不包含可数共尾子集的全序集, 根据定义, $E \times F$ 为右方分叉集. 同时, $E \times F$ 的任何共尾子集, 都有元素 $(x, a), (x, b)$, 故该共尾子集不是右方无向集.

(4) 设 E 为习题100 (2) 所称的集合, F 为非空全序集, 则偏序集族 $(F)_{i \in E}$ 的序数和, 不是右方分叉集, 但令其序数和为 A , $y \in F$, 则 $\{x | x \in A \text{ 与 } pr_1 x = y\}$ 为右方分叉的共尾子集.

注: 习题100 (2)、(3)、(4) 涉及尚未介绍的“有理数”知识.

3.2 良序集 (Ensembles bien ordonnés)

元数学定义 62. 良序关系 (*relation de bon ordre*), 良序图 (*graphe d'un bon ordre*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 令 R 为关于 x, y 的偏序关系, 并且对任意满足 $E \neq \emptyset$ 并且 $x \in E \Rightarrow (x | y)R$ 的集合 E , E 均为按偏序关系 R 与 $x \in E$ 与 $y \in E$ 排序的偏序集, 并且有最小元, 则称 R 为 x, y 之间的良序关系, 在没有歧义的情况下简称为 R 为良序关系. 良序关系生成的图称为良序图.

定义 126. 良序 (*bien ordonné*)

F 为在 E 上的偏序, 如果 $y \in F\langle x \rangle$ 为 x 、 y 之间的良序关系, 则称 F 为在 E 上的良序.

定义 127. 良序集 (*ensemble bien ordonné*), 良序子集 (*partie bien ordonné*)

任何非空子集都有最小元的偏序集, 称为良序集. 偏序集的偏序子集如果是良序集, 则称为良序子集.

补充证明规则 84.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 如果 E 是按照偏序关系 R 排序的良序集, 则 R 是良序关系; 如果 E 是根据偏序 F 排序的良序集, 则 F 是良序.

证明: 由于 E 的任何非空子集 E' , 都满足 $x \in E' \Rightarrow (x|y)R$, 且 E' 为按偏序关系 R 与 $x \in E$ 与 $y \in E$ 排序的偏序集, 故 R 为偏序关系. 进而, 如果 E 是良序集, 则 $y \in F\langle x \rangle$ 为良序关系, F 为良序.

补充证明规则 85.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, 如果 R 是关于 x 、 y 的良序关系, $E \neq \emptyset$ 并且 $x \in E \Rightarrow (x|y)R$, 则按 R 与 $x \in E$ 与 $y \in E$ 排序的 E , 为良序集.

证明: 根据定义可证.

补充定理 215.

良序集是全序集.

证明: 根据定义可证.

补充定理 216.

良序集的子集如果有上界, 则有最小上界.

证明: 令良序集为 E , 其子集为 A , A 的上界集为 B , 则 B 的最小元为其最小上界.

补充定理 217.

(1) 良序集的偏序子集也是良序集.

(2) 良序集是离散的.

(3) 当且仅当指标集和各偏序集均为良序集时, 偏序集族的序数和为良序集.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 设 E 为良序集, F 为其偏序子集, 且有一对可比较的不同元素, 则 F 有最小元 a , $F - \{a\}$ 有最小元 b , 则区间 $]a, b[= \emptyset$, 得证.

(3) 根据定义可证.

补充定理 218.

\emptyset 、 x 按其唯一的偏序排序得到的偏序集，都是良序集。

证明：根据定义可证。

定义 128. 片段 (segment)

E 为偏序集， $S \subset E$ ，如果 $x \in S$ 与 $y \in E$ 与 $y \leq x \Rightarrow y \in S$ ，则称 S 为 E 的片段。

补充定理 219.

(1) 偏序集是其自身的片段。

(2) 偏序集的任何两个片段的交集和并集，都是其片段。

证明：根据定义可证。

补充定理 220.

令 E 为偏序集， S 为 E 的片段，则 E 的偏序子集 S 的片段，也是 E 的片段。

证明：根据定义可证。

定理 72.

E 为良序集， S 为 E 的片段， $S \neq E$ ，则 $(\exists a)(a \in E \text{ 与 } S =] \leftarrow, a[)$ 。

证明：由于 $E - S$ 非空，故令 a 为 $E - S$ 的最小元，由于 $a \notin S$ ，又因为 $x \in S$ 与 $a \leq x \Rightarrow a \in S$ ，故 $x \geq a \Rightarrow x \notin S$ ，又因为 $x \in E - S \Rightarrow x \geq a$ ，因此 $E - S = [a, \rightarrow [$ ，得证。

补充定理 221. 偏序集的每个元素均确定一个以该元素为终点的片段

E 为偏序集， $a \in E$ ，则 $] \leftarrow, a[$ 为 E 的片段。

证明：假设 $x \in] \leftarrow, a[$ 、 $y \in E$ 、 $y \leq x$ ，则 $x \leq a$ ，故 $y \leq a$ ，得证。

定义 129. 以元素为终点的片段 (segment d'extrémité un élément)

E 为良序集， $a \in E$ ，则 $] \leftarrow, a[$ 称为以 a 为终点的片段，记作 S_a 。

补充定理 222.

E 为全序集， $A = \bigcup_{x \in E} S_x$ ，如果 E 没有最大元，则 $A = E$ ，如果 E 有最大元 b ，则 $A = E - \{b\}$ 。

证明：对任意 $c \in E$ ，如果 c 不是 E 的最大元，则存在 d ，使 $c < d$ ，因此 $c \in S_d$ ，故 $c \in A$ ；反过来，对任意 $c \in A$ ，存在 S_d ，使 $c < d$ ，故 $c \in E$ ，并且 c 不是 E 的最大元，得证。

补充定理 223.

E 为良序集， $a \in E$ ， $b \in E$ ， $S_a = S_b$ ，则 $a = b$ 。

证明：如果 $a < b$ ，则 $a \notin S_a$ ，但 $a \in S_b$ ，矛盾。同理 $a > b$ 也矛盾，得证。

补充定理 224.

映射 f 为偏序集 E 到偏序集 F 的同构，则：

- (1) 如果 E 为良序集，则 F 为良序集。
- (2) 如果 S 为 E 的片段，则 $f(S)$ 为 F 的片段。

证明：(1) 对于 F 的任何非空子集 B ，令 $A = f^{-1}(B)$ ，设 A 的最小元为 a ，由于对任意 $x \in A$ ， $a \leq x$ ，故对任意 $y \in B$ ，令 $z = f^{-1}(y)$ ，则 $f(a) \leq f(z)$ ，即 $f(a) \leq y$ ，因此 $f(a)$ 为 B 的最小元。得证。

(2) 如果 $S = E$ ，则 $f(S) = F$ ，得证；

如果 $S \neq E$ ，根据定理 72，令 S 为 $] \leftarrow, a[$ ， $a \in E$ ，则 $f(x) < f(a) \Leftrightarrow x < a$ ，故 $f(S)$ 为 $] \leftarrow, f(a)[$ ，得证。

补充定理 225.

- (1) E 为良序集，如果其片段 S_a 同构于 S_b ，则 $a = b$ 。
- (2) E 为良序集，如果 E 同构于其片段 S ，则 $E = S$ 。

证明：

(1) 令 f 为 S_a 到 S_b 的同构，令 $X = \{x | x \in S_a \text{ 与 } x \neq f(x)\}$ ，如果 $X \neq \emptyset$ ，则 X 有最小元 y ，因此 $f(y) \neq y$ 。令 $z = f^{-1}(y)$ ，则 $z \neq y$ ，故 $f(z) \neq z$ ，因此 $z > y$ ，故 $f(y) < y$ ，故 $f(f(y)) < f(y)$ ，因此 $f(y) \in X$ ，矛盾，因此 $X = \emptyset$ ，故对任意 $x \in S_a$ ， $x = f(x)$ ，所以 $S_a = S_b$ ，根据补充定理 223， $a = b$ 。

(2) 类似补充定理 225 (1) 可证。

定理 73.

E 为良序集：

(1) 偏序集 $F = \{X | (X \text{ 为 } E \text{ 的片段}) \text{ 与 } X \neq E\}$ ，并按包含关系排序，则映射 $x \rightarrow S_x$ 为 E 到 F 的同构。

(2) $E^* = \{S | S \text{ 为 } E \text{ 的片段}\}$ ，则 E^* 为按包含关系排序的良序集。

证明：

(1) $x < y \Rightarrow S_x \subset S_y$ ，因此 $S_x \neq S_y$ ，根据定理 69，映射 $x \rightarrow S_x$ 为 E 到 F 的同构。

(2) $E^* = F \cup \{E\}$ ，根据补充定理 224 (1)， F 的任意非空子集 G 均有最小元，进而， $G \cup \{E\}$ 也有同样的最小元，同时， $\{E\}$ 也有最小元 E ，得证。

定理 74.

令 $(X_a)_{a \in A}$ 为偏序集族，集合 $\bigcup_{a \in A} \{X_a\}$ 按包含关系排序，且为右方有向集。对任意 $a \in A$ ， $b \in A$ ，如果 $X_a \subset X_b$ ，则在 X_a 上的偏序，都是在 X_b 上的偏序在 X_a 上导出的偏序。令 $E =$

$\bigcup_{a \in A} X_a$, 则存在唯一的在 E 上的偏序, 令 E 为按该偏序排序的偏序集, 对任意 $a \in A$, X_a 都是偏序集 E 的偏序子集.

证明: 令 G_a 为在 X_a 上的偏序的图, 如果 G 为在 E 上的偏序, 且对任意 $a \in A$ 时, 该偏序在 X_a 上导出的偏序, 等于 X_a 上的偏序, 则对任意 $a \in A$, $G_a \subset G$, 因此 $\bigcup_{a \in A} G_a \subset G$; 同时, 由于该集族为右方有向集, 故对任意 $x \in E$, $y \in E$, 存在 $x \in X_a$, $y \in X_a$, 因此 $(x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in G_a$, 故 $G = \bigcup_{a \in A} G_a$, 唯一性成立.

设 $G = \bigcup_{a \in A} G_a$, 由于对任意 $a \in A$, $b \in A$, $X_a \subset X_b \Rightarrow G_b \cap (X_a \times X_a) = G_a$, 因此当 $x \in G \cap (X_a \times X_a)$ 时, 存在 $c \in A$, 使 $x \in G_c$ 且 $x \in X_a \times X_a$, 因此 $x \in G_c \cap (X_a \times X_a)$, 故 $x \in G_a$. 反过来, 当 $x \in G_a$ 时, $x \in G$, $x \in X_a \times X_a$. 故 $a \in A$ 时, $G \cap (X_a \times X_a) = G_a$.

同时, 对 E 的任意三个元素 x , y , z , 均存在 $a \in A$, 使 $\{x, y, z\} \subset X_a$, 故 G 为偏序图. 存在性成立.

定理 75.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为良序集族, 对任意 $i \in I$, $k \in I$, X_i 和 X_k 其中都有一个另一个的片段, 令 $E = \bigcup_{i \in I} X_i$, 则存在唯一的在 E 上的偏序满足下列条件:

第一, E 为良序集; 第二, 对任意 $i \in I$, X_i 都是 E 的偏序子集.

同时, 对任意 $i \in I$, X_i 的片段都是 E 的片段, 并且, 对任意 $x \in X_i$, X_i 的以 x 为终点的片段, 是 E 的以 x 为终点的片段. 反过来, E 的片段或者是 E , 或者存在 $i \in I$, 使之成为 X_i 的片段.

证明: 根据定理 74, 存在唯一 E 上的偏序.

对 E 的任意非空子集 H , 存在 $i \in I$, 使 $H \cap X_i \neq \emptyset$, 设 a 是 $H \cap X_i$ 的最小元, 对任意 $x \in H$, 设 $x \in X_k$, 若 $X_k \subset X_i$, 则 $a \leq x$, 若 $X_i \subset X_k$, 且 $x < a$, 则 $x \in] \leftarrow, a[$, 根据补充定理 220、定理 72, 该区间是 X_i 的片段, 故 $x \in H \cap X_i$, 矛盾, 因此 a 是 H 的最小元, 故 E 为按该偏序排序的良序集.

如果 $x \in X_i$, $y \in E$, 则存在 $k \in I$, 使 $x \in X_k$, $y \in X_k$. 同时, 根据补充定理 220、定理 72, 对任意 $x \in X_i$, X_i 的以 x 为终点的片段, 是 E 的区间 $] \leftarrow, x[$, 因此是 E 的以 x 为终点的片段.

反过来, E 的片段如果不是 E , 则存在 $x \in E$, 该片段为 $] \leftarrow, x[$, 由于存在 X_i 使 $x \in X_i$, 故该区间也是 X_i 的片段.

定理 76.

E 是良序集, F 的元素均为 E 的片段, 并且, 任何 F 的元素族的并集也是 F 的元素, 同时, 如果 $S_x \in F$, 则 $S_x \cup \{x\} \in F$, 则 F 是 E 的片段集合.

证明：设有 E 的片段不属于 F ，根据定理73 (2)，不属于 F 的 E 的片段的集合，有最小元 S 。如果 S 没有最大元，根据补充定理222， S 是所有片段的并集，因此 $S \in F$ ，矛盾；如果 S 有最大元 a ，则 $S - \{a\} \in F$ ，则 $S \in F$ ，同样矛盾。

证明规则 59. 超限归纳法

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为公式， x 不是常数， E 为按良序关系 $x \leq y$ 排序的良序集，如果 $(x \in E \text{ 与 } (\forall y)(y \in E \text{ 与 } y < x \Rightarrow (y|x)R)) \Rightarrow R$ 是 M 的定理，则 $x \in E \Rightarrow R$ 是 M 的定理。

证明：令 F 为 E 的满足 $x \in S \Rightarrow R$ 的片段 S 的集合，因此 F 任何元素的并集也是 F 的元素，同时，如果 $S_x \in F$ ，则 $S_x \cup \{x\} \in F$ ，根据定理76可证。

证明规则 60. 超限归纳法定义的映射的存在性和唯一性

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， E 为良序集， u 为字母， T 为项，则存在唯一的项 U 和 E 到 U 的满射 f ，使 $(f^{(x)}|u)T = f(x)$ ，其中 $f^{(x)}$ 为任意一个 S_x 到 $f(S_x)$ 的满射，并且在 S_x 上和 f 重合。

证明：设 f 和 U 、 f' 和 U' 均满足条件，令 F 为使 f 和 f' 在 S 上重合的 E 的片段 S 的集合，因此， F 任意若干个元素的并集都是 F 的元素，并且对于 F 的元素 S_x ， $f^{(x)} = f'^{(x)}$ ， $f(x) = (f^{(x)}|u)T$ ， $f'(x) = (f'^{(x)}|u)T$ ，因此， $S_x \cup \{x\} \in F$ ，根据定理76， F 是 E 的片段集合，故 $E \in F$ 。由于 $U = f(E)$ ， $U' = f'(E)$ ，因此 f 和 f' 在 E 上重合，且 $U = U'$ 。故唯一性成立。

令 G 为存在满足条件的项和满射的 E 的片段的集合，对任意 $S \in G$ ，根据唯一性，存在唯一的满足条件的项和满射，分别记作 f_S 和 U_S 。则对任意 $S' \in G$ 、 $S'' \in G$ ，设 $S' \subset S''$ ， $f_{S'}$ 和 $f_{S''}$ 在 S' 上重合。根据定理32 (2)， G 的元素的并集也属于 G 。同时，令 $S_x \in G$ ，由于 $f_{S_x}(x) = (f_{S_x}^{(x)}|u)T$ ，根据定理33， $S_x \cup \{x\} \in F$ ，根据定理76可证存在性。

定理 77.

G 为 $\mathcal{P}(E)$ 的子集， p 为 G 到 E 的映射，对任意 $X \in G$ ， $p(X) \notin X$ ，则存在 E 的子集 M 和在 M 上的良序 F ，满足下列条件：

第一，令 $x \leq y$ 表示 $y \in F\langle x \rangle$ ， S_x 表示在 M 上的区间 $] \leftarrow, x[$ ， $(\forall x)(x \in M \Rightarrow S_x \in G \text{ 与 } p(S_x) = x)$ ；

第二， $M \notin G$ 。

证明：

令 K 为满足下列条件的图 H 的集合：

第一， $H \subset E \times E$ ；

第二，令 $U = pr_1 H$ ， H 为在 U 上的良序图；

第三，偏序关系 $(x, y) \in H$ 记作 $x \leq y$ ，令 S_x 为 U 的片段，则 $(\forall x)(x \in U \Rightarrow S_x \in G \text{ 与 } p(S_x) = x)$ 。

设 H, H' 都是 K 的元素, 相应的第一射影为 U, U' , 设 $V = \{x | x \in U \cap U' \text{ 与 } (U \text{ 的以 } x \text{ 为终点的片段}) = (U' \text{ 的以 } x \text{ 为终点的片段})\}$, 对任意 $x \in V, y \in V$, 若在 U 上 $x \leq y$, 则在 U' 上 $x \leq y$, 故 (H, U, U) 和 (H', U', U') 在 V 上导出的偏序相同. 如果 $x \in V, y \leq x, y \in U$, 则 $y \in U'$, 同时, 在 U 上 $z \leq y$ 等价于在 U' 上 $z \leq y$, 故 $y \in V$, 因此 V 是 U 的片段, 同理, V 也是 U' 的片段.

如果 $V \neq U$ 且 $V \neq U'$, 设 x 为 $U - V$ 的最小元, x' 为 $U' - V$ 的最小元, 则在 U 上 $V = S_x$, 在 U' 上 $V = S_{x'}$, 且 $p(S_x) = x, p(S_{x'}) = x'$, 故 $x = x'$, 根据 V 的定义, $x \in V$, 矛盾.

因此, $V = U$ 或 $V = U'$. 不妨设 $V = U$, 故 $U \subset U'$, 且 U 是 U' 的片段.

令 $M = \bigcup_{H \in K} H$, 根据定理75, 存在唯一的偏序, 使 M 为按该偏序排序的良序集, 且任意 K 的元素 H , 都是 M 的偏序子集. 并且, 对任意 $x \in M$, 存在 $H \in K$, 使 $x \in H$, 则 $(\forall x)(x \in U \Rightarrow S_x \in H \text{ 与 } p(S_x) = x)$; 由于在 H 上的 S_x 和在 M 上的 S_x 相等, 故 $(\forall x)(x \in M \Rightarrow S_x \in G \text{ 与 } p(S_x) = x)$.

如果 $M \in G$, 令 $a = p(M)$, 则 $a \notin M$, 把 a 作为最大元加入 M , 则 M' 也是良序集, 由于在 M' 上, $M = S_a$, 因此对于上述在偏序集 M' 上延拓的偏序, 相应的偏序图也是 K 的元素, 矛盾.

注: 本定理的证明利用了并集, 即: 对于所有符合条件一的子集, 证明这些子集彼此具有包含关系; 然后, 取所有子集的并集, 证明其仍然符合条件一, 并符合条件二.

定理 78. 策梅洛定理

在任何集合上均存在良序.

证明: 令 $G = \mathcal{P}(E) - \{E\}$, 对于 $X \in G$, 令 $p(X) = \tau_x(x \in E - X)$, 根据定理77, 存在子集 M 以及在 M 上的良序使 $M \notin G$, 故 $M = E$, 得证.

定义 130. 归纳集 (*ensemble inductif*)

如果偏序集的任何全序子集在该偏序集上都有上界, 则称其为归纳集.

补充定理 226.

(1) $F \subset \mathcal{P}(E)$, 并且 $(\forall G)(G \subset F \text{ 与 } G \text{ 为按包含关系排序的全序集} \Rightarrow \bigcup_{X \in G} X \in F)$, 则 F 是归纳集.

(2) “ x 为 A 的子集到 B 的映射”, 为 x 上的集合化公式. 并且, 令 $F = \{x | x \text{ 为 } A \text{ 的子集到 } B \text{ 的映射}\}$, R 为公式 $(v \text{ 为 } u \text{ 在 } pr_1 v \text{ 上的延拓})$, 则 R 为关于 u, v 的偏序关系, 并且按 R 与 $u \in F$ 与 $v \in F$ 排序的偏序集 F , 为归纳集.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 由于“ x 为 A 的子集到 B 的映射 $\Rightarrow x \in A \times B \times A \times B$ ”, 故“ x 为 A 的子集到 B 的映射”为 x 上的集合化公式. 根据定义可证 R 为偏序关系. 根据定理32 (2), F 的任何全序

子集，存在唯一映射，是各元素在所有元素的定义域的并集上的延拓，该映射即为上界，故 F 为归纳集。

定理 79.

如果偏序集 E 的任何良序子集在 E 上都有上界，则 E 有极大元。

证明：令 G 为 E 的有严格上界的子集的集合， p 为 G 到 E 的映射，其中 $p(x) = \tau_v(v$ 为 x 的严格上界)，根据定理77，存在 E 的子集 M 和在 M 上的良序 F ，使 $(\forall x)(x \in M \Rightarrow S_x \in G$ 与 $p(S_x) = x)$ ，且 M 没有严格上界。

在 M 上， $y \in F\langle X \rangle$ 与 $x \neq y \Leftrightarrow x \in S_y$ ，同时， $p(S_y) = y$ ，因此，在 E 上， y 为 S_y 的严格上界，进而，在 E 上， $x < y$ 。

又因为 M 是全序集，故良序 F 是在 E 上的偏序在 M 上的导出的偏序。

由于 M 有上界，且 M 没有严格上界，因此该上界是 E 的极大元。

定理 80. 佐恩引理

归纳集有极大元。

证明：根据定理79可证。

定理 81.

E 为归纳集， $a \in E$ ，则存在 E 的极大元 m ，使 $m \geq a$ 。

证明：令 $F = \{x | x \in E \text{ 与 } x \geq a\}$ ，则 F 为归纳集。设 m 为 F 的极大元，则 m 同时是 E 的极大元，得证。

定理 82.

F 的元素都是 E 的子集，并且对 F 的任意子集 G ，只要 G 是按包含关系排序的全序集， G 的所有元素的并集（或交集）都是 F 的元素，则 F 有极大元（或极小元）。

证明：对于并集的情况，根据补充定理226（1）， F 为归纳集，根据定理80可证。将 F 的所有全序子集变为按相反关系排序的全序集，则可证得交集的结论。

补充定理 227.

$K = \{F | F \text{ 为在 } E \text{ 上的偏序}\}$ ，并且按 $(F \in K \text{ 与 } F' \in K \text{ 与 } F \text{ 是比 } F' \text{ 更细的偏序})$ 排序，则 K 的极小元是在 E 上的全序。

证明：令 H 为 K 的极小元，其图为 G ，设 a, b 是不可比较的，令 $A = \{z | z \in E \text{ 与 } z \leq a\}$ ， $B = \{z | z \in E \text{ 与 } b \leq z\}$ ，因此 $A \cap B = \emptyset$ 。令 $G' = G \cup (A \times B)$ ， H' 为偏序 (G', E, E) 。对任意 $(x, y) \in G'$ ， $(y, z) \in G'$ ：如果 $(x, y) \in G$ ， $(y, z) \in G$ ，则 $(x, z) \in G$ ；如果 $(x, y) \in A \times B$ ， $(y, z) \in G$ ，由于 $(b, y) \in G$ ，故 $(b, z) \in G$ ，因此 $(x, z) \in A \times B$ ，故 $(x, z) \in G'$ ；如果 $(x, y) \in G$ ， $(y, z) \in A \times B$ ，同理可证 $(x, z) \in G'$ 。故对 G' ，传递性成立，根据定义可以证明其他两个条件也成立，因此 H' 是比 H 更细的偏序，矛盾。

补充定理 228.

F 为在 E 上的偏序, 则 F 的图是所有不等于 F 且比 F 更细的全序的图的交集.

证明: 令 F 的图为 G , 对任意不等于 F 且比 F 更细的全序的图的交集的元素 (a, b) , 如果 $(a, b) \notin G$, 则 $a \neq b$. 按照补充定理227的证明过程构造 F' , 使 $(b, a) \in F'$, 考虑 $M = \{H | H \in K \text{ 与 } F' \subset H\}$, 对于按相反关系排序的偏序集, 根据定理80, 其有极大元 Q , 其同时为 K 的极小元. 根据补充定理227, Q 为全序. $(b, a) \in Q$, 因此 $(a, b) \in Q$, 矛盾.

补充定理 229.

任何偏序集同构于全序集族的乘积的一个子集.

证明: 对于按偏序 F 排序的偏序集 E , 令 F 的图为 G , $M = \{H | H \neq F \text{ 与 } (H \text{ 为比 } F \text{ 更细的全序})\}$, 根据补充定理228, $G = \bigcap_{H \in M} (H \text{ 的图})$. 根据定义, 映射 $x \rightarrow (x)_{i \in M} (x \in E)$ 为 E 到 $\prod_{H \in M} E$ 的同构.

补充定理 230.

对于任何偏序集, 存在在该集合上的全序图, 其偏序图是该全序图的子集.

证明: 设 E 为偏序集, 其偏序图为 G , $H = \{K | G \subset K \text{ 与 } K \text{ 为在 } E \text{ 上的偏序图}\}$, 根据定理82, H 有极大元 M , 如存在 $x \in E$ 、 $y \in E$ 且 $(x, y) \notin M$, 则令 $M' = M \cup (x, y) \cup \{(a, b) | b = y \text{ 与 } a \leq x\} \cup \{(a, b) | a = x \text{ 与 } y \leq b\}$, 则 $M' \subset H$, 矛盾. 故 M 为全序图.

定理 83.

E 、 F 为良序集, f 、 g 为 E 到 F 的两个单增映射, 并且, $f(E)$ 是 F 的片段, g 为严格单增映射, 则对任意 $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$.

证明: 如果 $\{x | x \in E \text{ 与 } f(x) > g(x)\} \neq \emptyset$, 设其最小元为 a , 令 $x < a$, 则 $f(x) \leq g(x)$, $g(a) < f(a)$, $g(x) < g(a)$. 由于 $f(E)$ 是 F 的片段, 故存在 z , 使 $g(a) = f(z)$, 则 $f(z) < f(a)$, 因此 $z < a$, 则 $f(z) < f(a)$, $g(z) < g(a)$, 故 $f(z) < g(a)$, 因此 $f(z) < f(z)$, 矛盾.

定理 84.

E 、 F 为良序集, 则下列两个公式至少有一个为真:

第一, 存在唯一的 E 到 F 的片段的同构;

第二, 存在唯一的 F 到 E 的片段的同构.

证明: 令 G 为 E 的片段到 F 的片段的同构的集合, 并为按“ v 是 u 的延拓”排序的偏序集. 设 G 的全序子集为 H , 由于 H 各元素的定义域都是 E 的片段, 故其并集 S 也是 E 的片段, 根据定理32, 存在以 S 为定义域的映射, 是 H 各元素的延拓, 故为 H 的最小上界, 设其为 v , 则 $v(S)$ 为 H 各元素值域的并集, 因此也是 F 的片段. 由于 H 为全序子集, 因此对于 S 的任意两个元素 $x < y$, 存在 $u \in H$, 使 x 、 y 均为 u 的定义域的元素, 故 $u(x) < u(y)$, 因此 $v(x) < v(y)$, 故 v 是 S 到 $v(S)$ 的同构, 因此 $v \in G$, 故 G 为归纳集, 因此 G 有极大元.

设 G 的极大元为 u , 定义域为 S , 如果 $S \neq E$ 且 $u(S) \neq F$, 则存在 $a \in E$ 、 $b \in F$, 使 $S =] \leftarrow, a[$, $u(S) =] \leftarrow, b[$, u 为 S 到 $u(S)$ 的延拓, 将 u 延拓为 w , 其定义域为 $] \leftarrow, a[$, 值域为 $] \leftarrow, b[$, 其中 $w(a) = b$, 则 $w \in G$, 与 u 是 G 的极大元矛盾.

故 $S=E$ 或 $u(S)=F$, 存在性得证.

根据定理83可证唯一性.

定理 85.

E 为良序集, E 到 E 的片段的唯一同构, 是 E 到 E 的恒等映射.

证明: 设存在 E 到其片段 S 的同构, 根据补充定理225 (2), $S = E$, 根据定理84可证.

定理 86.

E 、 F 为良序集, 如果存在 E 到 F 的片段 S 的同构 f , 以及 F 到 E 的片段 T 的同构 g , 则 $S=E$, $T=F$ 并且 f 和 g 互为反函数.

证明: 根据补充定理224 (2), $g(T)$ 为 E 的片段, 故 $g \circ f$ 为 E 到 E 的片段的同构, 根据定理85, $S = E$, 故 $g \circ f = Id_E$, 同理 $f \circ g = Id_F$, $T = F$, 得证.

定理 87.

良序集的任何子集同构于该良序集的一个片段.

证明: 设 A 为良序集的子集, 对于该良序集的片段 S_a , 如果 A 不同构于 E 的任何一个片段, 则存在映射 g , 为 E 到 A 的某个片段 S_a 的同构, 故 $g(a) \in S_a$, 且 g 为严格单增映射, 令 $f = Id_E$, 根据定理83, $a \leq g(a)$, 矛盾.

定义 131. 部分良序集 (*ensemble partiellement bien ordonné*)

如果 E 的任意全序子集都是良序集, 则称 E 为部分良序集.

补充定理 231.

(1) 对任意偏序集 E , 存在 $F \subset E$, F 为部分良序集, 并且是 E 的共尾子集.

(2) 对任意全序集 E , 存在 $F \subset E$, F 为良序集, 并且是 E 的共尾子集.

证明:

(1) 令 $H = \{X | X \subset E \text{ 与 } X \text{ 为部分良序集}\}$, R 为公式 $X \in H$ 与 $Y \in H$ 与 $X \subset Y$ 与 $(\forall x)(\forall y)(x \in X \text{ 与 } y \in Y - X \Rightarrow \text{非}(y \leq x))$, 则 R 为在 $\mathcal{P}(E)$ 上的偏序关系.

对 H 的任意全序子集 K , 令 $Z = \bigcup_{X \in K} X$, 对任意 $X \in K$, $x \in X$, $y \in Z - X$, 则存在 $Y \in K$ 使 $y \in Y$, 因此 $X \leq Y$, 故非 $(y \leq x)$, $X \leq Z$, 因此 Z 为 K 的上界, 故 H 为归纳集, 根据定理80, H 有极大元 M . 如果存在 $y \in E$, 对任意 $x \in M$, 均有非 $(y \leq x)$, 令 $M' = M + \{x\}$, 则 M' 为部分良序集, 且 $M < M'$, 矛盾, 故 M 为 E 的共尾子集.

(2) 根据补充定理231 (1)可证.

定义 132. 关于函数的链 (chaîne pour une fonction)

E 为偏序集, f 为 E 到 E 的映射, 并且对任意 $x \in E$, $f(x) \geq x$: 令 H 为满足下列条件的 E 的子集 M 的集合:

第一, $x \in M \Rightarrow f(x) \in M$;

第二, 如果 M 的非空子集在 E 上有最小上界 x , 则 x 是 M 的元素.

令 $K = \{X | X \in H \text{ 与 } a \in X\}$, 则称 $\bigcap_{X \in K} X$ 为 a 关于函数 f 的链, 记作 C_a , 在没有歧义的情况下可以简称为 a 的链.

补充定理 232.

E 为偏序集, f 为 E 到 E 的映射, 并且对任意 $x \in E$, $f(x) \geq x$. 令 H 为满足下列条件的 E 的子集 M 的集合:

第一, $x \in M \Rightarrow f(x) \in M$;

第二, 如果 M 的非空子集在 E 上有最小上界 x , 则 x 是 M 的元素.

则:

(1) 对任意 $a \in E$, $C_a \in H$;

(2) E 的偏序子集 C_a , 为良序集;

(3) 如果 C_a 在 E 上有最小上界 b , 则 $b \in C_a$ 并且 $f(b) = b$.

证明:

(1) 由于 $E \in H$, 故 $H \neq \emptyset$, 根据定义可证 $C_a \in H$.

(2) 令 $K = \{X | X \subset E \text{ 与 } a \in X \text{ 与 } (X \text{ 在 } E \text{ 上有最小上界 } m) \text{ 与 } (m \notin X \text{ 或 } f(m) > m)\} \cup \{\emptyset\}$, 并定义 K 到 E 的映射 p , 其中:

$p(\emptyset) = a$;

如果 $\sup_E X \notin X$, 则 $p(X) = \sup_E X$;

如果 $\sup_E X \in X$, 则 $p(X) = f(\sup_E X)$.

根据定理77, 存在 E 的子集 U 及在 U 上的良序 F , 使 U 满足:

第一, 在 U 上, $(\forall x)(x \in U \Rightarrow S_x \in K \text{ 与 } p(S_x) = x)$;

第二, $U \notin K$.

在按 F 排序的 U 上, 如果 $y < x$, 则 $y \in S_x$, 令 $c = \sup_E S_x$, 则在 E 上 $y \leq c$, 又因为 $c \leq p(S_x)$, 故 $c \leq x$, 因此在 E 上 $y \leq x$, 由于 $x \neq y$, 因此 $y < x$, 故良序 F 是在 E 上的偏序在 U 上的导出的偏序.

由于 $U \notin K$, 故 $U \neq \emptyset$; 同时, 令 $x \in U$, 如果在 U 上, $S_x = \emptyset$, 则 $x = a$; 如果 $S_x \neq \emptyset$, 则 $a \in S_x$. 综上有, $a \in U$.

在 U 上, 对任意 $y \in U$:

如果 y 为 U 的最大元, 由于 $a \in S_y$, 故 $a \in U$, 而 $U \notin K$, 因此 $f(y) = y$, 故 $f(y) \in U$;

如果 y 不是 U 的最大元, 令 z 为 $\{x | x > y \text{ 与 } x \in U\}$ 的最小元, 则 $y = \sup_E(S_z)$, 故 $p(S_z) = f(y)$, 因此 $z = f(y)$, 即 $f(y) \in U$.

综上, U 满足第一个条件.

对任意 U 的子集 V , 设 V 在 E 上有最小上界 m :

如果 $\{y|y \geq m \text{ 与 } y \in U\} = \emptyset$, 则 $m = \sup U$, 故 $m \in U$;

如果 $\{y|y \geq m \text{ 与 } y \in U\} \neq \emptyset$, 设其最小元为 z , 如果 $z \in V$, 则 $z = m$, 且 $z \in U$; 如果 $z \notin V$, 则 $V \subset S_z$, 令 t 为 S_z 在 E 上的最小上界, 则 $m \leq t$, $t \leq z$, 如果 $t \in S_z$, 则 $t \in \{y|y \geq m \text{ 与 } y \in U\}$, 则 $z = t$, 与 $t \in S_z$ 矛盾, 故 $t \notin S_z$, $p(S_z) = t$, 因此 $z = t$, 如果存在 $q \in S_z$, 使 $m < q$, 由于 $q < z$, 与 z 为 $\{y|y \geq m \text{ 与 } y \in U\}$ 的最小元矛盾, 因此 m 为 S_z 在 E 上的上界, 故 $t \leq m$, 因此 $t = m$, 所以 $m = z$, 故 U 满足第二个条件.

综上, $U \in H$, 故 $C_a \subset U$, 因此 C_a 为良序集.

(3) 根据定义可证.

补充定理 233. 布尔巴基-维特定理

E 为归纳集, f 为 E 到 E 的映射, 并且对任意 $x \in E$, $f(x) \geq x$, 则存在 $b \in E$, 使 $f(b) = b$.

证明: 根据补充定理232可证.

补充定理 234. 字典式排序为偏序关系

令 $(E_i)_{i \in I}$ 为良序集族, I 为良序集, $E = \prod_{i \in I} E_i$, 对于 $x \in E$ 、 $y \in E$, 且 $x \neq y$, 令 j 为集合 $\{i|i \in I \text{ 与 } pr_i x \neq pr_i y\}$ 的最小元, 则公式 $(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } (x \neq y \Rightarrow pr_j x < pr_j y))$ 为在 E 上的偏序关系.

证明:

令 R 为 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $pr_j x < pr_j y$, 则 $(y|x)R \Leftrightarrow x \in E$, $R \Rightarrow (y|x)R$ 与 $(x|y)R$, R 与 $(y|z)(x|y)(z|x)R \Rightarrow x = y$. 对于 R 与 $(y|x)(z|y)R$, 如果 $x = y$ 或 $y = z$, 显然 $(z|y)R$ 为真, 如果 $x \neq y$ 、 $y \neq z$, 设满足 $pr_i x \neq pr_i y$ 的最小 i 为 j , 满足 $pr_i y \neq pr_i z$ 的最小 i 为 k , 若 $j < k$, 则 $pr_j x \neq pr_j z$, 且 $pr_j x < pr_j y$, $pr_i y = pr_i z$, 因此 $pr_j x < pr_j z$; 若 $j > k$, 同理可得 $pr_k x < pr_k z$; 若 $j = k$, 则 $pr_j x < pr_j y$, $pr_j y < pr_j z$, 因此 $pr_j x < pr_j z$. 综上, 得证.

定义 133. 字典式偏序关系 (*relation d'ordre lexicographique*), 字典式偏序 (*ordre lexicographique*), 字典式乘积 (*produit lexicographique*)

令 $(E_i)_{i \in I}$ 为良序集族, I 为良序集, $E = \prod_{i \in I} E_i$, 对于 $x \in E$ 、 $y \in E$, 且 $x \neq y$, 令 j 为集合 $\{i|i \in I \text{ 与 } pr_i x \neq pr_i y\}$ 的最小元, 则公式 $(x \in E \text{ 与 } y \in E \text{ 与 } (x \neq y \Rightarrow pr_j x < pr_j y))$ 称为在 E 上的字典式偏序关系, 令该公式生成的图为 G , 则 (G, E, E) 称为在 E 上的字典式偏序; 按该偏序排序的偏序集 E , 称为偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积.

补充定理 235.

I 为良序集, 如果对任意 $i \in I$, E_i 为全序集, 则 $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积是全序集.

证明：根据定义可证。

补充定理 236. 偏序的同构为等价关系

令 R 为公式 (F 为在 E 上的偏序) 与 (F' 为在 E' 上的偏序) 与 (按 F 排序的 E 同构于在 F' 上排序的 E')，则 R 为关于 F 、 F' 的等价关系。

证明：根据定义可证。

定义 134. 偏序类 (*type d'ordre*)

令 R 为公式 (F 为在 E 上的偏序) 与 (F' 为在 E' 上的偏序) 与 (按 F 排序的 E 同构于在 F' 上排序的 E')，则称 $\tau_{F'}(R)$ 为 F 的偏序类，记作 $Ord(F)$ ，在没有歧义的情况下也可以记作 $Ord(E)$ 。

补充定理 237.

当且仅当两个偏序的偏序类相等时，这两个偏序集同构。

证明：根据定义可证。

补充定理 238. 偏序类之间的预序关系

令 S 为公式 (X 为偏序类) 与 (Y 为偏序类) 与 $(\exists A)(\exists B)$ ((A 为按偏序类为 X 的偏序排序的偏序集) 与 (B 为按偏序类为 Y 的偏序排序的偏序集) 与 $(\exists Z)$ ($Z \subset Y$ 与 X 同构于 Z))。则 S 为关于 X 、 Y 的预序关系。

证明：根据定义可证。

记号定义 20. 偏序类之间的不等式 (*inégalité entre types d'ordre*)

X 、 Y 为偏序类，则预序关系 (X 为偏序类) 与 (Y 为偏序类) 与 $(\exists A)(\exists B)$ ((A 为按偏序类为 X 的偏序排序的偏序集) 与 (B 为按偏序类为 Y 的偏序排序的偏序集) 与 $(\exists Z)$ ($Z \subset Y$ 与 X 同构于 Z)) 记作 $X \prec Y$ 或 $Y \succ X$ 。

定义 135. 偏序类族的序数和 (*somme ordinale de la famille des types d'ordre*)

令 I 为偏序集， $(l_i)_{i \in I}$ 为偏序类族，对任意 $i \in I$ ，令 $E_i = l_i$ 的定义域。令 E 为偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和，则称 $Ord(E)$ 为偏序类族 $(l_i)_{i \in I}$ 的序数和，记作 $\sum_{i \in I} l_i$ 。

定义 136. 两个偏序类的序数和 (*somme ordinale de deux types d'ordre*)

令 $a \neq b$ ， $I = \{a, b\}$ ，按 $\{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ 排序， l 、 m 为偏序类， $E_a = l$ 的定义域， $E_b = m$ 的定义域。令 E 为偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数和，则称 $Ord(E)$ 为偏序类 l 和 m 的序数和，记作 $l + m$ 。

补充定理 239.

I 为偏序集， $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族， F 为其序数和，则 $\sum_{i \in I} Ord(E_i) = Ord(F)$ 。

证明：根据补充定理168可证。

补充定理 240. 序数和的结合律

$(J_k)_{k \in K}$ 为偏序集族，其和为 I ， $(l_i)_{i \in I}$ 为偏序类族，则 $\sum_{k \in K} (\sum_{i \in J_k \times \{k\}} l_i) = \sum_{i \in I} l_i$.

证明：根据补充定理169可证。

定义 137. 偏序类族的序数乘积 (*produit ordinaire de la famille des types d'ordre*)

令 I 为良序集， $(l_i)_{i \in I}$ 为偏序类族，对任意 $i \in I$ ，令 $E_i = l_i$ 的定义域。令 E 为偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积，则称 $Ord(E)$ 为偏序类族 $(l_i)_{i \in I}$ 的序数乘积，记作 $\prod_{i \in I} l_i$ 。

定义 138. 两个偏序类的序数乘积 (*produit ordinaire de deux types d'ordre*)

令 $a \neq b$ ， $I = \{a, b\}$ ，按 $\{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ 排序， l 、 m 为偏序类， $E_a = l$ 的定义域， $E_b = m$ 的定义域。令 E 为偏序集族 $(E_i)_{i \in I}$ 的序数乘积，则称 $Ord(E)$ 为偏序类 l 和 m 的序数乘积，记作 ml 。

补充定理 241.

令 I 为良序集， $(E_i)_{i \in I}$ 、 $(F_i)_{i \in I}$ 为偏序集族，且对任意 $i \in I$ ， E_i 同构于 F_i ，则 $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积同构于 $(F_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积。

证明：令 f_i 为 E_i 到 F_i 的同构，则 $x \rightarrow \bigcap_{i \in I} \{(i, f_i(pr_i x))\}$ 是 $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积到 $(F_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积的同构。

补充定理 242.

I 为良序集， $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族， F 为其字典式乘积，则 $\prod_{i \in I} Ord(E_i) = Ord(F)$ 。

证明：根据补充定理241可证。

补充定理 243. 序数乘积的结合律

$(J_k)_{k \in K}$ 为良序集族，其序数和为良序集 I ， $(l_i)_{i \in I}$ 为偏序类族，则 $\prod_{k \in K} (\prod_{i \in J_k \times \{k\}} l_i) = \prod_{i \in I} l_i$ 。

证明：根据定理64可证。

补充定理 244.

I 为良序集， $(m)_{i \in I}$ 为偏序类族， $Ord(I) = l$ ，则 $\sum_{i \in I} m = ml$ 。

证明：令 $a \neq b$ ， $J = a, b$ ， $E_a = I$ ， $E_b = m$ 的定义域，偏序集族 $(E_i)_{i \in J}$ 的序数乘积为 E 。 $(E_b)_{i \in I}$ 的序数为 F ，则 $x \rightarrow \{(a, pr_2 x), (b, pr_1 x)\}$ 是 E 到 F 的同构，得证。

补充定理 245. 两个序数的和与乘积的结合律、分配律

l 、 m 、 n 为偏序类，则：

- (1) $(l + m) + n = l + (m + n)$;
- (2) $(lm)n = l(mn)$;
- (3) $l(m + n) = lm + ln$ 。

证明：根据定义可证。

补充定理 246.

- (1) 令 I 为偏序集, $(l_i)_{i \in I}$ 、 $(m_i)_{i \in I}$ 为两个偏序类族, 对任意 $i \in I$, $l_i \prec m_i$, 则 $\sum_{i \in I} l_i \prec \sum_{i \in I} m_i$, 并且, 如果 I 是良序集, 则 $\prod_{i \in I} l_i \prec \prod_{i \in I} m_i$.
- (2) 令 I 为偏序集, $(l_i)_{i \in I}$ 为偏序类族, $J \subset I$, 则 $\sum_{i \in J} l_i \prec \sum_{i \in I} l_i$, 并且, 如果 I 是良序集, 并且对任意 $i \in I$, $l_i \neq \emptyset$, 则 $\prod_{i \in J} l_i \prec \prod_{i \in I} l_i$.

证明:

- (1) 根据补充定理97 (1)、定理45可证.
- (2) 根据补充定理246 (1) 可证.

定义 139. 序数 (ordinal)

良序集的偏序类, 称为序数.

补充定理 247.

- (1) I 为良序集, $(l_i)_{i \in I}$ 为序数族, 则 $\sum_{i \in I} l_i$ 为序数.
- (2) m 、 l 为序数, 则 $m + l$ 、 ml 为序数.

证明:

- (1) 令 E_i 为 l_i 的定义域, $(E_i)_{i \in I}$ 的和为 S , 对 S 的任意子集 F , 令 $pr_2 f$ 的最小元为 i , $S \cap (\sim E_i \times \{i\})$ 的最小元为 a , 则 (a, i) 为 S 的最小元, 得证.
- (2) $m + l$ 部分根据补充定理247 (1) 可证; ml 部分根据定义可证.

定义 140. 序数 0 (ordinal zéro), 序数 1 (ordinal un), 序数 2 (ordinal deux), 序数 3 (ordinal trois)

$Ord(\emptyset)$ 称为序数 0; $Ord(\{\emptyset\})$ 称为序数 1. 在没有歧义的情况下也可以分别简称为 0、1.

1 和 1 的序数和, 称为序数 2, 在没有歧义的情况下也可以简称为 2.

2 和 1 的序数和, 称为序数 3, 在没有歧义的情况下也可以简称为 3.

补充定理 248.

- (1) $0 = \emptyset$;
- (2) $Ord(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$;
- (3) $Ord(A) = 1 \Leftrightarrow (\exists x)(A = \{x\})$.
- (4) 序数族 $(l_i)_{i \in \emptyset}$ 的序数和为 0, 序数乘积为 1.
- (5) 序数族 $(\emptyset)_{i \in I}$ 的序数和为 0.
- (6) 序数族 $(l_i)_{i \in I}$ 中, 如果存在 $i \in I$, 使 $l_i = 0$, 则其序数乘积为 0.

证明:

- (1) 根据定义可证.
- (2) 根据定义可证.
- (3) 根据定义可证.
- (4) 根据补充定理116 (4)、补充定理127 (1) 可证.
- (5) 根据补充定理116 (5) 可证.
- (6) 根据补充定理127 (2) 可证.

补充定理 249.

a 为序数, 则:

- (1) $a + 0 = a$; $0 + a = a$; $a1 = a$; $1a = a$.
- (2) $a_0 = 0$; $0a = 0$.
- (3) $a + a = a2$.

证明:

- (1) 根据定义可证.
- (2) 根据补充定理248 (4)、补充定理248 (5) 可证.
- (3) 根据定义可证.

补充定理 250.

对任意两个序数 l 、 m , 均有 $l \prec m$ 或 $m \prec l$.

证明: 根据定理84可证.

补充定理 251.

公式(l 为序数)与(m 为序数)与($l \prec m$), 为良序.

证明:

对任意元素均为序数的非空集合 X , 令 $x \in X$, x 的定义域为 E , $Y = \{y | y \prec x \text{ 与 } y \neq x\}$, 如果 $Y = \emptyset$, 则 x 为 X 的最小元; 如果 $Y \neq \emptyset$, 根据定理87、定理72, 对任意 $y \in Y$ 且 $y \neq x$, 存在 $a \in E$ 使 $y = \text{Ord}([\leftarrow, a])$, 令 $f(y) = \tau_a(y = \text{Ord}([\leftarrow, a]))$, 则 $\{z | z = f(y) \text{ 与 } y \in Y \text{ 与 } y \neq x\}$ 有最小元, 令其最小元为 b , 设 $f(u) = b$, 因此 u 是 Y 的最小元, 进而, u 也是 X 的最小元, 得证.

记号定义 21. 序数之间的不等式 (*inégalité entre ordinaux*)

l 、 m 为序数, 如果 $l \prec m$, 则记作 $l \leq m$.

补充定理 252.

a 为序数:

- (1) 公式 x 为序数与 $x < a$ 是 x 上的集合化公式.
- (2) 公式 x 为序数与 $x \leq a$ 是 x 上的集合化公式.

证明:

(1) 令 $E = pr_1 a$. 则 $x < a \Leftrightarrow (\exists y)(y \in E \text{ 与 } x = Ord(Sy))$. 令 $F_y = \{S_y\}$, $A = \bigcup_{y \in E} F_y$, 则 $x < a \Rightarrow x \in A$, 得证.

(2) 根据补充定理252 (1) 可证.

补充定理 253.

(1) 令 $O_a = \{x | x \text{ 为序数与 } x < a\}$, 则 O_a 为良序集且 $Ord(O_a) = a$.

(2) $\{x | x \text{ 为序数与 } x \leq a\}$ 为良序集, 且 $Ord(\{x | x \text{ 为序数与 } x \leq a\}) = a + 1$.

证明:

(1) 令 $E = a$ 的定义域. 根据定理87, $x < a \Leftrightarrow (\exists y)(y \in E \text{ 与 } x = Ord(S_y))$, 根据补充定理225、定理73 (1), O_a 同构于 E , 根据补充定理224 (1) 得证.

(2) 根据补充定理253 (1) 可证.

补充证明规则 86.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, R 为公式, x 不是常数, 如果 $(x \text{ 为序数与 } (\forall y)(y \text{ 为序数与 } y < x \Rightarrow (y|x)R)) \Rightarrow R$ 是 M 的定理, 则 $x \text{ 为序数} \Rightarrow R$ 是 M 的定理.

证明: 根据证明规则59、补充定理253 (2) 可证.

补充定理 254.

(1) 令 $(x_i)_{i \in I}$ 为序数族, 则存在唯一的序数 a , 使 $(l \text{ 为序数与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq l)) \Leftrightarrow (a \leq l)$.

(2) H 的元素都是序数, 则存在唯一的序数 a , 使 $(l \text{ 为序数与 } (\forall x)(x \in H \Rightarrow x \leq l)) \Leftrightarrow (a \leq l)$.

证明:

(1) 令 $x = \sum_{i \in I} x_i$, $A = \{l | l \leq a \text{ 与 } l \text{ 为序数与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq l)\}$, 根据补充定理246 (2), 对任意 $i \in I$, $x_i \leq x$, 故 $A \neq \emptyset$, 因此令 A 的最小元为 a , 存在性得证. 根据定义可证唯一性.

(2) 类似补充定理254 (1) 可证.

定义 141. 序数族的最小上界 (*borne supérieure de la famille d'ordinaux*), 序数集合的最小上界 (*borne supérieure du ensemble d'ordinaux*)

令 $(x_i)_{i \in I}$ 为序数族, 使 $(l \text{ 为序数与 } (\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq l)) \Leftrightarrow (a \leq l)$ 成立的 a , 称为 $(x_i)_{i \in I}$ 的最小上界, 记作 $\sup_{i \in I} (x_i)$. 令 H 的所有元素均为序数, 使 $(l \text{ 为序数与 } (\forall x)(x \in H \Rightarrow x \leq l)) \Leftrightarrow (a \leq l)$ 成立的 a , 称为 H 的最小上界, 记作 $\sup H$.

定义 142. 前导 (*prédécesseur*)

a 、 b 为序数, 如果 $a = b + 1$, 则称 b 为 a 的前导.

补充定理 255.

a 为序数, 则序数族 $(x)_{x < a}$ 的最小上界为 a 或 a 的前导.

证明:

设最小上界为 b , 假设 $b \neq a$ 且 $b + 1 \neq a$.

由于 $b < a$, 设 a 的定义域为 E , 根据定理87, 存在 $y \in E$, 使 $b = \text{Ord}(S_y)$.

由于 $b + 1 = \text{Ord}(S_y \cup \{y\})$, 故 $b + 1 \neq a$, 又因为 $b + 1 \neq a$, 因此 $b + 1 < a$. 但根据补充定理246 (2), $b < b + 1$, 矛盾.

补充定理 256.

a 为序数, 且 $a \neq 0$, 则 $a > 0$ 并且 $a \geq 1$.

证明: 根据定义可证.

补充定理 257.

a 、 b 、 x 为序数, 则:

(1) $a < b \Leftrightarrow a + 1 \leq b$.

(2) 如果 $a < b$, 则 $x + a < x + b$, $a + x \leq b + x$, $ax \leq bx$;

(3) 如果 $a < b$, $x > 0$, 则 $xa < xb$.

(4) $a < a + 1$.

(5) $a > 1 \Leftrightarrow a \geq 2$.

(6) $a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow a = b$.

(7) $a + 1 < b + 1 \Leftrightarrow a < b$.

证明:

(1) 令 b 的定义域为 E , 如果 $a < b$, 则 a 同构于 E 的片段 S_x , $a + 1$ 同构于 E 的片段 $S_x \cup \{x\}$.

反过来, 如果 $a + 1 \leq b$, 根据补充定理246 (1)、补充定理249 (1), $a < a + 1$, 因此 $a < b$.

(2) 根据补充定理257 (1)、补充定理246 (1)、补充定理245 (1) 可证.

(3) 根据补充定理257 (1)、补充定理246 (1)、补充定理245 (3) 可证.

(4) 根据补充定理257 (1) 可证.

(5) 根据补充定理257 (1) 可证.

(6) 根据公理模式6, $a = b \Rightarrow a + 1 = b + 1$. 反过来, 如果 $a + 1 = b + 1$, 令 a 的定义域为 E , b 的定义域为 E' , 设 $x \notin E$, $y \notin E'$, 把 x 作为最大元加入 E , 把 y 作为最大元加入 E' ,

则 $a + 1 = \text{Ord}(E \cup \{x\})$, $b + 1 = \text{Ord}(E' \cup \{y\})$, 故 $E \cup \{x\}$ 同构于 $E' \cup \{y\}$. 因此 E 同构于 E' , 故 $a = b$.

(7) 根据补充定理257 (2)、补充定理257 (6) 可证.

补充定理 258. 前导的唯一性

一个序数的前导如果存在, 则是唯一的.

证明: 根据补充定理257 (6) 可证.

补充定理 259. 所有序数不能组成集合

非 $\text{Coll}_x(x \text{ 为序数})$.

证明: 设序数的集合的最小上界为 a , 但 $a < a + 1$, 矛盾.

补充定理 260.

a, b, c 为序数, 则:

- (1) $c + a < c + b \Rightarrow a < b$, $a + c < b + c \Rightarrow a < b$;
- (2) 如果 $c > 0$, 则 $ca < cb \Rightarrow a < b$, $ac < bc \Rightarrow a < b$;
- (3) $c + a = c + b \Rightarrow a = b$;
- (4) $ca = cb \Rightarrow a = b$.

证明:

- (1) 根据补充定理246 (1) 可证.
- (2) 根据补充定理246 (1) 可证.
- (3) 根据补充定理257 (2) 可证.
- (4) 根据补充定理257 (3) 可证.

补充定理 261. 序数的差的存在性和唯一性

a, b 为序数, $a \leq b$, 则存在唯一的序数 c , 使 $a + c = b$.

证明: 令 b 的定义域为 E , 则 a 同构于 E 的区间 S_x , 令 $c = \text{Ord}(E - S_x)$, 则 $a + c = b$; 根据补充定理260 (3), c 具有唯一性.

定义 143. 序数的差 (*différence ordinale*)

a, b 为序数, $a \leq b$, 如果序数 c 满足 $a + c = b$, 则称 c 为 a 和 b 的差, 记作 $(-a) + b$.

补充定理 262. 序数的商和余数的存在性和唯一性

a, b, c 为序数, $c < ab$, 则存在唯一的一组序数 d, e , 使 $c = ae + d$, 且 $d < a$, $e < b$.

证明:

由于 $c < ab$, 故 $a \neq 0$.

令 a 的定义域为 E , b 的定义域为 F , c 的定义域为 G , 则 G 同构于 ab 的区间 S_x , 令 x 的射影分别为 m 、 n , 其中 $m \in F$ 、 $n \in E$. 令 $Ord(\{t|t\text{为序数与}t < m\}) = e$, $Ord(\{t|t\text{为序数与}t < n\}) = d$, 则 $d < a$, $e < b$. 令 E 和序数集合 $\{t|t\text{为序数与}t < m\}$ 的字典式乘积为 X , 则 $Ord(X) = ae$. 令 $Y = \{t|t\text{为序数与}t < n\}$, 根据定义, $Ord(X) + Ord(Y) = Ord(S_x)$, 因此 $c = ae + d$. 存在性得证.

设 $c = ae + d$, $c = ae' + d'$. 设 $e < e'$, 则 $e + 1 \leq e'$, 因此 $ae + a \leq ae'$, 故 $ae + a + d' \leq ae + d$, 故 $a + d' \leq d$, 和 $d < a$ 矛盾. 唯一性得证.

定义 144. 序数的商 (*quotient ordinal*), 序数的余数 (*reste ordinal*)

a 、 b 、 c 为序数, $c < ab$, 如果序数 d 、 e , 使 $c = ae + d$, 且 $d < a$, $e < b$, 则称 e 为 c 除以 a 的商, d 为 c 除以 a 的余数.

定义 145. 可约的序数 (*ordinal décomposable*), 不可约的序数 (*ordinal indécomposable*)

序数 $r > 0$, 如果存在序数 $s < r$ 、 $t < r$ 使 $s + t = r$, 则称 r 可约, 否则, 称 r 不可约.

补充定理 263.

序数 $r > 0$, 当且仅当对任意序数 $s < r$ 均有 $s + r = r$ 时, r 不可约.

证明: 根据补充定理261可证.

补充定理 264.

序数 $r > 0$, 当且仅当对任意序数 $a < r$ 、 $b < r$, 均有 $a + b < r$ 时, r 不可约.

证明:

充分性: 根据补充定理263, $a + r = r$, 由于 $b < r$, 根据补充定理257 (2), $a + b < r$.

必要性: 根据定义可证.

补充定理 265.

a 、 r 为序数, $r > 1$, $a > 0$, 则当且仅当 r 不可约时, ar 不可约.

证明:

如果 r 可约, 令 $r = x + y$, 其中 $x < r$, $y < r$, 根据补充定理245 (3), $ar = ax + ay$, 根据补充定理257 (3), $ax < ar$, $ay < ar$, 故 ar 可约.

反过来, 如果 ar 可约, 令 $ar = p + q$, $p < ar$ 、 $q < ar$, 则存在 e 、 d 使 $p = ae + d$, 故 $ar = ae + d + q$, 因此 $e < r$. 如果 r 不可约, 根据补充定理263, $r = e + r$, 根据补充定理260 (3), $ar = d + q$, 由于 $d + r = r$, 故 $d + ar = ar$, 因此 $q = ar$, 矛盾.

补充定理 266.

a 、 r 为序数, $a > 0$, $r > 0$, r 不可约, 则存在不可约的序数 x , 使 $r = ax$.

证明：如果 $r = ar$ ，得证；如果 $r < ar$ ，则存在 $d、e$ 使 $r = ae + d$ ，且 $d < r$ ，故 $r = ae$ ，根据补充定理265， e 不可约，得证。

补充定理 267.

不可约的序数族的最小上界是不可约的序数。

证明：令 $c = \sup_{i \in I} (x_i)$ ，设 $a < c$ ， $b < c$ ，则存在 $i \in I$ ，使 $a < x_i$ 、 $b < x_i$ ，故 $a + b < x_i$ ，因此 $a + b < c$ ，得证。

补充定理 268.

序数 $a > 0$ ，则 $\{x | x \text{ 为序数与 } x \leq a \text{ 与 } x \text{ 不可约}\}$ 有最大元。

证明：根据补充定理267可证。

元数学定义 63. 序数函数符号 (*symbole fonctionnel ordinal*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 T 为项：

令 a_0 为序数，如果 $(x \text{ 为序数与 } x \geq a_0) \Rightarrow T \text{ 为序数}$ ，则称 T 为关于 x 定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号，或简称为定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号。

令 $a_0、b_0$ 为序数，如果 $(x \text{ 为序数与 } x \geq a_0 \text{ 与 } y \text{ 为序数与 } y \geq b_0) \Rightarrow T \text{ 为序数}$ ，则称 T 为关于 $x、y$ 定义在 $x \geq a_0、y \geq b_0$ 上的序数函数符号，或简称为定义在 $x \geq a_0、y \geq b_0$ 上的序数函数符号。

注：由于所有序数不能组成集合，故“序数函数符号”只是类似函数的一种表达式，并非真正的函数。

使用“序数函数符号”的主要意义是用于定义序数幂。

元数学定义 64. 标准序数函数符号 (*symbole fonctionnel ordinal*)

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中，令 T 为项：

令 a_0 为序数， T 为关于 x 定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号，如果对任意序数 $x、y$ ， $x < y$ 与 $x \geq a_0 \Rightarrow T < (y|x)T$ ，并且，对任意序数族 $(x_i)_{i \in I}$ 且 $i \neq \emptyset$ ，如果对任意 $i \in I$ ，均有 $x_i \geq a_0$ ，则 $(\sup_{i \in I} (x_i) | x)T = \sup_{i \in I} ((x_i | x)T)$ ，则称 T 为关于 x 的标准序数函数符号，在没有歧义的情况下也可以简称 T 为标准序数函数符号。

补充定理 269.

序数 $a > 0$ ，则 $a + x、ax$ 均为定义在 $x \geq 0$ 上的序数函数符号。

证明：根据补充定理257 (2)、补充定理257 (3) 可证。

补充定理 270.

$w(x)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号, 对任意序数 $x \geq a_0$, $w(x) \geq x$, 并且, (x为序数)与(y为序数)与 $x < y$ 与 $x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令 $g(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 、 $y \geq a_0$ 上的序数函数符号, 并满足((x为序数)与(y为序数)与 $x \geq a_0$ 与 $y \geq a_0 \Rightarrow g(x, y) > x$).

$f(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 、 $y \geq 1$ 上的序数函数符号, 其按下列方式定义:

第一, 对任意序数 $x \geq a_0$, $f(x, 1) = w(x)$;

第二, 对任意序数 $x \geq a_0$, $y > 1$, $f(x, y) = \sup_{z \in]0, y[} g(f(x, z), x)$.

那么,

(1) 如果序数函数符号 $f_1(x, y)$ 也满足上述条件, 则对任意序数 $x \geq a_0$, $y \geq 1$, $f_1(x, y) = f(x, y)$.

(2) 对任意序数 $x \geq a_0$, $f(x, y)$ 是关于 y 定义在 $y \geq 1$ 上的标准序数函数符号.

(3) 对任意序数 $x \geq a_0$, $y \geq 1$, 均有 $f(x, y) \geq x$, 对任意序数 $x \geq \sup(a_0, 1)$, $y \geq 1$, 均有 $f(x, y) \geq y$.

(4) 如果序数 a 、 b 满足 $a > 0$, $a \geq a_0$, $b \geq w(a)$, 则存在唯一的序数 x , 使 $f(a, x) \leq b$, $b < f(a, x + 1)$, 并且 $x \leq b$.

(5) 令 $a_0 = 0$, $w(x) = x + 1$, $g(x, y) = x + 1$, 则 $f(x, y) = x + y$.

令 $a_0 = 1$, $w(x) = x$, $g(x, y) = x + y$, 则 $f(x, y) = xy$.

(6) 如果 $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $a_0 \leq y$ 与 $y \leq y' \Rightarrow g(x, y) \leq g(x', y')$, 则 $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $1 \leq y$ 与 $y \leq y' \Rightarrow f(x, y) \leq f(x', y')$.

如果 $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $a_0 \leq y$ 与 $y < y' \Rightarrow g(x, y) < g(x, y')$ 与 $g(x, y) \leq g(x', y)$, 则 $a_0 \leq x$ 与 $x < x'$ 与 $0 \leq y \Rightarrow f(x, y + 1) < f(x', y + 1)$.

(7) 如果 $w(x) = x$, 并且, $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $a_0 \leq y$ 与 $y < y' \Rightarrow g(x, y) < g(x, y')$ 与 $g(x, y) \leq g(x', y)$, 同时, 对任意序数 $x \geq a_0$, $g(x, y)$ 为关于 y 定义在 $y \geq a_0$ 上的标准序数函数符号, 此外, 对任意序数 $x \geq a_0$, $y \geq a_0$, $z \geq a_0$, 均有 $g(g(x, y), z) = g(x, g(y, z))$, 则对任意 $x \geq a_0$, $y \geq 1$, $z \geq 1$, $g(f(x, y), f(x, z)) = f(x, y + z)$, $f(f(x, y), z) = f(x, yz)$.

(8) 如果 $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $a_0 \leq y$ 与 $y \leq y' \Rightarrow g(x, y) \leq g(x', y')$, 则对任意序数 $x \geq a_0$, $y > 0$, 均有 $f(x, y + 1) \geq w(x) + y$.

证明:

(1) 根据证明规则60可证.

(2) 根据定义, 对任意 $a > b$ 、 $b \geq 1$, $f(x, a) > f(x, b)$, 同时, 对于集族 $(x_i)_{i \in I}$ 且 $i \neq \emptyset$, 设 $a = \sup_{i \in I} (x_i)$, 故 $f(x, a) = \sup_{z \in]0, a[} (g(f(x, z), x))$. 同时, $\sup_{i \in I} (f(x_i)) = \sup_{i \in I} (\sup_{z \in]0, x_i[} (g(f(x, z), x)))$, 对任意 $i \in I$, $\sup_{z \in]0, x_i[} (g(f(x, z), x)) \leq f(a)$, 故 $\sup_{i \in I} (f(x_i)) \leq f(x, a)$, 同时, 对任意 $z \in]0, a[$, 存在 $x_i \geq z$, 故 $g(f(x, z), x) \leq$

$\sup_{z \in]0, x_i[} (g(f(x, z), x))$, 故 $g(f(x, z), x) \leq \sup_{i \in I} (f(x_i))$, 因此 $f(x, a) \leq \sup_{i \in I} (f(x_i))$, 故 $f(x, a) = \sup_{i \in I} (f(x_i))$, 综上, 对任意 $x \geq a_0$, $f(x, y)$ 是关于 y 定义在 $y \geq 1$ 上的标准序数函数符号.

(3) 根据定义可证 $f(x, y) \geq x$, 同时, $f(x, y) = \sup_{z \in]0, y[} (g(f(x, z), x))$, $y = 1$ 时, 显然 $f(x, 1) \geq 1$, $y > 1$ 时, 设命题对 $]0, y[$ 成立, 则 $f(x, y) \geq \sup_{z \in]0, y[} z$, 根据补充定理255, $f(x, y) \geq y$ 或 $f(x, y) \geq b$, 其中 b 为 y 的前导, 如果 $f(x, y) \geq b$, 由于 $b \in]0, y[$, 因此 $g(f(x, b), x) > b$, 矛盾, 因此 $f(x, y) \geq y$, 根据补充证明规则86, 对任意 $x \geq \sup(a_0, 1)$, $y \geq 1$, $f(x, y) \geq y$.

(4) 令 $A = \{y | f(a, y) \leq b\}$, 则 $A \neq \emptyset$, 令 $z = \sup_{i \in A} f(a, i)$, 则 $z = f(a, \sup_{i \in A} i)$, 故 $\sup_{i \in A} i$ 满足条件, 存在性得证; 设 x, x' 都满足条件, 如果 $x < x'$, 则 $x+1 \leq x'$, $f(a, x+1) \leq f(a, x')$, 矛盾, 唯一性得证.

(5) 前一部分: $y = 1$ 显然成立, $y > 1$ 时, 设命题对 $]0, y[$ 成立, 则 $f(x, y) = \sup_{z \in]0, y[} (x + z + 1)$, 根据补充定理257 (1)、补充定理259 (1) 可证.

后一部分: $y = 1$ 显然成立, $y > 1$, 设命题对 $]0, y[$ 成立, 则 $f(x, y) = \sup_{z \in]0, y[} (xz + x)$, 根据补充定理262可证.

(6) 根据补充证明规则86可证.

(7) 前半部分: 根据定义可证 $g(f(x, y), f(x, 1)) = f(x, y + 1)$. 设命题对 $]1, z[$ 成立, 则 $g(f(x, y), f(x, z)) = g(f(x, y), \sup_{i \in]0, z[} g(f(x, i), x))$, 等于 $\sup_{i \in]0, z[} [g(f(x, y), g(f(x, i), x))]$, 等于 $\sup_{i \in]0, z[} [g(f(x, y + i), x)]$, 等于 $\sup_{j \in]0, y+z[} g(f(x, j), x)$, 等于 $f(x, y + z)$.

后半部分: $f(x, yz) = \sup_{j \in]0, yz[} f(x, j + 1)$, $f(f(x, y), z) = \sup_{j \in]0, z[} [f(x, y(i + 1))]$, 如果存在 $i + 1 = z$, 则 $f(x, yz) = f(f(x, y), z)$, 如果对任意 $i < z$ 均有 $i + 1 < z$, 对任意 $j < yz$, 根据补充定理262, 存在 h, k 使 $j = yh + k$, 且 $h < z$, $k < y$, 故 $j + 1 \leq y(h + 1)$, 因此 $\sup_{j \in]0, yz[} f(x, j + 1) \leq \sup_{j \in]0, yz[} f(x, y(i + 1))$, 反过来, 对任意 $i < z$, $y(i + 1) < yz$, 故 $\sup_{j \in]0, yz[} f(x, j + 1) \geq \sup_{j \in]0, yz[} f(x, y(i + 1))$, 得证.

(8) $y = 0$ 显然成立; 设命题对 $]0, y[$ 成立, $z \in]0, y[$ 时, $g(f(x, z + 1), x) \geq x + z + 1$, 则 $f(x, y + 1) \geq \sup_{z \in]0, y[} (w(x) + z + 1)$, 故 $f(x, y + 1) \geq w(x) + y$.

定义 146. 序数幂 (*exponentiation ordinale*)

按下列方式定义序数函数符号 $f(x, y)$:

第一, 对任意 $x \geq 2$, $f(x, 1) = x$;

第二, 对任意 $x \geq 2$, $y > 1$, $f(x, y) = \sup_{z \in]0, y[} f(x, z)x$;

第三, 对任意序数 a , $f(a, 0) = 1$;

第四, 对任意序数 $b \geq 1$, $f(0, b) = 0$, $f(1, b) = 1$. 则称 $f(a, b)$ 为 a 的 b 次序数幂, 记作 a^b .

补充定理 271.

$$a > 1 \Rightarrow a^b > 1.$$

证明: 根据补充证明规则86可证.

补充定理 272.

a 、 b 、 b' 为序数, 如果 $a > 1$, $b > b'$, 则 $a^{b'} < a^b$, 并且, a^b 为关于 b 的标准序数函数符号.

证明: 根据补充定理270 (2) 可证.

补充定理 273.

$$a, a', b \text{ 为序数, 如果 } a' > 0, a \geq a', \text{ 则 } a'^b \leq a^b.$$

证明: 根据补充证明规则86可证.

补充定理 274.

$$a, x, y \text{ 为序数, 则 } a^x a^y = a^{x+y}, (a^x)^y = a^{xy}.$$

证明: 根据补充定理270 (7) 可证.

补充定理 275.

$$a, b \text{ 为序数, } a \geq 2, b \geq 1, \text{ 则 } a^b \geq ab.$$

$$\text{证明: } a^b = \sup_{i \in]0, b[} a^i a, ab = \sup_{i \in]0, b[} (ai + a), \text{ 根据补充证明规则86可证.}$$

补充定理 276.

a, b 为序数, $a \geq 2, b \geq 1$, 则存在唯一的序数 c, d, e , 使 $b = a^c d + e$, 且 $d > 0, d < a, e < a^c$.

证明: 根据补充定理270 (4)、补充定理262可证.

定义 147. 传递集合 (ensemble transitif)

如果 $(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \subset X)$, 则称 X 为传递集合.

补充定理 277.

(1) $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ 为传递集合.

(2) 如果 Y 为传递集合, 则 $Y \cup \{Y\}$ 为传递集合.

(3) 如果 $(Y_i)_{i \in I}$ 为传递集族, 则 $\bigcup_{i \in I} Y_i$ 为传递集合, 如果 $i \neq \emptyset$, 则 $\bigcap_{i \in I} Y_i$ 为传递集合.

证明：根据定义可证。

定义 148. 伪序数 (*pseudo-ordinal*)

如果 $(\forall Y)(Y \subset X \text{ 与 } (Y \text{ 为传递集合}) \Rightarrow Y \neq X \Rightarrow Y \in X)$ ，则称 X 为伪序数。

定义 149. 正式集合 (*ensemble decent*)

如果 $(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \notin x)$ ，则称 X 为正式集合。

补充定理 278.

伪序数是传递集合也是正式集合。

证明：令 A 为伪序数， $B = \{Y | Y \subset A \text{ 与 } (Y \text{ 为传递集合}) \text{ 与 } (Y \text{ 为正式集合})\}$ ， $C = \bigcup_{Y \in B} Y$ ，因此 $C \subset A$ 。根据补充定理277 (3)， C 为传递集合。同时，对任意 $x \in C$ ，故存在 $Y \in B$ 使 $x \in Y$ ，故 $x \notin x$ ，因此 C 为正式集合。

如果 $C \in C$ ，则存在 $Y \in B$ 使 $C \in Y$ ，故 $C \notin C$ ，矛盾；因此， $C \notin C$ 。

如果 $C \neq A$ ，则 $C \in A - C$ ，根据补充定理277 (2)， $C \cup \{C\}$ 为传递集合，

同时，对任意 $x \in C \cup \{C\}$ ，如果 $x = C$ ，则 $x \notin x$ ，如果 $x \neq C$ ，则 $x \in C$ ，故 $x \notin x$ ，因此， $C \cup \{C\}$ 为正式集合，故 $C \cup \{C\} \subset C$ ，矛盾。

因此 $C = A$ ，得证。

补充定理 279.

如果 X 是伪序数，则 $X \cup \{X\}$ 也是伪序数。

证明：根据定义可证。

补充定理 280.

X 、 Y 均为伪序数，则 $X \subset Y$ 或 $Y \subset X$ 。

证明：根据补充定理279、补充定理277 (3)， $X \cap Y$ 为传递集合，且 $X \cap Y \notin X \cap Y$ ，因此， $X \cap Y = X$ 或 $X \cap Y = Y$ ，得证。

补充定理 281.

X 为传递集合，如果对任意 $x \in X$ ， x 均为伪序数，则 X 为伪序数。

证明：如果 $Y \subset X$ ， $Y \neq X$ ， Y 为传递集合，对任意 $x \in X - Y$ ， $y \in Y$ ，根据补充定理280， $x \subset y$ 或 $y \subset x$ 。如果 $x \subset y$ ，由于 $x \neq y$ ，故 $x \in y$ ，又因为 $y \subset Y$ ，故 $x \in Y$ ，矛盾；因此， $y \subset x$ ，由于 $x \neq y$ ，故 $y \in x$ ，因此 $Y \subset x$ 。如果 $Y = x$ ，则 $Y \in X$ ，如果 $Y \neq x$ ，则 $Y \in x$ ，由于 $x \subset X$ ，故 $y \in X$ ，得证。

补充定理 282.

\emptyset 为伪序数。

证明：根据定义可证。

补充定理 283.

伪序数的每一个元素都是伪序数。

证明：设 X 为伪序数， $A = \{Y | Y \subset X \text{ 与 } (Y \text{ 为传递集合}) \text{ 与 } (\forall x)(x \in Y \Rightarrow x \text{ 为伪序数})\}$ ， $B = \bigcup_{Y \subset A} Y$ ，则 B 为传递集合，故 B 为伪序数，因此 $B \notin B$ 。根据补充定理279， $B \cup \{B\}$ 也是伪序数，且 $B \cup \{B\} \neq B$ 。如果 $B \neq X$ ，则 $B \in X$ ，故 $B \cup \{B\} \subset X$ ，因此， $B \cup \{B\} \in A$ ，所以 $B \cup \{B\} \subset B$ ，矛盾。因此 $B = X$ ，得证。

补充定理 284.

(1) 令 $(X_i)_{i \in I}$ 是伪序数族，且 $i \neq \emptyset$ ，则 $\bigcap_{i \in I} X_i$ 是 $\{Y | (\exists i)(i \in I \text{ 与 } Y = X_i)\}$ 按包含关系排序的偏序集的最小元。

(2) E 为伪序数，则 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x \subset y$ 为良序。

证明：

(1) 令 $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ ，根据补充定理281、补充定理277 (3)， X 为伪序数，故 $X \notin X$ 。根据补充定理279， $X \cup \{X\}$ 为伪序数，如果对任意 $i \in I$ ，均有 $X_i \neq X$ ，则 $X \cup \{X\} \subset X$ ，矛盾。因此，存在 $i \in I$ 使 $X_i = X$ ，其即为最小元。

(2) 根据补充定理284 (1) 可证。

补充定理 285.

对任意序数 a ，存在唯一的伪序数 E_a ，使 $\text{Ord}(E_a) = a$ 。

证明：由于 $\text{Ord}(\emptyset) = 0$ ，故命题对 $[0, 1]$ 成立，设命题对 $[0, a]$ 成立，令 $X = \bigcup_{i \in [0, a]} \{E_i\}$ ，并且是按包含关系排序的偏序集。根据补充定理281、补充定理277 (3)， E_a 为伪序数，根据补充定理253 (1)， $\text{Ord}(E_a) = a$ ，同时，根据补充定理280，这样的伪序数是唯一的。根据补充证明规则86得证。

注：本补充定理表明，序数和伪序数一一对应。

习题 101.

$K = \{F | F \text{ 为在 } E \text{ 上的偏序}\}$ ，并且是按 $(F \in K \text{ 与 } F' \in K \text{ 与 } F \text{ 是比 } F' \text{ 更细的偏序})$ 排序的偏序集，求证： K 的极小元是在 E 上的全序；对在 E 上的任意偏序 F ， F 的图是所有不等于 E 且比 F 更细的全序的图的交集；进而，任何偏序集同构于全序集族的乘积的一个子集。

证明：即补充定理227、补充定理228、补充定理229。

习题 102.

E 为集合， $P = \{F | F \subset E \text{ 与 } (F \text{ 是按 } E \text{ 的偏序在 } F \text{ 上导出的偏序排序的良序集})\}$ ，求证：

(1) “ $(X \text{ 是 } Y \text{ 的片段})$ ”是关于 X, Y 在 P 上的偏序关系；

(2) P 是归纳集;

(3) 存在 E 的良序子集, 在 E 上没有严格上界.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 根据定义可证.

(3) 根据定理80, P 有极大元 F . 假设 F 有严格上界 x , 则 $F \cup \{x\} \in P$, 且 $F < F \cup \{x\}$, 矛盾, 因此 F 没有严格上界.

习题 103.

E 为偏序集, 求证: 存在 A, B , 使 $A \cup B = E$, $A \cap B = \emptyset$, 且 A 为良序集, B 没有最小元. 并举出这样的例子.

证明:

令 B 为 E 的所有没有最小元的子集的并集, 如果 B 有最小元 x , 设 $x \in X$, X 为没有最小元的 E 的子集, 则 x 为 X 的最小元, 矛盾. 令 $A = E - B$, 如果 A 的子集 Y 没有最小元, 则 $Y \subset B$, 矛盾.

例: E 为整数集, A 为 E 的任意有限子集, $B = E - A$.

注: 习题103例子部分涉及未介绍的“整数”知识.

习题 104.

对任意偏序集 E , 存在 $F \subset E$, F 为部分良序集, 并且是 E 的共尾子集.

证明: 即补充定理231 (1).

习题 105.

E 为偏序集, $F = \{X | X \text{ 为 } E \text{ 的自由子集}\}$, 并且为按 $X \in F$ 与 $Y \in F$ 与 $(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \text{ 与 } x \leq y))$ 排序的偏序集, 求证: 如果 E 为归纳集, 则 F 有极大元.

证明: 根据定理80, E 有极大元, 令 $X = \{x | x \text{ 为 } E \text{ 的极大元}\}$, 则 $X \in F$. 如果存在 E 的自由子集 Y 使 $X \leq Y$, 则 $X \subset Y$, 若 $Y - X \neq \emptyset$, 则令 $u \in Y - X$, 根据定理81, 存在 E 的极大元 v , 使 $u \leq v$, 又因为 $v \in X$, 故 $v \in Y$, 矛盾. 故 X 是 F 的极大元.

习题 106.

E 为偏序集, f 为 E 到 E 的映射, 并且对任意 $x \in E$, $f(x) \geq x$:

(1) C_a 为 a 关于函数 f 的链, 求证:

对任意 $a \in E$, $C_a \in H$;

E 的偏序子集 C_a , 为良序集;

如果 C_a 在 E 上有最小上界 b , 则 $b \in C_a$ 并且 $f(b) = b$.

(2) 如果 E 为归纳集, 求证: 存在 $b \in E$, 使 $f(b) = b$.

证明:

(1) 即补充定理232.

(2) 即补充定理233.

习题 107.

E 为良序集, F 为在 E 上的闭包的集合. F 按关于 u, v 的偏序关系“ $u \in F$ 与 $v \in F$ 与 $(\forall x)(x \in E \Rightarrow u(x) \leq v(x))$ ”排序. 对任 $u \in F$, 令 $I(u)$ 为 u 的不动点集合:

(1) 求证: 当且仅当 $I(v) \subset I(u)$ 时, $u \leq v$.

(2) 求证: 如果 E 的任何两个元素在 E 上有最大下界, 则 F 的任何两个元素在 F 上有最大下界; 如果 E 是完备格, 则 F 是完备格.

(3) 求证: 如果 E 为归纳集, 则 F 的任何两个元素在 F 上有最小上界.

证明:

(1) 当 $u \leq v$ 时, 根据定义可证 $I(v) \subset I(u)$; 反过来, 当 $I(v) \subset I(u)$ 时, 对任意 $x \in E$, $u(v(x)) = v(x)$, 由于 $u(v(x)) \geq u(x)$, 得证.

(2) 对任意 $u \in F, v \in F$, 令 t 为映射 $x \rightarrow \inf(u(x), v(x))$, 根据定义, $t \in F$, 且 t 为 u, v 的最大下界. 同理可证映射 $x \rightarrow \sup(u(x), v(x))$ 为 u, v 的最小上界, 因此, 如果 E 是完备格, 则 F 是完备格.

(3) 对于 $u \in F, v \in F$, 令 $f = u \circ v$, 根据定义, $I(f) = I(u) \bigcap_I I(v)$. 对任意 $x \in E$, 令 $w(x)$ 为 x 的链 C_x 的最大元. 则对任意 $x \in E, y \in E, x \leq y, x \leq w(y)$, 同时, 根据习题106 (1), C_x 为良序集. 令 $X = \{a | a \in C_x \text{ 与 } a \leq w(y)\}$, 则 X 非空, 令 $Y = C_x - X$, 如果 Y 非空, 则 Y 有最小元 b , 因此对任意 $c \in X, c \leq w(y)$, 故 $f(c) \leq w(y)$, 因此 $f(c) \in X$, 故 $f(c) < b$. 所以 $w(y), b$ 都是 X 的上界. 根据定义, 存在 X 的子集 Z , Z 在 X 上有最小上界, 且该最小上界是 Y 的元素, 故 $\sup Z = b$. 又因为 $w(y)$ 也是 X 的上界, 故也是 Z 的上界, 因此 $b \leq w(y)$, 矛盾. 故 Y 为空, 即 $w(x) \leq w(y)$. w 满足闭包的其他条件, 故 w 是闭包, 并且, $I(w) = I(u) \cap I(v)$; 根据习题107 (1), w 为最小上界.

习题 108.

E 为偏序集, $a \in E$, R_a 为 E 的以 a 为最小元的右方分支子集的集合, 并按包含关系排序:

(1) 求证: R_a 有极大元.

(2) E 为右方分叉集, 求证: R_a 的极大元均为完全右方分支集.

(3) 给出一个是右方分叉集但不是右方分支集的例子. 并且, 设 E 为习题100 (2) 所称的集合, F 为不包含可数共尾子集的全序集, $E \times F$ 为完全右方分支集.

(4) E 为集合, 对任意 $x \in E$, 区间 $] \leftarrow, x]$ 均为全序集, 是否一定存在 E 的共尾右方无向子集.

证明:

(1) 根据定理82可证.

(2) 如果 R_a 的极大元 U 有极大元 x , 根据补充定理213 (2), 存在 $y \in E, z \in E$ 使 $y > x, z > x$, 且 y 和 z 是不可比较的. 因此 $U \cup \{y, z\}$ 也是右方分支集, 矛盾, 得证.

(3) 设 E 为习题100 (2) 所称的集合, $\{R\} \cup E$ 按包含关系的相反关系排序, 则其是右方分叉集, 但不是右方分支集. 同时, 根据定义可证 $E \times F$ 为完全右方分支集.

(4) 如果 E 为无最大元的全序集, 显然不存在.

注:

习题108 (3) 涉及尚未介绍的“实数”知识.

原书习题108 (4) 有误.

习题 109.

求证: 当且仅当指标集和各偏序集均为良序集时, 偏序集族的序数和为良序集.

证明: 即补充定理217 (3).

习题 110.

E, I 为偏序集, $\{a, b\}$ 为良序集, 其中 $a < b$; $F_a = I, F_b = E$. 求证: $(E)_{i \in I}$ 的偏序集族的序数和, 同构于集族 $(F_i)_{i \in \{a, b\}}$ 的字典式乘积.

证明: 根据定义可证.

习题 111.

I 为良序集, $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族, 并且对任意 $i \in I$, E_i 中均至少有一对可比较的不同元素. 则当且仅当 I 为有限集合, 并且对任意 $i \in I$, E_i 均为良序集时, $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积为良序集.

证明:

必要性: 如果 $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积为良序集, 根据定义, 对任意 $i \in I$, E_i 均为良序集. 同时, 如果 I 为无穷集合, 令 k 的自然数集 N 到 I 的子集的同构, $G(n) = \{(x, y) | x \in E_k(n) \text{ 与 } y \in E_k(n) \text{ 与 } x < y\}$, 则对任意 $n \in N$, $G(n) \neq \emptyset$. 进而, 令 $f(n) = pr_1(\tau_z(z \in G(n)))$, $g(n) = pr_2(\tau_z(z \in G(n)))$.

令 $F(n) = \{z | (\exists i)(i \in N - n \text{ 与 } z = (k(i), g(i)))\} \cup \{z | (\exists i)(i \in I - k\langle N \rangle \text{ 与 } z = (i, \tau_{\alpha_a}(a \in E_i)))\}$, $A = \{X | (\exists n)(n \in N \text{ 与 } X = F(n))\}$, 那么对任意 A 的元素 $F(n)$, 令自然数 $m > n$, 则 $F(n) > F(m)$, 故 A 没有最小元, 矛盾. 必要性得证.

充分性: 对 I 的元素数目用数学归纳法可证.

注: 习题111涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 112.

I 为全序集, $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族, $E = \prod_{i \in I} E_i$, R 为公式 $(\{i | i \in I \text{ 与 } pr_i x \neq pr_i y\} \text{ 是良序集})$ 与 $((\exists j)(j \text{ 是 } \{i | i \in I \text{ 与 } pr_i x \neq pr_i y\} \text{ 的最小元}) \text{ 与 } (pr_j x \leq pr_j y))$.

求证: R 为关于 x, y 在 E 上的偏序关系. 如果对任意 $i \in I$, E_i 均为全序集, 则 E 关于“ x 和 y 是可比较的”的连通分量是全序集. 如果对任意 $i \in I$, E_i 都有不少于两个元素, 则当且仅当 I 为良序集, 且对任意 $i \in I$, E_i 均为全序集时, E 为全序集, 并且此时, E 为 $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积.

证明:

根据定义可证 R 为关于 x, y 在 E 上的偏序关系.

设 x, y 是可比较的, y, z 是可比较的, 令 $A = \{i | i \in I \text{ 与 } pr_i x \neq pr_i y\}$, $B = \{i | i \in I \text{ 与 } pr_i y \neq pr_i z\}$, 则 $A \cup B$ 是良序集, $\{i | i \in I \text{ 与 } pr_i x \subset pr_i y\} A \cup B$, 也是良序集. 故 x, z 是可比较的. 使用数学归纳法可证 E 关于“ x 和 y 是可比较的”的连通分量是全序集.

充分性根据定义可证.

必要性: 若 E 为全序集, 令 $f(i) = \tau_x(x \in E_i)$, $g(i) = \tau_x(x \in E_i - \{f(i)\})$. 则对 I 的任意子集 J , 令 $x = \bigcup_{i \in I} \{(i, f(i))\}$, $y = (\bigcup_{i \in I-J} \{(i, f(i))\}) \cup (\bigcup_{i \in J} \{(i, g(i))\})$, 由于 x, y 是可比较的, 故 J 为良序集, 根据定义, I 为良序集.

同时, 对任意 $i \in I$, $x \in E_i$, $y \in E_i$, 令 $A = (\bigcup_{j \in I-i} \{(j, f(j))\}) \cup \{i, x\}$, $B = (\bigcup_{j \in I-i} \{(j, f(j))\}) \cup \{i, y\}$, 由于 A, B 是可比较的, 故 x, y 是可比较的.

综上, 必要性成立.

根据定义可证, 此时, E 为 $(E_i)_{i \in I}$ 的字典式乘积.

注: 习题112涉及尚未介绍的知识.

习题 113.

(1) 令 R 为公式(F 为在 E 上的偏序)与(F' 为在 E' 上的偏序)与(F 排序的 E 同构于在 F' 上排序的 E'), 求证: R 为关于 F, F' 的等价关系. 同时, 当且仅当两个偏序的偏序类相等时, 这两个偏序集同构.

(2) 令 S 为公式(X 为偏序类)与(Y 为偏序类)与 $(\exists A)(\exists B)$
 $((A$ 为按偏序类为 X 的偏序排序的偏序集)与(B 为按偏序类为 Y 的偏序排序的偏序集)与 $(\exists Z)$
 $(Z \subset Y$ 与 X 同构于 $Z))$. 求证: S 为关于 X, Y 的预序关系.

(3) I 为偏序集, $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族, F 为其序数和, 求证: $\sum_{i \in I} \text{Ord}(E_i) = \text{Ord}(F)$.

$(J_k)_{k \in K}$ 为偏序集族, 其和为 I , $(l_i)_{i \in I}$ 为偏序类族, 求证: $\sum_{k \in K} (\sum_{i \in J_k \times \{k\}} l_i) = \sum_{i \in I} l_i$.

(4) I 为良序集, $(E_i)_{i \in I}$ 为偏序集族, F 为其字典式乘积, 求证: $\prod_{i \in I} \text{Ord}(E_i) = \text{Ord}(F)$.

$(J_k)_{k \in K}$ 为良序集族, 其序数和为良序集 I , $(l_i)_{i \in I}$ 为偏序类族, 求证: $\prod_{k \in K} (\prod_{i \in J_k \times \{k\}} l_i) = \prod_{i \in I} l_i$.

(5) I 为良序集, $(m)_{i \in I}$ 为偏序类族, $\text{Ord}(I) = l$, 求证: $\sum_{i \in I} m = ml$.

l, m, n 为偏序类, 求证: $(l+m)+n = l+(m+n)$, $(lm)n = l(mn)$, $l(m+n) = lm+ln$.

(6) 令 I 为偏序集, $(l_i)_{i \in I}$ 、 $(m_i)_{i \in I}$ 为两个偏序类族, 对任意 $i \in I$, $l_i \prec m_i$, 求证:
 $\sum_{i \in I} l_i \prec \sum_{i \in I} m_i$, 并且, 如果 I 是良序集, 则 $\prod_{i \in I} l_i \prec \prod_{i \in I} m_i$.

令 I 为偏序集, $(l_i)_{i \in I}$ 为偏序类族, $J \subset I$, 求证: $\sum_{i \in J} l_i \prec \sum_{i \in I} l_i$, 并且, 如果 I 是良序集, 并且对任意 $i \in I$, $l_i \neq \emptyset$, 则 $\prod_{i \in J} l_i \prec \prod_{i \in I} l_i$.

(7) l 为偏序类, l^* 表示按 l 相反关系排序的 l 的定义域, 求证: $(l^*)^* = l$, $(\sum_{i \in I} l_i)^* = (\sum_{i \in I^*} l_i^*)$, 其中 I^* 表示按相反关系排序的 I .

证明:

(1) 即补充定理236、补充定理237.

(2) 即补充定理238.

(3) 即补充定理239、补充定理240.

(4) 即补充定理242、补充定理243.

(5) 即补充定理244、补充定理245.

(6) 即补充定理246.

(7) 根据定义可证.

习题 114.

(1) I 为良序集, $(l_i)_{i \in I}$ 为序数族, 求证: $\sum_{i \in I} l_i$ 为序数; 如果 I 为有限集合, 则 $\prod_{i \in I} l_i$ 为序数; a 为序数, 则 $a + 0 = a$; $0 + a = a$; $a1 = a$; $1a = a$.

(2) 公式 l 为序数与 m 为序数与 $l \prec m$, 为良序.

(3) a 为序数, 求证: 公式 x 为序数与 $x \leq a$ 是 x 上的集合化公式. 并且, 令 $O_a = \{x | x \text{ 为序数与 } x < a\}$, 则 O_a 为良序集且 $\text{Ord}(O_a) = a$.

(4) a 为序数, 求证: 序数族 $(x)_{x < a}$ 的最小上界为 a 或 a 的前导.

证明:

(1) 前半部分序数和即补充定理247 (1); 序数乘积对 I 的元素数目用数学归纳法可证. 后半部分即补充定理249 (1).

(2) 即补充定理251.

(3) 前半部分即补充定理252 (2), 后半部分即补充定理253 (1).

(4) 即补充定理255.

注: 习题114 (1) 涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 115.

(1) a 、 b 为序数:

求证: $a < b \Leftrightarrow a + 1 \leq b$;

x 为序数, $a < b$, 求证: $x + a < x + b$, $a + x \leq b + x$, $ax \leq bx$;

x 为序数, $a < b$, $x > 0$, 求证: $xa < xb$.

(2) 不存在一个集合, 使所有序数都是其元素.

(3) a, b, c 为序数:

求证: $c + a < c + b \Rightarrow a < b$, $a + c < b + c \Rightarrow a < b$.

如果 $c > 0$, 求证: $ca < cb \Rightarrow a < b$, $ac < bc \Rightarrow a < b$.

(4) a, b, c 为序数, 求证: $c + a < c + b \Rightarrow a < b$; 如果 $c > 0$, 则 $ca < cb \Rightarrow a < b$;

(5) a, b 为序数, $a \leq b$, 求证: 存在唯一的序数 c , 使 $a + c = b$;

(6) a, b, c 为序数, $c < ab$, 求证: 存在唯一的一组序数 d, e , 使 $c = ae + d$, 且 $d < a$, $e < b$.

证明:

(1) 即补充定理257 (1)、补充定理257 (2)、补充定理257 (3);

(2) 即补充定理259;

(3) 即补充定理260 (1)、补充定理260 (2);

(4) 即补充定理260 (3)、补充定理260 (4);

(5) 即补充定理261;

(6) 即补充定理262.

习题 116.

(1) $r > 0$, 求证: 当且仅当对任意序数 $s < r$ 均有 $s + r = r$ 时, r 为不可约的序数.

(2) a, r 为序数, $r > 1$, $a > 0$, 求证: 当且仅当 r 不可约时, ar 不可约.

(3) a, r 为序数, $a > 0$, $r > 0$, r 不可约, 求证: 存在不可约的序数 x , 使 $r = ax$.

(4) 序数 $a > 0$, 求证: $\{x | x \text{ 为序数与 } x \leq a \text{ 与 } x \text{ 不可约}\}$ 有最大元.

(5) 求证: 不可约的序数族的最小上界是不可约的序数.

证明:

(1) 即补充定理263.

(2) 即补充定理265.

(3) 即补充定理266.

(4) 即补充定理268.

(5) 即补充定理267.

习题 117.

(1) 序数 $a > 0$, 求证: $a + x$ 、 ax 均为定义在 $x \geq 0$ 上的序数函数符号.

(2) $w(x)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号, 对任意序数 $x \geq a_0$, $w(x) \geq x$, 并且, $(x \text{ 为序数})$ 与 $(y \text{ 为序数})$ 与 $x < y$ 与 $x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令 $g(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 、 $y \geq a_0$ 上的序数函数符号, 并满足 $((x \text{ 为序数}) \text{ 与 } (y \text{ 为序数}))$ 与 $x \geq a_0$ 与 $y \geq a_0 \Rightarrow g(x, y) > x$.

$f(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 、 $y \geq 1$ 上的序数函数符号, 其按下列方式定义:

第一, 对任意序数 $x \geq a_0$, $f(x, 1) = w(x)$;

第二, 对任意序数 $x \geq a_0$, $y > 1$, $f(x, y) = \sup_{z \in]0, y[} g(f(x, z), x)$.

求证:

如果序数函数符号 $f_1(x, y)$ 也满足上述条件, 则对任意序数 $x \geq a_0$, $y \geq 1$, $f_1(x, y) = f(x, y)$.

对任意序数 $x \geq a_0$, $f(x, y)$ 是关于 y 定义在 $y \geq 1$ 上的标准序数函数符号.

对任意序数 $x \geq a_0$, $y \geq 1$, 均有 $f(x, y) \geq x$, 对任意序数 $x \geq \sup(a_0, 1)$, $y \geq 1$, 均有 $f(x, y) \geq y$.

如果序数 a, b 满足 $a > 0$, $a \geq a_0$, $b \geq w(a)$, 则存在唯一的序数 x , 使 $f(a, x) \leq b$, $b < f(a, x+1)$, 并且 $x \leq b$.

(3) 令 $a_0 = 0$, $w(x) = x+1$, $g(x, y) = x+1$, 求证: $f(x, y) = x+y$.

令 $a_0 = 1$, $w(x) = x$, $g(x, y) = x+y$, 求证: $f(x, y) = xy$.

(4) 如果 $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $a_0 \leq y$ 与 $y \leq y' \Rightarrow g(x, y) \leq g(x', y')$, 求证: $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $1 \leq y$ 与 $y \leq y' \Rightarrow f(x, y) \leq f(x', y')$.

如果 $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $a_0 \leq y$ 与 $y < y' \Rightarrow g(x, y) < g(x, y')$ 与 $g(x, y) \leq g(x', y)$, 求证: $a_0 \leq x$ 与 $x < x'$ 与 $0 \leq y \Rightarrow f(x, y+1) < f(x', y+1)$.

(5) 如果 $w(x) = x$, 并且, $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $a_0 \leq y$ 与 $y < y' \Rightarrow g(x, y) < g(x, y')$ 与 $g(x, y) \leq g(x', y)$, 同时, 对任意序数 $x \geq a_0$, $g(x, y)$ 为关于 y 定义在 $y \geq a_0$ 上的标准序数函数符号, 此外, 对任意序数 $x \geq a_0$, $y \geq a_0$, $z \geq a_0$, 均有 $g(g(x, y), z) = g(x, g(y, z))$, 求证: 对任意 $x \geq a_0$, $y \geq 1$, $z \geq 1$, $g(f(x, y), f(x, z)) = f(x, y+z)$, $f(f(x, y), z) = f(x, yz)$.

证明:

(1) 即补充定理269.

(2) 即补充定理270 (1)、补充定理270 (2)、补充定理270 (3)、补充定理270 (4).

(3) 即补充定理270 (5).

(4) 即补充定理270 (6).

(5) 即补充定理270 (7).

习题 118.

(1) a, a', b, b' 为序数, 求证: 如果 $a > 1$, $b > b'$, 则 $a^{b'} < a^b$, 并且, a^b 为关于 b 的标准序数函数符号. 此外, 如果 $a' > 0$, $a \geq a'$, 则 $a'^b \leq a^b$.

(2) a, x, y 为序数, 求证: $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$.

(3) a, b 为序数, $a \geq 2$, $b \geq 1$, 求证: $a^b \geq ab$.

(4) a, b 为序数, $a \geq 2$, $b \geq 1$, 求证: 存在唯一的序数 c, d, e , 使 $b = a^c d + e$.

证明:

(1) 即补充定理272、补充定理273.

(2) 即补充定理274.

(3) 即补充定理275.

(4) 即补充定理276.

习题 119.

a, b 为序数, E, F 为良序集, 且 $a = \text{Ord}(E)$, $b = \text{Ord}(F)$, 令 $G = \{g | g \in E^F \text{与} F - \{y | y \in F \text{与} (y, E \text{的最小元}) \in g\} \text{为有限集合}\}$, F^* 为 F 按相反关系排序的偏序集. E^{F^*} 按公式 $(\{i | i \in I \text{与} (x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\} \text{是良序集}) \text{与} ((\exists j)(j \text{是}\{i | i \in I \text{与} (x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\} \text{的最小元}) \text{与} (x, F, E)(i) \leq (y, F, E)(i)) \text{排序}$, 求证: G 是 E^{F^*} 关于“ x 和 y 是可比较的”的连通分量, 并且, G 是良序集, $\text{Ord}(G) = a^b$.

证明:

令 $T_{x,y}$ 表示集合 $\{i | i \in I \text{与} (x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\}$, 如果 x 和 y 是可比较的, 则 $T_{x,y}$ 的任何子集均有最大元和最小元, 故 $T_{x,y}$ 是有限集合, 反过来, 如果 $T_{x,y}$ 是有限集合, 则 x 和 y 是可比较的.

令 $x \in G$, 如果 y 和 x 属于同一个连通分量, 运用数学归纳法可证 $y \in G$. 反过来, 如果 $x \in G, y \in G$, 则 x, y 是可比较的. 故 G 是 E^{F^*} 关于“ x 和 y 是可比较的”的连通分量, 并且, G 是全序集.

令 F 的最小元为 m , $I_g = F - \{y | y \in F \text{与} (y, E \text{的最小元}) \in g\}$, 对 G 的任意子集 Y , 令 $A_Y = \bigcup_{g \in Y} I_g$. 对于 G 的子集 X , 考虑所有满足 $(\forall x)(\forall y)(x \in Y \text{与} y \in X - Y \Rightarrow x < y)$ 的集合 Y , 则所有 A_Y 均为有限集合,

设其中元素数目最小的是 A_Z , 如果 $A_Z = \emptyset$, 即 $x \rightarrow m$ 的图是 G 的最小元; 如果 $A_Z \neq \emptyset$, 令其最小元为 v , 设 $\{u | (\exists g)(g \in Z \text{与} (g, F, E)(v) = u)\}$ 的最小元为 w , 且 $x \in Z, (g, F, E)(v) = u$, 若有 $y \in Z, (g, F, E)(v) = u, y \neq x$, 则 $A\{g | (g, F, E)(v) = u\}$ 的元素数目小于 A_Z 的元素数目, 矛盾, 故 x 为 G 的最小元.

如果良序集 E 和 E' 同构、 F 和 F' 同构, 则相应的 G, G' 同构. 令 $P_{a,b}$ 为和 a, b 相应的 $\text{Ord}(G)$, 则 $P_{a,0} = 1$, 当 $b = c + d$ 时, $P_{a,b} = P_{a,c}P_{a,d}$, 同时, 当 $b < b'$ 时, $P_{a,b} \leq P_{a,b'}$, 因此, $P_{a,b} \geq \sup_{i \in [0,b[} P_{a^i,a}$. 如果 $P_{a,b} > \sup_{i \in [0,b[} P_{a^i,a}$, 设在 G 上, $\sup_{i \in [0,b[} P_{a^i,a} = \text{Ord}(S_x)$, $Q = \{i | (i, m) \notin x\}$, 设 Q 的最大元是 t , 则 $x \in P_{a, \text{Ord}([0,t]}$. 一方面, $\text{Ord}([0, x]) > \sup_{i \in [0,b[} P_{a^i,a}$, 另一方面, $P_{a, \text{Ord}([0,t])} = P_{a, \text{Ord}([0,t])}a$, $\text{Ord}([0, x]) \leq P_{a,t}a$, 同时, $\text{Ord}([0, t]) < b$, 矛盾. 故 $P_{a,b} = \sup_{i \in [0,b[} P_{a^i,a}$. 因此 $P_{a,b} = a^b$.

注: 习题119涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 120.

(1) 如果 Y 为传递集合, 求证: $Y \cup \{Y\}$ 为传递集合. 如果 $(Y_i)_{i \in I}$ 为传递集族, 求证: $\bigcup_{i \in I} Y_i$ 为传递集合, 如果 $i \neq \emptyset$, 求证: $\bigcap_{i \in I} Y_i$ 为传递集合.

(2) 求证：伪序数是传递集合也是正式集合。并且，如果 X 是伪序数， $X \cup \{X\}$ 也是伪序数。

(3) X 、 Y 均为伪序数，求证： $X \subset Y$ 或 $Y \subset X$ 。

(4) X 为传递集合，如果对任意 $x \in X$ ， x 均为伪序数，求证： X 为伪序数。

(5) 求证： \emptyset 为伪序数。伪序数的每一个元素都是伪序数。

(6) 令 $(X_i)_{i \in I}$ 是伪序数族，且 $i \neq \emptyset$ ，求证： $\bigcap_{i \in I} X_i / \{Y | (\exists i)(i \in I \text{ 与 } Y = X_i)\}$ 按包含关系排序的偏序集的最小元。并且，如果 E 为伪序数，则 $x \in E$ 与 $y \in E$ 与 $x \subset y$ 为良序。

(7) 求证：对任意序数 a ，存在唯一的伪序数 E_a ，使 $\text{Ord}(E_a) = a$ 。并且，序数0、1、2、3相应的伪序数分别是 \emptyset 、 $\{\emptyset\}$ 、 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 、 $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 。

证明：

(1) 即补充定理277。

(2) 即补充定理278、补充定理279。

(3) 即补充定理280。

(4) 即补充定理281。

(5) 即补充定理282、补充定理283。

(6) 即补充定理284。

(7) 前半部分即补充定理285，后半部分根据定义可证。

3.3 集合等势，基数 (Ensembles équipotents, cardinaux)

定义 150. 等势 (*équipotent*)

如果存在 X 到 Y 的双射，则称 X 和 Y 等势，记作 $Eq(X, Y)$ 。

补充定理 286.

(1) $Eq(X, Y)$ 为等价关系。

(2) 如果 $Eq(X, Y)$ ，则 $\tau_Z(Eq(X, Z)) = \tau_Z(Eq(Y, Z))$ 。

证明：

(1) 根据定义可证。

(2) 根据补充定理286 (1)、公理模式7可证。

定义 151. 基数 (*cardinal*)

$\tau_Z(Eq(X, Z))$ 称为 X 的基数，记作 $\text{Card}(X)$ 。

补充定理 287.

$Eq(\text{Card}(X), X)$ 。

证明：根据公理模式5可证.

定理 88.

$$Eq(X, Y) \Leftrightarrow Card(X) = Card(Y).$$

证明：根据补充定理287可证.

补充定理 288.

$$(\exists Z)(Z \subset Y \text{ 与 } Eq(X, Z)) \Leftrightarrow (\exists f)(f \text{ 为 } X \text{ 到 } Y \text{ 的单射}).$$

证明：根据定义可证.

补充定理 289.

a 为基数, 则 $Card(a) = a$.

证明： a 为基数, 故存在 X , 使 $Card(X) = a$, 根据补充定理287, $Eq(a, X)$, 根据定理88, $Card(a) = a$.

定义 152. 基数0 (cardinal zéro), 基数1 (cardinal un), 基数2 (cardinal deux)

$Card(\emptyset)$ 称为基数0; $Card(\{\emptyset\})$ 称为基数1; $Card(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ 称为基数2. 在没有歧义的情况下也可以分别简称为0、1、2.

补充定理 290.

- (1) $0 = \emptyset$;
- (2) $Card(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$;
- (3) $Card(A) = 1 \Leftrightarrow (\exists x)(A = \{x\})$;
- (4) $Card(A) = 2 \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(x \neq y \text{ 与 } A = \{x, y\})$.

证明:

- (1) $(\exists Z)(Z = \emptyset)$, 即 $\tau_Z(Z = \emptyset) = \emptyset$, 又因为 $Z = \emptyset \Leftrightarrow Eq(\emptyset, Z)$, 因此 $0 = \emptyset$.
- (2) 根据定义可证.
- (3) 根据定义可证.
- (4) 根据定义可证.

定理 89. 基数之间的良序关系

$(X \text{ 为基数})$ 与 $(Y \text{ 为基数})$ 与 $(\exists Z)(Z \subset Y \text{ 与 } Eq(X, Z))$ 为 X 、 Y 之间的良序关系.

证明:

根据定义可知其为偏序关系.

令 R 为 $(\exists Z)(Z \subset Y \text{ 与 } Eq(X, Z))$, 对任意元素均为基数的集合 E , 令 $A = \bigcup_{X \in E} X$, 根据定理78, 在 A 上存在良序.

根据定理87, 任何 A 的子集同构于 A 的一个片段, 对任意 $X \in E$, 考虑和 X 等势的 A 的片段的集合, 根据定理73 (2), 该集合有最小元, 用 $f(X)$ 表示该最小元.

当 $f(X) \subset f(Y)$ 时, 存在 $f(X)$ 到 $f(Y)$ 的单射, 因此存在 X 到 Y 的单射, 故 $(\exists Z)(Z \subset Y \text{ 与 } Eq(X, Z))$; 反过来, 若 $(\exists Z)(Z \subset Y \text{ 与 } Eq(X, Z))$, 则存在 X 和 $f(Y)$ 的某个子集等势, 此时, 若 $f(Y) \subset f(X)$ 且 $f(X) \neq f(Y)$, 则根据定理87、定理75, $f(X)$ 的某个片段和 X 等势, 与 $f(X)$ 的定义矛盾, 故公式 R 与 $X \in E$ 与 $Y \in E \Leftrightarrow f(X) \subset f(Y)$. 根据定理73 (2), A 的片段集合为良序集, 得证.

记号定义 22. 基数之间的不等式 (*inégalité entre cardinaux*)

(X 为基数)与(Y 为基数)与 $(\exists Z)(Z \subset Y \text{ 与 } Eq(X, Z))$ 记作 $X \leq Y$ 或 $Y \geq X$.

补充定理 291.

- (1) X 和 Y 的子集等势 $\Leftrightarrow Card(X) \leq Card(Y)$.
- (2) $X \subset Y \Rightarrow Card(X) \leq Card(Y)$.
- (3) a 为基数, 对任意 Y , 如果 $a \leq Card(Y)$, 则存在 $Z \subset Y$, 使 $Card(Z) = a$.
- (4) a 为基数, 则 $a \geq 0$.
- (5) a 为基数, 则 $a \neq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$.

证明:

- (1) 根据补充定理288可证.
- (2) 由于 X 和 X 等势, 根据补充定理291 (1), 得证.
- (3) 根据补充定理289, $Card(a) = a$, 根据补充定理291 (1), a 和 Y 的子集等势, 设该子集为 Z , 得证.
- (4) 令 $Card(A) = a$, $\emptyset \subset A$, 得证.
- (5) 令 $Card(A) = a$, 如果 $a \neq 0$, 则 $a \neq \emptyset$, 故存在 $x \in A$, 因此 $\{x\} \subset A$; 反过来, 如果 $a \geq 1$, 则 $a \neq \emptyset$, 故 $a \neq 0$, 得证.

定理 90.

任意两个集合中, 必有一个集合和另一个集合的子集等势.

证明: 根据定理84、定理78可证.

定理 91.

两个集合之中的任何一个都和另一个集合的子集等势, 则两个集合等势.

证明: 根据定理86、定理78可证.

补充定理 292.

$(\exists X)(x = Card(X) \text{ 与 } X \subset A)$ 是 x 上的集合化公式.

证明: 由于 $X \in \mathcal{P}(A)$, 根据证明规则53可证.

补充定理 293.

a 为基数, 则 $(x \text{为基数})$ 与 $x \leq a$ 是 x 上的集合化公式.

证明: 根据定义, $(x \text{为基数})$ 与 $x \leq a \Leftrightarrow (\exists X)(x = \text{Card}(X) \text{与} X \subset a)$, 根据补充定理292可证.

定理 92.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, 则存在唯一的基数 b , 使对任意 $i \in I$, $a_i \leq b$, 并且, 如果 c 满足对任意 $i \in I$, $a_i \leq c$, 则 $b \leq c$.

证明: 令 E 为 $(a_i)_{i \in I}$ 的和, 则对任意 $i \in I$, $a_i \leq \text{Card}(E)$, 令 $F = \{x | (x \text{为基数}) \text{与} x \leq \text{Card}(E)\}$, 根据定理89, F 为良序集, 且对任意 $i \in I$, $a_i \in F$, 根据补充定理216, 集族 $(a_i)_{i \in I}$ 有最小上界 b . 另一方面, 如果 c 满足对任意 $i \in I$, $a_i \leq c$, 且 $c < b$, 则与 b 为最小上界矛盾, 得证.

定理 93.

如果存在 X 到 Y 的满射, 则 $\text{Card}(Y) \leq \text{Card}(X)$.

证明: 设满射为 f , 则其右逆 s 为 Y 到 X 的单射, 得证.

补充定理 294.

f 为 X 到 Y 的映射, 则 $\text{Card}(f\langle X \rangle) \leq \text{Card}(X)$.

证明: f 为 X 到 $f\langle X \rangle$ 的满射, 根据定理93得证.

定义 153. 基数乘积 (*produit cardinal*), 基数和 (*somme cardinal*)

令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, 则 $(a_i)_{i \in I}$ 的乘积及和的基数, 分别称为该基数族的基数乘积及基数和, 分别记作 $\prod_{i \in I} a_i$ 、 $\sum_{i \in I} a_i$.

补充定理 295.

令 $(E_i)_{i \in I}$ 为集族, 其乘积为 P , 其和为 S , 对任意 $i \in I$, $\text{Card}(E_i) = a_i$, 则 $\text{Card}(P) = \prod_{i \in I} a_i$, $\text{Card}(S) = \sum_{i \in I} a_i$.

证明: 对任意 $i \in I$, 存在 E_i 到 a_i 的双射, 根据定理35、定理55, 存在 P 到 $\prod_{i \in I} a_i$ 、 S 到 $\sum_{i \in I} a_i$ 的双射, 得证.

补充定理 296.

$(a_i)_{i \in \emptyset}$ 为基数族, 则 $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$; $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$.

证明: 根据补充定理116 (4)、补充定理127 (1) 可证.

定理 94.

- (1) 令 $(E_i)_{i \in I}$ 为集族, 则 $\bigcup_{i \in I} E_i \leq \sum_{i \in I} \text{Card}(E_i)$.
 (2) 令 $(E_i)_{i \in I}$ 为两两不相交的集族, 则 $\bigcup_{i \in I} E_i = \sum_{i \in I} \text{Card}(E_i)$.

证明:

- (1) 根据补充定理116 (1) 可证.
 (2) 根据定理35可证.

定理 95. 基数的和与乘积的交换律、结合律、分配律

- (1) 令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, f 为 K 到 I 的双射, 则 $\sum_{k \in K} a_{f(k)} = \sum_{i \in I} a_i$, $\prod_{k \in K} a_{f(k)} = \prod_{i \in I} a_i$.
 (2) 令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, $(J_l)_{l \in L}$ 为 I 的划分, 则 $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{l \in L} (\sum_{i \in J_l} a_i)$, $\prod_{i \in I} a_i = \prod_{l \in L} (\prod_{i \in J_l} a_i)$.
 (3) 令 $((a_{l,i})_{i \in J_l})_{l \in L}$ 为基数族, 令 $I = \prod_{l \in L} J_l$, 则 $\prod_{l \in L} (\sum_{i \in J_l} a_{l,i}) = \sum_{f \in I} (\prod_{l \in L} a_{l,f(l)})$.

证明:

- (1) 根据定理23、定理40可证.
 (2) 根据定理25、定理46、定理47可证.
 (3) 根据定理49、定理50可证.

定义 154. 两个基数的乘积 (*produit de deux cardinaux*), 两个基数的和 (*somme de deux cardinaux*)

$x \neq y$, a, b 为基数, 基数族 $(a_i)_{i \in \{x,y\}}$ 中, $a_x = a, a_y = b$, 则 $\prod_{i \in \{x,y\}} a_i$ 称为 a 和 b 的乘积, 记作 ab 或者 $a \cdot b$, $\sum_{i \in \{x,y\}} a_i$ 称为 a 和 b 的和, 记作 $a + b$.

定理 96. 两个基数的和与乘积的交换律、结合律、分配律

a, b, c 为基数, 则:

- (1) $a + b = b + a$;
 (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
 (3) $ab = ba$;
 (4) $(ab)c = a(bc)$;
 (5) $(a + b)c = ac + bc$.

证明: 根据定理95可证.

定理 97.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, $J \subset I$, 对于 $i \in I$ 但 $i \notin J$, $a_i = 0$ (或 $a_i = 1$), 则 $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{i \in I} a_i$ (或 $\prod_{i \in J} a_i = \prod_{i \in I} a_i$).

证明:

对于加法, $i \in I - J$ 时, $a_i = \emptyset$, 根据定理95 (2) 可证.

对于乘法, $i \in I - J$ 时, a_i 为单元素集合, 根据补充定理138, $\prod_{i \in J} a_i$ 到 $\prod_{i \in I} a_i$ 存在一一对应, 得证.

定理 98.

a 为基数, 则 $a + 0 = a$, $0 + a = a$, $a \cdot 1 = a$, $1 \cdot a = a$.

证明: 根据定理97可证.

定理 99.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 、 $(c_i)_{i \in I}$ 为基数族, a 、 b 为基数, $b = \text{Card}(I)$, 并且对任意 $i \in I$, $a_i = a$, $c_i = 1$, 则 $ab = \sum_{i \in I} a_i$, $b = \sum_{i \in I} c_i$.

证明: $c_i = 1$, 故 c_i 为单元素集合, 故存在 I 到 $\bigcup_{i \in I} c_i$ 的双射, 因此第二式成立. 第一式根据定理95 (3)、定理98可证.

定理 100.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, $\prod_{i \in I} a_i \neq 0$, 则对任意 $i \in I$, $a_i \neq 0$.

证明: 根据定理44可证.

定理 101.

a 、 b 为基数, 如果 $a + 1 = b + 1$, 则 $a = b$.

证明: 令 $X = a + 1$, 则 $X = b + 1$, 则存在 $A \subset X$ 、 $B \subset X$, 使 $\text{Card}(A) = a$, $\text{Card}(B) = b$, 故 $\text{Card}(X - A) = 1$, $\text{Card}(X - B) = 1$, 因此 $X - A = \{x\}$ 、 $X - B = \{y\}$. 如果 $x = y$, 则 $A = B$, 故 $a = b$; 如果 $x \neq y$, 令 $C = A \cap B$, 则 $A = C \cup \{y\}$, $B = C \cup \{x\}$, 因此 $a = \text{Card}(C) + 1$, $b = \text{Card}(C) + 1$, 得证.

补充定理 297.

a 、 b 为基数, 则 $a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow a = b$.

证明: 根据公理模式7、定理101可证.

定义 155. 基数幂 (*exponentiation des cardinaux*)

a 、 b 为基数, 则 a 到 b 的映射集合的基数, 称为 b 的 a 次基数幂, 记作 b^a .

定理 102.

$\text{Card}(X) = a$, $\text{Card}(Y) = b$, 则 $\text{Card}(X^Y) = b^a$.

证明: 根据定理38可证.

定理 103.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, a 、 b 为基数, $b = \text{Card}(I)$, 并且对任意 $i \in I$, $a_i = a$, 则 $a^b = \prod_{i \in I} a_i$.

证明: 根据集合的乘积的定义可证.

定理 104.

令 a 为基数, $(b_i)_{i \in I}$ 为基数族, 则 $a^{\sum_{i \in I} b_i} = \prod_{i \in I} (a^{b_i})$.

证明: 令 S 为 $(b_i)_{i \in I}$ 的和, 当 $s \in S$ 时, 令 $a_s = a$, 根据定理103, 左边等于 $\prod_{s \in S} a_s$, 根据定理95 (2), 右边等于 $\prod_{s \in S} a_s$, 得证.

定理 105.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, b 为基数, 则 $\prod_{i \in I} a_i^b = (\prod_{i \in I} a_i)^b$.

证明: 对于 $(x, y) \in I \times b$, 令 $a_{x,y} = a_x$, 根据定理95 (2), $\prod_{i \in I} a_i^b = \prod_{y \in b} (\prod_{x \in I} a_{x,y})$, 等于 $\prod_{(x,y) \in I \times b} a_{x,y}$, 等于 $\prod_{x \in I} (\prod_{y \in b} a_{x,y})$, 等于 $(\prod_{i \in I} a_i)^b$.

定理 106.

a 、 b 、 c 为基数, 则 $a^{bc} = (a^b)^c$.

证明: 对任意 $i \in c$, 令 $b_i = b$, 则 $a^{bc} = a^{\sum_{i \in c} b_i}$, 根据定理104, 等于 $\prod_{i \in c} a^{b_i}$, 等于 $\prod_{i \in c} a^b$, 根据定理103, 等于 $(a^b)^c$.

定理 107.

令 a 为基数, 则 $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^a = 1$, 如果 $a \neq 0$, 则 $0^a = 1$.

证明: 根据补充定理127 (1)、补充定理132及定义可证.

定理 108.

$\text{Card}(X) = a$, 则 $\text{Card}(\mathcal{P}(X)) = 2^a$.

证明: 令 $A = \{a, b\}$. 对任意 $Y \subset X$, 令 f_Y 为 X 到 A 的映射, 对于 $x \in X$, 如果 $x \in Y$, 则 $f_Y(x) = a$, 如果 $x \in X - Y$, 则 $f_Y(x) = b$, 令 u 为映射 $Y \rightarrow f_Y(Y \in \mathcal{P}(X), f_Y \in A^X)$. 反过来, 对任意 X 到 A 的映射 g , $g^{-1}(a) \subset X$, 令 v 为映射 $g \rightarrow g^{-1}(a) (g \in A^X, g^{-1}(a) \in \mathcal{P}(X))$, 则 $u \circ v$ 和 $v \circ u$ 均为恒等映射, 根据定理20, u 、 v 均为双射, 故 $\text{Card}(\mathcal{P}(X)) = \text{Card}(A^X)$, 得证.

定理 109.

a 、 b 均为基数, 则当且仅当存在基数 c 使 $a = b + c$ 时, $a \geq b$.

证明: $a \geq b \Leftrightarrow (\exists B)(B \subset a \text{ 与 } \text{Card}(B) = b)$, 令 $c = \text{Card}(a - B)$, 因此等价于 $a = b + c$.

定理 110.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 、 $(b_i)_{i \in I}$ 为基数族, $(\forall I)(i \in I \Rightarrow a_i \geq b_i)$, 则 $\sum_{i \in I} a_i \geq \sum_{i \in I} b_i$, $\prod_{i \in I} a_i \geq \prod_{i \in I} b_i$.

证明: 根据定理45、补充定理97 (1) 可证.

补充定理 298.

令 a 、 b 、 c 为基数, $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$, $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$.

证明: 根据定理110可证.

定理 111.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 为基数族, $J \subset I$, 则 $\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$; 如果对任意 $i \in I - J$, $a_i \neq 0$, 则 $\prod_{i \in J} a_i \leq \prod_{i \in I} a_i$.

证明: 令 $b_i = a_i$ ($i \in J$), $b_i = 0$ (或 $b_i = 1$) ($i \in I - J$), 根据定理110可证.

定理 112.

a 、 a' 、 b 、 b' 均为基数, $a \leq a'$, $b \leq b'$, 则 $a^b \leq a'^{b'}$.

证明: 根据定理111、定理103可证.

定理 113. 康托尔定理

a 为基数, 则 $2^a > a$.

证明: 由于 $x \rightarrow \{x\}$ 为 a 到 $\mathcal{P}(a)$ 的单射, 故 $a \leq 2^a$.

对任意 a 到 $\mathcal{P}(a)$ 的映射 f , 令 X 为 a 的元素中满足 $x \notin f(x)$ 的元素集合, 如果 $x \notin X$, 则 $f(x) \neq X$, 如果 $x \in f(x)$, 则 $x \in a - X$, 故 $f(x) \neq X$, 因此, $X \notin f(a)$, 因此不存在 a 到 $\mathcal{P}(a)$ 的满射, 故 $2^a > a$.

定理 114. 所有基数不能组成集合

非 Coll_x (x 为基数).

证明: 如果存在这样的集合 U , 令 S 为 $(X)_{X \in U}$ 的和, 则任何基数都和 S 的某个子集等势. 令 $s = \text{Card}(S)$, 则 $s < 2^s$, 但 2^s 也是基数, 矛盾,

补充定理 299.

(1) $1+1=2$.

(2) $a+a=2a$.

证明:

(1) 令 $A = \{x\}$, $B = \{y\}$, 其中 $x \neq y$, 则 $A \cup B = \{x, y\}$, $A \cap B = \emptyset$, 根据定理94 (2) 可证.

(2) 根据补充定理299 (1)、定理96 (5) 可证.

补充定理 300.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 、 $(b_i)_{i \in I}$ 为基数族, 对任意 $i \in I$, $b_i \geq 2$:

(1) 对任意 $i \in I$, $a_i \leq b_i$, 则 $\sum_{i \in I} a_i \leq \prod_{i \in I} b_i$.

(2) 对任意 $i \in I$, $a_i < b_i$, 则 $\sum_{i \in I} a_i < \prod_{i \in I} b_i$.

证明:

(1) 对任意 $i \in I$, 令 p_i 为 a_i 到 b_i 的单射, p 为映射 $x \rightarrow p_{pr_2x}(pr_1x)$.

如果 $Card(I) = 0$, 根据补充定理296, 命题成立.

如果 $Card(I) = 1$, 令 $I = \{i\}$, 则 $\sum_{i \in I} a_i = a_i$, $\prod_{i \in I} b_i = b_i$, 命题成立.

如果 $Card(I) = 2$, 令 $I = \{i, j\}$, 令 $c_i = b_{i-1}$, $c_j = b_{j-1}$, 则 $b_i b_j \geq c_i c_j + c_i + c_j + 1$, 大于等于 $b_i + b_j$, 大于等于 $a_i + a_j$, 命题成立.

如果 $Card(I) > 2$, 令 f 为映射 $i \rightarrow \tau_x(x \in b_i)$, g 为映射 $i \rightarrow \tau_x(x \in b_i - f(i))$. 令 A 为 $(a_i)_{i \in I}$ 的和, 对任意 $x \in A$, 如果 $p(x) \neq f(pr_2x)$, 令 $h(x) = (\bigcup_{i \in I - pr_2x} \{(f(i), i)\}) \cup \{f(pr_2x), pr_2x\}$, 如果 $p(x) = f(pr_2x)$, 令 $h(x) = (\bigcup_{i \in I - pr_2x} \{(g(i), i)\}) \cup \{f(pr_2x), pr_2x\}$, 根据定义, h 为 A 到 $\prod_{i \in I} a_i$ 的单射, 故 $\sum_{i \in I} a_i \leq \prod_{i \in I} b_i$.

(2) 类似补充定理300 (1) 可证.

记号定义 23. 序数的第一射影的基数 (*cardinal de la première projection d'une ordinal*)

令 a 为序数, 在没有歧义的情况下, $Card(pr_1a)$ 可以简记为 $Card(a)$.

补充定理 301.

(1) E 、 F 为良序集, 且 E 同构于 F , 则 $Card(E) = Card(F)$.

(2) $Card(\text{序数}0) = \text{基数}0$; $Card(\text{序数}1) = \text{基数}1$.

(3) $(l_i)_{i \in I}$ 为序数族, I 为良序集, 则 $Card(\sum_{i \in I} l_i) = \sum_{i \in I} Card(l_i)$, $Card(\prod_{i \in I} l_i) = \prod_{i \in I} Card(l_i)$.

(4) $Card(\text{序数}2) = \text{基数}2$.

(5) a 、 b 为序数, 且 $Card(a) < Card(b)$, 则 $a < b$.

(6) 序数 $a \leq b$, 则 $Card(a) \leq Card(b)$.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 根据补充定理248 (2)、补充定理248 (3)、补充定理290 (2)、补充定理290 (3) 可证.

(3) 根据定义可证.

(4) 根据补充定理299 (1)、补充定理301 (3) 可证.

(5) 根据定义可证.

(6) 根据定义可证.

补充定理 302.

$(\forall E)(\exists X)(X \subset E \text{ 与 } X \notin E).$

证明: 根据定理113可证.

习题 121.

f 为 E 到 F 的映射, g 为 F 到 E 的映射, 求证: 存在 E 的子集 A 、 B 以及 F 的子集 A' 、 B' , 使 $B = E - A$, $B' = F - A'$, 且 $A' = f\langle A \rangle$, $B = g\langle B' \rangle$.

证明: 考虑 $X \rightarrow E - g\langle F - f\langle X \rangle \rangle (X \in \mathcal{P}(E))$, 根据习题63, 存在 A 使 $A = E - g\langle F - f\langle A \rangle \rangle$, 令 $A' = f\langle A \rangle$, $B' = F - f\langle A \rangle$, $B = E - A$, 则 $B = g\langle B' \rangle$.

注: 原书习题121中 f 为单射的条件, 是多余的.

习题 122.

E 和 F 是不同的集合, 求证: $E^F \neq F^E$, 并且, 如果 $\text{Card}(E) = 2$, $\text{Card}(F) = 2 + 2$, 则 E^F 、 F^E 至少有一个不是基数.

证明: 如果 E 、 F 其中一个为 \emptyset , 显然成立.

如果均不为 \emptyset , 且 $E^F = F^E$, 对任意 $G \in F^E$, $pr_1 G = E$, 由于 $G \in E^F$, 故 $pr_1 G = F$, 因此 $E = F$, 矛盾.

如果 $\text{Card}(E) = 2$, $\text{Card}(F) = 2 + 2$, 由于 $\text{Card}(E^F) = \text{Card}(F^E)$, 故 E^F 、 F^E 至少有一个不是基数. 其中至少有一个不是基数.

习题 123.

令 $(a_i)_{i \in I}$ 、 $(b_i)_{i \in I}$ 为基数族, 对任意 $i \in I$, $b_i \geq 2$:

(1) 对任意 $i \in I$, $a_i \leq b_i$, 求证: $\sum_{i \in I} a_i \leq \prod_{i \in I} b_i$.

(2) 对任意 $i \in I$, $a_i < b_i$, 求证: $\sum_{i \in I} a_i < \prod_{i \in I} b_i$.

证明: 即补充定理300.

习题 124.

令 f 为 $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ 到 E 的映射, 并且, 对任意 $X \subset E$ 且 $X \neq \emptyset$, $f(X) \in X$:

(1) b 为基数, $A = \{x | x \in E \text{ 与 } \text{Card}(f^{-1}\langle x \rangle) \leq b\}$, 令 $a = \text{Card}(A)$, 求证: $2^a \leq 1 + ab$.

(2) $B = \{x | x \in E \text{ 与 } (X \in f^{-1}\langle x \rangle) \Rightarrow \text{Card}(X) \leq b\}$, 求证: $\text{Card}(B) \leq b$.

证明:

(1) 令 $Y = \bigcup_{x \in A} f^{-1}\langle x \rangle$, 则 $Card(Y) \leq ab$, 对任意 $y \in \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$, $f(y) \in A$, 故 $y \in Y$, 因此 $\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\} \subset Y$, 所以 $Card(\mathcal{P}(A)) \leq 1 + ab$, 得证.

(2) 令 $x = f(B)$, 则 $x \in B$, 故 $Card(B) \leq b$.

习题 125.

$(l_i)_{i \in I}$ 为序数族, I 为良序集, 求证: $Card(\sum_{i \in I} l_i) = \sum_{i \in I} Card(l_i)$, $Card(\prod_{i \in I} l_i) = \prod_{i \in I} Card(l_i)$.

证明: 即补充定理301 (3).

习题 126.

求证: $(\forall E)(\exists X)(X \subset E \text{ 与 } X \notin E)$.

证明: 即补充定理302.

3.4 自然数, 有限集合 (Entiers naturels, ensembles finis)

定义 156. 有限基数 (*cardinal fini*), 自然数 (*entier naturel*), 有限集合 (*ensemble finie*), 元素数目 (*nombre d'éléments*), 数目 (*nombre*), 有限族 (*famille finie*)

对于基数 a , 如果 $a + 1 \neq a$, 则称 a 为有限基数, 又称自然数. 如果 $Card(E)$ 为自然数, 则称 E 为有限集合, 此时, $Card(E)$ 称为 E 的元素数目. 在没有歧义的情况下, 某类项的集合的元素数目, 也可以简称为该类项的数目. 如果族的指标集是有限集, 则称该族为有限族.

定理 115.

当且仅当 $a + 1$ 为自然数时, a 为自然数.

证明: 根据补充定理297, $a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow a = b$, 因此 $a \neq a + 1 \Leftrightarrow a + 1 \neq a + 1 + 1$, 得证.

定理 116.

n 为自然数, 基数 $a \leq n$, 则 a 为自然数; 并且, 如果 $n \neq 0$, 则存在唯一的自然数 m 使 $n = m + 1$, 且 $a < n \Leftrightarrow a \leq m$.

证明: 由于 $a \leq n$, 因此存在 b 使 $n = a + b$, 由于 $n \neq n + 1$, 因此 $a + 1 + b \neq a + b$, 因此 $a + 1 \neq a$, 故 a 为自然数. 如果 $n \neq 0$, 则 $n \geq 1$, 根据定理109, 存在自然数 m 使 $n = m + 1$; 根据定理101, m 是唯一的.

令 $a < n$ 时, 设 $n = a + b$, 且 $b \neq 0$, 由于 $b \leq n$, 故 b 为自然数, 因此存在 c 使 $b = c + 1$, 因此 $m = a + c$, 因此 $a \leq m$, 得证.

定理 117.

有限集合的子集是有限集合.

证明: 根据定理116可证.

定理 118.

X 为有限集合 E 的子集, 且 $X \neq E$, 则 $Card(X) < Card(E)$.

证明: 设 $a \in E - X$, 令 $Y = E - \{a\}$, 则 $Card(X) \leq Card(Y)$, 同时 $Card(Y) + 1 = Card(E)$, 根据定理116得证.

定理 119.

f 为有限集合 E 到 F 的映射, 则 $f(E)$ 为有限集合.

证明: 根据定理93, $Card(f(E)) \leq Card(E)$, 根据定理116得证.

定理 120.

E 和 F 的元素数目相同, f 为 E 到 F 的映射, 则以下三个公式等价:

第一, f 是单射;

第二, f 是满射;

第三, f 是双射.

证明: 若 f 是单射, 则 $Card(f(E)) = Card(E)$, 等于 $Card(F)$, 根据定理118, f 为满射; 反过来, 若 f 不是单射, 设存在 $x \neq x'$ 使 $f(x) = f(x')$, 则 $f(E - \{x\}) = f(E)$, 故 $Card(f(E - \{x\})) \leq Card(E - \{x\})$, 又因为 $Card(E - \{x\}) < Card(E)$, 故 $f(E) < Card(E)$, 因此 f 不是满射. 综上得证.

证明规则 61. 数学归纳法

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, R 为公式, n 不是常数, 如果“(0| n) R 与 $(\forall n)(n$ 为自然数与 $R \Rightarrow (n + 1| n) R)”是 M 的定理, 则 $(\forall n)(n$ 为自然数 $\Rightarrow R)$ 是 M 的定理.$

证明: 假设 $(\exists n)(n$ 为自然数与非 $R)$ 为真, 令 q 为自然数, 且非 $(q| n) R . 由于集合 $\{n|n$ 为自然数与 $n \leq q$ 与 $R\}$ 为非空良序集, 故有最小元 s , 如果 $s = 0$, 矛盾; 如果 $s > 0$, 令 $s = s' + 1$, 根据定理116, $s' < s$, 因此 $(s'| n) R 为真, 故 $(s| n) R 为真, 矛盾.$$$

补充证明规则 87.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中, R 为公式, n 、 p 不是常数, 令 S 为 $(\forall p)(n$ 为自然数与 p 为自然数与 $p < n \Rightarrow (p| n) $R)$, 如果 $S \Rightarrow R$ 是 M 的定理, 则 $(\forall n)(n$ 为自然数 $\Rightarrow R)$ 是 M 的定理.$

证明： $(0|n)S$ 为真，故 $(0|n)R$ 为真。设 R 对 n 成立，由于 $(n+1|n)S \Leftrightarrow S$ 与 R ，故 $(n+1|n)S$ 为真，因此 $(n+1|n)R$ 为真，根据证明规则61得证。

补充证明规则 88.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为公式， n 不是常数， k 为自然数，如果 $(k|n)R$ 与 $(\forall n)(n \text{ 为自然数与 } n \geq k \text{ 与 } R \Rightarrow (n+1|n)R)$ 是 M 的定理，则 $(\forall n)(n \text{ 为自然数与 } n \geq k \Rightarrow R)$ 是 M 的定理。

证明：令 $m = n - k$ ，根据证明规则61可证。

补充证明规则 89.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为公式， n 不是常数， a, b 为自然数，如果 $(a|n)R$ 与 $(\forall n)(n \text{ 为自然数与 } a \leq n \text{ 与 } n < b \text{ 与 } R \Rightarrow (n+1|n)R)$ 是 M 的定理，则 $(\forall n)(n \text{ 为自然数与 } a \leq n \text{ 与 } n \leq b \Rightarrow R)$ 是 M 的定理。

证明：令 S 为 $a \leq n$ 与 $n \leq b \Rightarrow R$ ，根据证明规则61， S 为真，故 $(\forall n)(n \text{ 为自然数与 } a \leq n \text{ 与 } n \leq b \Rightarrow R)$ 。

补充证明规则 90.

包含2元特别符号 \in 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论 M 中， R 为公式， n 不是常数， a, b 为自然数，如果 $(b|n)R$ 与 $(\forall n)(n \text{ 为自然数与 } a \leq n \text{ 与 } n < b \text{ 与 } (n+1|n)R \Rightarrow R)$ 是 M 的定理，则 $(\forall n)(n \text{ 为自然数与 } a \leq n \text{ 与 } n \leq b \Rightarrow R)$ 是 M 的定理。

证明： $(\forall n)(n \text{ 为自然数与 } a \leq n \text{ 与 } n < b \text{ 与 } (n+1|n)R \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\forall n)(n \text{ 为自然数与 } a \leq n \text{ 与 } n < b \text{ 与非 } R \Rightarrow \text{非}(n+1|n)R)$ 。如果存在 k ， $a \leq k$ 与 $k \leq b$ ，并且非 $(k|n)R$ 为真，则根据补充证明规则89，非 $(b|n)R$ 为真，矛盾。

定理 121.

令 E 为右方有向集（或左方有向集、格、全序集），则 E 的非空有限子集有上界（或有下界、有最小上界和最大下界、有最大元和最小元）。

证明：考虑右方有向集的情况，令 n 为1，命题显然成立。设公式对 n 成立，对于设元素数目为 $n+1$ 的子集 X ，设 $x \in X$ ，令 $Y = X - \{x\}$ ，则 Y 有上界 y ，又由于 $\{x, y\}$ 有上界，该上界也是 X 的上界，得证。其他情况同理可证。

定理 122.

任何非空全序有限集合是有最大元的良序集。

证明：根据定理121可证。

定理 123.

任何非空偏序有限集合有极大元。

证明：根据定理121，该集合为归纳集，根据定理80可证。

补充定理 303.

任何非空偏序有限集合有极小元。

证明：考虑按相反关系排序的偏序集，根据定理123可证。

定义 157. 有限性 (*caractère fini*)

F 的元素都是 E 的子集，如果 $X \in F \Leftrightarrow (\forall Y)((Y \subset X) \text{ 与 } (Y \text{ 为有限集合}) \Rightarrow (Y \in F))$ ，则称 F 具有有限性。

定理 124.

F 的元素都是 E 的子集，且具有有限性，则 F 按包含关系排序的非空偏序集有极大元。

证明：令 G 为 F 的全序子集，设 G 的元素的并集为 X ， X 的任意有限子集 Y 当中的元素 y ，存在 $Z_y \in G$ 使 $y \in Z_y$ ，根据定理122， Z_y ($y \in Y$) 的集合为全序有限集合，因此有最大元 S ，故 $Y \subset S$ 且 $S \in G$ ，由于 $S \in F$ 且 F 具有有限性，因此 $Y \in F$ ，由于 F 具有有限性，因此 $X \in F$ 。根据定理82， F 有极大元。

补充定理 304.

当且仅当任意按包含关系排序的 $\mathcal{P}(E)$ 的非空子集均有极大元时， E 为有限集合。

证明：必要性根据定理123可证。

充分性：令 F 为 E 的有限子集的集合，假设其有极大元 X ，如果 $X \neq E$ ，则存在 $a \in X - E$ ， $X \cup \{a\}$ 也是 E 的有限子集，矛盾，故 $X = E$ ，得证。

补充定理 305.

E 为良序集， E 按相反关系排序的偏序集也是良序集，则 E 为有限集合。

证明：如果 $E = \emptyset$ ，命题显然成立；如果 $E \neq \emptyset$ ，令 $S = \{x \mid \leftarrow, x[\text{为有限集合}\}$ ，则 $S \neq \emptyset$ 。设 S 的最大元为 y ，则 $\leftarrow, y[\text{gcup} \{y\}$ 为有限集合，如果 $E - (\leftarrow, y[\cup \{y\}) \neq \emptyset$ ，则其有最小元 z ，则 $\leftarrow, z[$ 为有限集合，故 $z \in S$ ，且 $z > y$ ，矛盾。因此， $E = \leftarrow, y[\cup \{y\}$ ，得证。

定义 158. 最长反链的长度 (*longueur de l'antichaine la plus longue*)，最长反链 (*antichaine la plus longue*)

E 为偏序集， $A = \{a \mid (\exists X)((X \text{ 为 } E \text{ 的自由子集}) \text{ 与 } \text{Card}(X) = a)\}$ ，如果 A 有最大元自然数 k ，则称 A 为 E 的最长反链的长度。对 E 的任意自由子集 X ，如果 $\text{Card}(X) = k$ ，则称 X 为 E 的最长反链。

补充定理 306. 狄尔沃斯定理

E 为偏序集，其最长反链的长度为自然数 k ，则存在 E 的划分 Δ_F 使 $\text{Card}(F) = k$ ，并且， F 的元素均为 E 的全序子集。

证明:

如果 E 为有限集合, 设 E 的元素数目为 n , 对 n 用数学归纳法:

令 a 为 E 的极小元. 对于 $E - \{a\}$:

如果 E 的最长反链的长度为 k , 根据归纳假设, 存在 $E - \{a\}$ 的划分 Δ_F 使 $Card(F) = k$, 且 F 的个元素均为全序集. 令 $X = x | (\exists G)(G \in F \text{ 与 } x \text{ 为 } G \text{ 的最小元})$, 则 $Card(X) = k$, 故 a 和 X 的某个元素 y 是可比较的, 设 $y \in G, G \in F$, 则将 a 加入 G , 可得到符合条件的划分.

如果 E 的最长反链的长度为 $k-1$, 根据归纳假设, 存在 $E - \{a\}$ 的划分 Δ_F 使 $Card(F) = k-1$, 且 F 的个元素均为全序集. 则将 $\{a\}$ 单独作为一个集合, 加入 F 中, 可得到符合条件的划分.

根据证明规则61, 对有限集合命题得证.

如果 E 不是有限集合, 设命题对 $k-1$ 成立, 令 G 为满足下列条件的集合 C 的集合:

对 E 的任意有限子集 F , 均存在 F 的划分 Δ_G 使 $Card(G) \leq k$, 且 G 的个元素均为全序集, 并使 $C \cap F$ 是 G 的一个元素的子集.

根据定义, 这样的集合均为全序集, 同时, 根据定理82, C 有极大元 C_0 .

如果存在 $E - C_0$ 的自由子集, 其元素数目为 k , 令其为 $\bigcup_{i \in [1, k]} \{a_i\}$ (对任意 $i \in [1, k], j \in [1, k], i \neq j$, 均有 $a_i \neq a_j$), 则对任意 $i \in [1, k]$, 均存在有限集合 F_i , 使其任何划分 Δ_G , 只要 $Card(G) \leq k$, 则 $(C_0 \cup \{a_i\}) \cap F_i$ 均不是 G 的任何一个元素的子集, 故 $a_i \in F_i$.

令 $H = \bigcup_{i \in [1, k]} F_i$, 则 $\bigcup_{i \in [1, k]} \{a_i\} \subset H$. 同时, 存在 H 的某个划分 Δ_G , 其满足 $Card(G) = k$.

此时, 令 E_i 为 G 的元素且满足 $a_i \in E_i$, 则存在 $j \in [1, k]$, 使 $C_0 \cap H \subset E_j$, 令 $P_i = E_i \cap F_j$, 则 $(P_i)_{i \in [1, k]}$ 是 F_j 的划分, 故 $(C_0 \cup \{a_j\}) \cap F_j \subset P_j$, 矛盾.

因此, $E - C_0$ 的最长反链的长度小于 k , 由于 C_0 为全序集, $E - C_0$ 的最长反链的长度为 $k-1$, 根据归纳假设, 存在 $E - C_0$ 的划分 Δ_G 使 $Card(G) \leq k-1$, 将 C_0 加入该划分, 即可证得命题对 k 也成立.

补充定理 307.

A 为集合, $(X_i)_{i \in [1, m]}, (Y_j)_{j \in [m+1, m+n]}$ 均为 A 的有限子集族. 自然数 h 满足下列条件:

第一, $m \leq n + h, h < m$;

第二, 对任意自然数 $r \in [1, m-h]$, 以及 $[1, m]$ 的元素数目为 $r+h$ 的子集 $\bigcup_{k \in [1, r+h]} \{i_k\}$ (对任意 $x \in [1, r+h], y \in [1, r+h], x \neq y$, 均有 $i_k \neq i_y$), 存在 $[m+1, m+n]$ 的元素数目为 r 的子集 $\bigcup_{l \in [1, r]} \{j_l\}$ (对任意 $x \in [m+1, m+n], y \in [m+1, m+n], x \neq y$, 均有 $j_k \neq j_y$), 使对任意 $l \in [1, r]$, $\bigcup_{k \in [1, r+h]} X_{i_k}$ 均和 Y_{j_l} 相交,

则存在 A 的有限集合 B , $Card(B) \leq n + h$, 并且所有的 X_i ($i \in [1, m]$) 和所有的 Y_j ($j \in [m + 1, m + n]$) 均和 B 相交.

证明: 令 $G = \Delta_{[1, m+n]} \cup \{(x, y) | (x \in [1, m]) \text{ 与 } (y \in [m + 1, m + n]) \text{ 与 } (X_x \cap Y_y \neq \emptyset)\}$, 则 G 为在 $[1, m + n]$ 上的偏序图.

令 $[1, m + n]$ 按 $(x, y) \in G$ 排序, 则其最长反链的长度为 $n + h_0$, 根据补充定理306可证.

补充定理 308. 霍尔定理

E 、 F 为有限集合, $x \rightarrow A(x)$ 为 E 到 $\mathcal{P}(F)$ 的映射. 则当且仅当对 E 的任意子集 H 均有 $Card(\bigcup_{x \in H} A(x)) \geq Card(H)$ 时, 存在 E 到 F 的单射 f , 使对任意 $x \in E$ 均有 $f(x) \in A(x)$.

证明:

必要性根据定义可证.

充分性:

令 a 、 b 互不相等, $G = \Delta_{(E \times \{a\}) \cup (F \times \{b\})} \cup \{(x, y) | (x \in (E \times \{a\})) \text{ 与 } (y \in (A(x) \times \{b\})) \text{ 与 } y \in A(x)\}$, 根据补充定理306, $(E \times \{a\}) \cup F \times \{b\}$ 存在 $Card(F)$ 个全序集的划分 $(x_i)_{i \in [0, Card(F)]}$.

对任意 x_i , $Card(x_i \cap (F \times \{b\})) \leq 1$, $Card(x_i \cap (E \times \{a\})) \leq 1$. 因此, 对任意 x_i , $Card(x_i \cap (F \times \{b\})) = 1$, 令 g 为映射 $v \rightarrow x_i(v \in E)$, 其中 x_i 为 (v, a) 所在的集合, h 为映射 $x_i \rightarrow pr_1(x_i \cap (F \times \{b\}))$, 令 $f = h \circ g$, f 即满足要求.

补充定理 309.

E 、 F 为有限集合, $x \rightarrow A(x)$ 为 E 到 $\mathcal{P}(F)$ 的映射, $G \subset F$. 则当且仅当对 E 的任意子集 H 均有 $Card(\bigcup_{x \in H} A(x)) \geq Card(H)$, 并且对任意 $L \subset G$ 均有 $Card(\{x | x \in E \text{ 与 } A(x) \cap L \neq \emptyset\}) \geq Card(L)$ 时, 存在 E 到 F 的单射 f , 使对任意 $x \in E$ 均有 $f(x) \in A(x)$, 且 $G \subset f(E)$.

证明:

必要性根据定义可证.

充分性:

对 $Card(E)$ 用数学归纳法:

$Card(E) = 0$ 时, 命题显然成立,

设命题对 $Card(E) \leq n$ 成立, 当 $Card(E) = n + 1$ 时:

根据补充定理308, 存在 G 到 E 的单射 f 、 E 到 F 的单射 g , 令其图分别为 P 、 Q , 如果 $\langle G \rangle = E$, 则命题成立; 否则, 令 $x \in E - f\langle G \rangle$, 如果 $g(x) \in F - G$, 根据归纳假设命题对 $E - x$ 、 $F - g(x)$ 、 G 成立, 故命题对 E 、 F 、 G 成立; 如果 $g(x) \in G$, 根据归纳假设命题对 $E - x$ 、 $F - g(x)$ 、 $G - g(x)$ 成立, 故命题对 E 、 F 、 G 成立. 综上, 得证.

定义 159. 流动性 (mobile)

A 为集合, R 的元素都是 A 的有限子集, 如果 R 满足下列条件, 则称 R 具有流动性:
对 R 的任何两个不同元素 X, Y , 如果 $z \in X \cap Y$, 则存在 $Z \in R$, 使 $Z \subset X \cup Y$ 且 $z \notin Z$.

定义 160. 纯子集 (partie pure)

$Q \subset A, R \subset \mathcal{P}(A)$, 如果 Q 的任何子集都不是 R 的元素, 则称 Q 为 A 关于 R 的纯子集.

习题 127.

(1) E 为集合, $F(E)$ 是 E 的有限子集集合. 令 H 为满足下列条件的 $\mathcal{P}(E)$ 的子集 G 的集合:

第一, $\emptyset \in G$;

第二, 对任意 $X \in G, x \in E$, 均有 $X \cup \{x\} \in G$.

求证: $F(E)$ 是按包含关系排序的 H 的最小元.

(2) 求证: E 的任何两个有限子集 A, B 的并集是 E 的有限子集.

(3) E 为有限集合, 求证: $\mathcal{P}(E)$ 为有限集合.

证明:

(1) 根据定义可证 $F(E) \in H$. 反过来, $\emptyset \in G$, 因此基数为0的 E 的子集都是 G 的元素, 设基数为 n 的 E 的子集都是 G 的元素, 对任意基数为 $n+1$ 的 E 的子集 X , 由于 $X \neq \emptyset$, 故令 $x \in X$, 根据定理94 (2)、定理101, $Card(X - \{x\}) = n$, 故 $X - \{x\} \in G$, 因此 $X \in G$, 根据证明规则61得证.

(2) 令 $H = \{X | X \subset E \text{ 与 } X \bigcup^A \text{ 为有限集合}\}$, 则 $\emptyset \in H$, 并且, 对任意 $X \in G, x \in E$, $Card(X \cup A \cup \{x\})$ 为 $Card(X \bigcup^A A)$ 或 $Card(X \bigcup^A A) + 1$, 根据定理115, $X \cup \{x\} \in G$, 根据习题127 (1), $F(E) \subset H$, 故 $B \in H$, 得证.

(3) 当 $Card(E) = 0$ 时, 命题显然成立, 设命题对 $Card(E) = n$ 成立, 当 $Card(E) = n+1$ 时:

令 $x \in E, E' = E - \{x\}$, 则 $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E') \cup g(\mathcal{P}(E'))$, 其中 g 为 $\mathcal{P}(E')$ 到 $\mathcal{P}(E)$ 的映射 $X \rightarrow X \bigcup_{\{x\}}$. 由于 $\mathcal{P}(E)$ 为有限集合, g 为 $\mathcal{P}(E')$ 到 $g(\mathcal{P}(E'))$ 的双射, 故 $g(\mathcal{P}(E'))$ 为有限集合, 根据习题127 (2), $\mathcal{P}(E)$ 为有限集合, 根据证明规则61得证.

习题 128.

求证: 当且仅当任何按包含关系排序的 $\mathcal{P}(E)$ 的非空子集均有极大元时, E 为有限集合.

证明: 即补充定理304.

习题 129.

E 为良序集, E 按相反关系排序的偏序集也是良序集, 求证: E 为有限集合.

证明: 即补充定理305.

习题 130.

E 为有限集合, 其元素数目 $n \geq 2$, $C \subset E \times E$, 对任意 $x \neq y$, (x, y) 和 (y, x) 有且只有一个属于 C 的元素. 求证: 存在 $[1, n]$ 到 E 的映射 f , 对任意 $i \in [1, n-1]$, $(f(i), f(i+1)) \in C$.

证明: 将命题加强为存在双射.

$n = 2$, 命题显然成立.

设命题对 n 成立, 对于元素数目为 $n+1$ 的集合 E , 设 $a \in E$, 令 $E' = E - \{a\}$, $C' = C \cap E' \times E'$, 设 f' 为 $[1, n]$ 到 E' 的双射并且关于图 C' 满足条件, 令 $A = \{x | x \in [1, n] \text{ 与 } (f'(x), a) \in C\}$, $m = \sup_E A$, 则当 $i \in [1, m]$ 时, $f(i) = f'(i)$, 当 $i = m+1$ 时, $f(i) = a$, 如果 $m < n$, 则当 $i \in [m+2, n+1]$ 时, $f(i) = f'(i-1)$. 则 f 为满足条件的双射. 根据补充证明规则88得证.

习题 131.

E 为偏序集, 其最长反链的长度为自然数 k , 求证: 存在 E 的划分 Δ_F 使 $\text{Card}(F) = k$, 并且, F 的元素, 均为按 E 的偏序在该集合上导出的偏序排序的全序集.

证明: 即补充定理306.

习题 132.

(1) A 为集合, $(X_i)_{i \in [1, m]}$, $(Y_j)_{j \in [m+1, m+n]}$ 均为 A 的有限子集族. 存在自然数 h 满足下列条件, 且其中最小的为 h_0 :

第一, $m \leq n+h$, $h < m$;

第二, 对任意自然数 $r \in [1, m-h]$, 以及 $[1, m]$ 的元素数目为 $r+h$ 的子集 $\bigcup_{k \in [1, r+h]} \{i_k\}$ (对任意 $x \in [1, r+h]$, $y \in [1, r+h]$, $x \neq y$, 均有 $i_k \neq i_y$), 存在 $[m+1, m+n]$ 的元素数目为 r 的子集 $\bigcup_{l \in [1, r]} \{j_l\}$ (对任意 $x \in [m+1, m+n]$, $y \in [m+1, m+n]$, $x \neq y$, 均有 $j_k \neq j_y$), 使对任意 $l \in [1, r]$, $\bigcup_{k \in [1, r+h]} X_{i_k}$ 均和 Y_{j_l} 相交,

则存在 A 的有限集合 B , $\text{Card}(B) \leq n+h_0$, 并且所有的 X_i ($i \in [1, m]$) 和所有的 Y_j ($j \in [m+1, m+n]$) 均和 B 相交.

求证: 存在 A 的有限集合 B , 其元素数目小于等于 $n+h$, 并且所有的 X_i ($i \in [1, m]$) 和所有的 Y_j ($j \in [m+1, m+n]$) 均和 B 相交.

(2) E, F 为有限集合, $x \rightarrow A(x)$ 为 E 到 $\mathcal{P}(F)$ 的映射. 求证: 当且仅当对 E 的任意子集 H 均有 $\text{Card}(\bigcup_{x \in H} A(x)) \geq \text{Card}(H)$ 时, 存在 E 到 F 的单射 f , 使对任意 $x \in E$ 均有 $f(x) \in A(x)$.

(3) E, F 为有限集合, $x \rightarrow A(x)$ 为 E 到 $\mathcal{P}(F)$ 的映射, $G \subset F$. 求证: 当且仅当对 E 的任意子集 H 均有 $\text{Card}(\bigcup_{x \in H} A(x)) \geq \text{Card}(H)$, 并且对任意 $L \subset G$ 均有 $\text{Card}(\{x | x \in E \text{ 与 } A(x) \cap L \neq \emptyset\}) \geq \text{Card}(L)$ 时, 存在 E 到 F 的单射 f , 使对任意 $x \in E$ 均有 $f(x) \in A(x)$, 且 $G \subset f(E)$.

证明:

- (1) 根据补充定理307可证.
- (2) 即补充定理308.
- (3) 即补充定理309.

习题 133.

(1) E 为有限格, 求证: E 的任意元素 a , 都是有限个不可约元素的最小上界.

(2) E 为有限格, J 为其不可约元素集合. 令 $S(x) = \{y|y \in J \text{ 与 } y \leq x\}$, 求证: $x \rightarrow S(x)$ 为 E 到按包含关系排序的 $\mathcal{P}(J)$ 的一个子集的同构, 并且, $S(\inf(x, y)) = S(x) \cap S(y)$.

证明:

(1) 令 $J = \{v|v \in E \text{ 与 } v \text{ 为 } E \text{ 的不可约元素}\}$, $H = \{u|u \in E \text{ 与 } (\exists X)(X \subset J \text{ 与 } \sup X = u)\}$. 如果 $E - H \neq \emptyset$, 则有极小元 z , 故 $z = \sup(x, y)$, 且 $x < z$ 、 $y < z$, 故 $x \in H$ 、 $y \in H$, 因此 x 、 y 均为有限个不可约元素的最小上界, 故 $z \in H$, 矛盾.

(2) 根据习题133 (1) 可证.

习题 134.

(1) E 为分配格, a 是 E 的不可约元素, 求证: $a \leq \sup(x, y) \Rightarrow a \leq x$ 或 $a \leq y$.

(2) E 为有限分配格, J 为其不可约元素集合. 令 $S(x) = \{y|y \in J \text{ 与 } y \leq x\}$, 求证: $x \rightarrow S(x)$ 为 E 到按包含关系排序的 $\mathcal{P}(J)$ 的一个子集的同构, 并且, $S(\sup(x, y)) = S(x) \cup S(y)$; 同时, 令 J^* 为按在 J 上的偏序关系的相反关系排序的偏序集, $I = \{0, 1\}$, $A(J^*, I)$ 为 J^* 到 I 的单增映射的集合, 按 $f \in A(J^*, I)$ 与 $g \in A(J^*, I)$ 与 $(\forall x)(x \in J^* \Rightarrow f(x) \leq g(x))$ 排序, 则 E 同构于 $A(J^*, I)$.

(3) E 为有限分配格, J 为其不可约元素集合. 令 $S(x) = \{y|y \in J \text{ 与 } y \leq x\}$. 令 $(y_i)_{i \in [1, k]}$ 为 $x \rightarrow [$ 的所有两两不相等的极小元组成的元素族. 对任意 $i \in [1, k]$, 令 q_i 为 $S(y_i) - S(x)$ 的一个元素, 求证: 对任意 $i \in [1, k]$ 、 $j \in [1, k]$ 且 $i \neq j$, q_i 和 q_j 是不可比较的.

(4) E 为有限分配格, J 为其不可约元素集合. 令 $S(x) = \{y|y \in J \text{ 与 } y \leq x\}$, a 为 E 的最小元, $P = J - \{a\}$. 令 $(q_i)_{i \in [1, k]}$ 为 P 的元素族, 且对任意 $i \in [1, k]$ 、 $j \in [1, k]$ 且 $i \neq j$, q_i 和 q_j 是不可比较的. 令 $u = \sup_{i \in [1, k]} q_i$, $v_j = \sup_{i \in [1, k] - \{j\}} q_i$ ($j \in [1, k]$), $x = \inf_{i \in [1, k]} v_i$, $y_j = \inf_{i \in [1, k] - \{j\}} v_i$, 求证: 对任意 $i \in [1, k]$, $v_i < u$, $x < y_i$, 并且, 区间 $x \rightarrow [$ 有 k 个两两不相等的极小元.

证明:

(1) 即补充定理199 (4).

(2) 根据补充定理199 (4) 可证.

(3) 如果 $q_i = q_j$, 则 $y_i = y_j$, 矛盾; 如果 $q_i < q_j$, 则 q_i 、 x 均为 $\{y_i, y_j\}$ 的下界, 故 $x < q_i$, 因此 $q_i < y_j$, 与 y_j 是最小元矛盾.

(4) 由于 $u = \sup(v_i, q_i)$, 因此 $v_i < u$. 如果 $y_i = v_i$, 则对任意 $j \in [1, k]$ 且 $i \neq j$, $v_i \leq v_j$, 则 $v_j \geq u$, 矛盾, 故 $x < y_i$. 令 $A_i = \{s | s > x \text{ 与 } s \leq y_i\}$, 如果 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ($i \neq j$), 设 $t \in A_i$, $t \in A_j$, 则 $t \leq x$, 矛盾, 故 $A_i \cap A_j = \emptyset$. 令 A_i 的其中一个极小元为 z_i , 故 z_1, z_2, \dots, z_k 为两两不相等的极小元.

习题 135.

(1) 令 $(C_i)_{i \in [1, n]}$ 为全序集有限族, E 为其乘积. A 为 E 的内部格, 求证: A 最多有 n 个两两不可比较的不可约元素.

(2) 令 F 为有限分配格, J 为其不可约元素集合. a 为 F 的最小元, $P = J - \{a\}$. 令 $A = \{a | (\exists X)((X \text{ 为 } P \text{ 的自由子集}) \text{ 与 } \text{Card}(X) = a)\}$, A 的最大元为 n , 求证: F 同构于全序集有限族的乘积的某个内部格.

证明:

(1) 若 A 有 r 个两两不可比较的不可约元素且 $r > n$, 设其组成元素族 $(a_i)_{i \in [1, r]}$. 令 $u = \sup_{i \in [1, r]} a_i$, $v_j = \sup_{i \in [1, r] - \{j\}} a_i$. 则对任意 $i \in [1, n]$, $\text{pr}_i(v_j)$ 之中最多有一个不等于 $\text{pr}_i(u)$, 因此, 存在 $j \in [1, r]$, 使 $v_j = u$, 故 $a_i \leq v_i$. 根据补充定理199 (1)、补充定理199 (2)、补充定理199 (3), A 为分配格. 但根据补充定理199 (4), 运用数学归纳法可得, $a_i \leq v_i$ 为假, 矛盾.

(2) 根据补充定理306, 存在的 P 的划分 Δ_G , 其中 G 的元素均为全序集并且元素数目为 n . 将最小元 a 加入 G 的每个元素, 得到全序集族 $(C_i)_{i \in [1, n]}$. 对任意 $x \in F$, 令 x_i 为 $\{b | b \in C_i \text{ 与 } b \leq x\}$ 在 C_i 上的最小上界, 根据定义可证, $x \rightarrow \{(i, c) | (i, c) \text{ 为有序对与 } (\exists i)(i \in [1, n] \text{ 与 } c = x_i)\}$ 为 F 到 $\prod_{i \in [1, n]} C_i$ 的某个内部格的同构. 同时, 令该映射为 f , 令 $f_i = \text{pr}_i f$, 当 $x \in F$, $y \in F$ 时, 令 $z = \sup(x, y)$, 则对任意 $i \in [1, n]$, $f_i(z) \geq \sup(f_i(x), f_i(y))$, 同时, $f_i(z) \leq \sup(x, y)$, 根据补充定理199 (4), $f_i(z) \leq x$ 或 $f_i(z) \leq y$, 故 $f_i(z) \leq \sup(f_i(x), f_i(y))$, 因此 $f_i(z) = \sup(f_i(x), f_i(y))$, 故 $f(z) = \sup(f(x), f(y))$, 同理可证最大下界的情况. 故该映射的值域为内部格. 得证.

习题 136.

(1) 求证: 当且仅当 E 的偏序图是 n 个在 E 上的全序图的交集时, E 同构于 n 个全序集的乘积的某个子集.

(2) E 为偏序集, 其偏序为 F , 求证: 当且仅当存在在 E 上的偏序 F' , 使 E 的任何两个不同元素 x, y , 仅在按其中一个偏序排序的 E 上是可比较的时, E 同构于两个全序集的乘积的子集.

(3) A 是元素数目为 n 的有限集合, $E = \{X | (\exists x)(x \in A \text{ 与 } X = \{x\})\} \cup \{X | (\exists x)(x \in A \text{ 与 } X = A - \{x\})\}$, 求证: E 同构于 n 个全序集的乘积的某个子集, 并且, 当 $m < n$ 时, E 不能同构于任意 m 个全序集的乘积的任意子集, .

(1) 充分性:

设 E 的偏序图为 G , $G = \bigcap_{i \in [1, n]} G_i$, 其中 G_i 均为在 E 上的全序图. 令 E_i 为按 $(x, y) \in G$ 排序的全序集, 则 E 同构于 $\prod_{i \in [1, n]} E_i$ 的一个子集. 根据定义可证.

必要性: 设 E 同构于 $\prod_{i \in [1, n]} F_i$ 的一个子集 A , $F = \prod_{i \in [1, n]} F_i$. 令 $(f_i)_{i \in [1, n]}$ 为 $[1, n]$ 的排列族, 其中 $f_i(1) = i$, G_i 为集族 $(F_{f_i(j)})_{j \in [1, n]}$ 的字典式乘积在 E 上导出的全序的全序图, 根据定义可证, E 的偏序图为 $\bigcap_{i \in [1, n]} G_i$.

(2) 根据习题136 (1) 可证.

(3) 设 E 的偏序图为 G , 根据习题136 (1), G 为某个全序图族 $(G_i)_{i \in [1, m]}$ 的并集, 且 $m < n$. 令 $F = \{X | (\exists x)(x \in A \text{ 与 } X = \{x\})\}$, 令全序图族 $G_i \cap F \times F$ 相应的最大元为 a_i , 故存在 $\{x\} \in F$, 使 $\{x\}$ 不是任何 $G_i \cap F \times F$ 的最大元, 则 $(\{x\}, A - \{x\}) \in G$, 矛盾.

另一方面, 令 $(a_i)_{i \in [1, m]}$ 为所有 A 的单个元素的集合组成的族, $b_i = A - a_i$, 全序图 G_1 按照 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_n, a_n, b_{n-1}, \dots, b_1$ 排序, G_2 按照 $a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, a_1, b_n, \dots, b_2$ 排序, 以此类推, 则全序图族 $(G_i)_{i \in [1, m]}$ 的并集为 G , 根据习题136 (1), 存在性得证.

习题 137.

令 $R \subset \mathcal{P}(A)$:

(1) 求证: A 关于 R 的纯子集集合有极大元, 并且, A 关于 R 的任何纯子集都是某个极大元的子集.

(2) 令 M 为 A 关于 R 的纯子集集合的某个极大元, 求证: 对任意 $x \in \mathbb{C}_A M$, 存在唯一的有限集合 $E_M(x)$, 满足 $E_M(x) \subset M$ 并且 $E_M(x) \cup \{x\} \in R$. 并且, 对任意 $y \in E_M(x)$, $E_M(x) \cup \{x\} - \{y\}$ 是 A 关于 R 的纯子集集合的某个极大元.

(3) M, N 均为 A 关于 R 的纯子集集合的极大元, 并且 $N \cap \mathbb{C}_A M$ 为有限集合, 求证: $\text{Card}(M) = \text{Card}(N)$.

(4) M, N 均为 A 关于 R 的纯子集集合的极大元, 令 $N' = N \cap \mathbb{C}_A M$, $M' = M \cap \mathbb{C}_A N$, 求证: $M' \subset E_M(x)$, 并且 $\text{Card}(M) = \text{Card}(N)$.

证明:

(1) 对于 A 关于 R 的任何纯子集 E , 令 $X = \{M | E \subset M \text{ 与 } M \text{ 为 } A \text{ 关于 } R \text{ 的纯子集}\}$, 根据定理82, X 有极大元, 得证.

(2) 前半部分根据定义可证. 根据定义可证, $E_M(x) \cup \{x\} - y$ 是纯子集. 设它不是极大元, 其是极大元 N 的子集, 则 $E_M(x) \cup \{x\} \in R$, $N \cup \{y\} \in R$, 矛盾.

(3) 根据习题137 (2), 对 $\text{Card}(N \cap \mathbb{C}_A M)$ 运用数学归纳法可证.

(4) 对任意 $x \in N'$, 存在 $y \in M'$ 且 $y \notin E_M(x)$, 如果存在 $z \in M'$ 且 $z \notin E_M(x)$, 则 $E_M(x) \cup \{x\} - \{y\}$ 是 A 关于 R 的纯子集集合的某个极大元, 故 $(E_M(x) \cup \{x\} - \{y\}) \cup \{z\}$ 有

一个子集是 R 的元素，矛盾，因此， $M' \subset E_M(x)$ ，且 M' 为有限集合，同理 N' 为有限集合，因此 $Card(M) = Card(N)$ 。

注：原书习题137（4）有误。

3.5 自然数的运算（Calcul sur les entiers）

定理 125. 有限个自然数的和、积均为自然数

令 $(a_i)_{i \in I}$ 为自然数有限族，则 $\sum_{i \in I} a_i$ 、 $\prod_{i \in I} a_i$ 均为自然数。

证明：

先证自然数 a 、 b 的和是自然数：

$b = 0$ ， $a + b = a$ ，命题显然成立，假设命题对 b 成立，即 $a + b$ 为自然数，则 $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ ，根据定理115，其为自然数，得证。

令 $n = Card(I)$ ，当 $n = 0$ ， $\sum_{i \in I} a_i = 0$ ，命题显然成立；设命题对 n 成立，则对于 $Card(I) = n + 1$ ，令 $I = J \cup \{k\}$ ，其中 $k \notin J$ ，则 $Card(J) = n$ ，故 $\sum_{i \in J} a_i$ 为自然数，而 $\sum_{i \in I} a_i = (\sum_{i \in J} a_i) + a_k$ ，因此也是自然数。

对于乘法，根据定理99及上述证明，自然数 a 、 b 的乘积为自然数。类似加法可证。

定理 126.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为有限集族，则 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 为有限集合。

证明：根据定理125， $(X_i)_{i \in I}$ 的和 S 为有限集合。根据补充定理116（1），存在 S 到 $\bigcup_{i \in I} X_i$ 的满射，得证。

定理 127.

令 $(X_i)_{i \in I}$ 为有限集族，则 $\prod_{i \in I} X_i$ 为有限集合。

证明：根据定理125可证。

定理 128. 自然数的自然数次幂为自然数

令 a 、 b 为自然数，则 a^b 为自然数。

证明：根据定理127、定理103可证。

定理 129.

有限集合的子集集合是有限集合。

证明：根据定理128、定理108可证。

定理 130.

a, b 为自然数, 则 $a < b \Leftrightarrow (\exists c)(c > 0 \text{ 与 } b = a + c)$.

证明: 由于 $a < b$, 故存在 c 使 $b = a + c$, 由于 $a \neq b$, 故 $c > 0$; 反过来, 如果 $b = a + c$, 由于 $c \geq 1$, 故 $a < b$.

定理 131.

令 $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}$ 为自然数有限族, $(\forall I)(i \in I \Rightarrow a_i \leq b_i)$, 且 $(\exists I)(i \in I \text{ 与 } a_i < b_i)$, 则 $\sum_{i \in I} a_i < \sum_{i \in I} b_i$; 如果 $(\forall I)(i \in I \Rightarrow b_i \neq 0)$, 则 $\prod_{i \in I} a_i < \prod_{i \in I} b_i$.

证明: 设 $a_j < b_j$, 则对 $I - \{j\}$, 根据定理110, $\sum_{i \in I - \{j\}} a_i \leq \sum_{i \in I - \{j\}} b_i$; 令 $b_j = a_j + c$, 则 $c > 0$, 故 $c + \sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$, 因此 $\sum_{i \in I} a_i < \sum_{i \in I} b_i$. 根据定理110, $\prod_{i \in I - \{j\}} a_i \leq \prod_{i \in I - \{j\}} b_i$, 因此 $\prod_{i \in I} a_i \leq c \cdot \prod_{i \in I - \{j\}} b_i + \prod_{i \in I} b_i$. 根据定理100, $c \cdot \prod_{i \in I - \{j\}} b_i > 0$, 得证.

定理 132.

a, a', b 为自然数, $b > 0, a < a'$, 则 $a^b < a'^b$.

证明: 根据定理103、定理131可证.

定理 133.

a, b, b' 为自然数, $b < b', a > 1$, 则 $a^b < a^{b'}$.

证明: 设 $b' = b + c$, 则 $c > 0$. $a^{b'} = a^b \cdot a^c$. 由于 $c > 0$, 故 $a^c \geq a$, 因此 $a^c > 1$, 故 $ab < ab'$.

定理 134.

a, b, b' 为自然数, 则 $a + b = a + b' \Leftrightarrow b = b'$, 如果 $a > 0$, 则 $ab = ab' \Leftrightarrow b = b'$.

证明: 若 $b < b'$, 根据定理131, $a + b < a + b'$, $ab < ab'$; 若 $b > b'$, 根据定理131, $a + b > a + b'$, $ab > ab'$; 若 $b = b'$, 则 $a + b = a + b'$, $ab = ab'$, 得证.

补充定理 310.

a, b, b' 为自然数, 则 $a + b < a + b' \Leftrightarrow b < b'$, 如果 $a > 0$, 则 $ab < ab' \Leftrightarrow b < b'$.

证明: 类似定理134可证.

补充定理 311.

a, b 是自然数, $b > 1$, 则 $a < b^a$.

证明: 根据补充定理310可证.

定理 135. 自然数的差的唯一性

a, b 为自然数, $a \leq b$, 则存在唯一的自然数 c , 使 $b = a + c$.

证明：根据定理109，存在性成立．若 $b = a + c$ 、 $b = a + c'$ ，根据定理134， $c = c'$ ，唯一性成立．

定义 161. 自然数的差 (*différence de entiers*)

a 、 b 、 c 为自然数， $b = a + c$ ，则称 c 为 b 和 a 的差，记作 $b - a$ ．

补充定理 312.

a 、 b 为自然数， $a \leq b$ ， c 为 b 和 a 的差，则 c 小于 a ，并且 a 是 b 和 c 的差．

证明：根据定理95 (1) 可证．

定理 136.

a 、 b 为自然数，则映射 $x \rightarrow x + a$ 为区间 $[0, b]$ 到区间 $[a, a + b]$ 的同构，且为严格单增映射， $y \rightarrow y - a$ 为其逆同构．

证明：令 $y = x + a$ ，则 $x = y - a$ ．根据补充定理310， $x \in [0, b] \Leftrightarrow y \in [a, a + b]$ ．因此， $x \rightarrow x + a$ 、 $y \rightarrow y - a$ 均为双射，且互为逆映射．同时， $x \rightarrow x + a$ 、 $y \rightarrow y - a$ 均为严格单增映射．根据定义得证．

定理 137.

a 、 b 为自然数， $a \leq b$ ，则区间 $[a, b]$ 的元素数目为 $b - a + 1$ ．

证明：如果 $a = 0$ ， $b = 0$ ，命题显然成立．如果命题对 $[0, b]$ 成立，则 $[0, b + 1] = [0, b] \cup \{b + 1\}$ ，显然命题对 $[0, b + 1]$ 成立．

如果 $a > 0$ ，则区间 $[a, b]$ 同构于 $[0, b - a]$ ，故命题也成立．

定理 138.

非空有限全序集的基数为 n ，则该集合同构于区间 $[1, n]$ ．

证明：根据定理84，该非空有限全序集同构于区间 $[1, n]$ 的某个区间，或者区间 $[1, n]$ 同构于该非空有限全序集的某个区间．由于同构集合等势，根据定理118，得证．

定义 162. 有限序列 (*suite finie*)，序列的长度 (*longueur d'une suite*)

如果族的指标集的是自然数有限集，则称该族为有限序列；指标集的基数，称为该序列的长度．

补充定理 313.

有限序列的长度为 n ，则区间 $[1, n]$ 同构于指标集．

证明：根据定理138可证．

定义 163. 第 k 项 (*k-ème terme*)，首项 (*premier terme*)

令 f 为区间 $[1, n]$ 到有限序列 $(t_i)_{i \in I}$ 的指标集 I 的同构，则 $t_{f(k)}$ 称为该有限序列的第 k 项， $t_{f(1)}$ 称为该有限序列的首项．

定义 164. 特征函数 (*fonction caractéristique*)

$A \subset E$, E 到 $\{0, 1\}$ 的映射 f 满足下列条件:

当 $x \in A$ 时, $f(x) = 1$; 当 $x \in E - A$ 时, $f(x) = 0$,

则称 f 为 E 的子集 A 的特征函数, 记作 ψ_A .

补充定理 314.

对于 E 的子集 A, B , $A = B \Leftrightarrow \psi_A = \psi_B$.

证明: 根据定义可证.

定理 139.

对于 E 的子集 A, B :

(1) $\psi_{E-A}(x) = 1 - \psi_A(x)$.

(2) $\psi_{A \cap B}(x) = \psi_A(x)\psi_B(x)$.

(3) $\psi_{A \cup B}(x) + \psi_{A \cap B}(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x)$.

证明: 根据定义可证.

定理 140. 自然数的商和余数的唯一性

a, b 为自然数, $b > 0$, 则存在唯一的一对 q, r , 使 q, r 均为自然数, $a = bq + r$, 并且 $r < b$.

证明: 由于 $ba \geq a$, 因此 $\{q | q \cdot b \leq a\} \subset [1, a]$, 故 $\{q | q \cdot b \leq a\}$ 为全序有限集, 令其最大元为 q , 则 $bq \leq a$, 令 $r = a - bq$, $r < b$, 存在性得证. 令 q, r 和 q', r' 都符合条件, 则 $bq + r = bq' + r'$, 如果 $q < q'$, 设 $q' = q + c$, $c > 0$, 则 $r = bc + r'$, 因此 $r > b$, 矛盾, 同理 $q' < q$ 也矛盾, 因此 $q = q'$, 故 $r = r'$, 唯一性得证.

定义 165. 自然数的商 (*quotient de entiers*), 自然数的余数 (*reste de entiers*), 整除 (*divisible*), 约数 (*diviseur*)

a, b 为自然数, $b > 0$, q, r 均为自然数, $a = bq + r$, 并且 $r < b$, 则 q 称为 a 除以 b 的商, 记作 $[a/b]$, r 称为 a 除以 b 的余数. 如果 $r = 0$, 则称 a 能被 b 整除, 或称 b 整除 a , 或称 b 是 a 的约数, 此时商记作 a/b .

补充定理 315.

a, b, c 均为自然数, $b > 0, c > 0$, 且 b 整除 a, c 整除 b , 则 c 整除 a , 且 $a/c = (a/b)(b/c)$.

证明: 根据定义可证.

补充定理 316.

a, b, c 均为自然数, $c > 0$, 且 c 整除 a, c 整除 b , 则 c 整除 $a + b$, 且 $(a + b)/c = a/c + b/c$; 如果 $a \geq b$, 则 c 整除 $a - b$, 且 $(a - b)/c = a/c - b/c$.

证明：根据定义可证。

补充定理 317.

(1) a 为自然数, $a > 0$, 则 a 整除 0.

(2) a 为自然数, 则 1 整除 a .

证明：根据定义可证。

补充定理 318.

a 、 b 、 c 为自然数, a 除以 c 的商为 q , 余数为 r , b 除以 c 的商为 q' , 余数为 r' , 则 $a < b \Leftrightarrow (q < q')$ 或 $((q = q') \text{ 与 } (r < r'))$.

证明：由于 $a = cq + r$, $b = cq' + r'$, 如果 $a < b$, 且 $q > q'$, 则 $cq \geq cq' + c$, 由于 $r' < c$, 故 $cq + r > cq' + r'$, 矛盾. 如果 $q = q'$, 则 $r < r'$. 反过来, 如果 $q < q'$, 则 $q + 1 \leq q'$, 又因为 $r < c$, 故 $cq + r < c(q + 1)$, 因此 $a < cq'$, 故 $a < b$.

定义 166. 偶数 (*pairs*)、奇数 (*impairs*)

a 为自然数, 如果 2 整除 a , 则称 a 为偶数, 否则, 称 a 为奇数.

补充定理 319.

a 为自然数, 则 a 为偶数 $\Leftrightarrow (\exists n)(n \text{ 为自然数与 } a = 2n)$, a 为奇数 $\Leftrightarrow (\exists n)(n \text{ 为自然数与 } a = 2n + 1)$.

证明：根据定义可证。

定理 141.

令 b 、 k 、 h 为自然数, $b > 1$ 、 $k > 0$, $(J_h)_{h \in [0, k-1]}$, 对任意 $h \in [0, k-1]$, $J_h \in [0, b-1]$, 令 E_k 为该族的字典式乘积, 令 r 为 $(r_h)_{h \in [0, k-1]}$, 则映射 $r \rightarrow \sum_{h \in [0, k-1]} r_h b^{k-h-1}$ 为 E_k 到 $[0, b^k - 1]$ 的同构.

证明：

当 $k = 1$ 时, 命题显然成立.

如果命题对 k 成立, 令 E_k 到 $[0, b^k - 1]$ 的映射为 f :

令 $(r_h)_{h \in [0, k]} \in E_{k+1}$, 则 $\sum_{h \in [0, k]} r_h b^{k-h} \leq r_0 b^k + b^k - 1$, 由于 $r_0 + 1 \leq b$, 故 $\sum_{h \in [0, k]} r_h b^{k-h} < b^{k+1} - 1$, 即 $r \rightarrow \sum_{h \in [0, k]} r_h b^{k-h}$ 为 E_{k+1} 到 $[0, b^{k+1} - 1]$ 的映射, 设该映射为 g .

对于 $r \in E_{k+1}$ ($r = (r_h)_{h \in [0, k]}$), $r' \in E_{k+1}$ ($r' = (r'_h)_{h \in [0, k]}$), 令 $s = (r_{i+1})_{i \in [0, k-1]}$, $s' = (r'_{i+1})_{i \in [0, k-1]}$, 则 $g(r) = r_0 b^k + f(s)$, $g(r') = r'_0 b^k + f(s')$:

如果 $g(r) = g(r')$, 由于 $f(s) < b^k$ 、 $f(s') < b^k$, 根据定理 140, $r = r'$, 故 g 为单射.

同时, 对任意 $x \in E_{k+1}$, 根据定理 140, 存在 $q < b$ 、 $t < b^k$, 使 $x = qb^k + t$, 令 $r_0 = q$, $s = f^{-1}(t)$, $r_i = s_{i-1}$ ($i \in [1, k]$), 则 $g(r) = x$, 故 g 为满射.

如果 $r < r'$, 则:

若 $r_0 < r'_0$, 则 $g(r) < r_0 b^k + b^k$, $g(r') \geq r'_0 b^k$, 又因为 $r_0 + 1 \leq r'_0$, 因此 $g(r) \leq g(r')$;

若 $r_0 = r'_0$, 则令 j 为 $\{i | i \in [1, k] \text{ 与 } r_i \neq r'_i\}$ 的最小元, 故 $r_j < r'_j$, 因此 $s < s'$, 根据归纳假设, $f(s) < f(s')$, 因此 $g(r) \leq g(r')$.

故 g 为单增函数.

综上, 根据补充定理166, 得证.

补充定理 320. 自然数展开的唯一性

令 a, b 为自然数, $b > 1, a > 0$, 则存在唯一的自然数 k 以及族 $(r_h)_{h \in [0, k-1]}$, 使 $(\forall h)(h \in [0, k-1] \Rightarrow r_h \in [0, k-1])$, $r_0 \neq 0$, 并且 $a = \sum_{h \in [0, k-1]} r_h b^{k-h-1}$.

证明: 根据补充定理311, $a < b^a$, 因此 $\{x | x \leq a \text{ 与 } a < b^x\}$ 有最小元 k , 因此 $b^{k-1} \leq a$, $a < b^k$. 根据定理141, 存在唯一的族, $(r_h)_{h \in [0, k-1]}$, 使 $(\forall h)(h \in [0, k-1] \Rightarrow r_h \in [0, k-1])$ 并且 $a = \sum_{h \in [0, k-1]} r_h b^{k-h-1}$. 此时, 如果 $r_0 = 0$, 则令 $s_i = r_{i+1}$ ($i \leq k-2$), 根据定理141, $\sum_{h \in [0, k-2]} s_h b^{k-h-2} \leq b^{k-1}$, 故 $a \leq b^{k-1} - 1$, 矛盾, 因此 $r_0 \neq 0$.

如果另有 k' 满足条件, 若 $k' < k$, 则 $a \leq b^{k'} - 1$, 故 $a \leq b^{k-1} - 1$, 矛盾; 若 $k < k'$, 则 $a \geq b^k$, 同样矛盾. 得证.

定义 167. 自然数的展开 (*développement d'un entier*)

令 a, b 为自然数, $b > 1, a > 0$, 如果自然数 k 以及族 $(r_h)_{h \in [0, k-1]}$, 使 $(\forall h)(h \in [0, k-1] \Rightarrow r_h \in [0, k-1])$, $r_0 \neq 0$, 并且 $a = \sum_{h \in [0, k-1]} r_h b^{k-h-1}$, 则称 $(r_h)_{h \in [0, k-1]}$ 为 a 基于 b 的展开.

注: 原书将 $\sum_{h \in [0, k-1]} r_h b^{k-h-1}$ 称为 a 基于 b 的展开, 但这一式子本身等于 a , 不应作为单独的概念, 故修改.

定理 142. 乘法原理

a, b 为基数, $\text{Card}(E) = a$, $\text{Card}(F) = b$, f 为 E 到 F 的满射, 对任意 $y \in F$, $\text{Card}(f^{-1}\langle y \rangle) = c$, 则 $a = bc$.

证明: 对任意 $y \neq y'$, $f^{-1}\langle y \rangle \cap f^{-1}\langle y' \rangle = \emptyset$, 因此 $(f^{-1}\langle y \rangle)_{y \in F}$ 是 E 的划分. 根据定理94(2)、定理99可证.

定义 168. 阶乘 (*factorielle*)

n 为自然数, 则 $\prod_{i \in [1, n]} i$ 称为 n 的阶乘, 记作 $n!$.

补充定理 321.

$0! = 1; 1! = 1$.

证明: 根据定义可证.

定理 143.

m 、 n 为自然数, $m \leq n$, A 的元素数目为 m , B 的元素数目为 n , A 到 B 的单射的数目为 $n!/(n-m)!$.

证明: $m = 0$, 则 $A = \emptyset$, 故仅有单射 $(\emptyset, \emptyset, B)$, 因此元素数目为 1, 故命题对 0 成立.

设命题对 m 成立, 考虑 $m+1$:

设 $a \in A$, 令 $A' = A - \{a\}$. F 为 A 到 B 的单射, F' 为 A' 到 B 的单射, g 为映射 $f \rightarrow f'|_A$, 由于 $f(a) \in B - f'(A')$, 其元素数目为 $n-m$, 故对任意 f' , $g^{-1}(f')$ 的元素数目为 $n-m$, 根据定理 142, F 的数目为 $(n!/(n-m)!) \cdot (n-m)$, 得证.

定理 144.

A 的排列的数目为 $n!$.

证明: 根据定理 143 可证.

补充定理 322.

E 为元素数目为 n 的集合, $(p_i)_{i \in [1, h]}$ 为自然数有限序列, $\sum_{i \in [1, h]} p_i = n$. 则存在两两不相交的集族 $(X_i)_{i \in [1, h]}$, 其为 E 的覆盖且满足 $(\forall i)(i \in [1, h] \Rightarrow \text{Card}(X_i) = p_i)$.

证明: 若 $h = 0$, 则 $n = 0$, $E = \emptyset$, \emptyset 显然满足条件.

设命题对 h 成立, 则对 $h+1$:

由于 E 存在元素数目为 $\sum_{i \in [1, h]} p_i$ 的子集 E' , 其存在满足条件的覆盖 $(X_i)_{i \in [1, h]}$. 因此 $E - E'$ 的元素数目为 p_{h+1} , 则 $(p_i)_{i \in [1, h]} \cup (h+1, E - E')$ 是满足条件的覆盖. 得证.

定理 145.

E 的元素数目为 n , $(p_i)_{i \in [1, h]}$ 为自然数有限序列, $\sum_{i \in [1, h]} p_i = n$. 满足 $(\forall i)(i \in [1, h] \Rightarrow \text{Card}(X_i) = p_i)$ 且两两不相交的 E 的覆盖 $(X_i)_{i \in [1, h]}$ 的数目为 $n! / \prod_{i \in [1, h]} (p_i!)$.

证明: 令 G 为 E 的排列集合, P 为满足条件的覆盖的集合. 根据补充定理 322, P 不是空集.

令 $(A_i)_{i \in [1, h]}$ 为符合条件的一个覆盖, 对 G 的任何一个元素 f , 则 $(f(A_i))_{i \in [1, h]}$ 也是 P 的元素. 令该覆盖为 $g(f)$.

则对任意 $(X_i)_{i \in [1, h]} \in P$, 如果 $g(f) = (X_i)_{i \in [1, h]}$, 则对任意 $i \in [1, h]$, $f(A_i) = X_i$. 根据定理 33, 集族 $(f_i)_{i \in I}$ (其中 $f_i = f|_{A_i}$) 与 f 一一对应, 令 T_i 表示 A_i 到 X_i 的双射的集合, 则其数目为 $p_i!$, 因此使 $g(f) = (X_i)_{i \in [1, h]}$ 的 f , 与 $\prod_{i \in [1, h]} T_i$ 的元素一一对应, 故其数目为 $\prod_{i \in [1, h]} (p_i!)$, 由于 G 的元素数目为 $n!$, 根据定理 142 得证.

定理 146.

A 的元素数目为 n , $p \leq n$, 则元素数目为 p 的 A 的元素的子集数目为 $n!/(p!(n-p)!)$.

证明：根据定理145可证.

定义 169. 组合数 (coefficient binomial)

n 、 p 为自然数，且 $p \leq n$ ，则 $n!/(p!(n-p)!)$ 称为 n 取 p 的组合数，记作 $\binom{n}{p}$.

补充定理 323.

n 、 p 为自然数，且 $p \leq n$ ，则 $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

证明：根据定义可证.

定理 147.

E 、 F 均为全序有限集，元素数目分别是 p 、 n ， $p \leq n$ ，则 E 到 F 的严格单增映射的数目为 $\binom{n}{p}$.

证明：全序有限集为良序集，根据定理84， E 到 F 的任何元素数目为 p 的子集的严格单增映射唯一，根据定理146可证.

定理 148.

$$\sum_{p \in [0, n]} \binom{n}{p} = 2^n.$$

证明：根据定理108可证.

补充定理 324.

n 为自然数，则 $\binom{n}{0} = 1$.

证明：根据定义可证.

补充定理 325.

n 为自然数且 $n > 0$ ，则 $\binom{n}{1} = n$.

证明：令 A 的元素数目为 n ， A 的元素数目为1的子集和 A 的元素一一对应，得证.

定理 149.

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

证明：

令 E 的元素数目为 $n+1$ ，其中一个元素为 a ，令 $E' = E - \{a\}$ ， F 为 E 的元素数目为 $p+1$ 的子集的集合， G 为 E' 的元素数目为 p 或 $p+1$ 的子集的集合.

对任意 $A \in F$ ， $A \cap E' \in G$ ，因此， $A \rightarrow A \cap E'$ 为 F 到 G 的映射，令其为 f ；且对任意 $B \in G$ ，如果 B 的元素数目为 p ，则 $f(B \cup \{a\}) = B$ ，如果 B 的元素数目为 $p+1$ ，则 $f(B) = B$. 令 $A \neq A'$ ，如果 $a \notin A$ 、 $a \notin A'$ ，则 $f(A) = A$ ， $f(A') = A'$ ， $f(A) \neq f(A')$ ；如果 $a \in A$ 、 $a \in A'$ ，则 $f(A) = A - \{a\}$ ， $f(A') = A' - \{a\}$ ， $f(A) \neq f(A')$ ；如果 $a \in A$ 、 $a \notin A'$ ，则 $f(A)$ 元素数目为 p ， $f(A')$ 元素数目为 $p+1$ ， $f(A) \neq f(A')$ ；如果 $a \in A'$ 、 $a \notin A$ ，同理 $f(A) \neq f(A')$.

综上， f 是 F 到 G 的双射. 得证.

补充定理 326.

n 为自然数且 $n > 1$, 则 $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

证明: $n = 2$ 时, 命题显然成立. 设命题对 n 成立, 根据定理149, $\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$, 得证.

补充定理 327.

n, m 为自然数, 则 $\sum_{i \in [0, m-1]} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m}{n+1}$.

证明: 根据定理149, 对 i 用数学归纳法可证.

补充定理 328.

(1) t, r, q 为自然数, 则 $\sum_{i \in [0, r]} \binom{t+r-i}{t} \binom{q+i}{q} = \binom{q+t+r+1}{r}$.

(2) p, q, n 为自然数, 且 $p \leq n, q < p$, 则 $\sum_{k \in [q+1, n-p+q+1]} \binom{n-k}{p-q-1} \binom{k-1}{q} = \binom{n}{p}$.

证明:

(1) 如果 $t = 0$, 对 i 使用数学归纳法可证命题成立. 如果 $r = 0$, 根据定义, 命题成立. 根据定理149, 对 $r + t$ 使用数学归纳法可证.

(2) 令 $t = p - q - 1, i = k - q - 1, r = n - p$, 根据补充定理328 (1)、补充定理323可证.

定理 150.

n 为自然数, 且 $n > 0$, 则满足 $i \in [1, n], j \in [1, n]$ 且 $i < j$ (或 $i \leq j$) 的有序对 (i, j) 的数目是 $n(n-1)/2$ (或 $n(n+1)/2$).

证明: 满足 $i \in [1, n], j \in [1, n]$ 且 $i < j$ 的有序对 (i, j) , 与 $[1, n]$ 的元素数目为2的子集一一对应, 故为 $n(n-1)/2$; 满足 $i \in [1, n], j \in [1, n]$ 且 $i \leq j$ 的有序对 (i, j) , 与 $[1, n]$ 的元素数目为2或1的子集一一对应, 故为 $n(n+1)/2$.

定理 151.

n 为自然数, 且 $n > 0$, 则 $\sum_{i \in [1, n]} i = n(n+1)/2$.

证明: 对于满足 $i \in [1, n], j \in [1, n]$ 且 $i \leq j$ 的有序对 (i, j) , 对任意 $j \in [1, n]$, 有序对 (i, j) 的数目为 j , 根据定理150得证.

定理 152.

n, h 为自然数, E 为元素数目为 h 的集合, E 到 $[0, n]$ 且满足 $\sum_{x \in E} u(x) \leq n$ (或 $\sum_{x \in E} u(x) = n$ 且 $h > 0$) 的映射 u 的数目是 $\binom{n+h}{n}$ (或 $\binom{n+h-1}{h-1}$).

证明:

设 g 为 $[1, h]$ 到 E 的双射.

对于 E 到 $[0, n]$ 且满足 $\sum_{x \in E} u(x) \leq n$ 的映射 u , 定义 f_u 如下: $f_u(1) = u(g(1)) + 1$, 当 $1 \leq i$ 与 $i \leq h-1$ 时, $f_u(i+1) = f_u(i) + 1 + u(g(i+1))$; 则 f_u 为 $[1, h]$ 到 $[1, n+h]$ 的严格单增映射. 根据定义可证 $u \rightarrow f_u$ 为双射, 故 u 的集合的元素数目为 $\binom{n+h}{n}$.

满足 $\sum_{x \in E} u(x) = n$ 的 u 的集合的元素数目为 $\binom{n+h}{n} - \binom{n+h-1}{n-1}$, 故等于 $\binom{n+h-1}{h-1}$.

补充定理 329. 二项式定理

a, b, n 为自然数:

$$(1) (a+b)^n = \sum_{i \in [0, n]} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

$$(2) \text{ 如果 } a \geq b, \text{ 则 } (a-b)^n = \sum_{i \in [0, n] \text{ 与 } i \text{ 为偶数}} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i - \sum_{i \in [0, n] \text{ 与 } i \text{ 为奇数}} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

$$(3) n \text{ 为自然数, 则: } \sum_{i \in [0, n] \text{ 与 } i \text{ 为偶数}} \binom{n}{i} = \sum_{i \in [0, n] \text{ 与 } i \text{ 为奇数}} \binom{n}{i}.$$

证明:

(1) 根据定理149, 对 n 用数学归纳法可证.

(2) 根据定理149, 对 n 用数学归纳法可证.

(3) 令 $a = 1, b = 1$, 根据补充定理329 (2) 可证.

补充定理 330.

$(a_i)_{i \in [0, n]}, (b_i)_{i \in [0, n]}$ 为自然数族, 则 $(\forall x)(x \text{ 为自然数} \Rightarrow \sum_{i \in [0, n]} a_i x^i = \sum_{i \in [0, n]} b_i x^i) \Leftrightarrow (\forall i)(i \in [0, n] \Rightarrow a_i = b_i)$.

证明: 根据公理模式7, 右边 \Rightarrow 左边: 令 $x = \sup(\sup(a_i)_{i \in I}, \sup(b_i)_{i \in I}) + 1$, 根据补充定理320, 左边 \Rightarrow 右边.

补充定理 331.

a, b, n, p 为自然数:

$$(1) \binom{n}{p} (a+b)^p = \sum_{i \in [0, p]} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} a^{p-i} b^i;$$

$$(2) \binom{n}{p} (a-b)^p = \sum_{i \in [0, p] \text{ 与 } i \text{ 为偶数}} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} a^{p-i} b^i - \sum_{i \in [0, p] \text{ 与 } i \text{ 为奇数}} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} a^{p-i} b^i.$$

$$(3) \sum_{i \in [0, p]} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = 2^p \binom{n}{p}.$$

$$(4) \sum_{i \in [0, p] \text{ 与 } i \text{ 为偶数}} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = \sum_{i \in [0, p] \text{ 与 } i \text{ 为奇数}} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i}.$$

证明:

$$(1) \text{ 根据补充定理329 (1), } (x+a+b)^n = \sum_{p \in [0, n]} \binom{n}{p} (a+b)^p x^{n-p};$$

$$\text{同时, } (x+a+b)^n = \sum_{i \in [0, n]} \binom{n}{i} (x+a)^{n-i} b^i,$$

即 $\sum_{i \in [0, n]} \binom{n}{i} b^i \left(\sum_{q \in [0, n-i]} \binom{n-i}{q} x^q a^{n-i-q} \right)$,
 即 $\sum_{(i, q) \in \{(x, y) | x \in [0, n] \text{ 与 } y \in [0, n-x]\}} \binom{n}{i} \binom{n-i}{q} x^q a^{n-i-q} b^i$,
 即 $\sum_{q \in [0, n]} \left(\sum_{i \in [0, n-q]} \binom{n}{i} \binom{n-i}{q} x^q a^{n-i-q} b^i \right)$,
 即 $\sum_{p \in [0, n]} \left(\sum_{i \in [0, p]} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} x^{n-p} a^{p-i} b^i \right)$.
 根据补充定理330, 得证.

(2) 考虑 $(x + a - b)^n$, 类似补充定理331 (1) 可证.

(3) 令 $a = 1, b = 1$, 根据补充定理331 (1) 可证.

(4) 令 $a = 1, b = 1$, 根据补充定理331 (2) 可证.

习题 138.

p, q, n 为自然数, 且 $p \leq n, q < p$, 求证: $\sum_{k \in [q+1, n-p+q+1]} \binom{n-k}{p-q-1} \binom{k-1}{q} = \binom{n}{p}$.

证明: 即补充定理328 (2).

习题 139.

n 为自然数, 求证: $(a - b)^n = \sum_{i \in [0, n] \text{ 与 } i \text{ 为偶数}} \binom{n}{i} = \sum_{i \in [0, n] \text{ 与 } i \text{ 为奇数}} \binom{n}{i}$.

证明: 即补充定理329 (3).

习题 140.

n, p 为自然数, 求证:

$$(1) \sum_{i \in [0, p]} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = 2^p \binom{n}{p};$$

$$(2) \sum_{i \in [0, p] \text{ 与 } i \text{ 为偶数}} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i} = \sum_{i \in [0, n] \text{ 与 } i \text{ 为奇数}} \binom{n}{i} \binom{n-i}{p-i}.$$

证明:

(1) 即补充定理331 (3).

(2) 即补充定理331 (4).

习题 141.

定义 $[1, h]$ 到 $[0, n]$ 且满足 $\sum_{x \in E} u(x) \leq n$ 的映射 u 的集合, 到 $[1, h]$ 到 $[1, n+h]$ 的严格单增映射的集合的双射, 从而证明定理152.

证明: 参见定理152的证明.

习题 142.

(1) E 为分配格, f 为 E 到具有运算法则 “+” 的可交换么半群 M 的映射, 并且对任意 $x \in E, y \in E, f(x) + f(y) = f(\sup(x, y)) + f(\inf(x, y))$, 求证: 对 E 的任意有限子集 I ,

$$f(\sup(I)) + \sum_{n \in \{k | k > 0 \text{ 与 } 2k \leq \text{Card}(I)\}} \left(\sum_{H \in \{K | K \subset I \text{ 与 } \text{Card}(K) = 2n\}} f(\inf(H)) \right) = \sum_{n \in \{k | 2k+1 \leq \text{Card}(I)\}} \left(\sum_{H \in \{K | K \subset I \text{ 与 } \text{Card}(K) = 2n+1\}} f(\inf(H)) \right).$$

(2) A 为集合, $(B_i)_{i \in I}$ 为 A 的有限子集族, $B = \bigcup_{i \in I} B_i$, 对任意 $H \subset I$, 令 $B_H = \bigcap_{i \in H} B_i$,

$$\text{求证: } \text{Card}(B) + \sum_{n \in \{k | k > 0 \text{ 与 } 2k \leq \text{Card}(I)\}} \left(\sum_{H \in \{K | K \subset I \text{ 与 } \text{Card}(K) = 2n\}} \text{Card}(B_H) \right) = \sum_{n \in \{k | 2k+1 \leq \text{Card}(I)\}} \left(\sum_{H \in \{K | K \subset I \text{ 与 } \text{Card}(K) = 2n+1\}} \text{Card}(B_H) \right).$$

证明:

(1) 对 $\text{Card}(I)$ 运用数学归纳法可证.

(2) 根据习题142 (1) 可证.

注: 习题142涉及尚未介绍的“可交换么半群”知识.

习题 143.

$$n, h \text{ 为自然数, 求证: } \sum_{i \in \{k | k \text{ 为偶数与 } k \in [0, n]\}} \binom{h}{i} \binom{n+h-i}{h} = \sum_{i \in \{k | k \text{ 为奇数与 } k \in [0, n]\}} \binom{h}{i} \binom{n+h-i}{h} + 1.$$

证明: 令 $B = \{u | u \text{ 为 } [1, h] \text{ 到 } [0, n] \text{ 的映射与 } \sum_{x \in [1, h]} u(x) \leq n\} - \{u | u \text{ 为 } [1, h] \text{ 到 } [0, n] \text{ 的映射与 } (\forall x)(x \in [1, h] \Rightarrow u(x) = 0)\}$, $B_i = \{u | u \in B \text{ 与 } u(i) \geq 1\} \ (i \in [1, h])$, 根据习题142 (2) 可证.

习题 144.

令 $S_{n,p}$ 为 $[1, n]$ 到 $[1, p]$ 的满射的数目:

$$(1) \text{ 求证: } \sum_{i \in \{k | k \text{ 为偶数与 } k \in [0, n]\}} \binom{p}{i} (p-i)^n = S_{n,p} + \sum_{i \in \{k | k \text{ 为奇数与 } k \in [0, n]\}} \binom{p}{i} (p-i)^n.$$

$$(2) \text{ 求证: } S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}).$$

$$(3) \text{ 求证: } S_{n+1} = n((n+1)!)/2, \quad S_{n+2} = n(3n+1)((n+2)!)/24.$$

(4) 令 $P_{n,p}$ 为满足下列条件的 G 的数目:

第一, Δ_G 为 $[1, n]$ 的划分;

第二, $\text{Card}(G) = p$.

求证: $S_{n,p} = p!P_{n,p}$.

证明:

(1) 由于 $p^n = \sum_{i \in [0, n]} S_{n,p-i} \binom{p}{i}$, 根据补充定理331 (2) 可证.

(2) 根据习题144 (1)、定理149可证.

(3) 考虑 $[1, n+1]$ 、 $[1, n+2]$ 的 n 个集合的划分, 根据定理142可证.

(4) 根据定理142可证.

习题 145.

E 的元素数目为 n , p_n 为 $\{u|u \text{ 为 } E \text{ 的排列与 } (\forall x)(x \in E \Rightarrow u(x) \neq x)\}$, 求证:

$\sum_{i \in \{k|k \text{ 为偶数与 } k \in [0, n]\}} \binom{n}{i}(n-i)! = p_n + \sum_{i \in \{k|k \text{ 为奇数与 } k \in [0, n]\}} \binom{n}{i}(n-i)!$, 并且, 当 n 趋向无穷大时, p_n 趋向 $n!/e$.

证明: 根据习题142(2)可证.

注: 习题145涉及尚未介绍的“实数”和“数列极限”知识.

习题 146.

(1) E 的元素数目为 qn , 求证: 满足下列条件的集合 G 的数目, 为 $(qn)!/(n!(q!)n)$:

第一, G 的元素数目为 n ;

第二, G 的任何元素的元素数目均为 p ;

第三, Δ_G 为 E 的划分.

(2) $E = [1, qn]$, 令 A 为满足下列条件的集合 G 的数目, 为 $(qn)!/(n!(q!)n)$:

第一, G 的元素数目为 n ;

第二, G 的任何元素的元素数目均为 p ;

第三, Δ_G 为 E 的划分;

第四, G 的任何元素都不是区间.

则 $\sum_{i \in \{k|k \text{ 为偶数与 } k \in [0, n]\}} (qn - i(q-1))!/(i!(n-i)!q^{n-i}) = A + \sum_{i \in \{k|k \text{ 为奇数与 } k \in [0, n]\}} (qn - i(q-1))!/(i!(n-i)!q^{n-i})$.

证明:

(1) 根据定理142可证.

(2) 根据习题142(2)可证.

习题 147.

令 $q_{n,k}$ 为 $[1, k]$ 到 $[1, n]$ 的满足下列条件的严格单增映射 u 的数目: 对任意奇数(或偶数) $x \in [1, k]$, $u(x)$ 为偶数(或奇数), 则 $q_{n,k} = C([(n+k)/2], k)$.

证明: 令 $u'(x) = u(x) + x$, 则 $u \rightarrow u'$ 为双射, 故所求映射数目等于 $[1, k]$ 到 $[1, n+k]$ 中的偶数组成的集合的映射数目, 得证.

习题 148.

E 为 n 个符号组成的集合, S 为将符号 f 添加到 E 得到的集合. 设 f 的权重为2, E 的元素的权重为0.

(1) M 为 $L_0(S)$ 中满足下列条件的有意义的单词的集合:

E 的各元素均出现且仅出现一次. 令 u_n 为 M 的元素数目, 求证: $u_{n+1} = (4n-2)u_n$, 并且当 $n \geq 2$ 时, $u_n = \sum_{i \in [2, n]} (4n-6)$.

(2) 令 x_i 为 E 的第 i 个符号, 求证: 如果给定 E 的符号顺序, 则 M 的单词数目 $v_n = \binom{2n-2}{n-1}/n$, 并且 $v_{n+1} = \sum_{i \in [1, n]} (v_i v_{n+1-i})$.

证明:

(1) 长度为 $2n-2$ 的字符串, 其中 $n-1$ 个符号为 f (权重为2)、 $n-1$ 个符号为 g (权重为0), 其数目为 $\binom{2n-2}{n-1}$; 而其中“不合法”即存在 $m < n-1$, 使前 m 个字符权重之和小于 m , 对任意不合法的字符串 S , 对其中满足条件的最小 m , 从 $m+1$ 个字符开始, 将 f 和 g 调换, 则得到长度 $2n-2$ 的字符串 S' , 其中 $n-2$ 个符号为 f , n 个符号为 g . $S \rightarrow S'$ 为双射, 故“合法”的字符串为 $\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} = \binom{2n-2}{n-1}/n$, 因此 $u_n = (2n-2)!/(n-1)!$, 因此 $u_{n+1} = (4n-2)u_n$, 用数学归纳法可证当 $n \geq 2$ 时, $u_n = \prod_{i \in [2, n]} (4i-6)$.

(2) 根据习题148 (1) 可证.

习题 149.

(1) p, q 为自然数且 $p \geq 1, q \geq 1, n = 2p + q$, E 的元素数目为 n , 令 $N = \binom{n}{p}$, $(X_i)_{i \in [1, n]}$ 为 E 的所有元素数目为 p 的子集按某种顺序排成的序列, $(Y_i)_{i \in [1, n]}$ 为 E 的所有元素数目为 $p+q$ 的子集按某种顺序排成的序列,

求证: 存在一个 $[1, N]$ 到 $[1, N]$ 的双射 f , 使对任意 $i \in [1, N]$, 均有 $X_{f(i)} \subset Y_i$.

(2) h, k 为自然数且 $p \geq 1, q \geq 1, n$ 为自然数且 $2h+k < n$, E 的元素数目为 n ,

$(X_i)_{i \in [1, r]}$ 为 E 的若干不同的各元素数目为 h 的子集按某种顺序排成的序列, 求证: 存在 E 的若干不同的各元素数目为 $h+k$ 的子集按某种顺序排成的序列 $(Y_i)_{i \in [1, r+1]}$, 并且, 对任意 $i \in [1, r+1]$, 均存在 $j \in [1, r]$, 使 $X_j \subset Y_i$, 对任意 $i \in [1, r]$, 均存在 $j \in [1, r+1]$, 使 $X_i \subset Y_j$.

证明:

(1) 根据补充定理308可证.

(2) 对 n 用数学归纳法, 分别考虑含有某个元素 a 的集合, 和不含某个元素 a 的集合, 根据习题149 (1) 可证.

习题 150.

m, q 为自然数, E 的元素数目为 $2m$, 且 $q < m$, F 是满足下列条件的 $\mathcal{P}(E)$ 的子集 G 的集合: 令 X, Y 为 G 的两个不同元素, 且 $X \subset Y$, 则 $\text{Card}(Y-X) \leq 2q$.

(1) 设 $\{k | (\exists M)(M \in F \text{ 与 } k = \text{Card}(M))\}$ 的最大元为 p , 并且, $p = \text{Card}(M), M \in F$, 求证: 对任意 $A \in M, \text{Card}(A) \geq m-q, \text{Card}(A) \leq m+q$.

(2) 对任意 $M \in F$, 求证: $\text{Card}(M) \leq \sum_{k \in [0, 2q]} \binom{2m}{m-q+k}$.

(3) 将 $2m$ 和 $2q$ 均替换为 $2m+1, 2q+1$, 试给出相应的结论.

证明:

(1) 设 $\{x | (\exists A)(A \in M \text{ 与 } x = \text{Card}(A))\}$ 的最小元是 $m-q-s$ ($s \geq 1$), 令 $X = \{A | A \in M \text{ 与 } \text{Card}(A) = m-q-s\}$, $\text{Card}(X) = r$, 根据习题149 (2), 存在 $r+1$ 个基数为 $m+q-s+1$ 个 E 的子集组成集合 Y , 使 X 的任何元素都是某个 Y 的元素的子集, 且 Y 的任何元素都包含 X 的某个元素. 则 $(M-X) \cup Y \in F$, 且 $\text{Card}((M-X) \cup Y) > \text{Card}(M)$, 矛盾.

(2) 根据习题150 (1) 可证.

(3) 类似习题150 (1)、150 (2) 可知, 相应的基数为 $\sum_{k \in [0, 2q+1]} \binom{2m+1}{m-q+k}$.

习题 151.

E 为有限集合, 元素数目为 n , $(a_i)_{i \in [1, n]}$ 为 E 的各元素按某种顺序排成的序列, $(A_i)_{i \in [1, m]}$ 为 E 的若干子集按某种顺序排成的序列,

(1) 令 $k_j = \text{Card}(\{i | i \in [1, m] \text{ 与 } a_j \in A_i\})$, $s_i = \text{Card}(A_i)$, 求证: $\sum_{j \in [1, n]} k_j = \sum_i \in [1, m] s_i$.

(2) 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$, 均存在唯一的 $i \in [1, n]$, 使 $x \in A_i$ 、 $y \in A_i$, 求证: 如果 $a_j \notin A_i$, 则 $s_i \leq k_j$.

(3) 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$, 均存在唯一的 $i \in [1, n]$, 使 $x \in A_i$ 、 $y \in A_i$, 求证: 存在 $i \in [1, n]$ 使 $A_i = E$, 或者 $m \geq n$.

(4) 对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$, 均存在唯一的 $i \in [1, n]$, 使 $x \in A_i$ 、 $y \in A_i$, 且 $m = n$, 求证: $(A_i)_{i \in [1, m]}$ 必然符合下列两种情况之一:

第一, $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, 以及 $A_i = \{a_i, a_n\} \Phi i \in [1, n-1] \Psi$; 第二, 每个子集都有 k 个元素, 每个元素都属于 k 个子集.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 根据定义可证.

(3) 设 k 是 $\{a | a = k_i \text{ 与 } i \in [1, n]\}$ 的最小元, 相应的元素为 a , 子集为 A_1, A_2, \dots, A_k , 令 $B_i = A_i - \{a\}$, 令 $b_i = \text{Card}(B_i)$, 设其中最大元为 b_k , 如果 $b_k \geq k$, 根据习题151 (2), 对任意 $a_i \notin A_k$, $1 + b_k \leq k_i$, 根据习题151 (2), $\sum_{i \in [1, m]} s_i \geq (1 + b_k) \sum_{i \in [1, k-1]} b_i + k(b_k + 1)$. 同时, $\sum_{i \in [1, m]} s_i \leq k + \sum_{i \in [1, k]} b_i + (m - k)k$. 令 $y = b_k$, $\sum_{i \in [1, k]} b_i = x$, 由于 $(y - k)(x - 1) + k(k - 2) \geq 0$, 故 $m \geq 1 + x + y$. 如果 $b_k < k$, 根据习题151 (2), $(1 + \sum_{i \in [1, k]} b_i)k \leq k + \sum_{i \in [1, k]} b_i + (m - k)k$, 由于 $\sum_{i \in [1, k]} b_i \leq k(k - 1)$, 故 $m \geq 1 + \sum_{i \in [1, k]} b_i$.

(4) 根据习题151 (3) 证明过程中等号成立的条件可证.

注: 原书习题151 (3) 有误.

习题 152.

E 为有限集合, X, Y 为 $\mathcal{P}(E)$ 的两个非空子集, a, b, c, d 是四个不等于0的自然数, 并且满足下列条件:

第一, 对任意 $A \in X, B \in Y$, $\text{Card}(A \cap B) \geq a$;

第二, 对任意 $A \in X$, $\text{Card}(A) \leq b$;

第三, 对任意 $B \in Y$, $\text{Card}(B) \leq c$;

第四, 对任意 $x \in E$, $X \cup Y$ 的元素中, 含有 x 的数目均为 d .

求证: $\text{Card}(E) \leq bc/a$, 并且, 当且仅当满足下列条件时, 等号成立:

第一, 对任意 $A \in X$ 、 $B \in Y$, $\text{Card}(A \cap B) = a$;

第二, 对任意 $A \in X$, $\text{Card}(A) = b$;

第三, 对任意 $B \in Y$, $\text{Card}(B) = c$;

第四, 存在 $r \leq d$, 使对任意 $x \in E$, X 的元素中, 含有 x 的元素数目均为 r .

证明: 令 $\text{Card}(X) = s$, $\text{Card}(Y) = t$, E 的元素为 a_1, a_2, \dots, a_n , r_i 为含有 a_i 的 X 的元素的数目, 则 $\sum_{i \in [1, n]} r_i \leq sb$, $\sum_{i \in [1, n]} (d - r_i) \leq tc$, $\sum_{i \in [1, n]} (r_i(d - r_i)) \geq ast$, 对 n 用数学归纳法, 可证 $n \sum_{i \in [1, n]} (r_i(d - r_i)) \leq (\sum_{i \in [1, n]} r_i)(\sum_{i \in [1, n]} (d - r_i))$, 故 $\text{Card}(E) \leq bc/a$. 其中等号成立的条件是所有 r_i 都相等、且对任意 $A \in X$ 、 $B \in Y$, $\text{Card}(A \cap B) = a$; 对任意 $A \in X$, $\text{Card}(A) = b$; 对任意 $B \in Y$, $\text{Card}(B) = c$.

习题 153.

E 为有限集合, 元素数目为 n , X 为 $\mathcal{P}(E)$ 的非空子集, a, b, c 是三个不等于 0 的自然数, 并且满足:

第一, 对 X 的任意不同的元素 A, B , $\text{Card}(A \cap B) = a$;

第二, 对任意 $A \in X$, $\text{Card}(A) \leq b$;

第三, 对任意 $x \in E$, X 的元素中, 含有 x 的元素数目均为 c .

求证: $n(a - 1) \leq b(b - 1)$.

证明: 令 $x \in E$, $Y = \{Q | (\exists A)(A \in X \text{ 与 } x \in A \text{ 与 } Q = A - \{x\})\}$, $Z = \{Q | Q \in X \text{ 与 } x \notin Q\}$, 根据习题 152, $a(n - 1) \leq b(b - 1)$, 又因为 $a \leq n$, 故 $n(a - 1) \leq b(b - 1)$.

习题 154.

i, h, k 是自然数, $i \geq 1, h \geq i, k \geq i$, 求证: 存在满足下列条件的自然数 $m_i(h, k)$:

对任意有限集合 E , 令 $F_i(E)$ 为 E 的元素数目为 i 的子集的集合, 如果 E 的元素数目不小于 $m_i(h, k)$, 且对满足 $X \subset F_i(E)$ 的任意集合 X , 令 $Y = F_i(E) - X$, 则 E 的任意 h 个元素的子集都包含一个 X 的元素, E 的任意 k 个元素的子集都包含一个 Y 的元素, 不可能同时出现.

证明: 根据定义, $m_1(h, k) = h + k - 1$, $m_i(i, k) = k$, $m_i(h, i) = h$.

下面证明 $m_i(h, k) = m_{i-1}(m_i(h - 1, k), m_i(h, k - 1)) + 1$.

如果元素数目为该数的 E 不满足条件, 即存在 $X \subset F_i(E)$ 、 $Y = F_i(E) - X$, 使 E 的任意 h 个元素的子集都包含一个 X 的元素, E 的任意 k 个元素的子集都包含一个 Y 的元素. 令 $a \in E$, $E' = E - \{a\}$, E' 的任意 $m_i(h - 1, k)$ 个元素的子集, 其任意 k 个元素的子集都包含一个 $Y \cup \mathcal{P}(E')$ 的元素, 故存在某个 $h - 1$ 个元素的子集 Z , 其所有 i 个元素的子集都是 $Y \cup \mathcal{P}(E')$ 的元素, 由于 $Z \cup \{a\}$ 包含一个 X 的元素 U , 故 $a \in U$, 令 $X' = \{G | G \subset E' \text{ 与 } G \cup \{a\} \in X\}$, 故 $U - \{a\} \in X'$, 即 E' 的任意 $m_i(h - 1, k)$ 个元素的子集, 包含一个 X' 的元素,

同理, 令 $Y' = \{G | G \subset E' \text{ 与 } G \cup \{a\} \in Y\}$, 则 E' 的任意 $m_i(h, k-1)$ 个元素的子集, 包含一个 Y' 的元素.

此外, $X' \subset F_{i-1}(E')$, $Y' = F_{i-1}(E') - X'$, 矛盾.

习题 155.

(1) E 为有限偏序集, 元素数目为 p , m 、 n 为自然数且 $mn < p$, 求证: E 有 m 元全序子集, 或者有 n 元自由子集.

(2) 令 h 、 k 为不等于 0 的自然数, 令 $r(h, k) = (h-1)(k-1)$, I 为有限集, 其元素均为自然数, 且元素数目不小于 $r(h, k)$, E 为全序集, $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的元素的有限序列, 求证: 存在 I 的元素数目为 h 的子集 H 使 $(x_i)_{i \in H}$ 为单增序列, 或者存在 I 的元素数目为 k 的子集 K 使 $(x_i)_{i \in K}$ 为单减序列.

证明:

(1) 根据补充定理 306 可证.

(2) 根据补充定理 306 可证.

注: 根据序列的定义, 习题 151 (2) 的条件中, 集合 I 的性质做了修改.

3.6 无穷集合 (Ensembles infinis)

定义 170. 无穷集合 (*ensemble infini*)

如果一个集合不是有限集合, 则称其为无穷集合.

定义 171. 无穷基数 (*cardinal infini*)

无穷集合的基数称为无穷基数.

补充定理 332. 无穷公理和自然数集合的存在性等价

(x 为自然数) 是 x 上的集合化公式 $\Leftrightarrow (\exists X)(X \text{ 为无穷集合})$.

证明:

若存在无穷集合, 令 a 为无穷集合的基数, 根据定理 116, 对任意自然数 n , $a > n$. 根据补充定理 293, 存在集合 $\{x | x \text{ 为基数与 } x < a\}$, 则任意自然数 n 均属于该集合, 根据证明规则 52 可证.

反过来, 如果 (x 为自然数) 是 x 上的集合化公式, 令该集合为 E , 对任意自然数 n , $\text{Card}([0, n]) = n + 1$, 因此 $\text{Card}(E) \neq n$, 故 E 为无穷集合.

显式公理 4. 无穷公理

$(\exists X)(X \text{ 为无穷集合})$.

元数学定义 65. 集合论 (*théorie des ensembles*)

包含 2 元特别符号 \in 、显式公理 1、显式公理 2、显式公理 3、显式公理 3、显式公理 4 和公理模式 8 的等式理论, 称为集合论.

定理 153. 存在自然数集合

(x 为自然数)是 x 上的集合化公式.

证明: 根据显式公理4、补充定理332可证.

定义 172. 自然数集合 (*ensemble des entiers*)

$\{n|n$ 为自然数 $\}$ 称为自然数集合, 记作 N .

补充定理 333.

(1) N 为良序集.

(2) a 为有限基数, E 为无穷集合, 则 $a < Card(E)$.

证明:

(1) 根据定理89可证.

(2) 根据定理116可证.

定义 173. 序列 (*suite*), 元素序列 (*suite d'éléments*), 无穷序列 (*suite infinie*)

指标集是 N 的子集的族 (或 E 的元素族), 称为序列 (或元素序列); 序列 $(x_n)_{n \in N}$ 与 R 也可以记作 $(x_n)_R$; 在没有歧义的情况下, $(x_n)_{n \geq 0}$ 和 $(x_n)_{n \geq 1}$ 均可简记为 (x_n) . 指标集是 N 的无穷子集的序列, 称为无穷序列.

定义 174. 单增序列 (*suite croissante*), 单减序列 (*suite décroissante*), 单调序列 (*suite monotone*), 严格单增序列 (*suite strictement croissante*), 严格单减序列 (*suite strictement décroissante*), 严格单调序列 (*suite strictement monotone*)

如果序列相应的映射为单增映射 (或单减映射、单调映射、严格单增映射、严格单减映射、严格单调映射), 则称该序列为单增序列 (或单减序列、单调序列、严格单增序列、严格单减序列、严格单调序列).

定义 175. 仅顺序不同的序列 (*suite qui ne diffèrent que par l'ordre des termes*)

如果 $(x_n)_{n \in I}$ 和 $(y_n)_{n \in I}$ 的指标集相同, 且存在 I 的排列 f , 使 $(\forall n)(n \in I \Rightarrow x_{f(n)} = y_n)$, 则称 $(x_n)_{n \in I}$ 和 $(y_n)_{n \in I}$ 为仅顺序不同的序列.

证明规则 62.

集合论中, u 为字母, T 为项, 则存在唯一的项 U 和 N 到 U 的满射 f , 使对任意自然数 n , 令 $f(n)$ 为 $[0, n[$ 到 $f \langle [0, n] \rangle$ 的满射, 并在 $[0, n[$ 上和 f 重合, 使 $(f(n)|u)T = f(n)$.

证明: 根据证明规则60可证.

证明规则 63.

集合论中, S 和 a 为项, 则存在唯一的项 V 和 N 到 V 的满射 f , 使 $f(0) = a$, 并且对任意 $n \geq 1$, $f(n) = (f(n-1)|n)S$.

证明：令 T 为 $\tau_y((u = (\emptyset, \emptyset, \emptyset) \text{ 与 } (y = a)) \text{ 或 } (u \neq (\emptyset, \emptyset, \emptyset) \text{ 与 } y = (u(M(u)|v)S)))$ ，其中 $M(u) = (u \text{ 的定义域的最小上界})$ ，由于 $f(0) = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ ，所以 $(u|f(0))T = a$ ； $n > 0$ 时， $(u|f(n))T = (f(n-1)|n)S$ ，根据证明规则62，得证。

定理 154.

任何无穷集合 E ，均存在和 N 等势的子集。

证明：根据定理78，在 E 上存在良序，令 E 为按该良序排序的良序集。假设 E 不包含和 N 等势的子集，则 E 和 N 的片段等势，故 E 为有限集合，矛盾。

定理 155.

$$\text{Card}(N \times N) = \text{Card}(N).$$

证明：考虑映射 $(m, n) \rightarrow (m+n)(m+n)+m$ ，如果 $(m'+n')(m'+n')+m' = (m+n)(m+n)+m$ ，假设 $m'+n' > m+n$ ，则 $(m'+n')(m'+n') \geq (m+n+1)(m+n+1)$ ，故 $(m'+n')(m'+n') > (m+n)(m+n)+m$ ，矛盾；同理 $m'+n' < m+n$ 也矛盾，故 $m'+n' = m+n$ ，因此 $m = m'$ ， $n = n'$ ，故该映射为 $N \times N$ 到 N 的单射。故 $\text{Card}(N \times N) \leq \text{Card}(N)$ 。考虑映射 $n \rightarrow (n, 0)$ ，其为 N 到 $N \times N$ 的单射。故 $\text{Card}(N) \leq \text{Card}(N \times N)$ 。得证。

定理 156.

a 为无穷基数，则 $a^2 = a$ 。

证明：

令 $\text{card}(E) = a$ ， D 为 E 的子集且 D 和 N 等势。根据定理155， $\text{Card}(D \times D) = \text{Card}(D)$ 。

令 f_0 为 D 到 $D \times D$ 的双射，令 $M = \{z | z \text{ 为有序对与 } pr_1 z \subset E \text{ 与 } D \subset pr_1 z \text{ 与 } (pr_2 z \text{ 为 } pr_1 z \text{ 到 } pr_1 z \times pr_1 z \text{ 的双射}) \text{ 与 } (pr_2 z \text{ 为 } f_0 \text{ 在 } pr_1 z \text{ 上的延拓})\}$ ， R 为 $z \in M$ 与 $z' \in M$ 与 $(pr_1 z \subset pr_1 z')$ 与 $(pr_2 z' \text{ 为 } pr_2 z \text{ 在 } pr_1 z' \text{ 上的延拓})$ ，则 R 为偏序关系。

因此，根据补充定理226 (2)， M 是归纳集，因此令 M 的极大元是 (F, f) 。

令 $b = \text{Card}(F)$ ，则 $b = b^2$ ，由于 b 为无穷基数，因此 $b \leq 2b$ ， $2b \leq 3b$ ， $3b \leq b^2$ ，故 $b = 2b$ ， $2b = 3b$ 。

假设 $b < a$ ，若 $\text{Card}(E-F) \leq b$ ，则 $\text{Card}(E) \leq 2b$ ，即 $\text{Card}(E) \leq b$ ，矛盾，故 $\text{Card}(E-F) > b$ 。

因此存在 $Y \subset E-F$ ，且 Y 和 F 等势，令 $Z = F \cup Y$ ，则 $Z \times Z = (Y \times Y) \cup (F \times Y) \cup (Y \times F) \cup (F \times F)$ ，由于 $\text{Card}(Y \times Y) = b$ ， $\text{Card}(Y \times F) = b$ ， $\text{Card}(F \times Y) = b$ ，故 $\text{Card}(Z \times Z - F \times F) = b$ ，因此存在 Y 到 $Z \times Z - F \times F$ 的双射，故存在 Z 到 $Z \times Z$ 的双射，其为 f 的延拓，与 (F, f) 是极大元矛盾。

因此 $b = a$ ，故 $a^2 = a$ 。

定理 157.

a 为无穷基数， n 为自然数且 $n > 0$ ，则 $a^n = a$ 。

证明：根据定理156，用数学归纳法可证.

定理 158.

如果基数有限族 $(a_i)_{i \in I}$ 满足 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i \neq 0)$ ， $\bigcup_{i \in I} \{a_i\}$ 的最大元 a 为无穷基数，则该基数族的积等于 a .

证明：设其积为 b ， I 的元素数目为 n ，由于 $b \leq a^n$ ，则 $b \leq a$ ，同时，由于 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i \geq 1)$ ，因此 $b \geq a$ ，故 $b = a$.

定理 159.

a 为无穷基数，基数族 $(a_i)_{i \in I}$ 满足 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i \leq a)$ ，并且 $Card(I) \leq a$ ，则 $\sum_{i \in I} a_i \leq a$ ，如果 $(\exists i)(i \in I \text{ 与 } a_i = a)$ ，则 $\sum_{i \in I} a_i = a$.

证明： $\sum_{i \in I} a_i \leq Card(I) \cdot a$ ，因此 $\sum_{i \in I} a_i \leq a^2$ ，故 $\sum_{i \in I} a_i \leq a$. 如果存在 $i \in I$ 使 $a_i = a$ ，因为 $a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$ ，故 $\sum_{i \in I} a_i = a$.

定理 160.

a 、 b 均不为 0 ，且其中至少有一个为无穷基数，则 $a + b = \sup(a, b)$ ， $ab = \sup(a, b)$.

证明：根据定理158、159可证.

补充定理 334.

a 、 b 、 c 、 d 均为基数，如果 $a < c$ ， $b < d$ ，则 $a + b < c + d$ ， $ab < cd$.

证明：如果 c 、 d 均为有限集合，根据定理131可证. 如果 c 、 d 至少有一个为无穷集合，则 $c + d = \sup(c, d)$ ， $cd = \sup(c, d)$. 如果 a 、 b 均为有限集合，则 $a + b$ 、 ab 为有限集合，命题成立；如果 a 、 b 至少有一个是无穷集合，则 $a + b = \sup(a, b)$ ， $ab = \sup(a, b)$ ，命题同样成立.

补充定理 335.

E 为无穷集合，则：

(1) $Card(E)Card(N) = Card(E)$ ， $Card(E) + Card(N) = Card(E)$ ；

(2) n 为自然数， $nCard(E) = Card(E)$ ， $n + Card(E) = Card(E)$.

证明：根据定理160可证.

补充定理 336.

a 为基数， b 、 c 为无穷基数：

(1) $(2^b)^b = 2^b$.

(2) 如果 $a \leq 2^b$ 且 $a \geq 2$ ，则 $a^b = 2^b$.

(3) 如果 $a < b$ 且 $b < a^c$ ，则 $b^c = a^c$.

(4) $b^b = 2^b$.

证明:

- (1) 根据定理156、定理106可证.
- (2) 根据定理112、补充定理336 (1) 可证.
- (3) 根据定理112, $b^c \geq a^c$, $b^c \leq a^{cc}$, 根据定理156, $b^c \leq a^c$, 得证.
- (4) 根据补充定理336 (2) 可证.

定义 176. 可数集合 (*ensemble dénombrable*), 不可数集合 (*ensemble non dénombrable*)

如果 A 和 N 的某个子集等势, 则称 A 为可数集合, 否则, 称 A 为不可数集合.

定理 161.

- (1) 可数集合的子集是可数集合.
- (2) 有限个可数集的集族的积是可数集合.
- (3) 各项均为可数集的序列的并集是可数集合.

证明: 根据定理158、定理159可证.

定理 162.

可数无穷集合和 N 等势.

证明: 根据定理154可证.

定理 163.

E 为无穷集合, 可数无穷集族 $(X_i)_{i \in I}$ 是 E 的划分, 则 E 和 I 等势.

证明: $Card(E) = Card(N)Card(I)$, 根据定理160可证.

定理 164.

f 为 E 到 F 的满射, F 为无穷集合, 如果对任意 $y \in F$, $f^{-1}\langle y \rangle$ 均为可数集合, 则 F 和 E 等势.

证明: 根据补充定理115, $(f^{-1}\langle y \rangle)_{y \in F}$ 是 E 的划分, 则 $Card(E) \leq Card(F)Card(N)$, 根据补充定理335, $Card(E) \leq Card(F)$, 又因为 f 为 E 到 F 的满射, 因此 $Card(E) \geq Card(F)$, 得证.

定理 165.

无穷集合 E 的有限子集集合 F , 和 E 等势.

证明: 令 F_n 为 E 的元素数目为 n 的子集的集合, 对任意 $X \in F_n$, 均存在 $[1, n]$ 到 X 的双射, 则 F_n 的基数小于等于区间 $[1, n]$ 到 E 的映射数目, 即 $(Card(E))^n$, 等于 $Card(E)$. 因此 $Card(F) \leq Card(E)Card(N)$, 等于 $Card(E)$;

另一方面, $x \rightarrow \{x\}$ 是 E 到 F 的映射, 故 $Card(E) \leq Card(F)$, 得证.

定理 166.

无穷集合 E 的元素的有限序列集合 S , 和 E 等势.

证明: 令 F 为 N 的有限子集集合. S 即所有 E^I 的并集, 其中 $I \subset N$. 由于 $I \subset N$ 的子集, 故 $Card(E^I) = Card(E)$, 根据定理165, $Card(F) = Card(N)$, 因此 $Card(S) \leq Card(E)$.

同时, E 的每个元素可以单独组成有限序列, 故 $Card(E) \leq Card(S)$, 得证.

定义 177. 连续统 (*puissance du continu*)

如果 E 和 $\{X | X \subset N\}$ 等势, 则称 E 为连续统.

定理 167.

连续统是不可数集合.

证明: 根据定理113可证.

定义 178. 稳定序列 (*suite stationnaire*)

E 的元素序列 $(x_n)_{n \in N}$, 如果存在自然数 m , 对任意 $n \geq m$, $x_m = x_n$, 则称其为稳定序列.

定理 168.

E 为偏序集, 则下列两个公式等价:

第一, E 的一切非空子集都有极大元;

第二, E 的一切单增元素序列 $(x_n)_{n \in N}$ 都是稳定序列.

证明: 如果第一个公式为真, 设 (x_n) 各项组成的集合为 X , 则 X 有极大元, 设为 x_m , 则当 $n \geq m$ 时, $x_m = x_n$, 故其为稳定序列.

如果第二个公式为真, 假设 E 的非空子集 A 没有极大元, 对任意 $x \in A$, 令 $T_x = \{y | y > x \text{ 与 } y \in A\}$, 故 $T_x \neq \emptyset$. 根据定理41, 存在 A 到 A 的映射 f , 使 $f(x) > x$. 设 $a \in A$, 则递归定义 $x_0 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$, 该序列是单增序列且不是稳定序列.

定理 169.

E 为全序集, 当且仅当 E 的一切单减元素序列 $(x_n)_{n \in N}$ 都是稳定序列时, E 为良序集.

证明: 类似定理168可证.

定理 170.

偏序有限集的一切序列 $(x_n)_{n \in N}$ 都是稳定序列.

证明: 根据定理123, 偏序有限集有极大元, 根据定理168可证.

补充定理 337.

(1) E 为集合, 如果 $Card(E) > 1$, 则存在 E 的排列, 该排列没有不动点.

(2) E 为无穷集合, 则 E 的排列的集合, 和 $\mathcal{P}(E)$ 等势.

(3) E 、 F 均为无穷集合, $Card(E) = Card(F)$, 则 E 到 F 的满射的集合, 和 $\mathcal{P}(E)$ 等势.

(4) F 为无穷集合, $Card(E) < Card(F)$, 则 $Card(\{X | X \subset F \text{ 与 } Card(X) = E\}) = Card(F^E)$;

(5) F 为无穷集合, $Card(E) < Card(F)$, 则 $Card(\{f | f \text{ 为 } E \text{ 到 } F \text{ 的单射}\}) = Card(F^E)$;

(6) E 为无穷集合, m 为自然数, 则 $Card(\{X | X \subset F \text{ 与 } Card(X) = m\}) = Card(E)$;

(7) E 为无穷集合, 则 $Card(\{X | X \subset F \text{ 与 } Card(X) \text{ 为自然数}\}) = Card(E)$;

(8) F 为无穷集合, $Card(E) < Card(F)$, 则 $Card(\{X | X \subset F \text{ 与 } Card(X) \leq E\}) = Card(F^E)$.

证明:

(1) 对于有限集合, 对其基数运用数学归纳法可证.

对于无穷集合, 令 $F = E \times \{0, 1\}$, 则 $Card(F) = Card(E)$, 则存在 E 到 F 的双射 f .

令 g 为:

如果 $pr_2 x = 0$, 则 $g(x) = (pr_1 x, 1)$;

如果 $pr_2 x = 1$, 则 $g(x) = (pr_1 x, 0)$.

则 g 为 F 到 F 的双射, 故排列 $f^{-1} \circ g \circ f$ 没有不动点, 得证.

(2) 令 E 的排列的集合为 F , 对任意 $f \in F$, 均有 $f \subset E \times E$, 所以 $Card(F) \leq Card(\mathcal{P}(E))$.

同时, 对 E 的任意子集 A , 如果 $Card(E - A) > 1$, 或者 $E = A$, 根据补充定理 337 (1), 存在以 A 为不动点的 E 的排列, 故 $Card(F) + Card(E) \geq Card(\mathcal{P}(E))$, 因此 $Card(F) \geq Card(\mathcal{P}(E))$, 得证.

(3) 该集合的元素, 为 $E \times F$ 的子集, 故其势均小于等于 $\mathcal{P}(F)$.

令 $a \in F$, 对任意 $A \subset E$ 且 $Card(A) = Card(E)$, 设 A 到 $F - \{a\}$ 的双射为 f , 当 $x \in A$, $g(x) = f(x)$, 当 $x \in E - A$ 时, $g(x) = a$, 则 g 是 E 到 F 的满射, 根据补充定理 337 (2), 以上映射的集合, 势为 $\mathcal{P}(F)$.

(4) 对任意 X , 如果 $X \subset F$ 与 $Card(X) = E$, 则存在 E 到 X 的双射 f , 则 f 在 F 上的延拓, 是 F^E 的元素, 故 $Card(\{X | X \subset F \text{ 与 } Card(X) = E\}) \leq Card(F^E)$. 反过来, 任意 E 到 F 的映射, 对应 $x \rightarrow (x, f(x))$, 其函数图是 $E \times E \times F$ 的子集且势为 $Card(E)$, 根据定理 160, $Card(E \times E \times F) = Card(F)$, 故 $Card(\{X | X \subset F \text{ 与 } Card(X) = E\}) \geq Card(F^E)$, 得证.

(5) 根据定义, $Card(\{f | f \text{ 为 } E \text{ 到 } F \text{ 的单射}\}) \leq Card(F^E)$. 反过来, 对任意 E 到 F 的映射, 对应 $x \rightarrow (x, f(x))$, 是 E 到 $E \times F$ 的单射. 得证.

(6) 令 $Card(\{X|X \subset F \text{ 与 } Card(X) = m\}) = A$, 根据定理165, $A \leq E$, 同时, 令 B 为 E 的子集, 且 $Card(B) = m - 1$, 则 $Card(E - B) = Card(E)$. 且对任意 $x \in E - B$, $Card(B \cup \{x\}) = m$, 故 $A \geq E$, 得证.

(7) 根据补充定理337 (6), $Card(\{X|X \subset F \text{ 与 } Card(X) \text{ 为自然数}\}) = Card(E)$
 $Card(N)$, 得证.

(8) 根据补充定理337 (4), $Card(\{X|X \subset F \text{ 与 } Card(X) \leq E\}) \leq Card(F^E)Card(E)$, 得证.

补充定理 338.

- (1) 在有限集合上的任何两个良序均同构.
- (2) 在无穷集合 E 上的良序的序数的集合, 没有最大元.
- (3) 在无穷集合 E 上的良序的序数的集合的最小上界, 不是 E 上的良序.
- (4) a 为在无穷集合 E 上的良序, 则 $Ord(N) \leq Ord(a)$.

证明:

(1) 对元素数目运用数学归纳法可证.

(2) 设 a 为该集合最大元, 根据补充定理301 (3), $Card(a + 1) = Card(a) + 1$.

根据补充定理301 (1), $Card(a) = Card(E)$, 又因为 E 为无穷集合, 根据定理160, $Card(a + 1) = Card(E)$, 故存在 E 上的良序, 其序数为 $a + 1$, 而 $a + 1 > a$, 矛盾.

(3) 根据补充定理338 (2) 可证.

(4) 如果 $Ord(a) < Ord(n)$, 则 E 同构于 N 的一个片段, 故 E 为有限集合, 矛盾.

定义 179. 有限序数 (*ordinal fini*), 无穷序数 (*ordinal infini*), 可数序数 (*ordinal dénombrable*), 极限序数 (*ordinal limite*)

如果序数是在有限集合上的良序, 称其为有限序数.

如果序数是在无穷集合上的良序, 称其为无穷序数.

如果序数是可数集合上的良序, 称其为可数序数.

如果序数不是零也没有前导, 称其为极限序数.

补充定理 339.

(1) 有限序数小于无穷序数.

(2) a 为有限序数, b 为没有前导的序数, 则对任意序数 $c < b$, $c + a < b$.

(3) 有限个有限序数的和、有限个有限序数的积, 均为有限序数.

(4) a 、 b 为有限序数, 则 a^b 为有限序数, 并且, 令 $A = Card(a)$, $B = Card(b)$, 则 $A^B = Card(a^b)$.

(5) a 为有限序数, 且 $a > 0$, 则 a 有前导.

证明:

- (1) 根据补充定理333 (2) 可证.
- (2) 对 a 用数学归纳法可证.
- (3) 根据定理125、补充定理301 (3) 可证.
- (4) 根据定理103, 对 b 用数学归纳法可证.
- (5) 根据定理135、补充定理301 (3) 可证.

补充定理 340.

a 为基数, 则“ x 为序数与 $Card(x) < a$ ”为 x 上的集合化公式.

证明: 令 p 为在 a 上的良序, 如果 $p \leq x$, 则 $Card(p) \leq Card(x)$, 故 $a \leq Card(x)$. 因此, x 为序数与 $Card(x) < a \Rightarrow x < p$, 根据补充定理252 (1) 可证.

补充定理 341.

令序数 $a > 0$, $O'(a)$ 为良序集 $\{x | x \text{为序数与} x \leq a\}$, 并按下列方式定义定义域为 $O'(a)$ 的函数 f_a :

$$f_a(0) = Ord(N),$$

对 $x > 0$ 且 $x \leq a$, 令 $f_a(x)$ 为 $\{y | y \text{为序数与} (\exists z)(z \text{为序数与} z < x \text{与} Card(y) \leq Card(f_a(z)))\}$ 的最小上界.

则:

- (1) 令 $x \leq a$ 、 $y \leq a$, 如果 $x < y$, 则 $Card(f_a(x)) < Card(f_a(y))$;
- (2) 如果 $x \leq a$ 、 $a \leq b$, 则 $f_a(x) = f_b(x)$.

证明:

- (1) 根据补充定理338 (3) 可证.

(2) 如果 $x \leq a$ 、 $a \leq b$, $Card(f_a(x)) \neq Card(f_b(x))$, 令 $\{y | y \leq a \text{与} Card(f_a(y)) \neq Card(f_b(y))\}$ 的最小元是 t , 则 $t \neq 0$, 且对任意 $z < t$, $f_a(z) = f_b(z)$, 因此 $f_a(t) = f_b(t)$, 矛盾, 因此 $Card(f_a(x)) = Card(f_b(x))$.

定义 180. 初始序数 (ordinal initial), 阿列夫 (aleph)

令序数 $a \geq 0$, $O'(a)$ 为良序集 $\{x | x \text{为序数与} x \leq a\}$, 并按下列方式定义定义域为 $O'(a)$ 的函数 f_a :

$$f_a(0) = Ord(N),$$

对 $x > 0$ 且 $x \leq a$, 令 $f_a(x)$ 为 $\{y | y \text{为序数与} (\exists z)(z \text{为序数与} z < x \text{与} Card(y) \leq Card(f_a(z)))\}$ 的最小上界.

则称 $f_a(a)$ 为指标 a 的初始序数, 记作 ω_a , 称 $Card(\omega_a)$ 为指标 a 的阿列夫, 记作 \aleph_a . 其中, 在没有歧义的情况下, ω_0 也可以简记为 ω .

补充定理 342.

- (1) $\aleph_0 = \text{Card}(N)$.
- (2) 如果 $a < b$, 则 $\omega_a < \omega_b$.
- (3) 初始序数都是无穷序数.

证明:

- (1) 根据定义可证.
- (2) 根据补充定理341 (1)、补充定理301 (5), $f_b(a) < f_b(b)$, 根据补充定理341 (2), $f_a(a) < f_b(b)$, 得证.
- (3) 根据补充定理342 (2)、补充定理339 (1) 可证.

补充定理 343.

令 a 为无穷基数, $W(a)$ 为 $\{y|y \text{ 为序数与 } \text{Card}(y) < a\}$ 的最小上界, 则:

- (1) $W(a)$ 为 $\{y|y \text{ 为序数与 } \text{Card}(y) = a\}$ 的最小元;
- (2) 是 $\{y|y \text{ 为序数与 } \text{Card}(y) = a\}$ 的最小元是初始序数, 并且, 令其为 ω_x , 则 $a = \aleph_x$.

证明:

- (1) 如果 $a = \text{Card}(N)$, 根据补充定理338 (4)、补充定理339 (1), $W(a) = \text{Ord}N$. 如果 $a > \text{Card}(N)$, 根据补充定理338 (3) 可证.
- (2) 如果 $a = \text{Card}(N)$, 根据补充定理343 (1), $W(a) = \text{Ord}N$, 故为初始序数. 如果 $a > \text{Card}(N)$:
令 $H = \{z|z \text{ 为序数与 } \omega_z < u\}$, 则 $H \neq \emptyset$.
如果 $\sup H \in H$, 则令 $x = \sup H + 1$, 如果 $\sup H \notin H$, 则令 $x = \sup H$. 故对任意 $w < x$, $\text{Card}(\omega_w) < a$, 因此 $\omega_x \leq u$; 如果 $\omega_x < W(a)$, 则 $x \in H$, 矛盾, 因此 $\omega_x = W(a)$.
进而, 根据定义可证 $a = \aleph_x$.

补充定理 344.

令 a 为序数:

- (1) $O'(a) = \{x|x \text{ 为序数与 } x \leq a\}$, $W'(a) = \{x|x \text{ 为无穷基数与 } x \leq \aleph_a\}$, 则映射 $x \rightarrow \aleph_x (x \in O'(a))$ 为 $O'(a)$ 到 $W'(a)$ 的同构.
- (2) $a \leq \omega_a$.
- (3) $\text{Card}([0, \aleph_a]) \leq \aleph_a$;
- (4) $\text{Card}(a) \leq \aleph_a$.

证明:

- (1) 根据补充定理341 (1)、补充定理343 (2) 可证.
- (2) 根据补充定理344 (1) 可证.
- (3) $\text{Card}([0, \aleph_a]) = \aleph_0 + \text{Card}([0, a])$, 因此 $\text{Card}([0, \aleph_a]) = \aleph_0 + \text{Card}(a)$, 故 $\text{Card}([0, \aleph_a]) \leq \aleph_0 + \aleph_a$, 得证.

(4) 根据补充定理344 (2) 可证.

补充定理 345.

a 为序数, 则 $(\forall x)(x \text{ 为基数} \Rightarrow x \leq \aleph_a \text{ 或 } x \geq \aleph_{a+1})$.

证明: 根据补充定理344 (1) 可证.

补充定理 346.

令 a 为无穷序数、 b 为序数, a 没有前导, 则对任意定义域为 $\{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}$ 、值域的元素都是序数的严格单增映射 f , 如果 $a = \sup_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}} f(x)$, 则:

$$(1) \sum_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}} \aleph_{f(x)} = \aleph_a.$$

$$(2) \sum_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}} \omega_{f(x)} = \omega_a.$$

证明:

$$(1) \text{ 根据定理159, } \sum_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}} \aleph_{f(x)} \leq \aleph_a.$$

如果 $\{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}$ 有最大元 v , 则 $a = f(v)$, 根据定理159可证; 如果 $\{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}$ 没有最大元, 则对任意序数 $c < a$, 均存在 $x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}$, 使 $f(x) > c$, 故 $\sum_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}} \aleph_{f(x)} > \aleph_c$, 根据补充定理344 (1), $\sum_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}} \aleph_{f(x)} = \aleph_a$.

(2) 根据补充定理346 (1)、补充定理301 (3) 可证.

补充定理 347.

ω_a 为标准序数函数符号.

证明:

对任意序数族 $(x_i)_{i \in I}$ 且 $i = \emptyset$, 令 $a = \sup_{i \in I} x_i$, $b = \sup_{i \in I} \omega_{x_i}$.

根据补充定理342 (2), $\omega_a \geq b$.

根据补充定理301 (6), 对任意 $i \in I$ 均有 $\aleph_{x_i} \leq \text{Card}(b)$.

根据补充定理343 (2), 存在序数 x 使 $\text{Card}(b) = \aleph_x$.

根据补充定理341 (1), 对任意 $i \in I$, $x_i \leq x$.

因此, $x \geq a$.

根据补充定理342 (2), $\omega_a \leq \omega_x$.

根据补充定理343 (1), $\omega_x \leq b$.

综上, $\omega_a = b$, 得证.

补充定理 348.

(1) 如果有限序数 $a > 0$, 则 a 有前导.

(2) 如果有限序数 $a > 1$, 则 a 为可约的序数.

证明:

(1) 令 a 为在 E 上的良序, 则 $Card(E)$ 为非空有限集; 令其最大元为 y , $b = Ord(Card(E) - \{y\})$, 则 $a = b + 1$, 得证.

(2) 根据补充定理348 (1) 可证.

补充定理 349.

(1) a 为序数, 则 ω_a 没有前导.

(2) 如果序数 x 没有前导, 且 $x > 0$, 则 $x \geq \omega_0$.

(3) ω_0 是不可约的序数.

(4) a 为序数, 当且仅当 $a < \omega_0$ 时, a 为有限序数.

(5) $\{a | a \text{ 为有限序数}\}$ 的最小上界为 ω_0 .

(6) 如果序数 x 没有前导, 则存在序数 y , 使 $x = \omega_0 y$.

(7) a 为有限序数, 则 $a\omega_0 = \omega_0$.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 根据补充定理348 (1) 可证.

(3) 如果 $\omega_0 = x + y$, 其中 x, y 为序数, 则 $Card(x), Card(y)$ 均为有限基数, 但根据补充定理301 (3), $Card(N) = Card(x) + Card(y)$, 矛盾.

(4) 如果 a 为有限序数, 根据定义可证 $a < \omega_0$. 反过来, 如果 $a < \omega_0$, 则 a 同构于 N 的区间上的良序, 故 a 为有限序数.

(5) 设最小上界为 x , 则 $x \leq \omega_0$. 如果 x 为有限序数, 则 $x + 1$ 也是有限序数, 矛盾.

(6) 根据补充定理262, 存在 y, z 使 $x = \omega_0 y + z$, 且 $z < \omega_0$. 由于 x 没有前导, 故 $z = 0$, 得证.

(7) 根据定义可证.

补充定理 350.

令序数 $a > 0$, 则:

(1) $a\omega_0$ 是不可约的序数;

(2) $a\omega_0 > a$;

(3) 如果序数 x 不可约, 且 $x > a$, 则 $x \geq a\omega_0$.

证明:

(1) 根据补充定理265、补充定理349 (3) 可证.

(2) 根据补充定理257 (3) 可证.

(3) 根据补充定理262可证.

补充定理 351.

令序数 $a > 0$, 则 $(a + 1)\omega_0 = a\omega_0$.

证明：根据补充定理246 (1), $(a+1)\omega_0 \geq a\omega_0$.

另一方面, 根据补充定理350 (1), $a\omega_0$ 不可约, 同时, 根据补充定理350 (2), $a\omega_0 > a$, 因此 $a\omega_0 \geq a+1$, 由于 $a\omega_0$ 不可约, 故 $a\omega_0 > a+1$, 根据补充定理350 (3), $a\omega_0 \geq (a+1)\omega_0$, 得证.

补充定理 352.

(1) a 为序数, 则当且仅当存在序数 b , 使 $a = \omega_0^b$ 时, a 为不可约的序数.

(2) a, b 为序数, $a < b$, 则 $\omega_0^a + \omega_0^b = \omega_0^b$.

证明:

(1) 根据补充定理350 (1)、补充定理276可证.

(2) 根据补充定理352 (1)、补充定理263可证.

补充定理 353.

(1) 对任意序数 a , 以及序数 $c > 1$, 存在唯一的一对序数有限序列 $(l_i)_{i \in [1, k]}$ 、 $(m_i)_{i \in [1, k]}$, 使 $a = \sum_{i \in [1, k]} c^{l_i} m_i$, 其中, 对任意 $i \in [1, k]$, $m_i > 0$ 与 $m_i < c$, 对任意 $i \in [1, k-1]$, $l_i > l_{i+1}$.

(2) 对任意序数 a , 存在唯一的单减有限序列 $(b_i)_{i \in [1, k]}$, 使 $a = \sum_{i \in [1, k]} \omega_0^{b_i}$.

证明:

(1) 命题对 $a = 0$ 、 $a = 1$ 显然成立. 假设命题对 $[0, a[$ 成立, 根据补充定理276, 存在唯一的序数 e, f, g , 使 $a = c^e f + g$, 则 $g < a$, 根据证明规则59可证.

(2) 根据补充定理353 (1) 可证.

定义 181. 序数的展开 (*développement d'un ordinal*), 序数的展开的最大指数 (*plus grand indice d'une développement d'un ordinal*)

对任意序数 $a > 0$, 如果单减有限序列 $(b_i)_{i \in [1, k]}$, 使 $a = \sum_{i \in [1, k]} \omega_0^{b_i}$, 则称 $(b_i)_{i \in [1, k]}$ 为 a 的展开, b_1 为 a 的展开的最大指数, 记作 $\psi(a)$.

补充定理 354.

a, b 为序数:

(1) $a < \omega_0^{\psi(a)+1}$.

(2) 如果 $\psi(a) < \psi(b)$, 则 $a < b$.

(3) 如果 $a < b$, 则 $\psi(a) \leq \psi(b)$.

(4) a, b 为序数, $a < \omega_0^b$, 则 $a + \omega_0^b = \omega_0^b$.

证明:

(1) 根据补充定理257 (3) 可证.

(2) 设 a 的展开有 n 项, 则 $a \leq \omega_0^{\psi(a)} n$, 又因为 $a < \omega_0^{\psi(a)} + 1$, 因此 $a < \omega_0^{\psi(b)}$, 故 $a < b$.

(3) 根据补充定理354 (1) 可证.

(4) 根据补充定理352 (2)、补充定理353 (2) 可证.

补充定理 355.

$w(x)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号, 对任意序数 $x \geq a_0$ 、 $y > x$, 均有 $w(x) < w(y)$. 则对任意序数 $x \geq a_0$ 和序数 y , $w(x+y) \geq w(x) + y$. 进而, 存在序数 a , 对任意序数 $x \geq a$, 均有 $w(x) \geq x$.

证明: 假设存在 y 使 $w(x+y) < w(x) + y$, 设其中最小的为 y_0 , 则 $w(x+y_0) < w(x) + y_0$, 令 b 满足 $w(x+y_0) = w(x) + b$, 则 $b < y_0$ 且 $w(x+b) < w(x) + b$, 矛盾, 故 $w(x+y) \geq w(x) + y$.

令 $a = a_0 \omega_0$, 根据补充定理350 (1), a 不可约, 根据补充定理263, $a = a_0 + a$, 故 $w(a) \geq a$, 进而, 当 $x \geq a$ 时, 均有 $w(x) \geq x$.

定义 182. 临界序数 (ordinal critique)

令 $f(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 、 $y \geq b_0$ 上的序数函数符号, c 为无穷序数且 $c > a_0$ 、 $c > b_0$, 如果对任意序数 $x \geq a_0$ 、 $x < c$, 均有 $f(x, c) = c$, 则称 c 为 $f(x, y)$ 的临界序数.

补充定理 356.

$w(x)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号, 对任意序数 $x \geq a_0$, $w(x) \geq x$, 并且, 对任意序数 x 、 y , $x < y$ 与 $x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令 $g(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 、 $y \geq a_0$ 上的序数函数符号, 并满足:

第一, $(x$ 为序数与 y 为序数与 $x \geq a_0$ 与 $y \geq a_0) \Rightarrow g(x, y) > x$;

第二, $a_0 \leq x$ 与 $x \leq x'$ 与 $a_0 \leq y$ 与 $y \leq y' \Rightarrow g(x, y) \leq g(x', y')$.

$f(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 、 $y \geq 1$ 上的序数函数符号, 其按下列方式定义:

第一, 对任意序数 $x \geq a_0$, $f(x, 1) = w(x)$;

第二, 对任意序数 $x \geq a_0$, $y > 1$, $f(x, y) = \sup_{z \in]0, y[} g(f(x, z), x)$.

则:

(1) 对任意序数 b , 最多存在有限个序数 y , 使 $f(x, y) = b$ 至少有一个解.

(2) $f(x, y)$ 的临界序数没有前导.

(3) 如果存在集合 A , 对任意 $x \in A$, $(x$ 为序数)与 $f(x, c) = c$, 并且, c 为 A 的最小上界, 则 c 为 $f(x, y)$ 的临界序数.

(4) 令 $h(x) = f(x, x)$ ($x \geq a_0$), 序列 $(a_n)_{n \in N = \{0\}}$ 满足 $a_1 = a_0 + 2$ 、 $a_{n+1} = h(a_n)$, 则序列 $(a_n)_{n \in N = \{0\}}$ 的最小上界, 为 $f(x, y)$ 的临界序数.

(5) 如果集合的元素都是 $f(x, y)$ 的临界序数, 则该集合最小上界是 $f(x, y)$ 临界序数.

(6) $f(x, y)$ 的临界序数是不可约的.

证明:

(1) 设 y 组成的集合为 A , $f(y)$ 为 $\{x|f(x,y)=b\}$ 的最小元. 如果 $y < y'$, 根据补充定理270 (6), $f(y) > f(y')$, 令 $f(y)$ 的值域的最小元为 x_0 , 则相应的 y_0 为 A 的最大元. 由于 A 有最小元也有最大元, 故 A 为有限集合.

(2) 根据补充定理270 (8), $f(y, y+1) \geq y+y$, 得证.

(3) 对任意 $z < c$, 存在 $x \in A$ 使 $x > z$, 由于 $f(x, c) = c$, 故 $f(z, c) \leq c$, 根据补充定理270 (3) 可证.

(4) 令 $(a_n)_{n \in N - \{0\}}$ 的最小上界为 z , 对任意 $i \in N - \{0\}$, $f(a_i, z) \geq z$, 同时, $f(a_i, a_{i+1}) \leq f(a_{i+1}, a_{i+1})$, 故 $f(a_i, a_{i+1}) \leq z$, 因此 $f(a_i, z) = z$, 根据补充定理356 (3) 可证.

(5) 根据补充定理356 (3) 可证.

(6) 如果 r 为 $f(x, y)$ 的临界序数, 且 $r = \sum_{i \in [1, k]} \omega_0^{b_i}$ ($k \geq 2$), 则 $f(\omega_0^{b_1}, r) \geq \omega_0^{b_1} + r$, 故 $f(\omega_0^{b_1}, r) > r$, 矛盾.

补充定理 357.

a, b 为序数, $a \geq 2$, b 没有前导, 则 a^b 不可约.

证明: 假设 $a^b = x + y$, 根据补充定理353 (1), x, y 对 a 均有唯一的展开. 设最大的指数分别是 p, q , 相应的系数分别是 m, n . 则 $p < b, q < b$. 如果 $p \geq q$, 则 $x + y \leq a^p(m+n)$, 故 $x + y \leq a^{p+1}2$, 进而 $x + y \leq a^{p+2}$, 由于 b 没有前导, 故 $p+2 < b$, 根据补充定理272, 矛盾. 如果 $p < q$, 则 $x + y \leq a^{q+2}$, 同样矛盾.

补充定理 358.

(1) a 为有限序数, $a \geq 2$, 则 $a^{\omega_0} = \omega_0$.

(2) a 为无穷序数, 则 $a^{\omega_0} = \omega_0^{\psi(a)\omega_0}$.

证明:

(1) 令 b 为有限序数, 根据补充定理311、补充定理339 (4), $a^b > b$, 因此 $a^{\omega_0} \geq \omega_0$. 同时, 由于 a^b 为有限序数, 故 $a^{\omega_0} \leq \omega_0$. 得证.

(2) 根据补充定理273, $a^{\omega_0} \geq \omega_0^{\psi(a)\omega_0}$, $a^{\omega_0} \leq \omega_0^{(\psi(a)+1)\omega_0}$, 根据补充定理351可证.

补充定理 359.

a 为有限序数, $a \geq 2, b = \omega_0 c$, 则 $a^b = \omega_0^c$.

证明: 根据补充定理358 (1)、补充定理274可证.

补充定理 360.

$a > 0$, 则 $\{x|x \text{ 为不可约的序数与 } x \leq a\}$ 的最大元为 $\omega_0^{\psi(a)}$.

证明: 根据补充定理352 (2)、补充定理354 (3) 可证.

补充定理 361.

a 为无穷序数, p 为 $\{x|x \text{ 为不可约的序数与 } x \leq a\}$ 的最大元, 序数 b 没有前导, 则 $a^b = p^b$.

证明：根据补充定理358 (2)、补充定理274可证。

补充定理 362.

当且仅当存在序数 b 使 c 等于 $\omega_0^{\omega_0^b}$ 时， c 为 xy 的临界序数。

证明：如果 c 是 xy 的临界序数。由于 $\omega_0^{\psi(c)c} > c$ ，故 $c = \omega_0^{\psi(c)}$ 。根据补充定理263， $\psi(c)$ 不可约，根据补充定理352 (1)，存在序数 b 使 c 等于 $\omega_0^{\omega_0^b}$ 。

反过来，如果存在序数 b 使 c 等于 $\omega_0^{\omega_0^b}$ ，根据补充定理352 (1)， $\psi(c)$ 不可约；由于 $a < c$ 时， $a < \omega_0^{\psi(a)+1}$ ，因此 $ac \leq \omega_0^{\psi(a)+1+\psi(c)}$ ，又因为 $\psi(a) + 1 < \psi(c)$ ，根据补充定理354 (4)， $ac \leq c$ ，同时，由于 $ac \geq c$ ，因此 $ac = c$ 。

补充定理 363.

令 c 为序数，则当且仅当存在序数 b 使 c 等于 $\omega_0^{\omega_0^b}$ 时，对任意序数 $a > 1$ 、 $a \leq c$ ，均存在 x 使 $c = a^x$ 。

证明：如果对任意序数 $a > 1$ 、 $a \leq c$ ，均存在 x 使 $c = a^x$ ，则令 $a = \omega_0^{\psi(c)}$ ，故 $c = \omega_0^{\psi(c)x}$ ，因此 $\psi(c)x = \psi(c)$ ，故 $c = \omega_0^{\psi(c)}$ 。

如果 $\psi(c)$ 可约：若 $\psi(c) = a + b$ ，且 $a > b$ ，则 $\omega_0^a < c$ ， $\omega_0^{a^2} > c$ ，矛盾；若 $\psi(c) = a + b$ ，且 $a < b$ ，则 $\omega_0^b < c$ ， $\omega_0^{b^2} > c$ ，矛盾；若 $\psi(c) = 2$ ，则 $\omega_0 + 1 < \omega_0^2$ ， $(\omega_0 + 1)^2 > \omega_0^2$ ，矛盾；若 $\psi(c) = a + a$ ，且 $a > 1$ ，则 $\omega_0^{a+1} < c$ ， $\omega_0^{(a+1)^2} > c$ ，矛盾。

因此， $\psi(c)$ 不可约。根据补充定理352 (1)，存在序数 b 使 $\psi(c) = \omega_0^b$ 。

反过来，如果 $c = \omega_0^{\psi(c)}$ ， $\psi(c) = \omega_0^b$ ，根据补充定理358 (1)、补充定理358 (2)、补充定理266，对任意序数 $a > 1$ 、 $a \leq c$ ，均存在 x 使 $c = ax$ 。

补充定理 364.

b 为序数， $c = \omega_0^{\omega_0^b}$ ，则存在唯一的 x 使 $c = ax$ ，并且 x 不可约。

证明：根据补充定理272， x 具有唯一性。如果 a 为有限序数，根据补充定理358 (1)， $x = \omega_0^{1+b}$ ，故 x 不可约；如果 a 为无穷序数，根据补充定理266， x 不可约。

补充定理 365.

x^y 的最小的临界序数是 ω_0 。

证明：根据补充定理349 (5)、补充定理339 (4)可证。

定义 183. 艾普塞朗数 (*nombre epsilon*)，艾普塞朗序数 (*ordinal epsilon*)

如果 a 为序数， $\omega_0^a = a$ ，则称 a 为艾普塞朗数，或称 a 为艾普塞朗序数。

补充定理 366.

艾普塞朗数为无穷序数。

证明：由于 $a = 0$ 不满足要求，故 $a > 0$ ，因此 $a \geq \omega_0$ ，故 a 为无穷序数。

补充定理 367. 艾普塞朗数的构建

$(x_i)_{i \in N}$ 为序数序列, 其中对任意 $i \in N$, $x_{i+1} = \omega_0^{x_i}$, 则:

(1) $\sup_{i \in N} x_i$ 是艾普塞朗数.

(2) 如果 $x_0 = \omega_0$, 则 $\sup_{i \in N} x_i$ 是最小的艾普塞朗数.

证明:

(1) 令 $a = \sup_{i \in N} x_i$.

如果 $x_0 = x_1$, 则对任意 $i \in N$, $x_0 = x_1$, 故 $a = x_0$, 命题得证.

如果 $x_0 \neq x_1$, 则 $(x_i)_{i \in N}$ 为严格单增序列. 设 $\psi(a) = b$, 则对任意 $i \in N$, 如果 $b < a$, 则存在 $x_i \geq b + 1$, 故 $x_{i+1} \geq a$, 因此 $a = x_{i+1}$, 故 $a < x_{i+2}$, 矛盾. 因此 $a = b$, 即 $a \geq \omega_0^a$. 同时, 根据补充定理275, $a \leq \omega_0^a$, 得证.

(2) 如果无穷序数 $b < \sup_{i \in N} x_i$, 则存在 $i \in N$, 使 $x_i \leq b$, $x_{i+1} > b$, 故 b 不是艾普塞朗数, 得证.

补充定理 368.

艾普塞朗数是 xy 的临界序数.

证明: 根据补充定理362可证.

补充定理 369.

当且仅当序数 a 是艾普塞朗数或 ω_0 时, a 是 x^y ($x \geq 2, y \geq 1$) 的临界序数.

证明:

根据定义可证 ω_0 是 x^y ($x \geq 2, y \geq 1$) 的临界序数. 令 a 为艾普塞朗数, $x < a$ 且 $x \geq 2$, 则 $x^a \leq \omega_0^{(\psi(x)+1)a}$, 由于 a 不可约, 故 $\psi(x) + 1 < a$, 因此 $x^a \leq \omega_0^a$, 进而可得 $x^a = a$.

反过来, 根据定义, 如果 a 是 x^y ($x \geq 2, y \geq 1$) 的临界序数, 则 a 是艾普塞朗数或 ω_0 .

定义 184. 共尾性 (*caractère final*), 正规序数 (*ordinal régulier*), 奇异序数 (*ordinal singulier*)

E 为全序集, 其共尾良序子集的偏序类的集合的最小元, 称为 E 的共尾性; 令序数 a 为在 E 上的良序集, 则 E 的共尾性也称为 a 的共尾性. 令 a 为序数, 如果 a 的共尾性为 a , 则称 a 为正规序数, 否则, 称 a 为奇异序数.

补充定理 370.

a, b 为序数, 则 $b + a, ba$ 的共尾性都等于 a 的共尾性.

证明: 令 $pr_1 b = E$, $pr_1 a = F$, E 和 F 的和集为 G , 令 G 的偏序类最小的共尾良序子集为 G' , F 的偏序类最小的共尾良序子集为 F' , 由于 $F \times \{1\}$ 是 G 的共尾子集, 故 $Ord(G') \leq Ord(F')$; 同时, $G' \cap (F \times \{1\})$ 是 G 的共尾子集, 故 $Ord(G') = Ord(G' \cap (F \times \{1\}))$. 由于 $pr_1(G' \cap (F \times \{1\}))$ 是 F 的共尾子集, 故 $Ord(F') \leq Ord(G')$, $b + a$ 的情形得证. 类似可证 ba 的情形.

补充定理 371.

- (1) 有前导的序数的共尾性为1.
- (2) 0、1是正规序数.
- (3) a 有限序数且 $a > 0$, 则 a 的共尾性是1.
- (4) ω_0 是正规序数.
- (5) 序数 $a < b$, 则 a 的共尾性不大于 b 的共尾性.
- (6) $a > 0$, 则 a 的共尾性大于0.
- (7) a 为无穷序数, 如果 a 没有前导, 则 a 的共尾性是无穷序数.
- (8) b 为序数, $I = \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}$, $(x_i)_{i \in I}$ 为序数族, 且 $x \rightarrow x_i$ 为单增函数, 则 $\sup_{i \in I} (x_i)$ 的共尾性小于等于 b ,
- (9) b 为序数, $I = \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}$, $(x_i)_{i \in I}$ 为序数族, 则 $\sum_{i \in I} x_i$ 的共尾性小于等于 b ,

证明:

- (1) 根据补充定理370可证;
- (2) 根据定义可证;
- (3) 根据补充定理371 (1)、补充定理339 (5) 可证.
- (4) 令 $pr_1 \omega_0 = E$, 如果 E 有有限共尾子集 F , 设 F 的最大元为 a , 则 a 为 E 的最大元, 故 ω_0 有前导, 矛盾.
- (5) 根据定义可证.
- (6) 根据定义可证.
- (7) 令 a 为没有前导的序数, 且 $a > 0$, 如果其共尾性为有限序数, 设 $pr_1 a$ 的共尾良序子集种, 偏序类最小的是 E , 则 E 有最大元, 故 $pr_1 a$ 有最大元, 故 a 有前导, 矛盾.
- (8) 令 $a = \sup_{i \in I} (x_i)$, $O_a = \{x | x \text{ 为序数与 } x < a\}$, $A = \bigcup_{i \in I} x_i$, 则根据补充定理253 (1), $Ord(O_a) = a$, $Ord(I) = b$. 且 A 是 (O_a) 的共尾子集.
- 同时, 令 g 为映射 $i \rightarrow x_i$, f 为映射 $y \rightarrow (g^{-1}\langle y \rangle \text{ 的最小元})$, 则 f 为 A 到 I 的子集的同构, 故 $Ord(A) \geq b$, 得证.
- (9) 根据补充定理371 (8) 可证.

补充定理 372.

无穷正规序数都是初始序数.

证明: 令 a 为无穷正规序数, $E = Card(a)$, E 上的良序集合的最小元为 b . 令按 b 排序的 E 的最小元为 p , 定义 E 到 $\{0, 1\}$ 的映射 f :

$$f(p) = 1;$$

对任意 $x \in E$, $x >_b p$, 如果 $(\forall i)(i <_b x \Rightarrow i <_a x)$, 则令 $f(x) = 1$, 否则 $f(x) = 0$.

令 $A = \{z | z \in E \text{ 与 } f(z) = 1\}$, 按 b 在 A 上导出的偏序排序, 故 $Ord(A) \leq b$. 如果存在 $x \in E$, 对任意 $y \in A$, 均有 $x >_a y$, 则 $f(x) = 0$, 故 $\{i | i \in E \text{ 与 } i <_b x \text{ 与 } i >_a x\} \neq \emptyset$, 设其最小元为 m , 因此 $(\forall i)(i <_b m \Rightarrow i <_a m)$, 故 $m \in A$, 且 $m >_a x$, 矛盾. 因此, A 为按 a 排序的 E 的共尾良序子集. 故 a 的共尾性小于等于 b , 故 $a = b$, 根据补充定理 343 (2) 得证.

补充定理 373.

a 为序数, 如果 $a = 0$ 或 a 有前导, 则初始序数 ω_a 是正规序数.

证明:

如果 $a = 0$, 根据补充定理 371 (4), 命题成立.

如果 a 有前导, 令 $a = b + 1$, $F = pr_1 \omega_a$, 设初始序数 ω_a 的偏序类最小的共尾良序子集为 E , $r \notin E$, 令良序集 $E' = E \cup \{r\}$, 其中 r 为最小元. 如果 $Ord(E) < \omega_a$, 根据补充定理 345, $Card(E) \leq \aleph_b$, 故 $Card(E') \leq \aleph_b$. 当 $i \in E$ 时, 令 $X_i = \{z | z \in F \text{ 与 } z \geq i \text{ 与 } (\forall j)(j \in E \text{ 与 } j > i \Rightarrow j > z)\}$, $X_r = \{z | z \in F \text{ 与 } (\forall j)(j \in E \Rightarrow j > z)\}$, 故 $\sum_{i \in E'} Card(X_i) = \aleph_b + 1$, 因此存在 $m \in E'$, 使 $Card(X_m) = \aleph_a$. 设 ω_a 在 X_i 上导出的偏序的偏序类是 x_i , 则 $\sum_{i \in E'} x_i = \omega_a$, 同时 $x_m \geq \omega_a$, $x_m > 0$, 矛盾.

补充定理 374.

$a > 0$, a 没有前导, 且 $a < \omega_a$, 则初始序数 ω_a 是奇异序数.

证明: 根据补充定理 346 (1), $\sum_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < a\}} \aleph_x = \aleph_a$. 根据补充定理 371 (9), ω_a 的共尾性小于等于 a , 得证.

补充定理 375.

ω_{ω_0} 是最小的奇异序数.

证明: 根据补充定理 373、补充定理 374 可证.

定义 185. 不可达序数 (*ordinal inaccessible*)

如果序数 a 没有前导, 且 ω_a 是正规序数, 则称 ω_a 为不可达序数.

补充定理 376.

$a > 0$, 且 ω_a 为不可达序数, 则 $a = \omega_a$.

证明: 根据补充定理 344 (2)、补充定理 374 可证.

补充定理 377.

ω_0 是不可达序数.

证明: 根据定义可证.

补充定理 378.

- (1) 令 k 为最小的艾普塞朗数, 则 ω_k 的共尾性是 ω_0 .
- (2) 当 $a > 0$ 、 $a \leq k$ 时, ω_a 不是不可达序数.

证明:

(1) 令 $x_0 = \omega_0$, 对于 $i \in N$, 令 $x_{i+1} = \omega_{x_i}$, 则 $k = \sup_{i \in N}(x_i)$, 根据补充定理367 (2), k 为最小的艾普塞朗数.

同时, ω_k 的共尾性不大于 ω_0 . 而根据补充定理349 (1), k 没有前导, 根据补充定理371 (7), k 的共尾性为无穷序数, 故 k 的共尾性是 ω_0 .

(2) 根据补充定理376可证.

注: 不能确定是否存在 ω_0 以外的不可达序数.

补充定理 379.

E 为全序集, 则:

- (1) E 的共尾性是正规序数;
- (2) 如果 E 非空且没有最大元, 则 E 的共尾性是初始序数.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 根据补充定理371 (7)、补充定理372可证.

补充定理 380.

(1) a 、 a' 为序数, ω_a 为的共尾性为 $\omega_{a'}$, I 为良序集且 $\text{Ord}(I) < \omega_{a'}$, $(x_i)_{i \in I}$ 为序数族, 如果对任意 $i \in I$ 均有 $x_i < \omega_a$, 则 $\sum_{i \in I} x_i < \omega_a$.

(2) a 为序数, ω_a 为正规序数, I 为良序集且 $\text{Ord}(I) < \omega_a$, $(x_i)_{i \in I}$ 为序数族, 如果对任意 $i \in I$ 均有 $x_i < \omega_a$, 则 $\sum_{i \in I} x_i < \omega_a$.

证明:

(1) 设 $[0, \text{Ord}(I)[$ 到 I 的同构为 f , 对任意序数 a , 令 $I_a = f([0, a])$, $s_a = \sum_{i \in I} a x_i$. 考虑集合 $\bigcup_{i \in [0, \text{Ord}(I)[} \{s_i\}$, 由于 $\text{Ord}(I) < \omega_{a'}$, 故存在 $y \in [0, \omega_a[$, 对任意 $i \in [0, \text{Ord}(I)[$, 均有 $s_i < y$, 即 $y > \sum_{i \in I} x_i$, 得证.

(2) 根据补充定理380 (1) 可证.

定义 186. 正规基数 (cardinal régulier), 奇异基数 (cardinal singulier)

a 为序数, 如果 ω_a 为正规序数 (或奇异序数), 则称 \aleph_a 为正规基数 (或奇异基数).

补充定理 381.

(1) a, a' 为序数, ω_a 为的共尾性为 $\omega_{a'}$, $Card(I) < \aleph_{a'}$, $(x_i)_{i \in I}$ 为基数族, 如果对任意 $i \in I$ 均有 $x_i < \aleph_a$, 则 $\sum_{i \in I} x_i < \aleph_a$.

(2) a, a' 为序数, ω_a 为的共尾性为 $\omega_{a'}$, $Card(I) = \aleph_{a'}$, 则存在基数族 $(x_i)_{i \in I}$ 使 $\sum_{i \in I} x_i = \aleph_a$.

(3) a 为序数, 当且仅当对任意基数族 $(x_i)_{i \in I}$, 若 $Card(I) < \aleph_a$, 且对任意 $i \in I$ 均有 $x_i < \aleph_a$, 则 $\sum_{i \in I} (x_i)_{i \in I} < \aleph_a$ 时, \aleph_a 为正规基数.

证明:

(1) 根据补充定理380 (1)、补充定理201可证.

(2) 类似补充定理373的证明可证.

(3) 根据补充定理381 (1)、补充定理381 (2) 可证.

补充定理 382.

a 为序数, 基数 $m \neq 0$, 则:

(1) $\aleph_{a+1}^m = \aleph_a^m \aleph_{a+1}$.

(2) 序数 c 满足 $Card(c) \leq m$, 则 $\aleph_{a+c}^m = \aleph_a^m \aleph_{a+c}^{Card(c)}$.

(3) $Card(a) \leq m$, 则 $\aleph_a^m = 2^m \aleph_a^{Card(a)}$.

证明:

(1) 如果 $m \geq \aleph_{a+1}$, 根据补充定理336 (2), $\aleph_{a+1}^m = 2^m$ 、 $\aleph_a^m = 2^m$ 、 $2^m > \aleph_{a+1}$, 根据定理160得证.

如果 $m < \aleph_{a+1}$, 则 $m \leq \aleph_a$, 由于 $\aleph_{a+1}^m \geq \aleph_a^m$, $\aleph_{a+1}^m \geq \aleph_{a+1}$, 根据定理160, $\aleph_{a+1}^m \geq \aleph_a^m \aleph_{a+1}$.

同时, 令 \aleph_{a+1} 按其最小良序排序, 该最小良序同构于 ω_{a+1} . 对任意 m 到 \aleph_{a+1} 的映射 f , 根据补充定理373, $f\langle m \rangle$ 不是 \aleph_{a+1} 共尾子集, 即 $\{x | (\forall y)(y \in f\langle m \rangle \Rightarrow y < x)\}$ 非空, 令其最小元为 n_f .

根据定理85, $Ord(S_{n_f}) < \omega_{a+1}$, 故 $Card(S_{n_f}) < \aleph_a$. 因此 $Card(S_{n_f}) \leq \aleph_a$.

令映射 g 为 $f \rightarrow n_f$, 对任意 $p \in \aleph_{a+1}$, $Card(g^{-1}\langle p \rangle) = Card(S_{n_f})^m$, 因此 $Card(g^{-1}\langle p \rangle) = \aleph_a^m$.

因此, m 到 \aleph_{a+1} 的映射 f 的数目, 小于等于 $\aleph_a^m \aleph_{a+1}$.

综上, $\aleph_{a+1}^m = \aleph_a^m \aleph_{a+1}$.

(2) 使用超限归纳法:

命题对 $c = 0$ 显然成立, 对1, 根据补充定理382 (1) 可证.

假设命题对小于 $c = 1$ 的序数 ($c > 1$) 成立:

如果 c 有前导, 根据归纳假设可证;

如果 c 为极限序数, 根据定理160, $\aleph_{a+c}^m \geq \aleph_a^m \aleph_{a+c}^{Card(c)}$. 同时, 根据补充定理346 (1)、补充定理300 (1)、定理105, $\aleph_{a+c}^m \leq \prod_{d \in [0, c[} \aleph_{a+d}^m$, 根据归纳假设, $\aleph_{a+c}^m \leq \prod_{d \in [0, c[} (\aleph_a^m \aleph_{a+d}^{Card(d)})$, 根据补充定理253 (1), $\aleph_{a+c}^m \leq \aleph_a^{m \cdot Card(c)} \aleph_{a+d}^{Card(c)Card(c)}$, 根据定理160可证.

(3) 根据补充定理382 (2)、补充定理336 (2) 可证.

补充定理 383.

a, b 为序数, a 没有前导, $x \rightarrow s_x$ 为 $[0, \omega_b[$ 到 $[0, a[$ 的严格单增映射, 且 $\sup_{x \in [0, \omega_b[} s_x = a$, 则 $\aleph_a^{\aleph_b} = \prod_{x \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_x}$.

证明:

$x \rightarrow s_x$ 为 $[0, \omega_b[$ 到 $[0, a[$ 的严格单增映射, 故 $[0, a[\neq \emptyset$, 因此 a 为无穷序数. 同时, 对任意 $x \in [0, \omega_b[, y \in [0, \omega_b[, x \neq y$, 均有 $s_x \neq s_y$.

对任意 $[0, \omega_b[$ 到 $[0, \omega_a[$ 的映射 f , 用通过超限归纳法定义 $[0, \omega_b[$ 到 $[0, \omega_b[$ 的映射 h_f :

第一, 如果 $\{x | x \in [0, \omega_b[\text{ 与 } f(0) \leq \omega_{s_x}\} = \emptyset$, 令 $Card(f(0)) = \aleph_z$, 则对任意 $x \in [0, \omega_b[, s_x \leq z$, 故 $z \geq a$, $f(0) \geq \omega_a$, 矛盾, 因此, $\{x | x \in [0, \omega_b[\text{ 与 } f(0) \leq \omega_{s_x}\} \neq \emptyset$, 令 $h_f(0)$ 为其最小元.

第二, 对 $t \in [0, \omega_b[$, 同理可证 $\{x | x \in [0, \omega_b[\text{ 与 } f(0) \leq \omega_{s_x}\} \neq \emptyset$, 令 k 为其最小元. 由于 $Card(k) < \aleph_{h_b}$, 同时 $Card([0, k]) = Card(k)$, 故 $Card[k, \omega_b[= \aleph_b$. 因此, $\{x | x \in [k, \omega_b[\text{ 与 } (\forall i \in [0, t[\Rightarrow f(i) \neq x)\} \neq \emptyset$. 令 $h_f(t)$ 为其最小元.

故 h_f 为单射.

令 g 为映射 $f \rightarrow h_f (f \in \mathcal{F}([0, \omega_b[; [0, \omega_a[, h_f \in \mathcal{F}([0, \omega_b[; [0, \omega_b[))$,

对任意 $t \in [0, \omega_b[, Card([0, \omega_{s_{h_f(t)}}]) = \aleph_{s_{h_f(t)}} + 1$, 等于 $\aleph_{s_{h_f(t)}}$, 则对任意 $u \in \mathcal{F}([0, \omega_b[; [0, \omega_b[)$, $g^{-1}(z) = \prod_{t \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_{h_t}}$, 小于等于 $\prod_{x \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_x}$,

故 $\aleph_a^{\aleph_b} \leq \aleph_b^{\aleph_b} \prod_{x \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_x}$.

又因为对任意 $x \in [0, \omega_b[, 2 \leq \aleph_{s_x}$, 同时, $\aleph_b^{\aleph_b} = 2^{\aleph_b}$, 因此, $2^{\aleph_b} \leq \prod_{x \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_x}$, 故 $\aleph_a^{\aleph_b} \leq 2^{\aleph_b} \prod_{x \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_x}$, 因此 $\aleph_a^{\aleph_b} \leq \prod_{x \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_x}$.

同时, 根据定理110, 故 $\aleph_a^{\aleph_b} \geq \prod_{x \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_x}$, 得证.

补充定理 384.

a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, 则 $\aleph_a^{\aleph_{a'}} > \aleph_a$.

证明: 如果 $a = 0$ 或 a 有前导, 根据补充定理373, $a = a'$, 根据定理113可证.

如果 a 没有前导, 设 ω_a 的共尾子集为 A , 且 $Ord(A) = \omega_{a'}$.

令 g 为 A 到 $[0, a[$ 的映射:

对任意 $x \in A$, 如果 $Card(x)$ 为有限基数, 则 $g(x) = 0$; 如果 $Card(x)$ 为无穷基数, 令其为 \aleph_y , 则 $g(x) = \omega_y$.

令 g 的值域 $= G$, 则 $Card(G) \leq \aleph_{a'}$, 同时, $\bigcup_{i \in G} \{\omega_i\}$ 也是 ω_a 的共尾子集, 故则 $Card(G) = \aleph_{a'}$. 令 h 为 $[0, \omega_{a'}[$ 到 G 的同构, 则 $\sup_{x \in [0, \omega_{a'}[} h(x) = a$. 根据补充定理 383, $\aleph_a^{\aleph_{a'}} = \prod_{x \in [0, \omega_{a'}[} \aleph_{h(x)}$. 根据补充定理 300 (2)、补充定理 346 (1) 可证.

补充定理 385.

a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, c 为序数, 如果存在基数 n 使 $\aleph_a = n^{\aleph_c}$, 则 $c < a'$.

证明: 假设 $c \geq a'$, 则 $\aleph_c \aleph_{a'} = \aleph_c$, 故 $\aleph_a^{\aleph_{a'}} = \aleph_a$, 矛盾.

补充定理 386.

a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, 序数 $b < a'$, 则 $\aleph_a^{\aleph_b} = \sum_{c \in [0, a[} \aleph_c^{\aleph_b}$.

证明: $\sum_{c \in [0, a[} \aleph_c^{\aleph_b} \leq Card(a) \aleph_a^{\aleph_b}$, 由于 $Card(a) \leq \aleph_a$, 故 $\sum_{c \in [0, a[} \aleph_c^{\aleph_b} \leq \aleph_a^{\aleph_b}$.

另一方面, 对任意 $[0, \omega_b[$ 到 $[0, \omega_a[$ 的映射 f , 均存在 $c \in [0, a[$, 使 $f([0, \omega_b[) \subset [0, \omega_c[$, 因此 $\sum_{c \in [0, a[} \aleph_c^{\aleph_b} \geq \aleph_a^{\aleph_b}$, 得证.

补充定理 387.

a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, 基数 $b < \aleph_{a'}$ 且 $b \neq 0$, 则 $\aleph_a^b = \aleph_a \sum_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$.

证明: 对任意 b 到 \aleph_a 的映射 f , $Card(f(b)) < \aleph_a$, 同时, 当 $m < \aleph_a$ 时, 如果 m 为无穷基数, 根据补充定理 339 (4)、补充定理 337 (6), $Card(\{x | x \subset \aleph_a \text{ 与 } Card(x) = m\}) \geq \aleph_a$, 因此 $\aleph_a^b \geq \aleph_a \sum_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$.

如果 b 为自然数, 则 $\aleph_a^b = \aleph_a$, 故 $\aleph_a^b \leq \aleph_a \sum_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$, 命题成立.

如果 $b \geq \aleph_0$ 且 $b < a$, 根据补充定理 386, $\aleph_a^b \leq \aleph_a \sum_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$, 命题成立.

补充定理 388.

a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, 基数 $b \geq \aleph_{a'}$, 则 $\aleph_a^b = (\sup_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}}$.

证明:

令 $(x_i)_{i \in \aleph_{a'}}$ 为 ω_a 的共尾子集, 则 $\aleph_a = \bigcup_{i \in \aleph_{a'}} ([0, x_i + 1])$, 令 $y_i = Card([0, x_i + 1])$, 则 $\aleph_a \leq \sum_{i \in \aleph_{a'}} y_i$, 根据补充定理 300 (1), $\aleph_a^b \leq \prod_{i \in \aleph_{a'}} y_i^b$, 因此 $\aleph_a^b \leq (\sup_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}}$.

另一方面, $(\sup_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}} \leq \aleph_a^{b \aleph_{a'}}$, 故 $(\sup_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}} \leq \aleph_a^b$, 得证.

补充定理 389.

a 为无穷基数, 基数 $b \geq a$, 则 $a^b = a \sum_{m \in [0, a[} m^b$.

证明：根据补充定理336 (2), $a^b = 2^b$, $a \sum_{m \in [0, a[} m^b = a(\text{Card}([0, a])2^b$. 由于 $\text{Card}([0, a[\leq a$, 又因为 $a \leq 2^b$, 故 $a^b = a \sum_{m \in [0, a[} m^b$.

补充定理 390.

a 为正规基数, 基数 $b \neq 0$, 则 $a^b = a \sum_{m \in [0, a[} m^b$.

证明：根据补充定理387、补充定理389可证.

补充定理 391.

a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, y 为基数, 并且, $(\forall z)(z \text{ 为基数与 } z < \aleph_a \Rightarrow z^y \leq \aleph_a)$:

(1) 如果 $y > 0$ 与 $y < \aleph_{a'}$, 则 $\aleph_a^y = \aleph_a$;

(2) 如果 $y \geq \aleph_{a'}$, 则 $\aleph_a^y = \aleph_a^{\aleph_{a'}}$.

证明:

(1) 如果 y 为自然数, 根据定理157可证.

如果 y 为无穷基数, 根据补充定理386, $\aleph_a^y \leq \aleph_a \text{Card}(a)\aleph_a$, 故 $\aleph_a^y \leq \aleph_a$, 得证.

(2) 根据补充定理388可证.

补充定理 392. 广义连续统假设下的定理1

如果 $(\forall k)(k \text{ 为序数} \Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1})$, 则:

(1) x, y 均为无穷基数, 则 $y < x \Rightarrow 2^y \leq x$;

(2) a 为序数, x, y 均为基数, $x < \aleph_a, y < \aleph_a$, 则 $x^y \leq \aleph_a$;

(3) a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, y 为基数, $y > 0$ 与 $y < \aleph_{a'}$, 则 $\aleph_a^y = \aleph_a$;

(4) a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, y 为基数, $y \leq \aleph_a$ 与 $y \geq \aleph_{a'}$, 则 $\aleph_a^y = \aleph_{a+1}$;

(5) a 为基数且 $a > 0$, 如果对任意基数 $b \neq 0$ 均有 $a^b = a \sum_{m \in [0, a[} m^b$, 则 a 为正规基数.

证明:

(1) 令 $y = \aleph_a, x = \aleph_b$ (a, b 为序数), 则 $a < b$, 故 $a + 1 \leq b$, 得证.

(2) 根据补充定理392 (1), $2^x \leq \aleph_a, 2^y \leq \aleph_a$, 则 $2^{xy} \leq \aleph_a$, 又因为 $x < 2^x$, 故 $x^y \leq \aleph_a$.

(3) 根据补充定理392 (2)、补充定理391 (1) 可证.

(4) 根据补充定理384, $\aleph_a^y > \aleph_a$, 故 $\aleph_a^y \geq \aleph_{a+1}$. 同时, $\aleph_a^y \leq \aleph_a^{\aleph_{a'}}$, 故 $\aleph_a^y \leq 2^{\aleph_a}$, 得证.

(5) 令 $a = \omega_x, \omega_{x'}$ 为 ω_x 的共尾性, 如果 $x' < x$, 令 $b = \omega_{x'}$, 则 $a^b = \aleph_{x+1}$. 根据补充定理392 (2), $a \sum_{m \in [0, a[} m^b \leq a^b$, 故 $a \sum_{m \in [0, a[} m^b \leq a$, 因此 $a \sum_{m \in [0, a[} m^b < a^b$, 矛盾.

补充定理 393.

a 为基数且 $a > 2$, 对任意基数 $m \in]0, a[$, 均有 $a^m = a$, 则 a 为正规基数.

证明：根据补充定理384可证.

补充定理 394. 广义连续统假设的等价命题

$(\forall a)(\forall m)((a \text{ 为正规基数}) \text{ 与 } (m \text{ 为基数}) \text{ 与 } (m \in]0, a[) \Rightarrow a^m = a) \Leftrightarrow (\forall k)(k \text{ 为序数} \Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1})$.

证明：如果广义连续统假设成立，根据补充定理392 (3)，左边公式为真.

反过来，如果左边公式为真，由于 \aleph_{k+1} 为正规基数，故 $\aleph_{k+1}^{\aleph_k} = \aleph_{k+1}$ ，由于 $\aleph_{k+1} \leq 2^{\aleph_k}$ ，故广义连续统假设成立.

定义 187. 支配基数 (*cardinal dominant*)

a 为无穷基数，如果对任意基数 $m < a$ 、 $n < a$ 均有 $m^n < a$ ，则称 a 为支配基数.

补充定理 395.

(1) \aleph_0 为支配基数.

(2) a 为序数，如果 \aleph_a 为支配基数，则 a 没有前序.

证明：根据定义可证.

补充定理 396.

基数 $a > 0$ ，对任意基数 $m < a$ ，均有 $2^m < a$ ，则 a 为支配基数.

证明：如果 a 为有限基数，1、2显然不符合条件； $a > 2$ 时， $2^{a-1} \geq a$ ，矛盾，故 a 为无穷基数.

如果 $a = \aleph_0$ ， a 为支配基数. $a > \aleph_0$ 时，令 $p = \sup\{m, n, \aleph_0\}$. 则无穷基数 $p < a$ ， $p^p = 2^p$ ，故 $p^p < a$ ，因此 $m^n < a$. 得证.

补充定理 397.

递归定义基数序列 $(a_i)_{i \in N}$:

$a_0 = \aleph_0$,

对任意 $i \in N$ ， $a_{i+1} = 2^{a_i}$.

令 $b = \sum_{i \in N} a_i$ ，则 b 是大于 \aleph_0 的最小的支配基数.

证明：由于 $a_1 > \aleph_0$ ，故 $b > \aleph_0$.

对任意基数 $m < b$ ，存在自然数 n 使 $m < a_n$ ，故 $2^m < b$ ，根据补充定理396， b 为支配基数.

对于支配基数 x ，如果 $x > \aleph_0$ ，且 $x < b$ ，则存在自然数 n 使 $x \leq a_n$ ，设其中最小的为 n_0 ，那么 $2^{a_{n_0-1}} \geq x$ ，矛盾. 故 $x \geq b$.

补充定理 398.

递归定义基数序列 $(a_i)_{i \in N}$:

$$a_0 = \aleph_0,$$

对任意 $i \in N$, $a_{i+1} = 2^{a_i}$.

令 $b = \sum_{i \in N} a_i$, 则:

$$(1) b^{\aleph_0} = 2^b;$$

$$(2) \aleph_0^b = b^{\aleph_0};$$

$$(3) b^{\aleph_0} = (2^b)^b.$$

证明:

(1) 根据补充定理336 (4), $b^b = 2^b$, 由于 $b > \aleph_0$, 故 $b^{\aleph_0} \leq 2^b$; 同时, $2^b = 2^{\sum_{i \in N} a_i}$, 等于 $\prod_{i \in N - \{0\}} a_i$, 故 $2^b \leq b^{\aleph_0}$, 得证.

(2) 根据补充定理398 (1) 可证.

(3) 由于 $(2^b)^b = 2^b$, 得证.

定义 188. 不可达基数 (cardinal inaccessible), 强不可达基数 (cardinal fortement inaccessible)

a 为序数, 如果 ω_a 为不可达序数, 则称 \aleph_a 为不可达基数. 不可达基数同时是支配基数的, 称为强不可达基数.

补充定理 399. 广义连续统假设下的定理2

如果 $(\forall k)(k \text{ 为序数} \Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1})$, 则不可达基数均为强不可达基数.

证明: 根据补充定理396可证.

补充定理 400.

基数 $a \geq 3$, 当且仅当对任意基数族 $(a_i)_{i \in I}$ 均有 $\text{Card}(I) < a$ 与 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i < a) \Rightarrow \prod_{i \in I} a_i < a$ 时, a 为强不可达基数.

证明:

充分性: 根据定义, a 为支配基数; 令 $a = \aleph_k$, 如果 $k = m + 1$, 则 $2^{\aleph_m} \geq a$, 矛盾, 故 k 没有前导; 同时, 根据补充定理381 (3), a 是正规基数. 充分性得证.

必要性: 令 $s = \sum_{i \in I} (a_i)$, 由于 a 为正规基数, 根据补充定理381 (3), $s < a$; 因此 $\prod_{i \in I} a_i \leq s^{\text{Card}(I)}$, 由于 a 为支配基数, 必要性得证.

补充定理 401.

a 为基数, 则:

(1) 如果对任意基数 $b > 0$ 且 $b < a$, 均有 $a^b = a$, 则对任意基数 $b > 0$, 均有 $a^b = a^{2^b}$.

(2) a 为支配基数, 如果对任意基数 $b > 0$, 均有 $a^b = a^{2^b}$, 则对任意基数 $b > 0$ 且 $b < a$, 均有 $a^b = a$.

证明:

(1) 当 $2^b > a$ 时, $a^b = 2^b$, $a2^b = 2^b$; 当 $a \geq 2^b$ 时, $b < a$, 故 $a^b = a$, $a2^b = a$, 故 $a^b = a2^b$.

(2) 当 $b < a$ 时, $2b < a$, 故 $a^b = a$.

补充定理 402.

a 为无穷基数, 当且仅当 a 为支配基数并且对任意基数 $b > 0$ 且 $b < a$ 均有 $a^b = a$ 时, a 为强不可达基数.

证明: 充分性根据补充定理393可证. 必要性根据补充定理391 (1) 可证.

定义 189. 发散映射 (*application divergente*)

序数 $a > 0$, $[0, a[$ 到 $[0, a[$ 的映射 f , 如果满足对任意序数 $l_0 < a$, 均存在序数 $m_0 < a$, 使 (x 为序数与 $x \geq m_0$ 与 $x < a$) $\Rightarrow f(x) \geq l_0$, 则称 f 为发散映射.

补充定理 403.

a, b 为序数, g 为 $[0, b[$ 到 $[0, a[$ 的严格单增映射, 并且, 对任意序数 c , $g(\sup_{d \in [0, c[} d) = \sup_{d \in [0, c[} g(d)$, $\sup_{d \in [0, b[} g(d) = a$. 则当且仅当存在 $[0, b[$ 到 $[0, b[$ 的发散映射 h 满足 $(\forall x)(x \in [0, b[\Rightarrow h(x) < x)$ 时, 存在 $[0, a[$ 到 $[0, a[$ 的发散映射 f 满足 $(\forall x)(x \in [0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

证明:

设 h 存在, 对任意序数 $x < a$, 由于 $\sup_{d \in [0, b[} g(d) = a$, 故 $\sup\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq x\} < b$, 令 $f(x) = g(h(\sup\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq x\}))$, 当 $x > 0$ 时, 由于 $\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) > x\} \neq \emptyset$, 故可令其最小元为 c , 则 $\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq x\} = [0, c[$, 由于 $g(\sup_{d \in [0, c[} d) = \sup_{d \in [0, c[} g(d)$, 故 $g(\sup_{d \in [0, c[} d) \leq x$, 因此 $g(h(\sup\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq x\})) < x$, 即 $(\forall x)(x \in [0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

同时, 对任意 $y_0 < a$, $\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \geq y_0\} \neq \emptyset$, 令 l_0 为其最小元, 则存在 $m_0 < b$ 使 (x 为基数与 $x \geq m_0$ 与 $x < b$) $\Rightarrow h(x) \geq l_0$, 令 $x_0 = g(m_0)$, 当 $x \geq x_0$ 时, $\sup\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq x\} \geq m_0$, 故 $h(\sup\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq x\}) \geq l_0$, 因此 $g(h(\sup\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq x\})) \geq y_0$, 故 f 为 $[0, a[$ 到 $[0, a[$ 的发散映射.

反过来, 设 f 存在, 对任意序数 $x < b$, 由于 $\sup_{d \in [0, b[} g(d) = a$, 故 $\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq f(g(x))\} \neq \emptyset$, 令 $h(x) = \sup\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq f(g(x))\}$, 当 $x > 0$ 时, 由于 $\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) > f(g(x))\} \neq \emptyset$, 故可令其最小元为 c , 则 $\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \leq f(g(x))\} = [0, c[$, 如果 $h(x) \geq x$, 即 $\sup_{d \in [0, c[} d \geq x$, 因此 $g(\sup_{d \in [0, c[} d) > f(g(x))$, 但 $g(\sup_{d \in [0, c[} d) = \sup_{d \in [0, c[} g(d)$, 故 $g(\sup_{d \in [0, c[} d) \leq f(g(x))$, 矛盾, 即 $(\forall x)(x \in [0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

同时, 对任意 $y_0 < b$, 令 $l_0 = g(y_0)$, 则存在 $m_0 < a$ 使 (x 为基数与 $x \geq m_0$ 与 $x < a$) $\Rightarrow f(x) \geq l_0$, $\{z | z \text{ 为序数与 } z < b \text{ 与 } g(z) \geq m_0\} \neq \emptyset$, 令 x_0 为其最小元, 当 $x \geq x_0$ 时, $g(x) \geq m_0$, 故 $f(g(x)) \geq l_0$, 因此 $h(x) \geq y_0$. 故 h 为 $[0, b[$ 到 $[0, b[$ 的发散映射.

补充定理 404.

a 为序数, 则当且仅当 ω_a 的共尾性为 ω_0 时, 存在 $[0, \omega_a[$ 到 $[0, \omega_a[$ 的发散映射 f 满足 $(\forall x)(x \in [0, \omega_a[\Rightarrow f(x) < x)$.

证明: 如果 ω_a 的共尾性为 ω_0 , 令 E 为 $[0, \omega_a[$ 的共尾子集, 令 $g(x) = \{z | z \in E \text{ 与 } z > x\}$ 的最小元, 根据补充定理403可证.

反过来, 设 f 为 $[0, \omega_a[$ 到 $[0, \omega_a[$ 的满足条件的发散映射, 令 $x_0 = 1, x_{n+1} = \{z | (\forall y) (y \text{ 为序数与 } y < \omega_a \text{ 与 } y \geq z \Rightarrow f(z) > x_n)\}$ 的最小元. 假设存在序数 $u < \omega_a$, 且对任意 $i \in N$, 均有 $x_i < u$. 设满足条件的最小序数为 u_0 , 则对任意 $i \in N, f(u_0) > x_i$, 矛盾. 故 $\bigcup_{i \in N} \{x_i\}$ 为 a 的共尾子集, 得证.

补充定理 405.

a, a' 为序数, 且 $a' > 0, \omega_a$ 的共尾性为 $\omega_{a'}$, f 为 $[0, \omega_a[$ 到 $[0, \omega_a[$ 的映射, 且满足 $(\forall x)(x \in [0, \omega_a[\Rightarrow f(x) < x)$, 则存在序数 l_0 , 使 $Card(\{x | x \in [0, \omega_a[\text{ 与 } f(x) = l_0\}) \geq \aleph_{a'}$.

证明: 假设对任意 $x \in [0, \omega_a[$, 均存在 $y \in [0, \omega_a[$ 使 $f(y) > x$, 则令 $x_0 = 1, x_{n+1} = \{z | (\forall y) (y \text{ 为序数与 } y < \omega_a \text{ 与 } y \geq z \Rightarrow f(z) > x_n)\}$ 的最小元, 故 $\bigcup_{i \in N} \{x_i\}$ 为 a 的共尾子集, 矛盾, 故存在 $x \in [0, \omega_a[$, 使 $(\forall x)(x \in [0, \omega_a[\Rightarrow f(x) \in [0, x])$, 因此 $Card(f \langle [0, \omega_a[\rangle) < \aleph_a$, 令 $x_i = Card(\{x | x \in [0, \omega_a[\Rightarrow f(x) = i\})$, 则 $\sum_{f \langle [0, \omega_a[\rangle x_i} = \aleph_a$. 根据补充定理381 (1) 可证.

补充定理 406.

F 为无穷集合, 其元素都是 E 的子集, 对任意 $A \in F$ 均有 $Card(A) = Card(F)$, 则:

(1) 存在 E 的子集 P 使 $Card(P) = Card(F)$, 并且 F 的所有元素都不是 P 的子集.

(2) 如果对 F 的任意子集 $G, Card(G) < Card(F)$, 均有 $Card(E - \bigcup_{A \in G} A) \geq Card(F)$, 则存在 E 的子集 P 使 $Card(P) = Card(F)$, 并且对任意 $A \in F$ 均有 $Card(A \cap P) < Card(F)$.

证明:

(1) 令 $Card(F) = \aleph_a$, 其中 a 为序数, h 为 $\{z | z \text{ 为序数与 } z < \omega_a\}$ 到 F 的同构. 令 $f(0) = \tau_z(z \in h(0)), g(0) = \tau_z(z \in h(0) - \{f(0)\})$, 对任意序数 $x > 0, x < \omega_a$, 令 $u = h(x) - h(x) \cap (\bigcup_{b \text{ 为序数与 } b < x} \{f(b), g(b)\})$, 由于 $2^{Card(a)} < \aleph_a$, 故 $u \neq \emptyset$, 因此令 $f(x) = \tau_z(z \in u), g(0) = \tau_z(z \in u - \{f(x)\})$. $f \langle \omega_a \rangle, g \langle \omega_a \rangle$ 不相交, 其中至少有一个符合条件, 得证.

(2) 令 $Card(F) = \aleph_a$, 其中 a 为序数, h 为 $\{z | z \text{ 为序数与 } z < F\}$ 到 F 的同构. 令 $f(0) = \tau_z(z \in E - h(0))$, 对任意序数 $x > 0, x < \omega_a$, 令 $u = E - \bigcup_{b \text{ 为序数与 } b \leq x} h(b)$, 则 $u \neq \emptyset$, 因此令 $f(x) = \tau_z(z \in u), f \langle \omega_a \rangle$ 即符合条件, 得证.

定义 190. 不相交度 (degré de disjonction)

E 为无穷集合, 集族 $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的覆盖, 且对任意 $i \in I, j \in I$ 且 $i \neq j$, 均有 $X_i \neq X_j$. 如果存在最小基数 c , 使对任意 $i \in I, j \in I$ 且 $i \neq j$, 均有 $Card(X_i \cap X_j) < c$, 则称 c 为 $(X_i)_{i \in I}$ 的不相交度.

补充定理 407.

E 为无穷集合, 集族 $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的覆盖, 且对任意 $i \in I$ 、 $j \in I$ 且 $i \neq j$, 均有 $X_i \neq X_j$, c 为 $(X_i)_{i \in I}$ 的不相交度, 则 $\text{Card}(I) \leq \text{Card}(E)^c$.

证明: 当 $c = 0$ 时, 命题显然成立.

$c > 0$ 时, E 的任意势为 c 的子集, 最多只能是 $\{A | (\exists i)(i \in I \text{ 与 } \text{Card}(X_i) \geq c \text{ 与 } A = X_i)\}$ 当中一个元素的子集, 根据补充定理337 (4), $\text{Card}(\{A | (\exists i)(i \in I \text{ 与 } \text{Card}(X_i) \geq c \text{ 与 } A = X_i)\}) \leq \text{Card}(E)^c$.

同时, $\{A | (\exists i)(i \in I \text{ 与 } \text{Card}(X_i) < c \text{ 与 } A = X_i)\} \leq \sum_{d \in [0, c[} E^d$, 而 $\sum_{d \in [0, c[} E^d \leq cE^c$, 故 $\sum_{d \in [0, c[} E^d \leq E^c$. 综上, $\text{Card}(I) \leq \text{Card}(E)^c$.

定义 191. 诺特集 (ensemble noethérien)

E 为偏序集, 如果 E 的任何非空子集都有极大元, 则称 E 为诺特集.

定理 171.

E 为诺特集, $F \subset E$, 并且, $((a \in E) \text{ 与 } (x > a \Rightarrow x \in F)) \Rightarrow (a \in F)$, 则 $F = E$.

证明: 如果 $F \neq E$, 则 $E - F$ 有极大元 b , 因此 $b \in F$, 矛盾.

补充定理 408.

(1) 诺特集的子集也是诺特集.

(2) E 为偏序集, 则有限个按导出的偏序排序的 E 的诺特子集的并集, 按导出的偏序排序, 也是诺特集.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 对子集数目用数学归纳法可证.

补充定理 409.

E 为偏序集, 当且仅当对任意 $a \in E$, 区间 $]a, \rightarrow[$ 均为诺特集时, E 为诺特集.

证明: 根据定义可证.

补充证明规则 91. 按诺特集的反偏序的相反关系排序的偏序集的超限归纳法

集合论中, E 为偏序集, 其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集. u 为字母, T 为项. 则存在集合 U 和 E 到 U 的满射 f , 使对任意 $x \in E$, 均有 $f(x) = (f(x)|u)T$, 其中 $f(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $] \leftarrow, x[$ 上的限制, 并且, 满足条件的 U 和 f 是唯一的.

证明: 设 U 和 f 、 U' 和 f' 均满足条件, $A = \{x | x \in E \text{ 与 } f(x) \neq f'(x)\}$, 如果 $A \neq \emptyset$, 则其有极小元 a , 则 $f(a) = f'(a)$, 矛盾. 唯一性得证.

设所有存在 U 和 f 的 E 的子集的并集为 A , 则 A 也存在 U 和 f . 如果 $A \neq E$, 则 $E - A$ 有极小元 a , 故 $A \cup \{a\}$ 存在 U 和 f , 矛盾, 存在性得证.

补充定理 410.

- (1) E 为诺特集, 并且 E 的任何有限子集均有最小上界, 则 E 有最大元.
(2) E 为诺特集, 并且 E 的任何有限子集均有最小上界, 则 E 为完备格.

证明:

(1) 令 x 为 E 的极大元, 如果存在 $y \in E$ 且 x, y 不可比较, $\{x, y\}$ 没有上界, 矛盾, 故 x 为 E 的最大元.

(2) 对 E 的任意非空子集 F , 令 a_0 为 F 的任意元素, 对任意 $i \in N$, 如果存在 $x > a_i$ 并且 x 是 F 的某个有限子集的最小上界, 则令 a_{i+1} 为任何一个 x , 否则令 $a_{i+1} = a_i$. 根据定理168, 存在自然数 m , 对任意 $n \geq m$, $a_m = a_n$, 因此 a_m 为 F 的最小上界. 得证.

习题 156.

当且仅当对任意 E 到 E 的映射 f , 存在 E 的非空子集 S 使 $S \neq E$ 与 $f(S) \subset S$ 时, E 为无穷集合.

证明: 对于元素数目为 n 有限集合, 令 g 为 E 到 $[1, n]$ 的双射, $f = ((\bigcup_{i \in [1, n-1]} \{(i, i+1)\}) \cup \{(n, 1)\}, [1, n], [1, n])$. 则考虑映射 $g^{-1} \circ f \circ g$. 对任意 $S \subset E$, 令 $T = g(S)$, 如果 $g^{-1} \circ f \circ g(S) \subset S$, 则 $f(T) \subset T$, 设 a 为 $[1, n] - T$ 的最小元, 如果 $a = 1$, 则 $n \notin T$, 设 T 的最大元为 b , 则 $b < n$, $f(b) = b+1$, 而 $b+1 \notin T$, 矛盾. 如果 $a \neq 1$, 则 $a-1 \in T$, $f(a-1) = a$, 而 $a \notin T$, 矛盾. 故不存在 E 的非空子集 S 使 $S \neq E$ 与 $f(S) \subset S$.

对于无穷集合 E , 对任意映射 f , 令 $x \in E$, $y_0 = x$, $y_n = f(y_{n-1})$, $S = \bigcup_{i \in N} \{y_i\}$, 则 $f(S) \subset S$. 假设 $S = E$, 则存在 $y_n = x$, 则 $S = \bigcup_{i \in [0, n-1]} \{y_i\}$, 故 $Card(S) \leq n$, 矛盾.

习题 157.

a, b, c, d 均为基数, 如果 $a < c$, $b < d$, 求证: $a + b < c + d$, $ab < cd$.

证明: 即补充定理334.

习题 158.

E 为无穷集合, 则 $Card(\{X | X \subset E \text{ 与 } Card(X) = Card(E)\}) = Card(\mathcal{P}(E))$.

证明:

设 $a \neq b$, 则 $Card(E \times \{a\} \cup E \times \{b\}) = E$, 设 f 为 $(E \times \{a\}) \cup (E \times \{b\})$ 到 E 的双射, 令 g 为 $X \rightarrow f((X \times \{a\}) \cup (X \times \{b\})) (X \in \mathcal{P}(E))$,

由于 $Card((X \times \{a\}) \cup (X \times \{b\})) = Card(E)$, 故 $Card f((X \times \{a\}) \cup (X \times \{b\})) = Card(E)$, 因此 g 为 $\mathcal{P}(E)$ 到 $\{X | X \subset E \text{ 与 } Card(X) = Card(E)\}$ 的单射, 故 $Card(\{X | X \subset E \text{ 与 } Card(X) = Card(E)\}) \geq Card(\mathcal{P}(E))$, 得证,

习题 159.

E 为无穷集合, $F = \{G | \Delta_G \text{为} E \text{的划分}\}$, 求证: $Card(F) = Card(\mathcal{P}(E))$.

证明:

令 $H = \{Y | (\exists I)(I \subset E \text{与} Y = \{E, E - I\})\}$, 根据定理142, $2^H = \mathcal{P}(E)$, 根据定理160, $Card(H) = Card(\mathcal{P}(E))$.

由于 $H \subset F$, 故 $Card(F) \geq Card(\mathcal{P}(E))$.

反过来, 令 f 为 $X \rightarrow \{\{x, y\} | x = y \text{与} x \in X\}$, 则 $f(X) \subset E \times E$, 故 $Card(F) \leq Card(\mathcal{P}(E \times E))$, 即 $Card(F) \leq Card(\mathcal{P}(E))$, 得证.

习题 160.

E 为无穷集合, 求证: E 的排列的集合, 和 $\mathcal{P}(E)$ 等势.

证明: 即补充定理337 (2).

习题 161.

E, F 均为无穷集合, $Card(E) \leq Card(F)$, 求证: E 到 F 的满射的集合 (如果 $Card E = Card(F)$), E 到 F 的映射的集合, E 的子集到 F 的映射的集合, 均和 $\mathcal{P}(F)$ 等势.

证明: 根据补充定理337 (3)、补充定理336 (2) 可证. 注: 原书习题161第一部分有误.

习题 162.

E, F 均为无穷集合, $Card(E) < Card(F)$, 求证: $Card(\{X | X \subset F \text{与} Card(X) = E\}) = Card(F^E)$, $Card(\{f | f \text{为} E \text{到} F \text{的单射}\}) = Card(F^E)$.

证明: 根据补充定理337 (4)、补充定理337 (5) 可证.

注: 习题162中, E 为无穷集合的条件可以去掉.

习题 163.

E 为无穷集合, 求证: 在 E 上的良序集合, 和 $\mathcal{P}(E)$ 等势.

证明: 任何良序的图, 都是 $E \times E$ 的子集.

另一方面, 令 F 为在 E 上的良序, 对任意 E 的排列 f , $f(x) \leq (y)$ 与 $x \in E$ 与 $y \in E$ 也是良序关系, 对于不同的 f , 其相应的良序也互不相同. 根据习题160可证.

习题 164.

令 E 为非空良序集合, 对任意 $x \in E$, 如果 x 不是 E 的最小元, 则 $] \leftarrow, x[$ 有最大元, 求证: E 同构于 N 或者 E 同构于 $[0, n]$ (n 为自然数).

证明: 如果命题为假, 根据定理84, 存在 $x \in E$, 使 $] \leftarrow, x[$ 同构于 N , 矛盾.

习题 165.

(1) a 为基数, 求证: “ x 为序数与 $\text{Card}(x) < a$ ” 为 x 上的集合化公式.

(2) 令序数 $a \geq 0$, $O'(a)$ 为良序集 $\{x | x \text{ 为序数与 } x \leq a\}$, 并按下列方式定义定义域为 $O'(a)$ 的函数 f_a :

$$f_a(0) = \text{Ord}(N),$$

对 $x > 0$ 且 $x \leq a$, 令 $f_a(x)$ 为 $\{y | y \text{ 为序数与 } (\exists z)(z \text{ 为序数与 } z < x \text{ 与 } \text{Card}(y) \leq \text{Card}(f_a(z)))\}$ 的最小上界.

求证:

令 $x \leq a$ 、 $y \leq a$, 如果 $x < y$, 则 $\text{Card}(f_a(x)) < \text{Card}(f_a(y))$;

如果 $x \leq a$ 、 $a \leq b$, 则 $f_a(x) = f_b(x)$;

特别是, $\aleph_0 = \text{Card}(N)$.

(3) 求证:

令 a 为无穷基数, $W(a)$ 为 $\{y | y \text{ 为序数与 } \text{Card}(y) < a\}$ 的最小上界, 则 $W(a)$ 是初始序数, 并且, 设其为 ω_x , 则 $a = \aleph_x$; 进而, ω_x 为 $\{y | y \text{ 为序数与 } \text{Card}(y) = a\}$ 的最小元.

令 a 为序数, $O'(a) = \{x | x \text{ 为序数与 } x \leq a\}$, $W'(a) = \{x | x \text{ 为无穷基数与 } x \leq \aleph_a\}$, 则:

映射 $x \rightarrow \aleph_x (x \in O'(a))$ 为 $O'(a)$ 到 $W'(a)$ 的同构;

特别是, 令 a 为序数, 则 $(\forall x)(x \text{ 为基数} \Rightarrow x \leq \aleph_a \text{ 或 } x \geq \aleph_a + 1)$.

令 a 为无穷序数、 b 为序数, a 没有前导, 则:

对任意定义域为 $\{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}$ 、值域的元素都是序数的严格单增映射 f , 如果 $a =$

$$\sup_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}} f(x), \text{ 即有 } \sum_{x \in \{y | y \text{ 为序数与 } y < b\}} \aleph_{f(x)} = \aleph_a.$$

(4) 求证: ω_a 为标准序数函数符号.

证明:

(1) 即补充定理340.

(2) 即补充定理341、补充定理342 (1).

(3) 第一部分根据补充定理343 (1)、补充定理343 (2) 可证, 后面得部分即补充定理344 (1)、补充定理345、补充定理346 (1).

(4) 即补充定理347.

注: 习题165 (2) 开头应改为 “ $a \geq 0$ ”.

习题 166.

(1) 求证:

a 为序数, 则 ω_a 没有前导.

如果序数 x 没有前导, 且 $x > 0$, 则 $x \geq \omega_0$.

ω_0 是不可约的序数.

令序数 $a > 0$, 则: $a\omega_0$ 是不可约的序数; $a\omega_0 > a$; 如果序数 x 不可约, 且 $x > a$, 则 $x \geq a\omega_0$.

令序数 $a > 0$, 则 $(a+1)\omega_0 = a\omega_0$.

(2) a 为序数, 求证: 当且仅当存在序数 b , 使 $a = \omega_0^b$ 时, a 为不可约的序数.

证明:

(1) 即补充定理349 (1)、补充定理349 (2)、补充定理349 (3)、补充定理350、补充定理351.

(2) 即补充定理352 (1).

习题 167.

(1) 求证:

对任意序数 a , 以及序数 $c > 1$, 存在唯一的一对序数有限序列 $(l_i)_{i \in [1, k]}$ 、 $(m_i)_{i \in [1, k]}$, 使 $a = \sum_{i \in [1, k]} c^{l_i} m_i$, 其中, 对任意 $i \in [1, k]$, $m_i > 0$ 与 $m_i < c$, 对任意 $i \in [1, k-1]$, $l_i > l_{i+1}$.

对任意序数 a , 存在唯一的单减有限序列 $(b_i)_{i \in [1, k]}$, 使 $a = \sum_{i \in [1, k]} \omega_0^{b_i}$.

(2) 令 n 为大于0的自然数, 按下列方式定义 $N - \{0\}$ 到 N 的映射 f :

$$f(1) = 1;$$

$$f(n) = \sup_{k \in [1, n-1]} (k2^{k-1} + 1)f(n-k).$$

求证:

对任意序数族 $(a_i)_{i \in [1, n]}$, $\text{Card}(\{x | (\exists g)(g \text{ 为 } [0, n] \text{ 的排列与 } x = \sum_{i \in [1, n]} a_{g(i)})\}) \leq f(n)$, 并且存在某个序数族 $(a_i)_{i \in [1, n]}$ 使等号成立.

同时, 当 $n \geq 20$ 时, $f(n) = 81f(n-5)$.

(3) 令 g 为 $[0, n]$ 的排列, 求证: 对不同的 g , $\sum_{i \in [1, n]} (\omega_0 + g(i))$ 各不相同.

证明:

(1) 即补充定理353.

(2) 考虑 a_i 的展开的最大指数, 设其中最大指数等于最小值的有 k 个序数. 在排列中, 另外 $n-k$ 个序数的序数和多对有 $f(n-k)$ 种可能. 考虑这些序数后面的序数: 如果有序数, 最后一个序数有 k 种可能, 前面的序数有 2^{k-1} 种可能, 不等式得证.

同时, 设 $f(n) = (k2^{k-1} + 1)f(n-k)$, 则令 $a_i = \omega_0 i + i$ ($i \in [1, k]$), a_{k+1} 、 a_{k+2} 、 \cdots 、 a_n 为使等号成立的 $n-k$ 个序数展开所有指数加2后得到的结果, 则此时等号成立.

通过数学归纳法可证当 $n \geq 20$ 时, $f(n) = 81f(n-5)$.

(3) 用数学归纳法可证 $\sum_{i \in [1, n]} (\omega_0 + g(i)) = \omega_0^n + \sum_{i \in [1, n]} \omega_0^{n-i} g(i)$, 得证.

习题 168.

(1) $w(x)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号, 对任意序数 $x \geq a_0$ 、 $y > x$, 均有 $w(x) < w(y)$. 求证: 对任意序数 $x \geq a_0$ 和序数 y , $w(x+y) \geq w(x) + y$. 进而, 存在序数 a , 对任意序数 $x \geq a$, 均有 $w(x) \geq x$.

(2) $w(x)$ 为定义在 $x \geq a_0$ 上的序数函数符号, 对任意序数 $x \geq a_0$, $w(x) \geq x$, 并且, 对任意序数 x, y , $x < y$ 与 $x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令 $g(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0, y \geq a_0$ 上的序数函数符号, 并满足:

第一, $(x \text{ 为序数与 } y \text{ 为序数与 } x \geq a_0 \text{ 与 } y \geq a_0) \Rightarrow g(x, y) > x$;

第二, $a_0 \leq x \text{ 与 } x \leq x' \text{ 与 } a_0 \leq y \text{ 与 } y \leq y' \Rightarrow g(x, y) \leq g(x', y')$.

$f(x, y)$ 为定义在 $x \geq a_0, y \geq 1$ 上的序数函数符号, 其按下列方式定义:

第一, 对任意序数 $x \geq a_0$, $f(x, 1) = w(x)$;

第二, 对任意序数 $x \geq a_0, y > 1$, $f(x, y) = \sup_{z \in]0, y[} g(f(x, z), x)$.

求证:

对任意序数 b , 最多存在有限个序数 y , 使 $f(x, y) = b$ 至少有一个解.

(3) $f(x, y)$ 的临界序数没有前导.

同时, 如果存在集合 A , 对任意 $x \in A$, $(x \text{ 为序数})$ 与 $f(x, c) = c$, 并且, c 为 A 的最小上界, 则 c 为 $f(x, y)$ 的临界序数.

(4) 令 $h(x) = f(x, x)$ ($x \geq a_0$), 序列 $(a_n)_{n \in N = \{0\}}$ 满足 $a_1 = a_0 + 2, a_{n+1} = h(a_n)$, 则序列 $(a_n)_{n \in N = \{0\}}$ 的最小上界, 为 $f(x, y)$ 的临界序数.

(5) 如果集合的元素都是 $f(x, y)$ 的临界序数, 则该集合最小上界是 $f(x, y)$ 临界序数.

并且, $f(x, y)$ 的临界序数是不可约的.

证明:

(1) 即补充定理355.

(2) 即补充定理356 (1).

(3) 即补充定理356 (2)、补充定理356 (3).

(4) 即补充定理356 (4).

(5) 即补充定理356 (5)、补充定理356 (6).

习题 169.

(1) 求证: a, b 为序数, $a \geq 2$, b 没有前导, 则 a^b 不可约.

a 为有限序数, $a \geq 2, b = \omega_0 c$, 则 $a^b = \omega_0^c$.

a 为无穷序数, p 为 $\{x | x \text{ 为不可约的序数与 } x \leq a\}$ 的最大元, 序数 b 没有前导, 则 $a^b = p^b$.

(2) 求证:

令序数函数符号 $f(x, y) = x^y$, c 为序数, 则当且仅当对任意序数 $a > 1, a \leq c$, 均存在 x 使 $c = a^x$ 时, c 为 f 的临界序数; 并且, 使 $c = a^x$ 成立的 x 是唯一且不可约的.

反过来, 对任意 $a > 1$ 和不可约的序数 p , a^p 为 f 的临界序数.

进而, 当且仅当存在序数 b 使 c 等于 $\omega_0^{\omega_0^b}$ 时, c 为 f 的临界序数.

(3) 令序数函数符号 $f(x, y) = xy$, 则 f 的最小的临界序数是可数序数.

证明:

- (1) 即补充定理357、补充定理359、补充定理361.
 (2) 根据补充定理362、补充定理363、补充定理364可证.
 (3) 根据补充定理365可证.

习题 170.

令序数 $a > 0$ 、 $c > 1$ ，序数有限序列 $(l_i)_{i \in [1, k]}$ 、 $(m_i)_{i \in [1, k]}$ ，使 $a = \sum_{i \in [1, k]} c^{l_i} m_i$ ，其中，对任意 $i \in [1, k]$ ， $m_i > 0$ 与 $m_i < c$ ，对任意 $i \in [1, k-1]$ ， $l_i > l_{i+1}$ 。令 $L(a) = \{x | (\exists i)(i \in [1, k] \text{ 与 } x = l_i)\}$ ，求证：

(1) 对任意 $i \in [1, k]$ ， $l_i \leq a$ ，并且，如果存在 $i \in [1, k]$ 使 $l_i = a$ ，则 a 为 x^y ($x \geq 2$) 的临界序数。

(2) 令 $L_1(a) = L(a)$ ，对于自然数 $n > 1$ ， $L_n(a) = \bigcup_{b \in L_{n-1}(a)} L(b)$ ，求证：存在自然数 n_0 ，对任意自然数 $n \geq n_0$ ，均有 $L_{n+1}(a) = L_n(a)$ ，并且， $L_n(a)$ 的元素均为 x^y 的临界序数。

证明：

(1) 根据补充定理275， $c^{l_i} \geq cl_i$ ，故 $c^{l_i} \geq l_i$ ，又因为 $a \geq c^{l_i}$ ，因此 $l_i \leq a$ 。如果存在 $i \in [1, k]$ 使 $l_i \leq a$ ，则 $a = c^a$ 。

如果 c 为有限序数，设 $a = \omega_0 d + e$ (e 为有限序数)，则 $a = \omega_0^d c^e$ ，设 $d = 1 + k$ ，则 $e = 0$ ， $d = \omega_0^k$ ，因此 d 为不可约的序数，故 $d = k$ 或 $d = 1$ 。如果 $d = 1$ ，则 $a = \omega_0$ ，故 a 为 x^y ($x \geq 2$) 的临界序数。如果 $d = k$ ，则 $a = \omega_0^a$ ，根据补充定理369， a 为 x^y ($x \geq 2$) 的临界序数。

如果 c 为无穷序数，则 $a \geq \omega_0^a$ ，故 $a = \omega_0^a$ ，根据补充定理369， a 为 x^y ($x \geq 2$) 的临界序数。

(2) 令 $M_n(a) = \{b | b \in L_n(a) \text{ 与 } b \notin L(b)\}$ ，如果对任意 $n \in N$ ， $M_n(a) \neq \emptyset$ ，令 y_n 为 $M_n(a)$ 的最大元。则 $\{z | (\exists y)(y \in N \text{ 与 } z = y_n)\}$ 有最小元 y_m ，但 $y_m \notin L(y_m)$ ，故对任意 $z \in M_{n+1}(a)$ ，均有 $z < y_m$ ，即 $y_{m+1} < y_m$ ，矛盾。

注：原书习题170关于“ $a = 0$ ”的内容有误。

习题 171.

(1) 求证：

无穷正规序数都是初始序数。

a 为序数，如果 $a = 0$ 或 a 有前导，则初始序数 ω_a 是正规序数。

$a > 0$ ， a 没有前导，且 $a < \omega_a$ ，则初始序数 ω_a 是奇异序数。

ω_{ω_0} 是最小的奇异序数。

(2) 求证： $a > 0$ ，且 ω_a 为不可达序数，则 $a = \omega_a$ 。

令 k 为最小的艾普塞朗数，则 ω_k 的共尾性是 ω_0 。

进而，当 $a > 0$ 、 $a \leq k$ 时， ω_a 不是不可达序数。

(3) E 为全序集，求证： E 的共尾性是正规序数；如果 E 非空且没有最大元，则 E 的共尾性是初始序数；进而，令 ω_a 的共尾性为 $\omega_{a'}$ ，则 $a' \leq a$ ，并且，当且仅当 $a' = a$ 时， ω_a 为正

规序数.

(4) a 为序数, ω_a 为正规序数, I 为良序集且 $\text{Ord}(I) < \omega_a$, $(x_i)_{i \in I}$ 为序数族, 如果对任意 $i \in I$ 均有 $x_i < \omega_a$, 求证: $\sum_{i \in I} x_i < \omega_a$.

证明:

- (1) 即补充定理372、补充定理373、补充定理374、补充定理375.
- (2) 即补充定理376、补充定理378.
- (3) 前两部分即补充定理379, 最后一部分根据定义可证.
- (4) 即补充定理380 (2).

习题 172.

a 为序数, 求证: 当且仅当对任意基数族 $(x_i)_{i \in I}$, 若 $\text{Card}(I) < \aleph_a$, 且对任意 $i \in I$ 均有 $x_i < \aleph_a$, 则 $\sum_{i \in I} (x_i)_{i \in I} < \aleph_a$ 时, \aleph_a 为正规基数.

证明: 即补充定理381 (3).

习题 173.

a 为序数, 基数 $m \neq 0$, 则:

- (1) $\aleph_{a+1}^m = \aleph_a^m \aleph_{a+1}$.
- (2) 序数 c 满足 $\text{Card}(c) \leq m$, 则 $\aleph_{a+c}^m = \aleph_a^m \aleph_{a+c}^{\text{Card}(c)}$.
- (3) $\text{Card}(a) \leq m$, 则 $\aleph_a^m = 2^m \aleph_a^{\text{Card}(a)}$.

证明: 即补充定理382.

习题 174.

(1) a, b 为序数, a 没有前导, $x \rightarrow s_x$ 为 $[0, \omega_b[$ 到 $[0, a[$ 的严格单增映射, 且 $\sup_{x \in [0, \omega_b[} s_x = a$, 求证: $\aleph_a \aleph_b = \prod_{x \in [0, \omega_b[} \aleph_{s_x}$.

(2) a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, 则 $\aleph_a^{\aleph_{a'}} > \aleph_a$. 并且, 令 c 为序数, 如果存在基数 n 使 $\aleph_a = n^{\aleph_c}$, 则 $c < a'$.

(3) a, a' 为序数, 令 $\omega_{a'}$ 为 ω_a 的共尾性, 序数 $b < a'$, 则 $\aleph_a^{\aleph_b} = \sum_{c \in [0, a[} \aleph_c^{\aleph_b}$.

证明:

- (1) 即补充定理383.
- (2) 即补充定理384、补充定理385.
- (3) 即补充定理386.

注: 习题174 (1) 中“严格单增”的条件可以去掉.

习题 175.

(1) 求证: a 为正规基数, 基数 $b \neq 0$, 则 $a^b = a \sum_{m \in [0, a[} m^b$. 并且, 如果 $(\forall k)(k \text{ 为序数} \Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_k + 1)$, a 为基数且 $a > 0$, 如果对任意基数 $b \neq 0$ 均有 $a^b = a \sum_{m \in [0, a[} m^b$, 则 a 为正规基数.

(2) a 为基数且 $a > 2$, 对任意基数 $m \in]0, a[$, 均有 $a^m = a$, 求证: a 为正规基数.

(3) 求证: $(\forall a)(\forall m)((a \text{ 为正规基数}) \text{ 与 } (m \text{ 为基数}) \text{ 与 } (m \in]0, a[) \Rightarrow a^m = a) \Leftrightarrow (\forall k)(k \text{ 为序数} \Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1})$.

证明:

(1) 即补充定理390、补充定理392 (5).

(2) 即补充定理393.

(3) 即补充定理394.

习题 176.

(1) 基数 $a > 0$, 对任意基数 $m < a$, 均有 $2^m < a$, 求证: a 为支配基数.

(2) 递归定义基数序列 $(a_i)_{i \in N}$:

$$a_0 = \aleph_0,$$

$$\text{对任意 } i \in N, a_{i+1} = 2^{a_i}.$$

令 $b = \sum_{i \in N} a_i$, 求证: b 是大于 \aleph_0 的最小的支配基数.

(3) 递归定义基数序列 $(a_i)_{i \in N}$:

$$a_0 = \aleph_0,$$

$$\text{对任意 } i \in N, a_{i+1} = 2^{a_i}.$$

令 $b = \sum_{i \in N} a_i$, 求证:

$$b^{\aleph_0} = 2^b;$$

$$\aleph_0^b = b^{\aleph_0};$$

$$b^{\aleph_0} = (2^b)^b.$$

证明:

(1) 即补充定理396.

(2) 即补充定理397.

(3) 即补充定理398.

习题 177.

(1) 求证: 如果 $(\forall k)(k \text{ 为序数} \Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_k + 1)$, 则不可达基数均为强不可达基数.

(2) 基数 $a \geq 3$, 求证: 当且仅当对任意基数族 $(a_i)_{i \in I}$ 均有 $\text{Card}(I) < a$ 与 $(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i < a) \Rightarrow \prod_{i \in I} a_i < a$ 时, a 为强不可达基数.

(3) a 为无穷基数, 求证: 当且仅当 a 为支配基数并且满足下列条件之一时, a 为强不可达基数:

第一, 对任意基数 $b > 0$ 且 $b < a$ 均有 $a^b = a$;

第二, 如果对任意基数 $b > 0$, 均有 $a^b = a^{2^b}$, 则对任意基数 $b > 0$ 且 $b < a$, 均有 $a^b = a$.

证明:

(1) 即补充定理399;

(2) 即补充定理400;

(3) 根据补充定理401、补充定理402可证.

习题 178.

(1) a, b 为序数, g 为 $[0, b[$ 到 $[0, a[$ 的严格单增映射, 并且, 对任意序数 c , $g(\sup_{d \in [0, c[} d) = \sup_{d \in [0, c[} g(d)$, $\sup_{d \in [0, b[} g(d) = a$. 求证: 当且仅当存在 $[0, b[$ 到 $[0, b[$ 的发散映射 h 满足 $(\forall x)(x \in [0, b[\Rightarrow h(x) < x)$ 时, 存在 $[0, a[$ 到 $[0, a[$ 的发散映射 f 满足 $(\forall x)(x \in [0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

(2) a 为序数, 求证: 当且仅当 ω_a 的共尾性为 ω_0 时, 存在 $[0, \omega_a[$ 到 $[0, \omega_a[$ 的发散映射 f 满足 $(\forall x)(x \in [0, \omega_a[\Rightarrow f(x) < x)$.

(3) a, a' 为序数, 且 $a' > 0$, ω_a 的共尾性为 $\omega_{a'}$, f 为 $[0, \omega_a[$ 到 $[0, \omega_a[$ 的映射, 且满足 $(\forall x)(x \in [0, \omega_a[\Rightarrow f(x) < x)$, 求证: 存在序数 l_0 , 使 $\text{Card}(\{x | x \in [0, \omega_a[\text{ 与 } f(x) = l_0\}) \geq \aleph_{a'}$.

证明:

(1) 即补充定理403.

(2) 即补充定理404.

(3) 即补充定理405.

习题 179.

F 为无穷集合, 其元素都是 E 的子集, 对任意 $A \in F$ 均有 $\text{Card}(A) = \text{Card}(F)$, 求证:

(1) 存在 E 的子集 P 使 $\text{Card}(P) = \text{Card}(F)$, 并且 F 的所有元素都不是 P 的子集.

(2) 如果对 F 的任意子集 G , $\text{Card}(G) < \text{Card}(F)$, 均有 $\text{Card}(E - \bigcup_{A \in G} A) \geq \text{Card}(F)$, 则存在 E 的子集 P 使 $\text{Card}(P) = \text{Card}(F)$, 并且对任意 $A \in F$ 均有 $\text{Card}(A \cap P) < \text{Card}(F)$.

证明: 即补充定理406.

习题 180.

(1) E 为无穷集合, 集族 $(X_i)_{i \in I}$ 为 E 的覆盖, 且对任意 $i \in I, j \in I$ 且 $i \neq j$, 均有 $X_i \neq X_j$, c 为 $(X_i)_{i \in I}$ 的不相交度, 求证: $\text{Card}(I) \leq \text{Card}(E)^c$.

(2) a 为序数, 集合 F 满足 $\text{Card}(F) \geq 2$ 且 $\text{Card}(F) < \aleph_a$, E 为 $[0, \omega_a[$ 不同于自身的片段集合到 F 的映射的集合. 对任意 $[0, \omega_a[$ 到 F 的映射 f , 令 K_f 为 f 在 $[0, \omega_a[$ 的不同于自身的片段上的限制的集合. 令 $G = (K_f)_{f \in \{z | z \text{ 为 } [0, \omega_a[\text{ 到 } F \text{ 的映射}\}}$. 求证: $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)\aleph_a$, G 为 E 的覆盖, $\text{Card}(\{z | z \text{ 为 } [0, \omega_a[\text{ 到 } F \text{ 的映射}\}) = \text{Card}(F)\aleph_a$, 并且其不相交度等于 \aleph_a .

(3) E 为无穷集合, $Card(E) = a$, 基数 $p > 1$ 、 $c > p$, 并且, 对任意基数 $m < c$, 均有 $p^m < a$, 同时 $a = \sum_{m \in [0, c[} p^m$. 求证: 存在集族 $(X_i)_{i \in I}$, 对任意 $i \in I$, $Card(X_i) = c$, $Card(I) = p^c$, 且其不相交度等于 c . 特别是, E 为可数无穷集合时, 存在 E 的覆盖 $(X_i)_{i \in I}$, $Card(I) = 2^{\aleph_0}$, 且对任意 $i \in I$ 、 $j \in I$, $X_i \cap X_j$ 为有限集合.

证明:

(1) 即补充定理407.

(2) $Card(E) = \sum_{m \in [0, \aleph_a[} Card(F)^m$, 故 $Card(E) \leq \aleph_a Card(F)^{\aleph_a}$, 因此 $Card(E) \leq Card(F)^{\aleph_a}$.

根据定义可证 G 为 E 的覆盖、 $Card(\{z | z \text{为 } [0, \omega_a[\text{到 } F \text{的映射}\}) = Card(F)^{\aleph_a}$.

对任意 $[0, \omega_a[$ 到 F 的映射 f 、 g , $K_f \cap K_g = \bigcup_{x \in \{x | x \in [0, \omega_a[\text{与 } f|Sx=g|Sx\}}$ $\{f|Sx\}$, 故 $Card(K_f \cap K_g) < \aleph_a$. 同时, 对任意基数 $c < \aleph_a$, 令 u 、 v 是 F 的不同元素, h 为任何一个 $[0, c[$ 到 F 的映射, 令 f 、 g 为 h 在 $[0, \omega_a[$ 上的延拓, 其中, 当 $x \in [c, \omega_a[$ 时, $f(x) = u$, $g(x) = v$, 则 $Card(K_f \cap K_g) = c$, 故 G 的不相交度等于 \aleph_a .

(3) 类似习题180 (2) 可证.

习题 181.

E 为无穷集合, F 的元素均为 E 的子集, $A \in F$, 基数 $a \geq \aleph_0$, $Card(E) = a$ 、 $Card(A) = a$ 、 $Card(F) = a$, 求证: 存在 E 的划分 $(B_i)_{i \in I}$, 使 $Card(I) = a$, 对任意 $i \in I$ 均有 $Card(B_i) = a$, 并且对任意 $i \in I$ 、 $A \in F$ 均有 $A \cap B_i \neq \emptyset$.

证明: 令 $a = \aleph_c$, h_0 为 $[0, \omega_c[$ 到 F 的同构. 令 $f_0(0) = \tau_x(x \in h_0(0))$, 对于 $i \in [1, \omega_c[$, $h_0(i) \cap (\bigcup_{j \in [0, i[} \{f_0(j)\}) \neq \emptyset$, 故令 $f_0(i) = \tau_x(x \in h_0(i) \cap (\bigcup_{j \in [0, i[} \{f_0(j)\}))$, $g(0) = f_0 \langle [0, \omega_c[\rangle$; 对 $k \in [1, \omega_c[$, $x \in [0, \omega_c[$, 令 $h_k(x) = h_0(x) \cap (\bigcup_{j \in [0, k[} g(j))$, 则 $h_k(x) \neq \emptyset$, 此时, 令 $f_k(0) = \tau_x(x \in h_k(0))$, 对于 $i \in [1, \omega_c[$, $h_k(i) \cap (\bigcup_{j \in [0, i[} \{f_k(j)\}) \neq \emptyset$, 故令 $f_k(i) = \tau_x(x \in h_k(i) \cap (\bigcup_{j \in [0, i[} \{f_k(j)\}))$, $g(k) = f_k \langle [0, \omega_c[\rangle$.

最后令 $B_0 = E - \bigcup_{j \in [1, \omega_c[} g(j)$, 对 $i \in [1, \omega_c[$, $B_i = g(i)$, $I = [0, \omega_c[$, 则 $(B_i)_{i \in I}$ 满足要求.

习题 182.

L 为无穷集合, $(E_l)_{l \in L}$ 为非空族, 对任意自然数 $n > 0$, $Card(\{l | l \in L \text{与 } Card(E_l) > n\}) = Card(L)$, $E = \prod_{l \in L} E_l$, 求证: 存在 $F \subset E$, $Card(F) = 2^{Card(E)}$, 并且, 对 F 的元素组成的任意有限序列 $(f_k)_{k \in [1, n]}$, 均存在 $l \in L$, 使所有的 $f_k(l)$ 各不相同.

证明:

对任意自然数 n , 令 $A_n = \{l | l \in L \text{与 } Card(E_l) = n\}$; 如果 A_n 为有限集合, 令 g 为 A_n 到 $[0, Card(A_n) - 1]$ 的双射, 当 $l \in A_n$ 时, $f(l) = \{g(l)\}$; 如果 A_n 为无穷集合, 令 h 为 A_n 到 $N \times A_n$ 的双射, 当 $l \in A_n$ 时, $f(l) = pr_1(h(l))$.

对任意自然数 n , 令 $B_n = \{l | l \in L \text{ 与 } f(l) = n\}$, 对任意自然数 j , 令 $S_j = [2^j, 2^{j+1} - 1]$, $L_j = \bigcup_{k \in S_j} B_k$, 则对任意 $l \in L_j$, $\text{Card}(E_l) \geq 2^j$, $\text{Card}(L_j) = \text{Card}(L)^j$, 并且, $(L_j)_{j \in N}$ 是 L 的划分.

令 p_j 为 L_j 到 $\prod_{i \in [1, j]} L$ 的双射, q_l 为 $\prod_{i \in [1, j]} \{0, 1\}$ 到 E_l 的单射, $G = \mathcal{F}(L; \{0, 1\})$, 对任意 $g \in G$, 设 $l \in L_j$, $p_j(l) = (x_i)_{i \in [1, j]}$, 则令 $f_g(l) = q_l(g(x_i)_{i \in [1, j]})$. 令 $F = \bigcup_{g \in G} \{f_g\}$.

对 F 的元素组成的任意有限序列 $(f_k)_{k \in [1, n]}$, 令 $A = \bigcup_{(i, j) \in [1, n] \times [1, n] - \Delta_{[1, n]}} \{\tau_z(g_i(z) \neq g_j(z))\}$, 则 A 为有限集合, 令 $l = p_{\text{Card}(A)}^{-1}((i)_{i \in A})$, 则所有的 $f_k(l)$ 各不相同, 得证.

注: 原书习题182遗漏“非空”的条件.

习题 183.

E 为无穷集合, n 为自然数, $F_n(E)$ 为 E 的元素数目为 n 的子集的集合, m 为自然数, $(x_i)_{i \in [1, m]}$ 为 $F_n(E)$ 的划分, 求证: 存在 $i \in [1, m]$ 和 E 的无穷子集 F , 使 F 的元素数目为 n 的子集, 都是 x_i 的元素.

证明:

命题对 $n = 1$ 显然成立; 假设命题对 $[1, n - 1]$ 成立, 则对任意 $a \in E$, 均存在 $j(a) \in [1, m]$ 和 $E - \{a\}$ 的无穷子集 $M(a)$, 使 $M(a)$ 任意元素数目为 $n - 1$ 的子集 A , 都满足 $A \cup \{a\}$ 为 $X_{j(a)}$ 的元素.

令 a_1 为 E 的任意元素, a_2 为 $M(a_1)$ 的任意元素, a_3 为 $M(a_1)$ 按照同样方法确定的无穷子集的任意元素, 以此类推. 则 $\bigcup_{i \in N} \{a_i\}$ 符合要求, 得证.

习题 184.

(1) E 为偏序集, 求证: 有限个按导出的偏序排序的 E 的诺特子集的并集, 按导出的偏序排序, 也是诺特集.

(2) E 为偏序集, 求证: 当且仅当对任意 $a \in E$, 区间 $]a, \rightarrow [$ 均为诺特集时, E 为诺特集.

(3) E 为偏序集, 其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集. u 为字母, T 为项. 求证: 存在集合 U 和 E 到 U 的映射 f , 使对任意 $x \in E$, 均有 $f(x) = (f(x)|u)T$, 其中 $f(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $] \leftarrow, x[$ 上的限制, 并且, 满足条件的 U 和 f 是唯一的.

(4) E 为诺特集, 并且 E 的任何非空有限子集均有最小上界. 求证: 如果 E 有最小元, 则 E 为完备格; 如果 E 没有最小元, 则将 a 添加到集合 E 并使 a 为最小元得到的偏序集 E' , 为完备格.

证明:

(1) 即补充定理408 (2).

(2) 即补充定理409.

(3) 即补充证明规则91.

(4) 根据补充定理410 (2) 可证.

注: 原书习题184 (4) 遗漏“非空”的条件.

习题 185.

E 为格, 其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集.

求证:

对任意 $a \in E$, a 可以表示为 $\sup_{i \in [1, n]} e_i$, 其中, n 为自然数, 并且, 对任意 $i \in [1, n]$, e_i 为 E 的不可约元素.

J 为其不可约元素集合. 令 $S(x) = \{y | y \in J \text{ 与 } y \leq x\}$, 则 $x \rightarrow S(x)$ 为 E 到按包含关系排序的 $\mathcal{P}(J)$ 的一个子集的同构, 并且, $S(\inf(x, y)) = S(x) \cap S(y)$.

E 为分配格, J 为其不可约元素集合. 令 $S(x) = \{y | y \in J \text{ 与 } y \leq x\}$, 则 $x \rightarrow S(x)$ 为 E 到按包含关系排序的 $\mathcal{P}(J)$ 的一个子集的同构, 并且, $S(\sup(x, y)) = S(x) \cup S(y)$; 同时, 令 J^* 为按在 J 上的偏序关系的相反关系排序的偏序集, $I = \{0, 1\}$, $A(J^*, I)$ 为 J^* 到 I 的单增映射的集合, 按 $f \in A(J^*, I)$ 与 $g \in A(J^*, I)$ 与 $(\forall x)(x \in J^* \Rightarrow f(x) \leq g(x))$ 排序, 则 E 同构于 $A(J^*, I)$.

E 为分配格, J 为其不可约元素集合. a 为 E 的最小元, $P = J - \{a\}$. 令 $A = \{a | (\exists X)((X \text{ 为 } P \text{ 的自由子集}) \text{ 与 } \text{Card}(X) = a)\}$, A 的最大元为 n , 则 E 同构于全序集有限族的乘积的某个内部格.

证明:

第一部分: 设 a 不是不可约元素, 则存在 b, c 使 $\sup(b, c) = a$ 且 $b < a$, $c < a$. 则 b, c 是不可比较的, 令 $\inf(b, c) = d$. 如果 $\{x | x \in E \text{ 与 } x < b \text{ 与 } (\text{非 } x \leq d)\}$ 为空, 则 b 为不可约元素, 令 $e = b$; 否则 $\{x | x \in E \text{ 与 } x < b \text{ 与 } (\text{非 } x \leq d)\}$ 存在极小元 e , e 为不可约元素. 在两种情况下均有 $a = \sup(e, c)$. 根据定理168可证.

其他部分, 类似习题133 (2)、习题134 (2)、习题135 (2) 可证.

习题 186.

A 为无穷集合, E 为 A 的无穷子集集合, 并按包含关系的相反关系排序. 求证: E 为完全右方分支集, 但不是右方无向集.

证明: 根据定义可以证明 E 为完全右方分支集. 对任意无穷集合 $y \subset A$ 且 $y \neq A$, $a \in A - y$, 令 $x = y \cup \{a\}$, 则对任意无穷集合 $z \subset x$, $z \cap y \subset A$ 且为无穷集合. 根据补充定理212, E 不是右方无向集.

习题 187.

$(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (P_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 均为两两不相交且不全为空集的有限集合序列, 其中, 指标集 \mathbb{Z} 为整数集. 令 $a_n = \text{Card}(M_n)$, $b_n = \text{Card}(P_n)$. 如果存在自然数 $k > 0$, 使对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 和自然数 $l \geq 1$, 均有:

$$a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+l} \leq b_{n-k} + b_{n-k+1} + \cdots + b_{n+k+l};$$

$$b_n + b_{n+1} + \cdots + b_{n+l} \leq a_{n-k} + a_{n-k+1} + \cdots + a_{n+k+l}.$$

$$\text{令 } M = \bigcup_{n \in Z} M_n, P = \bigcup_{n \in Z} P_n.$$

求证: 存在 M 到 P 的双射 f , 使对任意 $n \in Z$, 均有:

$$f(M_n) \subset \bigcup_{i \in [n-k-1, n+k+1]} P_i, f^{-1}(P_n) \subset \bigcup_{i \in [n-k-1, n+k+1]} M_i.$$

证明: 令 M 、 P 按各集合全序的序数和排序, 设 $M_{m_0} \neq \emptyset$, 其最小元为 x ; d 为所有 $b_{n-k} + b_{n-k+1} + \cdots + b_{n+k+l} - (a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+l})$ 、 $a_{n-k} + a_{n-k+1} + \cdots + a_{n+k+l} - (b_n + b_{n+1} + \cdots + b_{n+l})$ ($n \in Z$ 、自然数 $l \geq 1$) 的最小值, 令 g 为 M 到 P 的同构, 其中 $g(x)$ 为 $\bigcup_{i \in [m_0-k, \rightarrow[} P_i$ 的最小元素.

令 $S_0 = 0$, $S_i = \sum_{j \in [-k, i-k-1]} b_{m_0+j} - \sum_{j \in [0, i-1]} a_{m_0+j}$ ($i > 0$), $S_i = \sum_{j \in [-1, i]} a_{m_0+j} - \sum_{j \in [-k-1, i-k]} b_{m_0+j}$ ($i < 0$), $T_0 = \sum_{j \in [-k, k-1]} b_{m_0+j}$, $T_i = \sum_{j \in [-k, k+i-1]} b_{m_0+j} - \sum_{j \in [0, i-1]} a_{m_0+j}$ ($i > 0$), $T_i = \sum_{j \in [-1, i]} a_{m_0+j} + \sum_{j \in [-k, k+i-1]} b_{m_0+j}$ ($i < 0$ 且 $i > -2k$), $T_{-2k} = \sum_{j \in [-1, -2k]} a_{m_0+j}$, $T_i = \sum_{j \in [-1, i]} a_{m_0+j} - \sum_{j \in [-k-1, i+k]} b_{m_0+j}$ ($i < -2k$). 则对任意 $i \in Z$ 、 $j \in Z$, $S_i \leq T_j$, 因此存在 d , 对于任意 $i \in Z$, 均有 $S_i \leq d$, $T_i \geq d$, 令 f 为 M 到 P 的同构, 其中 $f(x)$: $\bigcup_{i \in [m_0-k, \rightarrow[} P_i$ 的第 $d+1$ 个元素. 则 f 满足要求.

注:

$$\text{习题187的结论可加强为 } f(M_n) \subset \bigcup_{i \in [n-k, n+k]} P_i, f^{-1}(P_n) \subset \bigcup_{i \in [n-k, n+k]} M_i.$$

同时, 习题187涉及尚未介绍的“整数”知识.

习题 188.

a 、 b 为基数, $a \geq 2$ 、 $b \geq 1$, 其中至少有一个是无穷基数. E 为集合, $F \subset \mathcal{P}(E)$, $\text{Card}(F) > a^b$, 并且对任意 $X \in F$, 均有 $\text{Card}(X) \leq b$. 求证: 存在 $G \subset F$, $\text{Card}(G) > a^b$, 并且 G 的任何两个元素都有相同的交集.

证明:

令 c 为大于 a^b 的最小基数, $G \subset F$ 且 $\text{Card}(G) = c$, $M = \bigcup_{X \in G} X$. 假设 $M \leq a^b$, 若 b 为有限基数, 根据补充定理337 (7), $\text{Card}(G) \leq a^b$, 若 b 为无穷基数, 根据补充定理337 (8), $\text{Card}(G) \leq a^b$, 矛盾, 因此 $\text{Card}(M) \geq c$, 同时, $\text{Card}(M) \leq \sum_{X \in G} \text{Card}(X)$, 故 $\text{Card}(M) = c$.

令 M 按最小良序排序, 在 b 上的最小良序的偏序类为 r . 对任意 $X \in G$, 令其偏序类为 t_X , f_X 为 $[0, t_X]$ 到 X 的同构, 对任意序数 $i \in [0, r]$, $y_i = \bigcup_{X \in \{Y \in G \mid i < t_Y\}} \{f_X(i)\}$, 由于 $\bigcup_{i \in [0, r]} y_i = M$, 故存在序数 $i \in [0, r]$, 使 $\text{Card}(y_i) = c$, 设满足条件的最小序数为 j , 故 $\text{Card}(\bigcup_{i \in [0, j]} y_i) < c$.

进而, 存在 $N \subset G$, 使 $\text{Card}(N) = c$ 且对任意 $Y \in N$, $f_Y(j)$ 各不相同. 令 $N_0 \subset N$, 使 $\text{Card}(N_0) = c$ 且对任意 $Y \in N_0$, $f_Y(0)$ 全部相等, 进而, 递归定义 N_i ($i < j$), 令 $N_i \subset \bigcap_{k \in [0, i[} N_k$, 且对任意 $Y \in N_0$, $f_Y(i)$ 全部相等.

令 $Q = \bigcup_{i \in [0, j[} f_Y(i)$, $R = \bigcap_{i \in [0, j[} N_i$, s 为在 c 上的最小良序的偏序类. 令 $X_0 \in R$ 且 $f_{X_0}(j)$ 是所有 $f_Y(j)$ ($Y \in R$) 的最小元, 进而, 递归定义 X_i ($i < s$), 令 X_i 为所有 $f_Y(j)$ ($Y \in R$ 且 $Y - Q \subset M - \bigcup_{j \in [0, i[} X_j$) 的最小元. 因此, 对任意 $i \in [0, s[$ 、 $j \in [0, s[$ 且 $i \neq j$, 均有 $X_i \cap X_j = Q$, 得证.

3.7 射影极限和归纳极限 (Limites projectives et limites inductives)

定义 192. 集合射影系统 (*système projectif d'ensembles*), 集族的射影极限 (*limite projective de famille d'ensembles*), 集族的射影极限到集合的规范映射 (*application canonique de la limite projective da famille d'ensembles dans un ensemble*)

I 为预序集, $(E_a)_{a \in I}$ 为集族, $(f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 为函数族, 其中 f_{ab} 为 E_b 到 E_a 的映射, 并且满足下列条件:

第一, 如果 $a \leq b$, $b \leq c$, 则 $f_{ab} \circ f_{bc} = f_{ac}$;

第二, $f_{aa} = \text{Id}_{E_a}$,

则 $((E_a)_{a \in I}, (f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 称为关于 I 的集合射影系统, 在没有歧义的情况下可以简记为 $((E_a), (f_{ab}))$ 或 (E_a, f_{ab}) .

令 $G = \prod_{a \in I} E_a$, $E = \{x | x \in G \text{ 与 } (\forall a)(\forall b)(a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b \Rightarrow pr_a x = f_{ab}(pr_b x))\}$, 则称 E 为集族 $(E_a)_{a \in I}$ 对于函数 $(f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限, 记作 $\lim_{\leftarrow a} (E_a, f_{ab})$, 在没有歧义的情况下可以简记为 $\lim_{\leftarrow} (E_a, f_{ab})$ 或 $\lim_{\leftarrow} E_a$. pr_a 在 E 上的限制称为 E 到 E_a 的规范映射.

补充定理 411.

$((E_a)_{a \in I}, (f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于预序集 I 的集合射影系统, $E = \lim_{\leftarrow a} (E_a, f_{ab})$, 对任意 $a \in I$, 令 E 到 E_a 的规范映射为 f_a , 则当 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$ 时, $f_a = f_{ab} \circ f_b$.

证明: 根据定义可证.

补充定理 412.

I 为按 $x = y$ 与 $x \in I$ 排序的预序集, $(E_a)_{a \in I}$ 为集族, $(f_{aa})_{a \in I}$ 为函数族, 且对任意 $a \in I$, $f_{aa} = \text{Id}_{E_a}$. 则 $\lim_{\leftarrow} E_a = \prod_{a \in I} E_a$.

证明: 由于 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b \Rightarrow a = b$. 令 $G = \prod_{a \in I} E_a$, 因此, 对任意 $x \in G$, $pr_a x = f_{aa}(pr_a x)$ 为真, 得证.

补充定理 413.

关于 \emptyset 的集合射影系统的射影极限为 $\{\emptyset\}$.

证明：根据定义可证.

补充定理 414.

(E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统，其中 I 为右方有向集， $\lim_{\leftarrow} E_a = E$ ，对任意 $a \in I$ ，令 f_a 为 E 到 E_a 的规范映射，如果对任意 $a \in I$ 、 $b \in I$ ， f_{ab} 均为单射，则对任意 $a \in I$ ， f_a 为单射.

证明：

设 $x \in E$ 、 $y \in E$ ，且 $f_a(x) = f_a(y)$ ，对任意 $b \in I$ ，存在 $c \in I$ 使 $a \leq c$ 、 $b \leq c$ ，由于 f_{ac} 为单射，故 $f_c(x) = f_c(y)$ ，故 $f_b(x) = f_b(y)$. 即对任意 $b \in I$ ， $pr_b x = pr_b y$ ，因此 $x = y$ ，得证.

补充定理 415. 限制指标集可以得到集合射影系统

I 为预序集， $((E_a)_{a \in I}, (f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于 I 的集合射影系统， $(E_a)_{a \in I}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限为 E ， J 为 I 的预序子集，则 $((E_a)_{a \in J}, (f_{ab})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b})$ 是关于 J 的集合射影系统，并且，令 E' 为 $(E_a)_{a \in J}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限，对任意 $a \in I$ ， E 到 E_a 的规范映射为 f_a ，则对任意 $x \in E$ ， $(f_a(x))_{a \in J} \in E'$.

证明：根据定义可证.

定义 193. 通过限制得到的集合射影系统 (*système projectif d'ensembles obtenu par restriction*)，集族的射影极限的之间的规范映射 (*application canonique entre limites projectives de familles d'ensembles*)

I 为预序集， $((E_a)_{a \in I}, (f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于 I 的集合射影系统， J 为 I 的预序子集，则 $((E_a)_{a \in J}, (f_{ab})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b})$ 称为通过将指标集限制在 J 上得到的集合射影系统.

令 $(E_a)_{a \in I}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限为 E ，为 $(E_a)_{a \in J}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限为 E' ，对任意 $a \in I$ ， E 到 E_a 的规范映射为 f_a ，则函数 $x \rightarrow (f_a(x))_{a \in J}$ 称为 E 到 E' 的规范映射.

补充定理 416.

I 为预序集， J 为 I 的预序子集， J' 为 J 的预序子集， $(E_a)_{a \in I}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限为 E ， $(E_a)_{a \in J}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限为 E' ， $(E_a)_{a \in J'}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in J' \text{ 与 } b \in J' \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限为 E'' ， E 到 E' 的规范映射为 g ， E' 到 E'' 的规范映射为 g' ， E 到 E'' 的规范映射为 g'' ，则 $g'' = g' \circ g$.

证明：根据定义可证.

定理 172. 集合到集族的映射族的射影极限唯一存在

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, $E = \varprojlim E_a$, 对任意 $a \in I$, E 到 E_a 的规范映射为 f_a . 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 F 到 E_a 的映射, 并且 $(\forall a)(\forall b)(a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b \Rightarrow f_{ab} \circ u_b = u_a)$. 则存在唯一的 F 到 E 的映射 u , 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = f_a \circ u)$, 此时, 该映射 u 满足 $(\forall y)(y \in F \Rightarrow u(y) = (u_a(y))_{a \in I})$, 并且, $(\exists y)(\exists z)(\exists a)(y \in F \text{ 与 } z \in F \text{ 与 } a \in I \text{ 与 } u_a(y) \neq u_a(z)) \Leftrightarrow (u \text{ 为单射})$.

证明:

$u_a = f_a \circ u$, 即对任意 $y \in F$, $pr_a(u(y)) = u_a(y)$, 因此, 当且仅当 $u(y) = (u_a(y))_{a \in I}$ 时, $u_a = f_a \circ u$; 同时, 当 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b$ 时, $u_a(y) = f_{ab}(u_b(y))$, 因此, $pr_a(u(y)) = f_{ab}(pr_b(u(y)))$, 故 $u(y) \in E$, 故 u 为 F 到 E 的映射. 根据定义可证 $(\exists y)(\exists z)(\exists a)(y \in F \text{ 与 } z \in F \text{ 与 } a \in I \text{ 与 } u_a(y) \neq u_a(z)) \Leftrightarrow (u \text{ 为单射})$.

定义 194. 集合到集族的映射射影系统 (*système projectif d'applications d'un ensemble dans la famille d'ensembles*), 集合到集族的映射族的射影极限 (*limite projective de famille d'applications d'un ensemble dans la famille d'ensembles*)

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, $E = \varprojlim E_a$, 对任意 $a \in I$, E 到 E_a 的规范映射为 f_a . 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 F 到 E_a 的映射, 并且 $(\forall a)(\forall b)(a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b \Rightarrow f_{ab} \circ u_b = u_a)$. 则称映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为 F 到 (E_a, f_{ab}) 的映射射影系统. 如果 F 到 E 的映射 u 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = f_a \circ u)$, 则称 u 为映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 的射影极限, 记作 $\varprojlim u_a$.

补充定理 417.

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, $E = \varprojlim E_a$, 对任意 $a \in I$, E 到 E_a 的规范映射为 f_a , 则 $(f_a)_{a \in I}$ 为 E 到 (E_a, f_{ab}) 的映射射影系统, 且 $\varprojlim f_a = Id_E$.

证明: 根据补充定理411可证.

定理 173. 集族之间的映射族的射影极限唯一存在

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 、 (F_a, g_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, $E = \varprojlim E_a$, $F = \varprojlim F_a$, 对任意 $a \in I$, E 到 E_a 的规范映射为 f_a , F 到 F_a 的规范映射为 g_a . 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 E_a 到 F_a 的映射, 并且 $(\forall a)(\forall b)(a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b \Rightarrow u_a \circ f_{ab} = g_{ab} \circ u_b)$, 则存在唯一的 E 到 F 的映射 u , 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a \circ f_a = g_a \circ u)$, 此时, 该映射满足 $u(y) = (u_a(pr_a(y)))_{a \in I}$.

证明: 令 $v_a = u_a \circ f_a$, 则 $v_a = u_a \circ f_{ab} \circ f_b$, 等于 $g_{ab} \circ u_b \circ f_b$, 等于 $g_{ab} \circ v_b$. 根据定理172, 存在唯一的 u , 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow v_a = g_a \circ u)$.

定义 195. 集族之间的映射射影系统 (*système projectif d'applications entre familles d'ensembles*), 集族之间的映射族的射影极限 (*limite projective de famille d'applications entre familles d'ensembles*)

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 、 (F_a, g_{ab}) 均为关于 I 的集合射影系统, $E = \varprojlim E_a$, $F = \varprojlim F_a$, 对任意 $a \in I$, E 到 E_a 的规范映射为 f_a , F 到 F_a 的规范映射为 g_a . 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 E_a 到 F_a 的映射, 并且 $(\forall a)(\forall b)(a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b \Rightarrow u_a \circ f_{ab} = g_{ab} \circ u_b)$, 则称映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ab}) 到 (F_a, g_{ab}) 的映射射影系统. 如果 E 到 F 的映射 u 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a \circ f_a = g_a \circ u)$, 则称 u 为映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 的射影极限, 记作 $\varprojlim u_a$, 在没有歧义的情况下也可以简记为 $\varprojlim u_a$.

定理 174.

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 、 (F_a, g_{ab}) 、 (G_a, h_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, $E = \varprojlim E_a$, $F = \varprojlim F_a$, $G = \varprojlim G_a$, 对任意 $a \in I$, E 到 E_a 的规范映射为 f_a , F 到 F_a 的规范映射为 g_a , G 到 G_a 的规范映射为 h_a . 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 E_a 到 F_a 的映射, v_a 为 F_a 到 G_a 的映射, 则映射族 $(v_a \circ u_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ab}) 到 (G_a, h_{ab}) 的映射射影系统, 并且 $\varprojlim (v_a \circ u_a) = \varprojlim v_a \circ \varprojlim u_a$.

证明: 令 $w_a = v_a \circ u_a$. 则 $w_a \circ f_{ab} = v_a \circ u_a \circ f_{ab}$, 等于 $v_a \circ g_{ab} \circ u_b$, 等于 $h_{ab} \circ v_b \circ u_b$, 等于 $h_{ab} \circ w_b$, 因此映射族 $(w_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ab}) 到 (G_a, h_{ab}) 的映射射影系统.

同时 $h_a \circ v \circ u = v_a \circ g_a \circ u$, 等于 $v_a \circ u_a \circ f_a$, 得证.

补充定理 418. 子集上的系统为射影系统

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, $E = \varprojlim E_a$, 对任意 $a \in I$, $M_a \subset E_a$, 如果 $(\forall a)(\forall b)(a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b \Rightarrow f_{ab}(M_b) \subset M_a)$, 当 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b$ 时, 令 g_{ab} 为 f_{ab} 在 M_b 上的限制, 则 (M_a, g_{ab}) 也是关于 I 的集合射影系统, 并且 $\varprojlim M_a = E \cap \prod_{a \in I} M_a$.

证明: 根据定义可证.

定义 196. 子集射影系统 (*système projectif de parties*)

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, 对任意 $a \in I$, $M_a \subset E_a$, 如果 $(\forall a)(\forall b)(a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b \Rightarrow f_{ab}(M_b) \subset M_a)$, 则称 (M_a, g_{ab}) 为 $(E_a)_{a \in I}$ 的子集射影系统.

定理 175.

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 、 (E'_a, f'_{ab}) 均为关于 I 的集合射影系统, 对任意 $a \in I$, u_a 为 E_a 到 E'_a 的映射, 则映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为映射射影系统. 令 $u = \varprojlim u_a$, $E' = \varprojlim E'_a$, 则对任意 $(x'_a)_{a \in I} \in E'$, $(u^{-1}(x'_a))_{a \in I}$ 是 $(E_a)_{a \in I}$ 的子集射影系统, 并且 $\varprojlim (u_a^{-1}(x'_a)) = u^{-1}(x')$.

证明: 设 $x_b \in u^{-1}(x'_b)$, $u_a(f_{ab}(x_b)) = f'_{ab}(u_b(x_b))$, 等于 $f'_{ab}(x'_b)$, 等于 x'_a , 因此, $(u_a^{-1}(x'_a))_{a \in I}$ 是 $(E_a)_{a \in I}$ 的子集射影系统. 设 $x \in E$ 且 $u(x) = x'$, 根据定理172, u 是唯一的, 且 $u(x) = (u_a(x))_{a \in I}$, 对任意 $a \in I$, $u_a(x) = x'_a$. 因此, $x \in E \Leftrightarrow u(x) \in E'$, 因此, $x \in u^{-1}(x') \Rightarrow x' \in E'$, 并且, $x \in u^{-1}(x') \Rightarrow x \in \prod_{a \in I} u^{-1}(x'_a)$, 根据补充定理418, 得证.

定理 176.

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 、 (E'_a, f'_{ab}) 均为关于 I 的集合射影系统, 对任意 $a \in I$, u_a 为 E_a 到 E'_a 的映射, 则映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为映射射影系统. 令 $u = \lim_{\leftarrow} u_a$, 如果对任意 $a \in I$, u_a 为单射 (或双射), 则 u 是单射 (或双射).

证明: 根据定理175可证.

补充定理 419.

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 、 (E'_a, f'_{ab}) 均为关于 I 的集合射影系统, 对任意 $a \in I$, u_a 为 E_a 到 E'_a 的映射, 则映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为映射射影系统. 令 $u = \lim_{\leftarrow} u_a$, $E = \lim_{\leftarrow} E_a$, $E' = \lim_{\leftarrow} E'_a$, 如果对任意 $a \in I$, u_a 为满射, 则 $(u_a(E_a))_{a \in I}$ 是 $(E'_a)_{a \in I}$ 的子集射影系统, $u(E) \subset \lim_{\leftarrow} u_a(E_a)$.

证明: 设 $x'_b \in u_b(E_b)$, 令 $x'_b = u_b(x_b)$, $f'_{ab}(x'_b) = f'_{ab}(u_b(x_b))$, 等于 $u_a(f_{ab}(u_b))$, 根据定义, $(u_a(E_a))_{a \in I}$ 是 $(E'_a)_{a \in I}$ 的子集射影系统. 同时, 设 $x \in E$ 且 $u(x) = x'$, 对任意 $a \in I$, $u_a(x) = x'_a$, 得证.

定理 177.

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, $E = \lim_{\leftarrow} E_a$, F 为 E 的共尾子集, 并且是右方有向集, 令 $(E_a)_{a \in J}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b}$ 的射影极限为 E' , 则 E 到 E' 的规范映射 g 为双射.

证明: 对 $a \in J$, 令 f'_a 为 E' 到 E_a 的规范映射, 根据定理172, g 是唯一满足 $a \in J \Rightarrow f_a = f'_a \circ g$ 的映射. 如果 $x \in E$ 、 $y \in E$ 且 $x \neq y$, 则存在 $a \in I$ 使 $f_a(x) \neq f_a(y)$, 由于 F 为 E 的共尾子集, 因此存在 $b \in F$, 使 $a \leq b$, 因此 $f_b(x) \neq f_b(y)$, 故 f_a 为单射, 因此 g 为单射. 对任意 $x' \in E'$, 对任意 $a \in I$, 存在 $b \in J$ 且 $a \leq b$, 假设 $c \in J$ 且 $a \leq b$, 若 $b \leq c$, 则 $f_{ac}(x'_c) = f_{ab}(f_{bc}(x'_c))$, 等于 $f_{ab}(x'_b)$, 因此, $f_{ab}(x'_b)$ 和 b 无关, 令其为 x_a . 令 $x = (x_a)_{a \in J}$, 对任意 $a \in I$, 如果 $a \in I$, $b \in I$ 且 $a \leq b$, 则存在 $b \leq c$, 且 $c \in J$, 因此 $f_{ab}(x_b) = f_{ab}(f_{bc}(x'_c))$, 等于 $f_{ac}(x'_c)$, 等于 x_a . 因此 $x \in E$. 当 $a \in J$ 时, 由于 $x'_a = f_{aa}(x'_a)$, 因此 $x'_a = x_a$, 因此 $f_a(x) = x'_a$, 故 $g(x) = x'$. 因此 g 为满射.

定义 197. 集族的双重射影极限 (double limite projective de famille d'ensembles)

I 、 L 为预序集, $I \times L$ 的预序关系为 $(x \in I \times L \text{ 与 } y \in I \times L \text{ 与 } pr_1x \leq pr_1y \text{ 与 } pr_2x \leq pr_2y)$, $((E_a^x)_{(a,x) \in I \times L}, (f_{ab}^{xy})_{(a,x) \in I \times L \text{ 与 } (b,y) \in I \times L \text{ 与 } (a,x) \leq (b,y)})$ 为关于 $I \times L$ 的集合射影系统, 则其射影极限称为双重射影极限, 记作 $\lim_{\leftarrow a, x} E_a^x$, 在没有歧义的情况下也可以简记为 $\lim_{\leftarrow} E_a^x$.

补充定理 420.

I 、 L 均为预序集, $I \times L$ 的预序关系为 $(x \in I \times L \text{ 与 } y \in I \times L \text{ 与 } pr_1x \leq pr_1y \text{ 与 } pr_2x \leq pr_2y)$, (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 为关于 $I \times L$ 的集合射影系统, 则 (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 为关于 I 的集合射影系统, 也是关于 L 的集合射影系统. 并且, $(\lim_{\leftarrow a} E_a^x, g^{xy})$ 、 $(\lim_{\leftarrow x} E_a^x, h_{ab})$ 分别是关于 L 的集合射影系统和关于 I 的集合射影系统, 其中 $g^{xy} = \lim_{\leftarrow a} f_{aa}^{xy}$, $h_{ab} = \lim_{\leftarrow x} f_{ab}^{xx}$.

证明：根据定义，可证 (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 为关于 I 的集合射影系统，也是关于 L 的集合射影系统。根据定理174， $g^{xz} = g^{xy} \circ g^{yz}$ ， $h_{ac} = h_{ab} \circ h_{bc}$ ，因此 $(\lim_{\leftarrow a} E_a^x, g^{xy})$ 、 $(\lim_{\leftarrow x} E_a^x, h_{ab})$ 分别是关于 L 的集合射影系统和关于 I 的集合射影系统。

定理 178.

I 、 L 均为预序集， $I \times L$ 的预序关系为 $(x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y)$ ， (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 为关于 $I \times L$ 的集合射影系统，令 $\prod_{(a,x) \in I \times L} E_a^x$ 到 $\prod_{x \in L} (\prod_{a \in I} E_a^x)$ 的规范映射为 f ， $\prod_{(a,x) \in I \times L} E_a^x$ 到 $\prod_{a \in I} (\prod_{x \in L} E_a^x)$ 的规范映射为 g ，则 f 在 $(\lim_{\leftarrow a, x} E_a^x)$ 上的限制为 $(\lim_{\leftarrow a, x} E_a^x)$ 到 $\lim_{\leftarrow x} (\lim_{\leftarrow a} E_a^x)$ 的双射； g 在 $(\lim_{\leftarrow a, x} E_a^x)$ 上的限制为 $(\lim_{\leftarrow a, x} E_a^x)$ 到 $\lim_{\leftarrow a} (\lim_{\leftarrow x} E_a^x)$ 的双射。

证明：令 $g^{xy} = \lim_{\leftarrow a} f_{aa}^{xy}$ ， $F^x = \lim_{\leftarrow a} E_a^x$ ， $F = \lim_{\leftarrow x} F^x$ ， $G = \lim_{\leftarrow a, x} E_a^x$ 。根据定理46， f 为 $h \rightarrow (pr_{I \times \{x\}}h)_{x \in L}$ 。

对任意 $u \in F$ ，如果 $x \leq y$ ，则 $pr_x u = g^{xy}(pr_y u)$ ；如果 $a \leq b$ ，则 $pr_a(pr_x u) = f_{ab}^{xy}(pr_b(pr_y u))$ 。由于 $h \rightarrow (pr_{I \times \{x\}}h)_{x \in L}$ 为双射，故令 $u = (pr_{I \times \{x\}}u')_{x \in L}$ ，则 $pr_{(a,x)}u' = f_{ab}^{xy}(pr_{(b,y)}u')$ 。故 $u' \in G$ 。

反过来，如果 $u' \in G$ ，且 $a \leq b$ 、 $x \leq y$ ，则 $pr_{(a,x)}u' = f_{ab}^{xy}(pr_{(b,y)}u')$ ，令 $u = (pr_{I \times \{x\}}u')_{x \in L}$ ，因此 $pr_a(pr_x u) = f_{ab}^{xy}(pr_b(pr_y u))$ ，因此，对任意 $a \in I$ ， $pr_a(pr_x u) = pr_a(g^{xy}(pr_y u))$ ，故 $pr_x u = g^{xy}(pr_y u)$ ，因此 $u \in F$ 。故 f 的限制为双射。

同理可证 g 的限制为双射。

补充定理 421.

I 、 L 均为预序集， $I \times L$ 的预序关系为 $(x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y)$ ， (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 、 (E'_{ax}, f'_{ab}^{xy}) 均为关于 $I \times L$ 的集合射影系统，对于 $(a, b) \in I \times L$ ， u_a^x 为 E_a^x 到 E'_{ax} 的映射，并且 $(u_a^x)_{(a,x) \in I \times L}$ 为 (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 到 (E'_{ax}, f'_{ab}^{xy}) 的映射射影系统，则 $(u_a^x)_{a \in I}$ 、 $(u_a^x)_{x \in L}$ 均为 (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 到 (E'_{ax}, f'_{ab}^{xy}) 的映射射影系统， $(\lim_{\leftarrow a} u_a^x)_{x \in L}$ 为 $(\lim_{\leftarrow a} E_a^x)$ 到 $(\lim_{\leftarrow a} E'_{ax})$ 的映射射影系统， $(\lim_{\leftarrow x} u_a^x)_{a \in I}$ 为 $(\lim_{\leftarrow x} E_a^x)$ 到 $(\lim_{\leftarrow x} E'_{ax})$ 的映射射影系统。

证明：

根据定义可证 $(u_a^x)_{a \in I}$ 、 $(u_a^x)_{x \in L}$ 均为 (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 到 (E'_{ax}, f'_{ab}^{xy}) 的映射射影系统。

令 $u^x = \lim_{\leftarrow a} u_a^x$ ， $g^{xy} = \lim_{\leftarrow a} f_{aa}^{xy}$ ， $g'^{xy} = \lim_{\leftarrow a} f'_{aa}^{xy}$ ，则当 $x \leq y$ 时， $u_a^x \circ f_{aa}^{xy} = f'_{aa}^{xy} \circ u_a^y$ ，根据定理174， $u^x \circ g^{xy} = g'^{xy} \circ u^y$ ，因此 $(\lim_{\leftarrow a} u_a^x)_{x \in L}$ 为 $(\lim_{\leftarrow a} E_a^x)$ 到 $(\lim_{\leftarrow a} E'_{ax})$ 的映射射影系统， $(\lim_{\leftarrow x} u_a^x)_{a \in I}$ 为 $(\lim_{\leftarrow x} E_a^x)$ 到 $(\lim_{\leftarrow x} E'_{ax})$ 的映射射影系统。

定义 198. 映射族的双重射影极限 (double limite projective de famille d'applications)

I 、 L 均为预序集， $I \times L$ 的预序关系为 $(x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y)$ ， (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 、 (E'_{ax}, f'_{ab}^{xy}) 均为关于 $I \times L$ 的集合射影系统，对于 $(a, b) \in I \times L$ ， u_a^x 为 E_a^x 到 E'_{ax} 的

映射, 并且 $(u_a^x)_{(a,x) \in I \times L}$ 为 (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 到 $(E_a'^x, f_{ab}'^{xy})$ 的映射射影系统, 则其射影极限称双重射影极限, 记作 $\lim_{\leftarrow a, x} u_a^x$.

定理 179.

I 、 L 为预序集, $I \times L$ 的预序关系为 $(x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1 x \leq pr_1 y$ 与 $pr_2 x \leq pr_2 y)$, (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 、 $(E_a'^x, f_{ab}'^{xy})$ 均为关于 $I \times L$ 的集合射影系统, 对于 $(a, b) \in I \times L$, u_a^x 为 E_a^x 到 $E_a'^x$ 的映射, 并且 $(u_a^x)_{(a,x) \in I \times L}$ 为 (E_a^x, f_{ab}^{xy}) 到 $(E_a'^x, f_{ab}'^{xy})$ 的映射射影系统, $u_a = \lim_{\leftarrow x} u_a^x$, $u^x = \lim_{\leftarrow a} u_a^x$, $u = \lim_{\leftarrow a, x} u_a^x$. 令 $\prod_{(a,x) \in I \times L} E_a^x$ 到 $\prod_{x \in L} (\prod_{a \in I} E_a^x)$ 的规范映射为 f , $\prod_{(a,x) \in I \times L} E_a'^x$ 到 $\prod_{x \in L} (\prod_{a \in I} E_a'^x)$ 的规范映射为 f' , $\prod_{(a,x) \in I \times L} E_a^x$ 到 $\prod_{a \in I} (\prod_{x \in L} E_a^x)$ 的规范映射为 g , $\prod_{(a,x) \in I \times L} E_a'^x$ 到 $\prod_{a \in I} (\prod_{x \in L} E_a'^x)$ 的规范映射为 g' . 则 $\lim_{\leftarrow a, x} u_a^x = f'^{-1} \circ \lim_{\leftarrow x} (\lim_{\leftarrow a} u_a^x) \circ f$, $\lim_{\leftarrow a, x} u_a^x = g'^{-1} \circ \lim_{\leftarrow a} (\lim_{\leftarrow x} u_a^x) \circ g$.

证明: 根据定理178可证.

定理 180.

I 为预序集, $(E_a^x, f_{ab}^x)_{x \in L}$ 为关于 I 的集合射影系统族, f'_{ab} 是映射族 $(f_{ab}^x)_{x \in L}$ 在乘积上的规范扩展, 则 $(\prod_{x \in L} E_a^x, f'_{ab})$ 是关于 I 的集合射影系统, 且 $pr_{\{a\} \times L}^{-1} (\lim_{\leftarrow a} \prod_{x \in L} E_a^x) = pr_{I \times \{x\}}^{-1} (\prod_{x \in L} \lim_{\leftarrow a} E_a^x)$.

证明: 令 L 为按 $(x = y$ 与 $x \in L)$ 排序的预序集, 令 $g_{ab}^{xy} = f_{ab}^x$, 根据补充定理420、补充定理412, $(\prod_{x \in L} E_a^x, f'_{ab})$ 是关于 I 的集合射影系统, 并且, 根据定理178、补充定理412可证 $pr_{\{a\} \times L}^{-1} (\lim_{\leftarrow a} \prod_{x \in L} E_a^x) = pr_{I \times \{x\}}^{-1} (\prod_{x \in L} \lim_{\leftarrow a} E_a^x)$.

定理 181.

I 为预序集, 且为右方有向集, 并有一个可数共尾子集, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, 对任意 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b$, f_{ab} 为满射, 令 $E = \lim_{\leftarrow} E_a$. 对任意 $a \in I$, 令 f_a 为 E 到 E_a 的规范映射, 则 f_a 为满射. 进而, 对任意 $a \in I$, $E_a \neq \emptyset$, 则 $E \neq \emptyset$.

证明: 令 (a_n) 为 I 的元素序列, 并且各项构成 I 的可数共尾子集, 则递归构建 a 的元素序列 (b_n) : 令 $b_0 = a_0$, $b_n = \sup(a_n, b_{n-1})$, 则 (b_n) 为单增序列, 并且各项构成 I 的共尾子集. 对任意 $x_{b_0} \in E_{b_0}$, 由数学归纳法可知存在 $x_{b_n} \in E_{b_n}$, 使对任意 $m < n$, $x_{b_m} = f_{b_m b_n}(x_{b_n})$, 对任意 $a < b_n$, 令 $x_a = f_{ab_n}(x_{b_n})$, 则 $x_a \in E$. 故 f_{b_0} 为满射. 同理可证, 对任意 $n \in N$, f_{b_n} 为满射, 进而, 当 $a \leq b_n$ 时, f_a 为满射. 因此, 对任意 $a \in I$, $E_a \neq \emptyset$, 则 $E \neq \emptyset$.

定理 182.

I 为预序集, 且为右方有向集, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, 对任意 $a \in I$, 令 F_a 的元素都是 E_a 的子集, 并且:

第一, F_a 的任何元素的交集也是 F_a 的元素;

第二, 如果 $G \subset F_a$, 并且 G 中任何有限个元素的交集都不是空集 (或等价公式: F_a 为按包含关系排序的偏序集, G 为左方有向集, 且其元素都不是空集),

则 $\bigcap_{M \in F} G$ 不是空集.

同时, 对任意 a, b , 如果满足 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b$, 均有:

第一, 对任意 $x_a \in E_a$, $f_{ab}^{-1}(x_a) \in F_b$;

第二, 对任意 $M_b \in F_b$, $f_{ab}(M_b) \in F_a$. 令 $E = \lim_{\leftarrow} E_a$, 并且对任意 $a \in I$, 令 f_a 为 E 到 E_a 的规范映射,

则:

第一, 对任意 $a \in I$, $f_a(E) = \bigcap_{b \geq a \text{ 与 } b \in I} f_{ab}(E_b)$;

第二, 对任意 $a \in I$, $E_a \neq \emptyset$, 则 $E \neq \emptyset$.

证明: 令 S 为符合下列条件的集族 $(A_a)_{a \in I}$ 的集合: 对任意 $a \in I$, $A_a \neq \emptyset$, $A_a \in F_a$, 并且对任意 a, b 满足 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b$, $f_{ab}(A_b) \subset A_a$. 令 R 为 $M \in S$ 与 $N \in S$ 与 $N \subset M$, 则 E 为按 R 排序的偏序集. 令 L 为 S 的全序子集, $L_a = \{x | (\exists A)(\exists a)(A \in L \text{ 与 } a \in I \text{ 与 } (a, x) \in A)\}$. $B_a = \bigcap_{x \in L} a_x$. 则 $(B_a)_{a \in I} \in S$, 故 S 为归纳集.

设 S 的极大元为 A , 令 $A'_a = \bigcap_{b \geq a \text{ 与 } b \in I} f_{ab}(A_b)$. 对任意 $a \leq b$, $b \leq c$, $f_{ac}(A_c) = f_{ab}(f_{bc}(A_c))$, 因此 $f_{ac}(A_c) \subset f_{ab}(A_b)$. 如果 $a \leq b$, $f_{ab}(A'_b) \subset \bigcap_{c \geq a \text{ 与 } c \in I} f_{ac}(A'_c)$, 另一方面, 对任意 $d \geq b$, 存在 $c \geq d$ 且 $c \geq b$, 使 $f_{ac}(A_c) \subset f_{ad}(A_d)$, 故 $\bigcap_{c \geq a \text{ 与 } c \in I} f_{ac}(A'_c) \subset A'_a$, 因此 $f_{ab}(A'_b) \subset A'_a$. 又因为 $f_{ab}(A_b) \in F_a$, $f_{ab}(A_b) \neq \emptyset$, 故 $A' \in S$, 同时, $A' \subset A$, 所以 $A = A'$, 故对任意 a, b 满足 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b$, $f_{ab}(A_b) = A_a$.

设 $x_a \in A_a$, 当 $b \geq a$ 时, 令 $B_b = A_b \cap f_{ab}^{-1}(x_a)$, 当 $b < a$ 时, 令 $B_b = A_b$, 如果 $b < a$, 对任意 $c \geq b$, $f_{bc}(B_c) \subset f_{bc}(A_c)$, 因此 $f_{bc}(B_c) \subset B_b$; 当 $b \geq a$ 时, 对任意 $c \geq b$, $f_{ac}^{-1}(x_a) = (f_{bc}^{-1}(f_{ab}^{-1}(x_a)))$, 因此 $f_{bc}(f_{ac}^{-1}(x_a)) \subset f_{ab}^{-1}(x_a)$, 又因为 $f_{bc}(A_c) \subset A_b$, 故 $f_{bc}(B_c) \subset B_b$; 同时, 由于 $f_{ab}(A_b) = A_a$, 故 $A_b \cap f_{ab}^{-1}(x_a) \neq \emptyset$; 此外, 由于 $f_{ab}^{-1}(x_a) \in F_b$, $A_b \in F_b$, $B_b \in F_b$. 综上, $B \in S$, 因此 $A = B$, 故 $A_a = \{x_a\}$, 且其对一切 $a \in I$ 都成立.

根据补充定理 411, $f_a(E) \subset \bigcap_{b \geq a \text{ 与 } b \in I} f_{ab}(E_b)$. 另一方面, 设 $x_a \in \bigcap_{b \geq a \text{ 与 } b \in I} f_{ab}(E_b)$, 当 $b \geq a$ 时, 令 $B_b = f_{ab}^{-1}(x_a)$, 当 $b < a$ 时, 令 $B_b = E_b$. 因此 $B_b \neq \emptyset$, 并且 $b \leq c$ 时, $f_{bc}(B_c) \subset B_b$, 故 $B \in S$. 根据定理 81, S 有极大元 A , 满足 $A \geq B$, 设 $A_a = \{y_a\}$, 令 $y = (y_a)$, 则 $y \in E$. 故 $f_a(y) = x_a$, 因此, $f_a(E) = \bigcap_{b \geq a \text{ 与 } b \in I} f_{ab}(E_b)$. 如果 $I = \emptyset$, 则 $E = \{\emptyset\}$, 故 $E \neq \emptyset$. 如果 $I \neq \emptyset$, 则当 $a \leq b$ 时, $f_{ab}(E_b) \neq \emptyset$. 由于 $b \leq c$ 时, $f_{ab}(E_b) \subset f_{ac}(E_c)$, 因此 $\bigcap_{b \geq a \text{ 与 } b \in I} f_{ab}(E_b) \neq \emptyset$, 故 $f_a(E) \neq \emptyset$, 因此 $E \neq \emptyset$.

补充定理 422. 集合归纳系统涉及的公式为等价关系

I 为右方有向集, $(E_a)_{a \in I}$ 为集族, $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 为函数族, 其中 f_{ba} 为 E_a 到 E_b 的映射, 并且满足下列条件:

第一, 如果 $a \leq b, b \leq c$, 则 $f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$.

第二, $f_{aa} = Id_{E_a}$.

令 G 为集族 $(E_a)_{a \in I}$ 的和, 令 R 为公式 $x \in G$ 与 $y \in G$ 与 $(\exists c)(c \in I$ 与 $c \geq pr_2x$ 与 $c \geq pr_2y$ 与 $f_{c \text{ } pr_2x}(pr_1x) = f_{c \text{ } pr_2y}(pr_1y)$), 则 R 为在 G 上的等价关系.

证明: 显然 R 具有反身性和对称性.

设 $u \in G, v \in G, w \in G$, 令 $u = (x, a), v = (y, b), w = (z, c)$, 则 $x \in E_a, y \in E_b, z \in E_c$, 设 $l \geq a, l \geq b, f_{la}(x) = f_{lb}(y), m \geq b, m \geq c, f_{mb}(y) = f_{mc}(z)$. 由于 I 为右方有向集, 则存在 $n \geq l, n \geq m$, 故 $f_{na}(x) = f_{nc}(z)$. 因此 R 具有传递性.

定义 199. 集合归纳系统 (*système inductif d'ensembles*), 集族的归纳极限 (*limite inductive de famille d'ensembles*), 集合到集族的归纳极限的规范映射 (*application canonique de la limite inductif d'un ensemble dans la famille d'ensembles*)

I 为右方有向集, $(E_a)_{a \in I}$ 为集族, $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 为函数族, 其中 f_{ba} 为 E_a 到 E_b 的映射, 并且满足下列条件:

第一, 如果 $a \leq b, b \leq c$, 则 $f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$.

第二, $f_{aa} = Id_{E_a}$, 则 $(E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 称为关于 I 的集合归纳系统, 在没有歧义的情况下可以简记为 $((E_a), (f_{ba}))$ 或 (E_a, f_{ba}) .

令 G 为集族 $(E_a)_{a \in I}$ 的和, 令 R 为等价关系 $x \in G$ 与 $y \in G$ 与 $(\exists c)(c \in I$ 与 $c \geq pr_2x$ 与 $c \geq pr_2y$ 与 $f_{c \text{ } pr_2x}(pr_1x) = f_{c \text{ } pr_2y}(pr_1y)$), 则称商集 G/R 为集族 $(E_a)_{a \in I}$ 对于函数族 $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限, 记作 $\lim_{\rightarrow a}(E_a, f_{ba})$, 在没有歧义的情况下可以简记为 $\lim_{\rightarrow}(E_a, f_{ba})$ 或 $\lim_{\rightarrow} E_a$. 令 f 为 G 到 E/R 的规范映射, g_a 为映射 $x \rightarrow (x, a)(x \in E_a)$, 则映射 $f \circ g_a$ 称为 E_a 到 $\lim_{\rightarrow} E_a$ 的规范映射.

补充定理 423.

I 为右方有向集, $((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow}(E_a, f_{ba})$, 对任意 $a \in I$, 令 E_a 到 E 的规范映射为 f_a , 则当 $a \in I, b \in I, a \leq b$ 时, $f_a = f_b \circ f_{ba}$.

证明: 对任意 $x \in E_a, f_{bb}(f_{ba}(x)) = f_{ba}(x)$. 由于 $f_{ba}(x) \in E_b$, 故 $f_b(f_{ba}(x)) = f_a(x)$, 得证.

补充定理 424.

I 为右方有向集, $((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow}(E_a, f_{ba})$, 对任意 $a \in I$, 令 E_a 到 E 的规范映射为 f_a , 则:

(1) 对任意 $x \in E$, 存在 $a \in I, z \in E_a$, 使 $f_a(z) = x$.

(2) $E = \bigcup_{a \in I} f_a(E_a)$.

证明:

(1) 根据补充证明规则35, G 到 E 的规范映射 f 为满射, 因此存在 $y \in G$, 使 $f(y) = x$. 令 $y = (z, a)$, 则 $a \in I$ 、 $z \in E_a$, 令 g_a 为映射 $x \rightarrow (x, a)(x \in E_a)$, 则 $g_a(z) = y$, 故 $f(g_a(z)) = x$, 得证.

(2) 对任意 $x \in E_a$, $f_a(x) \in E$; 反过来, 对任意 $x \in E$, 根据补充定理424 (1), 存在 $a \in I$ 、 $z \in E_a$, 使 $f_a(z) = x$. 得证.

补充定理 425.

$((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} (E_a, f_{ba})$, 对任意 $a \in I$, 令 E_a 到 E 的规范映射为 f_a , 则对任意 $a \in I$ 、 $x \in E$ 、 $y \in E$, 如果 $f_a(x) = f_a(y)$, 则 $(\exists b)(b \in I \text{ 与 } b \geq a \text{ 与 } f_{ba}(x) = f_{ba}(y))$.

证明: 令 g_a 为映射 $x \rightarrow (x, a)(x \in E_a)$, 则 $f(g_a(x)) = f(g_a(y))$, 根据证明规则55, $(\exists b)(b \in I \text{ 与 } b \geq a \text{ 与 } f_{ba}(x) = f_{ba}(y))$.

补充定理 426.

关于 \emptyset 的集合归纳系统, 其归纳极限为 \emptyset .

证明: 根据补充证明规则34 (1) 可证.

定理 183.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} E_a$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , 则:

(1) 令 n 为自然数, $(x^{(i)})_{i \in [1, n]}$ 为 E 的有限元素族, 则存在 $a \in I$, 使 $(x_a^{(i)})_{i \in [1, n]}$ 为 E_a 的有限元素族, 并且, 当 $i \in [1, n]$ 时, $x^{(i)} = f_a(x_a^{(i)})$.

(2) 令 n 为自然数, $(y^{(i)})_{i \in [1, n]}$ 为 E 的有限元素族, 如果对任意 $i \in [1, n]$ 、 $j \in [1, n]$, 均有 $f_a(y_a^{(i)}) = f_a(y_a^{(j)})$, 则存在 $b \geq a$, 使得对任意 $i \in [1, n]$ 、 $j \in [1, n]$, 均有 $f_{ba}(y^{(i)}a) = f_{ba}(y^{(j)}a)$.

证明:

(1) 根据补充定理424 (1), 对任意 $i \in [1, n]$, 存在 $b_i \in I$ 及 $z \in E_{b_i}$, 使 $x^{(i)} = f_{b_i}(z_{b_i})$, 取 $a \geq b_i$ (对任意 $i \in [1, n]$), 则 $x_a^{(i)} = f_{ab_i}(z_{b_i})$, 根据补充定理423可证.

(2) 根据补充定理425, 对任意 $i \in [1, n]$ 、 $j \in [1, n]$, 存在 $c_{ij} \geq a$, 使 $f_{c_{ij}a}(y_a^{(i)}) = f_{c_{ij}a}(y_a^{(j)})$, 进而, 存在 b , 使对任意 $i \in [1, n]$ 、 $j \in [1, n]$ 均有 $b \geq c_{ij}$, 由于 $f_{ba} = f_{bc_{ij}} \circ f_{c_{ij}a}$, 因此 $f_{ba}(y_a^{(i)}) = f_{ba}(y_a^{(j)})$.

定理 184. 集族到集合的映射族的归纳极限的性质

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} E_a$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 E_a 到 F 的映射, 并且 $(\forall a)(\forall b)(a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b \Rightarrow u_b \circ f_{ba} = u_a)$, 则:

(1) 存在唯一的 E 到 F 的映射 u , 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = u \circ f_a)$;

(2) 当且仅当 $F = \bigcup_{a \in I} u_a(E_a)$ 时, u 为满射;

(3) 当且仅当 $(\forall a)(a \in I \text{ 与 } x \in E_a \text{ 与 } y \in E_a \text{ 与 } u_a(x) = u_a(y) \Rightarrow (\exists b)(b \geq a \text{ 与 } f_{ba}(x) = f_{ba}(y)))$ 时, u 为单射.

证明:

(1) 令 G 到 E 的规范映射为 f , g_a 为映射 $x \rightarrow (x, a)(x \in E_a)$, $F_a = g_a \langle E_a \rangle$, 则 $v_a = u_a \circ g_a^{-1}$, 故 v_a 为 F_a 到 F 的映射, 令 v 为 G 到 F 的映射, 且对任意 $a \in I$, v 在 F_a 上与 v_a 重合. 令 R 为等价关系 $x \in G$ 与 $y \in G$ 与 $(\exists c)(c \in I \text{ 与 } c \geq pr_2 x \text{ 与 } c \geq pr_2 y \text{ 与 } f_c pr_2 x(pr_1 x) = f_c pr_2 y(pr_1 y))$, 设 $x \in F_a$, $y \in F_b$, 如果 R 为真, 则存在 c , 使 $f_{ca}(pr_1 x) = f_{cb}(pr_1 y)$, 由于 $v_a = u_a \circ g_a^{-1}$, 故 $v_a(x) = u_a(pr_1 x)$, 因此 $v(x) = u_c(f_{ca}(pr_1 x))$, 同理 $v(y) = u_c(f_{cb}(pr_1 y))$, 因此 $R \Rightarrow v(x) = v(y)$, 因此 v 是等价关系相容的映射, 根据证明规则 57, 存在唯一的映射 u , 使 $u \circ f = v$. 由于 $u_a = v \circ g_a$, $f_a = f \circ g_a$, 因此 $u_a = u \circ f_a$, 得证.

(2) 当 $F = \bigcup_{a \in I} u_a(E_a)$ 时, 对任意 $x \in F$, 存在 $a \in I$, $z \in E_a$, 使 $x = u_a(z)$, 因此 $x = u(f_a(z))$, 故 u 为满射. 反过来, 若 u 为满射, 则对任意 $x \in F$, 存在 $y \in E$ 使 $x = u(y)$, 根据补充定理 424 (1), 存在 $a \in I$, $z \in E_a$, 使 $y = f_a(z)$, 故 $x = u_a(z)$, 因此 $x \in u_a(E_a)$.

另一方面, 对任意 $x \in u_a(E_a)$, 存在 $z \in E_a$, 使 $x = u_a(z)$, 因此 $x = u(f_a(z))$, 故 $x \in F$; 综上, $F = \bigcup_{a \in I} u_a(E_a)$.

(3) 假设 $(\forall a)(a \in I \text{ 与 } x \in E_a \text{ 与 } y \in E_a \text{ 与 } u_a(x) = u_a(y) \Rightarrow (\exists b)(b \geq a \text{ 与 } f_{ba}(x) = f_{ba}(y)))$, 如果 $u(x) = u(y)$, 且 $x \in E$, $y \in E$, 则存在 $a \in I$, $b \in I$, $m \in E_a$, $n \in E_b$, 使 $f_a(m) = x$, $f_b(n) = y$, 因此 $u_a(m) = u_b(n)$, 故存在 $c \in I$, 使 $c \geq a$, $c \geq b$, 且 $u_c(f_{ca}(m)) = u_c(f_{cb}(n))$, 因此存在 $d \geq c$, 使 $f_{da}(m) = f_{db}(n)$. 根据补充定理 423, $x = f_d(f_{da}(m))$, $y = f_d(f_{db}(n))$, 因此 $x = y$.

反过来, 如果 u 为单射, 且 $a \in I$ 与 $x \in E_a$ 与 $y \in E_a$ 与 $u_a(x) = u_a(y)$, 则 $u(f_a(x)) = u(f_a(y))$, 则 $f_a(x) = f_a(y)$, 由于 $f_a(x) \in E$, $f_a(y) \in E$, 根据补充定理 425, $(\exists b)(b \geq a \text{ 与 } f_{ba}(x) = f_{ba}(y))$, 得证.

定义 200. 集族到集合的映射归纳系统 (*système inductif d'applications da famille d'ensembles dans un ensemble*), 集族到集合的映射族的归纳极限 (*limite inductive de famille d'applications da famille d'ensembles dans un ensemble*)

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} E_a$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 E_a 到 F 的映射, 并且 $(\forall a)(\forall b)(a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b \Rightarrow u_b \circ f_{ba} = u_a)$, 则称映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ba}) 到 F 的映射归纳系统. 如果 E 到 F 的映射 u , 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = u \circ f_a)$, 则称 u 为映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 的归纳极限, 记作 $\lim_{\rightarrow} u_a$.

补充定理 427.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} E_a$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , 则 $(f_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ba}) 到 E 的映射归纳系统, 且 $\lim_{\rightarrow} f_a = Id_E$.

证明：根据补充定理423可证。

定理 185. 集族之间的映射族的归纳极限的存在性和唯一性

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 、 (F_a, g_{ba}) 均为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} E_a$, $F = \lim_{\rightarrow} F_a$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , F_a 到 F 的规范映射为 g_a . 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 E_a 到 F_a 的映射, 并且 $(\forall a)(\forall b)(a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b \Rightarrow u_b \circ g_{ba} = f_{ba} \circ u_a)$, 则存在唯一的 E 到 F 的映射 u , 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow u \circ f_a = g_a \circ u_a)$.

证明：令 $v_a = g_a \circ u_a$, 则 $v_b \circ f_{ba} = g_b \circ u_b \circ f_{ba}$, 等于 $g_b \circ g_{ba} \circ u_a$, 等于 $g_a \circ u_a$, 等于 v_a . 根据定理184 (1), 存在唯一的 u , 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow v_a = u \circ f_a)$.

定义 201. 集族之间的映射归纳系统 (*système inductif d'applications entre familles d'ensembles*), 集族之间的映射族的归纳极限 (*limite inductive de famille d'applications entre familles d'ensembles*)

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 、 (F_a, g_{ba}) 均为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} E_a$, $F = \lim_{\rightarrow} F_a$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , F_a 到 F 的规范映射为 g_a . 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 E_a 到 F_a 的映射, 并且 $(\forall a)(\forall b)(a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b \Rightarrow u_b \circ g_{ba} = f_{ba} \circ u_a)$, 则称映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ba}) 到 (F_a, g_{ba}) 的映射归纳系统. 如果 E 到 F 的映射 u 使 $(\forall a)(a \in I \Rightarrow u \circ f_a = g_a \circ u_a)$, 则称 u 为映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 的归纳极限, 记作 $\lim_{\rightarrow a} u_a$, 在没有歧义的情况下也可以简记为 $\lim_{\rightarrow} u_a$.

定理 186.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 、 (F_a, g_{ba}) 、 (G_a, h_{ba}) 均为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} E_a$, $F = \lim_{\rightarrow} F_a$, $G = \lim_{\rightarrow} G_a$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , F_a 到 F 的规范映射为 g_a , G_a 到 G 的规范映射为 h_a . 对任意 $a \in I$, 令 u_a 为 E_a 到 F_a 的映射, v_a 为 F_a 到 G_a 的映射, 则映射族 $(v_a \circ u_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ba}) 到 (G_a, h_{ba}) 的映射归纳系统, 并且 $\lim_{\rightarrow} (v_a \circ u_a) = \lim_{\rightarrow} (v_a \circ (\lim_{\rightarrow} u_a))$.

证明：令 $w_a = v_a \circ u_a$. 则 $h_{ab} \circ w_a = h_{ab} \circ v_a \circ u_a$, 等于 $v_b \circ g_{ba} \circ u_a$, 等于 $w_b \circ f_{ba}$, 映射族 $(w_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ba}) 到 (G_a, h_{ba}) 的映射归纳系统. 同时 $v \circ u \circ f_a = v \circ g_a \circ u_a$, 等于 $h_a \circ v_a \circ u_a$, 得证.

定理 187.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 、 (E'_a, f'_{ba}) 均为关于 I 的集合归纳系统, 对任意 $a \in I$, u_a 为 E_a 到 E'_a 的映射, 则映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为映射归纳系统. 令 $u = \lim_{\rightarrow} u_a$, 如果对任意 $a \in I$, u_a 为单射 (或满射), 则 u 是单射 (或满射).

证明：令 f_a 为 E_a 到 E 的规范映射, f'_a 为 E'_a 到 E' 的规范映射.

如果对任意 $a \in I$, u_a 为单射, 令 $x \in E_a$, $y \in E_a$, 且 $f'_a(u_a(x)) = f'_a(u_a(y))$, 根据定理183 (2), 存在 $b \geq a$, 使 $f'_{ba}(u_a(x)) = f'_{ba}(u_a(y))$, 故 $u_b(f_{ba}(x)) = u_b(f_{ba}(y))$, 因此 $f_{ba}(x) = f_{ba}(y)$, 根据定理184 (3), u 是单射.

如果对任意 $a \in I$, u_a 为满射, 根据补充定理424 (2), $E' = \bigcup_{a \in I} f'_a \langle E'_a \rangle$. 因此 $E = \bigcup_{a \in I} u \langle f_a \langle E_a \rangle \rangle$, 故 $E = u \bigcup_{a \in I} f_a \langle E_a \rangle$, 因此 $E' = u(E)$, 故 u 是满射.

补充定理 428. 子集上的系统为归纳系统

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow} E_a$, 对任意 $a \in I$, $M_a \subset E_a$, 如果 $(\forall a)(\forall b)(a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b \Rightarrow f_{ba}(M_a) \subset M_b)$, 当 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b$ 时, 令 g_{ba} 为 f_{ba} 在 M_a 上的限制, 则 (M_a, g_{ba}) 也是关于 I 的集合归纳系统, 并且, 对任意 $a \in I$, 令 j_a 为 M_a 到 E_a 的规范映射, 并且, $\lim_{\rightarrow} j_a$ 为 $\lim_{\rightarrow} M_a$ 到 E 的单射.

证明: 根据定义可证 (M_a, g_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统. 根据定理187可证, $\lim_{\rightarrow} j_a$ 为 $\lim_{\rightarrow} M_a$ 到 E 的单射.

定义 202. 子集归纳系统 (*système inductif de parties*)

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, 对任意 $a \in I$, $M_a \subset E_a$, 如果 $(\forall a)(\forall b)(a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b \Rightarrow f_{ba}(M_a) \subset M_b)$, 则称 $(M_a)_{a \in I}$ 为 $(E_a)_{a \in I}$ 的子集归纳系统.

定理 188.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 、 (E'_a, f'_{ba}) 均为关于 I 的集合归纳系统, 对任意 $a \in I$, u_a 为 E_a 到 E'_a 的映射, 令 $u = \lim_{\rightarrow} u_a$, 则:

(1) $(M_a)_{a \in I}$ 为 $(E_a)_{a \in I}$ 的子集归纳系统, 则 $(u_a(M_a))_{a \in I}$ 为 $(E'_a)_{a \in I}$ 的子集归纳系统, 并且, $\lim_{\rightarrow} u_a(M_a) = u(\lim_{\rightarrow} M_a)$.

(2) $I \neq \emptyset$, $(x'_a)_{a \in I}$ 为族, 对任意 $a \in I$, $x'_a \in E'_a$, 当 $a \in I$ 与 $b \in I$ 与 $a \leq b$ 时, $f_{ba}(x'_a) = x'_b$, 则 $u_a^{-1}(x'_a)$ 为 $(E_a)_{a \in I}$ 的子集归纳系统, 则存在唯一的 $x' \in \lim_{\rightarrow} E'_a$, 使对任意 $a \in I$, $x' = f'_a(x'_a)$, 并且 $\lim_{\rightarrow} u_a^{-1}(x'_a) = u^{-1}(x')$, 其中 f'_a 为 E 到 $\lim_{\rightarrow} E'_a$ 的规范映射.

证明:

(1) 根据定义, $(u_a(M_a))_{a \in I}$ 为 $(E'_a)_{a \in I}$ 的子集归纳系统. 令 v_a 为 u_a 通过 E_a 的子集 M_a 和 E'_a 的子集 $u_a(M_a)$ 导出的函数, 则 v_a 为满射, 根据定理187可以证明 $\lim_{\rightarrow} u_a(M_a) = u(\lim_{\rightarrow} M_a)$.

(2) 对任意 $a \in I$, $b \in I$, $a \leq b$, $f'_a(x'_a) = f'_b(f'_{ba}(x'_a))$, 因此 $f'_a(x'_a) = f'_b(x'_b)$, 令其为 x' , 故 $x' \in \lim_{\rightarrow} E'_a$. 令 $N_a = u_a^{-1}(x'_a)$, 如果 $x_a \in N_a$, 且 $b \geq a$, 则 $x'_b = f'_b(x'_a)$, 等于 $f'_b a(u'_a(x_a))$, 等于 $u_b(f_{ba}(x_a))$, 因此 $f_{ba}(x_a) \in N_b$, 故 $(N_a)_{a \in I}$ 为 $(E_a)_{a \in I}$ 的子集归纳系统. 对任意 $x \in \lim_{\rightarrow} N_a$, 存在 $a \in I$, $x_a \in N_a$, 使 $x = f_a(x_a)$, 则 $u(x) = u(f_a(x_a))$, 等于 $f'_a(u_a(x_a))$, 等于 $f'_a(x'_a)$, 等于 x' , 故 $x \in u^{-1}(x')$.

反过来, 如果 $x \in u^{-1}(x')$, 则存在 $a \in I$, $x_a \in N_a$, 使 $x = f_a(x_a)$. 由于 $f'_a(x'_a)$ 等于 x' , 等于 $u(x)$, 等于 $u(f_a(x_a))$, 等于 $f'_a(u_a(x_a))$, 根据定理183 (2), 存在 $b \geq a$, 使 $f'_b a(x'_a) = f'_b a(u_a(x_a))$, 即 $f'_b a(u_a(x_a)) = x'_b$, 故 $u_b(f_{ba}(x_a)) = x'_b$, 因此 $f_{ba}(x_a) \in N_b$, 又因为 $x = f_b(f_{ba}(x_a))$, 因此 $x \in \lim_{\rightarrow} N_a$. 综上, $\lim_{\rightarrow} u_a^{-1}(x'_a) = u^{-1}(x')$.

补充定理 429. 限制指标集可以得到集合归纳系统

I 为右方有向集, $((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于 I 的集合归纳系统, $(E_a)_{a \in I}$ 对于 $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限为 E , J 为 I 的预序子集, 则 $((E_a)_{a \in J}, (f_{ba})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b})$ 是关于 J 的集合归纳系统.

证明: 根据定义可证.

定义 203. 通过限制得到的集合归纳系统 (*système inductif d'ensembles obtenu par restriction*); 集族的归纳极限的之间的规范映射 (*application canonique entre limites inductives de familles d'ensembles*)

I 为右方有向集, $((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于 I 的集合归纳系统, $(E_a)_{a \in I}$ 对于 $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限为 E , J 为 I 的预序子集, 则 $((E_a)_{a \in J}, (f_{ba})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b})$ 称为通过将指标集限制在 J 上得到的集合归纳系统.

令 $(E_a)_{a \in I}$ 对于 $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限为 E , $(E_a)_{a \in J}$ 对于 $(f_{ab})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限为 E' , 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , 则映射族 $(f_a)_{a \in J}$ 的归纳极限, 称为 E' 到 E 的规范映射.

补充定理 430.

I 为右方有向集, J 为 I 的预序子集, J' 为 J 的预序子集, $(E_a)_{a \in I}$ 对于 $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限为 E , $(E_a)_{a \in J}$ 对于 $(f_{ba})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限 E' , $(E_a)_{a \in J'}$ 对于 $(f_{ba})_{a \in J' \text{ 与 } b \in J' \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限为 E'' , E' 到 E 的规范映射为 g , E'' 到 E' 的规范映射为 g' , E'' 到 E 的规范映射为 g'' , 则 $g'' = g \circ g'$.

证明: 根据定义可证.

定理 189.

I 为右方有向集, $((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b})$ 为关于 I 的集合归纳系统, J 为 I 的预序子集和共尾子集. 令 $(E_a)_{a \in I}$ 对于 $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限为 E , $(E_a)_{a \in J}$ 对于 $(f_{ba})_{a \in J \text{ 与 } b \in J \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限为 E' , 则 E' 到 E 的规范映射为双射.

证明: 令 E' 到 E 的规范映射为 g , 根据定理184 (3), g 为单射. 对任意 $x \in E$, 根据补充定理424 (1), 存在 $a \in I$, $z \in E_a$, 使 $f_a(z) = x$. 由于 J 为 I 的共尾子集, 故存在 $b \geq a$, 且 $b \in J$, 根据补充定理423, $f_b(f_{ba}(z)) = x$, 因此 $x \in \bigcup_{a \in J} f_a(E_a)$; 反过来, 对任意 $x \in \bigcup_{a \in J} f_a(E_a)$, 均有 $x \in E$, 因此 $E = \bigcup_{a \in J} f_a(E_a)$, 根据定理184 (2), g 为满射.

定义 204. 集族的双重归纳极限 (*double limite inductive de famille d'ensembles*)

I 、 L 均为右方有向集, $I \times L$ 的预序关系为 $(x \in I \times L \text{ 与 } y \in I \times L \text{ 与 } pr_1 x \leq pr_1 y \text{ 与 } pr_2 x \leq pr_2 y)$, $((E_a^x)(a, x) \in I \times L, (f_{ba}^{yx})_{(a,x) \in I \times L \text{ 与 } (b,y) \in I \times L \text{ 与 } (a,x) \leq (b,y)})$ 为关于 $I \times L$ 的集合归纳系统, 则其归纳极限称为双重归纳极限, 记作 $\lim_{\rightarrow a, x} E_a^x$, 在没有歧义的情况下也可以简记为 $\lim_{\rightarrow} E_a^x$.

补充定理 431.

I 、 L 均为右方有向集, $I \times L$ 的预序关系为($x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y$), $((E_a^x(a, x) \in I \times L, (f_{ba}^{yx})_{(a,x) \in I \times L}$ 与 $(b,y) \in I \times L$ 与 $(a,x) \leq (b,y)$)为关于 $I \times L$ 的集合归纳系统, 则 (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 为关于 I 的集合归纳系统, 也是关于 L 的集合归纳系统. 并且, $(\lim_{\rightarrow a} E_a^x, g^{yx})$ 、 $(\lim_{\rightarrow x} E_a^x, h_{ba})$ 分别是关于 L 的集合归纳系统和关于 I 的集合归纳系统, 其中 $g^{yx} = \lim_{\rightarrow a} f_{aa}^{yx}$, $h_{ba} = \lim_{\rightarrow x} f_{ba}^{xx}$.

证明: 根据定义, 可证则 (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 为关于 I 的集合归纳系统, 也是关于 L 的集合归纳系统. 根据定理186, $g^{zx} = g^{zy} \circ g^{yx}$, $h_{ca} = h_{cb} \circ h_{ba}$, 因此, $(\lim_{\rightarrow a} E_a^x, g^{yx})$ 、 $(\lim_{\rightarrow x} E_a^x, h_{ba})$ 分别是关于 L 的集合归纳系统和关于 I 的集合归纳系统.

定理 190.

I 、 L 均为右方有向集, $I \times L$ 的预序关系为($x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y$), (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 为关于 $I \times L$ 的集合归纳系统, 令 E_a^x 到 $\lim_{\rightarrow a} E_a^x$ 的规范映射为 g_a^x , $\lim_{\rightarrow a} E_a^x$ 到 $\lim_{\rightarrow x} (\lim_{\rightarrow a} E_a^x)$ 的规范映射为 h_x , $u = \lim_{\rightarrow a, x} (h_x \circ g_a^x)$, 则 u 为 $\lim_{\rightarrow a, x} E_a^x$ 到 $\lim_{\rightarrow x} (\lim_{\rightarrow a} E_a^x)$ 的双射; 令 E_a^x 到 $\lim_{\rightarrow x} E_a^x$ 的规范映射为 j_a^x , $\lim_{\rightarrow x} E_a^x$ 到 $\lim_{\rightarrow a} (\lim_{\rightarrow x} E_a^x)$ 的规范映射为 k_a , $v = \lim_{\rightarrow a, x} (k_a \circ j_a^x)$, 则 v 为 $\lim_{\rightarrow a, x} E_a^x$ 到 $\lim_{\rightarrow a} (\lim_{\rightarrow x} E_a^x)$ 的双射.

证明: 令 $h^{yx} = \lim_{\rightarrow a} f_{aa}^{yx}$, $F_x = \lim_{\rightarrow a} E_a^x$, $F = \lim_{\rightarrow x} F_x$, $E = \lim_{\rightarrow a, x} E_a^x$. 根据补充定理424 (2), $F = \bigcup_{x \in L} h_x(F_x)$, $F_x = \bigcup_{a \in I} g_a^x(E_a^x)$, 因此 $F = \bigcup_{x \in L} (h_x \circ g_a^x(E_a^x))$, 根据定理184 (2), u 为满射.

另一方面, 令 $m \in E_a^x$ 、 $n \in E_a^x$, 并且 $h_x \circ g_a^x(m) = h_x \circ g_a^x(n)$, 因此, 存在 $y \geq x$, 使 $h^{yx}(g_a^x(m)) = h^{yx}(g_a^x(n))$, 故 $g_a^y(f_{aa}^{yx}(m)) = g_a^y(f_{aa}^{yx}(n))$, 因此, 存在 $b \geq a$, 使 $f_{ba}^{yy}(f_{aa}^{yx}(m)) = f_{ba}^{yy}(f_{aa}^{yx}(n))$, 因此, $f_{ba}^{yx}(m) = f_{ba}^{yx}(n)$, 根据定理184 (3), u 为单射.

补充定理 432.

I 、 L 均为右方有向集, $I \times L$ 的预序关系为($x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y$), (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 、 $(E'_a, f'_{ba} a^{yx})$ 均为关于 $I \times L$ 的集合归纳系统, 对于 $(a, b) \in I \times L$, 令 u_a^x 为 E_a^x 到 E'_a 的映射, 并且 $(u_a^x)_{(a,x) \in I \times L}$ 为 (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 到 $(E'_a, f'_{ba} a^{yx})$ 的映射归纳系统, 则 $(u_a^x)_{a \in I}$ 、 $(u_a^x)_{x \in L}$ 均为 (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 到 $(E'_a, f'_{ba} a^{yx})$ 的映射归纳系统, $(\lim_{\rightarrow a} u_a^x)_{x \in L}$ 为 $(\lim_{\rightarrow a} E_a^x)$ 到 $(\lim_{\rightarrow a} E'_a)$ 的映射归纳系统, $(\lim_{\rightarrow x} u_a^x)_{a \in I}$ 为 $(\lim_{\rightarrow x} E_a^x)$ 到 $(\lim_{\rightarrow x} E'_a)$ 的映射归纳系统.

证明: 根据定义可证 $(u_a^x)_{a \in I}$ 、 $(u_a^x)_{x \in L}$ 均为 (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 到 $(E'_a, f'_{ba} a^{yx})$ 的映射归纳系统.

令 $u_x = \lim_{\rightarrow a} u_a^x$, $g^{yx} = \lim_{\rightarrow a} f_{aa}^{yx}$, $g'^{yx} = \lim_{\rightarrow a} f'_{aa} a^{yx}$, 则当 $x \leq y$ 时, $u_y^y \circ f_{aa}^{yx} = f'_{aa} a^{yx} \circ u_a^x$, 根据定理186, $u_y \circ g^{yx} = g'^{yx} \circ u_x$, 因此, $(\lim_{\rightarrow a} u_a^x)_{x \in L}$ 为 $(\lim_{\rightarrow a} E_a^x)$ 到 $(\lim_{\rightarrow a} E'_a)$ 的映射归纳系统.

同理可证 $(\lim_{\rightarrow x} u_a^x)_{a \in I}$ 为 $(\lim_{\rightarrow x} E_a^x)$ 到 $(\lim_{\rightarrow x} E'_a)$ 的映射归纳系统.

定义 205. 映射族的双重归纳极限 (double limite inductive de famille d'applications)

I 、 L 均为右方有向集, $I \times L$ 的预序关系为($x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y$), (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 、 $(E_a'^x, f_{ba}'^{yx})$ 均为关于 $I \times L$ 的集合归纳系统, 对于 $(a, b) \in I \times L$, 令 u_a^x 为 E_a^x 到 $E_a'^x$ 的映射, 并且 $(u_a^x)_{(a,x) \in I \times L}$ 为 (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 到 $(E_a'^x, f_{ba}'^{yx})$ 的映射归纳系统, 则其归纳极限称双重归纳极限, 记作 $\lim_{\rightarrow a, x} u_a^x$.

定理 191.

I 、 L 均为右方有向集, $I \times L$ 的预序关系为($x \in I \times L$ 与 $y \in I \times L$ 与 $pr_1x \leq pr_1y$ 与 $pr_2x \leq pr_2y$), (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 、 $(E_a'^x, f_{ba}'^{yx})$ 均为关于 $I \times L$ 的集合归纳系统, 对于 $(a, b) \in I \times L$, 令 u_a^x 为 E_a^x 到 $E_a'^x$ 的映射, 并且 $(u_a^x)_{(a,x) \in I \times L}$ 为 (E_a^x, f_{ba}^{yx}) 到 $(E_a'^x, f_{ba}'^{yx})$ 的映射归纳系统, $u_a = \lim_{\rightarrow x} u_a^x$, $u_x = \lim_{\rightarrow a} u_a^x$, $u = \lim_{\rightarrow a, x} u_a^x$. 令 E_a^x 到 $\lim_{\rightarrow a} E_a^x$ 的规范映射为 g_a^x , $\lim_{\rightarrow a} E_a^x$ 到 $\lim_{\rightarrow x} (\lim_{\rightarrow a} E_a^x)$ 的规范映射为 h_x , $u = \lim_{\rightarrow a, x} (h_x \circ g_a^x)$; 令 E_a^x 到 $\lim_{\rightarrow x} E_a^x$ 的规范映射为 j_a^x , $\lim_{\rightarrow x} E_a^x$ 到 $\lim_{\rightarrow a} (\lim_{\rightarrow x} E_a^x)$ 的规范映射为 k_a , $v = \lim_{\rightarrow a, x} (k_a \circ j_a^x)$; 令 $E_a'^x$ 到 $\lim_{\rightarrow a} E_a'^x$ 的规范映射为 $g_a'^x$, $\lim_{\rightarrow a} E_a'^x$ 到 $\lim_{\rightarrow x} (\lim_{\rightarrow a} E_a'^x)$ 的规范映射为 h'_x , $u' = \lim_{\rightarrow a, x} (h'_x \circ g_a'^x)$; 令 $E_a'^x$ 到 $\lim_{\rightarrow x} E_a'^x$ 的规范映射为 $j_a'^x$, $\lim_{\rightarrow x} E_a'^x$ 到 $\lim_{\rightarrow a} (\lim_{\rightarrow x} E_a'^x)$ 的规范映射为 k'_a , $v' = \lim_{\rightarrow a, x} (k'_a \circ j_a'^x)$. 则 $\lim_{\rightarrow a, x} u_a^x = u'^{-1} \circ \lim_{\rightarrow x} (\lim_{\rightarrow a} u_a^x) \circ u$, $\lim_{\rightarrow a, x} u_a^x = v'^{-1} \circ \lim_{\rightarrow a} (\lim_{\rightarrow x} u_a^x) \circ v$.

证明: 根据定理190和可证.

定理 192.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 、 (E_a', f_{ba}') 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow a} E_a$, $E' = \lim_{\rightarrow a} E_a'$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , E_a' 到 E' 的规范映射为 f'_a , 则 $(E_a \times E_a', f_{ba} \times f'_{ba})$ 也是关于 I 的集合归纳系统, $(f_a \times f'_a)$ 是 $(E_a \times E_a', f_{ba} \times f'_{ba})$ 到 $E \times E'$ 的映射归纳系统, 且 $\lim_{\rightarrow} (f_a \times f'_a)$ 是 $\lim_{\rightarrow} (E_a \times E_a')$ 到 $(\lim_{\rightarrow} E_a) \times (\lim_{\rightarrow} E_a')$ 的双射.

证明: 根据定义, $(E_a \times E_a', f_{ba} \times f'_{ba})$ 也是关于 I 的集合归纳系统, $(f_a \times f'_a)$ 是 $(E_a \times E_a', f_{ba} \times f'_{ba})$ 到 $E \times E'$ 的映射归纳系统.

令 $g = \lim_{\rightarrow} (f_a \times f'_a)$, 由于 $E \times E' = \bigcup_{a \in I} f_a(E_a) \times f'_a(E_a')$, 根据定理184 (2), g 为满射.

另一方面, 设 $(x, x') \in E_a \times E_a'$, $(y, y') \in E_a \times E_a'$, 并且 $f_a(x) = f_a(y)$ 、 $f'_a(x) = f'_a(y)$, 则存在 $b \geq a$ 、 $c \geq a$, 使 $f_{ba}(x) = f_{ba}(y)$ 、 $f'_{ca}(x) = f'_{ca}(y)$, 进而, 存在 $d \geq c$ 、 $d \geq b$, 故 $f_{da}(x) = f_{da}(y)$ 、 $f'_{da}(x) = f'_{da}(y)$, 根据定理184 (3), g 为单射.

定义 206. 乘积的归纳极限到归纳极限的乘积的规范映射 (*application canonique de la limite inductive d'un produit dans du produit de limites inductives*)

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 、 (E_a', f_{ba}') 为关于 I 的集合归纳系统, $E = \lim_{\rightarrow a} E_a$, $E' = \lim_{\rightarrow a} E_a'$, 对任意 $a \in I$, E_a 到 E 的规范映射为 f_a , E_a' 到 E' 的规范映射为 f'_a , 则 $(f_a \times f'_a)$ 称为 $\lim_{\rightarrow} (E_a \times E_a')$ 到 $(\lim_{\rightarrow} E_a) \times (\lim_{\rightarrow} E_a')$ 的规范映射.

定理 193.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 、 (E_a', f_{ba}') 、 (F_a, g_{ba}) 、 (F_a', g_{ba}') 均为关于 I 的集合归纳系统, 对任意 $a \in I$, u_a 为 E_a 到 F_a 的映射, u'_a 为 E_a' 到 F_a' 的映射, 且 (u_a) 和 (u'_a) 均为映射归纳系

统, 则 $(u_a \times u'_a)$ 为映射归纳系统, 令 $\lim_{\rightarrow} (E_a \times E'_a)$ 到 $(\lim_{\rightarrow} E_a) \times (\lim_{\rightarrow} E'_a)$ 的规范映射为 f , $\lim_{\rightarrow} (F_a \times F'_a)$ 到 $(\lim_{\rightarrow} F_a) \times (\lim_{\rightarrow} F'_a)$ 的规范映射为 g , 则 $\lim_{\rightarrow} (u_a \times u'_a) = g^{-1} \circ ((\lim_{\rightarrow} u_a) \times (\lim_{\rightarrow} u'_a)) \circ f$.

证明: 根据定理192可证.

习题 189.

I 为右方有向预序集, $(J_l)_{l \in L}$ 为 I 的子集族, 其中 L 为右方有向预序集, 并且:

第一, J_l 按在 I 上的预序关系导出的预序关系排序, 且为右方有向集;

第二, $i \in L$ 与 $j \in L$ 与 $i \leq j \Rightarrow J_i \subset J_j$;

第三, $I = \bigcup_{l \in L} J_l$.

(E_a, f_{ab}) 为集合映射系统, $\lim_{\leftarrow} E_a = E$, 对任意 $l \in L$, 对于 (E_a, f_{ab}) 通过将指标集限制在 J_l 上得到的集合射影系统, 令 F_l 为其集族对于其函数族的射影极限. 当 $i \in L$ 与 $j \in L$ 与 $i \leq j$ 时, 令 g_{ij} 为 F_j 到 F_i 的规范映射. 求证: (F_i, g_{ij}) 为关于 I 的集合射影系统, 并且, 令 $F = \lim_{\leftarrow} F_l$, 试定义 F 到 E 的规范双射.

证明:

根据补充定理416可以证明 (F_i, g_{ij}) 为关于 I 的集合射影系统.

对任意 $x \in E$, 根据定义可证 $((f_i(x))_{i \in J_j})_{j \in L} \in F$; 反过来, 对任意 $y \in F$, $i \in L$, $j \in L$, 如果 $a \in J_i \cap J_j$, 则 $pr_a(pr_i y) = pr_a(pr_j y)$. 令 $x = (pr_a(pr_{\tau_i(i \in L \text{ 与 } a \in J_i)} y))_{a \in I}$, 对任意 $a \in I$, $b \in I$, 存在 $i \in L$, 使 $a \in J_i$, $b \in J_i$, 因此 $f_{ab}(pr_b(pr_{\tau_i(i \in L \text{ 与 } a \in J_i)} y)) = pr_a(pr_{\tau_i(i \in L \text{ 与 } a \in J_i)} y)$, 故 $x \in E$, 因此, 可定义 F 到 E 的规范双射为 $y \rightarrow (pr_a(pr_{\tau_i(i \in L \text{ 与 } a \in J_i)} y))_{a \in I}$.

习题 190.

(E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统, 其中 I 为右方有向集, $\lim_{\leftarrow} E_a = E$, 对任意 $a \in I$, 令 f_a 为 E 到 E_a 的规范映射, 如果对任意 $a \in I$, $b \in I$, f_{ab} 均为单射, 求证: 对任意 $a \in I$, f_a 为单射.

证明: 即补充定理414.

习题 191.

I 为预序集, (E_a, f_{ab}) 、 (F_a, g_{ab}) 均为关于 I 的集合射影系统, 映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ab}) 到 (F_a, g_{ab}) 的映射射影系统. 对任意 $a \in I$, 令 G_a 为 u_a 的图, $u = \lim_{\leftarrow} u_a$. 求证: (G_a) 为某个映射射影系统的集族, 并给出其射影极限.

证明: 令 h_{ab} 为映射 $(x, y) \rightarrow (f_{ab}(x), g_{ab}(y))$, 则 (G_a, h_{ab}) 为映射射影系统, 其射影极限为 $\bigcup_{z \in u \text{ 的图}} \{(pr_i(pr_1 z), pr_i(pr_2 z))_{i \in I}\}$.

习题 192.

I 为非空右方有向集, 且无最大元. F 为满足下列条件的 I 的元素序列 $x = (a_i)_{i \in [1, 2n]}$ (其中 n 为自然数且 $n \geq 1$) 的集合:

第一, 当 $i \in [1, n]$ 时, $a_{2i-1} < a_{2i}$;

第二, 当 $j \in [1, n]$ 、 $i \in [1, n]$ 且 $j < i$ 时, 非 $(a_{2i-1} \leq a_{2j-1})$.

$F \neq \emptyset$. 令 $r(x) = a_{2n-1}$, $s(x) = a_{2n}$, n 称为 x 的长度.

(1) 对于任意 $a \in I$, 令 $E_a = \{x | x \in F \text{ 与 } r(x) = a\}$. 当 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$ 时, 按照下列方式定义 E_b 到 E_a 的函数 f_{ab} : 对于 $x \in E_b$, 令 $x = (a_i)_{i \in [1, 2n]}$, 令 j 为 $\{i | i \in [1, n] \text{ 与 } a \leq a_{2j-1}\}$ 的最小元, $f_{ab}(x) = (a_i)_{i \in [1, 2j-2]} \cup \{(2j-1, a), (2j, a_{2j})\}$, 求证: 对任意 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$, $E_a \neq \emptyset$, $f_{ab}(E_b) = E_a$, 并且, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统.

(2) 令 $x_a \in E_a$ 、 $x_b \in E_b$, 存在 $c \in I$ 以及 $x_c \in E_c$, 使 $c \geq a$ 、 $c \geq b$, 并且, $x_a = f_{ac}(x_c)$, $x_b = f_{bc}(x_c)$, 如果 x_a 和 x_b 的长度相等, 求证: $s(x_a) = s(x_b)$.

(3) $E = \lim_{\leftarrow} E_a$, 且 $E \neq \emptyset$, 令 $(a_i) \in E$, 求证: $\{x | (\exists i)(i \in I \text{ 与 } x = s(a_i))\}$ 可数并且和 I 共尾.

(4) 令 I 为不可数集合 A 的有限子集集合, 并按包含关系排序. 求证: 不存在 I 的可数共尾子集, 并且, 给出 (E_a, f_{ab}) , 对任意 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$, $E_a \neq \emptyset$, $f_{ab}(E_b)$ 为满射, 但 $\lim_{\leftarrow} E_a = \emptyset$.

(5) 给出关于 I 的集合射影系统 (E_a, f_{ab}) 到 $(E'_a, f'_a b)$ 的映射射影系统 (u_a) , 令 $u = \lim_{\leftarrow} u_a$, 对任意 $a \in I$, u_a 均满射, 但 u 不是满射.

证明:

(1) 对任意 $a \in I$, 令 $d > a$, 对任意 $i \in [1, n]$, 令 $a_{2i-1} = a$, $a_{2i} = d$, 故 $(a_i)_{i \in [1, 2n]} \in E_a$, 因此 $E_a \neq \emptyset$. 当 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$ 时, 对任意 $x \in E_a$, 均有 $x \in E_b$, 且 $f_{ab}(x) = x$, 故 $f_{ab}(E_b) = E_a$. 根据定义可证 $f_{ac} = f_{ab} \circ f_{bc}$, 故 (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统.

(2) 根据定义可证.

(3) 根据习题192 (2) 可证.

(4) 设 J 为 I 的共尾子集, 令 $B = \bigcup_{X \in J} X$, 则 B 为可数集合, 令 $x \in A - B$, 则不存在 $Z \in J$ 使 $\{x\} \subset Z$, 矛盾, 故不存在 I 的可数共尾子集. 根据习题192 (3) 确定的集合射影系统符合条件.

(5) 令 (E_a, f_{ab}) 为根据习题192 (3) 确定的集合射影系统, 对任意 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$, 令 E'_a 均为单元元素集合, f'_{ab} 为 E'_b 到 E'_a 的双射, u_a 为 E_a 到 E'_a 的满射, 则 (u_a) 符合条件.

习题 193.

I 为右方有向集, $(E_a)_{a \in I}$ 为格族, 对任意 $a \in I$, E_a 按相反关系排序, 为诺特集. 对任意 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$, f_{ab} 为 E_b 到 E_a 的单增映射, (E_a, f_{ab}) 为关于 I 的集合射影系统. 对任意 $a \in I$, G_a 均为 E_a 的非空子集, 并且满足下列条件:

第一, 对任意 $a \in I$, G_a 的任何两个不相同元素都是不可比较的;

第二, 对任意 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$, $f_{ab}(G_b) = G_a$;

第三, 对任意 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$ 、 $x_a \in G_a$, $f_{ab}^{-1}(x_a)$ 有最大元 $M_{ab}(x_a)$;

第四, 对任意 $a \in I$ 、 $b \in I$ 、 $a \leq b$, 如果 $h_b \in E_b$, 且存在 $y_b \in G_b$ 且 $y_b \leq h_b$, 则对任意 $x_a \in G_a$ 且 $x_a \leq f_{ab}(h_b)$, 均存在 $x_b \in G_b$ 且 $x_b \leq h_b$ 使 $x_a = f_{ab}(x_b)$.

求证: 子集射影系统 (G_a) 的射影极限不是空集.

证明: 令 J 为 I 的有限子集, 考虑满足下列条件的元素族 $(x_a)_{a \in J}$:

第一, 对任意 $a \in J$ 、 $b \in J$ 、 $a \leq b$ 、 $x_a \in G_a$ 、 $x_b \in G_b$, $x_a = f_{ab}(x_b)$;

第二, 对任意 $c \in I$ 并且 c 是 J 在 I 上的上界, 存在 $x_c \in c$ 并且对任意 $a \in J$ 均有 $x_a = f_{ac}(x_c)$.

因此, 对任意 $c \in I$ 并且 c 是 J 在 I 上的上界, $\bigcap_{a \in J} f_{ac}^{-1}(x_a)$ 不为空, 且所有元素均为 $\bigcup_{a \in J} \{M_{ac}(x_a)\}$ 的下界. 由 $\bigcup_{a \in J} \{M_{ac}(x_a)\}$ 为有限集合, 且 E_c 为格, 故其在 E_c 上有最大下界, 令 $z = \inf_{a \in J} (M_{ac}(x_a))$, $u \in \bigcap_{a \in J} f_{ac}^{-1}(x_a)$, 则 $u \leq z$, 故对任意 $a \in J$, 均有 $f_{ac}(z) \geq x_a$, 同时, 由于 $z \leq M_{ac}(x_a)$, 故 $f_{ac}(z) \leq x_a$, 因此 $f_{ac}(z) = x_a$, 故 $\inf_{a \in J} (M_{ac}(x_a))$ 为 $\bigcap_{a \in J} f_{ac}^{-1}(x_a)$ 的最大元. 进而, 对任意 $y \in G_c$ 且 $y \leq z$, 以及任意 $d \in J$, $f_{dc}(y) \leq x_d$, 由于 $f_{dc}(y) \in G_d$ 、 $x_d \in G_d$, 故 $f_{dc}(y) = x_d$, 因此, $\{y | y \in G_c \text{ 与 } y \leq \inf_{a \in J} (M_{ac}(x_a))\} = G_c \cap (\bigcap_{a \in J} f_{ac}^{-1}(x_a))$.

令 J 为 I 的子集, 考虑满足下列条件的元素族 $(x_a)_{a \in J}$: 对 J 的任意有限子集 F , $(x_a)_{a \in F}$ 满足上一段的两个条件. 如果 $J \neq I$, 令 $b \in I - J$. 对 J 的任意有限子集 F 、 $F \cup \{b\}$ 的上界 c , $\{y | y \in G_c \text{ 与 } y \leq \inf_{a \in F} (M_{ac}(x_a))\} = G_c \cap (\bigcap_{a \in F} f_{ac}^{-1}(x_a))$. 因此 $\{y | y \in G_b \text{ 与 } y \leq f_{bc}(\inf_{a \in F} (M_{ac}(x_a)))\} = f_{bc}(G_c \cap (\bigcap_{a \in F} f_{ac}^{-1}(x_a)))$. 根据补充定理 410 (1), 存在 $F_0 \subset J$ 以及 $F_0 \cup \{b\}$ 的上界 c_0 , 对任意 J 的有限子集 F , 以及任意 $F \cup \{b\}$ 的上界 c , 均有 $\inf_{a \in F} (M_{ac}(x_a)) \geq \inf_{a \in F_0} (M_{ac_0}(x_a))$. 令 x_b 为 $\{y | y \in G_b \text{ 与 } y \leq f_{bc_0}(\inf_{a \in F_0} (M_{ac_0}(x_a)))\}$ 的任何一个元素, 则 $(x_a)_{a \in F \cup \{b\}}$ 符合条件.

令 K 为存在满足条件的元素组的 I 的子集的集合, 则 K 非空. K 按关于 J 、 J' 的偏序关系 (存在满足条件的元素族 $(x_i)_{i \in J}$ 和 $(y_i)_{i \in J'}$ 并且前者是后者的子族) 的包含关系排序, 根据定理 80, K 有极大元, 并且其极大元为 I , 故存在元素族 $(x_i)_{i \in J}$ 符合条件, 即子集射影系统 (G_a) 的射影极限不是空集.

习题 194.

I 为右方有向预序集, $(J_l)_{l \in L}$ 为 I 的子集族, 其中 L 为右方有向预序集, 并且:

第一, J_l 按在 I 上的预序关系导出的预序关系排序, 且为右方有向集;

第二, $i \in L$ 与 $j \in L$ 与 $i \leq j \Rightarrow J_i \subset J_j$;

第三, $I = \bigcup_{l \in L} J_l$. (E_a, f_{ba}) 为集合归纳系统.

令 $\lim_{\rightarrow} E_a = E$, 对任意 $l \in L$, 对于 (E_a, f_{ba}) 通过将指标集限制在 J_l 上得到的集合归纳系统, 令 F_l 为其集族对于其函数族的归纳极限. 当 $i \in L$ 与 $j \in L$ 与 $i \leq j$ 时, 令 g_{ji} 为 F_i 到 F_j 的规

范映射. 求证: (F_i, g_{ji}) 为关于 I 的集合归纳系统, 并且, 令 $F = \lim_{\rightarrow} F_i$, 试定义 F 到 E 的规范双射.

证明:

根据补充定理430可以证明 (F_i, g_{ji}) 为关于 I 的集合归纳系统.

令 G 为 $(E_a)_{a \in I}$ 的和, 其等价关系为 R , H 为 $(F_i)_{i \in L}$ 的和, 其等价关系为 S . 对任意 $X \in F$, 令关于 S 的等价类的代表为 K , 将指标集限制在 $J_{pr_2 k}$ 上得到的集合归纳系统的等价关系为 T , $pr_1 k$ 关于 T 的等价类的代表为 x , x 关于 R 的等价类为 $G(x)$, 则 $X \rightarrow G(x)$ 为 F 到 E 的规范双射.

习题 195.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, 其中, $\lim_{\rightarrow} E_a = E$, 对任意 $a \in I$, f_a 为 E 到 E_a 的规范映射, R_a 为公式 $(x \in E_a \text{ 与 } y \in E_a \text{ 与 } f_a(x) = f_a(y))$, 求证: 对任意 $a \in I$, $b \in I$, $a \leq b$, f_{ba} 是同 R_a 和 R_b 相容的映射; 令 $E'_a = E_a / R_a$, f'_{ba} 为 f_{ba} 对于 R_a 和 R_b 通过商导出的映射, 则 f'_{ba} 为单射, (E'_a, f'_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, 试定义 E 到 $\lim_{\rightarrow} E'_a$ 的规范双射.

证明:

对任意 $x \in E_a$, $y \in E_a$, 如果 $f_a(x) = f_a(y)$, 则存在 c 使 $f_{ac}(x) = f_{ac}(y)$. 令 $d = \sup(b, c)$, 则 $f_{bd}(f_{ab}(x)) = f_{bd}(f_{ab}(y))$, 故 $f_b(f_{ab}(x)) = f_b(f_{ab}(y))$, 因此, f_{ba} 是同 R_a 和 R_b 相容的映射.

设 $f'_{ba}(x) = f'_{ba}(y)$, $x = f_a(u)$, $y = f_a(v)$, 则 $f_b(f_{ab}(u)) = f_b(f_{ab}(v))$, 故 $f_a(u) = f_a(v)$, 因此 $x = y$, 所以 f'_{ba} 为单射. 同时, 根据定义可证 (E'_a, f'_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统. $x \rightarrow \bigcup_{a \in I} \{pr_1(x \cap (E_a \times \{a\}))\} \times \{a\}$ 为 E 到 $\lim_{\rightarrow} E'_a$ 的规范双射.

习题 196.

I 为右方有向集, (E_a, f_{ba}) , (F_a, g_{ba}) 为关于 I 的集合归纳系统, 映射族 $(u_a)_{a \in I}$ 为 (E_a, f_{ba}) 到 (F_a, g_{ba}) 的映射归纳系统. 对任意 $a \in I$, 令 G_a 为 u_a 的图, $u = \lim_{\rightarrow} u_a$. 求证: (G_a) 为某个映射归纳系统的集族, 并给出其归纳极限.

证明: 令 h_{ba} 为映射 $(x, y) \rightarrow (f_{ba}(x), g_{ba}(y))$, 则 (G_a, h_{ba}) 为映射归纳系统, 其归纳极限为 $\bigcup_z \in u$ 的图 $\{(x, y) | x \in pr_1(pr_1 z) \text{ 与 } y = u_{pr_2(pr_1 z)}(x)\}$.

习题 197.

I 为预序集, $(E_a)_{a \in I}$ 为集族, $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 为函数族, 其中 f_{ba} 为 E_a 到 E_b 的映射, 并且满足下列条件:

第一, 如果 $a \leq b$, $b \leq c$, 则 $f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$.

第二, $f_{aa} = Id_{E_a}$, 则 $(E_a)_{a \in I}$, $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 称为关于 I 的集合归纳系统, 在没有歧义的情况下可以简记为 $((E_a), (f_{ba}))$ 或 (E_a, f_{ba}) .

令 R 为公式 $(x \in G \text{ 与 } y \in G \text{ 与 } pr_2 x \leq pr_2 y \text{ 与 } f_{pr_2 y pr_2 x}(pr_1 x) = pr_1 y)$, R' 为公式:

“存在自然数 $n > 0$ 以及 $(x_i)_{i \in [0, n]}$ $(\forall i)(i \in [0, n] \Rightarrow x_i \in G)$ ，其中 $x_0 = x$ ， $x_n = y$ ，并且，对任意 $i \in [0, n-1]$ ， $(x_{i+1}|y)(x_i|x)R$ 或 $(x_i|y)(x_{i+1}|x)R$ 为真”。

令 $E=G/R'$ ，则称 E 为集族

$(E_a)_{a \in I}$ 对于函数族 $(f_{ba})_{a \in I \text{ 与 } b \in I \text{ 与 } a \leq b}$ 的归纳极限，记作 $\lim_{\rightarrow a}(E_a, f_{ba})$ ，在没有歧义的情况下可以简记为 $\lim_{\rightarrow}(E_a, f_{ba})$ 或 $\lim_{\rightarrow} E_a$ 。令 f 为 G 到 E/R' 的规范映射， g_a 为映射 $x \rightarrow (x, a)(x \in E_a)$ ，则映射 $f \circ g_a$ 称为 E_a 到 $\lim_{\rightarrow} E_a$ 的规范映射。

证明：根据定义可证 I 为右方有向集时， $\lim_{\rightarrow} E_a$ 即为集族归纳系统 (E_a, f_{ba}) 的归纳极限。类似定理184 (1)、定理185的证明，可证明 u 的存在性和唯一性。

Chapter 4

结构 (Structures)

4.1 结构和同构 (Structures et isomorphismes)

结构定义 1. 阶梯构造模式 (*schéma de construction d'échelon*)

满足下列条件的自然数有序对有限序列 $(a_i, b_i)_{i \in [1, m]}$, 称为阶梯构造模式:

- (1) 如果 $b_i = 0$, 则 $a_i \in [1, i - 1]$;
- (2) 如果 $a_i \neq 0$ 且 $b_i \neq 0$, 则 $a_i \in [1, i - 1]$ 且 $b_i \in [1, i - 1]$.

结构定义 2. 在 n 个项上的阶梯构造模式 (*schéma de construction d'échelon sur n termes*)

对于阶梯构造模式 $(a_i, b_i)_{i \in [1, m]}$, 如果 $a_1 = 0$ 、 $b_1 > 0$ 且 $\{x | i \in [1, m] \text{ 与 } a_i = 0 \text{ 与 } x = b_i\}$ 的最大元为 n , 则称其为在 n 个项上的阶梯构造模式.

结构定义 3. 阶梯构造 (*construction d'échelon*), 阶梯 (*échelon*)

令 M 为比集合论强的理论, E_1, E_2, \dots, E_n 为 M 的 n 个项, 对于在 n 个项上的阶梯构造模式 $S = (a_i, b_i)_{i \in [1, m]}$, 如果 M 的 m 个项 A_1, A_2, \dots, A_m 满足下列条件, 则称其为阶梯构造模式 S 在 E_1, E_2, \dots, E_n 上的阶梯构造, 并且, 其中 A_m 称为阶梯构造模式 S 在基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的阶梯, 记作 $S(E_1, E_2, \dots, E_n)$:

- (1) 如果 $a_i = 0$, 则 A_i 为项 E_{b_i} ;
- (2) 如果 $b_i = 0$, 则 A_i 为项 $\mathcal{P}(A_{a_i})$;
- (3) 如果 $a_i \neq 0$ 且 $b_i \neq 0$, 则 A_i 为项 $A_{a_i} \times A_{b_i}$.

结构定义 4. 映射对模式的规范扩展 (*extension canonique de schema d'applications*)

在比集合论强的理论中, 令在 n 个项上的阶梯构造模式 $S = (a_i, b_i)_{i \in [1, m]}$, $E_1, E_2, \dots, E_n, E'_1, E'_2, \dots, E'_n$ 为 M 的项, f_1, f_2, \dots, f_n 为映射, 且对于 $i \in [1, n]$, f_i 为 E_i 到 E'_i 的映射, 设 A_1, A_2, \dots, A_m 为模式 S 在 E_1, E_2, \dots, E_n 上的阶梯构造, $A'_1, A'_2, \dots,$

A'_m 为模式 S 在 E'_1, E'_2, \dots, E'_n 上的阶梯构造. 如果 g'_1, g'_2, \dots, g'_m 为映射, 且对于 $i \in [1, m]$, g_i 为 A_i 到 A'_i 的映射, 并满足下列条件, 则称 g_m 为 f_1, f_2, \dots, f_n 对模式 S 的规范扩展, 记作 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^S$:

- (1) 如果 $a_i = 0$, 则 g_i 为 f_{b_i} ;
- (2) 如果 $b_i = 0$, 则 g_i 为 g_{a_i} 在子集上的规范扩展;
- (3) 如果 $a_i \neq 0$ 且 $b_i \neq 0$, 则 g_i 为 g_{a_i} 和 g_{b_i} 在乘积集合上的规范扩展.

结构规则 1.

在比集合论强的理论中, S 为在 n 个项上的阶梯构造模式, $f_1, f_2, \dots, f_n, f'_1, f'_2, \dots, f'_n$ 为映射, 且对于 $i \in [1, n]$, f_i 为 E_i 到 E'_i 的映射, f'_i 为 E'_i 到 E''_i 的映射, 则 $\langle f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \dots, f'_n \circ f_n \rangle^S = \langle f'_1, f'_2, \dots, f'_n \rangle^S \circ \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^S$.

证明: 根据补充定理86、补充定理88、补充定理119 (1)、补充定理119 (2) 可证.

结构规则 2.

在比集合论强的理论中, S 为在 n 个项上的阶梯构造模式, f_1, f_2, \dots, f_n 均为单射 (或满射), 则 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^S$ 为单射 (或满射).

证明: 根据补充定理85、定理36可证.

结构规则 3.

在比集合论强的理论中, S 为在 n 个项上的阶梯构造模式, f_1, f_2, \dots, f_n 均为双射, 则 $(\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^S)^{-1} = \langle f_1^{-1}, f_2^{-1}, \dots, f_n^{-1} \rangle^S$.

证明: 根据结构规则1、结构规则2可证.

补充结构规则 1.

在比集合论强的理论中, S 为在 n 个项上的阶梯构造模式, f_1, f_2, \dots, f_n 均为恒等映射, 则 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^S$ 为恒等映射.

证明: 根据补充定理87、补充定理119 (3), 运用数学归纳法可证.

结构定义 5. 类型化 (typification)

令 M 为比集合论强的理论, $x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_p$ 为互不相同的字母, 且都不是 M 的常数. A_1, A_2, \dots, A_m 为 M 的项 (其中 m 也可以为0), 并且均不包含 $x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_p$. S_1, S_2, \dots, S_p 均为在 $n + m$ 个项上的阶梯构造模式, 令公式 T 为 $(s_1 \in S_1(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m))$ 与 $s_2 \in S_2(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$ 与 \dots 与 $s_p \in S_p(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$, 则称 T 为 s_1, s_2, \dots, s_p 的类型化.

结构定义 6. 可转换的公式 (relation transportable), 可转换的公式的主要基集合 (ensemble de base principal de la relation transportable), 可转换的公式的辅助基集合 (ensemble de base auxiliaire de la relation transportable)

令 M 为比集合论强的理论, $x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_p$ 为互不相同的字母, 且都不是 M 的常数. A_1, A_2, \dots, A_m 为 M 的项 (其中 m 也可以为0), 并且均不包含 $x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_p$, T 为 s_1, s_2, \dots, s_p 的类型化.

如果公式 R 满足下列条件, 则称公式 R 对类型化 T 是可转换的, 在没有歧义的情况下也可以简称 R 是可转换的, 其中, x_1, x_2, \dots, x_n 称为主要基集合, A_1, A_2, \dots, A_m 称为辅助基集合:

设 $y_1, y_2, \dots, y_n, f_1, f_2, \dots, f_p$ 为互不相同的字母, 与 $x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_p$ 也均不相同, 且都不是 M 的常数, 则 $(T$ 与 $(f_1$ 是 x_1 到 y_1 的双射)与 $(f_2$ 是 x_2 到 y_2 的双射)与 \dots 与 $(f_n$ 是 x_n 到 y_n 的双射) $\Rightarrow (R \Leftrightarrow (y_1|x_1)(y_2|x_2)\dots(y_n|x_n)(s'_1|s_1)(s'_2|s_2)\dots(s'_p|s_p)R)$, 其中 $s'_j = \langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^{S_j}(s_j)$ ($j \in [1, p]$).

结构定义 7. 结构种类 (*espèce de structure*), 结构种类的主要基集合 (*ensemble de base principal de l'espèce de structure*), 结构种类的主要基集合 (*ensemble de base auxiliaire de l'espèce de structure*), 结构种类的代表特征 (*caractérisation typique de l'espèce de structure*), 结构种类的公理 (*axiome de l'espèce de structure*)

令 M 为比集合论强的理论, 满足下列条件的文本, 称为结构种类, 其中 x_1, x_2, \dots, x_n 称为结构种类的主要基集合, A_1, A_2, \dots, A_m 称为结构种类的辅助基集合, T 称为结构种类的代表特征, R 称为结构种类的公理:

第一, x_1, x_2, \dots, x_n, s 为互不相同的字母, 且都不是 M 的常数;

第二, A_1, A_2, \dots, A_m 为 M 的项, 并且均不包含 x_1, x_2, \dots, x_n, s (其中 m 也可以为0);

第三, T 为 s 的类型化;

第四, 公式 R 对 T 是可转换的.

注: 在原书中, 主要讨论 T 为 s 的类型化 (即 $p = 1$) 的情况, T 为多个字母的类型化 (即 $p > 1$) 的情况, 用同样的方法也可以得到类似的结论.

结构定义 8. 通用结构 (*structure générique*)

令 M 为比集合论强的理论, X 为结构种类, 代表特征为 $s \in S(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$, 则在理论 M_X 中, 常数 s 称为通用结构.

结构定义 9. 偏序结构种类 (*espèce de structure d'ordre*)

以 A 为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件, 则称为偏序结构种类:

第一, 结构种类的代表特征为 $s \in \mathcal{P}(A \times A)$;

第二, 结构种类的公理为 $(s \circ s = s)$ 与 $(s \cap s^{-1} = \Delta_A)$.

结构定义 10. 代数结构种类 (*espèce de structure algébriques*)

以 A 为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件, 则称为偏序结构种类:

第一, 结构种类的代表特征为 $F \in \mathcal{P}((A \times A) \times A)$;

第二, 结构种类的公理为“ F 是定义域为 $A \times A$ 的函数图”.

结构定义 11. 拓扑结构种类 (*espèce de structure topologique*)

以 A 为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件, 则称为偏序结构种类:

第一, 结构种类的代表特征为 $V \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;

第二, 结构种类的公理为 $(\forall V')((V' \subset V) \Rightarrow ((\bigcup_{X \in V'} X) \in V))$ 与 $(A \in V)$ 与 $(\forall X)(\forall Y)((X \in V \text{ 与 } Y \in V) \Rightarrow (X \cap Y \in V))$.

结构定义 12. 结构种类的理论 (*théorie de espèce de structure*)

令 M 为比集合论强的理论, X 为结构种类, 满足下列条件的理论, 称为结构种类 X 的理论, 记作 M_X :

第一, 显式公理包括 M 的显式公理和“ R 与 T ”;

第二, 公理模式、特别符号均和 M 相同.

结构定义 13. 结构 (*structure*), 具有结构 (*munis de la structure*)

令 M 为比集合论强的理论, X 为结构种类, 其代表特征为 T , 公理为 R . 令 M' 为比 M 强的理论, E_1, E_2, \dots, E_n, U 为 M' 的项, 且“ $(E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(U|s)R$ 与 $(E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(U|s)T$ ”是 M' 的定理, 则称在理论 M' 中 U 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 和辅助基集合 A_1, A_2, \dots, A_m 上的结构, 在没有歧义的情况下也可以简称在理论 M' 中 U 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的结构, 或者简称 U 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的结构. 同时, 称在理论 M' 中 E_1, E_2, \dots, E_n 具有 X 的结构 U , 在没有歧义的情况下也可以简称 E_1, E_2, \dots, E_n 具有 X 的结构 U , 或简称 E_1, E_2, \dots, E_n 具有结构 U .

补充结构规则 2.

令 M 为比集合论强的理论, X 为结构种类, 其代表特征为 T , 公理为 R . 令 M' 为比 M 强的理论, E_1, E_2, \dots, E_n, U 为 M' 的项, 在理论 M' 中 U 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 和辅助基集合 A_1, A_2, \dots, A_m 上的结构. 则对 M_X 的任意定理 $B, (E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(U|s)B$ 是 M' 的定理.

证明: 根据证明规则2可证.

补充结构规则 3.

令 M 为比集合论强的理论， X 为结构种类，其代表特征为 T ，公理为 R ， S 为其阶梯构造模式。令 M' 为比 M 强的理论，在理论 M' 中 U 为 X 在主要基集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 和辅助基集合 $A_1、A_2、\dots、A_m$ 上的结构。则在理论 M' 中，公式“ U 为在理论 M' 中 X 在主要基集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 上的结构”为 U 上的集合化公式。

证明：在理论 M' 中，根据定义， $U \in S(E_1, E_2, \dots, E_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$ ，根据证明规则52可证。

结构定义 14. 结构种类的结构集合 (*ensemble des structures d'espèce*)

令 M 为比集合论强的理论， X 为结构种类，其代表特征为 T ，公理为 R ， S 为其阶梯构造模式。令 M' 为比 M 强的理论，则在理论 M' 中， $\{U|U$ 为在理论 M' 中 X 在主要基集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 上的结构 $\}$ 称为结构种类 X 在主要基集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 上的结构集合。

结构定义 15. 结构的同构 (*isomorphisme de structures*)

令 M 为比集合论强的理论， X 是理论 M 的结构种类，其主要基集合为 $x_1、x_2、\dots、x_n$ ，辅助基集合为 $A_1、A_2、\dots、A_m$ 。 S 为 X 的代表特征中的在 $n+m$ 个项上的阶梯构造模式， R 为 X 的公理。令 M' 为比 M 强的理论，在理论 M' 中， U 为 X 在主要基集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 上的结构， U' 为 X 在主要基集合 $E'_1、E'_2、\dots、E'_n$ 上的结构。对任意 $i \in [1, n]$ ，令 f_i 为 E_i 到 E'_i 的双射，如果 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(U) = U'$ ，则称 (f_1, f_2, \dots, f_n) 为具有结构 U 的集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 到具有结构 U' 的集合 $E'_1、E'_2、\dots、E'_n$ 的同构，在没有歧义的情况下也可以称 (f_1, f_2, \dots, f_n) 为集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 到集合 $E'_1、E'_2、\dots、E'_n$ 的同构、或称 (f_1, f_2, \dots, f_n) 为结构 U 到结构 U' 的同构，或称 (f_1, f_2, \dots, f_n) 为同构，或者称具有结构 U 的集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 同构于具有结构 U' 的集合 $E'_1、E'_2、\dots、E'_n$ 。

补充结构规则 4. 逆同构的存在

令 M 为比集合论强的理论， X 是理论 M 的结构种类，其主要基集合为 $x_1、x_2、\dots、x_n$ ，辅助基集合为 $A_1、A_2、\dots、A_m$ 。 S 为 X 的代表特征中的在 $n+m$ 个项上的阶梯构造模式， R 为 X 的公理。令 M' 为比 M 强的理论，在理论 M' 中， U 为 X 在主要基集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 上的结构， U' 为 X 在主要基集合 $E'_1、E'_2、\dots、E'_n$ 上的结构。对任意 $i \in [1, n]$ ，令 f_i 为 E_i 到 E'_i 的双射，如果 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(U) = U'$ ，则 $\langle f_1^{-1}, f_2^{-1}, \dots, f_n^{-1}, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(U') = U$ 。

证明：根据补充结构规则3可证。

结构定义 16. 结构的逆同构 (*isomorphisme réciproques de structures*)

令 M 为比集合论强的理论， X 是理论 M 的结构种类，其主要基集合为 $x_1、x_2、\dots、x_n$ ，辅助基集合为 $A_1、A_2、\dots、A_m$ 。 S 为 X 的代表特征中的在 $n+m$ 个项上的阶梯构造模式， R 为 X 的公理。令 M' 为比 M 强的理论，在理论 M' 中， U 为 X 在主要基集合 $E_1、E_2、\dots、E_n$ 上的结构， U' 为 X 在主要基集合 $E'_1、E'_2、\dots、E'_n$ 上的结构。对任意 $i \in [1, n]$ ，令 f_i 为 E_i 到

E'_i 的双射, 如果 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(U) = U'$, 则称 $(f_1^{-1}, f_2^{-1}, \dots, f_n^{-1})$ 为 (f_1, f_2, \dots, f_n) 的逆同构.

补充结构规则 5.

(f_1, f_2, \dots, f_n) 为同构, 如果 $(f_1^{-1}, f_2^{-1}, \dots, f_n^{-1})$ 为 (f_1, f_2, \dots, f_n) 的逆同构, 则 (f_1, f_2, \dots, f_n) 为 $(f_1^{-1}, f_2^{-1}, \dots, f_n^{-1})$ 的逆同构.

证明: 根据定义可证.

补充结构规则 6.

令 M 为比集合论强的理论, X 是理论 M 的结构种类, 其主要基集合为 x_1, x_2, \dots, x_n , 辅助基集合为 A_1, A_2, \dots, A_m . S 为 X 的代表特征中的在 $n + m$ 个项上的阶梯构造模式, R 为 X 的公理. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, U 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的结构. 则 $(Id_{E_1}, Id_{E_2}, \dots, Id_{E_n})$ 为结构 U 到结构 U 的同构.

证明: 根据补充结构规则1可证.

结构规则 4. 同构的复合为同构

令 M 为比集合论强的理论, X 是理论 M 的结构种类. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, U, U', U'' 分别为结构种类 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上、在主要基集合 E'_1, E'_2, \dots, E'_n 上、在主要基集合 $E''_1, E''_2, \dots, E''_n$ 上的结构, 对任意 $i \in [1, n]$, f_i 为 E_i 到 E'_i 的双射, g_i 为 E'_i 到 E''_i 的双射, 如果 $(f_1, f_2, \dots, f_n), (g_1, g_2, \dots, g_n)$ 均为同构, 则 $(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, \dots, g_n \circ f_n)$ 为同构.

证明: 根据结构规则1可证.

结构定义 17. 同构的复合 (*composée de deux isomorphismes*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是理论 M 的结构种类. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, U, U', U'' 分别为结构种类 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上、在主要基集合 E'_1, E'_2, \dots, E'_n 上、在主要基集合 $E''_1, E''_2, \dots, E''_n$ 上的结构, 对任意 $i \in [1, n]$, f_i 为 E_i 到 E'_i 的双射, g_i 为 E'_i 到 E''_i 的双射, 如果 $(f_1, f_2, \dots, f_n), (g_1, g_2, \dots, g_n)$ 均为同构, 则称 $(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, \dots, g_n \circ f_n)$ 为 (f_1, f_2, \dots, f_n) 和 (g_1, g_2, \dots, g_n) 的复合.

结构定义 18. 自同构 (*automorphisme*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是理论 M 的结构种类. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 具有 X 的结构 U 的集合 E_1, E_2, \dots, E_n 到具有 X 的结构 U 的集合 E_1, E_2, \dots, E_n 的同构, 称为自同构.

补充结构规则 7.

自同构的复合是自同构. 自同构的逆同构是自同构.

证明：根据定义可证。

结构规则 5. 通过转换可以得到结构

令 M 为比集合论强的理论， X 是理论 M 的结构种类。令 M' 为比 M 强的理论，在理论 M' 中， U 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的结构，对任意 $i \in [1, n]$ ， f_i 为 E_i 到 E'_i 的双射，则在理论 M' 中存在 X 在主要基集合 E'_1, E'_2, \dots, E'_n 上的结构 U' ，使 (f_1, f_2, \dots, f_n) 为集合 E_1, E_2, \dots, E_n 到集合 E'_1, E'_2, \dots, E'_n 的同构。

证明：令 $U' = \langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(U)$ ，由于 R 是可转换的，因此， $(E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(U|s)R \Leftrightarrow (E'_1|x_1)(E'_2|x_2) \cdots (E'_n|x_n)(U'|s)R$ ，得证。

结构定义 19. 通过转换得到的结构 (*structure obtenue en transportant*)

令 M 为比集合论强的理论， X 是理论 M 的结构种类。令 M' 为比 M 强的理论，在理论 M' 中， U 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的结构，对任意 $i \in [1, n]$ ， f_i 为 E_i 到 E'_i 的双射，令 $U' = \langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(U)$ ，则称 U' 为 U 通过映射 f_1, f_2, \dots, f_n 的转换在 E'_1, E'_2, \dots, E'_n 上得到的结构。

结构定义 20. 统一的结构种类 (*espèce de structure univalente*)

如果结构种类的任何两个结构都存在同构，则称该结构种类为统一的。

结构定义 21. 固有项 (*terme intrinsèque*)

令 M 为比集合论强的理论， X 是理论 M 的结构种类，其主要基集合为 x_1, x_2, \dots, x_n ，辅助基集合为 A_1, A_2, \dots, A_m ，通用结构为常数 s 。 S 是在 $n + m$ 个项上的阶梯构造模式。如果项 V 满足下列条件，则称 V 对于常数 s 是固有的：

第一， V 包含的字母都是理论 M_X 的常数；

第二， $V \in S(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$ 是理论 M_X 的定理；

第三，令 M'_X 为理论 M_X 添加公理“ f_i 是 x_i 到 y_i 的双射” ($i \in [1, n]$) 得到的理论，并且所有的字母 f_i, y_i 都不是理论 M_X 的常量且互不相同， s' 为 s 通过映射 f_1, f_2, \dots, f_n 的转换在 y_1, y_2, \dots, y_n 上得到的结构，并且 $(y_1|x_1)(y_2|x_2) \cdots (y_n|x_n)(s'|s)V = \langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(V)$ 是理论 M'_X 的定理。

结构定义 22. 演绎过程 (*procédé de déduction*)

令 M 为比集合论强的理论， X 是理论 M 的结构种类，其主要基集合为 x_1, x_2, \dots, x_n ，辅助基集合为 A_1, A_2, \dots, A_m ，其代表特征是 $s \in S(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$ ； Y 也是理论 M 的结构种类，其主要基集合为 y_1, y_2, \dots, y_r ，辅助基集合为 B_1, B_2, \dots, B_p ，其代表特征是 $t \in T(y_1, y_2, \dots, y_r, B_1, B_2, \dots, B_p)$ ，其公理不包含字母 x_1, x_2, \dots, x_n, s 。

如果在理论 M_X 中 P 为 Y 在主要基集合 U_1, U_2, \dots, U_r 上的结构，且 P, U_1, U_2, \dots, U_r 对于常数 s 是固有的，则称 P, U_1, U_2, \dots, U_r 为从 X 的结构到 Y 的结构演绎过程，在没有歧义的情况下，也可以称 P 为从 X 的结构到 Y 的结构演绎过程，或者称 P 为演绎过程。

补充结构规则 8. 从过程中演绎得到结构

令 M 为比集合论强的理论, X 是理论 M 的结构种类, 其主要基集合为 x_1, x_2, \dots, x_n , 辅助基集合为 A_1, A_2, \dots, A_m , 其代表特征是 $s \in S(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$; Y 也是理论 M 的结构种类, 其主要基集合为 y_1, y_2, \dots, y_r , 辅助基集合为 B_1, B_2, \dots, B_p , 其代表特征是 $t \in T(y_1, y_2, \dots, y_r, B_1, B_2, \dots, B_p)$, 其公理不包含字母 x_1, x_2, \dots, x_n, s .

如果在理论 M_X 中 P 为 Y 在主要基集合 U_1, U_2, \dots, U_r 上的结构, 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, K 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的结构, 则 $(E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(K|s)P$ 为 Y 在主要基集合 U'_1, U'_2, \dots, U'_r 上的结构, 其中, 对任意 $j \in [1, r]$, U'_j 为 $(E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(K|s)U_j$.

证明: 根据替代规则2可证.

结构定义 23. 从过程中演绎 (*déduite par le procédé*), 从属于结构 (*subordonnée à la structure*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是理论 M 的结构种类, 其主要基集合为 x_1, x_2, \dots, x_n , 辅助基集合为 A_1, A_2, \dots, A_m , 其代表特征是 $s \in S(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$; Y 也是理论 M 的结构种类, 其主要基集合为 y_1, y_2, \dots, y_r , 辅助基集合为 B_1, B_2, \dots, B_p , 其代表特征是 $t \in T(y_1, y_2, \dots, y_r, B_1, B_2, \dots, B_p)$, 其公理不包含字母 x_1, x_2, \dots, x_n, s .

如果 P, U_1, U_2, \dots, U_r 为从 X 的结构到 Y 的结构的过程, 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, K 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的结构, 则结构 $(E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(K|s)P$ 称为 K 从过程 P 演绎所得, 或称其从属于 K .

结构规则 6.

令 M 为比集合论强的理论, X 是理论 M 的结构种类, 其主要基集合为 x_1, x_2, \dots, x_n , 辅助基集合为 A_1, A_2, \dots, A_m , 其代表特征是 $s \in S(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m)$; Y 也是理论 M 的结构种类, 其主要基集合为 y_1, y_2, \dots, y_r , 辅助基集合为 B_1, B_2, \dots, B_p , 其代表特征是 $t \in T(y_1, y_2, \dots, y_r, B_1, B_2, \dots, B_p)$, 其公理不包含字母 x_1, x_2, \dots, x_n, s .

P, U_1, U_2, \dots, U_r 为从 X 的结构到 Y 的结构的过程, 其中, 对任意 $j \in [1, r]$, 和 U_j 相关的阶梯构造模式为 $\mathcal{P}(T_j)$. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, (g_1, g_2, \dots, g_n) 为具有结构 K 的集合 E_1, E_2, \dots, E_n 到具有结构 K' 的集合 E'_1, E'_2, \dots, E'_n 的同构. 对任意 $j \in [1, r]$, 令 $h_j = \langle g_1, g_2, \dots, g_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^{T_j}$, $F_j = (E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(K'|s)U_j$, $F'_j = (E'_1|x_1)(E'_2|x_2) \cdots (E'_n|x_n)(K'|s)U_j$, 令 Q, Q' 分别从属于结构 K, K' , 则 (h_1, h_2, \dots, h_r) 为具有结构 $(E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(K'|s)P$ 的集合 F_1, F_2, \dots, F_r 到具有结构 $(E'_1|x_1)(E'_2|x_2) \cdots (E'_n|x_n)(K'|s)P$ 的集合 F'_1, F'_2, \dots, F'_r 的同构.

证明: 根据结构规则2, h_i 为双射, $\langle h_1, h_2, \dots, h_r, Id_{B_1}, Id_{B_2}, \dots, Id_{B_p} \rangle^T$ 也是双射. 由于 U_i 对于常数 s 是固有的, 故 $h_i \langle F_i \rangle = F'_i$. 由于 P 对于常数 s 是固有的, 故 $(E'_1|x_1)(E'_2|x_2) \cdots (E'_n|x_n)(K'|s)P = \langle h_1, h_2, \dots, h_r, Id_{B_1}, Id_{B_2}, \dots, Id_{B_p} \rangle^T ((E_1|x_1)(E_2|x_2) \cdots (E_n|x_n)(K'|s)P)$, 得证.

结构定义 24. 等价的结构种类 (*espèce de structure équivalente*)

令 M 为比集合论强的理论, X 、 Y 是理论 M 的结构种类, 其主要基集合均为 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n , 通用结构分别为 s 、 t . 令 P 为从 X 的结构到 Y 的结构的演绎过程, Q 为从 Y 的结构到 X 的结构的演绎过程, 在理论 M_X 中, $(P|s)Q = t$ 是定理, 在理论 M_Y 中, $(Q|t)P = s$ 是定理, 则称结构种类 X 和 Y 通过演绎过程 P 和 Q 等价.

结构规则 7.

令 M 为比集合论强的理论, X 是理论 M 的结构种类, 其主要基集合为 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n , K 为 X 在主要基集合 E_1 、 E_2 、 \dots 、 E_n 上的结构, K' 为 X 在主要基集合 E'_1 、 E'_2 、 \dots 、 E'_n 上的结构. K_0 、 K'_0 均为结构种类 Y 的结构, 并且分别和 K 、 K' 等价, 则当且仅当 (g_1, g_2, \dots, g_n) 为 K 到 K' 的同构时, (g_1, g_2, \dots, g_n) 为 K_0 到 K'_0 的同构.

证明: 根据结构规则6可证.

习题 198.

令 S 为符号 P 、 X 、 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n 组成的集合, P 的权重为1, X 的权重为2, 其他符号的权重为0. 如果 $L_0(S)$ 的单词 T 是平衡单词, 则称 T 为在 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n 上的阶梯类. 令 M 为比集合论强的理论, E_1 、 E_2 、 \dots 、 E_n 为 M 的项, 定义 $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 如下:

第一, 如果 T 为字母 x_i , 则 $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 为集合 E_i ;

第二, 如果 T 为 PU 的形式, 则 $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 为集合 $\mathcal{P}(U(E_1, E_2, \dots, E_n))$;

第三, 如果 T 为 XUV 的形式, 则 $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 为集合 $U(E_1, E_2, \dots, E_n) \times V(E_1, E_2, \dots, E_n)$.

求证: 对任意在 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n 上的阶梯类 T , $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 是在 E_1 、 E_2 、 \dots 、 E_n 上的阶梯, 反之, 任何在 E_1 、 E_2 、 \dots 、 E_n 上的阶梯, 都可以用唯一的方法表示为 $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$. 此时, 称 $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 为阶梯类 T 在 E_1 、 E_2 、 \dots 、 E_n 上的实现. 进而, 试用在 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n 上的阶梯类 T 表示映射的规范扩展, 并证明, 对于在 n 个项上的阶梯构造模式 S 和 S' , 如果 $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = S'(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^S = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^{S'}$.

证明:

用数学归纳法可证 $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 和阶梯可相互表达并具有唯一性;

映射的规范扩展定义为:

第一, T 为字母 x_i , 则相应的映射为 f_i ;

第二, T 为 PU 的形式, 则相应的映射为 U 相应的映射在子集上的规范扩展;

第三, T 为 XUV 的形式, 则相应的映射为 U 和 V 相应的映射在乘积集合上的规范扩展.

用数学归纳法可以证明映射的规范扩展用 $T(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 表达的唯一性. 故如果 $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = S'(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^S = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^{S'}$.

4.2 态射和派生结构 (Morphismes et structures dérivées)

结构定义 25. 态射集合 (ensemble des morphismes), 态射 (morphisme)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类. σ 为项, 字母 x 、 y 、 s 、 t 互不相同, 且都不是 X 的代表特征和公理包含的字母.

在理论 M 中, 如果项 σ 满足下列条件, 则称 σ 为 X 的态射集合:

第一, 在理论 M 中, $((s$ 是 X 在主要基集合 x 上的结构)与 $(t$ 是 X 在主要基集合 y 上的结构))
 $\Rightarrow (\sigma \in \mathcal{F}(x; y))$;

第二, 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, E 、 E' 、 E'' 在理论 M' 中分别具有 X 的结构 K 、 K' 、 K'' , E 、 E' 、 E'' 、 K 、 K' 、 K'' 都不含字母 s 、 t 、 x 、 y , 则 $(f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$ 与 $g \in (K''|t)(K'|s)(E''|y)(E'|x)\sigma) \Rightarrow g \circ f \in (K''|t)(K|s)(E''|y)(E|x)\sigma$;

第三, 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, E 、 E' 在理论 M' 中分别具有 X 的结构 K 、 K' , E 、 E' 、 K 、 K' 都不含字母 s 、 t 、 x 、 y , f 为 E 到 E' 的双射, 则 $((f$ 为同构) $\Leftrightarrow (f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$ 与 $f^{-1} \in (K|t)(K'|s)(E|y)(E'|x)\sigma)$.

此时, 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 对具有结构 K 的集合 E 、具有结构 K' 的集合 E' , 对任意 $f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$, 称 f 为具有 K 的 E 到具有 K' 的 E' 的态射, 在没有歧义的情况下, 可以简称 f 为 E 到 E' 的 σ 态射, 或 f 为 E 到 E' 的态射, 或 f 为 σ 态射:

注: 原书主要研究仅有一个基集合的结构种类的态射问题. 对于多个基集合的结构种类的态射, 也可用类似的方法下定义.

补充结构规则 9. 恒等映射为态射

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, E 具有 X 的结构, 则 Id_E 是 σ 态射.

证明: 根据根据补充结构规则6, (f) 为同构, 根据定义可证.

结构定义 26. 满态射 (morphisme surjectif)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, E 、 E' 分别具有 X 的结构 U 、 U' , f 为 E 到 E' 的 σ 态射. 如果 $\langle f \rangle^S(U) = U'$, 则称 f 为满态射.

结构规则 8.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, E 、 E' 为具有 X 的结构的集合, f 为 E 到 E' 的 σ 态射, g 为 E' 到 E 的 σ 态射, 如果 $g \circ f = Id_E$, $f \circ g = Id_{E'}$, 则 (f) 为 E 到 E' 的同构, (g) 为 (f) 的逆同构.

证明: 根据定理20可证.

结构定义 27. 更细的结构 (*structure plus fine*), 更粗的结构 (*structure plus fine*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, K_1, K_2 为 X 在集合 E 上的结构, 如果具有 K_1 的 E 到具有 K_2 的 E 的恒等映射是 σ 态射, 则称 K_1 是比 K_2 更细的结构, 或称 K_2 是比 K_1 更粗的结构.

注: 在原书中, “更细” 这个概念包括与自身相等的情况, 即一个结构比自身更细.

补充结构规则 10.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 则在理论 M' 中, $(K_1$ 为 X 在集合 E 上的结构) 与 $(K_2$ 为 X 在集合 E 上的结构) 与 $(K_1$ 比 K_2 更细) 是在 X 在 E 上的结构集合上的偏序关系.

证明: 根据定义可证.

结构定义 28. 起始结构 (*structure initiale*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, E 为集合, 并且, 对任意 $i \in I$, K_i 为 X 在 A_i 上的结构, f_i 为 E 到 A_i 的映射. 对于 X 在 E 上的结构 F , 如果对任意集合 E' 、 X 在 E' 上的结构 F' 、 E' 到 E 的映射 g , 均有 $(g$ 为 E' 到 E 的 σ 态射) $\Leftrightarrow (\forall i)(i \in I \Rightarrow f_i \circ g$ 为 E' 到 A_i 的 σ 态射), 则称 F 为关于三元组族 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的起始结构.

补充结构规则 11.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, E 为集合, 并且, 对任意 $i \in I$, K_i 为 X 在 A_i 上的结构, f_i 为 E 到 A_i 的映射, 关于三元组族 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的起始结构为 F , 则对任意 $i \in I$, f_i 为具有 F 的 E 到具有 K_i 的 A_i 的 σ 态射.

证明: 根据补充结构规则9, Id_E 为 σ 态射, 根据定义可证.

结构规则 9.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 对于集合 E , 如果存在 X 在 E 上的结构 F , 为关于三元组族 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的起始结构, 那么, 对任意 X 在 E 上的结构 F' , 如果对任意 $i \in I$, f_i 为具有 F' 的 E 到具有 K_i 的 A_i 的 σ 态射, 则 F 比 F' 更粗, 进而, F 是唯一的.

证明: 根据定义, 对于结构 F , 对任意 $i \in I$, f_i 均为 σ 态射. 同时, 具有结构 F 的 E 的恒等映射 Id_E 是 σ 态射, 根据定义, $f_i \circ Id_E$ 为具有 F 的 E 到具有 F' 的 E 的 σ 态射, 因此, F 比 F' 更粗. 进而, 根据定义, F 是唯一的.

结构规则 10.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, E 为集合, 并且, 对任意 $i \in I$, K_i 为 X 在 A_i 上的结构. $(J_l)_{l \in L}$ 是 I 的划分, $(B_l)_{l \in L}$ 是集族. 对任意 $l \in L$, h_l 为 E 到 B_l 的映射; 对任意 $l \in L$ 和 $i \in J_l$, g_{li} 为 B_l 到 A_i 的映射, 并且 $f_i = g_{li} \circ h_l$. 如果, 对任意 $l \in L$, 存在 X 在 B_l 上的结构 K'_l , 为关于三元组族 $(A_i, K_i, g_{li})_{i \in J_l}$ 的起始结构, 则下列两个命题等价:

第一, 存在 X 在 E 上、关于 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的起始结构 U ;

第二, 存在 X 在 E 上, 关于 $(B_l, K'_l, h_l)_{l \in L}$ 的起始结构 U' .

并且, $U = U'$.

证明: 令 F 为具有结构的集合, v 为 F 到 E 的映射, 根据定义, $(h_l \circ v$ 为 F 到 B_l 的 σ 态射) \Leftrightarrow $(\forall i)(i \in J_l \Rightarrow g_{li} \circ h_l \circ v$ 为 F 到 A_i 的 σ 态射), 后者即 $(\forall i)(i \in J_l \Rightarrow f_i \circ v$ 为 F 到 A_i 的 σ 态射). 故 $(\forall l)(l \in L \Rightarrow h_l \circ v$ 为 F 到 B_l 的 σ 态射) \Leftrightarrow $(\forall i)(i \in I \Rightarrow f_i \circ v$ 为 F 到 A_i 的 σ 态射).

因此, 两个命题等价, 同时, $(v$ 是 F 到具有结构 U' 的 E 的态射) \Leftrightarrow $(v$ 是 F 到具有结构 U 的 E 的态射), 根据结构规则9, U 、 U' 都是唯一的, 得证.

结构定义 29. 结构的原像 (*image réciproque d'une structure*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 关于 $(A, K, f)_{i \in \{i\}}$ 的起始结构, 称为结构 K 在 f 下的原像.

结构定义 30. 导出的结构 (*structure induite*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, K 为 X 在 A 上的结构, $B \subset A$, j 为 B 到 A 的规范映射, 如果结构 K 在 j 下的原像存在, 则称其为结构 K 在 B 上导出的结构.

结构定义 31. 可采子集 (*partie permise*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, K 为 X 在 A 上的结构, $B \subset A$, 如果 K 在 B 上导出的结构存在, 则称 B 为 A 的可采子集.

结构规则 11.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $B \subset A$, $C \subset B$, K 为 X 在 A 上的结构, K' 为 K 在 B 上导出的结构, 则当且仅当 K' 在 C 上导出的结构存在时, K 在 C 上导出的结构存在, 并且二者相等.

证明: 根据结构规则10可证.

结构规则 12.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, K 为 X 在 A 上的结构, K' 为 X 在 A' 上的结构, $B \subset A$, $B' \subset A'$. K 在 B 上导出的结构 J 存在,

K' 在 B' 上的导出的结构 J' 存在. 令 F 为 A 到 A' 的 σ 态射, 且 $f\langle B \rangle \subset B'$, 令 $g = f|_B$, 则 g 是具有结构 J 的 B 到具有结构 J' 的 B' 的 σ 态射.

证明: 令 B 到 A 的规范映射为 j , B' 到 A' 的规范映射为 j' , 因此 $f \circ j = j' \circ g$, 由于 f 、 j 为 σ 态射, 因此 $j' \circ g$ 为 σ 态射, 根据定义, g 为 σ 态射.

结构定义 32. 乘积结构 (*structure produit*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, 并且, 对任意 $i \in I$, K_i 为 X 在 A_i 上的结构. $E = \prod_{i \in I} A_i$, pr_i 为指标 i 的射影函数, 则称关于 $(A_i, K_i, pr_i)_{i \in I}$ 的起始结构为结构族 $(K_i)_{i \in I}$ 的乘积结构.

结构定义 33. 两个结构的乘积结构 (*structure produit deux structures*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, A 、 B 为集合, K_A 、 K_B 分别为 X 在 A_i 上的结构. 令 $E = A \times B$, 如果 X 在 E 上的结构 K 满足下列条件, 则称 K 为 K_A 和 K_B 的乘积结构: 对任意集合 E' , 令 F' 为 X 在 E' 上的结构, g 为 E' 到 E 的映射, 则 $(g$ 为 E' 到 E 的 σ 态射) $\Leftrightarrow ((pr_1 \circ g$ 为 E' 到 A 的 σ 态射)与 $(pr_2 \circ g$ 为 E' 到 B 的 σ 态射)).

结构规则 13.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, 并且, 对任意 $i \in I$, 令 K_i 为 X 在 A_i 上的结构. $(J_l)_{l \in L}$ 是 I 的划分. 对于 $l \in L$, 令 $B_l = \prod_{i \in J_l} A_i$, 并且 $(K_i)_{i \in J_l}$ 的乘积结构 K'_l 存在, K' 为 $(K'_l)_{l \in L}$ 的乘积结构, 则当且仅当 $(K'_l)_{l \in L}$ 的乘积结构 K' 存在, 并且 $\prod_{i \in I} A_i$ 到 $\prod_{l \in L} B_l$ 的规范映射为同构时, $(K_i)_{i \in I}$ 的乘积结构 K 存在.

证明: 根据结构规则10可证.

结构规则 14.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, 并且, 对任意 $i \in I$, 令 K_i 为 X 在 A_i 上的结构, $B_i \subset A_i$, K_i 在 B_i 上导出的结构为 K'_i . $(K_i)_{i \in I}$ 的乘积结构 K_0 存在, 则下列两个命题等价:

第一, 存在 K_0 在 $\prod_{i \in I} B_i$ 上导出的结构 K ;

第二, 存在 $(K'_i)_{i \in I}$ 的乘积结构 K' .

并且, $K = K'$.

证明: 令 j_i 为 B_i 到 A_i 的规范映射, j 为 $\prod_{i \in I} B_i$ 到 $\prod_{i \in I} A_i$ 的规范映射, 令 p_i 为 $\prod_{i \in I} A_i$ 的指标 i 的射影函数, p'_i 为 $\prod_{i \in I} B_i$ 的指标 i 的射影函数, 则 $p_i \circ j = j_i \circ p'_i$. 根据结构规则10, $(A_i, K_i, j_i \circ p'_i)$ 的起始结构为 K' , $(A_i, K_i, p_i \circ j)$ 的起始结构为 K , 得证.

结构规则 15.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, 并且, 对任意 $i \in I$, 令 K_i 为 X 在 A_i 上的结构, f_i 为 E 到 A_i 的映射, K 为 $(K_i)_{i \in I}$ 的乘积结构. 则当且仅当结构 K 在 E 到 A 的映射 $x \rightarrow (f_i(x))_{i \in I}$ 下存在原像时, 存在关于 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的起始结构. 并且, 两个结构相等.

证明: 令 E 到 A 的映射 $x \rightarrow (f_i(x))_{i \in I}$ 为 f , 则 $f_i = pr_i \circ f$, 根据结构规则10可证.

结构规则 16.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 、 $(B_i)_{i \in I}$ 为集族, 并且, 对任意 $i \in I$, 令 K_i 为 X 在 A_i 上的结构, K'_i 为 X 在 B_i 上的结构, $(K_i)_{i \in I}$ 、 $(K'_i)_{i \in I}$ 的乘积结构存在, 对任意 $i \in I$, f_i 为 A_i 到 B_i 的 σ 态射, 则 $(f_i)_{i \in I}$ 为 A 到 B 的 σ 态射.

证明: 令 $f = (f_i)_{i \in I}$, p_i 为 $(A_i)_{i \in I}$ 的指标 i 的射影函数, q_i 为 $(B_i)_{i \in I}$ 的指标 i 的射影函数, 则 $q_i \circ f = f_i \circ p_i$, 根据补充结构规则11, p_i 为 σ 态射, 故 $q_i \circ f$ 为 σ 态射, 因此 f 为 σ 态射.

结构规则 17.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 集合 A 、 B 分别具有结构 K_A 、 K_B , K_A 和 K_B 的乘积结构为 K . 令 f 为 A 到 B 的映射, $F \subset A \times B$, p 为 A 到 F 的双射 $x \rightarrow (x, f(x))$, 则当且仅当 K 在 F 上导出的结构 K' 存在, 且 p 为 A 到具有 K' 的 F 的同构时, f 为 A 到 B 的 σ 态射.

证明:

充分性: 令 j 为 F 到 $A \times B$ 的规范映射, 则 $f = pr_2 \circ j \circ p$, 因此 f 是 σ 态射.

必要性: 令 K_F 是 K_A 通过 p 的转换在 F 上得到的结构, j 为 F 到 $A \times B$ 的规范映射. 根据定义, $j \circ p$ 为 σ 态射, 由于 p^{-1} 为同构, 故 j 为 σ 态射. 令 E 为集合, g 为 E 到 F 的映射, 且 $j \circ g$ 为 σ 态射, 故 $pr_1 \circ j \circ g$ 为 σ 态射, 即 $p^{-1} \circ g$ 为 σ 态射, 故 g 为 σ 态射. 综上, K_F 是 K 在 F 上导出的结构, 且 p 为 A 到具有 K_F 的 F 的同构, 得证.

结构定义 34. 最终结构 (structure finale)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, E 为集合, 并且, 对任意 $i \in I$, 令 K_i 为 X 在 A_i 上的结构, f_i 为 A_i 到 E 的映射. 对于 X 在 E 上的结构 F , 如果对任意集合 E' , X 在 E' 上的结构 F' , E 到 E' 的映射 g , 均有 $(g \text{ 为 } E \text{ 到 } E' \text{ 的 } \sigma \text{ 态射}) \Leftrightarrow (\forall i)(i \in I \Rightarrow g \circ f_i \text{ 为 } A_i \text{ 到 } E' \text{ 的 } \sigma \text{ 态射})$, 则称 F 为关于三元组族 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的最终结构.

补充结构规则 12.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为集族, E 为集合; 对任意 $i \in I$, 令 K_i 为 X 在 A_i 上的

结构, f_i 为 A_i 到 E 的映射. 如果关于三元组族 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的最终结构为 F , 则对任意 $i \in I$, f_i 为具有 K_i 的 A_i 到具有 F 的 E 的 σ 态射.

证明: 类似补充结构规则11可证.

结构规则 18.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 对于集合 E , 如果存在 X 在 E 上的结构 F , 为关于三元组族 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的最终结构, 那么, 对任意 X 在 E 上的结构 F' , 如果对任意 $i \in I$, f_i 为具有 K_i 的 A_i 到具有 F' 的 E 的 σ 态射, 则 F 比 F' 更细, 进而, F 是唯一的.

证明: 类似结构规则论10可证.

结构规则 19.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, $(A_i)_{i \in I}$ 为族, E 为集合, 同时, 对任意 $i \in I$, 令 K_i 为 X 在 A_i 上的结构. $(J_l)_{l \in L}$ 是 I 的划分, $(B_l)_{l \in L}$ 是族. 对任意 $l \in L$, h_l 为 B_l 到 E 的映射; 对任意 $l \in L$ 和 $i \in J_l$, g_{li} 为 A_i 到 B_l 的映射, 并且 $f_i = h_l \circ g_{li}$. 如果, 对任意 $l \in L$, 存在 X 在 B_l 上的结构 K'_l , 为关于三元组族 $(A_i, K_i, g_{li})_{i \in J_l}$ 的最终结构, 则下列两个命题等价:

第一, 存在 X 在 E 上、关于 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的最终结构 U ;

第二, 存在 X 在 E 上, 关于 $(B_l, K'_l, h_l)_{l \in L}$ 的最终结构 U' .

并且, $U = U'$.

证明: 类似结构规则论11可证.

结构定义 35. 结构的直像 (*image direct d'une structure*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 关于 $(A, K, f)_{i \in \{i\}}$ 的最终结构, 称为结构 K 在 f 下的直像.

结构定义 36. 商结构 (*structure quotient*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, K 为 X 在 A 上的结构, R 为在 A 上的等价关系, f 为 A 到 A/R 的规范映射, 如果结构 K 在 f 下的直像存在, 则称其为结构 K 对于等价关系 R 的商结构.

补充结构规则 13.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 集合 A 、 B 分别具有 X 的结构 K 、 K' . f 为 A 到 B 的 σ 态射, R 为等价关系 $f(x) = f(y)$, h 为 A 到 A/R 的规范映射, j 为 $f\langle A \rangle$ 到 B 的规范映射. 设 K 对于 R 的商结构为 K_0 , K' 在 $f\langle A \rangle$ 上导出的结构为 K'_0 , 令 f 的规范分解为 $j \circ g \circ h$, 其中 g 为 A/R 到 $f\langle A \rangle$ 的双射, 则 g 为具有 K_0 的 A/R 到具有 K'_0 的 $f\langle A \rangle$ 的 σ 态射.

证明：根据定义， $j \circ g$ 为 A/R 到 B 的 σ 态射，因此， g 为 σ 态射。

结构规则 20.

令 M 为比集合论强的理论， X 是仅有一个基集合的结构种类， σ 为 X 的态射集合。令 M' 为比 M 强的理论，在理论 M' 中，集合 A 、 A' 分别具有 X 的结构 K 、 K' 。 R 为在 A 上的等价关系， R' 为 A' 上的等价关系。 K 对于 R 的商结构为 K_0 ， K' 对于 R' 的商结构为 K'_0 。如果 f 是 A 到 A' 的 σ 态射，并且是同等价关系 R 和 R' 相容的映射， g 为 f 对于 R 和 R' 通过商导出的映射，则 g 为 A/R 到 A'/R' 的 σ 态射。

证明：令 h 为 A 到 A/R 的规范映射， h' 为 A' 到 A'/R' 的规范映射，故 $g \circ h = h' \circ f$ ，由于 h' 、 f 为 σ 态射，故 $g \circ h$ 为 σ 态射，根据定义， g 为 σ 态射。

结构规则 21.

令 M 为比集合论强的理论， X 是仅有一个基集合的结构种类， σ 为 X 的态射集合。令 M' 为比 M 强的理论，在理论 M' 中， A 为集合， K 为 X 在 A 上的结构。 R 、 S 为在 A 上的等价关系， S 比 R 更细， K 对于 R 的商结构为 K' ，当且仅当 K 对于 S 的商结构 K_0 存在，并且，具有 K_0 的 A/S 到具有 K'' 的 $(A/R)/(S/R)$ 的规范映射为同构时， K' 对于 S/R 的商结构 K'' 存在。

证明：令 j 为 A 到 A/R 的规范映射， k 为 A/R 到 $(A/R)/(S/R)$ 的规范映射。根据结构规则 19， K'' 为 K' 对于 S/R 的商结构，等价于 K'' 为 $(A, K, k \circ j)_{i \in \{i\}}$ 的最终结构。

如果 K_0 存在，且 A/S 到 $(A/R)/(S/R)$ 的规范映射为同构，根据定义， K'' 为 $(A, K, k \circ j)_{i \in \{i\}}$ 的最终结构。反过来，如果 K'' 为 $(A, K, k \circ j)_{i \in \{i\}}$ 的最终结构，令 g 为 A/S 到 $(A/R)/(S/R)$ 的规范映射，则 $K_0 = g^{-1}(K'')$ ，则 g 为同构，并且，根据定义， K_0 为 K 对于 S 的商结构，得证。

习题 199.

令 S 为符号 P 、 P^- 、 X 、 X^- 、 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n 组成的集合， P 和 P^- 的权重为1， X 和 X^- 的权重为2，其他符号的权重为0。

对于 $L_0(S)$ 的单词 A ，按下列方式定义 A 的变异数：

令任意字母 x_i 、 P 、 X 的变异数为0， P^- 、 X^- 的变异数为1；

如果 A 的符号有偶数个变异数为1的符号，则 A 的变异数为0，否则 A 的变异数为1。

满足下列条件之一的平衡单词 A ，称为有符号阶梯类：

第一， A 为符号 x_i ；

第二， A 为 $fA_1A_2 \cdots A_p$ 的形式，其中 $p = 1$ 或者 $p = 2$ ， A_i ($i \in [1, p]$) 均为平衡单词且为符号阶梯类，同时，如果 $f = X$ ，则 A_1 、 A_2 的变异数均为0，如果 $f = X^-$ ，则 A_1 、 A_2 的变异数均为1。

符号阶梯类的变异数为0的，称为协变的，变异数为1的，称为逆变的。

将有符号阶梯类中的所有 P^- 替换为 P , X^- 替换为 X , 得到平衡单词 A^* , A^* 在 E_1 、 E_2 、 \dots 、 E_n 上的实现, 称为有符号阶梯类 A 在 E_1 、 E_2 、 \dots 、 E_n 上的实现, 记作 $A(E_1, E_2, \dots, E_n)$.

令 E_1 、 E_2 、 \dots 、 E_n 、 E'_1 、 E'_2 、 \dots 、 E'_n 为集合, 对于 $i \in [1, n]$, f_i 为 E_i 到 E'_i 的映射, 求证:

对任意有符号阶梯类 S , 按照下列规则, 任何 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 都是某个确定的映射:

第一, 如果 S 是协变的, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 是 $S(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 到 $S(E'_1, E'_2, \dots, E'_n)$ 的映射, 如果 S 是逆变的, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 是 $S(E'_1, E'_2, \dots, E'_n)$ 到 $S(E_1, E_2, \dots, E_n)$ 的映射;

第二, 如果 S 是 x_i , $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 是 f_i ;

第三, 如果 S 是 PT (或 P^-T) 的形式, 则 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 是 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^T$ 在子集上的规范扩展 (或在子集上的逆扩展);

第四, 如果 S 是 XUV 或 X^-UV 的形式, 则 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 是 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^U$ 和 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^V$ 在乘积集合上的规范扩展.

$\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 称为 f_1 、 f_2 、 \dots 、 f_n 和有符号阶梯类 S 对应的规范扩展. 对于 $i \in [1, n]$, f_i 为 E_i 到 E'_i 的映射, f'_i 为 E'_i 到 E''_i 的映射, 那么:

如果 S 是协变的, 则 $\{f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \dots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}^S \circ \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$.

如果 S 是逆变的, 则 $\{f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \dots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S \circ \{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}^S$.

并且, 如果对任意 $i \in [1, n]$, f_i 为双射, f'_i 为其反函数, 则 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 和 $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}^S$ 均为双射且互为反函数.

同时, 令 S^* 为将 S 中的所有 P^- 替换为 P , X^- 替换为 X 得到的阶梯类, 则如果 S 是协变的, 则 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^{S^*}$, 如果 S 是逆变的, 则 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S = \langle f'_1, f'_2, \dots, f'_n \rangle^{S^*}$.

证明:

用数学归纳法可证任何 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 都是某个确定的映射.

类似结构规则1可以证明:

如果 S 是协变的, 则 $\{f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \dots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}^S \circ \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$.

如果 S 是逆变的, 则 $\{f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \dots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S \circ \{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}^S$.

类似结构规则2可以证明 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 和 $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}^S$ 均为双射.

并且, 用数学归纳法可证 $\{f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \dots, f'_n \circ f_n\}^S$ 是恒等对应, 故 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S$ 和 $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_n\}^S$ 互为反函数.

根据补充定理78、补充定理88及数学归纳法可以证明:

如果 S 是协变的, 则 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle^{S^*}$, 如果 S 是逆变的, 则 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}^S = \langle f'_1, f'_2, \dots, f'_n \rangle^{S^*}$.

习题 200.

令 M 为比集合论强的理论, S 是在 $n+m$ 个字母上的有符号阶梯类, X 是结构种类, 其主要基集合是 x_1, x_2, \dots, x_n , 辅助基集合是 A_1, A_2, \dots, A_m , 其代表特征为 $s \in \mathcal{P}(S(x_1, x_2, \dots, x_n, A_1, A_2, \dots, A_m))$.

令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, U 为 X 在主要基集合 E_1, E_2, \dots, E_n 上的结构, U' 为 X 在主要基集合 E'_1, E'_2, \dots, E'_n 上的结构, 对于 $i \in [1, n]$, f_i 为 E_i 到 E'_i 的映射.

求证: 按照下列条件定义的 (f_1, f_2, \dots, f_n) 是态射:

第一, 如果 S 是协变的, 则 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(U) \subset U'$; 第二, 如果 S 是逆变的, 则 $\langle f_1, f_2, \dots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \dots, Id_{A_m} \rangle^S(U') \subset U$.

并且, 可以通过适当的选择, 定义偏序结构、代数结构和拓扑结构的态射.

证明:

根据定义可证 (f_1, f_2, \dots, f_n) 的集合符合态射集合的三个条件.

对于偏序结构, 单增映射为态射; 对于代数结构, 令 A, A' 上的合成运算分别为 p, p' , 如果 $p'(f(x), f(y)) = f(p(x, y))$, 则 f 为态射; 对于拓扑结构, 令 A, A' 上的拓扑分别为 V, V' , 如果 $X' \in V' \Rightarrow f^{-1}(X') \in V$, 则 f 为态射.

习题 201.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 集合 A, B, C 都具有结构种类 X 的结构, A 到 B 映射 f 是满态射, B 到 C 的映射 g 是态射, $g \circ f$ 是同构, 求证: f, g 都是同构.

证明: 类似定理21 (3)、定理21 (4)、定理21 (6) 可证.

习题 202.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 集合 A, B, C, D 都具有结构种类 X 的结构, A 到 B 映射 f 、 B 到 C 的映射 g 、 C 到 D 的映射 h 都是态射, $g \circ f, h \circ g$ 都是同构, 求证: f, g, h 都是同构.

证明: 类似习题51可证.

习题 203.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, 集合 A 具有结构种类 X 的结构 U , 集合 B 具有结构种类 X 的结构 U' , f 为 A 到 B 的态射, g 为 B 到 A 的态射, 令 $M = \{x | x \in A \text{ 与 } g(f(x)) = x\}$, $N = \{y | y \in B \text{ 与 } f(g(y)) = y\}$, M 具有 U 在 M 上导出的结构, N 具有 U' 在 N 上导出的结构, 求证: M 同构于 N .

证明：类似习题84可证。

习题 204.

结构种类 X 的主要基集合为 A ，辅助基集合为 k ，代表特征为 $s \in (\mathcal{P}(A \times A \times A) \times \mathcal{P}(A \times A \times A) \times \mathcal{P}(k \times A \times A)) \times \mathcal{P}(A)$ 。公理为： $(pr_1 s$ 为有单位元的 k 代数结构)与 $(pr_2 s$ 为不可约理想)。集合 A 、 A' 分别具有结构种类 X 的结构 (F, H) 、 (F', H') ，如果 f 是 A 到 A' 的 σ 态射，并且，其将单位元映射为单位元，同时 $f(H) \subset H'$ ，则称 f 为 k 代数同态。在 A 上的 X 的结构的集合，按 $(K_1$ 为 X 在集合 E 上的结构)与 $(K_1$ 为 X 在集合 E 上的结构)与 $(K_1$ 比 K_2 更细)排序。

试给出 X 在 A 上的结构族 (S_i) ，使 (S_i) 的最小上界存在，但不是 (A_i, S_i, Id_i) 的起始结构，其中 A_i 是具有结构 S_i 的集合 A ， Id_i 是 A 到 A_i 的规范映射。

同时，试给出 X 在 A 上的结构族 (S_i) ，使 (S_i) 的最大下界存在，但不是 (A_i, S_i, Id_i) 的最终结构，其中 A_i 是具有结构 S_i 的集合 A ， Id_i 是 A_i 到 A 的规范映射。

答：对于前半段，考虑多项式环 $A = k[T]$ ，则 A 的不可约理想是极大理想的幂。令 F 为 k 代数结构， p 、 q 为 A 的不同极大理想。考虑 X 在 A 上的结构 $A_p = (F, p)$ 、 $A_q = (F, q)$ ，其最小上界是 $(F, (0))$ 。令 $B = p \cap q$ ，考虑 B 到 A 的映射 $f = (x \rightarrow x)$ ，其不是同态，但 $f \circ Id_p$ 、 $f \circ Id_q$ 是同态，故 $(F, (0))$ 不是起始结构。对于后半段， A 的对偶空间和结构 A_p 、 A_q 的转置，符合题目条件。

注：习题204涉及尚未介绍的“代数结构”知识。

习题 205.

结构种类 X 的主要基集合为 A ，辅助基集合为实数集 R ，代表特征为 $s \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(R \times A)$ 。公理为： $(\forall V')((V' \subset pr_1 s) \Rightarrow ((\bigcup_{X \in V'} X) \in pr_1 s))$ 与 $(A \in pr_1 s)$ 与 $(\forall X)(\forall Y)((X \in pr_1 s$ 与 $Y \in pr_1 s) \Rightarrow (X \bigcap_Y Y \in pr_1 s))$ 与(存在实数 $a > 0$ ，使 $pr_2 s$ 为区间 $[0, a]$ 到 A 对拓扑 $pr_1 s$ 的连续单射的函数图)。集合 A 、 A' 分别具有结构种类 X 的结构 (V, f) 、 (V', f') ，定义 A 到 A' 的 σ 态射为： g 为对 V 、 V' 的连续映射，并且 g 的函数图 F 满足 $F \circ f \subset f'$ ，则称 g 为 σ 态射。

求证：该态射可以通过习题199的方式来定义；并且，对具有任意 X 的结构的集合 A_1 、 A_2 ，存在在 $A_1 \times A_2$ 上的乘积结构。

同时，试给出一个例子，在 $A_1 \times A_2$ 上的乘积结构在 pr_1 下的直像所具有的结构，不是在 A_1 上原本的结构。

证明：

根据定义可证该态射可以通过习题199的方式来定义。

令 A_1 具有结构 (V_1, f_1) ， f_1 的定义域为 $[0, a_1]$ ， A_2 具有结构 (V_2, f_2) ， f_2 的定义域为 $[0, a_2]$ ，则结构 $(V_1 \times V_2, f)$ 为其乘积结构，其中 f 为 $x \rightarrow (f_1(x), f_2(x))(x \in [0, a_1] \cap [0, a_2])$ 。

如果 $a_1 > a_2$ ，则直像的第二射影，是 f_1 在 $[0, a_2]$ 上的限制。

注：习题205涉及尚未介绍的“拓扑”知识。

习题 206.

结构种类 X 的主要基集合为 A , 代表特征为 $s \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times A \times A$, 公理为: $(\forall V')((V' \subset pr_1 pr_1 s) \Rightarrow ((\bigcup_X \in V' X) \in pr_1 pr_1 s))$ 与 $(A \in pr_1 pr_1 s)$ 与 $(\forall X)(\forall Y)((X \in pr_1 pr_1 s$ 与 $Y \in pr_1 pr_1 s) \Rightarrow (X \bigcap_Y \in pr_1 pr_1 s))$ 与 $pr_2 pr_1 s \neq pr_2 s$. 集合 A, A' 分别具有结构种类 X 的结构 $(V, a, b), (V', a', b')$, 定义 A 到 A' 的 σ 态射为: f 为对 V, V' 的连续映射, 并且 $f(a) = a', f(b) = b'$, 则称 f 为 σ 态射.

求证: 该态射可以通过习题 199 的方式来定义; 并且, 对分别具有任意 X 的结构 F, F' 的集合 A, B , 存在在 $A \times B$ 上的乘积结构, 并且, 该乘积结构在 pr_1 (或 pr_2) 下的直像所具有的结构, 为 A (或 B). 同时, 同时, 试给出 pr_1 的截面不存在, 但存在 A 到 $A \times B$ 的 σ 态射的例子.

证明:

根据定义可证该态射可以通过习题 199 的方式来定义.

令 A 的结构为 (V, a, b) , B 的结构为 (V', a', b') , 则 $(V \times V', (a, a'), (b, b'))$ 为其乘积结构.

令 A 为联通空间, B 为离散空间. 则 pr_1 的截面不存在, 但存在 A 到 $A \times B$ 的 σ 态射.

注: 习题 206 涉及尚未介绍的“拓扑”知识.

习题 207.

X 为域结构种类,

求证:

可以这样定义 σ 态射: f 或者为 K 到 K' 的群同态, 或者为 f_0 , 其中 $f_0(0) = 0, f_0(x) = 1 (x \neq 0)$.

并且, 该态射具有以下性质: 对任何域 K , 存在 K 的结构在 $\{0, 1\}$ 导出的结构 (同构于 F_2), 令 R 为等价关系, 其等价类为 $\{0\}$ 和 K^* , 其中 $K^* = K - \{0\}$, 存在 K 的结构对于 R 的商结构 (同构于 F_2).

证明: 根据定义可证.

注: 习题 207 涉及尚未介绍的“域”知识.

习题 208.

X 为有序阿基米德完全域结构种类. 对任意具有 X 的结构的集合 A , 令 g_A 为 A 到 R 唯一同构. A, B 为具有 X 的结构两个集合,

求证: 可以按下列方式定义 A 到 B 的 σ 态射:

对任意 $x \in A$, 均有 $g_B(f(x)) \geq g_A(x)$, 则称 f 为 σ 态射.

并且, 尽管结构种类 X 是统一的, 但存在不同构的双射态射.

证明:

根据定义可证 σ 符合态射集合的条件.

令 k 为映射 $x \rightarrow a_x$ (当 $x \geq 0$ 时, $a = 2$, 当 $x < 0$ 时, $a = 1/2$), $f = g_B^{-1} \circ k \circ g_A$, 则 f 为 A 到 B 的双射态射, 但不是同构.

注: 习题208涉及尚未介绍的“域”知识.

习题 209.

在理论 M 中, 结构种类 X 只有一个主要基集合, 其代表特征为 $s \in F(x)$, 公理为 R . $A(x)$ 为 X 在 x 上的结构的集合. σ 为项, 其符合态射的前两个条件, 并符合下列条件:

令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, E 、 E' 分别是具有 X 的结构 K 、 K' 的集合, E 、 E' 、 K 、 K' 都不含字母 s 、 t 、 x 、 y , f 为 E 到 E' 的双射, 则 $((f)$ 为同构) $\Rightarrow f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$. 求证:

(1) $s \in A(x)$ 与 $t \in A(x)$ 与 $Id_x \in (x|y)\sigma \cap (x|y)(s|p)(t|s)(p|t)\sigma$ (其中 σ 不含字母 p) 是在 A 上关于 s 、 t 的等价关系.

(2) 令 $B(x)$ 为商集 $A(x)/q$, g_x 为 $A(x)$ 到 $B(x)$ 的规范映射. 假设 $s' \in B(x)$ 是可转换的, W 为结构种类, 其代表特征为 $s' \in \mathcal{P}(F(x))$, 公理为 $s' \in B(x)$. 令 σ' 为满足下列条件的 x 到 y 的映射的集合: $s' \in B(x)$ 与 $y' \in B(y)$, 并且, 存在 $s \in A(x)$ 、 $t \in B(x)$, 使 $s' = g_x(s)$ 、 $t' = g_y(t)$ 、 $f \in \sigma$. 求证: 对于结构种类 W , σ' 为态射, 并且 $\sigma \subset \sigma'$.

证明:

(1) 根据定义可证.

(2) 根据定义可证.

4.3 普遍性映射 (Applications universelles)

结构定义 37. 到具有结构的集合的映射 (*application dans un ensemble muni d'une structure*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, E 为项. 在理论 M_X 中, s 为通用结构, 如果项 α 满足下列条件, 则 $(F|x)(K|s)\alpha$ 的元素, 称为 E 到具有 K 的 F 的 α 映射:

第一, 在理论 M_X 中, $\alpha \in \mathcal{F}(E; x)$;

第二, 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, K 、 K' 分别为 X 在 F 、 F' 上的结构, 如果 f 是 F 到 F' 的 σ 态射, 则 $g \in (F|x)(K|s)\alpha \Rightarrow f \circ g \in (F'|x)(K'|s)\alpha$.

结构定义 38. 具有普遍性的集合和映射 (*ensemble et application universels*), 普遍性映射问题的解 (*solution du problème d'application universelle*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, E 为项. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, f 为 E 到具有 K 的 F 的 α 映射, 如果对任意具有 X 的任意结构的集合 G 和任意 E 到 G 的 α 映射 g , 存在唯一的 F 到 G 的 σ 态射 h , 使 $g = h \circ f$. 则称集

合 F 和 α 映射 f 具有普遍性. 有序对 (F, f) 称为关于 X 、 σ 、 α 对 E 的普遍性映射问题的解, 在没有歧义的情况下也可以简称为对 E 的普遍性映射问题的解.

补充结构规则 14.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, E 为项. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, (F', f') 和 (F'', f'') 都是对 E 的普遍性映射问题的解, 则存在 F' 到 F'' 的同构 g , 令其逆同构为 g^{-1} , 使 $f' = g^{-1} \circ f''$, $f'' = g \circ f'$.

证明: 根据定义, 存在映射 h_1 、 h_2 , 使 $f' = h_1 \circ f''$, $f'' = h_2 \circ f'$. 因此, $h_1 \circ h_2 = Id_{F'}$, $h_2 \circ h_1 = Id_{F''}$, 根据结构规则8可证.

补充结构规则 15.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, E 为项. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, F 为具有 X 的结构的集合. f 为 E 到 F 的 α 映射, 则当且仅当 (F, f) 满足下列两个条件时, 其为对 E 的普遍性映射问题的解:

第一, 对任意集合 G 和任意 E 到 G 的 α 映射 g , 存在 F 到 G 的 σ 态射 h , 使 $g = h \circ f$;

第二, 对任意集合 G , F 到 G 的任何两个 σ 态射, 如果在 $f\langle E \rangle$ 上重合, 则相等.

证明:

充分性根据定义可证.

必要性: 如果 (F, f) 为对 E 的普遍性映射问题的解, 对任意集合 G , F 到 G 的任何两个 σ 态射 h 、 h' , 如果在 $f\langle E \rangle$ 上重合, 则 $h \circ f = h' \circ f$, 根据定义, $h = h'$, 得证.

结构规则 22.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, E 为项. 令 M' 为比 M 强的理论, 则在理论 M' 中, 满足下列三个条件时, 对 E 的普遍性映射问题的解存在:

第一, 对 X 在任意集族上的结构族, 乘积结构存在;

第二, 令 $(F_i)_{i \in I}$ 为集族, 对任意 $i \in I$, f_i 为 E 到 F_i 的 α 映射, 则 E 到 $\prod_{i \in I} F_i$ 的映射 $(f_i)_{i \in I}$ 也是 α 映射;

第三, 存在具有以下性质的基数 m : 对任意集合 F 和 E 到 F 的 α 映射, 存在 F 的可采子集 G , 满足 $f\langle E \rangle \subset G$ 、 $Card(G) \leq m$ 、 f 通过 F 的子集 G 导出的映射也是 α 映射并且任何两个以 G 为定义域的 σ 态射只要在 $f\langle E \rangle$ 上重合则相等.

证明:

令 $s \in S(x)$ 为 X 的类型化, L 是符合下列条件的三元组 (C, Q, P) 的集合:

$C \subset m$, Q 是 X 在 C 上的结构, P 是 E 到具有 Q 的 C 的 α 映射的图. 对任意 $l \in L$, 令 $l = (C_l, Q_l, P_l)$, f_l 为映射 (P_l, E, C_l) , 令 $F = \prod_{l \in L} X_l$, f 为 $x \rightarrow (f_l(x))_{l \in L}$, 因此 f 为 α 映射.

对任意 E 到 H 的映射 h , 令 G 为满足第三个条件的集合, j 为 G 到 H 的规范映射, g 为 E 到 G 的映射并且其图和 h 相等, 则 $h = j \circ g$, 故 g 是 E 到 G 的 α 映射. 令 $G' \subset m$, 并和 G 等势, 令 k 为 G 到 G' 的双射. 因此, 存在 l , 使 $X_l = G'$. 故 $k \circ g = f_l$, $q = j \circ k^{-1} \circ pr_l$, 进而 $h = q \circ f$, 因而补充结构规则15的第一个条件成立. 进而, 根据第三个条件, 补充结构规则15的第二个条件成立, 得证.

结构规则 23.

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, E 为项. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, (F, f) 为关于 X 、 σ 、 α 对 E 的普遍性映射问题的解, 则当且仅当对任意 $x \in E$ 、 $y \in E$, 均存在具有 X 的结构的 G 以及 E 到 G 的 α 映射 h 使 $h(x) \neq h(y)$ 时, f 为单射.

证明: 根据定义可证.

结构定义 39. 分开元素的映射 (*application qui sépare les éléments*)

令 M 为比集合论强的理论, X 是仅有一个基集合的结构种类, σ 为 X 的态射集合, E 为项. 令 M' 为比 M 强的理论, 在理论 M' 中, (F, f) 为关于 X 、 σ 、 α 对 E 的普遍性映射问题的解, 如果 f 为单射, 则称 f 为分开 E 的元素的映射.

习题 210.

E 为拓扑空间, 结构种类 X 和态射按照习题205或者习题206定义. α 映射为 E 到具有结构种类 X 的某个集合的连续映射. 求证: 不存在 E 的普遍性映射问题的解.

证明:

按照习题205定义的情况下, 令 A 具有结构 (V, f) , 其中 f 为 $[0, a]$ 到 A 的映射, 设 (A', k) 为 A 的普遍性映射问题的解, A' 具有结构 (V', f') , 其中 f' 为 $[0, a']$ 到 A' 的映射. 考虑带有结构 (V'', f'') 的集合 A'' , 和 A 到 A'' 的连续映射 g , 其中 f'' 为 $[0, a'']$ 到 A'' 的映射且不是满射, $g(0) \notin f''([0, a''])$. 设 h 为使 $g = h \circ k$ 的态射, 则 $h \circ k(A) \subset f''([0, a''])$, 矛盾.

按照习题206定义的情况下, 令 A 具有结构 (V, a, b) , 设 (A', f) 为 A 的普遍性映射问题的解, A' 具有结构 (V', a', b') . 考虑任意带有结构 (V'', f'') 的集合 A'' , 和 A 到 A'' 的连续映射 g , 如果 $f(a) = f(b)$, 令 $g(a) \neq g(b)$, 如果 $f(a) \neq f(b)$, 令 $g(a) = g(b)$, 则均不存在态射 h 使 $g = h \circ f$, 矛盾.

注: 习题210涉及尚未介绍的“拓扑”知识.

习题 211.

E 为交换域, X 为代数闭交换域结构种类. 定义 σ 态射为同态, α 映射为 E 到代数闭域的同态. F_E 为 E 的代数闭包. 求证: E 到 F_E 的规范单射, 符合普遍性的映射问题的存在性条件, 但不存在 E 的普遍性的映射问题的解.

证明: 根据定义可证. 注: 习题211涉及尚未介绍的“交换域”知识.

习题 212.

X 为结构种类, $(A_i)_{i \in I}$ 为两两不相交的集族, 对任意 $i \in I$, K_i 为 X 在 A_i 上的结构, E 为 $(A_i)_{i \in I}$ 的并集. 定义 X 的 σ 态射, 并定义 α 为 E 到具有 X 的结构的集合 F 并符合下列条件的映射 f 的集合:

对任意 $i \in I$, f 在 A_i 上的限制是态射.

令 M' 为比 M 强的理论, 求证: 在理论 M' 中, 如果 E 的普遍性映射问题的解 (F, f) 存在, 并且 f 为满射, 则 F 具有的结构 K 为族 $(A_i, K_i, f_i)_{i \in I}$ 的最终结构, 其中 f_i 为 f 在 A_i 上的限制.

此外, 令 G 为集合, 对任意 $i \in I$, g_i 为 A_i 到 G 的映射, 如果族 $(A_i, K_i, g_i)_{i \in I}$ 的最终结构存在, 则 $g_i = g \circ f_i$, 其中 g 为 F 到 G 的态射, G 具有的结构是 F 具有结构在 f 下的直像.

证明:

对任意集合 F' 以及 F 到 F' 的映射 p , 如果 p 为态射, 根据定义, 对任意 $i \in I$, f_i 为态射, 故 $p \circ f_i$ 为态射; 反过来, 如果对任意 $i \in I$, $p \circ f_i$ 为态射, 则 $p \circ f$ 为 α 映射, 则存在 F 到 F' 的态射 p' 使 $p \circ f = p' \circ f$. 因此 $p = p'$, 故 p 为态射.

如果族 $(A_i, K_i, g_i)_{i \in I}$ 的最终结构存在, 则对任意 $i \in I$, g_i 为态射, 故存在 F 到 G 的态射 g , 且 $g_i = g \circ f_i$; 同时, 对任意 G 到 G' 的映射 q , 如果 q 为态射, 则 $q \circ g$ 为态射, 反过来, 如果 $q \circ g$ 为态射, 则任意 $i \in I$, $q \circ g_i$ 为态射, 故 q 为态射.

注: 原书习题212遗漏“ f 为满射”的条件.