布尔巴基数学基础（第1卷）集合论学习笔记

何嘉惠，黄芸芸

二零二四年十月

说明

本文系《布尔巴基数学基础（第1卷）集合论》（施普林格出版社2006年版）学习笔记，包括下列内容：

元数学（métamathématique）：

（1）元数学定义1–65：大部分系原书内容，部分做了调整；

（2）记号定义1–23：大部分系原书内容，部分做了调整；

（3）替代规则（critère de substitution）1–12：按原书编号；

（4）补充替代规则1–8：即原书未编号或自行补充的替代规则，一项规则为公理模式的命题，也纳入补充替代规则；

（5）形成规则（critère formatif）1–13：按原书编号；

（6）补充形成规则1–2：即原书未编号或自行补充的形成规则；

（7）证明规则（critère déductif）1–63：按原书编号；

（8）补充证明规则1–91：即原书未编号或自行补充的证明规则；

（9）语法定义1–10：系原书第一章附录的定义；

（10）语法定理1–8：系原书第一章附录的定理；

（11）补充语法定理1–2：即自行补充的语法定理；

数学（mathématique）：

（1）定义1–206，原书提及的定义，部分做了调整；

（2）公理模式1–8，原书使用的8个公理模式；

（3）显式公理1–4，原书使用的4个显式公理；

（4）定理1–193，原书以斜体标明的定理；

（5）补充定理1–432，原书未以斜体标明的内容或自行补充的定理；

（6）结构定义1–39：系原始第四章的定义；

（7）结构规则1–23：按原书第四章的编号；

（8）补充结构规则1–14：即原书未编号或自行补充的结构规则.

习题（exercice）1–212：按照原书顺序编号，它可能属于数学也可能属于元数学，不做区分. 其中部分习题的表述做了调整.

注：元数学定义中可能出现“自然数”等概念，但与数学中的“自然数”等概念无关，不存在循环定义.

目录

Chapter 1

形式数学的描述（Description de la mathématique formelle）

1.1 项和公式（Termes et relations）

元数学定义 1. 理论（*théorie*）

理论是指通过预先确定的“特别符号”、“公理模式”、“显式公理”三栏内容生成的规则体系.

注：理论是元数学的基本概念，在元数学中，实际上只能描述而无法定义. 其中提到的“特别符号”、“公理模式”、“显式公理”将在后面定义.

元数学定义 2. 特别符号（*signe spécifique*）

特别符号是指理论的“特别符号”一栏列举的字符.

元数学定义 3. 特别符号的元（*poid de signe spécifique*)

特别符号的元，是指理论列举特殊符号时，同时列出的对应自然数.

元数学定义 4. 逻辑符号（*signe logique*）

逻辑符号是指□、τ、$\vee$、$\neg$四个符号.

注：

$\vee$表示“析取”，$\neg$表示“否定”.

τ与某种性质相关联：令论域为良序集，如果论域中存在使该性质成立的对象，则它表示论域中具备此种性质的第一个对象；如果论域中不存在使该性质成立的对象，则它论域中的第一个对象. 并且，论域的第一个对象不具备任何性质.

□必须与左侧的某一个τ用连线连接，表示τ的参数；τ可以与右侧的多个□连接，也可以独立存在，表示没有参数.

元数学定义 5. 字母（*lettre*）

字母是指大写或小写拉丁字母，其可以附带一个自然数下标，也可以附带有限个单引号的上标.

注：字母的数量为可数集即可，按照习惯，仅允许附带一个自然数下标和有限个单引号上标.

元数学定义 6. 符号（*signe*）

逻辑符号、字母，特别符号统称符号.

元数学定义 7. 语句（*assemblage*），连线（*lien*）

有限符号序列，可以不附加任何线，也可以附加一条或多条线，但任何一条线只能把一个符号和另一个符号连接起来，称为语句. 语句附加的线，称为连线.

记号定义 1. 符号序列的连接（*connexion de suites de signes*）

令A、B为符号有限序列，AB表示将符号序列B依次写在符号序列A的右边而得到的序列.

记号定义 2. 蕴涵（*implication*）

在语句中，“$\vee\neg$”简记为“$\Rightarrow$”.

记号定义 3. 中序表达式（*notation infixée*）

语句也可以用中序表达式表示.

中序表达式的运算符,分为五个优先级.

中序表达式的运算符，在定义时没有特别说明优先级的，如果该运算符有两个参数，且没有使用上标、下标或者$\langle\rangle$、$()$、$\{\}$，则为第二优先级；其他情况下，为第一优先级.

其中，第二优先级、第三优先级、第四优先级、第五优先级的运算符均为左结合，第一优先级运算符均为右结合. 可以前后加括号改变符号优先级.

注：

语句采用前序表达式，但为符合通常的书写习惯，故设置改写为中序表达式的规则.

原则上，只有一个参数，或者包含上下标或各种括号，为第一优先级；对两个项进行运算得到一个新项，为第二优先级；对两个项进行运算得到一个公式，为第三优先级；析取和合取为第四优先级；蕴含和等价为第五优先级.

记号定义 4. 取得对象（*obtention de l'objet*）

令A为语句，x为字母，则用$\tau_x(A)$表示这样的语句：语句τA当中所有的符号x替代为符号$\square$，并将替代得到的$\square$和开头的τ连线.

记号定义 5. 替代（*substitution*）

令A、B为语句，x为字母，则用$(B|x)A$表示以B替代A当中所有的符号x而得到的语句.

注：原书还使用了带参数的语句取代替代记号，本文不采用这种写法，仍使用替代记号.

补充替代规则 1.

令A为语句，x为字母，则$(x|x)A$和A相同.

证明：根据定义可证.

替代规则 1.

令A、B为语句，x、x'为字母，如果A不包含x'，则$(B|x)A$和$(B|x')(x'|x)A$相同.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

补充替代规则 2.

令A为语句，x、y为字母，且A不包含x，则$(y|x)A$和A相同.

证明：根据定义可证.

补充替代规则 3.

令A为语句，x、x'为字母，如果A不包含x'，则$(x|x')(x'|x)A$和A相同.

证明：根据替代规则1、补充替代规则1可证.

替代规则 2.

令A、B、C为语句，x、y为不同字母，如果B不包含y，则$(B|x)(C|y)A$和$(C'|y)(B|x)A$相同，其中C'为$(B|x)C$.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

补充替代规则 4.

令A为语句，x、y、z为不同字母，且A不包含z，则$(y|z)(x|y)(z|x)A$和$(x|z)(y|x)(z|y)A$相同.

证明：

令u为不同于x、y、z的字母，且A不包含u.

根据替代规则1，$(x|z)(y|x)(z|y)A$和$(x|z)(y|u)(u|x)(z|y)$相同；

根据替代规则2，$(x|z)(y|u)(u|x)(z|y)$和$(y|u)(x|z)(z|y)(u|x)A$相同；

根据替代规则1，$(y|u)(x|z)(z|y)(u|x)A$和$(y|u)(x|y)(u|x)A$相同；

根据补充替代规则3，$(y|u)(x|y)(u|x)A$和$(y|u)(x|y)(u|z)(z|u)(u|x)A$相同；

根据替代规则1，$(y|u)(x|y)(u|z)(z|u)(u|x)A$和$(y|u)(u|z)(x|y)(z|u)(u|x)A$相同；

根据替代规则1，$(y|u)(u|z)(x|y)(z|u)(u|x)A$和$(y|z)(x|y)(z|x)A$相同.

得证.

注：$(y|z)(x|y)(z|x)A$和$(x|z)(y|x)(z|y)A$即为将语句A中的x和y交换后得到的语句.

替代规则 3.

令A为语句，x、x'为字母，如果A不包含x'，则$\tau_x(A)$和$\tau_{x'}(A')$相同，其中A'为$(x'|x)A$.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

替代规则 4.

令A、B为语句，x、y为不同字母，如果B不包含x，则$(B|y)\tau_x(A)$和$\tau_x(A')$相同，其中A'为$(B|y)A$.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

替代规则 5.

令A、B、C为语句，x为字母，s为特别符号，则$(C|x)(\neg A)$、$(C|x)(\vee AB)$、$(C|x)(\Rightarrow AB)$、$(C|x)(sAB)$分别和$\neg A'$、$\vee A'B'$、$\Rightarrow A'B'$、$'B'$相同，其中A'为$(C|x)A$，B'为$(C|x)B$.

证明：对A的长度用数学归纳法可证.

元数学定义 8. 第一类语句（*assemblage de première espèce*），第二类语句（*assemblage de deuxième espèce*）

以τ开头的语句或单个字母，称为第一类语句，其他语句称为第二类语句.

元数学定义 9. 构造（*construction formative*） 理论M的一个构造是指语句有限序列，并且序列中的语句A均符合下列规则之一：

（*1*）A是字母；

（*2*）存在位于A之前的第二类语句B，使A为$\neg B$；

（*3*）存在位于A之前的第二类语句B和C，使A为$\vee BC$；

（*4*）存在位于A之前的第二类语句B，以及字母x，使A为$\tau_x(B)$；

（5）存在一个n元特别符号s，以及位于A之前的n个第一类语句A_1、A_2、$\cdots$、A_n，使A为$sA_1A_2\cdots A_n$.

元数学定义 10. 项（*terme*）、公式（*relation*）

理论M的项是指，该理论的某个构造中的第一类语句；理论M的公式是指，该理论的某个构造中的第二类语句.

形成规则 1.

如果A和B都是理论M的公式，则$\vee AB$也是理论M的公式.

证明：将包含A的构造和包含B的构造合在一起．由于A和B都是公式，因此可以加入语句$\vee AB$，故$\vee AB$也是公式.

形成规则 2.

如果A是理论M的公式，则$\neg A$也是理论M的公式.

证明：在包含A的构造中，由于A是公式，因此可以加入语句$\neg A$，故$\neg A$也是公式.

形成规则 3.

如果A是理论M的公式，x为字母，则$\tau_x(A)$是理论M的项.

证明：在包含A的构造中，由于A是公式，因此可以加入语句$\tau_x(A)$，故$\tau_x(A)$是项.

形成规则 4.

如果A_1、A_2、$\cdots$、A_n都是理论M的项，s是理论M的n元特别符号，则$sA_1A_2\cdots A_n$是理论M的公式.

证明：将包含A_1、A_2、$\cdots$、A_n的各构造合在一起．由于A_1、A_2、$\cdots$、A_n都是项，因此可以加入语句$sA_1A_2\cdots A_n$，故$sA_1A_2\cdots A_n$是公式.

形成规则 5.

如果A和B都是理论M的公式，则$\Rightarrow AB$也是理论M的公式.

证明：$\Rightarrow AB$即$\vee\neg AB$，根据形成规则2、形成规则1可证.

形成规则 6.

如果A_1、A_2、$\cdots$、A_n是理论M的一个构造，x、y为字母，并且A_1、A_2、$\cdots$、A_n均不包含y，则$(y|x)A_1$、$(y|x)A_2$、$\cdots$、$(y|x)A_n$也组成理论M的一个构造.

证明：

A_1只能是字母，因此$(y|x)A_1$也是字母，故命题对A_1成立.

设命题对A_1、A_2、$\cdots$、A_i-1均成立，考虑A_i：

若A_i是字母，则$(y|x)A_i$也是字母.

若A_i是$\neg B$、$\vee BC$或$sA_1A_2\cdots A_j$的形式，根据替代规则5，$(y|x)A_i$也是同类的形式.

若A_i是$\tau_z(A_j)$的形式：

（1）如果z与x、y均不相同，根据替代规则4，$(y|x)(\tau_z(A_j))$和$\tau_z(A_j)$相同，故符合构造中语句的条件；

（2）如果z是x，即A_i是$\tau_x(A_j)$，根据替代规则3，$\tau_x(A_j)$和$\tau_y((y|x)A_j)$相同．又因为$\tau_x(A_j)$不包含x，根据补充替代规则2，$\tau_x(A_j)$和$(y|x)\tau_x(A_j)$相同．因此，$(y|x)A_i$和$\tau_y((y|x)A_j)$相同，符合构造中语句的条件；

（3）如果z是y，即A_i是$\tau_y(A_j)$，即τA_j，则$(y|x)A_i$为$(y|x)\tau A_j$，即$\tau(y|x)A_j$，符合构造中语句的条件.

形成规则 7.

如果A是理论M的公式（或项），x、y为字母，则$(y|x)A$也是理论M的公式（或项）.

证明：

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为包含A的构造.

A_1只能是字母，因此$(y|x)A_1$也是字母，为项，故命题对A_1成立.

设命题对A_1、A_2、$\cdots$、A_{i-1}均成立，考虑A_i：

若A_i是字母，则$(y|x)A_i$也是字母，为项.

若A_i是$\neg B$、$\vee BC$或$sA_1A_2\cdots A_j$的形式，根据替代规则5，$(y|x)A_i$也是同类的形式，根据形成规则2、形成规则3、形成规则4，为公式.

若A_i是$\tau_z(A_j)$的形式：

（1）如果z与x、y均不相同，根据替代规则4，$(y|x)(\tau_z(A_j))$和$\tau_z(A_j)$相同，根据形成规则3，$(y|x)A_i$为项；

（2）如果z是x，即A_i是$\tau_x(A_j)$，根据替代规则3，$\tau_x(A_j)$和$\tau_y((y|x)A_j)$相同. 又因为$\tau_x(A_j)$不包含x，根据补充替代规则2，$\tau_x(A_j)$和$(y|x)\tau_x(A_j)$相同. 因此，$(y|x)A_i$和$\tau_y((y|x)A_j)$相同，故$(y|x)A_i$为项；

（3）如果z是y，令u是不同于x、y且不出现在A_1、A_2、$\cdots$、A_j中的字母，根据形成规则6，$(y|x)(u|y)A_1$、$(y|x)(u|y)A_2$、$\cdots$、$(y|x)(u|y)A_j$也组成M的一个构造，根据替代规则4、替代规则3，$\tau_u((y|x)(u|y)A_j)$和$(y|x)\tau_y(A_j)$相同，即和$(y|x)A_i$相同，因此$(y|x)A_i$为项.

形成规则 8.

如果A是理论M的公式（或项），x为字母，T为理论M的项，则$(T|x)A$也是理论M的公式（或项）.

证明：

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为包含A的构造，x_1、x_2、$\cdots$、x_p是出现在T当中的所有不同字母，x_1'、x_2'、$\cdots$、x_p'是和x_1、x_2、$\cdots$、x_p均不同且不出现在A_1、A_2、$\cdots$、A_n中的字母.

根据形成规则7，$(x_1'|x_1)(x_2'|x_2)\cdots(x_p'|x_p)T$也是项，记作$T'$.

根据形成规则1，$(T|x)A$与$(x_1|x_1')(x_2|x_2')\cdots(x_p|x_p')(T'|x)A$相同.

设命题对A_1、A_2、$\cdots$、A_{i-1}均成立，考虑A_i：

若A_i是字母，则$(T'|x)A_i$或者为字母，或者为T，故$(T'|x)A_i$为项；

若A_i是$\neg B$、$\vee BC$或$sA_1A_2\cdots A_j$的形式，根据替代规则5，$(T'|x)A_i$也是同类的形式，根据形成规则2、形成规则3、形成规则4，$(T'|x)A_i$为公式.

若A_i是$\tau_z(A_j)$的形式：

（1）如果z与x不同，且不出现在T'中，根据替代规则4，$(T'|x)\tau_z(A_j)$和$\tau_z((T'|x)A_j)$相同，根据形成规则3，$(T'|x)A_i$为项；

（2）如果z是x，即A_i是$\tau_x(A_j)$，不包含x，故A_i和$(T'|x)A_i$相同，因此，$(T'|x)A_i$为项；

（3）如果z出现在T'中，因此z不出现在A_1、A_2、$\cdots$、A_n中. 令u是不出现在$(T'|x)A_1$、$(T'|x)A_2$、$\cdots$、$(T'|x)A_n$的字母. 此时，$\tau_z(A_j)$即τA_j，$(T'|x)A_i$即$\tau(T'|x)A_j$，也即$\tau_u((T'|x)A_j)$，根据形成规则3，$(T'|x)A_i$为项为项.

综上，$(T'|x)A_i$为项（或公式），根据形成规则7，$(T|x)A_i$为项（或公式）.

补充形成规则 1.

A是理论M的项或公式，则A的每个符号$\square$都与左侧某一个符号τ连线；且每个符号τ或者未连线，或者与右边一个或多个符号$\square$连线．除此之外，没有其他连线．

证明：

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为包含A的构造.

假设命题对于前k个语句成立，对于A_{k+1}：

如果A_{k+1}是字母、$\neg B$、$\vee BC$、$sD_1D_2\cdots D_n$的形式，由于B、C、D_1、D_2、$\cdots$、D_n都是构造中在A_{k+1}之前的语句，满足上述性质，且于A_{k+1}未添加其他连线，因此命题对A_{k+1}也成立.

如果于A_{k+1}是$\tau_x(B)$的形式，除了B已有的连线满足上述性质外，A开头的τ仅与B中的x替代得到的$\square$连线，替代得到的$\square$都与开头的τ连线，除此之外未添加其他连线，故命题对A_{k+1}也成立.

补充形成规则 2.

A是理论M的项或公式，则A不能以$\square$开头．

证明：根据定义可证.

习题 1.

理论M没有特别符号，求证：M中没有公式，并且所有的的项都是单个字母．

证明：考虑任意构造，用数学归纳法可证明构造中的每个语句都只能是单个字母.

习题 2.

A是理论M的项或公式，求证：A的每个符号$\square$都与左侧某一个符号τ连线；且每个符号τ或者未连线，或者与右边一个或多个符号$\square$连线．除此之外，没有其他连线．

证明：即补充形成规则1.

习题 3.

A是理论M的项或公式，求证：A的每个特别符号后面只能是$\square$、τ或字母．

证明：根据构造的定义，特别符号后面的语句只能是项，而$\neg$、$\vee$和特别符号开头的语句是公式，故特别符号后面只能是是$\square$、τ或字母.

习题 4.

A是理论M的项或公式，B是语句，求证：AB不是项也不是公式．

证明：

对A的符号数目用数学归纳法.

A的符号数目为1时，A只能是单个字母，因此AB以字母开头，不可能是项或公式，故命题成立.

假设A的符号数目小于k时，命题成立，考虑A的符号数目为k的情形：

如果A以$\neg$开头，设故A为$\neg C$的形式，如果AB为$\neg D$的形式，则公式D为CB，根据归纳假设，矛盾.

如果A以$\vee$或特别符号开头，同理可证.

如果A以τ开头，设A为$\tau_x(C)$，其中C为公式. 假设AB为$\tau_y(D)$，其中D为公式，则令u为一个不同于x和y，并且不出现在C和D中的字母，根据替代规则3，AB和$\tau_u((u|y)D)$相同，A和$\tau_u((u|x)C)$相同，因此$((u|y)D)$和$((u|x)C)B$相同，根据归纳假设，矛盾.

习题 5.

A是理论M的语句，x为字母，求证：如果$\tau_x(A)$是M的项，则A是M的公式.

证明：设$\tau_x(A)$和$\tau_y(R)$相同，其中R为M的项，y为字母. 由定义可知，A和$(y|x)R$相同. 根据形成规则7，A是M的公式.

习题 6.

A、B是理论M的语句，求证：如果A和$\Rightarrow AB$都是M的公式，则B是M的公式.

证明：假设“$\Rightarrow AB$”为“$\Rightarrow CD$”的形式，其中C、D为公式. 根据习题4，C和A相同，故B和D相同，得证.

1.2 定理（Théorèmes）

记号定义 6. 逻辑运算符（*opérateurs logiques*）

令A、B为语句，定义下列中序表达式的运算符：

（*1*）“非A”表示“$\neg A$”（第一优先级）；

（*2*）“A或B”表示“$\vee AB$”（第四优先级）；

（*3*）“$A \Rightarrow B$”表示“$\Rightarrow AB$”（第五优先级）.

元数学定义 11. 显式公理（*axiome explicite*）

显式公理，是指理论的“显式公理”一栏列举的一系列公式.

元数学定义 12. 公理模式（*schéma*），隐式公理（*axiome implicite*）

公理模式，是指理论的“公理模式”一栏列举并且满足下列条件的规则：

（*1*）将该规则适用到一个或数个项和/或公式上，可以生成公式；

（2）令T为项，x为字母，R为根据该规则生成的公式，则$(T|x)R$也是根据该规则可以生成的公式.

隐式公理是指根据公理模式生成的公式.

元数学定义 13. 公理（*axiome*）

公理是隐式公理和显式公理的总称.

元数学定义 14. 常数（*constante*）

显式公理中的字母，称为常数.

注：常数表示特定对象，其他字母表示不特定的对象. 显式公理对常数的性质做出断言，隐式公理对不特定对象的性质做出断言.

元数学定义 15. 证明文本（*texte démonstratif*），证明（*démonstration*）

理论M的证明文本，是指一个辅助构造和一个公式有限序列，并且序列其中每个公式都满足下列条件之一：

（1）该公式是理论M的显式公理；

（2）该公式是将理论M的一个公理模式适用到辅助构造中的项及公式，得到的公式；

（3）设该公式为R，在序列中，存在R之前的两个公式S和T，其中T是"$S \Rightarrow R$".

其中，证明文本中的公式序列称为证明.

元数学定义 16. 定理（*théorème*）

理论M的证明文本的证明中的各公式，均称为定理.

元数学定义 17. 真公式（*relation vraie*），假公式（*relation fausse*）

如果理论M的公式A是定理，则称A为真，如果公式$\neg A$是定理，则称A为假.

元数学定义 18. 矛盾的理论（*théorie contradictoire*）

如果理论M中存在一个公式A，既是真又是假，则称理论M有矛盾.

补充证明规则 1.

理论M的公理都是定理.

证明：建立仅包含公理A的公式序列，根据定理的定义，A是定理.

证明规则 1. 三段论

令A、B为理论M的公式，如果A和$A \Rightarrow B$是理论M的定理，则B是理论M的定理.

证明：设包含A的证明为R_1、R_2、$\cdots$、R_n，设包含$A \Rightarrow B$的证明为S_1、S_2、$\cdots$、S_n，则公式序列，R_1、R_2、$\cdots$、R_n、S_1、S_2、$\cdots$、S_n、B是一个证明. 故B是定理.

记号定义 7. 理论的替代（*substitution dans une théorie*）

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为理论M所有的显式公理，T为理论M的项，x为字母，则用$(T|x)$表示这样的理论：

它的特殊符号和公理模式都与M相同，而其中的显式公理为$(T|x)A_1$、$(T|x)A_2$、$\cdots$、$(T|x)A_n$.

证明规则 2.

令A为理论M的定理，T为理论M的项，x为字母，则$(T|x)A$是理论$(T|x)M$的定理.

证明：

设包含A的证明为为R_1、R_2、$\cdots$、R_n，考虑公式序列$(T|x)R_1$、$(T|x)R_2$、$\cdots$、$(T|x)R_n$.

若R_n是M的显式公理，则$(T|x)R_n$是$(T|x)M$的显式公理.

若R_n是M的隐式公理，则$(T|x)R_n$是$(T|x)M$由同一个公理模式产生的隐式公理.

若R_n是M的其他定理，则包含A的证明存在R_i和$R_i \Rightarrow R_n$，故$(T|x)R_i$、$(T|x)(Ri \Rightarrow Rn)$都在公式序列$(T|x)R_1$、$(T|x)R_2$、$\cdots$、$(T|x)R_n$中，根据替代规则5，$(T|x)(R_i \Rightarrow R_n)$即$(T|x)R_i \Rightarrow (T|x)R_n$. 因此$(T|x)R_n$是$(T|x)M$的定理.

证明规则 3.

令A为理论M的定理，T为理论M的项，x为字母，如果x不是理论M的常数，则$(T|x)A$是理论M的定理.

证明：由于M的显式公理不包括字母x，故$(T|x)M$和M相同. 根据证明规则2，$(T|x)A$是M的定理.

元数学定义 19. 更强的理论（*théorie plus forte*），等价的理论（*théories équivalentes*）

如果理论M的所有特殊符号、显式公理、公理模式分别都是理论M'的特殊符号、定理、公理模式，则称理论M'比理论M强. 如果理论M比理论M'强，并且理论M'比理论M强，则称M和M'等价.

注：在原书中，“强”这个概念包括与自身相等的情况，即一个理论比自身强.

证明规则 4.

如果理论M'比理论M强，则理论M的定理，也是理论M'的定理.

证明：

设理论M中包含定理R的证明为R_1、R_2、$\cdots$、R_n.

R_1为M公理，因此也是M'的公理，故命题对R_1成立.

设命题对R_1、R_2、$\cdots$、R_{k-1}成立，对于M的定理R_k，如果R_k是M的公理，则R_k是M'的公理. 如果R_k不是M的公理，则在对R_1、R_2、$\cdots$、R_{k-1}中，存在两个M的定理R_i和$R_i \Rightarrow R_k$，根据归纳假设，它们也都是M'的定理，故R_k也是M'的定理.

证明规则 5.

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为理论M的显式公理，a_1、a_2、$\cdots$、a_h为理论M的常数，T_1、T_2、$\cdots$、T_h为理论M的项，如果$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A_i$（其中$i=1,2,\cdots,n$）都是另一个理论$M'$的定理，而且理论$M$的所有特殊符号和公理模式分别都是理论$M'$的特殊符号和公理模式，则对理论$M$的任何定理$A$，$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A$都是理论$M'$的定理.

证明：根据证明规则2，$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)A$ 是理论$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)M$的定理. 由于$M'$比$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_h|a_h)M$强，根据证明规则4得证.

习题 7.

理论M的显式公理为A_1、A_2、$\cdots$、A_n，常数为a_1、a_2、$\cdots$、a_h.

（*1*）理论M'的常数和公理模式与M相同，显式公理为为A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}，如果M'和M不等价，则称A_n独立于其他公理. 求证：当且仅当A_n不是M'的定理时，A_n独立.

（*2*）理论M''的常数和公理模式与M相同，对于M的项T_1、T_2、$\cdots$、T_h是M，对$i=1$、2、$\cdots$、$n-1$，$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_i$都是$M''$的定理，而(非$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_n$)是$M''$的定理，求证：要么在$M$中$A_n$独立于其他公理，要么$M''$有矛盾.

证明：

（1）M强于M'. 如果A_n不是M'的定理，则M'不比M强，因此M'和M不等价. 反过来，若M'不比M强，则M必有一个显式公理不是M'的定理，该显式公理只能是A_n.

（2）假设A_n是M'的定理，根据证明规则5，$(T_1|a_1)(T_2|a_2)\cdots(T_n|a_n)A_n$是$M''$的定理，因此$M''$有矛盾.

1.3 逻辑理论（Théories logiques）

补充替代规则 5.

下列规则均为公理模式：

（*1*）令A为公式，则$(A\text{或}A)\Rightarrow A$是公理.

（*2*）令A、B为公式，则$A\Rightarrow(A\text{或}B)$是公理.

（*3*）令A、B为公式，则$(A\text{或}B)\Rightarrow(B\text{或}A)$ 是公理.

（*4*）令A、B、C为公式，则$(A\Rightarrow B)\Rightarrow((C\text{或}A)\Rightarrow(C\text{或}B))$是公理.

证明：根据替代规则5可证.

公理模式 1.

令A为公式，则$(A\text{或}A)\Rightarrow A$是公理.

注：形式语言的表述是$\vee\neg\vee AAA$.

公理模式 2.

令A、B为公式，则$A \Rightarrow (A$或$B)$ 是公理.

注：形式语言的表述是$\vee\neg A \vee AB$.

公理模式 3. 析取交换律

令A、B为公式，则$(A$或$B) \Rightarrow (B$或$A)$是公理.

注：形式语言的表述是$\vee\neg \vee AB \vee BA$.

公理模式 4.

令A、B、C为公式，则$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C$或$A) \Rightarrow (C$或$B))$是公理.

注：形式语言的表述是$\vee\neg \vee \neg AB \vee \neg \vee CA \vee CB$.

元数学定义 20. 逻辑理论（*théorie logique*）

包含公理模式*1*、公理模式*2*、公理模式*3*、公理模式*4*的理论，称为逻辑理论.

补充证明规则 2.

如果逻辑理论M有矛盾，则M中的任何一个公式均为其定理.

证明：设A和非A均为M的定理，对任意公式B，根据公理模式2，非$A \Rightarrow$ 非A或B，根据证明规则1，非A或B，即$A \Rightarrow B$，又因为A是定理，根据根据证明规则1，B是定理.

证明规则 6. 蕴涵的传递性

令A、B、C为逻辑理论M的公式，$A \Rightarrow B$和$B \Rightarrow C$是M的定理，则$A \Rightarrow C$也是M的定理.

证明：

根据公理模式4，$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (($非$A$或$B) \Rightarrow ($非$A$或$C))$，即$(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

由于$B \Rightarrow C$，根据证明规则1$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$，又因为$A \Rightarrow B$，根据证明规则1，$A \Rightarrow C$.

证明规则 7.

令A、B为逻辑理论M的公式，则$B \Rightarrow (A$或$B)$是M的定理.

证明：根据公理模式2，$B \Rightarrow (B$或$A)$是定理，根据公理模式3，$(B$或$A) \Rightarrow (A$或$B)$，根据证明规则6，$B \Rightarrow (A$或$B)$.

证明规则 8. 排中律之一

令A为逻辑理论M的公式，则$A \Rightarrow A$是M的定理.

证明：根据公理模式1，$(A\text{或}A) \Rightarrow A$，根据2，$A \Rightarrow (A\text{或}A)$，根据证明规则6，$A \Rightarrow A$.

证明规则 9.

令A为逻辑理论M的公式，B为M的定理，则$A \Rightarrow B$是M的定理.

证明：根据证明规则7，$B \Rightarrow (\text{非}A\text{或}B)$，即$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

又因为B是定理，根据证明规则1，$A \Rightarrow B$是定理.

证明规则 10. 排中律之二

令A为逻辑理论M的公式，则“$A\text{或}(\text{非}A)$”是M的定理.

证明：根据证明规则8，非A或A，根据公理模式2，非A或$A \Rightarrow A\text{或}(\text{非}A)$，根据证明规则1，$A\text{或}(\text{非}A)$.

证明规则 11.

令A为逻辑理论M的公式，则$A \Rightarrow (\text{非}(\text{非}A))$是$M$的定理.

证明：根据证明规则8，$(\text{非}A)\text{或}(\text{非}(\text{非}A))$，即$A \Rightarrow (\text{非}(\text{非}A))$.

证明规则 12. 逆否命题和原命题等价之一

令A、B为逻辑理论M的公式，则$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{非}B \Rightarrow \text{非}A)$是$M$的定理.

证明：

根据证明规则11，$B \Rightarrow \text{非}(\text{非}B)$；

根据公理模式4，$(B \Rightarrow \text{非}(\text{非}B)) \Rightarrow ((\text{非}A\text{或}B) \Rightarrow (\text{非}A\text{或非}(\text{非}B))$；

根据证明规则6，$(\text{非}A\text{或}B) \Rightarrow (\text{非}A\text{或非}(\text{非}B))$；

根据公理模式3，$(\text{非}A\text{或非}(\text{非}B)) \Rightarrow (\text{非}(\text{非}B)\text{或非}A)$；

根据证明规则1，$(\text{非}A\text{或}B) \Rightarrow (\text{非}(\text{非}B)\text{或非}A)$，即$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{非}B \Rightarrow \text{非}A)$.

证明规则 13.

令A、B、C为逻辑理论M的公式，$A \Rightarrow B$是M的定理，则$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$是$M$的定理.

证明：

根据证明规则12，$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\text{非}B) \Rightarrow (\text{非}A))$；

根据证明规则1，$(\text{非}B) \Rightarrow (\text{非}A)$；

根据公理模式4，$((\text{非}B) \Rightarrow (\text{非}A)) \Rightarrow ((C\text{或非}B) \Rightarrow (C\text{或非}A))$；

根据证明规则1，$(C\text{或非}B) \Rightarrow (C\text{或非}A)$；

根据公理模式3，$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (C\text{或非}B)$，$(C\text{或非}A) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$；

根据证明规则6，$(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

证明规则 14. 辅助假设，演绎定理

令A为逻辑理论M的公式，M'为M加上公理A组成的理论，如果B是M'的定理，则$A \Rightarrow B$是M的定理.

证明：令公式B_1、B_2、$\cdots$、B_n为包含B的证明.

B_1为M的公理或者A本身，如果B_1为M的公理，根据补充证明规则1、证明规则9，$A \Rightarrow B_1$；如果B_1为A本身，根据证明规则8，$A \Rightarrow B_1$. 故命题对B_1成立. 设对任意$k < i-1$，有$A \Rightarrow B_k$，以下证明$A \Rightarrow B_i$：

若B_i是M'的公理，则B_i为M的公理或者A本身，如果B_i为M的公理，根据补充证明规则1、证明规则9，$A \Rightarrow B_i$；如果B_i为A本身，根据证明规则8，$A \Rightarrow B_i$.

若B_i不是M'的公理，则之前存在两个公式B_j和$B_j \Rightarrow B_i$，它们均为M的定理；

根据归纳假设，$A \Rightarrow B_j$和$A \Rightarrow (B_j \Rightarrow B_i)$都是$M$的定理；

根据证明规则13，$(B_j \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$是$M$的定理；

根据证明规则6，$A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$，即非$A$或$(A \Rightarrow B_i)$是$M$的定理.

根据公理模式3，$(A \Rightarrow B_i)$或非A是M的定理.

根据公理模式2，非$A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$是$M$的定理.

根据公理模式4，$((A \Rightarrow B_i)$或非$A) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i)$或$(A \Rightarrow B_i))$是$M$的定理；

根据证明规则1，$(A \Rightarrow B_i)$或$(A \Rightarrow B_i)$是M的定理，根据公理模式1、证明规则1，$A \Rightarrow B_i$是M的定理.

综上，得证.

证明规则 15. 反证法

令A为逻辑理论M的公式，M'为M加上公理“非A”组成的理论，如果M'有矛盾，则A是M的定理.

证明：

由于M'有矛盾，根据补充证明规则1，A是M'的定理.

根据证明规则14，非$A \Rightarrow A$是M的定理.

根据公理模式4，$(A$或非$A) \Rightarrow (A$或$A)$是M的定理.

根据证明规则10，“A或A”是M的定理.

根据公理模式1，A是M的定理.

证明规则 16.

令A为逻辑理论M的公式，则(非(非A)) $\Rightarrow A$是M的定理.

证明：假设“非(非A)”为真，而A为假，即“非A”为真.“非A”和“非(非A)”同时为真，矛盾，得证.

注：

上述证明系运用证明规则14和证明规则15做出的简化表述．完整的表述是：

将“非(非A)”作为公理加入M得到理论M'，再加入公理“非A”得到理论M''，此时理论M''中，“非(非A)”同时为真也为假，根据证明规则15，A是理论M'的定理，根据证明规则则14，(非(非A)) $\Rightarrow A$是理论M的定理．

以下证明中，如果运用证明规则14或证明规则15，也同样使用简化表述．

证明规则 17. 逆否命题与原命题等价之二

令A、B为逻辑理论M的公式，则(非$B \Rightarrow$ 非A) $\Rightarrow (A \Rightarrow B)$是$M$的定理．

证明：假设非$B \Rightarrow$ 非A、A为真，B为假，即非B为真，则非A为真，矛盾，得证．

证明规则 18. 分情况讨论

令A、B、C为逻辑理论M的公式，如果A或B、$A \Rightarrow C$、$B \Rightarrow C$都是M的定理，则C是M的定理．

证明：根据公理模式4，(A或B) $\Rightarrow$ (A或C)、(C或A) $\Rightarrow$ (C或C)，再根据公理模式1、公理模式3得证．

证明规则 19. 辅助常数

令x为字母，A、B为逻辑理论M的公式，其中，x不是论M的常数，B也不包含x，并且存在M的项T，使$(T|x)A$为定理，那么，令M'为M加上公理A组成的理论，如果B是M'的定理，则B是M的定理．

证明：根据证明规则14，$A \Rightarrow B$是M的定理，根据证明规则3，$(T|x)(A \Rightarrow B)$是M的定理．由于B不包含x，根据替代规则3，$(T|x)(A \Rightarrow B)$和$((T|x)A) \Rightarrow B$相同，又因为$(T|x)A$是M的定理，因此B是M的定理．

注：只要$(\exists x)R$（即$(\tau_x(R)|x)R$）是定理，就可以运用添加辅助常数的方法．

记号定义 8. 合取（*conjonction*）

令A、B为语句，x为字母，则用“A与B”表示“非((非A)或(非B))”（第四优先级）．

替代规则 6.

令A、B、T为语句，x为字母，则$(T|x)(A$与$B)$和$((T|x)A$与$(T|x)B)$相同．

证明：A与B即非((非A)或(非B))，根据替代规则5可证．

形成规则 9.

如果A、B是理论M的公式，则A与B也是理论M的公式．

证明：根据形成规则1、形成规则2可证．

证明规则 20.

令A、B为逻辑理论M的定理，则“A与B”也是M的定理．

证明：假设“A与B”为假，则“非非((非A)或(非B))”，根据证明规则16，“非A或非B”，即“$A \Rightarrow$ 非B”，又因为A为真，故“非B”为真，和B为真矛盾，得证.

证明规则 21.

令A、B为逻辑理论M的公式，则$(A$与$B) \Rightarrow A$和$(A$与$B) \Rightarrow B$是M的定理.

证明：

根据公理模式2、证明规则7，非$A \Rightarrow$ (非A或非B)，非$B \Rightarrow$ (非A或非B).

根据证明规则11，(非A或非B) $\Rightarrow$ 非(A与B).

根据证明规则6，非$A \Rightarrow$ 非(A与B)，非$B \Rightarrow$ 非(A与B).

根据证明规则17，$(A$与$B) \Rightarrow A$，$(A$与$B) \Rightarrow B$.

记号定义 9. 等价（*équivalence*）

令A、B为语句，x为字母，则用“$A \Leftrightarrow B$”表示“$(A \Rightarrow B)$与$(B \Rightarrow A)$ ”（第五优先级）.

替代规则 7.

令A、B、T为语句，x为字母，则$(T|x)(A \Leftrightarrow B)$和$((T|x)A \Leftrightarrow (T|x)B)$相同.

证明：$A \Leftrightarrow B$即$(A \Rightarrow B)$与$(B \Rightarrow A)$，根据替代规则5、替代规则6可证.

形成规则 10.

如果A、B是理论M的公式，则$A \Leftrightarrow B$也是理论M的公式.

证明：根据形成规则5、形成规则9可证.

补充证明规则 3. 等价的反身性

令A为逻辑理论M的公式，则$A \Leftrightarrow A$是M的定理.

证明：根据证明规则8可证.

证明规则 22. 等价的对称性和传递性

（*1*）令A、B为逻辑理论M的公式，如果$A \Leftrightarrow B$是M的定理，则$B \Leftrightarrow A$是M的定理.

（*2*）令A、B、C为逻辑理论M的公式，如果$A \Leftrightarrow B$和$B \Leftrightarrow C$是M的定理，则$A \Leftrightarrow C$是M的定理.

证明：

（1）根据证明规则21，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$，根据证明规则20，$(B \Rightarrow A)$与$(A \Rightarrow B)$，即$B \Leftrightarrow A$.

（2）根据证明规则21、证明规则6可证.

补充证明规则 4.

令A为逻辑理论M的定理，则$B \Leftrightarrow (A$与$B)$和$B \Leftrightarrow (B$与$A)$是M的定理.

证明：假设B为真，根据证明规则20，A与B、B与A均为真，根据证明规则9，$B \Rightarrow (A与B)$、$B \Rightarrow (B与A)$．再根据证明规则21可证．

证明规则 23.

令A、B、C为逻辑理论M的公式，如果$A \Leftrightarrow B$是M的定理，则下列公式都是M的定理：

（*1*）$(非A) \Leftrightarrow (非B)$;

（*2*）$(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$;

（*3*）$(C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$;

（*4*）$(A与C) \Leftrightarrow (B与C)$;

（*5*）$(A或C) \Leftrightarrow (B或C)$.

证明：

（1）因为$A \Leftrightarrow B$，根据证明规则21、根据证明规则1，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$．根据证明规则12，$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (非B \Rightarrow 非A)$、$(B \Rightarrow A) \Rightarrow (非A \Rightarrow 非B)$．根据证明规则20可证．

（2）因为$A \Leftrightarrow B$，根据证明规则21、根据证明规则1，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$．若$A \Rightarrow C$，根据证明规则6，$B \Rightarrow C$．反过来，若$B \Rightarrow C$，根据证明规则6，$A \Rightarrow C$．根据证明规则20可证．

（3）类似证明规则23（2）可证．

（4）因为$A \Leftrightarrow B$，根据证明规则21、根据证明规则1，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$．根据证明规则21，$(A与C) \Rightarrow C$、$(A与C) \Rightarrow A$．根据证明规则6，$(A与C) \Rightarrow B$．根据证明规则20，$(A与C) \Rightarrow (B与C)$．同理可证$(B与A) \Rightarrow (A与C)$．根据证明规则20可证．

（5）因为$A \Leftrightarrow B$，根据证明规则21、根据证明规则1，$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow A$．根据公理模式4，$(C或A) \Rightarrow (C或B)$、$(C或B) \Rightarrow (C或A)$．根据公理模式3、证明规则6，$(A或C) \Rightarrow (B或C)$、$(B或C) \Rightarrow (A或C)$．根据证明规则20可证．

证明规则 24.

令A、B、C为逻辑理论M的公式，则下列公式都是M的定理：

（*1*）$(非(非A)) \Leftrightarrow A$;

（*2*）$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((非B) \Rightarrow (非A))$;

（*3*）$(A与A) \Leftrightarrow A$;

（*4*）$(A与B) \Leftrightarrow (B与A)$;

（*5*）$(A与(B与C)) \Leftrightarrow ((A与B)与C)$;

（*6*）$(A或B) \Leftrightarrow (非((非A)与(非B)))$;

（*7*）$(A或A) \Leftrightarrow A$;

（*8*）$(A或B) \Leftrightarrow (B或A)$;

（*9*）$(A或(B或C)) \Leftrightarrow ((A或B)或C)$;

（*10*）$(A与(B或C)) \Leftrightarrow ((A与B)或(A与C))$；

（*11*）$(A或(B与C)) \Leftrightarrow ((A或B)与(A或C))$；

（*12*）$(A与(非B)) \Leftrightarrow (非(A \Rightarrow B))$；

（*13*）$(A或B) \Leftrightarrow ((非A) \Rightarrow B)$.

证明：

（1）根据证明规则11、证明规则16、证明规则20可证.

（2）根据证明规则12、证明规则17、证明规则20可证.

（3）根据证明规则20、证明规则21可证.

（4）根据公理模式3、、证明规则20，非A或非B $\Leftrightarrow$ 非B或非A，根据证明规则23（1）可证.

（5）若A与$(B$与$C)$，根据证明规则21，A、B、C均为真，根据证明规则20，$(A$与$B)$与C．反之亦然．根据证明规则20可证.

（6）根据证明规则24（1），非非$A \Leftrightarrow A$，非非$B \Leftrightarrow B$．根据证明规则23（5），“非非A或非非$B \Leftrightarrow A$或B”．根据证明规则23，非非(非非A或非非B) $\Leftrightarrow A$或B，即$(A$或$B)$ $\Leftrightarrow$ (非((非A)与(非B))).

（7）根据公理模式1、公理模式2、证明规则20可证.

（8）根据公理模式3、证明规则20可证.

（9）根据证明规则24（1）、证明规则24（2）、证明规则23（5），$(A$或$B)$或$C \Leftrightarrow$ 非$C \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$)，A或$(B$或$C) \Leftrightarrow$ 非$A \Rightarrow$ (非$C \Rightarrow B$).

若非$C \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$)、非A、非C为真，根据证明规则6，B为真，即(非$C \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$)) $\Rightarrow$ (非$A \Rightarrow$ (非$C \Rightarrow B$)).

反过来，若非$A \Rightarrow$ (非$C \Rightarrow B$)、非C、非A为真，根据证明规则6，B为真，即(非$A \Rightarrow$ (非$C \Rightarrow B$)) $\Rightarrow$ (非$C \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$)).

综上，根据证明规则20得证.

（10）假设A与$(B$或$C)$，根据证明规则21，A、B或C为真，即非$B \Rightarrow C$．假设$A \Rightarrow$ 非B，则非B为真，根据证明规则6，C为真，根据证明规则20，A与C为真，即A与$(B$或$C)$ $\Rightarrow$ (($A \Rightarrow$ 非B) $\Rightarrow$ (A与C))，即A与$(B$或$C) \Rightarrow ((A$与$B)$或$(A$与$C))$.

反过来，若$(A$与$B)$或$(A$与$C)$，即(非A或非B) $\Rightarrow$ (A与C)，根据证明规则21，(非A或非B) $\Rightarrow A$、(非A或非B) $\Rightarrow C$．假设非A为真，根据公理模式1，(非A或非B)，所以A为真，矛盾．故A为真．由于(非A或非B) $\Rightarrow C$，假设非B，则C为真，即非$B \Rightarrow C$为真，根据证明规则23（5）、证明规则24（1），B或C．由于A、B或C为真，根据证明规则20，A与$(B$或$C)$.

综上，根据证明规则20得证.

（11）根据证明规则21，$(B$与$C) \Rightarrow B$，根据公理模式4，A或$(B$与$C) \Rightarrow A$或B，同理A或$(B$与$C) \Rightarrow A$或C，根据证明规则20，A或$(B$与$C) \Rightarrow (A$或$B)$与$(A$或$C)$.

反过来，假设$(A$或$B)$与$(A$或$C)$，根据证明规则21，A或B、A或C，即非$A \Rightarrow B$、非$A \Rightarrow C$，根据证明规则20，非$A \Rightarrow (B$与$C)$，即A或$(B$与$C)$．因此，$(A$或$B)$与$(A$或$C) \Rightarrow A$或$(B$与$C)$，得证．

（12）根据证明规则24（1）、证明规则23（2）可证．

（13）根据证明规则24（1）、证明规则23（5）可证．

证明规则 25.

（1）如果A为逻辑理论M的定理，B为M的公式，则$(A$与$B) \Leftrightarrow B$是M的定理.

（2）如果(非A)为逻辑理论M的定理，B为M的公式，则$(A$或$B) \Leftrightarrow B$是M的定理.

证明：

（1）根据证明规则21，$(A$与$B) \Rightarrow B$．根据补充证明规则4，$B \Rightarrow (A$与$B)$，故$(A$与$B) \Leftrightarrow B$是逻辑理论M的定理．

（2）根据证明规则25（1），非A与非$B \Leftrightarrow$ 非B，根据证明规则23（1），非(非A与非$B) \Leftrightarrow$ 非(非$B)$，根据证明规则24（1）、证明规则23（1），$(A$或$B) \Leftrightarrow B$．

补充证明规则 5.

令A、B、C、D为逻辑理论M的公式，则以下公式都是M的定理:

（1）$((A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A$或$C) \Rightarrow (B$或$D))$;

（2）$((A \Leftrightarrow B)$与$(C \Leftrightarrow D)) \Rightarrow ((A$或$C) \Leftrightarrow (B$或$D))$;

（3）$((A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow D)) \Rightarrow ((A$与$C) \Rightarrow (B$与$D))$;

（4）$((A \Leftrightarrow B)$与$(C \Leftrightarrow D)) \Rightarrow ((A$与$C) \Leftrightarrow (B$与$D))$;

（5）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A$或$C) \Rightarrow (B$或$C))$;

（6）$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A$或$C) \Leftrightarrow (B$或$C))$;

（7）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A$与$C) \Rightarrow (B$与$C))$;

（8）$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A$与$C) \Leftrightarrow (B$与$C))$;

（9）$A \Leftrightarrow (A$或$A)$;

（10）$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A$或$B) \Rightarrow C))$;

（11）$(A$或$B) \Leftrightarrow (B$或$A)$;

（12）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B$与$C)))$;

（13）$(A$与非$A) \Rightarrow B$;

（14）B或$(A$与非$A) \Leftrightarrow B$;

（15）B或$(A$与非A与$C) \Leftrightarrow B$;

（16）$(A$与$B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A$与非$C \Rightarrow$ 非$B)$.

证明：

（1）$G((A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow D))$，根据证明规则21，$A \Rightarrow B$、$C \Rightarrow D$，根据公理模式4、公理模式2、公理模式3，$(A$或$C) \Rightarrow (C$或$A)$、$(C$或$A) \Rightarrow (C$或$B)$、$(C$或$B) \Rightarrow (B$或$C)$、$(B$或$C) \Rightarrow (B$或$D)$，根据证明规则6可证．

（2）根据补充证明规则5（1）、证明规则20可证.

（3）假设$(A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow D)$，根据证明规则21，$A \Rightarrow B$、$C \Rightarrow D$，根据证明规则12，非$B \Rightarrow$ 非A，非$D \Rightarrow$ 非C，根据公理模式4、公理模式2、公理模式3、证明规则6，(非B或非D) $\Rightarrow$ (非A或非C)，根据证明规则12，$(A$与$C) \Rightarrow (B$与$D)$.

（4）根据补充证明规则5（3）、证明规则20可证.

（5）根据证明规则8，$C \Rightarrow C$，根据证明规则20、证明规则21，$(A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$，根据补充证明规则5（1）可证.

（6）根据证明规则8、证明规则20，$C \Leftrightarrow C$，根据证明规则20、证明规则21，$(A \Leftrightarrow B)$与$(C \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$，根据补充证明规则5（2）可证.

（7）根据证明规则8，$C \Rightarrow C$，根据证明规则20、证明规则21，$(A \Rightarrow B)$与$(C \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$，根据补充证明规则5（3）可证.

（8）根据证明规则8、证明规则20，$C \Leftrightarrow C$，根据证明规则20、证明规则refC21，$(A \Leftrightarrow B)$与$(C \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$，根据补充证明规则5（4）可证.

（9）根据公理模式1、公理模式2、证明规则20可证.

（10）根据证明规则14、证明规则18可证.

（11）根据公理模式3、证明规则20可证.

（12）假设$A \Rightarrow B$、$A \Rightarrow C$、A为真，则B、C均为真，根据证明规则20，B与C，得证.

（13）根据证明规则11、证明规则16，$((A$与非$A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow A$或非$A$或$B$. 根据证明规则10、公理模式2，$A$或非$A$或$B$，得证.

（14）根据公理模式1，$B \Rightarrow B$或$(A$与非$A)$，根据证明规则18、补充证明规则5（13），B或$(A$与非$A) \Rightarrow B$，得证.

（15）根据公理模式1，$B \Rightarrow B$或$(A$与非A与$C)$. 根据证明规则21，$(A$与非A与$C) \Rightarrow (A$与非$A)$，根据补充证明规则5（14），B或$(A$与非A与$C) \Rightarrow B$，得证.

（16）根据证明规则24（1）、证明规则23（5），$(A$与$B \Rightarrow C) \Leftrightarrow$ 非A或非B或C、$(A$与非$C \Rightarrow$ 非$B) \Leftrightarrow$ 非A或C或非B，根据证明规则24（8）、证明规则24（9）可证.

习题 8.

令A、B、C为逻辑理论M的公式，求证：

（1）$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

（2）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

（3）$A \Rightarrow$ (非$A \Rightarrow B$);

（4）$(A$或$B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$;

（5）$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A$与$B)$或(非$A$与非$B$));

（6）非((非$A) \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$;

（7）$(A \Rightarrow (B$或(非$C))) \Leftrightarrow ((C$与$A) \Rightarrow B)$;

（*8*）$(A \Rightarrow (B或C)) \Leftrightarrow (B或(A \Rightarrow C))$；

（*9*）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B与C)))$；

（*10*）$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A或B) \Rightarrow C))$；

（*11*）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A与C) \Rightarrow (B与C))$；

（*12*）$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A或C) \Rightarrow (B或C))$；

证明：

（1）假设A为真，根据证明规则9，$B \Rightarrow A$，故$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

（2）假设$A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow C$，根据证明规则6，$A \Rightarrow C$，故$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

（3）假设A、非非A为真，则“非非A或B”为真，即非$A \Rightarrow B$，因此$A \Rightarrow (非A \Rightarrow B)$.

（4）假设A或B、$A \Rightarrow B$，又因为$B \Rightarrow B$，根据证明规则18，$(A或B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$；假设$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$，即非(非$A$或$B$)或$B$. 根据证明规则23，非(非$A$或$B$) $\Leftrightarrow$ 非(非A或非非B)，即(A与非B)或B，根据证明规则21，A与非$B \Rightarrow A$，根据公理模式2、证明规则6 A与非$B \Rightarrow A$或B. 根据证明规则7，$B \Rightarrow (A或B)$，根据证明规则18，$((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow (A或B)$，得证.

（5）若$A \Leftrightarrow B$，则$((A与B)或(非A与非B)) \Leftrightarrow A或非A$，根据证明规则10，$((A与B)或(非A与非B))$. 反过来，若$(A与B)或(非A与非B)$，假设$A$为真，根据证明规则25（2），$B$或(非$A$与非$B$)，即非($A$或$B$)或$B$，即$(A或B) \Rightarrow B$. 又因为$A$为真，根据公理模式2，$A$或$B$，因此$B$为真，因此，$A \Rightarrow B$，同理可证$B \Rightarrow A$，故$A \Leftrightarrow B$.

（6）$(非A) \Rightarrow B$即(非非A)或B，根据证明规则16、证明规则23（5），(非非A)或$B \Leftrightarrow A$或B. 而$B \Rightarrow (非A)$，即非B或非A.

根据证明规则20，$((非A) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A或B)与(非A或非B)$. 根据证明规则23（10），非$((非A) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A与非A)或(A与非B)或(B与非A)或(B与非B)$，进而，根据证明规则23（10）、公理模式2、证明规则24（4），非$((非A) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((非A或B)与(非B或A))$，即“非$((非A) \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$”.

（7）$A \Rightarrow (B或(非C))$即非A或(B或非C)，$(C与A) \Rightarrow B$即(非非(非C或非A))或B，根据证明规则24（1）、证明规则24（8）、证明规则24（9）可证.

（8）$A \Rightarrow (B或C)$即非A或(B或C)，$B或(A \Rightarrow C)$即B或(非A或C)，、证明规则24（8）、证明规则24（9）可证.

（9）即补充证明规则5（12）.

（10）即补充证明规则5（10）.

（11）假设$A \Rightarrow B$，A与C，根据证明规则21，A、C为真，则B为真，根据证明规则20，B与C，得证.

（12）根据公理模式4、公理模式3可证.

习题 9.

A为逻辑理论M的公式，$A \Leftrightarrow$ 非A是M的定理，求证：M存在矛盾.

证明：

$A \Rightarrow$ 非A，即非A或非A，根据公理模式1，“非AÆ为真.

非$A \Rightarrow A$，即非非A或真，根据证明规则24（1）、证明规则23（5），A或A，根据公理模式1，A为真.

故M存在矛盾.

习题 10.

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为逻辑理论M的公式，求证：

（*1*）要证明A_1或A_2或$\cdots$或A_n，只需要在M添加显式公理非A_1、非A_2、$\cdots$、非A_{n-1}得到的理论M'中，证明A_n即可.

（*2*）若A_1或A_2或$\cdots$或A_n是M的定理，要证明A是M的定理，只需要证明$A_1 \Rightarrow A$、$A_2 \Rightarrow A$、$\cdots$、$A_n \Rightarrow A$即可.

证明：

（1）对n用数学归纳法：

n=2时，根据证明规则14，“非非A_1或A_2”是M的定理，根据证明规则24（1）、证明规则23（5），A_1或A_2是M的定理.

假设命题对$n = i$成立，当$n = i+1$时，令添加公理非A_1、非A_2、$\cdots$、非A_{i-1}得到的理论为M'，再添加公理非A_i得到的理论为M''，根据证明规则14、证明规则24（1）、证明规则23（5），若M''中Ai_1为真，则M'中A_i或A_{i+1}为真，因此M中的A_1或A_2或$\cdots$或A_{i-1}或$(A_i$或A_{i+1}为真，根据证明规则24（9），可证.

（2）对n用数学归纳法，根据证明规则18可证.

习题 11.

A、B为逻辑理论M的公式，令$A|B$表示(非A或非B)，求证：

（*1*）非$A \Leftrightarrow (A|A)$;

（*2*）$(A$或$B) \Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$;

（*3*）$(A$与$B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$;

（*4*）$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A|(B|B))$.

证明：

（1）根据补充证明规则5（9）可证.

（2）根据习题11（1），(非非A)或(非非B) $\Leftrightarrow (A|A)|(B|B)$，根据证明规则23（5）、证明规则24（1）可证.

（3）根据习题11（1），非$(A|B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$，即$(A$与$B) \Leftrightarrow (A|B)|(A|B)$.

（4）根据习题11（1），$(A|$非$B) \Leftrightarrow (A|(B|B))$，根据证明规则23（5）、证明规则24（1）可证.

注：

习题11中的连接词“|”仅在该题中使用，和替代记号“|”不可混淆.

习题11表明，连接词“|”具有完全性.

习题 12.

令A_1、A_2、$\cdots$、A_n为逻辑理论M的显式公理，求证：当且仅当符号和公理模式与M相同、显式公理为A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}、非A_n的理论没有矛盾时，A_n是独立的显式公理.

证明：

令理论M'为符号和公理模式与M相同、显式公理为A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}的理论，理论M''为符号和公理模式与M相同、显式公理为A_1、A_2、$\cdots$、A_{n-1}、非A_n的理论.

假设A_n不独立，则M'与M等价，故A_n是M'的定理. 由于M''比M'强，根据证明规则4，A_n是M''的定理，因此M''有矛盾.

假设M''有矛盾，根据证明规则15，A_n是M'的定理，故M'和M等价，即A_n不独立. 综上，得证.

1.4 量词理论（Théories quantifiées）

记号定义 10. 量词（*quantificateur*）

令A、R为语句，x为字母，则用“$(\exists x)R$”表示“$(\tau_x(R)|x)R$”，用“$(\forall x)R$”表示“非$((\exists x)($非$R))$”.

替代规则 8.

令R为语句，x、x'为字母，如果R不包含x'，则$(\exists x)R$、$(\forall x)R$分别和$(\exists x')R'$、$(\forall x')R'$相同，其中R'为$(x'|x)R$.

证明：根据替代规则1，$(\exists x)R$和$(\tau_x(R)|x')R'$相同，根据替代规则3，$\tau_x(R)$和$\tau x'(R')$相同，故$(\exists x)R$和$(\exists x')R'$相同. 同理并结合替代规则5，可证$(\forall x)R$和$(\forall x')R'$相同.

替代规则 9.

令R、U为语句，x、y为字母，如果U不包含x，则$(U|y)(\exists x)R$、$(U|y)(\forall x)R$分别和$(\exists x)R'$、$(\forall x)R'$相同，其中R'为$(U|y)R$.

证明：根据替代规则2，$(U|y)(\exists x)R$和$(T|x)(U|y)R$相同，其中T为$(U|y)\tau_x(R)$，根据替代规则4，$(T|x)(U|y)R$和$(\exists x)R'$相同. 同理可证$(U|y)(\forall x)R$和$(\forall x)R'$相同.

形成规则 11.

如果R是理论M的公式，x为字母，则$(\exists x)R$和$(\forall x)R$也是理论M的公式.

证明：根据形成规则3、形成规则8、形成规则2，可证.

证明规则 26.

令R为逻辑理论M的公式，x为字母，则$(\forall x)R \Leftrightarrow (\tau_x(非R)|x)R$是$M$的定理.

证明：根据替代规则5，$(\forall x)R$即"非非$(\tau_x(非R)|x)R$"，得证.

证明规则 27.

令R为逻辑理论M的定理，x为不是常数的字母，则$(\forall x)R$是M的定理.

证明：根据证明规则26，$(\forall x)R \Leftrightarrow (\tau_x(非R)|x)R$，得证.

证明规则 28.

令R为逻辑理论M的公式，x为字母，则$(非((\forall x)R)) \Leftrightarrow (\exists x)(非R)$是$M$的定理.

证明：$(非((\forall x)R))$即"非非$(\tau_x(非R)|x)(非R)$"，得证.

补充替代规则 6.

"令R为公式，x为字母，T为项，则$(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$是公理"是公理模式.

证明：

以下证明$(U|y)((T|x)R \Rightarrow (\exists x)R)$也是该规则产生的公式：

若U不包含x且x、y不同，根据替代规则2、替代规则9，$(T|x)(U|y)R \Rightarrow (\exists x)(U|y)R$和明$(U|y)((T|x)R \Rightarrow (\exists x)R)$相同.

若U包含x或x、y相同，则令R'为$(x'|x)R$，其中x'为与y不同的字母且U不包含x'，根据替代规则1、替代规则8及上述结论，得证.

公理模式 5.

令R为公式，x为字母，T为项，则$(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$是公理.

元数学定义 21. 量词理论（*théorie quantifiée*）

包含公理模式5的逻辑理论，称为量词理论.

证明规则 29.

令R为量词理论M的公式，x为字母，则"非$((\exists x)R) \Leftrightarrow (\forall x)(非R)$"是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

由于$R \Leftrightarrow$ 非非R，根据证明规则3，$(\exists x)R \Rightarrow (\tau_x(R)|x)(非非R)$、$(\exists x)(非非R) \Rightarrow (\tau_x(非非R)|x)R$.

根据公理模式5，$(\tau_x(R)|x)(非非R) \Rightarrow (\exists x)(非非R)$、$(\tau_x(非非R)|x)R \Rightarrow (\exists x)R$.

故$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)(非非R)$.

又因为$(\exists x)(非非R) \Leftrightarrow$ 非非$(\exists x)(非非R)$，后者即非$(\forall x)(非R)$，因此非$((\exists x)R)) \Leftrightarrow (\forall x)(非R)$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

注：如果已知条件中不包括任何含常数的定理，可以用这种方法. 从而，在证明过程中，可以运用“字母不是常数”的条件.

证明规则 30.

令R为量词理论M的公式，T为M的项，x为字母，则$(\forall x)R \Rightarrow (T|x)R$是$M$的定理.

证明：根据公理模式5，$(T|x)(非R) \Rightarrow (\exists x)非R$，即非$(T|x)R \Rightarrow$ 非$(\tau_x(非R)|x)R$，因此$\tau_x(非R)|x)R \Rightarrow (T|x)R$，根据证明规则26，得证.

补充证明规则 6.

x不是量词理论M的常数，则当且仅当R为M的定理时，$(\forall x)R$为M的定理.

证明：根据证明规则30、证明规则27可证.

证明规则 31.

令R、S为量词理论M的公式，x为字母，并且x不是量词理论M的常数. 如果$R \Rightarrow S$是M的定理，则$(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$和$(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$也是$M$的定理；如果$R \Leftrightarrow S$是$M$的定理，则$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$和$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$也是$M$的定理.

证明：

如果$R \Rightarrow S$，假设$(\forall x)R$为真，根据证明规则30，R为真，因此S为真，根据证明规则27，$(\forall x)S$为真，故$(\forall x)R \Rightarrow (\forall x)S$.

如果$R \Rightarrow S$，则非$S \Rightarrow$ 非R，根据上述结论故$(\forall x)(非R) \Rightarrow (\forall x)(非S)$，根据证明规则29，非$(\exists x(S)) \Rightarrow$ 非$(\exists x(R))$，故$(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)S$.

根据上述结论可证，如果$R \Leftrightarrow S$是量词理论M的定理，则$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall x)S$和$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)S$.

证明规则 32.

令R、S为量词理论M的公式，x为字母，则$(\forall x)(R与S) \Leftrightarrow ((\forall x)R)与((\forall x)S)$，$(\exists x)(R或S) \Leftrightarrow ((\exists x)R)或((\exists x)S)$是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

若$(\forall x)(R与S)$为真，根据补充证明规则4，R与S为真，即R、S为真，根据补充证明规则4，$((\forall x)R)$与$((\forall x)S)$为真. 反之亦然. 根据证明规则29，$(\exists x)(R或S) \Leftrightarrow ((\exists x)R)$或$((\exists x)S)$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

证明规则 33.

令R、S为量词理论M的公式，x为字母，并且R不包含x，则$(\forall x)(R或S) \Leftrightarrow (R或(\forall x)S)$和$(\exists x)(R与S) \Leftrightarrow (R与(\exists x)S)$是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

R或S即非$R \Rightarrow S$，将非R作为公理添加到M_0，则S是定理，根据证明规则27，$(\forall x)S$是定理，因此，非$R \Rightarrow (\forall x)S$，即$R$或$(\forall x)S$．反之亦然．

根据证明规则29，$(\exists x)(R$与$S) \Leftrightarrow (R$与$(\exists x)S)$．

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立．

证明规则 34.

令R为量词理论M的公式，x、y为字母，则以下公式都是M的定理：

（*1*）$(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)R$;

（*2*）$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)R$;

（*3*）$(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\forall y)(\exists x)R$;

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

若$(\forall x)(\forall y)R$，根据证明规则30，R为真，根据证明规则27，$(\forall y)(\forall x)R$，反之依然，即第一式成立．

根据证明规则29，可证第二式．

根据证明规则31，证明规则30，$(\exists x)(\forall y)R \Rightarrow (\exists x)R$，若$(\exists x)(\forall y)R$，则$(\exists x)R$，根据证明规则27，$(\forall y)(\exists x)R$，第三式得证．

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立．

记号定义 11. 类别量词（*quantificateur typique*）

令A、R为语句，x为字母，则用"$(\exists_A x)R$"表示"$(\exists x)(A$与$R)$"，用"$(\forall_A x)R$"表示"非$((\exists_A x)($非$R))$"．

注：原书很少使用类别量词．

替代规则 10.

令A、R为语句，x、x'为字母，如果R不包含x'，则$(\exists_A x)R$、$(\forall_A x)R$分别和$(\exists_{A'} x')R'$、$(\forall_{A'} x')R'$相同，其中R'为$(x'|x)R$，A'为$(x'|x)A$．

证明：根据替代规则8、替代规则5、替代规则6可证．

替代规则 11.

令A、R、U为语句，x、y为字母，如果U不包含x，则$(U|y)(\exists_A x)R$、$(U|y)(\forall_A x)R$分别和$(\exists_{A'} x)R'$、$(\forall_{A'} x)R'$相同，其中R'为$(U|y)R$，A'为$(x'|x)A$．

证明：根据替代规则9、替代规则5、替代规则6可证．

形成规则 12.

如果A、R是理M的公式，x为字母，则$(\exists_A x)R$和$(\forall_A x)R$也是理论M的公式.

证明：根据形成规则11、形成规则9、形成规则2，可证.

证明规则 35.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，则$(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall x)(A \Rightarrow R)$是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

$(\forall_A x)R$即非$(\exists x)(A$与非$R)$，又因为$(A$与非$R) \Leftrightarrow$ (非$(A \Rightarrow R)$)，根据证明规则31，$(\forall_A x)R \Leftrightarrow$ 非$(\exists x)$(非$(A \Rightarrow R)$)，即$(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall x)(A \Rightarrow R)$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

证明规则 36.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，M'为量词理论M加上公理A组成的量词理论，如果x不是M的常数，并且R是量词理论M'的定理，则$(\forall_A x)R$是M的定理.

证明：在理论M中，$A \Rightarrow R$，根据证明规则27、证明规则35可证.

证明规则 37.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，M'为理论M加上公理A与(非R)组成的理论，如果x不是M的常数，并且M'有矛盾，则$(\forall_A x)R$是量词理论M的定理.

证明：M'即M加入公理(非$(A \Rightarrow$ 非非R))得到的理论，因此$A \Rightarrow$ (非非R)是M的定理，故$A \Rightarrow R$，根据证明规则27、证明规则35可证.

证明规则 38.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，则(非$(\exists_A x(R))) \Leftrightarrow (\forall_A x)$(非$R$)和(非$(\forall_A x(R))) \Leftrightarrow (\exists_A x)$(非$R$)都是$M$的定理.

证明：类似证明规则29可证.

证明规则 39.

令A、R、S为量词理论M的公式，x为字母，并且x不是量词理论M的常数. 如果$A \Rightarrow (R \Rightarrow S)$是$M$的定理，则$(\forall_A x)R \Rightarrow (\forall_A x)S$和$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists_A x)S$也是$M$的定理；如果$A \Rightarrow (R \Leftrightarrow S)$是$M$的定理，则$(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)S$和$(\exists_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)S$也是$M$的定理.

证明：类似证明规则31可证.

证明规则 40.

令A、R、S为量词理论M的公式，x为字母，则$(\forall_A x)(R$与$S) \Leftrightarrow ((\forall_A x)R)$与$((\forall_A x)S)$和$(\exists_A x)(R$或$S) \Leftrightarrow ((\exists_A x)R)$或$((\exists_A x)S)$是$M$的定理.

证明：类似证明规则32可证.

证明规则 41.

令A、R、S为量词理论M的公式，x为字母，并且R不包含x，则$(\forall_A x)(R或S) \Leftrightarrow (R或(\forall_A x)S)$和$(\exists_A x)(R与S) \Leftrightarrow (R与(\exists_A x)S)$是$M$的定理.

证明：类似证明规则33可证.

证明规则 42.

令A、B、R为量词理论M的公式，x、y为字母，则以下公式都是M的定理：

（*1*）$(\exists_A x)(\exists_B y)R \Leftrightarrow (\exists_B y)(\exists_A x)R$;

（*2*）$(\forall_A x)(\forall_B y)R \Leftrightarrow (\forall_B y)(\forall_A x)R$;

（*3*）$(\exists_A x)(\forall_B y)R \Rightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)R$;

证明：类似证明规则34可证.

习题 13.

令A、B为量词理论M的公式，x为字母，且A不包含x，求证：$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$.

证明：根据证明规则33可证.

习题 14.

令A、B为量词理论M的公式，x为字母且不是M的常数，并且A不包含x，如果$B \Rightarrow A$是M的定理，求证：$(\exists x)B \Rightarrow A$是$M$的定理.

证明：根据证明规则31，$(\exists x)B \Rightarrow (\exists x)A$. 由于$A$不包含$x$，故$(\exists x)A$和$A$相同，得证.

习题 15.

令A为量词理论M的公式，x、y为字母，求证：$(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)(x|y)A$、$(\exists x)(x|y)A \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$是$M$的定理.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

根据证明规则30、证明规则31，$(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)(x|y)A$，根据公理模式5、证明规则31，$(\exists x)(x|y)A \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

习题 16.

令A、B为量词理论M的公式，x为字母，求证：

（*1*）$(\forall x)(A或B) \Rightarrow ((\forall x)A或(\exists x)B)$;

（*2*）$((\forall x)A与(\exists x)B) \Rightarrow (\exists x)(A与B)$.

证明：

（1）根据公理模式4、公理模式5，$(A\text{或}B) \Rightarrow (A\text{或}(\exists x)B)$，根据证明规则31、证明规则33可证．

（2）根据习题16（1）、证明规则12，$(\forall x)A\text{与}(\exists x)B) \Rightarrow$ 非$(\forall x)(A\text{或}B)$，根据证明规则29可证．

习题 17.

令A、B为量词理论M的公式，x、y为字母，且B不包含x、A不包含y，求证：$(\forall x)(\forall y)(A\text{与}B) \Rightarrow ((\forall x)A\text{与}(\forall y)B)$．

证明：根据证明规则31、证明规则33可证．

习题 18.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母，求证：$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$，$(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$．

证明：根据证明规则31、证明规则21，$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$．根据证明规则12，$(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$．

习题 19.

令A、R为量词理论M的公式，x为字母且不是M的常数．求证：如果$R \Rightarrow A$是M的定理，则$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$是$M$的定理．如果(非$R$) $\Rightarrow A$是M的定理，则$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$是$M$的定理．特别是，如果$A$是$M$的定理，则$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$、$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$都是$M$的定理．

证明：

如果$R \Rightarrow A$是M的定理，则$R \Leftrightarrow (A\text{与}R)$，根据证明规则31，$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$．

如果(非R) $\Rightarrow A$是M的定理，则(非R) $\Leftrightarrow (A\text{与非}R)$，根据证明规则31、证明规则12，$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$．如果$A$是$M$的定理，则$R \Rightarrow A$、(非$R$) $\Rightarrow A$，根据上述结论，$(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$、$(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$都是$M$的定理．

习题 20.

令A、R为量词理论M的公式，T是M的项，x为字母，如果$(T|x)A$是M的定理，求证：$(T|x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$、$(\forall_A x)R \Rightarrow (T|x)R$是$M$的定理．

证明：由于$(T|x)A$是M的定理，因此$(T|x)R \Rightarrow (T|x)(R\text{与}A)$．根据公理模式5，$(T|x)(R\text{与}A) \Rightarrow (\exists_A x)R$，故$(T|x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$．根据证明规则12，$(\forall_A x)R \Rightarrow (T|x)R$．

1.5 等式理论（Théories égalitaires）

记号定义 12. 等式（*égalité*）

令T、U为语句，x为字母，则“用$T=U$”表示“$=TU$”（第三优先级）；用“$T\neq U$”表示“非$(T=U)$”（第三优先级）.

补充替代规则 7.

下列规则均为公理模式：

（1）令x为字母，T和U为项，R为公式，则$(T=U)\Rightarrow((T|x)R\Leftrightarrow(U|x)R)$是公理.

（2）令R和S为公式，x为字母，则$(\forall x)(R\Leftrightarrow S)\Rightarrow(\tau_x(R)=\tau_x(S))$是公理.

证明：

令原公式为A，以下证明$(V|y)A$也是该规则产生的公式：

若V不包含x且x、y不同，根据替代规则2、替代规则5，可证明（1），根据替代规则4、替代规则7，可证明（2）.

若V包含x或x、y相同，则令R'为$(x'|x)R$，其中x'为与y不同的字母且U不包含x'，根据替代规则1、替代规则8及上述结论可证.

公理模式 6.：

令x为字母，T和U为项，R为公式，则$(T=U)\Rightarrow((T|x)R\Leftrightarrow(U|x)R)$是公理.

注：即相等的量有相同的性质.

公理模式 7.：

令R和S为公式，x为字母，则$(\forall x)(R\Leftrightarrow S)\Rightarrow(\tau_x(R)=\tau_x(S))$是公理.

元数学定义 22. 等式理论（*théorie égalitaire*）

等式理论是指，定义了2元特别符号“=”，并且包含公理模式6、公理模式7的量词理论.

证明规则 43.

令x为字母，T和U为等式理论M的项，R为M的公式，则$((T=U)$与$(T|x)R)\Leftrightarrow((T=U)$与$(U|x)R)$是$M$的定理.

证明：

假设$((T=U)$与$(T|x)R)$，则$T=U$.

由于$(T|x)R$，根据公理模式6，$(U|x)R$.

反之亦然.

注：下文中提及的所有定理、补充定理，都是基于前文已提及的特别符号、公理模式、显式公理组成的理论. 它们也适用于更强的理论.

定理 1. 等式的反身性

x=x.

证明：

设理论为M，考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

对任意公式R，根据证明规则27，$\forall x(R \Leftrightarrow R)$，根据公理模式7，$\tau_x(R) = \tau_x(R)$，即$(\tau_x(R)|x)(x = x)$，令R为非$(x = x)$，根据证明规则26，$(\forall x)(x = x)$，根据证明规则30，$x = x$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

补充证明规则 7. 同一律

令T为等式理论M的项，则$T = T$.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：根据定理1、证明规则27，$(\forall x)(x = x)$，根据证明规则30，$T = T$. 由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

补充证明规则 8.

令T为等式理论M的项，则$(\exists x)(x = T)$，$(\exists x)(T = x)$.

证明：根据补充证明规则7、替代规则9、公理模式5可证.

定理 2. 等式的对称性

$(x = y) \Leftrightarrow (y = x)$.

证明：假设$x = y$，根据公理模式6，$(x|y)(y = x) \Leftrightarrow (y|y)(y = x)$，即$(x = x) \Leftrightarrow (y = x)$，根据定理1，$y = x$. 反之亦然.

定理 3. 等式的传递性

$((x = y)$与$(y = z))\$Rightarrow(x = z)$.

证明：假设$x = y$、$y = z$，根据公理模式6，$(x = y) \Rightarrow ((x = z) \Leftrightarrow (y = z))$，因此，$(x = z) \Leftrightarrow (y = z)$，因此，$x = z$.

证明规则 44.

令T、U、V为等式理论M的项，x为字母，则$(T = U) \Rightarrow ((T|x)V = (U|x)V)$是$M$的定理.

证明：

令y、z为和x不同的字母，且不出现在T、U、V中.

假设$y = z$，则$(y|z)((y|x)V = (z|x)V) \Leftrightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$，即$((y|x)V = (y|x)V) \Leftrightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$，根据定理1，$(y|x)V = (y|x)V$，故$(y|x)V = (z|x)V$.

因此，$(y = z) \Rightarrow ((y|x)V = (z|x)V)$，进而$(T|y)(U|z)((y = z) \Rightarrow ((y|x)V = (z|x)V))$，即$(T = U) \Rightarrow ((T|x)V = (U|x)V)$.

元数学定义 23. 单一公式（*relation univoque*），唯一（*il existe au plus un*）

令R为等式理论M的公式，x、y、z为不同的字母，并且R不包含y和z，如果$(\forall y)(\forall z)$ $(((y|x)R)$与$((z|x)R)) \Rightarrow (y=z)$是$M$的定理，则称在$M$中，$R$是$x$上的单一公式，或称在$M$中，满足$R$的$x$是唯一的．

元数学定义 24. 函数性公式（*relation fonctionnelle*），有且仅有一个（*il existe un et un seul*）

令R为等式理论M的公式，x为字母，如果在M中，R是x上的单一公式，并且$(\exists x)R$是M的定理，则称在M中，R是x上的函数性公式，或称在M中，有且仅有一个x满足R．

证明规则 45.

令R为等式理论M的公式，x为字母并且不是M的常数．如果在M中，R是x上的单一公式，则$R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$是$M$的定理．反之，如果存在等式理论$M$的项$T$，使$R \Rightarrow (x = T)$为$M$的定理，则在$M$中，$R$是$x$上的单一公式．

证明：

当$R \Rightarrow (x=\tau_x(R))$时，假设$R$为真，根据公理模式5，$(\tau_x(R)|x)R$，因此$R$与$(\tau_x(R)|x)R$，由于$R$是$x$上的单一公式，因此$R$与$(\tau_x(R)|x)R \Rightarrow (x=\tau_x(R))$．根据证明规则30可证．

反过来，当$R \Rightarrow (x = T)$时，令y、z是和x不同且不出现在R中的字母，则$(y|x)R \Rightarrow (y=T)$、$(z|x)R \Rightarrow (z=T)$．$G(\forall y)(\forall z)(((y|x)R)$与$((z|x)R))$，根据证明规则30，$(y|x)R)$与$((z|x)R$，因此$y=T$、$z=T$，根据3，得证．

证明规则 46.

令R为等式理论M的公式，x为字母并且不是等式理论M的常数．如果在M中，R是x上的函数性公式，则$R \Leftrightarrow (x=\tau_x(R))$是$M$的定理．反之，如果存在等式理论$M$的项$T$，使$R \Leftrightarrow (x=T)$为理论$M$的定理，则在$M$中，$R$是$x$上的函数性公式．

证明：

当R是x上的函数性公式时，根据证明规则45，$R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$．同时，根据公理模式5，$(\exists x)R$．根据公理模式6，$(x=\tau_x(R)) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (\exists x)R)$．当$x=\tau_x(R)$时，$R \Leftrightarrow (\exists x)R$，又因为$(\exists x)R$，因此$R$为真．综上，前一部分得证．

反之，如果$R \Leftrightarrow (x = T)$，根据证明规则45，$R$是$x$上的单一公式．又因为$(T|x)R \Leftrightarrow (T=T)$，根据定理1，$(T|x)R$，根据公理模式5，$(\exists x)R$，得证．

证明规则 47.

令R、S为等式理论M的公式，x为字母并且不是等式理论M的常数．如果在M中，R是x上的函数性公式，则$(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow (\exists x)(R$与$S)$．

证明：

根据证明规则46，$R \Leftrightarrow (x=\tau_x(R))$．

根据证明规则43，$(x=\tau_x(R))$与$S \Leftrightarrow (x=\tau_x(R))$与$(\tau_x(R)|x)S$.

因此，R与$(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow R$与$S$.

由于$(\tau_x(R)|x)S$不包含x，根据证明规则33，$(\exists x)R$与$(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow (\exists x)(R$与$S)$.

由于R是x上的函数性公式，故$(\exists x)R$，因此$(\tau_x(R)|x)S \Leftrightarrow (\exists x)(R$与$S)$.

补充证明规则 9.

令T为等式理论M的项，x为字母且T不包含x，则在M中，$x=T$是x上的函数性公式.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

根据证明规则46可证.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

补充证明规则 10.

令R为等式理论M的公式，T是M的项，x为字母且T不包含x，则$(\exists x)(x=T$与$R) \Leftrightarrow (T|x)R$.

证明：

考虑其他规则相同但不包含显式公理的理论M_0：

根据补充证明规则9，$x=T$是x的函数性公式；根据证明规则47，$(\tau_x(x=T)|x)R \Leftrightarrow (\exists x)(x=T$与$R)$.

根据证明规则46，$(x=T) \Leftrightarrow (x=\tau_x(x=T))$. 根据补充证明规则8，$(\exists x)(x=T)$，即$\tau_x(x=T)=T$. 根据公理模式6，$(\tau_x(x=T)|x)R \Leftrightarrow (T|x)R$. 得证.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

习题 21.

令M为等式理论，求证：在M中，$x=y$是x上的函数性公式.

证明：根据补充证明规则9可证.

习题 22.

令R为等式理论M的公式，x、y是不同的字母. 求证：$(\exists x)(x=y$与$R) \Leftrightarrow (y|x)R$.

证明：根据补充证明规则10可证.

习题 23.

令R、S为等式理论M的公式，T为M的项，x、y为字母，y不是M的常数，T不包含x. 令理论M'为M添加显式公理S形成的理论. 在理论M'中，R是x上的函数性公式，$(T|y)S$是理论M的定理. 求证：在M中，$(T|y)R$是x上的函数性公式.

证明：

在理论M中，根据证明规则14，$S\Rightarrow(\exists x)R$. 根据证明规则3、替代规则5，$(T|y)S\Rightarrow(T|y)(\exists x)R$.

根据替代规则9，$(T|y)(\exists x)Rs(\exists x)(T|y)R$，故$(\exists x)(T|y)R$.

令u、v为不同于x、y且不出现在R和T中的字母，在理论M中，根据证明规则14，$S\Rightarrow(\forall u)(\forall v)(((u|x)R)$与$((v|x)R))\Rightarrow(u=v)$.

根据证明规则3、替代规则9、替代规则2、替代规则5，$(T|y)S\Rightarrow(\forall u)(\forall v)(((u|x)(T|y)R)$与$((v|x)(T|y)R))\Rightarrow(u=v)$.

因此，$(\forall u)(\forall v)(((u|x)(T|y)R)$与$((v|x)(T|y)R))\Rightarrow(u=v)$.

综上，得证.

习题 24.

令R、S为等式理论M的公式，x为字母且不是M的常数．若R是x上的函数性公式，$R\Leftrightarrow S$是定理，求证：S是x上的函数性公式.

证明：

根据证明规则31，$(\exists x)R\Leftrightarrow(\exists x)S$，又因为$R$是$x$上的函数性公式，故$(\exists x)S$.

令y、z为不同且不同于x的字母，并且R不包含y和z，又因为R是x上的函数性公式，所以$(\forall y)(\forall z)(((y|x)R)$与$((z|x)R))\Rightarrow(y=z)$.

根据证明规则3、替代规则7，$(y|x)R\Leftrightarrow(y|x)S$，$(z|x)R\Leftrightarrow(z|x)S$.

根据补充证明规则5（4），$(y|x)R$与$(z|x)R\Leftrightarrow(y|x)S$与$(z|x)S$. 根据证明规则31，$(\forall y)(\forall z)(((y|x)R)$与$((z|x)R))\Leftrightarrow(\forall y)(\forall z)(((y|x)S)$与$((z|x)S))$，因此$(\forall y)(\forall z)(((y|x)S)$与$((z|x)S))\Rightarrow(y=z)$.

习题 25.

令R、S、T为等式理论M的公式，x为字母，若R是x上的函数性公式，求证：下列公式是M的定理：

（*1*）$($非$(\exists x)(R$与$S))\Leftrightarrow((\exists x)R$与$($非$S))$;

（*2*）$(\exists x)(R$与$(S$与$T))\Leftrightarrow((\exists x)(R$与$S)$与$(\exists x)(R$与$T))$;

（*3*）$(\exists x)(R$与$(S$或$T))\Leftrightarrow((\exists x)(R$与$S)$与$(\exists x)(R$或$T))$.

证明：

（1）根据证明规则47，非$(\exists x)(R$与$S)\Leftrightarrow$非$(\tau_x(R)|x)S$、$(\exists x)R$与$($非$S)\Leftrightarrow(\tau_x(R)|x)($非$S)$，根据替代规则5可证.

（2）根据证明规则47，$(\exists x)(R$与$(S$与$T))\Leftrightarrow(\tau_x(R)|x)(S$与$T)$、$(\exists x)(R$与$S)\Leftrightarrow(\tau_x(R)|x)S$、$(\exists x)(R$与$T)\Leftrightarrow(\tau_x(R)|x)T$，根据替代规则6可证.

（3）根据证明规则47，$(\exists x)(R$与$(S$或$T))\Leftrightarrow(\tau_x(R)|x)(S$或$T)$、$(\exists x)(R$与$S)\Leftrightarrow(\tau_x(R)|x)S$、$(\exists x)(R$与$T)\Leftrightarrow(\tau_x(R)|x)T$，根据替代规则5可证.

习题 26.

求证：$(\exists x)R \Rightarrow R$不是公理模式.

证明：

令x、y为不同的字母，R是包含x、y的公式.

根据替代规则5，$(y|x)((\exists x)R \Rightarrow R)$即$(\exists x)R \Rightarrow (y|x)$R.

假设该公式具有$(\exists z)R' \Rightarrow R'$的形式，则该公式是$\vee$开头的平衡语句，因此，它能唯一的表示为$\vee BC$的形式，即$(\exists x)R$和$(\exists z)R'$相同，$(y|x)R$和$R'$相同．即$(\exists x)R$和$(\exists z)(y|x)R$相同.

假设z和x相同，则$(\tau_x(R)|x)R$和$(y|x)R$相同，但$\tau_x(R)$至少包含两个字符，二者字符数量不同，矛盾．故z和x不同.

由于$(\exists z)(y|x)R$不包含z，因此$(\exists x)R$不包含z，即R不包含z．故$(\tau_x(R)|x)R$和$(y|x)R$相同，但$\tau_x(R)$显然至少包含两个字符，二者字符数量不同，同样矛盾．得证.

注：习题26涉及尚未介绍的“平衡片段唯一性”的知识.

习题 27.

求证：$(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$不是公理模式.

证明：

令x、y为不同的字母，R、S是包含x、y的公式.

根据替代规则5、替代规则7，$(y|x)((R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S)))$即$((y|x)R \Leftrightarrow (y|x)S)$ $\Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$.

假设该公式具有$(R' \Leftrightarrow S') \Rightarrow (\tau_z(R') = \tau_z(S'))$的形式，则$R'$、$S'$、$\tau_z(R')$、$\tau_z(S')$分别和$(y|x)R$、$(y|x)S$、$\tau_x(R)$、$\tau_x(S)$相同．即$\tau_z((y|x)R)$、$\tau_z((y|x)S)$分别和$\tau_x(R)$、$\tau_x(S)$相同.

若z和x相同，由于$(y|x)R$、$(y|x)S$不包含x，而R、S包含x，$\tau_x((y|x)R)$、$\tau_x((y|x)S)$没有连线，而$\tau_x(R)$、$\tau_x(S)$有连线，矛盾.

因此z和x不同，由于$\tau_z((y|x)R)$、$\tau_z((y|x)S)$不包含z，因此$(y|x)R$、$(y|x)S$不包含z．故$\tau_z((y|x)R)$、$\tau_z((y|x)S)$没有连线，而$\tau_x(R)$、$\tau_x(S)$有连线，同样矛盾．得证.

注：习题27证明使用习题26的结论，同样涉及尚未介绍的“平衡片段唯一性”的知识.

1.6 项和公式的性质（Caractérisation des termes et des relations）

语法定义 1. 单词（*mot*），单词幺半群（*monoïde de mots*）

令S为理论的符号集合，在S上按照下列规则构建的自由幺半群$L_0(S)$，称为单词幺半群，其元素称为单词：

第一，其元素为所有有限个符号组成的序列$s_0s_1\cdots s_n$（也可以记作$(s_i)_{i\in[0,n]}$）；

第二，元素A和B的乘法运算，为序列A和序列B连接成的序列，记作AB；

第三，其单位元为零个元素组成的序列．

语法定义 2. 长度（*longueur*）

单词A的长度，为A包含的符号集合的元素数目，记作$l(A)$．

语法定义 3. 权重（*poid*）

建立符号集合到非负整数集的映射．定义单词A的权重为A包含的各符号对应的数值之和，记作$n(A)$．

补充语法定理 1. *A、B为单词，则l(AB)=l(A)+l(B).*

证明：根据定义可证．

补充语法定理 2. *A、B为单词，则n(AB)=n(A)+n(B).*

证明：根据定义可证．

语法定义 4. 单词的片段（*segment d'un mot*），单词的真片段（*segment propre d'un mot*），单词的头（*segment initial d'un mot*），单词的真头（*segment initial propre d'un mot*），单词的尾（*segment final d'un mot*），单词的真尾（*segment final propre d'un mot*）

A、A'、B、A''均为单词，如果$A = A'BA''$，则称B为A的片段，如果$B \neq A$，则称B为A的真片段．如果$A' = \emptyset$，则称B为A的头，此时，如果$B \neq A$，则称B为A的真头．如果$A'' = \emptyset$，则称B为A的尾，此时，如果$B \neq A$，则称B为A的真尾．

语法定义 5. 不相交的单词片段（*segments disjoint d'un mot*），相交的单词片段（*segments d'un mot qui rencontrent*）

令A、B、C、D、E、F为单词，如果$A = BCDEF$，则称C和E为A的不相交的片段，反之，则称两个片段相交．

语法定义 6. 有意义的序列（*suit significative*），有意义的单词（*mot significatif*）

单词群$L_0(S)$的单词序列A_1、A_2、$\cdots$、A_n，当序列中每个元素A_i（$0 \leq i \leq n$）均满足下列条件之一时，称为有意义的序列：

（*1*）A_i仅包含一个权重为0的符号；

（*2*）在A_i之前有p个元素A_{i_1}、A_{i_2}、$\cdots$、A_{i_p}，以及一个权重为p的字符f，使A_i= $fA_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_p}$．

有意义的序列中的各元素，称为有意义的单词．

语法定理 1.

如果A_1、A_2、$\cdots$、A_p都是有意义的单词，符号f是权重为p的元素，则$fA_1A_2\cdots A_p$为有意义的单词．

证明：将A_1、A_2、$\cdots$、A_p所在的有意义的序列合并在一起，然后加入$fA_1A_2\cdots A_p$，仍能得到一个有意义的序列，得证.

语法定义 7. 平衡单词（*mot équilibré*）

单词A，同时满足下列两个条件的，称为平衡单词：

（*1*）$l(A)=n(A)+1$;

（*2*）对A的任何真头B，$l(B)\leq n(B)$.

语法定理 2.

A是平衡单词，对任意$0\leq k<l(A)$，存在唯一的从A的第$k+1$个符号开始的平衡片段S.

证明：

根据定义，任何平衡单词的真头，不可能是平衡单词，故唯一性成立.

下面证明存在性：

令$A=BC$，其中$l(B)=k$，则$l(C)=l(A)-l(B)\geq n(A)+1-n(B)=n(C)+1$.

令C_q为C的前q个字符组成的序列，则$l(C_0)=n(C_0)=0$.

设i是使$l(C_i)\leq n(C_i)$成立的最大非负整数，即$l(C_{i+1})=i+1\geq n(C_{i+1})+1$，则$n(C_{i+1})+1\leq i+1$，$i+\leq n(C_i)+1$，$n(C_i)+1\leq n(Ci+1)+1$，因此三个式子中的等号全部成立，故$l(C_{i+1})=n(C_{i+1})+1$，所以$C_{i+1}$即为所求片段.

语法定理 3.

任何平衡单词A都可以写成$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为平衡单词，且$n(f)=p$.

证明：

设A的第一个符号是f. 根据语法定理2，A的其他符号可以分为p个平衡单A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为平衡单词.

又因为$l(A)=1+l(A_1)+l(A_2)+\cdots+l(A_p)$，

故$l(A)=1+p+n(A_1)+n(A_2)+\cdots+n(A_p)$，

进而$l(A)=1+p+n(A)-n(f)$.

又因为$l(A)=1+n(A)$，

所以$n(f)=p$，得证.

语法定理 4.

当且仅当一个单词平衡时，该单词有意义.

证明：

充分性：

令A为有意义的单词，设其属于单词序列A_1、A_2、$\cdots$、A_n．A_1只能是权重为0的符号，显然是平衡单词．

假设对任意$j<k$，A_j均为平衡单词，考虑单词A_k：

若A_k是权重为0的符号，显然是平衡单词．

若$A_k=fB_1B_2\cdots B_p$，其中$n(f)=p$，且B_1、B_2、$\cdots$、B_p均为序列之前的单词，即为平衡单词，则：

由于$l(A_k)=1+l(B_1)+l(B_2)+\cdots+l(B_p)$，

故$l(A_k)=1+p+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_p)$，

因此，$l(A_k)=1+n(f)+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_p)$，

所以，$l(A_k)=1+n(A_k)$．

同时，对于A的任何一个真头$C=fB_1B_2\cdots B_qD$，有：

$l(C)=1+l(f)+l(B_1)+l(B_2)+\cdots+l(B_q)+l(D)$，

所以$l(C)\leq 1+q+n(f)+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_q)+n(D)$，

进而$l(C)\leq p+n(f)+n(B_1)+n(B_2)+\cdots+n(B_q)+n(D)$

故$l(C)\leq n(C)$，故A_k是平衡单词．

必要性：

对单词的长度运用数学归纳法．长度为1的平衡单词，权重为0，显然为有意义的单词．

设长度$i<l(A)$的平衡单词均有意义，根据语法定理3，A可以写成$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为平衡单词，因此A_1、A_2、$\cdots$、A_p均有意义，根据语法定理1，A有意义．

语法定理 5.

A是有意义的单词，对任意$k\in[0,l(A)[$，存在唯一的从A的第$k+1$个符号开始的有意义的片段S．

证明：根据语法定理4、语法定理2可证．

语法定理 6.

A是有意义的单词，则A可以唯一表示为$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为有意义的单词，且$n(f)=p$．

证明：

存在性：根据语法定理4、语法定理3可证．

唯一性：根据语法定理2，A可以唯一表示为$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均为平衡单词，即都是有意义的单词．

而$l(A)=1+l(A_1)+l(A_2)+\cdots+l(A_p)$，

故$l(A)=1+p+n(A_1)+n(A_2)+\cdots+n(A_p)$，

因此$l(A)=1+n(A)-n(f)+p$，

又因为$l(A) = 1 + n(A)$，

所以$n(f) = p$，唯一性得证.

语法定义 8. 平衡语句（*assemblage équilibré*）

如果语句A去掉连线后产生的字符序列A^*是平衡单词，则称A为平衡语句.

语法定义 9. 语句的片段（*segment d'un assemblage*），语句的真片段（*segment propre d'un assemblage*），语句的头（*segment initial d'un assemblage*），语句的真头（*segment initial propre d'un assemblage*），语句的尾（*segment final d'un assemblage*），语句的真尾（*segment final propre d'un assemblage*），不相交的语句片段（*segments disjoint d'un assemblages*），相交的语句片段（*segments d'un assemblages qui rencontrent*）

对于语句A，去掉连线后产生的字符序列A^*的任何（真）片段S^*，如果A在S^*的相应位置有连线，则在S^*内部添加相应连线后，形成的语句S，称为A的（真）片段．如果片段S^*是A^*的头（尾），则称相应的语句S为A的头（尾）．如果语句A的两个片段，在去掉连线后产生的字符序列A^*中相应的片段相交（不相交），则称语句A的这两个片段相交（不相交）.

语法定理 7.

对于理论M，令S为M的符号集合，并构建单词群$L_0(S)$，其中$n(\tau) = n(\neg)$
$= 1$，$n(\vee) = 2$，$n(\square) = 0$，$n(x) = 0$（x为字母），$n(s) = m$(s为特别符号，m为该特别符号的元)．则理论M的公式和项均为平衡语句.

证明：对包含A的构造为A_1、A_2、$\cdots$、A_p．用数学归纳法，根据语法定理1可证.

语法定义 10. 先行语句（*assemblage antécédent*），完美平衡（*parfaitement équilibré*）

对于以$\neg$、$\vee$或特别符号开头的平衡语句A，将去掉连线后产生的平衡单词A^*表示为$fA_1{}^*A_2{}^*\cdots A_p{}^*$的形式，其中$A_1{}^*$、$A_2{}^*$、$\cdots$、$A_p{}^*$均为平衡单词．在各平衡单词$A_1{}^*$、$A_2{}^*$、$\cdots$、$A_p{}^*$内部，如果$A$的相应位置有连线，则相应恢复连线，得到的语句$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_p$称为$A$的先行语句.

此时，如果A和$fA_1A_2\cdots A_p$完全相同，则称A为完美平衡语句.

对于以τ开头的平衡语句A，将去掉连线后产生的平衡单词A^*表示为τB^*的形式，选择任意一个B^*中未包含的字母x，将与开头的τ连线的所有$\square$替换为x，然后按照A当中的其他连线位置重新恢复连线，得到的语句B称为A的先行语句.

此时，如果A和$\tau_x(B)$完全相同，则称A为完美平衡语句.

语法定理 8.

设A为理论M的平衡语句，当且仅当A满足下列条件之一时，A是M的项：

第一，A是单个字母；

第二，A是以τ开头的完美平衡语句，且A的先行语句是M的公式.

当且仅当A满足下列条件之一时，A是M的公式：

第一，A是以$\neg$或$\vee k$开头的完美平衡语句，且先行语句都是M的公式；

第二，A是以特别符号开头的完美平衡语句，且先行语句都是M的项.

证明：

根据形成规则1、形成规则2、形成规则3、形成规则4，可证得充分性.

反过来，如果A是公式，则A是$\neg B$、$\vee BC$或$sD_1D_2\cdots D_n$的形式，因此A是完美平衡语句，且先行语句B、C是公式，D_1、D_2、$\cdots$、D_n是项.

如果A是项，则A是单个字母或者以τ开头．如果A以τ开头，则A可以表示为$\tau_x(B)$的形式，因此A是完美平衡语句，且先行语句B是项.

综上，必要性成立.

习题 28.

令S为理论的符号集合，A为$L_0(S)$的单词，B、C是A的两个有意义的片段．求证：或者B是C的片段，或者C是B的片段，或者B和C不相交.

证明：根据语法定理4，B、C是平衡单词.

如果B和C相交：

设C的开头在B的开头之后，令C开头符号为f，根据语法定理2，在平衡单词B中，以f开头的片段中，存在唯一的平衡片段D．因此D也是C的片段．在平衡单词C中，根据语法定理2，D和C相同，即C是B的片段.

设C的开头在B的开头之前，同理可证B是C的片段.

若C和B开头相同，则C是B的片段，或者B是C的片段.

综上得证.

习题 29.

令S为理论的符号集合，A为$L_0(S)$的有意义的单词，其形式为$A'BA''$，其中B有意义．求证：若C有意义，则$A'CA''$有意义.

证明：

若A长度为1，则A'、A''均为单位元，$A=B$，故$A'CA''=C$，命题成立.

设命题对长度小于k的单词成立，对长度为k的单词，根据语法定理6，A可以表示为$fA_1A_2\cdots A_p$，其中A_1、A_2、$\cdots$、A_p均有意义．若其中与B相交的多于1个，根据语法定理2，矛盾．故只有1个与B相交，设其为A_i，根据习题28，B是A_i的真片段，即A_i可表示为${A'}_iB{A''}_i$，因此${A'}_iC{A''}_i$也是有意义的单词．因此，$A'CA''=fA_1A_2\cdots {A'}_iC{A''}_i\cdots A_p$也是有意义的单词.

习题 30.

令E为集合，f为$E\times E$到E的映射．令$S=E\cup f$．令$n(f)=2$，对于$x\in E$，令$n(x)=0$：

（1）令M为$L_0(S)$有意义的单词的集合，求证：存在M到E且满足下列条件的唯一映射v:

第一，对所有$x\in E$，$v(x)=x$;

第二，对任意两个有意义的单词A、B，$v(fAB)=f(v(A),v(B))$．

（2）设$A=(s_i)_{i\in[0,n]}$为$L_0(S)$的单词，定义A^*为其子串，其下标序列$i\check{}\check{}1$、i_2、·、s_{i_k}是所有满足$S_i\neq f$的下标i按照递增顺序排序而成．若A、B为$L_0(S)$的单词，且满足$A^*=B^*$，则称A、B相似．求证：如果f满足结合律（即$f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$），则对任意有意义的单词A、B，$v(A)=v(B)$．

证明：

（1）根据定义，存在性成立，根据语法定理6，唯一性成立．

（2）对任意有意义的单词A，若$A^*=A_1A_2\cdots A_n$，则称$fA_1fA_2\cdots fA_{n-1}A_n$为$A$的标准化单词，记作$A'$．则$A$存在唯一的标准化单词，且$A$和$A'$相似．

对于$n=1$，显然$v(A)=v(A')$，设命题$v(A)=v(A')$对$n<k$成立，则对$n=k$：

令$A=fBC$，其中$B^*=A_1A_2\cdots A_i$，$C^*=A_{i+1}A_{i+2}\cdots A_k$，则$v(A)=f(v(B),v(C))=f(v(B'),v(C'))$．

若$i=1$，则$v(A)=f(v(A_1),v(C'))=v(A')$显然成立．

设$v(A)=v(A')$对$i<j$成立，则对$i=j$：根据f的结合律，

$v(A)=f(f(A_1,v(fA_2fA_3\cdots fA_{j-1}A_j)),v(fA_{j+1}fA_{j+2}\cdots fA_{k-1}A_k))=f(A_1,f(v(fA_2fA_3\cdots fA_{j-1}A_j),v(fA_{j+1}fA_{j+2}\cdots fA_{k-1}A_k))$．

令$D=ffA_2fA_3\cdots fA_{j-1}A_jfA_{j+1}fA_{j+2}\cdots fA_{k-1}A_k$，因此$D'=fA_2\cdots fA_{n-1}A_n$，根据归纳假设，$v(D)=v(D')$，故$v(A)=f(A_1,v(D'))=v(A')$．得证．

习题 31.

令A为理论M的项或公式．考虑下列语句序列：

先写A，如果A是单个字母，则结束．否则，写下A的先行语句（如果A以τ开头，则写下任何一个先行语句）．如有一个或数个新写出的先行语句不是字母，则继续写这些先行语句的先行语句，直至新写出的语句全部是单个字母为止．

（1）求证：将上述语句序列的顺序颠倒，则形成一个构造．

（2）若平衡语句B是A的片段，且在语句A中，没有B内部和B外部之间的连线，求证：B是M的项或公式．

（3）若B是项（或公式），则将A中的B替代为另一个项（或公式）．求证：若A是项（或公式），则得到的新语句是项（或公式）．

证明：

（1）根据定义可证.

（2）对语句A的长度用数学归纳法可知，该语句序列中存在语句C，和B的起始位置相同，

根据语法定理2，C和B长度相同. 同时，由于没有B内部和B外部之间的连线，故B中的□没有被替代掉，即B和C相同. 因此B是M的项或公式.

（3）设A为$A'BA''$，以C替代A.

若A的长度为1，则A和B相同，命题成立.

设命题对长度小于k的语句成立，则当A的长度为k时，根据习题2929证明过程，A的先行语句中，只有一个和B相交，且B为该先行语句的片段.

设该语句为A_p，将A_p中的B替代为C得到A'_p，若A'_p为项（或公式），则A'_p相应为项（或公式）. 因此，若A为项（或公式），则A的先行公式A_p替代为A'_p，根据语法定理8，得到的$A'CA''$也是项（或公式）.

习题 32.

令A为理论M的语句，T为M的项，x为字母. 求证，若$(T|x)A$为项（或公式），则A为项（或公式）.

证明：根据习题31（3）可证.

习题 33.

理论M的公式，如果以特别符号开头，则称该公式逻辑上不可约. 令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为M中逻辑上不可约的不同公式. 对于M的语句序列A_1、A_2、$\cdots$、A_n，如果其中每个语句A_i都满足下列条件之一，则称该序列为基于令R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造：

第一，A_i是公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n中的一个；

第二，在A_i之前有一个语句A_j使A_i为$\neg A_j$；

第三，在A_i之前有两个语句A_j、A_k，使A_i为$\vee A_j A_k$.

（1）求证：基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造的每个语句均为理论M的公式.

（2）基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造的每个语句，称为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式. 求证：若R、S为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式，则$\neg R$、$\vee RS$、$\Rightarrow RS$、R与S、$R \Leftrightarrow S$均为为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式.

（3）令R为M的公式. 考虑下列语句序列：先写R，如果R逻辑上不可约，则结束. 否则，写下R的先行语句. 如有一个或数个先行语句不是逻辑上不可约的公式，则然后继续写这些先行语句的先行语句，直至新写出的语句全部是逻辑上不可约的公式为止. 若R_1、R_2、$\cdots$、R_n为上述语句序列中不同的逻辑上不可约公式，则称R_1、R_2、$\cdots$、R_n为R的逻辑成分. 求证：R为其各逻辑成分的逻辑构造公式，且若从其逻辑成分中去掉一个公式，则R不是其剩余公式的逻辑构造公式.

（4）令R为M的公式，令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为M中逻辑上不可约的不同公式，并且：

第一，R为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式；

第二，从R_1、R_2、$\cdots$、R_n中去掉任何一个公式，R不是其剩余公式的逻辑构造公式，

求证：R的逻辑成分是为R_1、R_2、$\cdots$、R_n.

证明：

（1）对于A_1，其为公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n中的一个，显然为公式．设命题对$i<k$成立，则对A_k，其为公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n中的一个，或为$\neg A_j$，或为$\vee A_jA_k$，根据形成规则1、形成规则2，A_k为公式．得证．

（2）类似形成规则1、形成规则2、形成规则5、形成规则9、形成规则10的证明，可证．

（3）将语句序列的顺序颠倒，根据定义，R为其各逻辑成分的逻辑构造公式．下面证明，去掉R_n后，R不是剩余公式的逻辑构造公式：

若R长度为2，则R本身逻辑上不可约，仅有一个逻辑成分，去掉后则无法产生逻辑构造公式，显然成立．

设待证命题对于小于k的公式成立，则对于长度为k的公式，若R本身逻辑上不可约，显然成立；若R为$\neg A$的形式，R和A的逻辑成分相同，假设R是剩余公式的逻辑构造公式，则该逻辑构造包含A，与A不是剩余公式的逻辑构造公式矛盾；若R为$\vee BC$的形式，则B、C必有一个公式的逻辑成分包含R_n，设该公式为B，假设R是剩余公式的逻辑构造公式，则该逻辑构造包含B 、C，与B不是剩余公式的逻辑构造公式矛盾．综上，得证．

（4）按照（3）写下公式序列．若存在R_i（$1\le i\le n$）不在公式序列中，则去掉R_i，R仍是剩余公式的逻辑构造公式，矛盾．得证．

习题 34.

令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为理论M中逻辑上不可约的公式，序列A_1、A_2、$\cdots$、A_n为基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造．

先将每个R_i对应符号0或1，然后按照下列规则将每个A_i对应0或1：

第一，若存在j使A_i与R_j相同，则A_i与R_j对应相同的符号；

第二，若存在j使A_i与$\neg A_j$相同，而A_j对应0（或1），则A_i对应1（或0）；

第三，若存在j、k使A_i与$\vee A_jA_k$相同，在A_j 、A_k均为1的情况下，A_i为1，其他情况下A_i为0．

（*1*）求证：根据上述方法，每个A_i有且仅有一个对应的符号．

（*2*）令R为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式，求证：R对应的符号，与选择哪一个基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n且包含R的逻辑构造无关．

（*3*）令R、S为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式，R和$\Rightarrow RS$对应的符号均为0，求证：S对应的符号为0．

（*4*）设理论M的公理仅包含公理模式*1*、公理模式*2*、公理模式*3*、公理模式*4*生成的公理，R是M的定理，R_1、R_2、$\cdots$、R_n是R的逻辑成分．求证：不论各公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n对应的符号是0还是1，R对应的符号均为0．

（5）令R为理论M逻辑上不可约的公式．求证：R、非R都不是M的定理，并且，M没有矛盾．

（6）令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为理论M中逻辑上不可约的公式．令S_1、S_2、$\cdots$、S_p为所有$(R'_1$或R'_2或$\cdots$或$R'_n)$形式的公式，其中R'_i为R_i或者“非R_i”其中之一．令T_1、T_2、$\cdots$、T_q为所有S_{i_1}与S_{i_2}与$\cdots$与S_{i_r}形式的公式，其中i_1、i_2、$\cdots$、i_r为严格递增的下标序列．令T_0为M中的定理“R_1或非R_1”，求证：令R_1、R_2、$\cdots$、R_n的一切逻辑构造公式，与且仅与T_0、T_1、T_2、$\cdots$、T_q中的一个公式等价．

（7）令R为理论M的公式，R_1、R_2、$\cdots$、R_n为其逻辑成分．求证：当且仅当R为定理时，不论各公式R_1、R_2、$\cdots$、R_n对应的符号是0还是1，R对应的符号是0．

证明：

（1）根据定义，存在性成立；根据语法定理6，唯一性成立．

（2）若R长度为2，则R只能是R_1、R_2、$\cdots$、R_n其中之一，其对应的符号不取决于逻辑构造，故命题对长度为2的R成立．

设公式对长度小于k的R成立，对于长度为k的R：

若R为R_1、R_2、$\cdots$、R_n之一，命题显然成立；若R为$\neg A_j$或$\vee A_j A_k$，由于A_j（以及A_k）对应的符号不取决于逻辑构造；另一方面，根据语法定理6，R的表示形式唯一，故R对应的符号也不取决于逻辑构造．

（3）根据习题34（1）、习题34（2），S对应的符号唯一．R对应0，则$\neg R$对应1，若S对应1，则$\Rightarrow RS$对应1，矛盾，因此S对应0．

（4）考虑包含R的证明：若R为公理，对于公理模式1、公理模式2、公理模式3、公理模式4，无论A、B、C对应的符号是0还是1，R对应的符号均为0．若R不是公理，则根据习题34（3）可证．

（5） R逻辑上不可约，故R、非R的逻辑成分仅有公式R．非R对应的符号因R对应的符号而变，根据习题34（4），R、非R都不是定理．另一方面，如果M有矛盾，即存在定理S和定理非S，根据习题34（4），S、非S对应的符号均为0．但S对应的符号为0，非S对应的符号为1．根据习题34（1）、34（2），S对应的符号唯一，矛盾．因此M没有矛盾．

（6）唯一性：

若某个S_{i_1}与S_{i_2}与$\cdots$与S_{i_r}和T_0等价，则S_{i_1}与S_{i_2}与$\cdots$与S_{i_r}为定理，因此，S_{i_1}为定理，根据习题34（4），S_i1对应的符号恒为0，但设S_{i_1}为R'_1或R'_2或$\cdots$或$R'_n)$，令其中各公式R'_i对应的符号均为1，则S_{i_1}对应的符号为1，根据习题34（1）、习题34（2），矛盾．

若存在$(S_{i_1}$与S_{i_2}与$\cdots$与$S_{i_r}) \Leftrightarrow (S_{j_1}$与$S_{j_2}$与$\cdots$与$S_{j_{r'}})$，则序列$i_1$、$i_2$、$\cdots$、$i_r$和$j_1$、$j_2$、$\cdots$、$j_{r'}$必不完全相同，设$j_m$不在$i_1$、$i_2$、$\cdots$、$i_r$之中，则$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r}) \Rightarrow S_{j_m}$，设$S_{j_m}$为$R'_1$或$R'_2$或$\cdots$或$R'_n$，令其中各公式$R'_i$对应的符号均为1，则$S_{j_m}$对应的符号为1，而$S_{i_1}$、$S_{i_2}$、$\cdots$、$S_{i_r}$对应的符号均为0，因此$S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r}$对应的符号为0，故$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r}) \Rightarrow S_{j_m}$对应的符号为1，根据习题34（1）、习题34（2），矛盾．

综上，唯一性得证．

存在性：

先证引理：

引理1：对于R_1、R_2、$\cdots$、R_n构成的所有S_1、S_2、$\cdots$、S_p（$p=2^n$），非S_1或非S_2或$\cdots$或非S_p为定理．

令U_n为n个逻辑上不可约的不同公式构成的“非$S1$或非$S2$或非$\cdots$或非Sp”（$p = 2^n$）．对$n = 1$，R_1与非R_1为定理，显然命题成立．设公式对$n < k$成立，对于$n = k$，U_k等价于$(U_{k-1}$与$R_k)$或$(U_{k-1}$与非$R_n)$，等价于“R_n与非R_n”，显然命题成立，引理1得证．

引理2：对于R_1、R_2、$\cdots$、R_n构成的所有S_1、S_2、$\cdots$、S_p（$p = 2^n$），对任意$i \neq j$，S_i或S_j均为定理．

由于$i \neq j$，S_i或S_j中必有Ri和非Ri，故引理2得证．

引理3：对于R_1、R_2、$\cdots$、R_n构成的所有T_0、T_1、T_2、$\cdots$、T_q，则对任意i，R_i、非R_i分别等价于其中某个T_m、$T_{m'}$．

设S_1、S_2、$\cdots$、S_p中所有包含R_i的公式为S_{i_1}、S_{i_2}、$\cdots$、S_{i_r}，又因为U_{n-1}为真，故$(S_{i_1}$与S_{i_2}与$\cdots$与$S_{i_r}) \Leftrightarrow$ (非(U_{n-1})或$R_i)$，因此$(S_{i_1}$与S_{i_2}与$\cdots$与$S_{i_4}) \Leftrightarrow (U_{n-1} \Rightarrow R_i)$，故$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_4}) \Leftrightarrow R_i$．同理可证存在等价于非$R_i$的某个$T_{m'}$．引理3得证．

引理4：对于R_1、R_2、$\cdots$、R_n构成的所有S_1、S_2、$\cdots$、S_p（$p = 2^n$），则对任意i，S_1与S_2与$\cdots$与$S_i) \Leftrightarrow$ 非$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与S_p．

根据引理1，非S_1或非S_2或非$\cdots$或非S_p，则非$(S_1$与$S2$与$\cdots$与$S_i)$或非$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$，故$(S_1$与S_2与$\cdots$与$S_i) \Rightarrow$ 非$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$．

反过来，考虑$(S_1$与S_2与$\cdots$与$S_i)$或$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$，用分配律展开，根据引理2，各项均为真，故$(S_1$与S_2与$\cdots$与$S_i)$或$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$，因此非$(S_{i+1}$与S_{i+2}与$\cdots$与$S_p)$ $\Rightarrow (S_1$与S_2与$\cdots$与$S_i)$，引理4得证．

考虑任何一个基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造A_1、A_2、$\cdots$、A_m，A_1必为R_i的形式，根据引理3，存在性对公式A_1成立．

设存在性对公式A_1、A_2、$\cdots$、A_{i-1}成立，对于A_i：

如果A_i为R_j的形式，根据引理3，存在性成立．

如果A_i是$\neg A_j$的形式，若$A_j \Leftrightarrow T_0$，根据引理1，$A_i \Leftrightarrow (S_1$与S_2与$\cdots$与$S_p)$；在其他情况下，令$A_j \Leftrightarrow (S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})$，设剩余公式为$S_{j_1}$、$S_{j_2}$、$\cdots$、$S_{j_{r'}}$，则根据引理4，$A_i \Leftrightarrow$ 非$A_j \Leftrightarrow$ 非$(S_{i_1}$与S_{i_2}与$\cdots$与$S_{i_r}) \Leftrightarrow (S_{j_1}$与$S_{j_2}$与$\cdots$与$S_{j_{r'}})$．以上两种情况下，存在性均成立．

如果A_i是$\vee A_j A_k$的形式，若$A_j \Leftrightarrow T_0$或者$A_k \Leftrightarrow T_0$，则$A_i \Leftrightarrow T_0$；在其他情况下，令$A_j \Leftrightarrow (S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})$，$A_k \Leftrightarrow (S_{j_1}$与$S_{j_2}$与$\cdots$与$S_{j_{r'}})$，若$A_j$包含的各项与$A_k$包含的各项没有相同的，则$A_j$或$A_k$用分配律展开，各项均为真，故$A_i \Leftrightarrow T_0$，若$A_j$包含的各项与$A_k$包含的各项中有相同项$S_{l_1}$、$S_{l_2}$、$\cdots$、$S_{l_{r''}}$为相同项，则$A_i \Leftrightarrow S_{l_1}$与$S_{l_2}$与$\cdots$与$S_{l_{r''}}$．以上两种情况下，存在性均成立．

综上，存在性成立.

（7）根据习题34（4），必要性成立.

若R对应的符号恒为0，根据习题34（6），存在唯一的T_m，使$R \Leftrightarrow T_m$．如果$R \Leftrightarrow T_0$，则R为定理．否则，存在S_{i_1}、S_{i_2}、$\cdots$、S_{i_r}，使$R \Leftrightarrow (S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})$，则$S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r}$对应的符号恒为0，非$(S_{i_1}$与$S_{i_2}$与$\cdots$与$S_{i_r})$即(非$S_{i_1}$或非$S_{i_2}$或非$\cdots$或非$S_{i_r}$)，故其对应的符号恒为1，因此$S_{i_1}$、$S_{i_2}$、$\cdots$、$S_{i_r}$对应的符号均恒为0．但设$S_{i_1}$为$R'_1$或$R'_2$或$\cdots$或$R'_n$，令其中各公式$R'_i$对应的符号均为1，则$S_{i_1}$对应的符号为1，根据习题34（1）、习题34（2），矛盾.

注：

习题34（6）表明主合取范式的存在性和唯一性（同理可证主析取范式的存在性和唯一性）.

习题34（4）、（7）表明逻辑理论的可靠性.

习题34（5）表明逻辑理论的一致性.

习题 35.

令R_1、R_2、$\cdots$、R_n为理论M中逻辑上不可约的公式，将每个R_i对应符号0、1或2，对于基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造的一切公式，按照下列规则确定其对应的符号：$\neg 0 = 1$，$\neg 1 = 0$，$\neg 2 = 2$，$\vee 00 = \vee 01 = \vee 02 = \vee 10 = \vee 20 = \vee 22 = 0$，$\vee 11 = 1$，$\vee 12 = \vee 21 = 2$.

（*1*）求证：令R为R_1、R_2、$\cdots$、R_n的逻辑构造公式，求证：R对应的符号不取决于基于R_1、R_2、$\cdots$、R_n且包含R的逻辑构造.

（*2*）设理论M的公理仅包含公理模式*2*、公理模式*3*、公理模式*4*生成的公理，R是M的定理．求证：不论R的各逻辑成分对应的符号是0、1还是2，R对应的符号都是0．同时，如果S为逻辑上不可约的公式，并且对应的符号为2，则$(S$或$S) \Rightarrow S$对应的符号为2，进而，M不可能等价于一个符号与M相同并且仅包含公理模式*1*、公理模式*2*、公理模式*3*、公理模式*4*生成的公理的理论.

（*3*）对于仅包含公理模式公理模式*1*、公理模式*3*、公理模式*4*生成的公理的理论，适用下列规则：$\neg 0 = 1$，$\neg 1 = 0$，$\neg 2 = 2$，$\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = 0$，$\vee 11 = 1$，$\vee 12 = \vee 21 = 1$；$\vee 22 = 2$；对于仅包含公理模式公理模式*1*、公理模式*2*、公理模式*4*生成的公理的理论，适用下列规则：$\neg 0 = 1$，$\neg 1 = 2$，$\neg 2 = 0$，$\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 21 = 0$，$\vee 11 = \vee 12 = 1$；$\vee 22 = 2$．求证与（*1*）、（*2*）类似的结论.

（*4*）对于仅包含公理模式公理模式*1*、公理模式*2*、公理模式*3*生成的公理的理论，适用下列规则：$\neg 0 = 1$，$\neg 1 = 0$，$\neg 2 = 3$，$\neg 3 = 0$，$\vee 00 = \vee 01 = \vee 10 = \vee 02 = \vee 20 = \vee 03 = \vee 30 = \vee 23 = \vee 32 = 0$，$\vee 11 = 1$，$\vee 12 = \vee 21 = \vee 22 = 2$，$\vee 13 = \vee 31 = \vee 33 = 3$．求证与（*1*）、（*2*）类似的结论.

证明：

（1）类似习题34（2）可证.

（2）第一点：类似习题34（4）可证.

第二点：若公理模式1生成的公理是M的定理，则$(S或S) \Rightarrow S$对应的符号为0．又因为$(S或S) \Rightarrow S$对应的符号为2，类似习题34（1）、习题34（2），S对应的符号唯一，矛盾.

（3）类似习题35（1）、习题35（2）可证.

（4）类似习题35（1）、习题35（2）可证．注：习题35表明逻辑理论的独立性.

Chapter 2

集合论（Théorie des ensembles）

2.1 集合化公式（Relations collectivisantes）

元数学定义 25. 集合（*ensemble*）

在包含二元特别符号$\in$的理论中，项又称集合.

注：集合论中，项与集合为同义词，万物皆为集合.

记号定义 13. 属于（*appartenance*）

令T、U为语句，x为字母，则用“$T \in U$”表示“$\in TU$”（第三优先级）；“$T \notin U$”表示“非$(T \in U)$”（第三优先级）.

定义 1. 元素（*élément*）

如果$A \in B$，则称A为B的元素.

定义 2. 包含于（*contenu dans*），包含（*contenir*），子集（*partie/sous-ensemble*）

如果不包含字母z的公式$(\forall z)((z \in x) \Rightarrow (z \in y))$为真，则称$x$包含于$y$，$y$包含$x$，或者$x$是$y$的子集，记作$x \subset y$（第三优先级）.

记号定义 14. 非子集（*non partie/non sous-ensemble*）

“非$(x \subset y)$”记作$x \not\subset y$（第三优先级）.

替代规则 12.

令T、U、V为语句，x为字母，则$(V|x)(T \subset U)$和$(V|x)T \subset (V|x)U$相同.

证明：根据替代规则9、替代规则5可证.

形成规则 13.

令T、U为包含2元特别符号$\in$的理论M的项，则$T \subset U$是M的公式.

证明：根据形成规则8，可证.

定理 4. 子集的反身性

$x \subset x$.

证明：令z为不是常数的字母，则$(z \in x) \Rightarrow (z \in x)$，根据证明规则27可证.

定理 5. 子集的传递性

$((x \subset y)$与$(y \subset z)) \Rightarrow (x \subset z)$.

证明：令u为不是常数的字母，根据证明规则30，$(u \in x) \Rightarrow (u \in y)$、$(u \in y) \Rightarrow (u \in z)$，故$(u \in x) \Rightarrow (u \in z)$．根据证明规则31可证.

补充定理 1.

$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Leftrightarrow (\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$.

证明：

由于待证公式不包含字母，故可令x、y为不同字母且都不是常数.

令R为公式$(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$，根据证明规则32，$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x = y))$.

假设$(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x = y))$，则$R \Rightarrow (x = y)$．同时，根据公理模式6，$(x = y) \Rightarrow R$，故$R \Leftrightarrow x = y$．根据公理模式7，$\tau_x(R) = \tau_x(x = y)$．根据定理1，$y = y$，根据补充证明规则8，$(\exists x)(x = y)$，即$\tau_x(x = y) = y$，根据定理3，$y = \tau_x(R)$，根据证明规则27，$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$．故$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y)) \Rightarrow (\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$.

反过来，令x'、x''是与x、y、z不同的字母，假设$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$.

若$(\forall x')(\forall x'')((x'|x)R$与$(x''|x)R)$，根据证明规则30，$(x'|x)R$、$(x''|x)R$，因此$(x'|x)R \Leftrightarrow (x''|x)R$，根据证明规则27，$(\forall y)((x'|x)R \Leftrightarrow (x''|x)R)$，根据公理模式7，$\tau_y((x'|x)R) = \tau_y((x''|x)R)$，进而，$x' = \tau_y((x'|x)R)$、$x'' = \tau_y((x'|x)R)$，根据定理3，$x' = x''$，即$R$是$y$上的单一公式.

根据证明规则45，$R \Rightarrow (y = \tau_y(R))$．假设$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x))$，根据证明规则32，$(\forall x)(\forall y)R$，根据证明规则27，$R$为真，故$y = \tau_y(R)$．又因为$(\forall x)(x = \tau_y(R))$，根据证明规则27，$x = \tau_y(R)$，根据定理3，$x = y$，故$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y))) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y))$.

注：左边为本文的外延公理，右边是外延公理的另一种表述，包含相同元素的集合相等．本补充定理表明，外延公理的两种表述方式是等价的.

显式公理 1. 外延公理

$(\forall x)(\forall y)((x \subset y)$与$(y \subset x) \Rightarrow (x = y))$.

补充定理 2.

$(\forall z)((z \in x) \Leftrightarrow (z \in y)) \Rightarrow (x = y)$.

证明：根据显式公理1可证.

证明规则 48.

令R为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x、y为不同的字母，并且R不包含y，则在M中，$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$是$y$上的单一公式.

证明：令z、z'为不同于x且不出现在R中的字母．假设$(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow R)$与$(\forall x)((x \in z') \Leftrightarrow R)$，则$(\forall x)(((x \in z) \Leftrightarrow R)$与$(x \in z') \Leftrightarrow R))$，因此$(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow (x \in z'))$，即$(z \subset z')$与$(z' \subset z)$，根据显式公理1，$z = z'$，得证.

记号定义 15. 集合化（*collectivisante*）

如果公式R不包含y，x、y是不同的字母，则语句$(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$记作$Coll_x R$.

注：如果$Coll_x R$为真，则意味着满足R的x的集合存在.

元数学定义 26. 集合化公式（*relation collectivisante*），满足公式的元素集合（*ensemble de éléments tels que une relation*）

在包含*2*元特别符号$\in$ 的理论M中，如果R不包含y，x、y是不同的字母，如果$Coll_x R$是定理，则称在M中，R为x上的集合化公式，称不含y的项$\tau_y((\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R))$为满足$R$的$x$的集合，记作$\{x|R\}$.

补充定理 3.

$Coll_x(x \in y)$.

证明：$(x \in y) \Leftrightarrow (x \in y)$，得证.

补充定理 4. 罗素悖论，所有不属于自身的项不能组成集合

非$Coll_((x \notin x)$.

证明：令y为不是常数的字母，由于$y \notin y$或$y \in y$，故非$((y \in y) \Leftrightarrow (y \notin y))$，根据公理模式5，$(\exists x)($非$((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x)))$，因此，非$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x))$，根据证明规则27，$(\forall y)($非$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x)))$，因此，非$(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \notin x))$.

证明规则 49.

令R为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x、y为不同的字母，并且R不包含y，如果在M中，R是x上的集合化公式，则在M中，公式$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$是$y$上的函数性公式.

证明：根据证明规则48可证.

补充证明规则 11.

令R为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x为字母，如果在M中，R是x上的集合化公式，则$(x \in \{x|R\}) \Leftrightarrow R$是$M$的定理.

证明：根据定义，$Coll_x R$和$(\forall x)(x \in \{x|R\} \Leftrightarrow R)$相同，根据证明规则30可证.

补充证明规则 12.

令R、S为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x为字母，如果在M中，R是x上的集合化公式，且$R \Leftrightarrow S$，则S也是x上的集合化公式.

证明：由于$R \Leftrightarrow S$，因此$Collx_R \Leftrightarrow Coll_x S$，得证.

证明规则 50.

令R、S为包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*的等式理论M的公式，x为字母，如果在M中，R和S都是x上的集合化公式，则$(\forall x)(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow \{x|R\} \subset \{x|S\}$，$(\forall x)(R \Leftrightarrow S) \Leftrightarrow \{x|R\} = \{x|S\}$.

证明：根据补充证明规则11、显式公理1可证.

显式公理 2. 配对公理

$(\forall x)(\forall y)Coll_z(z = x$或$z = y)$.

注：本公理表明，任何两个项均可构成集合.

定义 3. 二元集合（*ensemble à deux éléments*），仅有一个元素的集合（*ensemble réduit à un élément*），仅有两个元素的集合（*ensemble réduit à deux éléments*）

$\{z|z = x^{-}z = y\}$称为二元集合，记作$\{x, y\}$．$\{x, x\}$称为仅有一个元素的集合，记作$\{x\}$.如果$x \neq y$，则$\{x, y\}$称为仅有两个元素的集合.

定义 4. 二元子集（*partie à deux éléments*）

如果某个二元集合是另一个集合的子集，则称其为二元子集.

补充定理 5.

$\{x, y\} = \{y, x\}$.

证明：根据证明规则50可证.

补充定理 6.

$x \in \{y\} \Leftrightarrow x = y$.

证明：根据补充证明规则12，$x \in \{y\} \Leftrightarrow (x = y^{-}x = y)$，得证.

补充定理 7.

$\{z|z = x\} = \{x\}$.

证明：$\{x\}$即$\{z|z = x$或$z = x\}$，根据证明规则50、公理模式1可证.

补充定理 8.

$(\{x\} \subset X) \Leftrightarrow (x \in X)$.

证明：

令z为不是常数的字母，$\{x\} \subset X$即$(\forall z)((z \in \{x\}) \Rightarrow (z \in X))$，根据补充定理6，$(\forall z)((z \in \{x\}) \Rightarrow (z \in X)) \Leftrightarrow (\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$．若$\{x\} \subset X$，则$(\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$，故$(x = x) \Rightarrow (x \in X)$，因此$x \in X$．

反过来，假设$x \in X$，则$(z = x) \Rightarrow (z \in X)$，进而$(\forall z)((z = x) \Rightarrow (z \in X))$．得证．

补充定理 9.

$(\{x\} = \{y\}) \Leftrightarrow (x = y)$.

证明：

令z为不是常数的字母，根据补充定理7、补充证明规则7，$z \in \{x\} \Leftrightarrow z = x$，$z \in \{y\} \Leftrightarrow z = y$．由于$\{x\} = \{y\}$，根据公理模式6，$z \in \{x\} \Leftrightarrow z \in \{y\}$，则$(z = x) \Leftrightarrow (z = y)$．根据证明规则27，$(\forall z)((z = x) \Leftrightarrow (z = y))$，根据证明规则30，$(x = x) \Leftrightarrow (x = y)$，根据定理1，$x = y$，故$(\{x\} = \{y\}) \Rightarrow (x = y)$．

反过来，根据证明规则44，$(x = y) \Rightarrow (\{x\} = \{y\})$．

补充替代规则 8.

“令R为公式，x、y、X、Y为不同字母，并且R不包含X和Y，则$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)Coll_x((\exists y)((y \in Y$与$R))$是公理”是公理模式．

证明：根据替代规则8可证．

公理模式 8. 搜集和并集公理模式

令R为公式，x、y、X、Y为不同字母，并且R不包含X和Y，则$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)Coll_x((\exists y)((y \in Y$与$R))$是公理．

注：该公理模式的含义是，对任何一个y值，能使公式R（含参数x、y）成立的x值，都属于某个集合，则对任何一个集合，它的所有元素y值对应的能使公式R成立的x值，构成一个集合．

证明规则 51. 分类定理

令P为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x为字母，A为不包含x的项，则在M中，“P与$x \in A$”是x上的集合化公式．

证明：

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论M_0，则M_0不包含任何常数：

令R为公式P与$x = y$，其中y是不同于x且不出现在P、A中的字母．根据证明规则27，$(\forall x)(R \Rightarrow x \in \{y\})$，即$(\{y\}|X)(R \Rightarrow x \in X)$．

由于x、y是不同字母，根据公理模式5、证明规则27，$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X))$，由于$A$不包含$x$、$y$，根据公理模式8、证明规则30，$Coll_x((\exists y)((y \in A$与$R))$．根据证明规则43，$(y \in Y$与$R) \Leftrightarrow (x = y$与$x \in A$与$R)$，由于$y$不出现在$P$、$A$中，根据证明规则33，$(\exists y)(y \in Y$与$R) \Leftrightarrow ((\exists y)(x = y))$与$x \in A$与$R)$．根据补充证明规则8，$(\exists y)(x = y)$，因此$(\exists y)(y \in Y$与$R) \Leftrightarrow (x \in A$与$R)$即$Coll_x(x \in A$与$R)$．

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立．

证明规则 52.

令R为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x为字母，A为不包含x的项，如果$R \Rightarrow (x \in A)$是M的定理，则在M中，R是x上的集合化公式．

证明：$R \Rightarrow (x \in A)$，因此$R \Leftrightarrow R$与$(x \in A)$，根据证明规则51可证．

补充证明规则 13.

令R为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的定理，x为字母，则(非$Coll_x(R)$)为真．

证明：

如果M存在矛盾，根据补充证明规则2，任何公式均为真．

如果M不存在矛盾，假设$Coll_x(R)$为真，根据补充证明规则11，$(x \in \{x|R\}) \Leftrightarrow R$，即$x \in \{x|R\}$，因此对任意公式$R'$，$R' \Rightarrow x \in \{x|R\}$，根据证明规则52，$R'$是$x$上的集合化公式．与补充定理4矛盾．故“非$Coll_x(R)$”．

补充定理 10. 所有的项不能组成集合

（*1*）非$(\exists y)(\forall x)(x \in y)$；

（*2*）$(\forall y)(\exists x)(x \notin y)$．

证明：根据补充证明规则13可证．

证明规则 53.

令T、A为包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的项，x和y为不同的字母，如果T不包含y，A不包含x和y，则在M中，$(\exists x)(y = T$与$x \in A)$是y上的集合化公式．

证明：令R为公式$y = T$，则$(\forall y)((y = T) \Rightarrow (y \in \{T\}))$，令$X$为不同于$y$且不出现在$R$的字母，则$(\forall x)(\exists X)(\forall y)((y = T) \Rightarrow (y \in X))$．根据公理模式8，$(\forall A)Colly((\exists x)((x \in A$与$y = T))$，根据证明规则30，$(\exists x)((x \in A$与$y = T)$是$y$上的集合化公式．

元数学定义 27. 形式为项的对象集合（*ensemble des objets de la forme d'un terme*）

令T、A为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的项，x和y为不同的字母，如果T不包含y，A不包含x和y，则称$\{y|(\exists x)(y = T$与$x \in A)\}$为“对于$x \in A$形式为T的对象集合”.

补充定理 11. 补集的存在性

$x \notin A$与$x \in X$是x上的集合化公式.

证明：根据证明规则51可证.

定义 5. （*complémentaire d'un ensemble*）

如果$A \subset X$，则称$\{x|x \notin A$与$x \in X\}$为A的补集，记作$\complement_X A$或$X - A$.

补充定理 12.

如果$A \subset X$，则$\complement_X(\complement_X A) = A$.

证明：根据补充证明规则12，$x \notin \{x|x \notin A$与$x \in X\} \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in A)$，又因为$x \in X \Rightarrow x \in A$，所以$((x \in X \Rightarrow x \in A)$与$x \in X) \Leftrightarrow x \in A$，进而$\complement_X(\complement_X A) = A$.

补充定理 13.

如果$A \subset X$，$B \subset X$，则$(A \subset B) \Leftrightarrow (\complement_X B \subset \complement_X A)$.

证明：令x为字母，$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$，因此$A \subset B \Leftrightarrow ((x \notin B) \Rightarrow (x \notin A))$，故$A \subset B \Leftrightarrow ((x \notin B)$与$(x \in X) \Rightarrow (x \notin A)$与$(x \in X))$，因此$A \subset B \Leftrightarrow \complement_X B \subset \complement_X A)$.

补充证明规则 14.

令R为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的定理，x为字母，则$Coll_x$(非R)为真.

证明：

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论M_0，则M_0不包含任何常数：

先证$((x \in y) \Leftrightarrow$ (非R)$) \Leftrightarrow (x \notin y)$.

若$(x \notin y)$，则$(x \in y) \Leftrightarrow$ (非R)即$((x \notin y)$或非R)与$((x \in y)$或R)，显然为真. 反过来，若$(x \in y) \Leftrightarrow$ (非R)，即$(x \notin y) \Leftrightarrow R$)，因此$x \notin y$.

由于“非$(x \in Y$与$x \notin Y)$”，故$(\forall x)(x \notin \complement_Y Y)$，则$(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$，即$(\exists X)(\forall x)(x \notin X) \Leftrightarrow (\exists X)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow$ (非R)$)$，得证.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

定理 6. 空集的存在性和唯一性

$(\forall x)(x \notin X)$是X上的函数性公式.

证明：

$(\forall x)(x \notin X)$即$(\forall x)$非$(x \in X)$，而$(\forall x)$非$(x \in X) \Rightarrow (\forall x)$非$(x \in X)$或$(\forall T)(\forall x)(x \in T)$. 根据证明规则33，$(\forall x)$非$(x \in X)$或$(\forall T)(\forall x)(x \in T) \Leftrightarrow (\forall T)(\forall x)($非$(x \in X)$或$(x \in T))$，即$(\forall T)(X \subset T)$. 因此，$(\forall x)(x \notin X) \Rightarrow (\forall T)(X \subset T)$.

若$(\forall x)(x \notin Y)$与$(\forall x)(x \notin Z)$，则$(\forall T)(Y \subset T)$、$(\forall T)(Z \subset T)$. 因此$Y \subset Z$、$Z \subset Y$. 根据显式公理1，$Y = Z$，即$(\forall x)(x \notin X)$是X上的单一公式.

另一方面，由于“非$(x \in Y$与$x \notin Y)$”，故$(\forall x)(x \notin \complement_Y Y)$，则$(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$，得证.

定义 6. 空集（*ensemble vide*），非空（*n'est pas l'ensemble vide*）

不包含X和x的项$\tau_X((\forall x)(x \notin X))$，称为空集，记作$\varnothing$.

如果$E \neq \varnothing$，则称E非空.

注：用形式语言表示，空集是$\overline{\overline{\tau\neg\neg\neg \in \overline{\tau\neg\neg \in \square}\square}\square}$.

补充定理 14.

$(\forall x)(x \notin X) \Leftrightarrow (X = \varnothing)$，$(\exists x)(x \in X) \Leftrightarrow (X \neq \varnothing)$.

证明：根据定理6、证明规则46可证.

补充定理 15.

$(\forall x)(x \notin \varnothing)$.

证明：根据补充定理14（1）、补充证明规则7可证.

补充定理 16.

（*1*）$\{x\} \neq \varnothing$；

（*2*）$\{\{x\}\} \neq \{\varnothing\}$ ；

（*3*）$\{\{\{x\}\}\} \neq \{\{\varnothing\}\}$.

证明：

（1）根据补充定理6，$x \in \{x\}$，根据公理模式5，$(\exists y)(y \in \{x\})$，根据补充定理14（2）可证.

（2）根据补充定理9、补充定理16（1）可证.

（3）根据补充定理9、补充定理16（2）可证.

补充定理 17.

（*1*）$(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$；

（*2*）$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \neq y$与$y \neq z$与$x \neq z)$；

（*3*）$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)(x \neq y$与$y \neq z$与$x \neq z$与$x \neq t$与$y \neq t$与$z \neq t)$.

证明：根据补充定理16、补充定理9，$\{\{\{\varnothing\}\}\}$、$\{\{\varnothing\}\}$、$\{\varnothing\}$、$\varnothing$互不相等，得证.

补充定理 18.

（*1*）$(\forall X)(\varnothing \subset X)$.

（*2*）$X \subset \varnothing \Rightarrow X = \varnothing$.

（*3*）$X \subset \{x\} \Leftrightarrow (X = \{x\})$或$(X = \varnothing)$.

（*4*）如果$(\forall y)(y \in X \Rightarrow y = x)$，则$(X = \{x\})$或$(X = \varnothing)$.

证明：

（1）令z为不是常数的字母，根据补充定理15，$z \notin \varnothing$，因此$(z \in \varnothing) \Rightarrow (z \in y)$，故$(\forall z)((z \in \varnothing) \Rightarrow (z \in y))$，得证.

（2）假设$X \not\subset \varnothing$，则$(\exists x)(x \in X)$，设$y \in X$，则$y \in \varnothing$，和补充定理15矛盾，得证.

（3）根据定理4、补充定理18（1），$(X = \{x\})$或$(X = \varnothing) \Rightarrow X \subset \{x\}$. 反过来，假设$X \subset \{x\}$与$X \neq \varnothing$，根据补充定理6，$(\forall z)((z \in X) \Rightarrow (z = x))$. 由于$X \neq \varnothing$，根据补充定理14（2），$(\exists x)(x \in X)$. 添加辅助常数$x$、$X$以及公理$x \in X$. 根据补充定理8，$\{x\} \subset X$，根据显式公理1，$X = \{x\}$，根据证明规则19得证.

（4）根据补充定理6，$y = x \Leftrightarrow y \in \{x\}$，因此$(\forall y)(y \in X \Rightarrow y = x) \Leftrightarrow X \subset \{x\}$，根据补充定理18（3）得证.

习题 36.

求证：$(x = y) \Leftrightarrow (\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$.

证明：

根据公理模式6、证明规则27，$(x = y) \Rightarrow (\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$. 反过来，假设$(\forall X)((x \in X) \Leftrightarrow (y \in X))$，根据证明规则31，$(\{x\}|X)((x \in X) \Rightarrow (y \in X))$，即$(x \in \{x\}) \Rightarrow (y \in \{x\})$，因此$y \in \{x\}$，根据补充定理6，$x = y$.

习题 37.

求证：

（*1*）$\varnothing \neq \{x\}$.

（*2*）$(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$.

证明：

（1）即补充定理16（1）.

（2）即补充定理17（1）.

习题 38.

如果$A \subset X$、$B \subset X$，求证：$(B \subset \complement_X A) \Leftrightarrow (\complement_X B \subset A)$、$(A \subset \complement_X B) \Leftrightarrow (\complement_X A \subset B)$.

证明：根据补充定理12、补充定理13可证.

习题 39.

求证：$X \subset \{x\} \Leftrightarrow (X = \{x\})$或$(X = \varnothing)$.

证明：即补充定理18（3）.

习题 40.

求证：$\varnothing = \tau_X(\tau_x(x \in X) \notin X)$.

证明：由于待证公式不包含X，故令X为不是常数的字母.

$\tau_x(x \in X) \notin X s$非$(\tau_x(x \in X) \in X)$，即非$(\exists x)(x \in X)$，根据证明规则29，$\tau_x(x \in X) \notin X \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin X)$，根据证明规则27，$(\forall X)(\tau_x(x \in X) \notin X \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin X))$，根据公理模式7，得证.

习题 41.

令M为包含特别符号$\in$的等式理论，并有显式公理*1'*：$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$，求证：显式公理*1*是$M$的定理.

证明：根据补充定理1可证.

2.2 有序对（Couples）

定理 7.

$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x'\},\{x',y'\}\} \Leftrightarrow (x = x'$与$y = y')$.

证明：

根据证明规则44，$(x = x'$与$y = y') \Rightarrow \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x'\},\{x',y'\}\}$.

反过来，假设$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x'\},\{x',y'\}\}$，若$x \neq x'$，根据补充定理9，$\{x\} \neq \{x'\}$，则$\{x\} = \{x',y'\}$，根据证明规则50，$(\forall x)((z = x) \Leftrightarrow (z = x')$或$(z = y))$，因此$x = x'$，矛盾. 故$x = x'$，同理可证$y = y'$.

记号定义 16. 有序对的记号（*signe d'un couple*），三元组的记号（*signe d'un triplet*），四元组的记号（*signe d'un quadlet*）

$\{\{x\},\{x,y\}\}$记作(x,y). $((x,y),z)$记作(x,y,z). $((x,y,z),t)$记作(x,y,z,t).

定义 7. 有序对（*couple*）

如果$(\exists x)(\exists y)(z = (x,y))$，则称$z$为有序对.

定义 8. 三元组（*triplet*）

如果$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(u = (x,y,z))$，则称$u$为三元组.

定义 9. 四元组（*triplet*）

如果$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)(u = ((x,y,z,t))$，则称$u$为三元组.

补充定理 19.

(x,y)为有序对.

证明：根据定理1，$(x,y)=(x,y)$，根据公理模式5，$(\exists u)(\exists v)((u,v)=(x,y))$，得证.

补充定理 20. 有序对的第一元素和第二元素存在且唯一

$(\exists y)(z=(x,y))$是x上的函数性公式，$(\exists x)(z=(x,y))$是y上的函数性公式.

证明：根据定理7可证.

定义 10. 有序对的第一元素（*première coordonnée d'un couple/première projection d'un couple*），有序对的第二元素（*seconde coordonnée d'un couple/seconde projection d'un couple*）

令z为有序对，则不包含x、y的项$\tau_x((\exists y)(z=(x,y)))$称为$z$的第一元素，记作$pr_1 z$，不包含$x$、$y$的项$\tau_y((\exists x)(z=(x,y)))$称为$z$的第二元素，记作$pr_2 z$.

记号定义 17. 用有序对表示字母（*remplacer le lettre par couple*）

如果某个字母z只能是有序对，则可以选择两个不会引起混淆的新字母，令第一个新字母是x，第二个新字母是y，此时，可用x表示$pr_1 z$，用y表示$pr_2 z$，在其他情况下用(x,y)表示z. 此时，公式中的"(x,y)为有序对与"可以省略.

注：
使用该记号的例子，如：
$\{z|(z\text{为有序对})\text{与}R\}$可以表示为$\{(x,y)|R\}$；
$(X_{pr_1 k}\cap Y_{pr_2 k})_{(k\text{为有序对})\text{与}k\in K}$可以表示为$(X_i\cap Y_j)_{(i,j)\in K}$，
在本文中，公式记号过于复杂的情况下，会使用这种表述方式，

补充定理 21.

（*1*）$(pr_1 z=x)\Leftrightarrow(\exists y)(z=(x,y))$；
（*2*）$(pr_2 z=y)\Leftrightarrow(\exists x)(z=(x,y))$.

证明：根据补充定理20、证明规则46可证.

补充定理 22.

（*1*）$(z=(x,y))\Leftrightarrow(z\text{为有序对})\text{与}(pr_1 z=x)\text{与}(pr_2 z=y)$.
（*2*）$(z=(x,y))\text{与}x\in X\text{与}y\in Y\Leftrightarrow(z\text{为有序对})\text{与}(pr_1 z\in X)\text{与}(pr_2 z\in Y)$.
（*3*）$(z=(pr_1 z,pr_2 z))\Leftrightarrow(z\text{为有序对})$.
（*4*）$pr_1(x,y)=x$，$pr_2(x,y)=y$.

证明：

（1）根据补充定理21（1）、补充定理21（2），$(z$为有序对$)$与$(pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)) \Leftrightarrow$
$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(z = (x', y')$与$z = (x, y'')$与$z = (x'', y))$.

根据定理7，$(z = (x', y')$与$z = (x, y'')$与$z = (x'', y))$等价于$(z = (x, y)$与$x = x'$与$x = x''$与$y = y'$与$y = y'')$，进而等价于$(z = (x, y))$与$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(x = x'$与$x = x''$与$y = y'$与$y = y'')$，根据定理1，$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(x = x'$与$x = x''$与$y = y'$与$y = y'')$，则
$(z$为有序对$)$与$(pr_1z = x)$与$(pr_2z = y) \Leftrightarrow (z = (x, y))$.

（2）根据补充定理20，$(\exists y)(z = (x, y))$是x上的函数性公式，$(\exists x)(z = (x, y))$是y上的函数性公式，根据补充证明规则10，$(pr_1z = x)$与$(x \in X) \Leftrightarrow (pr_1z \in X)$、$(pr_2z = y)$与$(y \in Y) \Leftrightarrow (pr_2z \in Y)$. 因此，$(z = (x, y))$与$x \in X$与$y \in Y \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)$与$x \in X$与$y \in Y$，进而等价于$(z$为有序对$)$与$(pr_1z \in X)$与$(pr_2z \in Y)$，得证.

（3）根据补充定理22（1），$(z = (pr_1z, pr_2z)) \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1z = pr_1z)$与$(pr_2z = pr_2z)$，得证.

（4）根据补充定理22（1）可证.

补充证明规则 15.

令R为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x、y为不同字母，z为与x、y不同的字母且R不包含z，则：

（*1*）$(\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$R) \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R$.

（*2*）$(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists z)((z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R)$.

（*3*）$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z$为有序对$) \Rightarrow (pr_1z|x)(pr_2z|y)R))$.

证明：

（1）根据补充定理22（1），$(\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$R) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((z$为有序对$)$与$(pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)$与$R)$.

根据证明规则33，$(\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$R) \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(\exists x)(\exists y)((pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)$与$R)$.

根据证明规则47，$(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)((\exists x)(z = (x, y))$与$R)$，根据补充定理21（2），
$(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)(R$与$(pr_2z = y))$.

根据替代规则9，$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R \Leftrightarrow (\exists y)(pr_1z|x)(R$与$(pr_2z = y))$，即等价于
$(\exists y)((pr_1z|x)R$与$(pr_2z = y))$，根据证明规则47、补充定理21（1），$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R \Leftrightarrow$
$(\exists y)((\exists x)(R$与$(pr_1z = x))$与$(pr_2z = y))$，即等价于$(\exists x)(\exists y)((pr_1z = x)$与$(pr_2z = y)$与$R)$.

综上，得证.

（2）根据补充证明规则15（1），$(\exists z)((z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R) \Leftrightarrow (\exists z)(\exists x)(\exists y)$
$(z = (x, y)$与$R)$，根据证明规则33，其等价于$(\exists z)(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$与$(\exists x)(\exists y)R$. 根据定理1，$(\exists z)(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$，因此其等价于$(\exists x)(\exists y)R$.

（3）令R'为非R，根据补充证明规则15（2），非$(\exists x)(\exists y)R' \Leftrightarrow$ 非$(\exists z)((z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R')$，即$(\forall x)(\forall y)($非非$R) \Leftrightarrow (\forall z)($非$(z$为有序对$)$或$(pr_1z|x)(pr_2z|y)$非非$R)$，因此$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z$为有序对$) \Rightarrow (pr_1z|x)(pr_2z|y)R))$.

定理 8. 两个集合的乘积的存在性

$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall z)((z \in Z) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$x \in X$与$y \in Y)$.

证明：

由于待证公式不含y，故令y为不是常数的字母.

根据证明规则53，$(\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X)$在z上是集合化公式，令$A_y = \{z|(\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X)\}$，则$(\forall z)((z \in A_y) \Leftrightarrow (\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X))$，根据公理模式5、证明规则27，$(\forall y)(\exists x)(\forall z)((z = (x, y)$与$x \in X) \Rightarrow (z \in A))$，根据公理模式8，$(\exists y)((y \in Y)$与$(\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X))$是$z$上的集合化公式，又因为$(\exists y)((y \in Y)$与$(\exists x)(z = (x, y)$与$x \in X)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)((z = (x, y))$与$x \in X$与$y \in Y)$，因此$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)(\forall z)((z \in Z) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$x \in X$与$y \in Y)$.

定义 11. 两个集合的乘积（*produit de deux ensembles*）

$\{z|(\exists x)(\exists y)((z = (x, y))$与$x \in X$与$y \in Y))\}$称为$X$和$Y$的乘积，记作$X \times Y$.

定理 9.

如果$A' \neq \varnothing$、$B' \neq \varnothing$，则$(A' \times B') \subset (A \times B) \Leftrightarrow (A' \subset A)$与$(B' \subset B)$.

证明：

令z为不是常数的字母.

$(A' \times B') \subset (A \times B)$等价于$(\forall z)(z \in (A' \times B') \Rightarrow z \in (A \times B))$，进而等价于$(\forall z)((\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$x \in A'$与$y \in B') \Rightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x, y)$与$x \in A$与$y \in B))$.

根据补充定理22（2），$(A' \times B') \subset (A \times B) \Leftrightarrow ((z$为有序对$)$与$pr_1z \in A'$与$pr_2z \in B' \Rightarrow (z$为有序对$)$与$pr_1z \in A$与$pr_2z \in B))$.

若$(A' \subset A)$与$(B' \subset B)$，则$pr_1z \in A' \Rightarrow pr_1z \in A$、$pr_2z \in B' \Rightarrow pr_2z \in B$，根据补充证明规则5（3），$(A' \times B') \subset (A \times B)$.

反过来，若$(A' \times B') \subset (A \times B)$，假设$x \in A'$，由于$B' \neq \varnothing$，故$(\exists y)(y \in B')$，即$\tau_y(y \in B') \in B'$，则$(x, \tau_y(y \in B)) \in (A' \times B')$，因此$(x, \tau_y(y \in B)) \in (A \times B)$，故$x \in A$，所以，$A' \subset A$，同理$B' \subset B$.

补充定理 23.

（1）$z \in X \times Y \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1z \in X)$与$(pr_2z \in Y)$.

（2）$(x, y) \in X \times Y \Leftrightarrow (x \in X)$与$(y \in Y)$.

（3）$X \times Y = X' \times Y' \Leftrightarrow X = X'$与$Y = Y'$.

证明：

（1）根据补充定理22（2）可证.

（2）根据补充定理23（1）、补充定理19可证.

（3）根据定理9可证.

定理 10.

$A \times B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing)$或$(B = \varnothing)$.

证明：假设$A \times B \neq \varnothing$，根据补充定理14（2），$(\exists x)(x \in (A \times B))$，即$\tau_x(x \in (A \times B)) \in X \times Y \Rightarrow (pr_1(\tau_x(x \in (A \times B))) \in X)$与$(pr_2(\tau_x(x \in (A \times B))) \in Y)$，则$A \neq \varnothing$、$B \neq \varnothing$.

反过来，若$A \neq \varnothing$、$B \neq \varnothing$，则$\tau_x(x \in A) \in A$、$\tau_y(y \in B) \in B$，故$(\tau_x(x \in A), \tau_y(y \in B)) \in (A \times B)$，因此$A \times B \neq \varnothing$. 得证.

补充定理 24.

（*1*）$(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow x = x'$与$y = y'$与$z = z'$.

（*2*）$(x, y, z, t) = (x', y', z', t') \Leftrightarrow x = x'$与$y = y'$与$z = z'$与$t = t'$.

证明：根据定理7可证.

习题 42.

令R为公式，x、y为不同字母，z为与x、y不同的字母且R不包含z. 求证：

（*1*）$(\exists x)(\exists y)R \Leftrightarrow (\exists z)((z$为有序对$)$与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R)$;

（*2*）$(\forall x)(\forall y)R \Leftrightarrow ((\forall z)((z$为有序对$) \Rightarrow (pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R))$.

证明：

（1）即补充证明规则15（2）；

（2）即补充证明规则15（3）.

2.3 对应（Correspondances）

定义 12. 图（*graphe*）

如果$(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z$为有序对$))$，则称$G$为图.

补充定理 25.

$G' \subset G$，G为图，则G'为图.

证明：令z为不是常数的字母. 由于G是图，故$(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z$为有序对$))$. 又因为$G' \subset G$，故$(\forall z)(z \in G' \Rightarrow z \in G)$，根据证明规则27、证明规则30，$(\forall z)(z \in G' \Rightarrow (z$为有序对$))$，得证.

补充定理 26.

$X\times Y$为图.

证明：令z为不是常数的字母，根据补充定理23（1），$z\in X\times Y\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_1z\in X)$与$(pr_2z\in Y)$，因此，$z\in X\times Y\Rightarrow(z$为有序对$)$，进而$(\forall z)(z\in X\times Y\Rightarrow(z$为有序对$))$，得证.

定义 13. 通过图对应（*correspond par graphe*）

令G为图，如果$(x,y)\in G$，则称y通过G对应x.

元数学定义 28. 生成图的公式（*relation qui admet un graphe*），公式的图（*graphe de relation*）

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，令R为公式，如果$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow R))$，则称$R$为对于$x$、$y$生成图$G$的公式．项$\tau_G((G$为图$)$与$((x,y)\in G\Leftrightarrow R))$称为公式$R$关于$x$、$y$的图.

补充证明规则 16.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，令R为对于x、y生成图G的公式，则：

（*1*）$(x,y)\in G\Leftrightarrow R$.

（*2*）如果R不包含z，则$z\in G\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R$.

证明：

（1）根据证明规则21可证.

（2）根据补充证明规则16（1），$(z$为有序对$)$与$(pr_1z,pr_2z)\in G\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R$，根据补充定理22（3），$(z=(pr_1z,pr_2z))$与$(pr_1z,pr_2z)\in G\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R$，根据证明规则43，$(z=(pr_1z,pr_2z))$与$z\in G\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R$.

由于G为图，因此$z\in G\Rightarrow(z$为有序对$)$，进而$z\in G\Rightarrow z=(pr_1z,pr_2z)$，故$z\in G\Leftrightarrow(z$为有序对$)$与$(pr_1z|x)(pr_2z|y)R$.

补充定理 27.

G_1、G_2为图，则：

（*1*）如果$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G_1\Leftrightarrow(x,y)\in G_2)$，则$G_1{=}G_2$.

（*2*）如果$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G_1\Rightarrow(x,y)\in G_2)$，则$G_1\subset G_2$.

证明：

（1）令z为不是常数的字母．故$(pr_1z,pr_2z)\in G_1\Leftrightarrow(pr_1z,pr_2z)\in G_2$，根据补充定理22（3），$(z=(pr_1z,pr_2z))$与$(pr_1z,pr_2z)\in G_1\Leftrightarrow(z=(pr_1z,pr_2z))$与$(pr_1z,pr_2z)\in G_2$，因此，$(z=(pr_1z,pr_2z))$与$z\in G_1\Leftrightarrow(z=(pr_1z,pr_2z))$与$z\in G_2$，故$z\in G_1\Leftrightarrow z\in G_2$，得证.

（2）与补充定理27（1）同理可证.

补充证明规则 17. 公式的图的唯一性

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y生成图的公式，则R关于x、y的图是唯一的.

证明：设G_1、G_2均为R的图，$(x,y) \in G_1 \Leftrightarrow R$，$(x,y) \in G_2 \Leftrightarrow R$，因此$(x,y) \in G_1 \Leftrightarrow (x,y) \in G_2$，根据补充定理27（1）可证.

补充证明规则 18.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，Z为不同于x、y的字母，且R不包含Z，如果$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$，则$R$为生成图的公式.

证明：

由于$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$不包含$x$、$y$，故令$x$、$y$为不是常数的字母.

添加辅助常数Z，令$(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$为公理，则$R \Rightarrow (x,y) \in Z$.

根据证明规则51，$z \in Z$与(z为有序对)与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$是z上的集合化公式. 令G为$\{z | z \in Z$与(z为有序对)与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R\}$，则$z \in G \Leftrightarrow z \in Z$与($z$为有序对)与$(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)R$，即($z \in G \Rightarrow$ (z为有序对))，因此，G为图.

进而，$(x,y) \in G \Leftrightarrow (x,y) \in Z$与($(x,y)$为有序对)与$(pr_1(x,y)|x)(pr_2(x,y)|y)R$. 根据补充定理20，$(x,y)$为有序对，根据补充定理22（4），$pr_1(x,y) = x$、$pr_2(x,y) = y$. 因此，$(pr_1(x,y)|x)(pr_2(x,y)|y)R \Leftrightarrow R$，故$(x,y) \in G \Leftrightarrow (x,y) \in Z$与$R$，又因为$R \Rightarrow (x,y) \in Z$，因此$(x,y) \in G \Leftrightarrow R$.

综上，根据证明规则19，得证.

补充证明规则 19.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，T为不包含x、y的项，且字母x、y不是M的常数，如果$(R \Rightarrow (x,y) \in T)$，则$R$为生成图的公式.

证明：由于$R \Rightarrow (x,y) \in T$且$x$、$y$不是常数，根据证明规则27，因此$(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in T)$，由于$T$不包含$x$、$y$，令$Z$为不同于$x$、$y$的字母且$R$不包含$Z$，根据替代规则9，$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$，根据补充证明规则18可证.

补充证明规则 20.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，A、B为项，x、y为不同的字母，且A、B均不包含x、y，则“$x \in A$与$y \in B$”为生成图的公式.

证明：根据补充定理23，($x \in A$与$y \in B$) $\Rightarrow (x,y) \in A \times B$，根据补充证明规则19可证.

定理 11. 图的第一射影和第二射影存在且唯一

G为图，则有且仅有一个A满足$(\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow x \in A$，有且仅有一个$B$满足$(\exists x)$ $((x,y) \in G) \Leftrightarrow y \in B$.

证明：根据证明规则53，$(\exists z)(x=pr_1 z$与$z\in G)$为集合化公式．令$A=\{x|(\exists z)(x=pr_1 z$与$(z$为有序对$)$与$z\in G)\}$，根据补充证明规则11，$(\exists z)(x=pr_1 z$与$(z$为有序对$)$与$z\in G)\Leftrightarrow x\in A$．

由于G为图，故$z\in G\Rightarrow(z$为有序对$)$，因此$(z$为有序对$)$与$z\in G\Leftrightarrow z\in G$．

根据补充定理21（1），$(\exists z)(x=pr_1 z$与$z\in G)\Leftrightarrow(\exists z)((\exists y)(z=(x,y))$与$z\in G)$，后者即$(\exists z)(\exists y)(z=(x,y)$与$z\in G)$，即$(\exists y)(\exists z)(z=(x,y)$与$z\in G)$．

根据补充证明规则10，$(\exists z)(z=(x,y)$与$z\in G)\Leftrightarrow(x,y)\in G$．综上，$x\in A\Leftrightarrow(\exists y)(x,y)\in G$．$A$的存在性得证．

A的唯一性，根据显式公理1可证．同理可证B的存在性和唯一性．

定义 14. 图的第一射影（*première projection d'un graphe*），图的定义域（*ensemble de définition d'un graphe*），图的第二射影（*seconde projection d'un graphe*），值域（*ensemble des valeurs d'un graphe*）

G为图，则$\{x|(\exists y)((x,y)\in G))\}$称为$G$的第一射影，或称为$G$的定义域，记作$pr_1G$；$\{y|(\exists x)((x,y)\in G))\}$称为$G$的第二射影，或称为$G$的值域，记作$pr_2G$．

补充证明规则 21.

包含2元特别符号$\in$和显式公理*1*、显式公理*2*、公理模式*8*的等式理论M中，R为不包含字母G的公式，如果$(\exists y)R$或者$(\exists x)R$是M的定理，则“非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow R))$”是$M$的定理．

证明：

若$(\exists y)R$，假设$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow R))$，令$G$为该图，则$(\exists y)((x,y)\in G)\Leftrightarrow(\exists y)R$，因此$(\exists y)((x,y)\in G)$，根据定理11，$(\exists A)(\forall x)(x\in A)$，与补充定理10矛盾．同理可证$(\exists x)R$为真的情况．

补充定理 28.

（*1*）非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow x=y))$；

（*2*）非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow x\in y))$；

（*3*）非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow x\subset y))$；

（*4*）非$(\exists G)((G$为图$)$与$(\forall x)(\forall y)((x,y)\in G\Leftrightarrow x=\{y\}))$．

证明：根据补充证明规则21可证．

补充定理 29.

$(x,y)\in G\Rightarrow x\in pr_1G$，$(x,y)\in G\Rightarrow y\in pr_2G$．

证明：假设$(x,y)\in G$，则$(\exists y)((x,y)\in G)$，根据补充证明规则11，$x\in pr_1G$．

同理可证$y\in pr_2G$．

补充定理 30.

G为图，则$G \subset pr_1G \times pr_2G$.

证明：令x、y为不是常数的字母．设$(x,y) \in G$．根据补充定理29，$x \in pr_1G$，$y \in pr_2G$．根据补充定理22（1），$(x,y) \in pr_1G \times pr_2G$．即$(x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in pr_1G \times pr_2G$，根据补充定理27（2）得证．

补充定理 31.

（1）$\varnothing$为图.

（2）G为图，如果$pr_1G = \varnothing$或$pr_2G = \varnothing$，则$G = \varnothing$.

（3）$pr_1\varnothing = \varnothing$，$pr_2\varnothing = \varnothing$.

（4）如果$X \neq \varnothing$，$Y \neq \varnothing$，则$pr_1(X \times Y) = X$，$pr_2(X \times Y) = X$.

证明：

（1）根据补充定理15可证.

（2）根据补充定理30，$G \subset \varnothing$，根据补充定理18（2）得证.

（3）令x、y为不是常数的字母，根据补充定理15，$(x,y) \notin \varnothing$，因此“非$(\exists y)((x,y) \in \varnothing)$”，即$x \notin pr_1\varnothing$，根据补充定理14（1）可证.

（4）$\{x|(\exists y)((x,y) \in X \times Y))\} = \{x|(\exists y)(x \in X$与$y \in Y))\}$，等于$\{x|x \in X$与$(\exists y)(y \in Y)\}$，等于$\{x|x \in X\}$，得证.

补充定理 32.

G_1、G_2为图，且$G_1 \subset G_2$，则$pr_1G_1 \subset pr_1G_2$，$pr_2G_1 \subset pr_2G_2$.

证明：令x、y为不是常数的字母，由于$G_1 \subset G_2$，因此$(x,y) \in G_1 \Rightarrow (x,y) \in G_2$.

根据证明规则31，$(\exists y)((x,y) \in G_1 \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G_2$，$(\exists x)((x,y) \in G_1 \Rightarrow (\exists x)((x,y) \in G_2$，根据证明规则50可证.

定义 15. 对应（*correspondance*），对应的图（*graphe d'une correspondance*）、出发域（*ensemble de départ*）、到达域（*ensemble d'arrivée*），通过一个对应对应（*correspond par une correspondance*）、对应的定义域（*ensemble de définition d'une correspondance/domaine d'une correspondance*）、对应的值域（*ensemble des valeurs d'une correspondance/image d'une correspondance*）

G为图，如果$pr_1G \subset A$且$pr_2G \subset B$，则称三元组(G,A,B)为A到B的对应，称G为(G,A,B)的图，A为(G,A,B)的出发域，B为(G,A,B)的到达域．如果$(x,y) \in G$，则称y通过(G,A,B)对应x，pr_1G称为(G,A,B)的定义域，pr_2G称为(G,A,B)的值域.

定义 16. 元素到元素的公式（*relation entre un élément et un élément*）、公式定义的对应（*correspondance définie par la relation*）

如果R为对于x、y生成图G的公式，A、B满足$pr_1G \subset A$、$pr_2G \subset B$，则称R为对于x、y从A的元素到B的元素的公式，(G,A,B)称为R定义的对于x、y的A到B的对应.

补充定理 33.

G为图，则$(x \in X$与$(x,y) \in G)$为对于x、y生成图G'的公式，并且pr_2G'=$\{y|(\exists x)(x \in X$与$(x,y) \in G)\}$.

证明：令$G' = \{z|pr_1z \in X$与$z \in G\}$，则$G' \subset G$，根据补充定理25，G'为图．根据补充定理22（4），$(x,y) \in G' \Leftrightarrow (x \in X$与$(x,y) \in G)$，根据公理模式5，$(x \in X$与$(x,y) \in G)$为对于$x$、$y$生成图的公式．又因为$(x,y) \in G' \Leftrightarrow (x \in X$与$(x,y) \in G)$，因此$pr_2G' = \{y|(\exists x)(x \in X$与$(x,y) \in G)\}$.

定义 17. 在图下的像（*image par une image*），在对应下的像（*image par une image correspond*）

G为图，则$\{y|(\exists x)(x \in X$与$(x,y) \in G)\}$称为X在G下的像，记作$G\langle X\rangle$．令F为对应，且F的图为G，则X在G下的像也称为X在F下的像．

补充定理 34.

G为图，则$G\langle X\rangle \subset pr_2G$.

证明：由于$z \in G\langle X\rangle \Leftrightarrow (\exists x)(x \in X$与$(x,y) \in G)$，$z \in pr_2G \Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in G))$，根据证明规则31，$z \in G\langle X\rangle \Rightarrow z \in pr_2G$，得证．

补充定理 35.

G为图，则$G\langle pr_1G\rangle = pr_2G$.

证明：根据公理模式5，$(x,y) \in G \Rightarrow (\exists x)((x,y) \in G)$，因此，$(x \in \{y|(\exists x)((x,y) \in G))\}$与$(x,y) \in G) \Leftrightarrow (x,y) \in G$，得证．

补充定理 36.

G为图，则$G\langle\varnothing\rangle = \varnothing$.

证明：根据补充定理15，$x \notin \varnothing$，则非$(x \in \varnothing$与$(x,y) \in G)$，因此非$(\exists x)(x \in \varnothing$与$(x,y) \in G)$，即$(\exists x)(x \in \varnothing$与$(x,y) \in G) \Leftrightarrow x \in \varnothing$，故$G\langle\varnothing\rangle = \varnothing$.

定理 12.

G为图，则$X \subset Y \Rightarrow G\langle X\rangle \subset G\langle Y\rangle$.

证明：根据证明规则50可证．

定理 13.

G为图，$pr_1G \subset A$，则$G\langle A\rangle = pr_2G$.

证明：根据定理12、补充定理32、补充定理34、显式公理1可证．

定义 18. 切割（*coupe*）

令G为图，x为字母，则称$G\langle\{x\}\rangle$为G对x的切割，也可以记作$G(x)$．令F为A到B的对应，其图为G，则$G\langle\{x\}\rangle$也称为F对x的切割，记作$F\langle\{x\}\rangle$或$F(x)$．

补充定理 37.

G为图，则$y\in G\langle\{x\}\rangle\Leftrightarrow(x,y)\in G$．

证明：$y\in G\langle\{x\}\rangle\Leftrightarrow(\exists x')(x'\in\{x\}$与$(x',y)\in G))$，即$y\in G\langle\{x\}\rangle\Leftrightarrow(\exists x')(x'=x$与$(x',y)\in G))$，根据证明规则43，$y\in G\langle\{x\}\rangle\Leftrightarrow(\exists x')(x'=x$与$(x,y)\in G))$，因此，$y\in G\langle\{x\}\rangle\Leftrightarrow(\exists x')(x'=x)$与$(x,y)\in G)$．根据补充证明规则8，$(\exists x')(x'=x)$，因此，$y\in G\langle\{x\}\rangle\Leftrightarrow(x,y)\in G$．

补充定理 38.

G、G'均为图，则：

（*1*）$G\subset G'\Leftrightarrow(\forall x)(G\langle x\rangle\subset G'\langle x\rangle)$．

（*2*）$G\subset G'\Rightarrow G\langle A\rangle\subset G'\langle A\rangle$．

证明：

（1）根据补充定理37可证．

（2）由于$G\subset G'$，因此$(x,y)\in G\Rightarrow(x,y)\in G'$，故$x\in A$与$(x,y)\in G\Rightarrow x\in A$与$(x,y)\in G'$，因此$(\exists x)(x\in A$与$(x,y)\in G)\Rightarrow(\exists x)(x\in A$与$(x,y)\in G')$，得证．

补充定理 39. 逆图是图

（*1*）$(z$为有序对$)$与$(pr_2z,pr_1z)\in G)$是z上的集合化公式．

（*2*）$\{z|(z$为有序对$)$与$(pr_2z,pr_1z)\in G)\}$为图．

证明：

（1）如果$(z$为有序对$)$与$(pr_2z,pr_1z)\in G)$，根据补充定理29，$pr_2z\in pr_1G$，$pr_1z\in pr_2G$，故$z\in pr_2G\times pr_1G$，根据证明规则52可证．

（2）根据定义可证．

定义 19. 逆图（*graphe réciproque*）

G为图，则$\{z|(z$为有序对$)$与$(pr_2z,pr_1z)\in G)\}$称为G的逆图，记作G^{-1}．

补充定理 40.

G为图，则$(x,y)\in G\Leftrightarrow(y,x)\in G^{-1}$．

证明：根据定义，$(y,x)\in G^{-1}\Leftrightarrow((y,x)$为有序对$)$与$(x,y)\in G$，根据补充定理19，$(y,x)$为有序对，得证．

补充定理 41.

$\varnothing^{-1}=\varnothing$．

证明：令z为不是常数的字母，则$z \in \varnothing^{-1} \Leftrightarrow$ (z为有序对)与$(pr_2 z, pr_1 z) \in \varnothing$，$z \notin \varnothing^{-1} \Leftrightarrow$ ($z$fl为有序对)或$(pr_2 z, pr_1 z) \notin \varnothing$，故$(\forall z) z \notin \varnothing^{-1}$，因此$\varnothing^{-1} = \varnothing$.

补充定理 42.

G为图，则$pr_1 G^{-1} = pr_2 G$，$pr_2 G^{-1} = pr_1 G$.

证明：$pr_1 G^{-1}$即$\{y | (\exists x)((x, y) \in G^{-1}))\}$，因此，$pr_1 G^{-1} = \{y | (\exists x)((y, x) \in G))\}$，即$pr_1 G^{-1} = pr_2 G$，同理可证$pr_2 G^{-1} = pr_1 G$.

补充定理 43.

$(X \times Y)^{-1} = Y \times X$.

证明：令z为不是常数的字母，$z \in (X \times Y)^{-1} \Leftrightarrow \{z | (z$为有序对$)$与$(pr_2 z, pr_1 z) \in (X \times Y)\}$. 根据补充定理23（1），$z \in (X \times Y) \Leftrightarrow$ (z为有序对)与$(pr_1 z \in X)$与$(pr_2 z \in Y)$，因此，$z \in (X \times Y)^{-1} \Leftrightarrow \{z | (z$为有序对$)$与$pr_2 z \in X$与$pr_1 z \in Y\}$. 根据补充定理23（1），得证.

补充定理 44.

G为图，则$(G^{-1})^{-1} = G$.

证明：令z为不是常数的字母，$z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow$ (z为有序对)与$(pr_2 z, pr_1 z) \in G^{-1})$. 根据补充定理40，$(pr_2 z, pr_1 z) \in G^{-1} \Leftrightarrow (pr_1 z, pr_2 z) \in G$，根据补充定理22（3），$z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (z = (pr_1 z, pr_2 z))$与$(pr_1 z, pr_2 z) \in G)$. 根据证明规则43，$z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (z = (pr_1 z, pr_2 z))$与$z \in G)$，根据补充定理22（3），$z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow$ (z为有序对)与$z \in G$，又因为$z \in G \Rightarrow$ (z为有序对)，因此，$z \in (G^{-1})^{-1} \Leftrightarrow z \in G$，得证.

补充定理 45.

G_1、G_2为图，则：

（*1*）$G_1 \subset G_2 \Leftrightarrow {G_1}^{-1} \subset {G_2}^{-1}$.

（*2*）如果$G_1 \subset G_2$，则$(G_2 - G_1)^{-1} = {G_2}^{-1} - {G_1}^{-1}$.

证明：

（1）根据补充定理40可证.

（2）根据定义，$(x, y) \in (G_2 - G_1)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in G_2$与$(y, x) \notin G_1$，得证.

定义 20. 在图下的原像（*image réciproque par une image*）

G为图，$G^{-1}\langle X \rangle$称为X在G下的原像.

定义 21. 对称图（*graphe symétrique*）

对于图G，如果$G = G^{-1}$，则称G是对称图.

补充定理 46. 逆对应是对应

如果(G, A, B)为A到B的对应，则(G^{-1}, B, A)为B到A的对应.

证明：根据定义和补充定理39，G、G^{-1}为图，$pr_1 G \subset A$ˇ$pr_2 G \subset B$，根据补充定理42，$pr_1 G^{-1} \subset B$，$pr_2 G^{-1} \subset A$，因此(G^{-1}, B, A)为B到A的对应.

定义 22. 逆对应（*correspondance réciproque*），在对应下的原像（*image réciproque par une corespondance*）

令F为A到B的对应，且F的图为G，则B到A的对应(G^{-1}, B, A)，称为F的逆对应，记作F^{-1}．X在G下的原像，也称为X在F下的原像.

补充定理 47. 图的复合是图

G、G'为图，则$(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G') \Rightarrow (x,z) \in pr_1 G \times pr_2 G'$，且$(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G')$为生成图的公式.

证明：根据补充定理28，$(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G') \Rightarrow (x \in pr_1 G$与$z \in pr_2 G')$，根据补充定理23（1），$(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G') \Rightarrow (x,z) \in pr_1 G \times pr_2 G'$．根据补充证明规则18，可知其为生成图的公式.

定义 23. 图的复合（*composée de deux graphes*）

令G、G'为图，则公式$(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G')$关于x、z的图，称为G和G'的复合，记作$G' \circ G$或者$G'G$.

定理 14.

G、G'为图，则$(G' \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ G'^{-1}$.

证明：令z、x为不是常数的字母，根据补充定理39，$(x,y) \in G$与$(y,z) \in G' \Leftrightarrow (z,y) \in G'^{-1}$与$(y,x) \in G'^{-1}$，即$(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G') \Leftrightarrow (\exists y)((z,y) \in G'^{-1}$与$(y,x) \in G'^{-1})$，根据补充证明规则16（1），$(x,z) \in G' \circ G \Leftrightarrow (z,x) \in G^{-1} \circ G'^{-1}$，根据补充定理39，$(z,x) \in (G' \circ G)^{-1} \Leftrightarrow (z,x) \in G^{-1} \circ G'^{-1}$，根据补充定理27（1）可证.

定理 15. 图的复合的结合律

G_1、G_2、G_3为图，则$(G_3 \circ G_2) \circ G_1 = G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$.

证明：$(x,t) \in (G_3 \circ G_2) \circ G_1 \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G_1$与$(\exists z)((y,z) \in G_2$与$(z,t) \in G_3))$，根据证明规则33，$(x,t) \in (G_3 \circ G_2) \circ G_1 \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)((x,y) \in G_1$与$(y,z) \in G_2$与$(z,t) \in G_3)$．同理可得，$(x,t) \in G_3 \circ (G_2 \circ G_1) \Leftrightarrow (\exists z)(\exists y)((x,y) \in G_1$与$(y,z) \in G_2$与$(z,t) \in G_3)$．根据补充定理27（1）可证.

定理 16.

G、G'为图，则$G' \circ G\langle A \rangle = G'\langle G\langle A \rangle \rangle$.

证明：令z为不是常数的字母，根据证明规则33，$z \in G' \circ G\langle A \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(x \in A$与$(x,y) \in G$与$(y,z) \in G')$，故$z \in G \circ G'\langle A \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in G\langle A \rangle$与$(y,z) \in G')$，即$z \in G \circ G'\langle A \rangle \Leftrightarrow z \in G'\langle G\langle A \rangle \rangle$．得证.

补充定理 48.

G、G'为图，则$pr_1(G' \circ G) = G^{-1}\langle pr_1 G' \rangle$.

证明：令x为不是常数的字母，则$x \in pr_1(G \circ G') \Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in G' \circ G))$，即$(\exists z)(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G')$. 同时，$x \in G^{-1}\langle pr_1 G' \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_1 G'$与$(y,x) \in G^{-1})$，即$x \in G^{-1}\langle pr_1 G' \rangle \Leftrightarrow (\exists y)((\exists z)((y,z) \in G')$与$(y,x) \in G^{-1})$，因此，$x \in G^{-1}\langle pr_1 G' \rangle \Leftrightarrow (\exists z)(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G')$，得证.

补充定理 49.

G、G'为图，则$pr_2(G' \circ G) = G'\langle pr_2 G \rangle$.

证明：令x为不是常数的字母，则$x \in pr_2(G' \circ G) \Leftrightarrow (\exists z)((z,x) \in G \circ G'))$，即$(\exists z)(\exists y)((z,y) \in G'$与$(y,x) \in G)$. 同时，$x \in G'\langle pr_2 G \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G'$与$(y,x) \in G)$，即$x \in G'\langle pr_2 G \rangle \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)((z,y) \in G'$与$(y,x) \in G)$，得证.

补充定理 50.

G为图，则$X \subset pr_1 G \Leftrightarrow X \subset G^{-1}\langle G\langle X \rangle \rangle$.

证明：假设$X \subset pr_1 G$，令x为不是常数的字母，则$x \in X \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$，因此$x \in X \Rightarrow (\exists y)(x \in X$与$(x,y) \in G)$，根据公理模式5，$x \in X$与$(x,y) \in G \Rightarrow (\exists z)(z \in X$与$(z,y) \in G)$，故$x \in X \Rightarrow (\exists z)(z \in X$与$(z,y) \in G)$.

同时，根据补充定理40，$(x,y) \in G \Leftrightarrow (y,x) \in G^{-1}$，则$x \in X \Rightarrow (\exists y)((y,x) \in G^{-1})$. 因此，$x \in X \Rightarrow (\exists y)((\exists z)(z \in X$与$(z,y) \in G)$与$(y,x) \in G^{-1})$. 进而，$X \subset pr_1 G \Rightarrow X \subset G^{-1}\langle G\langle X \rangle \rangle$. 反过来，根据补充定理34，$G^{-1}\langle G\langle X \rangle \rangle \subset pr_2 G^{-1}$，根据补充定理42，$G^{-1}\langle G\langle X \rangle \rangle \subset pr_1 G$. 故$X \subset G^{-1}\langle G\langle X \rangle \rangle \Rightarrow X \subset pr_1 G$. 综上，得证.

补充定理 51.

（*1*）G_1、G_2、G'_1、G'_2为图，$G_1 \subset G_2$，$G'_1 \subset G'_2$，则$G'_1 \circ G_1 \subset G'_2 \circ G_2$.

（*2*）G、G'为图，则$pr_1(G' \circ G) \subset pr_1 G$，$pr_2(G' \circ G) \subset pr_2 G'$.

证明：

（1）由于$G_1 \subset G_2$，$G'_1 \subset G'_2$，则$(x,y) \in G_1 \Rightarrow (x,y) \in G_2$，$(y,z) \in G'_1 \Rightarrow (y,z) \in G'_2$，因此$(\exists y)((x,y) \in G_1$与$(y,z) \in G'_1) \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G_2$与$(y,z) \in G'_2)$，根据证明规则50得证.

（2）$(\exists z)(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G') \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$与$(\exists z)(\exists y)(y,z) \in G'$. 因此$(\exists z)(\exists y)((x,y) \in G$与$(y,z) \in G') \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$. 根据证明规则50，$pr_1(G' \circ G) \subset pr_1 G$得证. 同理可证$pr_2(G' \circ G) \subset pr_2 G'$.

补充定理 52.

G为图，则：

（*1*）$G \circ \varnothing = \varnothing$，$\varnothing \circ G = \varnothing$.

（*2*）当且仅当$G = \varnothing$时，$G^{-1} \circ G = \varnothing$.

证明：

（1）令y为不是常数的字母，则$(x,z) \in G\circ\varnothing \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in \varnothing$与$(y,z) \in G)$，非$(x,y)\in\varnothing$，因此非$(x,z)\in G\circ\varnothing$，根据补充定理14（1），$G\circ\varnothing=\varnothing$．同理，$\varnothing\circ G=\varnothing$．

（2）$G=\varnothing$时，根据补充定理52（1），$G^{-1}\circ G=\varnothing$．反过来，如果$G^{-1}\circ G=\varnothing$，令$x$、$y$为不是常数的字母，则$(x,x)\in\varnothing \Leftrightarrow (\exists y)((x,y)\in G$与$(x,y)\in G)))$．假设$z\in G$，则$z$为有序对，故$(pr_1z, pr_2z)\notin G$，矛盾，因此$z\notin G$，故$G=\varnothing$．

补充定理 53. 对应的复合是对应

令F为A到B的对应，其图为G，F'为B到C的对应，其图为G'，则$(G'\circ G, A, C)$为A到C的对应．

证明：根据补充定理51（2），$pr_1(G'\circ G)\subset pr_1G$，$pr_2(G'\circ G)\subset pr_2G'$．而$pr_1G\subset A$、$pr_2G'\subset C$，因此$pr_1(G'\circ G)\subset A$、$pr_2(G'\circ G)\subset C$，得证．

定义 24. 对应的复合（*composée de deux correspondances*）

令F为A到B的对应，其图为G，F'为B到C的对应，其图为G'，则称$(G'\circ G, A, C)$为F和F'的复合，记作$F'\circ F$或者$F'F$．

补充定理 54.

F、F'为对应，则：

（*1*）$F'\circ F\langle X\rangle = F'\langle F\langle X\rangle\rangle$．

（*2*）$(F'\circ F)^{-1} = F^{-1}\circ F'^{-1}$．

证明：

（1）根据定理16可证．

（2）根据定理14可证．

补充定理 55. 对角集合的存在性

$(z$为有序对$)$与$pr_1z = pr_2z$与$pr_1z\in A$是z上的集合化公式．

证明：如果$(z$为有序对$)$与$pr_1z=pr_2z$与$pr_1z\in A$，根据补充定理29，$pr_2z\in A$，$pr_1z\in A$，故$z\in A\times A$，根据证明规则52可证．

定义 25. 对角集合（*ensemble de la diagonale*）

$\{z|(z$为有序对$)$与$pr_1z=pr_2z$与$pr_1z\in A\}$称为$A\times A$的对角集合，记作Δ_A．

补充定理 56.

$\Delta_A\subset A\times A$．

证明：令z为不是常数的字母．根据补充定理23（1），$z\in A\times A\Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(pr_1z \in A)$与$(pr_2z\in A)$．而$(z$为有序对$)$与$pr_1z=pr_2z$与$pr_1z\in A\Rightarrow$ 与$(pr_1z\in A)$与$(pr_2z\in A)$，得证．

补充定理 57.

Δ_A为图.

证明：根据定义可证.

补充定理 58.

$pr_1\Delta_A = A$，$pr_2\Delta_A = A$.

证明：令x为不是常数的字母，则$x \in pr_1\Delta_A \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in \Delta_A)$，即$x \in pr_1\Delta_A \Leftrightarrow (\exists y)(x = y$与$x \in A)$，因此$x \in pr_1\Delta_A \Leftrightarrow x \in A$，前半部分得证．同理可证后半部分.

补充定理 59.

$(x,y) \in \Delta_A \Leftrightarrow (x = y)$与$(x \in A)$，$(x,x) \in \Delta_A \Leftrightarrow (x \in A)$.

证明：根据补充定理19、补充定理22（4）可证.

补充定理 60.

G为图，则：

（*1*）如果$pr_1G \subset A$，则$G \circ \Delta_A = G$.

（*2*）如果$pr_2G \subset B$，则$\Delta_B \circ G = G$.

证明：

（1）令x、z为不是常数的字母，$(\exists y)((x,y) \in \Delta_A$与$(y,z) \in G) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in A$与$x = y$与$(y,z) \in G)$，因此$(\exists y)((x,y) \in \Delta_A$与$(y,z) \in G) \Leftrightarrow x \in A$与$(\exists y)(x = y)$与$(x,z) \in G$．根据补充定理29，$(x,z) \in G \Rightarrow x \in pr_1G$，又因为$pr_1G \subset A$，因此$(x,z) \in G \Rightarrow x \in A$．而根据补充证明规则8，$(\exists y)(x = y)$．因此$(\exists y)((x,y) \in \Delta_A$与$(y,z) \in G) \Leftrightarrow (x,z) \in G$，根据证明规则50可证.

（2）与补充定理60（1）同理可证.

补充定理 61.

${\Delta_A}^{-1} = \Delta_A$

证明：令z为不是常数的字母，根据证明规则44，$(z$为有序对$)$与$pr_1z = pr_2z$与$pr_1z \in A \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$pr_1z = pr_2z$与$pr_2z \in A$，根据证明规则50得证.

定义 26. 恒等对应（*correspondance identique*）

对应(Δ_A, A, A)称为恒等对应，记作Id_A.

补充定理 62.

如果F为A到B的对应，则$F \circ Id_A = F$，$Id_B \circ F = F$.

证明：根据补充定理60（1）、补充定理60（2）可证.

定义 27. 函数图（*graphe fonctionnel*），函数（*fonction*），函数的定义域（*ensemble de définition d'une fonction*）、函数的值域（*ensemble des valeurs d'une fonction*），映射（*application*），函数的值（*valeur de fonction*）

如果图F满足$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x,y) \in F$与$(x,z) \in F \Rightarrow (y = z))$，则称$F$为函数图．如果$F$为函数图，且$pr_2F \subset B$，则对应$(F, pr_1F, B)$称为函数，$pr_1F$称为函数$(F, pr_1F, B)$的定义域；$pr_2F$称为函数$(F, pr_1F, B)$的值域．函数$(F, A, B)$也可称为$A$到$B$的映射．如果$f$为函数，其图为$F$，且$x \in pr_1F$，则$\tau_y((x,y) \in F)$称为函数$f$对于$x$的值，记作$f(x)$、$f_x$、$F(x)$或$F_x$．

定义 28. 族（*famille*），集族（*famille d'ensembles*），元素族（*famille d'éléments*），指标集（*ensemble des indices*），双族（*famille double*），子集族（*famille de parties*）

函数(X, I, E)的图也可以称为族或集族，或称为E的元素族，令i为不出现在X、I、E的任何一个字母，则族可以记作$(X_i)_{i\in I}(X_i \in E)$，在没有歧义的情况下也可以简记为$(X_i)_{i\in I}$，当$I$为$\{i|R\}$时，也可以记作$(X_i)R$．此时，$I$称为族的指标集．如果$I$可以表示为$A \times B$的形式，则称其为双族．如果族满足$(\forall x)(x \in E \Rightarrow x \subset F)$，则称其为$F$的子集族．

补充定理 63.

F为函数图，$x \in pr_1F$，则$(x,y) \in F$为y上的函数性公式．

证明：根据定义可证．

补充定理 64. 函数的值的基本性质

（*1*）f为函数，其图为F，则$(x \in pr_1F)$与$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x,y) \in F$．

（*2*）$x \in pr_1F \Leftrightarrow (x, f(x)) \in F$．

（*3*）$x \in pr_1F \Rightarrow f(x) \in pr_2F$．

证明：

（1）如果$(x \in pr_1F)$，根据证明规则46、补充定理63，$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x,y) \in F$．根据补充定理29，$(x,y) \in F \Rightarrow (x \in pr_1F)$．得证．

（2）根据补充定理64（1）可证．

（3）根据补充定理64（2）、补充定理29可证．

补充定理 65.

F为函数图，$(\forall x)(x \in pr_1F \Rightarrow f(x) \in A)$，则$pr_2F \subset A$．

证明：令x为不是常数的字母，由于$x \in pr_1F \Rightarrow f(x) \in A$，根据补充定理64（1），$(x,y) \in F \Rightarrow (y = f(x))$与$(f(x) \in A)$，其等价于$(y = f(x))$与$(y \in A)$，因此$(\exists x)((x,y) \in F) \Rightarrow y \in A$，得证．

补充定理 66.

（*1*）$\varnothing$为函数图，$(\varnothing,\varnothing,A)$为函数.

（*2*）Id_A为函数.

（*3*）函数f为(F,A,pr_2F)，且$x\in A\Leftrightarrow f(x)=x$，则$f=Id_A$.

（*4*）如果$X\subset A$，则$Id_A\langle X\rangle=X$.

证明：

（1）根据补充定理31（1），$\varnothing$为图；根据补充定理31（3），$pr_1\varnothing=\varnothing$，$pr_2\varnothing=\varnothing$，则$pr_2\varnothing\subset A$；令$x$、$y$、$z$为不是常数的字母，根据补充定理15，$(x,y)\in\varnothing$为假、$(x,z)\in\varnothing$为假，故$(x,y)\in F$与$(x,z)\in F\Rightarrow(y=z)$，因此$(\varnothing,\varnothing,A)$为函数.

（2）根据补充定理57，Δ_A为图. 根据补充定理59，$pr_1\Delta_A=A$，$pr_2\Delta_A=A$. 根据补充定理59，$(x,y)\in\Delta_A\Rightarrow x=y$，$(x,z)\in\Delta_A\Rightarrow x=z$，得证.

（3）令f的图为F，则$(x,y)\in F\Leftrightarrow(x\in A$与$f(x)=y)$，又因为$x\in A\Leftrightarrow f(x)=x$，则$(x,y)\in F\Leftrightarrow(x\in A$与$x=y)$，根据补充定理59、补充证明规则17，$F=\Delta_A$，根据补充定理58，$pr_2F=A$，得证.

（4）$Id_A\langle X\rangle=\{y|(\exists x)(x\in X$与$(x,y)\in\Delta_A)\}$，等于$\{y|(\exists x)(x\in X$与$y\in A$与$x=y)\}$，等于$\{y|y\in X\}$，等于$X$，得证.

定义 29. 恒等映射（*application identique*），恒等函数（*fonction identique*）

恒等对应又称恒等映射或恒等函数.

补充定理 67.

f、g为函数，其图分别为F、G，且$F\subset G$，则$(f$的定义域$)\subset(g$的定义域$)$.

证明：根据补充定理32可证.

补充定理 68.

f、g为函数，其图分别为F、G，且$pr_1F=pr_1G$，$(\forall x)(x\in pr_1F\Rightarrow f(x)=g(x))$，则$F$=$G$. 如果$(f$的到达域$)=(g$的到达域$)$，则$f=g$.

证明：根据补充定理64（1），$(x\in pr_1F)$与$(y=f(x))\Leftrightarrow(x,y)\in F$，$(x\in pr_1G)$与$(y=f(x))\Leftrightarrow(x,y)\in G$. $(x,y)\in F\Rightarrow(x\in pr_1F)$与$y=g(x)$，因此$(x,y)\in F\Rightarrow(x,y)\in G$，同理可证$(x,y)\in G\Rightarrow(x,y)\in F$，根据补充定理27（1），$F=G$. 进而，如果$(f$的到达域$)=(g$的到达域$)$，根据定义，$f=g$.

补充定理 69.

G为图，ßG为函数图$\Leftrightarrow(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle\subset X)$.

证明：$(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle\subset X)\Leftrightarrow(\forall X)(\exists x)(\exists y)(x\in X$与$(y,x)\in G$与$(y,z)\in G\Rightarrow z\in X)$. 如果$G$为函数图，则$(y,x)\in G$与$(y,z)\in G\Rightarrow z=x$，故$x\in X$与$(y,x)\in$

G与$(y,z)\in G\Rightarrow z\in X$，因此$(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle\subset X)$．反过来，如果$(\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle\subset X)$，当$(y,x)\in G$与$(y,z)\in G$时，$(\exists x)(x\in\{x\})\Rightarrow z\in\{x\}$，故$z=x$，因此$G$为函数图，得证．

补充定理 70.

f为A到B的映射，则：

（*1*）$x\in f^{-1}\langle X\rangle\Leftrightarrow f(x)\in X$与$x\in A$.

（*2*）$f^{-1}\langle B\rangle=A$.

（*3*）$x\in f^{-1}(y)\Leftrightarrow f(x)=y$与$x\in A$.

（*4*）$x\in f^{-1}(f(x))\Leftrightarrow x\in A$.

（*5*）$X\subset A$，则$x\in X\Rightarrow f(x)\in f\langle X\rangle$.

（*6*）$x\in A\Rightarrow\{f(x)\}=f\langle\{x\}\rangle$.

（*7*）$X\subset A\Rightarrow X\subset f^{-1}\langle f\langle X\rangle\rangle$.

（*8*）$(X\subset(f\text{的值域}))\Rightarrow(X=f\langle f^{-1}\langle X\rangle\rangle)$.

证明：

（1）令f的图为F，则$x\in f^{-1}\langle X\rangle\Leftrightarrow(\exists y)(y\in X$与$(x,y)\in F)$，根据补充定理64（1），等价于$(\exists y)(y\in X$与$(x\in A)$与$(y=f(x)))$，等价于$(\exists y)(y=f(x))$与$x\in A$与$f(x)\in X$. $x\in A\Rightarrow(\exists y)((x,y)\in F)$，根据补充定理64(1)，$x\in A\Rightarrow(\exists y)(y=f(x))$，因此$x\in f^{-1}\langle X\rangle\Leftrightarrow x\in A$与$f(x)\in X$.

（2）由于f为A到B的映射，根据补充定理64（3），$f(x)\in B$，根据补充定理70（1），$x\in f^{-1}\langle B\rangle$
$\Leftrightarrow x\in A$.

（3）$x\in f^{-1}(y)$即$x\in f^{-1}\langle\{y\}\rangle$，根据补充定理70（1）可证.

（4）根据补充定理70（3）可证.

（5）令f的图为F，$f(x)\in f\langle X\rangle\Leftrightarrow(\exists z)(z\in X$与$(z,f(x))\in F)$. 由于$x\in X$，因此$x\in A$，根据补充定理64（2），$(x,f(x))\in F$，因此$x\in X$与$(x,f(x))\in F$，故$(\exists z)(z\in X$与$(z,f(x))\in F)$，得证.

（6）$f\langle\{x\}\rangle=\{y|(\exists z)(z\in\{x\}$与$(z,y)\in F)\}$，等于$\{y|(\exists z)(z=x$与$(x,y)\in F)\}$，等于$\{y|(x,y)\in F)\}$，等于$\{y|y=f(x)\}$，即$\{f(x)\}$.

（7）令f的图为F，则$u\in f^{-1}f\langle X\rangle\Leftrightarrow(\exists y)((\exists x)((x,y)\in F$与$x\in X)$与$(u,y)\in F)$，等价于$(\exists y)(\exists x)((x,y)\in F$与$x\in X$与$(u,y)\in F)$. 同时，$X\subset A$，则$u\in X\Rightarrow(\exists y)((u,y)\in F)$，故$(\exists y)((u,y)\in F$与$u\in X)$，因此$(\exists y)(\exists x)((x,y)\in F$与$x\in X$与$(u,y)\in F)$，得证.

（8）当$X\subset(f$的值域$)$时，令f的图为F，则$u\in f\langle f^{-1}\langle X\rangle\rangle\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)((x,y)\in F$与$y\in X$与$(x,u)\in F)$. 由于$F$为函数图，故$(\exists x)(\exists y)((x,y)\in F$与$y\in X$与$(x,u)\in F)\Rightarrow u=y$，因此$(\exists x)(\exists y)((x,y)\in F$与$y\in X$与$(x,u)\in F)\Rightarrow u\in X$.

反过来，由于$X \subset$ (f的值域)，故$u \in X \Rightarrow (\exists x)((x,u) \in F)$，因此$u \in X \Rightarrow (\exists x)(\exists y)$ $((x,y) \in F$与$y \in X$与$(x,u) \in F)$，得证.

定义 30. 常数函数（*fonction constante*），常数映射（*application constante*）

令f为函数，且$(\forall x)(\forall x')(x \in (fI)$与$x' \in (fI) \Rightarrow f(x) = f(x'))$，则称$f$为常数函数或常数映射.

定义 31. 不动点（*élément invariant*）

令f为映射，如果$x \in$ (f的定义域)与$f(x) = x$，则称x为f的不动点.

定义 32. 重合（*coïncident*）

令f、g为函数，$E \subset f$的定义域，$E \subset g$的定义域，并且$(\forall x)((x \in E) \Rightarrow f(x) = g(x))$，则称$f$和$g$在$E$上重合.

定义 33. 延拓（*prolongement*）

令$f = (F, A, B)$和$g = (G, C, D)$为函数，$F \subset G$，并且f和g在A上重合，则称g为f在C上的延拓.

补充定理 71. 函数的限制是函数

f为函数，定义域为A，$X \subset A$，则$(x \in X$与$y = f(x))$为对于x、y生成图的公式，并且，其对于x、y生成的图G为函数图，且$pr_1 G = X$.

证明：令f的图为F，根据补充定理64（1），$(x \in A$与$y = f(x)) \Leftrightarrow (x,y) \in F$，根据补充证明规则18，$(x \in X$与$y = f(x))$为对于$x$、$y$生成图的公式.

因此，$(x,y) \in G \Leftrightarrow x \in X$与$y = f(x)$，令$f$的图为$F$，根据补充定理64（1），等价于$x \in X$与$(x,y) \in F$，则$pr_1 G = \{x | x \in X$与$x \in A\}$，即$pr_1 G = X$. 对于$(x,y) \in G$、$(x,y') \in G$，有$(x,y) \in F$、$(x,y') \in F$，由于$F$为函数图，故$y = y'$，因此，$G$为函数图.

定义 34. 限制（*restriction*）

函数$f = (F, A, B)$，$X \subset A$，$(x \in X$与$y = f(x))$对于x、y生成的图为G，则称(G, X, B)为函数f在X上的限制，记作$f|X$.

补充定理 72.

f为函数，$x \subset$ (f的定义域)，则$f|X$和f在X上重合，并且，f为$f|X$在其定义域上的延拓.

证明：令f的图为F，$f|X$的图为G，x、y为不是常数的字母. 由于$(x \in X$与$y = f(x))$ $\Rightarrow y = f(x)$，因此，$F \subset G$. 根据补充定理64（1）、补充证明规则16（1），$(x \in X$与$y = f(x)) \Leftrightarrow y = f|X(x)$，则$x \in X \Leftrightarrow f(x) = f|X(x)$，因此，$f|X$和$f$在$X$上重合. 又因为$X$为$f|X$的定义域，因此，$f$为$f|X$在其定义域上的延拓.

补充定理 73.

函数$f=(F,A,B)$，$X\subset A$，则：

（*1*）$x\in X\Rightarrow f(x)=(f|X)(x)$.

（*2*）$f|X=f\circ Id_X$.

证明：

（1）设$x\in X$，根据补充定理64（1），$(x,f(x))\in F$．令$f|X$的图为G，则$y=f(x)\Leftrightarrow (x,y)\in G$，即$y=f(x)\Leftrightarrow y=f|X(x)$，因此$f(x)=f|X(x)$.

（2）$(x,z)\in F\circ\Delta_X\Leftrightarrow(\exists y)((x,y)\in\Delta_X$与$(y,z)\in F)$，根据补充定理59，等价于$x\in X$与$(x,z)\in F$，根据补充定理64（1），等价于$x\in X$与$y=f(x)$，得证.

证明规则 54.

令T、A为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的项，x、y为不同的字母，A不包含x，A、T均不包含y．R为公式$x\in A$与$y=T$．则其为对于x、y生成图的公式．设其生成的图为F，则F为函数图，$pr_1F=A$，$pr_2F=($对于$x\in A$形式为T的对象集合$)$，且$x\in A\Leftrightarrow F(x)=T$.

证明：

考虑其他规则相同但不包含其他显式公理的理论M_0，则M_0不包含任何常数：

令B为对于$x\in A$形式为T的对象集合，则B不包含x、y．$R\Rightarrow(x,y)\in A\times B$，由于$A$、$B$都不包含$x$、$y$，根据补充证明规则19，$R$为对于$x$、$y$生成图的公式.

令z为不同于M中常数的字母，则根据补充证明规则16（1），$(x,y)\in F$与$(x,z)\in F\Leftrightarrow x\in A$与$y=T$与$z=T$，因此，$(x,y)\in F$与$(x,z)\in F\Rightarrow(y=T)$与$(z=T)$，根据定理3，$(x,y)\in F$与$(x,z)\in F\Rightarrow y=z$，故$F$为函数图.

由于A不包含y，因此$(\exists y)(x\in A$与$y=T)\Leftrightarrow x\in A$与$(\exists y)(y=T)$，其等价于$x\in A$，因此$pr_1F=A$.

根据定义，$pr_2F=($对于$x\in A$形式为T的对象集合$)$.

根据补充定理64（1），$y=F(x)\Leftrightarrow x\in A$与$y=T$．假设$x\in A$，则$y=F(x)\Leftrightarrow y=T$，因此$F(x)=T$．故$x\in A\Rightarrow F(x)=T$.

反过来，假设$F(x)=T$，则$x\in A$为真．故$x\in A\Leftrightarrow F(x)=T$.

由于M强于M_0，因此上述结论对理论M也成立.

元数学定义 29. 用项定义的函数（*fonction par un terme*）

令T、A、C为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*和公理模式*8*的等式理论M的项，x、y为不同的字母，A不包含x，A、T、C均不包含y．如果(对于$x\in A$形式为T的对象集合$)\subset C$，公式$x\in A$与$y=T$对于x、y生成图的公式为F，则(F,A,C)称为用T定义的函数，记作$x\to T(x\in A,T\in C)$，在没有歧义的情况下也可以简记为$x\to T(x\in A)$、$(T)x\in A$、$x\to T$或者T.

定理 17. 函数的复合是函数

f为A到B的映射，g为B到C的映射，则$g \circ f$为A到C的映射.

证明：令f、g的图分别为F、G，x、y、z均为不是常数的字母，则$(x,z) \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in F$与$(y,z) \in G)$，$(x,z') \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in F$与$(y,z') \in G)$．添加辅助常数$y$、$y'$，设$(x,y) \in F$与$(y,z) \in G$，$(x,y') \in F$与$(y',z') \in G$．则根据函数定义，$y = y'$，故$z = z'$．故$g \circ f$为函数.

f的定义域$A = \{x|(\exists y)(x,y) \in F\}$，$g$的定义域为$B = \{y|(\exists z)(y,z) \in G\}$．令$g \circ f$的定义域$A' = \{x|(\exists z)((\exists y)((x,y) \in F$与$(y,z) \in G))\}$．则$(\exists z)((\exists y)((x,y) \in F$与$(y,z) \in G)) \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in F)$，故$A' \subset A$．另一方面，$(\exists x)(x,y) \in F \Rightarrow (\exists z)(y,z) \in G$，又因为$(x,y) \in F \Rightarrow (\exists x)(x,y) \in F$，因此，$(\exists y)((x,y) \in F) \Rightarrow (\exists z)((\exists y)((x,y) \in F$与$(y,z) \in G))$，故$A \subset A'$．根据补充定理51（2），$pr_2 G \circ F \subset C$.

综上，得证.

定义 35. 单射（*injection/application injective*），满射（*surjection/application surjective*），双射（*bijection/application bijective*）

令f为A到B的映射．如果$(\forall x)(\forall y)(x \in A$与$y \in A$与$f(x) = f(y) \Rightarrow (x = y))$，则称$f$为$A$到$B$的单射；如果$f\langle A\rangle = B$，则称$f$为$A$到$B$的满射．如果$f$是$A$到$B$的单射，也是$A$到$B$的满射，则称$f$为$A$到$B$的双射.

定义 36. 排列（*permutation*）

A到A的双射称为A的排列.

补充定理 74.

（*1*）函数$(\varnothing, \varnothing, A)$为单射，函数$(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$为双射.

（*2*）函数$(F, \{x\}, A)$为单射，函数$(F, \{x\}, \{y\})$为双射.

（*3*）函数Id_A为双射.

（*4*）如果$A \subset B$，则函数(Δ_A, A, B)为单射.

（*5*）$x \to (x,x)(x \in A, (x,x) \in A \times A)$为单射.

证明：根据定义可证.

定义 37. 子集的规范映射（*application canonique de partie*），子集的规范单射（*injection canonique de partie*）

如果$A \subset B$，则映射(Δ_A, A, B)称为A到B的规范映射或规范单射.

定义 38. 到两个集合的乘积的对角映射（*application diagonale dans produit de deux ensembles*）

映射$x \to (x,x)(x \in A, (x,x) \in A \times A)$称为对角映射.

补充定理 75.

f为A到B的单射，$X \subset A$，则$f|X$为X到B的单射.

证明：$X \subset A$，故$x \in X \Rightarrow x \in A$，根据定义可证.

定理 18.

f为A到B的映射，则f^{-1}为函数 $\Leftrightarrow$ f为双射.

证明：

令f的图为F，则f^{-1}的图为F^{-1}. 令x、y、z为不是常数的字母.

由于f为A到B的映射，故$pr_1F = A$，根据补充定理42，$pr_2F^{-1} = A$.

根据补充定理35、补充定理42，f为满射 $\Leftrightarrow pr_1F^{-1} = B$.

根据补充定理64（1），$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((y, x) \in F$与$(z, x) \in F \Rightarrow (y = z))$ $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$x = f(y)$与$x = f(z) \Rightarrow (y = z))$. 假设$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$x = f(y)$与$x = f(z) \Rightarrow (y = z))$，则$(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$f(y) = f(y)$与$f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$，进而$(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$.

反过来，假设$(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$f(y) = f(z) \Rightarrow (y = z))$，由于$y \in A$与$z \in A$与$x = f(y)$与$x = f(z) \Rightarrow f(y) = f(z)$，故$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(y \in A$与$z \in A$与$x = f(y)$与$x = f(z) \Rightarrow (y = z))$.

综上，得证.

定义 39. 逆映射（*application réciproque*），反函数（*fonction réciproque*）

令f为A到B的双射，则称f^{-1}为f的逆映射或反函数.

定义 40. 对合函数（*fonction involutive*）

令f为函数，如果$f^{-1} = f$，则称f为对合函数.

补充定理 76.

f为A到B的双射，则f^{-1}为B到A的双射.

证明：根据补充定理44，$(f^{-1})^{-1}$的图与f的图相同，根据定理18可证.

补充定理 77.

Id_A的反函数是Id_A.

证明：根据补充定理61可证.

补充定理 78.

f为A到B的双射，则$(\forall X)(X \subset A \Rightarrow f^{-1}\langle f\langle X\rangle\rangle = X)$.

证明：根据补充定理44，$(f)^{-1})^{-1} = f$，根据补充定理70（8）可证.

定理 19. *左逆和右逆的存在性*

f为A到B的映射，如果存在B到A的映射r（或s），使$r\circ f=Id_A$（或$f\circ s=Id_B$），则f为单射（或满射）.

反过来，如果f为满射，则存在B到A的映射s，使$f\circ s=Id_B$；如果f为单射，且$A\neq\varnothing$，则存在B到A的映射r，使$r\circ f=Id_A$.

证明：

如果$r\circ f$为Id_A，则$(x\in A$与$y\in A)\Rightarrow(r(f(x))=x$与$r(f(y))=y)$. 根据公理模式6、补充定理29， $f(x)=f(y)\Rightarrow r(f(x))=r(f(y))$与$x\in A$与$y\in A$，因此$f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$，故$f$为单射.

如果$f\circ s=Id_B$，则$f\langle s\langle B\rangle\rangle=B$，同时，根据定理12，$f\langle s\langle B\rangle\rangle\subset f\langle A\rangle$，又因为$f\langle A\rangle\subset f\langle B\rangle$，故$f\langle A\rangle=f\langle B\rangle$，因此$f$为满射.

如果f为满射，则$f\langle A\rangle=B$，根据补充定理35，$x\in B\Leftrightarrow(\exists y)((y,x)\in F)$，根据补充定理64（1），$(y,x)\in F\Leftrightarrow y\in A$与$x=f(y)$. 令$T$为项$\tau_y(y\in A$与$x=f(y))$，根据证明规则54，$x\in B\Leftrightarrow f(T)=x)$. 令$s$为映射$x\to T(x\in B,T\in A)$，则$x\in B\Leftrightarrow f(s(x))=x$，即$f\circ s=Id_B$. 如果$f$为单射，且$A\neq\varnothing$，根据补充定理14（2），$(\exists x)(x\in A)$，因此可以添加辅助常数$a$，令$a\in A$. 令$f$的图为$F$，$R$为公式$(y,x)\in F$或$(y=a$与$x\in B-f\langle A\rangle)$. 由于$(y,x)\in F\Rightarrow y\in A$与$x\in B$，因此$R\Rightarrow(x,y)\in B\times A$，因此，该公式为对于$x$、$y$生成图的公式. 令其生成的图为$P$.

R与$(z|y)R\Leftrightarrow((y,x)\in F$与$(z,x)\in F)$或$(y=a$与$z=a$与$x\in B-f\langle A\rangle)$或$((y,x)\in F$与$z=a$与$x\in B-f\langle A\rangle)$或$((z,x)\in F$与$y=a$与$x\in B$与$x\notin f\langle A\rangle)$. $1(z,x)\in F\Rightarrow x\in f\langle A\rangle)$，$(y,x)\in F\Rightarrow x\in f\langle A\rangle$，根据补充证明规则5（13），$R$与$(z|y)R\Rightarrow y=z$，故$P$为函数图.

$(\exists y)R\Leftrightarrow(\exists y)((y,x)\in F)$或$(\exists y)(y=a$与$x\in B-f\langle A\rangle)$，等价于$(\exists y)((y,x)\in F)$或$x\in B-f\langle A\rangle$，等价于$x\in f\langle A\rangle$或$x\in B-f\langle A\rangle$，等价于$x\in B$，故$pr_1P=B$. $(\exists x)R\Leftrightarrow y\in A$或$(y=a$与$(\exists x)(x\in B-f\langle A\rangle))$，又由于$y=a\Rightarrow y\in A$，故$(y=a$与$(\exists x)(x\in B-f\langle A\rangle))\Rightarrow y\in A$，故$(\exists x)R\Leftrightarrow y\in A$，故$pr_2P=A$. 由此可知，$(P,B,A)$是函数，令其为$r$，则$r\circ f(x)=x\Leftrightarrow(x,f(x))\in F$或$(x=a$与$f(x)\in B-f\langle A\rangle)$，$r\circ f(x)=x\Leftrightarrow x\in A$或$(x=a$与$f(x)\in B$与$f(x)\notin f\langle A\rangle)$. $1a\in A\Rightarrow f(x)\in f\langle A\rangle$，根据补充证明规则5（15），$r\circ f(x)=x\Leftrightarrow x\in A$，故$r\circ f=Id_A$.

定理 20.

f为A到B的映射，g为B到A的映射，且$g\circ f=Id_A$，$f\circ g=Id_B$，则f和g均为双射，且$g=f^{-1}$.

证明：根据定理19，f和g均为双射.

令f的图为F，g的图为G，假设$(x,y)\in F$，则$y\in B$，$y=f(x)$. 由于$g(f(x))=x$，因此$g(y)=x$，根据补充定理64（1），$(y,x)\in G$.

假设$(y,x)\in$G，同理可得$(x,y)\in F$.

因此$(x,y)\in F\Leftrightarrow(y,x)\in G$，即$(y,x)\in F^{-1}\Leftrightarrow(y,x)\in G$，根据补充定理27（2），$G=F^{-1}$. 又因为$g$为$B$到$A$的映射，故$g=f^{-1}$.

定义 41. 回缩（*rétractions*），截面（*section*），左逆（*inverse à gauche*），右逆（*inverse à droite*）

令f为A到B的单射（或满射），如果B到A的映射r（或s）使使$r\circ f=Id_A$（或$f\circ s=Id_B$），则称r（或s）为f的回缩（或截面），或称为f的左逆（或右逆）.

补充定理 79.

如果g是f的左逆，则f是g的右逆；如果f是g的右逆，则g是f的左逆.

证明：根据定义可证.

补充定理 80.

单射的左逆是满射，满射的右逆是单射.

证明：根据补充定理79、定理19可证.

补充定理 81. 右逆的唯一性

令f为A到B的满射，s、s'都是f的右逆，如果$s\langle B\rangle=s'\langle B\rangle$，则$s=s'$.

证明：

如果$B=\varnothing$，根据补充定理31（2），s、s'的图均为$\varnothing$，则$s=s'$.

如果$B\neq\varnothing$，添加辅助常数x、y，使$x\in B$，$y\in B$，且$s(x)=s'(y)$. 由于$f(s(x))=x$，$f(s'(y))=y$，因此$s(x)=s'(x)$. 根据补充定理68，得证.

定理 21.

令f为A到B的映射，f'为B到C的映射，f''=$f'\circ f$，则：

（*1*）如果f、f'为单射，则$f'\circ f$为单射；如果r、r'分别为f、f'的左逆，则$r\circ r'$是f''的左逆；

（*2*）如果f、f'为满射，则$f'\circ f$为满射；如果s、s'分别为f、f'的左逆，则$r\circ r'$是f''的左逆；

（*3*）如果f''为单射，则f为单射；如果r''是f''的左逆，则$r''\circ f'$是f的左逆；

（*4*）如果f''为满射，则f'为满射；如果s''是f''的右逆，则$f\circ s''$是f'的右逆；

（*5*）如果f''为满射，f'为单射，则f为满射；如果s''是f''的右逆，则$s''\circ f'$是f的右逆；

（*6*）如果f''为单射，f为满射，则f'为单射；如果r''是f''的左逆，则$f\circ r''$是f的左逆.

证明：

（1）如果$A=\varnothing$，则f、f'、r、r'均为$(\varnothing,\varnothing,\varnothing)$，显然成立. 如果$A\neq\varnothing$，则$r{\circ}f=Id_A$，$r'\circ f'=Id_B$. $r\circ r'\circ f'\circ f=r\circ Id_B\circ f$，等于$r\circ f$，等于$Id_A$.

此外，根据定理19，$f' \circ f$为单射.

（2）类似定理21（1）可证.

（3）如果$A = \varnothing$，则f、f'、r、r'均为$(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$，显然成立．如果$A \neq \varnothing$，$r'' \circ f'' = Id_A$，则$(r'' \circ f') \circ f = Id_A$．此外，根据定理19，$f$为单射.

（4）类似定理21（3）可证.

（5）$f'' \circ s'' = Id_C$，根据定理21（4），f'为双射，则$f \circ (s'' \circ f') = (f'^{-1} \circ f') \circ f \circ (s'' \circ f')$，等于$f'^{-1} \circ f'' \circ s'' \circ f'$，等于$f'^{-1} \circ f'$，等于$Id_B$．此外，根据定理19，$f$为满射.

（6）类似定理21（5）可证.

定理 22. 函数唯一存在的条件

（1）令g为E到F的满射，f为E到G的映射，则当且仅当$(\forall x)(\forall y)(x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y))$时，存在$F$到$G$的映射$h$，使$f = h \circ g$；并且，$h$是唯一的，令$s$为$g$的右逆，则$h = f \circ s$.

（2）令g为F到E的单射，f为G到E的映射，则当且仅当$f(G) \subset g(F)$时，存在G到F的映射h，使$f = g \circ h$；并且，h是唯一的，令r为g的左逆，$h = r \circ f$.

证明：

（1）若$f = h \circ g$，则$(\forall x)(\forall y)(x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y))$．同时，$s$为$g$的右逆，则$h = h \circ (g \circ s)$，因此$h = f \circ s$，故$h$是唯一的.

反过来，假设$(\forall x)(\forall y)(x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y))$，令$h = f \circ s$，则当$x \in E$时，$g(s(g(x))) = g(x)$，$s(g(x)) \in E$，因此$f(s(g(x))) = f(x)$，即$h(g(x)) = f(x)$．因此$f = h \circ g$.

（2）若$f = g \circ h$，根据补充定理51（2），$f(G) \subset g(F)$．同时，r为g的左逆，则$h = (r \circ g) \circ h$，因此$h = r \circ f$.

反过来，假设$f(G) \subset g(F)$，令$h = r \circ f$．由于$f(G) \subset g(F)$，因此$(\exists x)(x \in G$与$y = f(x)) \Rightarrow (\exists x)(x \in F$与$y = g(x))$，因此，$(\exists x)(x \in G$与$f(z) = f(x)) \Rightarrow (\exists x)(x \in F$与$f(z) = g(x))$．如果$G = \varnothing$，则$f$为$(\varnothing, \varnothing, E)$，$h$为$(\varnothing, \varnothing, F)$，因此$f = h \circ g$．如果$G \neq \varnothing$，则添加辅助变量$z$使$z \in G$，故$(\exists x)(x \in F$与$f(z) = g(x))$，添加辅助变量$y$，使$f(z) = g(y)$，因此$g(h(z)) = g(r(f(z)))$，进而等于$g(r(g(y)))$，进而等于$g(y)$，最后等于$f(z)$．因此，$f = g \circ h$.

定义 42. 二元函数（*fonction de deux arguments*）

如果函数f的定义域为图G，则称f为二元函数．当$(x, y) \in G$时，函数f对于(x, y)的值记作$f(x, y)$.

定义 43. 偏映射（*application partielle*）

令f为二元函数，定义域为D，到达域为C，令$A_y = D^{-1}\langle\{y\}\rangle$，则映射$x \to f(x, y)$ $(x \in A - y, f(x, y) \in C)$称为$f$关于第二个参数值为$y$的偏映射，记作$f(., y)$、$f(, y)$或$f_y$.

令$A_x = D\langle\{x\}\rangle$，则映射$y \to f(x,y)(y \in B_x, f(x,y) \in C)$称为$f$关于第一个参数值为$x$的偏映射，记作$f(x,.)$、$f(x,)$或$f_x$.

补充定理 82.

（1）令f为二元函数，定义域为D，则$(x,y) \in D \Leftrightarrow f(.,y)(x) = f(x,y)$，$(x,y) \in D \Leftrightarrow f(x,.)(y) = f(x,y)$.

（2）令f、g为二元函数，定义域均为D，如果$(x,y) \in D \Rightarrow f(.,y)(x) = g(.,y)(x)$，或者$(x,y) \in D \Rightarrow f(x,.)(y) = g(x,.)(y)$，则$f$和$g$在$D$上重合.

证明：

（1）根据证明规则54可证.

（2）当$(x,y) \in D$时，如果$(x,y) \in D \Rightarrow f(.,y)(x) = g(.,y)(x)$，则$f(.,y)(x) = g(.,y)(x)$，根据补充定理82（1），$f(x,y) = g(x,y)$．同理可证$(x,y) \in D \Rightarrow f(x,.)(y) = g(x,.)(y)$的情况.

定义 44. 不依赖于参数（*ne dépend pas de argument*）

令f为二元函数，如果 $f(.,y)$（或$f(x,.)$）为常数函数，则称f不依赖于第一个参数（或第二个参数）.

补充定理 83.

令g为B到C的映射，则映射$z \to g(pr_2 z)(z \in A \times B, g(pr_2 z) \in C)$不依赖于第一个参数.

证明：如果$B \neq \varnothing$，若$y \in B$，则该映射关于第二个参数的偏映射是$x \to g(y)(x \in A_y, g(y) \in C)$，若$y \notin B$，则该映射关于第二个参数的偏映射是$(\varnothing, \varnothing, C)$；如果$B = \varnothing$，则关于第二个参数的偏映射是$(\varnothing, \varnothing, C)$，均为常数函数，得证.

定义 45. 映射在乘积集合上的规范扩展（*extension canonique de applications aux ensembles produits*），映射的乘积（*produit de applications*）

令u为A到C的映射，v为B到D的映射，则称映射$z \to (u(pr_1 z), v(pr_2 z))(z \in A \times B, (u(pr_1 z), v(pr_2 z)) \in C \times D)$为$u$和$v$在乘积集合上的规范扩展，或称$u$和$v$的乘积，记作$u \times v$或$(u, v)$.

补充定理 84.

u为A到C的映射，v为B到D的映射，则u和v的乘积的值域为$u\langle A\rangle \times v\langle B\rangle$.

证明：令u的图为U，v的图为V，则$u\langle A\rangle \times v\langle B\rangle = \{z|(z$为有序对$)$与$(\exists x)(x, pr_1 z) \in U$与$(\exists x)(x, pr_2 z) \in V\}$．u和v的乘积的值域为$\{z|(\exists w)(w \in A \times B$与$z = (u(pr_1 w), v(pr_2 w)))\}$.

由于$(z$为有序对$)$与$(\exists x)(x, pr_1 z) \in U$与$(\exists x)(x, pr_2 z) \in V \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与$(\exists x)(\exists y)((x, pr_1 z) \in U$与$(y, pr_2 z) \in V)$，而$(\exists w)(w \in A \times B, z = (u(pr_1 w), v(pr_2 w))) \Leftrightarrow (z$为有序对$)$与

$(\exists w)((w$为有序对$)$与$pr_1w \in A$与$pr_2w \in B$与$pr_1z = u(pr_1w)$与$pr_2z = v(pr_2w))$，等价于$(z$为有序对$)$与$(\exists w)((w$为有序对$)$与$(pr_1w, pr_1z) \in U$与$(pr_2w, pr_2z) \in U)$，根据补充证明规则15，得证.

补充定理 85.

u、v为函数，如果u、v都是单射（或满射），则$u \times v$为单射（或满射）.

证明：如果u、v都是单射，根据定理7可证. 如果u、v都是满射，根据补充定理84可证.

补充定理 86.

u为A到C的映射，v为B到D的映射，u'为C到E的映射，v'为D到F的映射，则$u' \times v' \circ u \times v = u' \circ u \times v' \circ v$.

证明：若$z \in A \times B$，则$((u' \times v') \circ (u \times v))(z) = (u' \times v')(u(pr_1z), v(pr_2z))$，等于$(u'(u(pr_1z), v'(v(pr_2z)))$，得证.

补充定理 87.

$Id_A \times Id_B = Id_{A \times B}$.

证明：若$z \in A \times B$，则$(Id_A \times Id_B)(z) = (Id_A(pr_1z), Id_B(pr_2z))$，即等于$z$，得证.

补充定理 88.

u、v都是双射，则$u \times v$为双射，且其反函数为$u^{-1} \times v^{-1}$.

证明：根据补充定理85，$u \times v$为双射.

令u的定义域为A，v的定义域为B，根据补充定理86，$u^{-1} \times v^{-1} \circ u \times v = Id_A \times Id_B$，根据补充定理87得证.

习题 43.

求证：$x \in y$、$x \subset y$、$x = \{y\}$都不是对于x、y生成图的公式.

证明：即补充定理28（2）、补充定理28（3）、补充定理28（4）.

习题 44.

G为图，求证：$X \subset pr_1G \Leftrightarrow X \subset G^{-1}\langle G\langle X\rangle\rangle$.

证明：即补充定理50.

习题 45.

G和F为图，求证：$pr_1H \subset pr_1G \Leftrightarrow H \subset H \circ G^{-1} \circ G$，并且$G \subset G \circ G^{-1} \circ G$.

证明：

如果$pr_1 H \subset pr_1 G$，设$(h, h') \in H$，则$h \in pr_1 G$，故$(\exists g)(h, g) \in G$，则$(\exists g)(\exists i)((h, g) \in G$与$(i, g) \in G$与$(i, h') \in H)$，故$(h, h') \in H \circ G^{-1} \circ G$，即$H \subset H \circ G^{-1} \circ G$.

由于$pr_1 G \subset pr_1 G$，故$G \subset G \circ G^{-1} \circ G$.

习题 46.

G为图，求证：

（*1*） $G \circ \varnothing = \varnothing$，$\varnothing \circ G = \varnothing$；

（*2*）当且仅当$G = \varnothing$时，$G^{-1} \circ G = \varnothing$.

证明：即补充定理52.

习题 47.

G为图，求证：

（*1*）$(A \times B) \circ G = G^{-1}\langle A \rangle \times B$.

（*2*）$G \circ (A \times B) = A \times G\langle B \rangle$.

证明：

（1）令x、y、z为不是常数的字母，$(x, z) \in (A \times B) \circ G \Leftrightarrow (\exists y)((x, y) \in G$与$y \in A$与$z \in B)$，$(x, z) \in G^{-1}\langle A \rangle \times B \Leftrightarrow (\exists y)(y \in A$与$(x, y) \in G)$与$z \in B$，得证.

（2）令x、y、z为不是常数的字母，$(x, z) \in G \circ (A \times B) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in A$与$y \in B$与$(y, z) \in G)$，$(x, z) \in A \times G\langle B \rangle \Leftrightarrow x \in A$与$(\exists y)(y \in B$与$(y, z) \in G)$，得证.

习题 48.

对任意图G，用G'表示$pr_1 G \times pr_2 G - G$，求证：

（*1*）$(G^{-1})' = (G')^{-1}$.

（*2*）如果$pr_1 G \subset A$，$pr_2 G \subset B$，则$G \circ (G^{-1})' \subset (\Delta_B)'$，$(G^{-1})' \circ G \subset (\Delta_A)'$.

（*3*）当且仅当$G \circ (G^{-1})' \circ G = \varnothing$时，$G = pr_1 G \times pr_2 G$.

证明：

（1）根据补充定理42、补充定理45可证.

（2）令x、y、z为不是常数的字母，$(x, y) \in (G^{-1})' \Leftrightarrow (x \in A$与$y \in B$与$(y, x) \notin G)$，则$(x, z) \in G \circ (G^{-1})' \Leftrightarrow (\exists y)(x \in B$与$y \in A$与$(y, x) \notin G$与$(y, z) \in G)$，$(x, z) \in (\Delta_B)' \Leftrightarrow (x \in B$与$z \in B$与$x \neq z)$. 由于$(y, z) \in G \Rightarrow z \in B$，$(y, x) \notin G$与$(y, z) \in G \Rightarrow x \neq z$，故$(x, z) \in G \circ (G^{-1})' \Rightarrow (x, z) \in (\Delta_B)'$，即$G \circ (G^{-1})' \subset (\Delta_B)'$. 同理可证$(G^{-1})' \circ G \subset (\Delta_A)'$.

（3）如果$G = pr_1 G \times pr_2 G$，则$(G^{-1})' = \varnothing$，根据补充定理52（1），$G \circ (G^{-1})' \circ G = \varnothing$. 如果$G \circ (G^{-1})' \circ G = \varnothing$，则$(\exists y)(\exists z)((x, y) \in G$与$y \in pr_2 G$与$z \in pr_1 G$与$(z, y) \notin G$与$(z, t) \in G)$为假，即$(x, y) \notin G$或$y \notin pr_2 G$或$z \notin pr_1 G$或$(z, y) \in G$或$(z, t) \notin G)$，即$(x, y) \in G$与$y \in pr_2 G$与$z \in pr_1 G$与$(z, t) \in G \Rightarrow (z, y) \in G$，因此，$(\exists x)((x, y) \in G)$与$(\exists t)((z, t) \in G)$与$y \in$

pr_2G与$z \in pr_1G \Rightarrow (z, y) \in G$，又因为$y \in pr_2G \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in G)$，$z \in pr_1G \Rightarrow ((z, t) \in G)$，因此$y \in pr_2G$与$z \in pr_1G \Rightarrow (z, y) \in G$，因此$G = pr_1G \times pr_2G$.

习题 49.

G为图，求证：G为函数图$\Leftrightarrow (\forall X)(G\langle G^{-1}\langle X\rangle\rangle \subset X)$.

证明：即补充定理70.

习题 50.

令F是A到B的对应，F'是B到A的对应．如果$(\forall x)(x \in A \Rightarrow F'(F(x)) = \{x\})$、$(\forall y)(y \in B \Rightarrow F(F'(y)) = \{y\})$，求证：$F$、$F'$均为双射，且$F'$为$F$的逆映射.

证明：令G、G'分别是F、F'的图，假设$(x, y) \in G$、$(x, y') \in G$，则$y \in F(x)$，因此$F'(y) \subset F'(F(x))$．又因为$F(F'(y)) = \{y\}$，故$F'(y) \neq \varnothing$，因此$F'(y) = \{x\}$，同理$F'(y') = \{x\}$，因此$F'(F(y)) = F'(F(y'))$，因此$y = y'$，故G为函数图，同时，对于$x \in A$，由于$F'(F(x)) \neq \varnothing$，因此$F(x) \neq \varnothing$，故$pr_1G = A$，因此，$F$为映射，同理$F'$为映射．根据定理20得证.

习题 51.

f为A到B的映射，g为B到C的映射，h为C到D的映射，且$g \circ f$和$h \circ g$为双射，求证：f、g、h为双射.

证明：根据定理21（3）、定理21（4），g为双射．根据定理21（5）、定理21（6），f和h也是双射.

习题 52.

f为A到B的映射，g为B到C的映射，h为C到A的映射，求证：如果$h \circ g \circ f$、$g \circ f \circ h$、$f \circ h \circ g$之中两个满射一个单射，或者两个单射一个满射，则f、g、h都是双射.

证明：

假设$h \circ g \circ f$、$g \circ f \circ h$为满射，$f \circ h \circ g$为单射，根据定理15、定理21（3）、定理21（4），g为双射、h为满射、$h \circ g$为双射、$g \circ f$为满射，根据定理21（5）、定理21（6），h、f为双射.

假设$h \circ g \circ f$、$g \circ f \circ h$为单射，$f \circ h \circ g$为满射，根据定理15、定理21（3）、定理21（4），$f \circ h$为双射、f为双射、$g \circ f$为单射、h为单射，根据定理21（5）、定理21（6），g、h为双射.

习题 53.

试找到以下推理的错误：令N为自然数集，A为满足$n > 2$且存在不等于0的自然数x、y、z使$x^n + y^n = z^n$成立的不等于0的自然数n的集合，则A不为空集（即费马大定理为假）．设$B = \{A\}$，$C = \{N\}$，由于B、C均为仅有一个元素的集合，因此存在B到C的双射f．因此$f(A) = N$，如果$A = \varnothing$，则$f(\varnothing) = \varnothing$，故$N = \varnothing$，矛盾.

答：$f(\varnothing)=\varnothing$推理错误．混淆了$f(\varnothing)$与$f\langle\varnothing\rangle$，即将函数的值和在对应下的像混淆．

注：习题53涉及尚未介绍的“自然数”知识．

2.4 集族的并集和交集（Réunion et intersection d'une famille d'ensembles）

补充定理 89. 并集定理

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，则$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i)$是x上的集合化公式．

证明：由于$(\forall x)((i\in I$与$x\in X_i)\Rightarrow(x\in X_i))$，根据公理模式5，$(\forall i)(\forall x)(\exists Z)((i\in I$与$x\in X_i)\Rightarrow(x\in Z))$，根据公理模式8得证．

定义 46. 集族的并集（*réunion d'une famille*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，集合$\{x|(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i)\}$称为该集族的并集，记作$\bigcup\limits_{i\in I}X_i$．

补充定理 90.

E的子集族的并集，是E的子集．

证明：如果$i\in I$，则$X_i\subset E$，因此$x\in X_i\Rightarrow x\in E$，则$(\exists i)(i\in I$与$x\in X_i)\Rightarrow x\in E$，得证．

补充定理 91.

$\bigcup\limits_{i\in\varnothing}X_i=\varnothing$．

证明：$i\in\varnothing$为假，故$(\exists i)(i\in\varnothing$与$x\in X_i)$为假，得证．

补充定理 92. 交集定理

对于集族$(X_i)_{i\in I}$，如果$I\neq\varnothing$，则$(\forall i)(i\in I\Rightarrow x\in X_i)$是$x$上的集合化公式．

证明：设$a\in I$，则$(\forall i)(i\in I\Rightarrow x\in X_i)\Rightarrow x\in X_a$，根据证明规则52得证．

补充定理 93. 空集族的交集不存在

非$Coll_x(\forall i)(i\in\varnothing\Rightarrow x\in X_i)$．

证明：$i\in\varnothing$为假，因此$i\in\varnothing\Rightarrow x\in X_i$为真，根据证明规则13可证．

补充定理 94. 子集族的交集存在

$(X_i)_{i\in I}$为F的子集族，则$x\in F$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow x\in X_i)$是$x$上的集合化公式．

证明：根据证明规则51可证．

定义 47. 集族的交集（*intersection d'une famille*）；子集族的交集（*intersection d'une famille*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，且$I\neq\varnothing$，则集合$\{x|(\forall i)(i\in I\Rightarrow x\in X_i)\}$称为该集族的交集，记作$\bigcap\limits_{i\in I}X_i$．如果$(X_i)_{i\in I}$为$F$的子集族，则集合$\{x|x\in F$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow x\in X_i)\}$称为该子集族的交集，同样记作$\bigcap\limits_{i\in I}X_i$．

补充定理 95. 空子集族的交集

$(X_i)i\in\varnothing$为F的子集族，则$\bigcap\limits_{i}\in\varnothing X_i=F$.

证明：根据定义可证.

补充定理 96.

（*1*）E的子集族的交集，是E的子集．

（*2*）如果集族同时是E的子集族，且指标集不为空集，则该集族的交集也是该子集族的交集．

证明：

（1）$x\in E$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow x\in X_i)\Rightarrow x\in E$，得证.

（2）根据补充定理96（1）可证.

定理 23. 并集和交集的交换律

$(X_i)_{i\in I}$为集族，f为K到I的满射，则$\bigcup\limits_{k\in K}X_{f(k)}=\bigcup\limits_{i\in I}X_i$；如果$I\neq\varnothing$，则$\bigcap\limits_{k\in K}X_{f(k)}=\bigcap\limits_{i\in I}X_i$．如果$(X_i)_{i\in I}$为子集族，在$I=\varnothing$的情况下，$\bigcap\limits_{k\in K}X_{f(k)}=\bigcap\limits_{i\in I}X_i$也为真．

证明：

对于并集：

设$x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，则存在$i\in I$，使$x\in X_i$，由于$f\langle K\rangle=I$，因此存在$k\in K$，使$i=f(k)$，故$x\in X_{f(k)}$，因此$x\in\bigcup\limits_{k\in K}X_{f(k)}$.

反过来，设$x\in\bigcup\limits_{k\in K}X_{f(k)}$，因此存在$k\in K$，使$x\in X_{f(k)}$，设$i=f(k)$，则$x\in X_i$，因此$x\in\bigcup\limits_{i\in I}X_i$.

对于交集：

设$x\in\bigcap\limits_{i\in I}X_i$，对任意$k\in K$，都有$f(k)\in I$，即$x\in X_{f(k)}$，因此$x\in\bigcap\limits_{k\in K}X_{f(k)}$.

反过来，设$x\in\bigcap\limits_{k\in K}X_{f(k)}$，$i\in I$，则存在在$k\in K$，使$i=f(k)$，因此$x\in X_i$，故$x\in\bigcap\limits_{i\in I}X_i$.

设$(X_i)_{i\in I}$为F的子集族，在$I=\varnothing$的情况下，f为K到I的满射，则$K=\varnothing$，因此$\bigcap\limits_{k\in K}X_{f(k)}=F$，$\bigcap\limits_{i\in I}X_i=F$，得证.

定理 24. $(X_i)_{i\in I}$为集族，$(\forall i)(\forall k)(i\in I$与$k\in I\Rightarrow X_i=X_k)$，则$(\forall a)(a\in I\Rightarrow\bigcup_{i\in I}X_i=X_a)$，当$I\neq\varnothing$时，$(\forall a)(a\in I\Rightarrow\bigcap_{i\in I}X_i=X_a)$.

证明：令f为常数映射$i\to a(i\in I,a\in\{a\})$，其为I到$\{a\}$的满射，根据定理23可证.

定义 48. 多个集合的并集（*réunion d'ensembles*），多个集合的交集（*intersection d'ensembles*）

集族Id_F的并集，也称为F的并集，记作$\bigcup_{X\in F}X$；当$F\neq\varnothing$时，集族Id_F的交集，称为F的交集，记作$\bigcap_{X\in F}X$.

补充定理 97.

（*1*）如果$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为集族，且$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i\subset Y_i)$，则$\bigcup_{i\in I}X_i\subset\bigcup_{i\in I}Y_i$；如果$I\neq\varnothing$，则$\bigcap_{i\in I}X_i\subset\bigcap_{i\in I}Y_i$.

（*2*）如果$(X_i)_{i\in I}$为集族，且$J\subset I$，则$\bigcup_{i\in J}X_i\subset\bigcup_{i\in I}X_i$；如果$J\neq\varnothing$，则$\bigcap_{i\in I}X_i\subset\bigcap_{i\in J}X_i$.

证明：

（1）设$x\in\bigcup_{i\in I}X_i$，则存在$i\in I$，使$x\in X_i$，因此$x\in Y_i$，故$x\in\bigcup_{i\in I}Y_i$.

另一方面，设$x\in\bigcap_{i\in I}X_i$，则对任意$i\in I$，$x\in X_i$，因此$x\in Y_i$，故$x\in\bigcap_{i\in I}Y_i$. 得证.

（2）设$x\in\bigcup_{i\in J}X_i$，则存在$i\in J$，使$x\in X_i$. 由于$J\subset I$，因此$i\in I$，故$x\in\bigcup_{i\in I}X_i$.

另一方面，设$x\in\bigcap_{i\in I}X_i$，则对任意$i\in I$，$x\in X_i$. 由于$J\subset I$，因此对任意$i\in J$，故$x\in\bigcap_{i\in J}X_i$. 得证.

定理 25. 并集和交集的结合律

$(X_i)_{i\in I}$为集族，其指标集$I=\bigcup_{l\in L}J_l$，则$\bigcup_{i\in I}X_i=\bigcup_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_I}X_i)$，如果$L\neq\varnothing$，并且对任意$l\in L$，$J_l\neq\varnothing$，则$\bigcap_{i\in I}X_i=\bigcap_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_I}X_i)$.

证明：

对于并集：

设$x\in\bigcup_{i\in I}X_i$，则存在$i\in I$，使$x\in X_i$，由于$I=\bigcup_{l\in L}J_l$，因此存在$l\in L$，使$i\in J_l$，因此$x\in\bigcup_{i\in J_I}X_i$，故$\bigcup_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_I}X_i)$.

反过来，设$x\in\bigcup_{i\in I}X_i$，则存在$l\in L$，使$x\in\bigcup_{i\in J_I}X_i$，因此存在$i\in J_l$，使$x\in X_i$，由于$I=\bigcup_{l\in L}J_l$，因此$i\in I$，故$x\in\bigcup_{i\in I}X_i$.

对于交集：

设$x\in\bigcap_{i\in I}X_i$，则对任意$i\in I$，$x\in X_i$，对任意$l\in L$，由于$J_l\subset I$，因此$x\in\bigcap_{i\in J_I}X_i$，故$x\in\bigcap_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_I}X_i)$.

反过来，设$x \in \bigcap_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_I} X_i)$，则对任意$l \in L$，$x \in \bigcap_{i\in J_I} X_i$，由于$I = \bigcup_{l\in L} J_l$，因此对任意$i \in I$，存在$l \in L$，使$i \in J_l$，因此$x \in X_i$，故$x \in \bigcap_{i\in I} X_i$.

补充定理 98.

$(X_i)_{i\in I}$为子集族，其指标集$I = \bigcup_{l\in L} J_l$，则$\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_I} X_i)$.

证明：

设$(X_i)_{i\in I}$为F的子集族.

如果$L \neq \varnothing$，并且对所有$l \in L$，$J_l \neq \varnothing$，根据定理25、补充定理96（2）可证.

如果$L = \varnothing$，根据补充定理91，$I = \varnothing$，故$\bigcap_{i\in I} X_i = F$，$\bigcap_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_I} X_i) = F$.

如果$L \neq \varnothing$，但存在l，使$J_L = \varnothing$，则$\bigcap_{i\in J_I} X_i = F$. 类似定理25仍然可证.

定理 26.

$(X_i)_{i\in I}$为A的子集族，F为A到B的对应，则$F\langle\bigcup_{i\in I} X_i\rangle = \bigcup_{i\in I} F\langle X_i\rangle$，$F\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle \subset \bigcap_{i\in I} F\langle X_i\rangle$.

证明：

$(\exists x)(x \in \bigcup_{i\in I} X_i$与$y \in F(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists i)(i \in I$与$x \in X_i$与$y \in F(x))$，等价于$(\exists i)(i \in I$与$y \in F(X_i))$，因此$y \in \bigcup_{i\in I} F\langle X_i\rangle$.

对任意$i \in I$，$\bigcap_{i\in I} X_i \subset X_i$，根据定理12，$F\langle\bigcup_{i\in I} X_i\rangle \subset F\langle X_i\rangle$，故$F\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle \subset \bigcap_{i\in I} F\langle X_i\rangle$.

定理 27.

f为A到B的映射，$(Y_i)_{i\in I}$为B的子集族，则$f^{-1}\langle\bigcap_{i\in I} Y_i\rangle = \bigcap_{i\in I} f^{-1}\langle Y_i\rangle$.

证明：设$x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}\langle Y_i\rangle$，根据补充定理70（1），$x \in A$，且对任意$i \in I$，$f(x) \in Y_i$，因此$f(x) \in \bigcap_{i\in I} Y_i$，故$x \in f^{-1}\langle\bigcap_{i\in I} Y_i\rangle$. 另一方面，根据定理26，$f^{-1}\langle\bigcap_{i\in I} Y_i\rangle \subset \bigcap_{i\in I} f^{-1}\langle Y_i\rangle$. 得证.

定理 28.

$(X_i)_{i\in I}$为A的子集族，f为A到B的单射，且$I \neq \varnothing$，则$f\langle\bigcap_{i\in I} X_i\rangle = \bigcap_{i\in I} f\langle X_i\rangle$.

证明：设f的图为F，令$i = (\Delta_f\langle A\rangle, f\langle A\rangle, B)$，$g = (F, A, f\langle A\rangle)$. 则$g$为双射，$i$为单射，$f = i \circ g$. 令$h$为$g$的逆映射，则对任意$X \subset A$，$f\langle X\rangle = h^{-1}\langle X\rangle$，根据定理27得证.

定理 29.

设$(X_i)_{i\in I}$为E的子集族，则$\complement_E(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I}(\complement_E X_i)$，$\complement_E(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I}(\complement_E X_i)$.

证明：设$x \in \complement_E(\bigcup\limits_{i\in I} X_i)$，则$x \in E$，且对任意$i \in I$，$x \notin X_i$，$x \in \complement_E X_i$，因此$x \in \bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$.

反过来，设$x \in \bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$，根据补充定理96（1），$x \in E$，同时，若$x \in \bigcup\limits_{i\in I} X_i$，则存在$i$，使$x \in X_i$，与$x \in \bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$矛盾，故$x \notin \bigcup\limits_{i\in I} X_i$，因此，$x \in \complement_E(\bigcup\limits_{i\in I} X_i)$. 故$\complement_E(\bigcup\limits_{i\in I} X_i) = \bigcap\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$. 根据补充定理12，$\complement_E(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(\complement_E X_i)$.

定义 49. 两个集合的并集与交集（*réunion et intersection de deux ensembles*），迹（*trace*）

$\bigcup\limits_{X\in\{A,B\}} X$称为$A$和$B$的并集，记作$A\cup B$，$\bigcap\limits_{X\in\{A,B\}} X$称为$A$和$B$的交集，记作$A\cap B$. $A\cap B$又称A在B上的迹.

定义 50. 三元集合（*ensemble à trois éléments*），四元集合（*ensemble à quatre éléments*）

$\{x,y\}\cup\{z\}$称为三元集合，记作$\{x,y,z\}$；$\{x,y,z\}\cup\{t\}$称为四元集合，记作$\{x,y,z,t\}$.

补充定理 99.

$A\cup B = \{x|x \in A$或$x \in B\}$，$A\cap B = \{x|x \in A$与$x \in B\}$.

证明：$A\cup B = \{x|(\exists i)(i \in \{A,B\}$与$x \in i)\}$，等于$\{x|(\exists i)((i = A$与$x \in A)$或$(i = B$或$x \in B))\}$，等于$\{x|x \in A$或$x \in B\}$. 同理可证$A\cap B = \{x|x \in A$与$x \in B\}$.

补充定理 100.

（*1*）$A\cup B = B\cup A$；

（*2*）$A\cap B = B\cap A$；

（*3*）$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$；

（*4*）$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$；

（*5*）$(A\cup B)\cap C = (A\cap B)\cup(B\cap C)$；

（*6*）$(A\cap B)\cup C = (A\cup B)\cap(B\cup C)$；

（*7*）$\complement_E(A\cup B) = (\complement_E A)\cap(\complement_E B)$；

（*8*）$\complement_E(A\cap B) = (\complement_E A)\cup(\complement_E B)$；

（*9*）$A\cup\complement_E A = E$；

（*10*）$A\cap\complement_E A = \varnothing$.

证明：根据补充定理99可证.

补充定理 101.

（*1*）$A\subset B \Leftrightarrow A\cup B = B$.

（*2*）$A\subset B \Leftrightarrow A\cap B = A$.

证明：根据补充定理99可证.

补充定理 102.

令G为E到F的对应，A和B是E的子集，则$G(A\cup B)=G(A)\cup G(B)$，$G(A\cap B)\subset G(A)\cap G(B)$.

证明：根据定理26可证.

补充定理 103.

令f为F到E的映射，A和B是E的子集，则$f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

证明：根据定理27可证.

补充定理 104.

令G为图，$X\subset pr_1G$，$pr_2G\subset B$，则$pr_1(G\cap X\times B)=X$.

证明：$(x,y)\in(G\cap X\times B)\Leftrightarrow(x,y)\in G$与$x\in X$与$y\in B$，由于$pr_2G\subset B$，故$(x,y)\in G\Rightarrow y\in B$，因此$(x,y)\in(G\cap X\times B)\Leftrightarrow(x,y)\in G$与$x\in X$，故$(\exists y)((x,y)\in(G\cap X\times B))\Leftrightarrow(\exists y)((x,y)\in G)$与$x\in X$，又因为$X\subset pr_1G$，故$(\exists y)((x,y)\in(G\cap X\times B))\Leftrightarrow x\in X$，得证.

定义 51. 通过子集导出的函数（*fonction déduite par passage au le sous-ensemble*），通过子集导出的映射（*application déduite par passage au le sous-ensemble*）

令函数$f=(F,A,B)$，$X\subset A$，则$(F\cap X\times B,X,B)$称为f通过A的子集X导出的函数，或称为f通过A的子集X导出的映射. 如果$pr_2F\subset Y$，则(F,A,Y)称为f通过B的子集Y导出的函数，或称为f通过B的子集Y导出的映射. 如果$(pr_2F\cap X\times B)\subset Z$，则$(F\cap X\times B,X,Z)$称为$f$通过$A$的子集$X$和$B$的子集$Z$导出的函数，或称为$f$通过$A$的子集$X$和$B$的子集$Z$导出的映射.

补充定理 105.

令函数$f=(F,A,B)$，$X\subset A$，则(f通过A的子集X导出的函数)$=f|X$，并且f通过A的子集X导出的函数和f在X上重合.

证明：设$f|X$的图为G，根据补充定理64（1），$x\in X$与$y=f(x)\Leftrightarrow(x,y)\in G$，$x\in A$与$y=f(x)\Leftrightarrow(x,y)\in F$. 根据补充定理23（2），$x\in X$与$y\in B\Leftrightarrow(x,y)\in X\times B$. 根据补充定理64（3），$x\in A\Rightarrow f(x)\in B$. 因此$(x,y)\in(F\cap X\times B)\Leftrightarrow x\in A$与$y=f(x)$与$x\in X$与$y\in B$，等价于$x\in X$与$y=f(x)$，得证.

补充定理 106.

令函数$f=(F,A,B)$，$X\subset A$，$pr_2F\subset Y$，$(pr_2F\cap X\times B)\subset Z$，如果$f$为单射，则$f$通过$A$的子集$X$导出的函数、$f$通过$B$的子集$Y$导出的函数、$f$通过$A$的子集$X$和$B$的子集$Z$导出的函数均为单射.

证明：根据补充定理105、补充定理72可证.

定理 30.

f为A到B的映射，$Y\subset B$，则$f^{-1}(B-Y)=f^{-1}(B)-f^{-1}(Y)$.

证明：设$x\in f^{-1}(B-Y)$，根据补充定理70（1），$x\in A$，且$f(x)\in B-Y$．因此$f(x)\in B$，且$f(x)\notin Y$，根据补充定理70（1），$x\in(f^{-1}(B)-f^{-1}(Y))$．反过来，$x\in f^{-1}(B)-f^{-1}(Y)$，根据补充定理70（1），$x\in$A，$f(x)\in B$，且$f(x)\notin Y$，因此$f(x)\in(B-Y)$，根据补充定理70（1），$x\in f^{-1}(B-Y)$.

定理 31.

f为A到B的单射，$X\subset A$，则$f(A-X)=f-(A)-f(X)$.

证明：设f的图为F，令$i=(\Delta_{f\langle A\rangle},f\langle A\rangle,B)$，$g=(F,A,f\langle A\rangle)$．则$g$为双射，$i$为单射，$f=i\circ g$．令$h$为$g$的逆映射，则对任意$X\subset A$，$f\langle X\rangle=h^{-1}\langle X\rangle$，根据定理30得证.

定义 52. 覆盖（*recouvrement*），更细的覆盖（*recouvrement plus fin*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，如果$E=\bigcup\limits_{i\in I}X_i$，则称$(X_i)_{i\in I}$为$E$的覆盖.

如果$(X_i)_{i\in I}$和$(Y_k)_{k\in K}$都是E的覆盖，并且$(\forall k)(k\in K\Rightarrow(\exists i)(Y_k\subset X_i))$，则称$(Y_k)_{k\in K}$为比$(X_i)_{i\in I}$更细的覆盖.

注：

从上下文来看，原书对覆盖的定义有误.

在原书中，“更细”这个概念包括与自身相等的情况，即一个覆盖比自身更细.

补充定理 107.

覆盖R比覆盖R'更细，覆盖R'比覆盖R''更细，则覆盖R比覆盖R''更细.

证明：根据定义可证.

补充定理 108.

$(X_i)_{i\in I}$和$(X_i)_{i\in J}$都是E的覆盖，且$J\subset I$，则$(X_i)_{i\in J}$比$(X_i)_{i\in I}$更细.

证明：根据定义可证.

补充定理 109.

$I\neq\varnothing$，$K\neq\varnothing$，$(X_i)_{i\in I}$和$(Y_k)_{k\in K}$都是E的覆盖，则$(X_i\cap Y_k)_{(i,k)\in I\times K}$也是$E$的覆盖，并且比$(X_i)_{i\in I}$和$(Y_k)_{k\in K}$更细.

证明：设$x\in E$，则存在i、k，使$x\in X_i$，$x\in Y_k$，则$x\in(X_i\cap Y_k)$，且$(i,k)\in I\times K$，故$x\in(X_i\cap Y_k)_{(i,k)}\in I\times K$．如果$k\in K$，则$X_i\cap Y_k\subset Y_k$，故$(X_i\cap Y_k)_{(i,k)}\in I\times K$比$(Y_k)_{k\in K}$更细，同理可证比$(X_i)_{i\in I}$更细.

补充定理 110.

$I \neq \varnothing$，$K \neq \varnothing$，$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_k)_{k\in K}$、$(Z_l)_{l\in L}$都是E的覆盖，如果对任意$l \in L$，均存在i、k，使$Z_l \subset X_i$，$Z_l \subset Y_k$，则$(Z_l)_{l\in L}$是比$(X_i \cap Y_k)_{(i,k)\in I\times K}$更细的覆盖.

证明：对任意$l \in L$，均存在i、k，使$Z_l \subset X_i$，$Z_l \subset Y_k$，则$Z_l \subset X_i \cap Y_k$，得证.

定义 53. 覆盖的像（*image du recouvrement*），覆盖的原像（*image réciproque du recouvrement*）

如果$(X_i)_{i\in I}$为A的覆盖，f为A到B的满射，则$(f\langle X_i\rangle)_{i\in I}$称为$(X_i)_{i\in I}$在$f$下的像.

如果$(X_i)_{i\in I}$是A的覆盖，g是C到A的映射，则$(g^{-1}\langle X_i\rangle)_{i\in I}$称为$(X_i)_{i\in I}$在$g$下的原像.

补充定理 111. 覆盖和像和原像都是覆盖

如果$(X_i)_{i\in I}$为A的覆盖，f为A到B的满射，g为C到A的映射，则$(X_i)_{i\in I}$在f下的像是B的覆盖，$(X_i)_{i\in I}$在g下的原像是C的覆盖.

证明：根据定理26可证.

定义 54. 覆盖的乘积（*produit des recouvrements*）

$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，$(Y_k)_{k\in K}$为F的覆盖，则$(X_i \times Y_k)_{(i,k)\in I\times K}$称为$E$的覆盖$(X_i)_{i\in I}$和$F$的覆盖$(Y_k)_{k\in K}$的乘积.

补充定理 112.

$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，$(Y_k)_{k\in K}$为F的覆盖，则两个覆盖的乘积是$E \times F$的覆盖.

证明：设$z \in E \times F$，则$pr_1 z \in E$，$pr_2 z \in F$. 存在$i \in I$，使$pr_1 z \in X_i$，存在$k \in K$，使$pr_2 z \in Y_k$. 因此$z \in X_i \times Y_k$，得证.

定理 32.

（1）$(X_i)_{i\in I}$是E的覆盖，f、g是两个定义域为E的函数，如果对任意$i \in I$，f和g均在X_i上重合，则f和g在E上重合.

（2）$(X_i)_{i\in I}$是E的覆盖，$(f_i)_{i\in I}$是集族，其中，对任意$i \in I$，f_i均为函数，且定义域为X_i，到达域为F. 如果$(\forall i)(\forall k)((i,k) \in (I \times I) \Rightarrow (f_i$和$f_k$在$x_i \cap X_k$上重合$))$，则存在唯一的函数$f$，以$E$为定义域，以$F$为到达域，且当$i \in I$时，是$f_i$在$E$上的延拓.

证明：

（1）设$x \in E$，则存在$i \in I$，使$x \in X_i$，故$f(x) = g(x)$，得证.

（2）令f_i的图为G_i，$G = \bigcup\limits_{i\in I} G_i$，设$(x,y) \in G$，$(x,y') \in G$，则存在$i \in I$、$k \in I$，使$(x,y) \in G_i$，$(x,y') \in G_k$. 因此$x \in X_i \cap X_k$，$y = f_i(x)$，$y' = f_k(x)$，因此$y = y'$，故$G$为函数图. 又因为$pr_1 G = (\exists y)((x,y) \in \bigcup\limits_{i\in I} G_i)$，即$(\exists y)(\exists i)(i \in I$与$(x,y) \in G_i)$，即$(\exists i)(i \in I$与$(\exists y)(x,y) \in G_i)$，即$\bigcup\limits_{i\in I} pr_1 G_i$，即$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$，即E. 令$(G,E,F)$为函数$f$，当$i \in I$时，$(x,y) \in$

$G_i \Rightarrow (x,y) \in G$，因此当$x \in X_i$时，$f_i(x) = f(x)$，即f是$f_i$在$E$上的延拓．因此，函数$f$即为所求．同时，根据定理32（1），$f$具有唯一性．得证．

注：因原书对覆盖的定义更正，本定理也做相应更正．

定义 55. 不相交的集合（*ensembles disjoint*），相交的集合（*ensembles qui rencontrent*），两两不相交的集合（*ensembles mutuellement disjoint/ensembles deux à deux disjoint*）

如果$A \cap B = \varnothing$，则称A和B不相交．如果$A \cap B \neq \varnothing$，则称$A$和$B$相交．对于集族$(X_i)_{i \in I}$，如果$(\forall i)(\forall k)(i \in I$与$k \in I$与$i \neq k \Rightarrow X_i \cap X_k = \varnothing)$，则称该集族两两不相交．

补充定理 113.

f为A到B的映射，$(Y_i)_{i \in I}$为B的子集族且两两不相交，则$(f^{-1}\langle Y_i \rangle)_{i \in I}$为$A$的子集族且两两不相交．

证明：根据定理27可证．

定理 33.

$(X_i)_{i \in I}$是两两不相交的集族，$(f_i)_{i \in I}$是函数族，且定义域为X_i，到达域为F，则存在唯一的函数f，以$\bigcup\limits_{i \in I} X_i$为定义域，以$F$为到达域，且当$i \in I$时，是$f_i$在$\bigcup\limits_{i \in I} X_i$上的延拓．

证明：根据定理32（2）可证．

定义 56. 划分（*parition*）

如果一个两两不相交的集族是E的覆盖，则称其为E的划分．

补充定理 114.

（*1*）E的划分的并集是E．

（*2*）“Δ_G为E的划分”是G上的集合化公式．

证明：

（1）根据定义可证．

（2）如果Δ_G为E的划分，根据补充定理114（1），对任意$x \in G$，$x \subset E$，故$G \subset \mathcal{P}(E)$，根据证明规则52可证．

注：集合$\{G | \Delta_G$为E的划分$\}$的与严肃数目．为E的划分数目（仅指标集不同的划分，为同一个划分）．

补充定理 115.

f为E到F的映射，则集族$(f^{-1}(y))y \in f\langle E \rangle$是$E$的划分．

证明：设$x \in f^{-1}(y_1)$、$x \in f^{-1}(y_2)$，根据补充定理70（3），$f(x) = y_1$，$f(x) = y_2$，因此$y_1 = y_2$，故集族$(f^{-1}(y))y \in f\langle E\rangle$两两不相交．对任意$x \in f^{-1}(y)$，根据补充定理70（3），$x \in E$，

反过来，如果$x \in E$，根据补充定理70（4），$x \in f^{-1}(f(x))$，因此$\bigcup\limits_{y \in f\langle E\rangle}(f^{-1}(y)) = E$．

定理 34.

对于集族$(X_i)_{i\in I}$，存在满足下列性质的X：存在两两不相交的集族$(X'i)_{i\in I}$，使$X = \bigcup\limits_{i\in I}(X'_i)_{i\in I}$，并且，对任意$i \in I$，存在$X_i$到$X'_i$的双射．

证明：令$A = \bigcup\limits_{i\in I} X_i$．由于($z$为有序对)与$pr_1 z \in X_i$与$pr_2 z = i \Rightarrow z \in A \times I$，因此其为集合化公式，令$X'_i$为$\{z|$($z$为有序对)与$pr_1 z \in X_i$与$pr_2 z = i\}$，如果$i \in I$，则$x \to (x, i)(x \in X_i)$为$X_i$到$X'_i$的双射，且当$i \neq k$时，假设$z \in (X'_i \cap X'_k)$，则$pr_1 z = i$，$pr_1 z = k$，矛盾，故$X'_i \cap X'_k = \varnothing$，因此，$(X'_i)_{i\in I}$两两不相交．

定义 57. 集族的和（*somme d'une famille*），到和的规范映射（*application canonique dans somme*）

$(X_i)_{i\in I}$为集族，则称$\bigcup\limits_{i\in I}(X_i \times \{i\})_{i\in I}$为其和．对任意$i \in I$，映射$x \to (x, i)(x \in X_i)$称为$X_i$到$(X_i)_{i\in I}$的和的规范映射．

定义 58. 集合和单元素集合的和（*somme d'un ensemble et un ensemble à un seul élément*），将元素添加到集合得到的集合（*ensemble obtenu par adjonction d'un élément à un ensemble*）

如果$a \notin X$，则$X \cup \{a\}$称为X和$\{a\}$的和，或称为将a添加到X得到的集合．

定理 35.

$(X_i)_{i\in I}$为两两不相交的集族，A为其并，S为其和，则存在A到S的双射．

证明：对任意$i \in I$，$x \to (x, i)(x \in X_i)$为X_i到$X_i \times \{i\}$的双射，根据定理33，存在唯一的函数f，以A为定义域，以$A \times I$为到达域，且当$i \in I$时，是$x \to (x, i)(x \in X_i)$在A上的延拓．f即为A到S的双射．

补充定理 116.

（*1*）$(X_i)_{i\in I}$为集族，A为其并，S为其和，则存在S到A的满射，存在A到S的单射．

（*2*）$(X_i)_{i\in I}$为集族，S为其和，对任意$i \in I$，令f_i为X_i到S的规范映射，$Y_i = f_i\langle X_i\rangle$，则$(Y_i)_{i\in I}$为$S$的划分．

（*3*）$(X_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i \in I$，令f_i为X_i到S的规范映射，$Y_i = f_i\langle X_i\rangle$，则对任意$i \in I$，$x \to (x, i)(x \in X_i)$为$X_i$到$Y_i$的双射．

（*4*）$(X_i)_{i\in\varnothing}$的和为$\varnothing$．

（*5*）$(\varnothing)_{i\in I}$的和为$\varnothing$．

证明：

（1） $z \to pr_1 z (z \in S)$为S到A的满射．其右逆为A到S的单射．

（2）根据定义可证．

（3）根据定义可证．

（4）根据定义可证．

（5）根据定义可证．

习题 54.

G为图，求证以下三个公式等价：

公式一：G为函数图；

公式二：$G^{-1}(X \cap Y) = G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y)$；

公式三：$X \cap Y = \varnothing \Rightarrow G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y) = \varnothing$.

证明：

$(G^{-1}(X \cap Y) = G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y)) \Leftrightarrow ((\exists y)((x,y) \in G$与$y \in X)$与$(\exists y)((x,y) \in G$与$y \in Y) \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G$与$y \in X$与$y \in Y))$．如果$G$为函数图，则等价于$f(x) \in X$与$x \in pr_1 G$与$f(x) \in Y \Leftrightarrow f(x) \in X$与$x \in pr_1 G$与$f(x) \in Y$，故公式一$\Rightarrow$公式二．

$X \cap Y = \varnothing$，则$G^{-1}(X \cap Y) = \varnothing$，如果$G^{-1}(X \cap Y) = G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y)$，则$G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y) = \varnothing$，即公式二$\Rightarrow$公式三．

如果$X \cap Y = \varnothing \Rightarrow G^{-1}(X) \cap G^{-1}(Y) = \varnothing$，设$(x,y) \in G$、$(x,y') \in G$，假设$y \neq y'$，则$\{y\} \cap \{y'\} = \varnothing$，则$G^{-1}(\{y\}) \cap G^{-1}(\{y'\}) = \varnothing$，但$x \in G^{-1}(\{y\})$、$x \in G^{-1}(\{y'\})$，矛盾，故公式三$\Rightarrow$公式一．

习题 55.

G为图，求证：

（1）$G(X) = pr_2(G \cap (X \times pr_2 G))$；

（2）$G(X) = G(X \cap pr_1 G)$.

证明：

（1）$pr_2(G \cap (X \times pr_2 G)) = \{y | (\exists x)((x,y) \in G$与$x \in X$与$y \in pr_2 G)\}$，根据补充定理29，$(x,y) \in G \Rightarrow y \in pr_2 G$，故其等于$\{y | (\exists x)((x,y) \in G$与$x \in X)\}$，即$G(X)$.

（2）$G(X \cap pr_1 G) = \{y | (\exists x)((x,y) \in G$与$x \in X$与$x \in pr_1 G)\}$，根据补充定理29，$(x,y) \in G \Rightarrow x \in pr_1 G$，故其等于$\{y | (\exists x)((x,y) \in G$与$x \in X)\}$，即$G(X)$.

习题 56.

求证：如果$Y \cap Y' = \varnothing$，则$(Y' \times Z) \circ (X \times Y) = \varnothing$；如果$Y \cap Y' \neq \varnothing$，则$(Y' \times Z) \circ (X \times Y) = X \times Z$.

证明：$(x,z)\in(Y'\times Z)\circ(X\times Y)\Leftrightarrow(\exists y)(x\in X$与$y\in Y$与$y\in Y'$与$z\in Z)$，根据补充定理23（2），等价于$(x\in X$与$z\in Z)$与$(\exists y)(y\in(Y\cap Y'))$，等价于$(x,z)\in X\times Z$与$(\exists y)(y\in(Y\cap Y'))$．得证．

习题 57.

$(G_i)_{i\in I}$为图族，求证：对任意X，$(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\langle X\rangle=\bigcup\limits_{i\in I}G_i\langle X\rangle$，对任意$x$，$(\bigcap\limits_{i\in I}G_i)\langle\{x\}\rangle=\bigcap\limits_{i\in I}G_i\langle\{x\}\rangle$，并给出图$G$、$H$的例子，使$G\langle X\rangle\cap H\langle X\rangle\neq(G\cap H)\langle X\rangle$．

证明：

对于并集：

若$y\in(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\langle X\rangle$，则存在$x\in X$，使$(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，故存在$i\in I$，使$(x,y)\in G_i$，因此$y\in G_i\langle X\rangle$，故$y\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i\langle X\rangle$．

反过来，若$y\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i\langle X\rangle$，则存在$i\in I$，使$y\in G_i\langle X\rangle$，故存在$x\in X$，使$(x,y)\in G_i$，因此$(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，故$y\in(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\langle X\rangle$．

对于交集：

若$y\in(\bigcap\limits_{i\in I}G_i)\langle\{x\}\rangle$，则$(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}G_i$，故对任意$i\in I$，$(x,y)\in G_i$，因此$y\in G_i\langle\{x\}\rangle$，故$y\in\bigcap\limits_{i\in I}G_i\langle\{x\}\rangle$．

反过来，若$y\in\bigcap\limits_{i\in I}G_i\langle\{x\}\rangle$，则对任意$i\in I$，$y\in G_i\langle\{x\}\rangle$，故$(x,y)\in G_i$，则$(x,y)\in\bigcap\limits_{i\in I}G_i$，因此$y\in(\bigcap\limits_{i\in I}G_i)\langle\{x\}\rangle$．

设a、b、c互不相等，令$G=\{(b,a),(a,b),(b,c)\}$，$H=\{(b,b),(b,a),(b,c)\}$，$X=\{a,b\}$，则$G\langle X\rangle\cap H\langle X\rangle=\{a,b,c\}$，$(G\cap H)\langle X\rangle=\{a,c\}$．

习题 58.

$(G_i)_{i\in I}$为图族，H为图，求证：$(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\circ H=\bigcup\limits_{i\in I}(G_i\circ H)$，$H\circ(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(H\circ G_i)$．

证明：

若$(x,z)\in(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\circ H$，则存在$y$，使$(x,y)\in H$，$(y,z)\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，故对任意$i\in I$，$(y,z)\in G_i$，因此$(x,z)\in G_i\circ H$，故$(x,z)\in\bigcup\limits_{i\in I}(G_i\circ H)$．

反过来，若$(x,z)\in\bigcup\limits_{i\in I}(G_i\circ H)$，则对任意$i\in I$，$(x,z)\in G_i\circ H$，则存在$y$，使$(x,y)\in H$，$(y,z)\in G_i$，故$(y,z)\in\bigcup\limits_{i\in I}G_i$，因此$(x,z)\in(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)\circ H$．

同理可证$H\circ(\bigcup\limits_{i\in I}G_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(H\circ G_i)$．

习题 59.

G、H、H'为图，求证：当且仅当$(\forall H)(\forall H')((H\cap H')\circ G=(H\circ G)\cap(H'\circ G))$时，$G$为函数图．

证明：

如果G为函数图，设$(x,z)\in(H\cap H')\circ G$，则存在$y$，使$(x,y)\in G$，$(y,z)\in H\cap H'$，因此$(x,z)\in(H\circ G)\cap(H'\circ G)$.

反过来，如果$(x,z)\in(H\circ G)\cap(H'\circ G)$，则存在$y$、$y'$，使$(x,y)\in G$，$(y,z)\in H$，$(x,y')\in G$，$(y',z)\in H'$．由于$G$为函数图，因此$y=y'$，故$(x,z)\in(H\cap H')\circ G$.

如果$(H\cap H')\circ G=(H\circ G)\cap(H'\circ G)$，设$(x,y)\in G$、$(x,y')\in G$，令$H=\{(y,z)\}$，$H'=\{(y',z)\}$，如果$y\neq y'$，则$H\cap H'=\varnothing$，故$(H\cap H')\circ G=\varnothing$．但$(x,z)\in(H\circ G)\cap(H'\circ G)$，矛盾．故$y=y'$，因此$G$为函数图.

习题 60.

G、H、K为图，求证：$(H\circ G)\cap K\subset(H\cap(K\circ G^{-1}))\circ(G\cap(H^{-1}\circ K))$.

证明：若$(x,z)\in(H\circ G)\cap K$，则$(x,z)\in K$，且存在y，使$(x,y)\in G$、$(y,z)\in H$．则$(x,y)\in H^{-1}\circ K$，因此$(x,y)\in(G\cap(H^{-1}\circ K))$．同时，$(y,z)\in K\circ G^{-1}$，因此$(y,z)\in(H\cap(K\circ G^{-1}))$．故$(x,z)\in(H\cap(K\circ G^{-1}))\circ(G\cap(H^{-1}\circ K))$．得证.

习题 61.

$H=(X_i)_{i\in I}$和$G=(Y_k)_{k\in K}$都是E的覆盖，

（1）如果G是E的划分，H是比G更细的覆盖，且对任意$k\in K$，$Y_k\neq\varnothing$．求证：对任意$k\in K$，存在$i\in I$，使$X_i\subset Y_k$.

（2）写出E的两个覆盖H和G，H是比G更细的覆盖，但（1）中的性质不成立.

（3）写出E的两个划分H和G，对任意$k\in K$，存在$i\in I$，使$X_i\subset Y_k$，但H并不是比G更细的覆盖.

证明：

（1）对任意$k\in K$，设$x\in Y_k$，故存在$i\in I$，使$x\in X_i$，由于H是比G更细的覆盖，因此存在$k'\in K$，使$X_i\subset Y'_k$．假设$k\neq k'$，由于G是E的划分，故$Y'_k\cap Y_k=\varnothing$，矛盾，因此$k=k'$，故$X_i\subset Y_k$.

（2）设a、b互不相等，$E=\{a,b\}$，$H=\Delta_{\{E\}}$，$G=\Delta_{\{\{a\},E\}}$.

（3）设a、b、c、d互不相等，$E=\{a,b,c,d\}$，$H=\Delta_{\{\{a\},\{d\},\{b,c\}\}}$，$G=\Delta_{\{\{a,b\},\{c,d\}\}}$.

2.5 集族的乘积（Produit d'une famille d'ensembles）

显式公理 3. 幂集公理

$(\forall X)Coll_Y(Y\subset X)$.

定义 59. 幂集（*ensemble des parties*）

$\{Y|Y\subset X\}$称为X的幂集，记作$\mathcal{P}(X)$或2^X.

补充定理 117.

（*1*）$\mathcal{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$；

（*2*）$\mathcal{P}(\{x\})=\{\varnothing,\{x\}\}$.

证明：

（1）根据补充定理18（2）可证.

（2）根据补充定理18可证.

补充定理 118.

$(X\subset Y)\Rightarrow(\mathcal{P}(X)\subset\mathcal{P}(Y))$.

证明：设$x\in\mathcal{P}(X)$，则$x\subset X$，故$x\subset Y$，因此$x\in\mathcal{P}(Y)$，得证.

定义 60. 在子集上的规范扩展（*extension canonique aux ensembles de parties*），在子集上的逆扩展（*extension réciproque aux ensembles de parties*）

令F为A到B的对应，函数$X\to F\langle X\rangle(X\in\mathcal{P}(A),F\langle X\rangle\in\mathcal{P}(B))$称为$F$在子集上的规范扩展，记作$\hat{F}$. 函数$Y\to F^{-1}\langle Y\rangle(Y\in\mathcal{P}(A),F^{-1}\langle Y\rangle\in\mathcal{P}(A))$，称为$F$在子集上的逆扩展.

补充定理 119.

（*1*）令F为A到B的对应，F'为B到C的对应，则$F'\circ F$在子集上的规范扩展为$\hat{F'}\circ\hat{F}$.

（*2*）令F为A到B的双射，则F^{-1}在子集上的规范扩展为$(\hat{F})^{-1}$.

（*3*）Id_A在子集上的规范扩展为$Id_{\mathcal{P}(A)}$.

证明：

（1）根据定理16，$F'\circ F\langle X\rangle=F'\langle F\langle X\rangle\rangle$，且定义域均为$\mathcal{P}(A)$、到达域均为$\mathcal{P}(C)$，得证.

（2）根据补充定理78可证.

（3）根据补充定理66（4）可证.

定理 36.

（*1*）设f为E到F的满射，则$\hat{f}$是$\mathcal{P}(E)$到$\mathcal{P}(F)$的满射.

（*2*）设f为E到F的单射，则$\hat{f}$是$\mathcal{P}(E)$到$\mathcal{P}(F)$的单射.

证明：

（1）设s是f的右逆，则$f\circ s=Id_F$，根据补充定理119（1），$\hat{f}\circ\hat{s}=Id_{\mathcal{P}(F)}$，得证.

（2）如果$E=\varnothing$，根据补充定理18（2），$\mathcal{P}(E)=\{\varnothing\}$，根据补充定理74（2），$\hat{f}$是单射. 如果$E\neq\varnothing$，设$r$是$f$的左逆，则$r\circ f=Id_E$，根据补充定理119（1），$\hat{r}\circ\hat{f}=Id\mathcal{P}(E)$，则$\hat{f}$是单射.

补充定理 120. 所有从一个集合到另一个集合的映射的图能够组成集合

(G为图)与$(pr_1G=E)$与$(pr_2G\subset F)$是G上的集合化公式.

证明：$(G$为图$)$与$(pr_1G=E)$与$(pr_2G\subset F)\Rightarrow G\subset E\times F$，因此$G\in\mathcal{P}(E\times F)$，根据证明规则52得证．

定义 61. 映射的图的集合（*ensemble des graphe d'applications*）

$\{G|(G$为图$)$与$(pr_1G=E)$与$(pr_2G\subset F)\}$称为E到F的映射的图的集合，记作F^E．

补充定理 121.

$F^E\subset\mathcal{P}(E\times F)$．

证明：设$G\in F^E$，则$(G$为图$)$与$(pr_1G=E)$与$(pr_2G\subset F)\Rightarrow G\subset E\times F$，因此$G\in\mathcal{P}(E\times F)$，得证．

补充定理 122. 所有从一个集合到另一个集合的映射能够组成集合

$(f$为A到B的映射$)$是f上的集合化公式．

证明：$(f$的图$\in A\times B$，故$f\in A\times B\times A\times B$，根据证明规则52得证．

定义 62. 映射的集合（*ensemble des applications*）

$\{f|f$为A到B的映射$\}$称为A到B的映射的集合，记作$\mathcal{F}(A;B)$．

补充定理 123.

$G\to(G,A,B)$是A^B到$\mathcal{F}(A;B)$的双射．

证明：对任意$G\in A^B$，$(G,A,B)\in\mathcal{F}(A;B)$，因此该映射的定义域是$A^B$；$G=G'\Leftrightarrow(G,A,B)=(G',A,B)$，因此该对应是映射并且是单射；对任意$f\in\mathcal{F}(A;B)$，$f$为$A$到$B$的映射，并且$f$的图$\in A\times B$，因此该映射为满射．得证．

定义 63. 映射的图的集合到映射的集合的规范映射（*application canonique de ensemble des graphe d'applications dans ensemble des applications*）

A^B到$\mathcal{F}(A;B)$的映射$G\to(G,A,B)$，称为A^B到$\mathcal{F}(A;B)$的规范映射．

定理 37.

（*1*）令u为A'到A的满射，v为B'到B的单射，f为A到B的映射，则$f\to v\circ f\circ u(f\in\mathcal{F}(A;B))$是单射．

（*2*）令u为A'到A的单射，v为B'到B的满射，f为A到B的映射，则$f\to v\circ f\circ u(f\in\mathcal{F}(A;B))$是满射．

证明：

（1）令s为u的右逆，r为v的左逆，则$r\circ(v\circ f\circ u)\circ s=Id_F\circ f\circ Id_E$，即等于$f$．得证．

（2）令s为v的右逆，r为u的左逆，则对任意f，$v\circ(s\circ f\circ r)\circ u=Id_F\circ f\circ Id_E$，即等于$f$．得证．

定理 38.

令u为A'到A的双射，v为B'到B的双射，f为A到B的映射，则$f \to v \circ f \circ u (f \in \mathcal{F}(A; B))$是双射.

证明：根据定理37可证.

定理 39.

f为$B \times C$到A的映射，令g为映射$y \to f_y (y \in C, f_y \in \mathcal{F}(B; A))$，则$f \to g(f \in \mathcal{F}(B \times C; A), g \in \mathcal{F}(C; \mathcal{F}(B; A)))$为双射.

证明：

f为$B \times C$到A的映射，则f_y是B到A的映射，因此$y \to f_y$是C到$\mathcal{F}(B; A)$的映射.

反过来，设g为C到$\mathcal{F}(B; A)$的映射，令二元函数$f = (g(y))(x)$，其定义域为$B \times C$，则当$y \in C$时，$f_y = g(y)$. 同时，设定义域为$B \times C$的二元函数f'也满足${f'}_y = g(y)$，则当$y \in C$时，$f_y = {f'}_y$，即当$x \in B$、$y \in C$时，$f_y(x) = {f'}_y(x)$，根据补充定理82（2），$f = f'$，即f是唯一的，得证.

定义 64. 映射的集合之间的规范映射（*application canonique entre deux ensembles des applications*）

f为$B \times C$到A的映射，令g为映射$y \to f_y (y \in C, f_y \in \mathcal{F}(B; A))$，则$f \to g(f \in \mathcal{F}(B \times C; A), g \in \mathcal{F}(C; \mathcal{F}(B; A)))$称为$\mathcal{F}(B \times C; A)$到$\mathcal{F}(C; \mathcal{F}(B; A))$的规范映射.

补充定理 124. 集族的乘积是集合

(F为函数图)与($pr_1 F = I$)与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)$是$F$上的集合化公式.

证明：$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)$，因此$i \in I \Rightarrow F(i) \in \bigcup_{i \in I} X_i$，根据补充定理65，$pr_2 F \subset \bigcup_{i \in I} X_i$，又因为$pr_1 F = I$，故$F \subset I \times \bigcup_{i \in I} X_i$，因此$F \in \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i \in I} X_i)$，根据证明规则52得证.

定义 65. 集族的乘积（*produit d'une famille d'ensembles*），因子（*facteur*）

令$(X_i)_{i \in I}$为集族，$\{F | (F$为函数图$)$与$(pr_1 F = I)$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)\}$称为该集族的乘积，记作$\prod_i \in I X_i$. 当$i \in I$时，$X_i$称为乘积$\prod_{i \in I} X_i$的指标$i$的因子.

补充定理 125.

令$(X_i)_{i \in I}$为集族，$i \in I$，则(对于$F \in \prod_{i \in I} X_i$形式为$F(i)$的对象集合)$\subset X_i$.

证明：$y \in$ (对于$F \in \prod_{i \in I} X_i$形式为$F(i)$的对象集合) $\Leftrightarrow (\exists F)(y = F(i)$与$F \in \prod_{i \in I} X_i)$，因此$y \in$ (对于$F \in \prod_{i \in I} X_i$形式为$F(i)$的对象集合) $\Rightarrow (\exists F)(y = F(i)$与$F(i) \in X_i)$，故$y \in$ (对于$F \in \prod_{i \in I} X_i$形式为$F(i)$的对象集合) $\Rightarrow (\exists F)(y = F(i)$与$y \in X_i)$，故$y \in$ (对于$F \in \prod_{i \in I} X_i$形式为$F(i)$的对象集合) $\Rightarrow y \in X_i$，得证.

定义 66. 坐标函数（*fonction coordonnée*），射影函数（*fonction projection*），坐标（*coordonnée*），射影（*projection*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$i\in I$，映射$F\to F(i)(F\in\prod\limits_{i\in I}X_i,F(i)\in X_i)$称为指标$i$的坐标函数或射影函数，记作$pr_i$，$pr_i(F)$可以简记为$pr_iF$．其中，$F(i)$称为$F$的指标$i$的坐标或射影．

定义 67. 乘积的子集的射影（*projection d'une partie de la produit*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$A\subset\prod\limits_{i\in I}X_i$，则$pr_i\langle A\rangle$称为$A$的指标$i$的射影．

补充定理 126.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，$A\subset\prod\limits_{i\in I}X_i$，则$A\subset\prod\limits_{i\in I}pr_i\langle A\rangle$．

证明：设$F\in A$，则F为函数图、$pr_1F=I$，且对任意$i\in I$，$F(i)\in pr_i\langle A\rangle$，即$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i)$，因此$F\in\prod\limits_{i\in I}pr_i\langle A\rangle$，得证．

补充定理 127.

（*1*）$(X_i)_{i\in\varnothing}$的乘积为$\{\varnothing\}$．

（*2*）$(X_i)_{i\in I}$为集族，如果存在$i\in I$，使$X_i=\varnothing$，则$(X_i)_{i\in I}$的乘积为$\varnothing$．

证明：

（1）一方面，$\varnothing$为函数图且$pr_1\varnothing=\varnothing$．另一方面，设$F\in\prod\limits_{i\in\varnothing}X_i$，则$pr_1F=\varnothing$，因此$F=\varnothing$，得证．

（2）根据定义可证．

补充定理 128.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，如果$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i=E)$，则$\prod\limits_{i\in I}X_i=E^I$．

证明：$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i\Leftrightarrow((F$为函数图$)$与$(pr_1F=I)$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in E))$，如果$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$，则$pr_1F=I$、$pr_2F\subset E$，则$F\in E^I$．

反过来，如果$F\in E^I$，则F为I到E的映射的图，根据补充定理64（3），$i\in I\Rightarrow F(i)\in E$，故$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$．得证．

补充定理 129.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，如果$\bigcup\limits_{i\in I}X_i\subset E$，则$\prod\limits_{i\in I}X_i\subset E^I$．

证明：$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i\Leftrightarrow((F$为函数图$)$与$(pr_1F=I)$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i))$，由于$\bigcup\limits_{i\in I}X_i\subset E$，故对任意$i\in I$，均有$X_i\subset E$，因此$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i\Rightarrow((F$为函数图$)$与$(pr_1F=I)$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in E))$，根据补充定理128，$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i\Rightarrow F\in E^I$，得证．

补充定理 130.

$\prod\limits_{i\in\{a\}} X_i = X_a{}^{\{a\}}$，且指标$i$的坐标函数为$X_a{}^{\{a\}}$到$X_a$的双射.

证明：如果$i \in \{a\}$，则$i = a$，$X_i = X_a$，根据补充定理128，$\prod\limits_{i\in\{a\}} X_i = X_a^{\{a\}}$. 设$F \in X_a{}^{\{a\}}$，$F' \in X_a{}^{\{a\}}$，且$F(a) = F'(a)$，则$i \in \{a\} \Rightarrow F(i) = F'(i)$，故$F = F'$. 对任意$b \in X_a$，令$F$为$\{(a,b)\}$，则$F \in X_a{}^{\{a\}}$，且$F(a) = b$. 故$F \to F(a)(F \in X_a{}^{\{a\}}, F(a) \in X_a)$为双射.

定义 68. 乘积和集合之间的规范映射（*application canonique entre le produit et un ensemble*）

$\prod\limits_{i\in\{a\}} X_i$的指标$i$的坐标函数，称为$X_a^{\{a\}}$到$X_a$的规范映射，其逆映射称为$X_a$到$X_a{}^{\{a\}}$的规范映射.

补充定理 131.

如果$a \neq b$，则$\prod\limits_{i\in\{a,b\}} X_i = \{F|(\exists x)(\exists y)(x \in X_a$与$y \in X_b$与$F = \{(a,x),(b,y)\})\}$，并且，$(x,y) \to \{(a,x),(b,y)\}$是$X_a \times X_b$到$\prod\limits_{i\in\{a,b\}} X_i$的双射.

证明：

$(\exists x)(\exists y)(x \in X_a$与$y \in X_b$与$F = \{(a,x),(b,y)\}) \Rightarrow pr_1 F = (a,b)$与$pr_2 F \subset X_a \cup X_b$，因此，其为$F$上的集合化公式.

$\prod\limits_{i\in\{a,b\}} X_i = \{F|(F$为函数图$)$与$(pr_1 F = \{a,b\})$与$F(a) \in X_a$与$F(a) \in X_b\}$. 如果$(\exists x)(\exists y)(x \in X_a$与$y \in X_b$与$F = \{(a,x),(b,y)\}$，显然$F \in \prod\limits_{i\in\{a,b\}} X_i$.

反过来，如果$F \in \prod\limits_{i\in\{a,b\}} X_i$，则$F$为函数图，设$(u,v) \in F$，则$u = a$或$u = b$，如果$u = a$，则$v = f(a)$，如果$u = b$，则$v = f(b)$，因此$F = \{(a,f(a)),(b,f(b))\}$，又因为$x \in X_a$与$y \in X_b$，故$(\exists x)(\exists y)(x \in X_a$与$y \in X_b$与$F = \{(a,x),(b,y)\}$.

综上，$\prod\limits_{i\in\{a,b\}} X_i = \{F|(\exists x)(\exists y)(x \in X_a$与$y \in X_b$与$F = \{(a,x),(b,y)\})\}$.

因此，$(x,y) \to \{(a,x),(b,y)\}$是$X_a \times X_b$到$\prod\limits_{i\in\{a,b\}} X_i$的映射，对任意$F \in \prod\limits_{i\in\{a,b\}} X_i$，$(\exists x)(\exists y)(x \in X_a$与$y \in X_b$与$F = \{(a,x),(b,y)\})$，因此该映射为满射；对于$(x,y) \in X_a \times X_b$，$(x',y') \in X_a \times X_b$，由于$a \neq b$，若$\{(a,x),(b,y)\} = \{(a,x'),(b,y')\}$，则$x = x'$，$y = y'$，故该映射为单射. 得证.

补充定理 132.

$\prod\limits_{i\in I}\{a_i\} = \{(a_i)_{i\in I}\}$.

证明：$(\exists i)(i \in I$与$z = (i,a_i)) \Rightarrow z \in \times \bigcup\limits_{i\in I}\{a_i\}$，因此为$z$上的集合化公式. $F \in \prod\limits_{i\in I}\{a_i\} \Leftrightarrow ((F$为函数图$)$与$(pr_1 F = I)$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) = a_i))$. 如果$z \in F$，则$(\exists i)(i \in$

$I\check{}z = (i, a_i))$，则z为有序对，故F为图；若$(x, y) \in F$、$(x, y') \in F$，则$(\exists i)(i \in I$与$x = i$与$y = a_i)$、$(\exists i)(i \in I$与$x = i$与$y' = a_i)$，故$y = y'$，因此F为函数图；同时，$(\exists y)((x, y) \in F) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists i)(i \in I$与$x = i$与$y = a_i)$，等价于$(\exists i)(i \in I$与$x = i)$，等价于$x \in I$，故$pr_1 F = I$；此外，若$i \in I$，则$(i, a_i) \in F$，同时$F(i) = a_i$．因此，$F \in \prod\limits_{i \in I}\{a_i\}$．

反过来，如果$F \in \prod\limits_{i \in I}\{a_i\}$，$F' \in \prod\limits_{i \in I}\{a_i\}$，则$i \in I \Rightarrow F(i) = a_i$、$i \in I \Rightarrow F'(i) = a_i$，则$i \in I \Rightarrow F(i) = F'(i)$，因此$F = F'$．故$x \in \prod\limits_{i \in I}\{a_i\} \Rightarrow x = F$，又$F \in \prod\limits_{i \in I}\{a_i\}$，因此$x \in \prod\limits_{i \in I}\{a_i\} \Leftrightarrow x = F$，得证．

补充定理 133.

令$(X_i)_{i \in I}$为集族，$F \in \prod\limits_{i \in I} X_i$，则$F = (F(i))_{i \in I}$．

证明：由于(F为函数图)与$(pr_1 F = I)$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow F(i) \in X_i)$，因此$(x, y) \in F \Leftrightarrow x \in I$与$y = F(x)$，$(x, y) \in (F(i))_{i \in I} \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I$与$x = i$与$y = F(i))$，等价于$x \in I$与$y = F(x)$，得证．

补充定理 134. 对角映射是单射

（*1*）$pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x$是z上的集合化公式．

（*2*）令G_x表示图$\{z | pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x\}$，则G_x为函数图，并且$(\exists x)(x \in E$与$G = G_x)$是G上的集合化公式．同时，$\{G | (\exists x)(x \in E$与$G = G_x)\} \subset E^I$，且$x \to G_x$是$E$到$E^I$的单射．

证明：

（1）$pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x \Rightarrow z \in I \times \{x\}$，因此是集合化公式．

（2）设$a \in I$、$b \in I$，且$(a, b) \in G_x$，$(a, b') \in G_x$，则$b = x$，$b' = x$，故G为函数图．而$(\exists x)(x \in E$与$G = G_x) \Rightarrow G \subset I \times E$，因此$G \in E^I$．因此，$(\exists x)(x \in E$与$G = G_x)$是$G$上的集合化公式，且$\{G | (\exists x)(x \in E$与$G = G_x)\} \subset E^I$．

设$x \in E$、$x' \in E$，若$G_x = G'_x$，则$(\forall z)(pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x \Leftrightarrow pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x')$，故$x = x'$，因此该映射为单射．

定义 69. 到映射的图的集合的对角映射（*application diagonale dans ensemble des graphe d'applications*）

令G_x为函数图$\{z | pr_1 z \in I$与$pr_2 z = x\}$，则映射$x \to G_x (x \in E, G_x \in E^I)$称为对角映射．

定理 40.

令$(X_i)_{i \in I}$为集族，u是K到I的双射，其图为U，则映射$F \to F \circ U$为$\prod\limits_{i \in I} X_i$到$\prod\limits_{k \in K} X_{u(k)}$的双射．

证明：根据定理23，$\bigcup\limits_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{k\in K} X_{u(k)}$，设其为$A$，根据定理37，映射$F \to F\circ U(F\in A^I)$为$A^I$到$A^K$的双射，根据补充定理75，$\prod\limits_{i\in I} X_i$到$\prod\limits_{k\in K} X_{u(k)}$的映射$F \to F\circ U$为单射．由于$u$为
K到I的双射，因此，若对任意$i\in I$，$F(i)\in X_i$，则对任意k，设$k=u^{-1}(i)$，则$F\circ U(k)\in X_{u(k)}$，反之，同理可证$(\forall i)(i\in I \Rightarrow F(i)\in X_i) \Leftrightarrow (\forall k)(k\in K \Rightarrow F\circ U(k)\in X_{u(k)})$．因此，对于$\prod\limits_{i\in I} X_i$到$\prod\limits_{k\in K} X_{u(k)}$的映射$F\to F\circ U$，若$F\circ U\in \prod\limits_{k\in K} X_{u(k)}$，则$F\in\prod\limits_{i\in I} X_i$，故为满射，得证．

定义 70. 部分乘积（*produit partiel*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，则称$\prod\limits_{i\in J} X_i$为其部分乘积．

补充定理 135.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，f为函数，其图为F，且$F\in\prod\limits_{i\in I} X_i$，则$F\circ\Delta_J$为$f|J$的图．

证明：根据补充定理73（2）可证．

补充定理 136.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，f为函数，其图为F，且$F\in\prod\limits_{i\in I} X_i$，则$F\circ\Delta_J\in\prod\limits_{i\in J} X_i$．

证明：根据补充定理135，$F\circ\Delta_J$为$f|J$的图．因此$(x,y)\in F\circ\Delta_J \Leftrightarrow x\in J$与$(x,y)\in F$．

设$i\in J$，由于$(\forall i)(i\in I\Rightarrow F(i)\in X_i)$，故$F(x)\in X_i$，根据补充定理73（1），$F\circ\Delta_J\in X_i$，即$(\forall i)(i\in J\Rightarrow F\circ\Delta_J(i)\in X_i)$，同时，根据定理17，$F\circ\Delta_J$为函数图且定义域为$J$，根据定义，$F\circ\Delta_J\in\prod\limits_{i\in J} X_i$．

定义 71. 指标集的子集的射影（*projection de partie de ensemble des indices*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，F为函数图，则映射$F\to F\circ\Delta_J(F\in\prod\limits_{i\in I} X_i, F\circ\Delta_J\in\prod\limits_{i\in J} X_i)$称为指标$J$的射影，记作$pr_J$．

定理 41.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq\varnothing$，令$A=\bigcup\limits_{i\in I} X_i$，设$g$为$J$到$A$的映射，并且$(\forall i)(i\in J\Rightarrow g(i)\in X_i)$，则存在映射$f$，为$g$在$I$上的延拓，

证明：对于$i\in I-J$，令$T_i=\tau_y(y\in X_i)$，由于$X_i\neq\varnothing$，因此$T_i\in X_i$．设g的图为G，令$F=G\cup(\bigcup\limits_{i\in I} - J(i,T_i))$，由于$(\exists y)((x,y)\in G)\Leftrightarrow x\in I$，当$x\in J$时，$(\exists y)((x,y)\in G)$，则$(\exists y)((x,y)\in F)$，当$x\in I-J$时，$(x,T_x)\in F$，当$x\notin I$时，$(\exists y)((x,y)\in G)$为假，若存在$y$使$(x,y)\in\bigcup\limits_{i\in I-J}(i,T_i)$，则存在$i\in I-J$，使$(i,T_i)=(x,y)$，则$x\in I$，矛盾．故$pr_1F=I$．类似可证$pr_2F\subset A$．令$f=(F,I,A)$，则$f$和$g$在$J$上重合，故$f$为$g$在$I$上的延拓．

定理 42.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq\varnothing$，则pr_J为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到$\prod\limits_{i\in J}X_i$的满射.

证明：根据定理41可证.

定理 43.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$J\subset I$，如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq\varnothing$，则对$a\in I$，pr_a为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到X_a的满射.

证明：根据补充定理130，$\prod\limits_{i\in J}X\{a\}={X_a}^{\{a\}}$，根据定理42，$pr_{\{a\}}$为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到${X_a}^{\{a\}}$的满射，令其图为$G_1$.

同时，$pr_{\{a\}}$为$F\to F\circ\{(a,a)\}$，且$F\circ\{(a,a)\}\in\prod\limits_{i\in\{a\}}X_i$. 根据补充定理130，$\prod\limits_{i\in\{a\}}X_i$的指标$i$的坐标函数为${X_a}^{\{a\}}$到$X_a$的满射，令该函数为$g$，其图为$G_2$.

由于$F\circ\{(a,a)\}(a)=F(a)$，即对任意$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$，$(F,F\circ\{(a,a)\})\in G_1$，$(F\circ\{(a,a)\},F(a))\in G_2$，因此$pr_a=g\circ pr_{\{a\}}$，根据定理21（2），$pr_a$为$\prod\limits_{i\in I}X_i$ 到X_a的满射.

定理 44.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，则$\prod\limits_{i\in I}X_i=\varnothing\Leftrightarrow(\exists i)(i\in I$与$X_i=\varnothing)$.

证明：如果$\prod\limits_{i\in I}X_i=\varnothing$，假设$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i\neq\varnothing)$，设$x\in X_a$，根据定理43，存在$F\in\prod\limits_{i\in I}X_i$，使$F(a)=x$，矛盾，故$(\exists i)(i\in I$与$X_i=\varnothing)$.

反过来，如果$(\exists i)(i\in I$与$X_i=\varnothing)$，假设$\prod\limits_{i\in I}X_i\neq\varnothing$，根据定理43，对任意$a\in I$，$pr_a\langle\prod\limits_{i\in I}X_i\rangle\subset X_a$，则$X_a\neq\varnothing$，矛盾，故$\prod\limits_{i\in I}X_i=\varnothing$.

定理 45.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为有相同指标集I的集族，如果$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i\subset Y_i)$，则$\prod\limits_{i\in J}X_i\subset\prod\limits_{i\in J}Y_i$；反过来，如果$\prod\limits_{i\in J}X_i\subset\prod\limits_{i\in J}Y_i$，且对任意$i\in I$，均有$X_i\neq\varnothing$，则$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i\subset Y_i)$.

证明：$(\forall i)(i\in I\Rightarrow X_i\subset Y_i)$，则对任意$F\in\prod\limits_{i\in J}X_i$，$F(i)\in X_i\Rightarrow F(i)\in Y_i$，故$F\in\prod\limits_{i\in J}Y_i$.

反过来，根据定理43，对任意$a\in I$，$pr_a\langle\prod\limits_{i\in J}X_i\rangle=X_a$，$pr_a\langle\prod\limits_{i\in J}Y_i\rangle=Y_a$，由于$\prod\limits_{i\in J}X_i\subset\prod\limits_{i\in J}Y_i$，因此$pr_a\langle\prod\limits_{i\in J}X_i\rangle\subset pr_a\langle\prod\limits_{i\in J}Y_i\rangle$，得证.

补充定理 137.

令$(X_i)_{i\in I}$、$\{a_i\}i\in I$为有相同指标集I的集族，如果$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i\in X_i)$，则$(a_i)_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in J}X_i$；反过来，如果$(a_i)_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in J}X_i$，则$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i\in X_i)$.

证明：根据定理45可证.

定理 46. 乘积的结合律

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(J_l)_{l\in L}$为I的划分，则映射$f\ \rightarrow\ (prJ_lf)_{l\in L}$为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到$\prod\limits_{l\in L}(\prod\limits_{i\in J}lX_i)$的双射.

证明：根据补充定理135，$prJ_lf\ =\ f|J_l$. 设$w\ \in\ \prod\limits_{l\in L}(\prod\limits_{i\in J}lX_i)$，则当$l\ \in\ L$时，$w(l)\ \in\ \prod\limits_{i\in J}lX_i$，即$(w(l),J_l,\bigcup\limits_{i\in J_l}X_i)$为映射，又因为$J_l\subset I$，因此$(w(l),J_l,\bigcup\limits_{i\in I}X_i)$为映射，将其记为$v_l$. 对于集族$(v_l)_{l\in L}$，根据定理32，存在唯一的$I$到$\bigcup\limits_{i\in I}X_i$的映射$u$，使对任意$l\in L$，$u$在$J_l$上的限制为$v_l$. 得证.

补充定理 138.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(J_l)_{l\in\{a,b\}}$为I的划分，则映射$f\ \rightarrow\ (pr_{J_a}f,pr_{J_b}f)$为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到$(\prod\limits_{i\in J_a}X_i)\times(\prod\limits_{i\in J_b}X_i)$的双射. 如果对任意$i\in J_b$，$X_i$均为单元素集合，则$f\rightarrow pr_{J_a}f$为$\prod\limits_{i\in I}X_i$到$\prod\limits_{i\in J_a}X_i$的双射.

证明：根据定理46，$f\rightarrow(pr_{J_l}f)(l\in\{a,b\})$为$\prod\limits_{i\in I}X_i$ 到 $\prod\limits_{l\in\{a,b\}}(\prod\limits_{i\in J_l}X_i)$的双射，令其为$f$.

根据补充定理131，$(x,y)\ \rightarrow\ \{(a,x),(b,y)\}$是$\prod\limits_{i\in J_a}X_i\times\prod\limits_{i\in J_b}X_i$到$\prod\limits_{l\in\{a,b\}}(\prod\limits_{i\in J_l}X_i)$的双射，令其为$g$.

则$g^{-1}\circ f$即为映射$f\rightarrow(prJ_af,pr_{J_b}f)$，前半部分得证. 如果对任意$i\in J_b$，$X_i$均为单元素集合，根据补充定理132，令$\prod\limits_{i\in J_b}X_i=\{y\}$，则对任意$z\in(\prod\limits_{i\in J_a}X_i)\times(\prod\limits_{i\in J_b}X_i)$，$pr_2z=y$，因此，$z\rightarrow pr_1f$为$(\prod\limits_{i\in J}aX_i)\times(\prod\limits_{i\in J_b}X_i)$到$\prod\limits_{i\in J_a}X_i$的双射，后半部分得证.

补充定理 139.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为集族，则映射$f\rightarrow((pr_1(pr_if))_{i\in I},(pr_2(pr_if))_{i\in I})$为$\prod\limits_{i\in I}(X_i\times Y_i)$到$(\prod\limits_{i\in I}X_i)\times(\prod\limits_{i\in I}Y_i)$的双射.

证明：

设$f\in\prod\limits_{i\in I}(X_i\times Y_i)$，则当$i\in I$时，$f(i)\in X_i\times Y_i$，故$pr_1f(i)\in X_i$，因此$(pr_1(pr_if))_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I}X_i$，同理$(pr_2(pr_if))_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I}Y_i$，故$((pr_1(pr_if))_{i\in I},(pr_2(pr_if))_{i\in I})\in(\prod\limits_{i\in I}X_i)\times(\prod\limits_{i\in I}Y_i)$.

对任意$x\in(\prod\limits_{i\in I}X_i)$，$y\in(\prod\limits_{i\in I}Y_i)$，设$f$为$i\rightarrow(pr_ix,pr_iy)$，则$(pr_1(pr_if))_{i\in I}=(pr_ix)_{i\in I}$，根据补充定理133，$(pr_1(pr_if))_{i\in I}=x$，同理$(pr_2(pr_if))_{i\in I}=y$. 同时，当$i\in I$时，$pr_ix\in X_i$，$pr_iy\in Y_i$，因此$(pr_ix,pr_iy)\in X_i\times Y_i$，所以$f\in\prod\limits_{i\in I}(X_i\times Y_i)$，故该映射为满射.

对任意$f \in \prod_{i\in I}(X_i \times Y_i)$，$f' \in \prod_{i\in I}(X_i \times Y_i)$，若$(pr_1(pr_i f))_{i\in I} = (pr_1(pr_i f'))_{i\in I}$，令其为$A$，则对任意$i' \in I$，$(i', pr_1 f(i')) \in A$，因此$(\exists i)(i \in I$与$i = i'$与$pr_1 f(i') = pr_1 f'(i))$，因此$(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_1 f(i) = pr_1 f'(i))$，同理$(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_2 f(i) = pr_2 f'(i))$，故$(\forall i)(i \in I \Rightarrow f(i) = f'(i))$，根据补充定理133，$f = f'$，故该映射为单射．得证．

定义 72. 两个集族乘积之间的规范映射（*application canonique entre deux produits d'familles d'ensembles*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(J_l)_{l\in L}$为I的划分，则映射$f \to (prJ_l f)_{l\in L}$称为$\prod_{i\in I} X_i$到$\prod_{l\in L}(\prod_{i\in J_l} X_i)$的规范映射．

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(J_l)_{l\in\{a,b\}}$为I的划分，则映射$f \to (pr_{J_a} f, pr_{J_b} f)$称为$\prod_{i\in I} X_i$到$(\prod_{i\in J_a} X_i) \times (\prod_{i\in J_b} X_i)$的规范映射．

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为集族，则映射$f \to ((pr_1(pr_i f))_{i\in I}, (pr_2(pr_i f))_{i\in I})$称为$\prod_{i\in I}(X_i \times Y_i)$到$(\prod_{i\in I} X_i) \times (\prod_{i\in I} Y_i)$的规范映射．

定理 47. 并集和交集的分配律

令$((X_{l,i})_{l\in L})_{i\in I}$为集族，且$L \neq \varnothing$、$(\forall l)(l \in L \Rightarrow J_l \neq \varnothing)$．令$I = \prod_{l\in L} J_l$，则：

（*1*）$\bigcup_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i}) = \bigcap_{f\in I}(\bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)})$．

（*2*）$\bigcap_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i}) = \bigcup_{f\in I}(\bigcap_{l\in L} X_{l,f(l)})$．

证明：

（1）设$x \in \bigcup_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i})$，则存在$l \in L$，使$x \in \bigcap_{i\in J_l} X_{l,i} i$，因此对任意$f \in I$，$x \in X_{l,f(l)}$，即对任意$f \in I$，$x \in \bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)}$，因此$x \in \bigcap_{f\in I}(\bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)})$．

反过来，设$x \notin \bigcup_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i})$，则对任意$l \in L$，$x \notin \bigcap_{i\in J_l} X_{l,i}$，即对任意$l \in L$，存在$J_l$，使$i \in J_l$且$x \notin X_{l,i}$．由于$i \in J_l$与$x \notin X_{l,i}$为集合化公式，可令$J'_l = \{i | i \in J_l$与$x \notin X_{l,i}\}$，根据定理43，存在函数图$f$，定义域为$I$，且对任意$l \in L$，$f(l) \in J'_l$．因此$f \in I$，且对任意$l \in L$，$x \notin X_{l,f(l)}$．则$x \notin \bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)}$，故$x \notin \bigcap_{f\in I}(\bigcup_{l\in L} X_{l,f(l)})$，得证．

（2）令$A = \bigcup_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})$，令$Y_{l,i} = \complement_A X_{l,i}$，根据定理29、定理47（1）可证．

定理 48.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_k)k \in K$为集族，则：

（*1*）若$I \neq \varnothing$，$K \neq \varnothing$，则$(\bigcap_{i\in I} X_i) \cup (\bigcap_{k\in K} Y_k) = \bigcap_{(i,k)\in I\times K}(X_i \cup Y_k)$．

（*2*）$(\bigcup_{i\in I} X_i) \cap (\bigcup_{k\in K} Y_k) = \bigcup_{(i,k)\in I\times K}(X_i \cap Y_k)$．

证明：令$L = \{a, b\}$，$J_a = I$，$J_b = K$．根据补充定理131，存在$\prod_{i\in\{a,b\}} J_i$到$A \times B$的双射，令其为f，根据定理47可证．

定理 49. 并集和交集对乘积的分配律

令$((X_{l,i})_{l\in L})_{i\in I}$为集族，$I=\prod_{l\in L} J_l$，则：

（*1*）$\prod_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})=\bigcup_{f\in I}(\prod_{l\in L} X_{l,f(l)})$.

（*2*）若$L\neq\varnothing$、$(\forall l)(l\in L\Rightarrow J_l\neq\varnothing)$，则$\prod_{l\in L}(\bigcap_{i\in J_l} X_{l,i})=\bigcap_{f\in I}(\prod_{l\in L} X_{l,f(l)})$.

证明：

（1）若$L=\varnothing$，左边$=\{\varnothing\}$，右边$=\{\varnothing\}$；若存在$l\in L$，使$J_l=\varnothing$，则左边$=\varnothing$，右边$=\varnothing$.

在其他情况下，设$g\in\prod_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})$，则对任意$l\in L$，存在$i\in J_l$，使$g(l)\in X_{l,i}$. 由于$i\in J_l$与$g(l)\in X_{l,i}$是$i$上的集合化公式，令$H_l=\{i|i\in J_l$与$g(l)\in X_{l,i}\}$，则$H_l\neq\varnothing$. 令$f=\bigcup l\in L(i,\tau_y(y\in H_l))$，则$f$为函数图且对任意$l\in L$，$f(l)\in H_l$，且$f\in I$. 因此$g(l)\in X_{l,f(l)}$，故$g\in\prod_{l\in L} X_{l,f(l)}$，因此$g\in\bigcup_{f\in I}(\prod_{l\in L} Xl,f(l))$.

反过来，如果$g\in\bigcup_{f\in I}(\prod_{l\in L} X_{l,f(l)})$，则存在$f\in I$，使$g\in\prod_{l\in L} X_{l,f(l)}$，因此对任意$l\in L$，均有$g(l)\in X_{l,f(l)}$，由于$f(l)\in J_l$，因此$g(l)\in\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i}$，故$g\in\prod_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})$. 得证.

（2）类似定理49（1）可证.

定理 50.

如果对任意$l\in L$，集族$(X_{l,i})_{l\in L}$为$\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i}$的划分，则集族$(\prod_{l\in L} X_{l,f(l)})_{f\in I}$是$\prod_{l\in L}(\bigcup_{i\in J_l} X_{l,i})$的划分.

证明：令$P_f=\prod_{l\in L} X_{l,f(l)}$. 设$f\in I$、$g\in I$，且$f\neq g$，则存在$l\in L$，使$f(l)\neq g(l)$，故$X_{l,f(l)}\cap X_{l,g(l)}=\varnothing$，如果$P_f\cap P_g\neq\varnothing$，则令$G\in P_f\cap P_g$，因此$G(l)\in X_{l,f(l)}$，$G(l)\in X_{l,g(l)}$，矛盾. 因此，$P_f\cap P_g=\varnothing$，得证.

定理 51.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_k)k\in K$为集族，则：

（*1*）$(\bigcup_{i\in I} X_i)\times(\bigcup_{k\in K} Y_k)=\bigcup_{(} i,k)\in I\times K(X_i\times Y_k)$.

（*2*）若$I\neq\varnothing$，$K\neq\varnothing$，则$(\bigcap_{i\in I} X_i)\times(\bigcap_{k\in K} Y_k)=\bigcap_{(} i,k)\in I\times K(X_i\times Y_k)$.

证明：类似定理48的证明，根据定理49可证.

定理 52.

令$(X_{i,k})_{(i,k)\in I\times K}$为集族，$k\neq\varnothing$，则$\bigcap_{k\in K}(\prod_{i\in I} X_{i,k})=\prod_{i\in I}(\bigcap_{k\in K} X_{i,k})$.

证明：

$f\in\bigcap_{k\in K}(\prod_{i\in I} X_{i,k})\Leftrightarrow(\forall k)(k\in K\Rightarrow f\in\prod_{i\in I} X_{i,k})$. 等价于$(f$为函数图$)$与$(f$的定义域为$I)$与$(\forall k)(\forall i)(k\in K$与$i\in I\Rightarrow f(i)\in X_{i,k})$.

另一方面，$f \in \prod_{i\in I}(\bigcap_{k\in K} X_{i,k}) \Leftrightarrow$ (f为函数图)与(f的定义域为I)与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow f(i) \in \bigcap_{k\in K} X_{i,k})$，等价于($f$为函数图)与($f$的定义域为$I$)与$(\forall k)(\forall i)(k \in K$与$i \in I \Rightarrow f(i) \in X_{i,k})$，得证.

定理 53.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族，且$I \neq \varnothing$，则：

（1）$(\prod_{i\in I} X_i) \cap (\prod_{i\in I} Y_i) = \prod_{i\in I}(X_i \cap Y_k)$.

（2）$(\bigcap_{i\in I} X_i) \times (\bigcap_{i\in I} Y_i) = \bigcap_{i\in I}(X_i \times Y_k)$.

证明：类似定理48的证明，根据定理52可证.

补充定理 140.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族．对任意$i \in I$，g_i为X_i到Y_i的映射．对任意$f \in \prod_{i\in I} X_i$，令u_f为映射$i \to g_i(f(i))(i \in I)$，则$u_f \in \prod_{i\in I} Y_i$.

证明：对任意$f \in \prod_{i\in I} X_i$、任意$i \in I$，$g_i(f(i)) \in Y_i$，故$u_f \in \prod_{i\in I} Y_i$.

定义 73. 映射族在乘积上的规范扩展（*extension canonique de famille d'applications aux produit*），映射族的乘积（*produit de famille d'applications*）

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族，$(g_i)_{i\in I}$为函数族，且对任意$i \in I$，g_i为X_i到Y_i的映射．对任意$f \in \prod_{i\in I} X_i$，令u_f为映射$i \to g_i(f(i))(i \in I)$的图，则映射$f \to u_f(f \in \prod_{i\in I} X_i, u_f \in \prod_{i\in I} Y_i)$称为映射族$(g_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，或称为映射族的乘积.

定理 54.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$、$(Z_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族，$(g_i)_{i\in I}$、$({g'}_i)_{i\in I}$为指标集相同的函数族，且对任意$i \in I$，g_i为X_i到Y_i的映射，${g'}_i$为Y_i到Z_i的映射．设g和g'分别为$(g_i)_{i\in I}$和$({g'}_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，则$g' \circ g$为$({g'}_i \circ g_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展.

证明：根据定义可证.

补充定理 141.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$\prod_{i\in I} X_i = A$，则$(Id_{x_i})i \in I$在乘积上的规范扩展为Id_A.

证明：令u_f为映射$i \to Id_{x_i}(f(i))(i \in I)$的图，即为映射$i \to f(i)$的图，因此，$u_f = f$，得证.

定理 55.

令$(X_i)_{i\in I}$、$(Y_i)_{i\in I}$为指标集相同的集族，$(g_i)_{i\in I}$为函数族，且对任$i \in I$，g_i为X_i到Y_i的单射（或满射），则$(g_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展为$\prod_{i\in I} X_i$到$\prod_{i\in I} Y_i$的单射（或满射）.

证明：

如果存在$i' \in I$，使$X'_i = \varnothing$，则$\prod\limits_{i\in I} X_i = \varnothing$．如果对任意$i \in I$，$g_i$均为单射，其在乘积上的规范扩展为$(\varnothing, \varnothing, \prod\limits_{i\in I} Y_i)$，是单射．如果对任意$i \in I$，$g_i$均为满射，则$Y'_i = \varnothing$，故$\prod\limits_{i\in I} Y_i = \varnothing$，因此其在乘积上的规范扩展为$(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$，是满射．

如果对任意$i \in I$，均有$X_i \neq \varnothing$：

对于单射的情况，令r_i为g_i的左逆，r为$(r_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，根据定理54，$r \circ g$为$(Id_{x_i})_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，根据补充定理140，即$Id_{\prod\limits_{i\in I} X_i}$，其为双射，故$(g_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展为$\prod\limits_{i\in I} X_i$到$\prod\limits_{i\in I} Y_i$的单射．

对于满射的情况，令s_i为g_i的右逆，同理可证．

补充定理 142.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，f为E到$\prod\limits_{i\in I} X_i$的映射，$\tilde{f}$为$(pr_i \circ f)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，$d$为$E$到$E^I$的对角映射，则$f = \tilde{f} \circ d$．

证明：设$x \in E$，则$d(x) = \{z | pr_1 z \in I 与 pr_2 z = x\}$，$\tilde{f} \circ d(x)$为映射$i \to pr_i \circ f(x) (i \in I)$，即为映射$i \to (f(x))(i) (i \in I)$，即为映射$f(x)$，得证．

补充定理 143.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(f_i)_{i\in I}$为函数族，且对任意$i \in I$，f_i为E到X_i的映射，$\tilde{f}$为$(f_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，d为E到E^I的对角映射，则对任意$i \in I$，$pr_i \circ (\tilde{f} \circ d) = f_i$．

证明：设$x \in E$，则$d(x) = \{z | pr_1 z \in I 与 pr_2 z = x\}$，$\tilde{f} \circ d(x)$为映射$i \to f_i(x)$，故$pr_i \circ (\tilde{f} \circ d) = f_i$．

补充定理 144.

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，$(f_i)_{i\in I}$为函数族，且对任意$i \in I$，f_i为E到X_i的映射，$\tilde{f}$为$(f_i)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，则$f \to \tilde{f}$为$(\prod\limits_{i\in I} X_i)^E$到$\prod\limits_{i\in I} ({X_i}^E)$的双射．

证明：根据补充定理142、补充定理143可证．

定义 74. 积和映射的图的集合之间的规范映射（*application canonique entre le produit et la ensemble des graphe d'applications*）

令$(X_i)_{i\in I}$为集族，f为E到$\prod\limits_{i\in I} X_i$的映射，令$\tilde{f}$为$(pr_i \circ f)_{i\in I}$在乘积上的规范扩展，则称映射$f \to \tilde{f}$为$(\prod\limits_{i\in I} X_i)^E$到$\prod\limits_{i\in I} ({X_i}^E)$的规范映射，其逆映射为$\prod\limits_{i\in I} ({X_i}^E)$到$(\prod\limits_{i\in I} X_i)^E$的规范映射．

习题 62.

$(X \subset Y) \Rightarrow (\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y))$．

证明：即补充定理118.

习题 63.

f为$\mathcal{P}(E)$到$\mathcal{P}(E)$的映射，且$(\forall X)(\forall Y)(X \in \mathcal{P}(E)$与$Y \in \mathcal{P}(E)$与$X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y))$．令$V = \bigcap\limits_{Z\subset E\text{与}f(Z)\subset Z} Z$，$W = \bigcup\limits_{Z\subset E\text{与}Z\subset f(Z)} Z$，求证：$V = f(V)$，$W = f(W)$，并且，$(\forall Z)(Z \subset E$与$f(Z) = Z \Rightarrow V \subset Z$与$Z \subset W)$.

证明：对任意$Z \in \{Z|Z \subset E$与$f(Z) \subset Z\}$，都有$V \subset Z$，因此$f(V) \subset f(Z)$，则$f(V) \subset Z$，故$f(V) \subset V$，因此$f(f(V)) \subset f(V)$，故 $f(V) \in \{Z|Z \subset E$与$f(Z) \subset Z\}$，因此$V \subset f(V)$，综上，$V = f(V)$．同理可证$W = f(W)$.

此外，$f(Z) = Z$，则$Z \in \{Z|Z \subset E$与$f(Z) \subset Z\}$、$Z \in \{Z|Z \subset E$与$Z \subset f(Z)\}$，根据定义$V \subset Z$与$Z \subset W$.

习题 64.

$(X_i)_{i\in I}$为集族，$I \neq \varnothing$，而集族$(Y_i)_{i\in I}$满足$(\forall i)(i \in I \Rightarrow Y_i \subset X_i)$，求证：$\prod\limits_{i\in I} Y_i = \bigcap\limits_{i\in I} {pr_i}^{-1}(Y_i)$.

证明：

设$f \in \prod\limits_{i\in I} Y_i$，则对任意$i \in I$，$pr_i f \in Y_i$．故$f \in {pr_i}^{-1}(Y_i)$，因此$f \in \bigcap\limits_{i\in I} {pr_i}^{-1}(Y_i)$.

反过来，设$f \in \bigcap\limits_{i\in I} {pr_i}^{-1}(Y_i)$，则对任意$i \in I$，$f \in {pr_i}^{-1}(Y_i)$，因此$pr_i f \in Y_i$，且$f$是定义域为$I$的函数图，故$f \in \prod\limits_{i\in I} Y_i$．得证.

习题 65.

对任意$G \subset A \times B$，令$\tilde{G}$为A到 $\mathcal{P}(B)$的映射$x \to G\langle\{x\}\rangle$，求证：$G \to \tilde{G}$为 $\mathcal{P}(A \times B)$到$(\mathcal{P}(B))^A$的双射.

证明：对任意A到$\mathcal{P}(B)$的映射f，令$G = \bigcup\limits_{x\in A} (\{x\} \times f(x))$，则对任意$x \in A$，$G\langle\{x\}\rangle = f(x)$；设对任意$x \in A$，$G'\langle\{x\}\rangle = f(x)$，则$G'\langle\{x\}\rangle = G\langle\{x\}\rangle$，故$\{y|(x, y) \in G\} = \{y|(x, y) \in G'\}$，则$G = G'$，故$G$具有唯一性．因此$G \to f$为$\mathcal{P}(A \times B)$到$\mathcal{F}(A; \mathcal{P}(B))$的双射．根据补充定理123，$\tilde{G} \to f$为$(\mathcal{P}(B))^A$到$\mathcal{F}(A; \mathcal{P}(B))$的双射．根据定理21（3）、21（5）得证.

习题 66.

设$(X_i)_{1\leq i\leq n}$为集族．对任意$[1, n]$的子集H，令$P_H = \bigcup\limits_{i\in H} X_i$，$Q_H = \bigcap\limits_{i\in H} X_i$．令$F_k$为$[1, n]$中元素数目为$k$的子集集合，求证：

（1）如果$k \leq (n + 1)/2$，则 $\bigcap\limits_{H\in F_k} P_H \subset \bigcup\limits_{H\in F_k} Q_H$.

（2）如果$k \geq (n + 1)/2$，则 $\bigcup\limits_{H\in F_k} Q_H \subset \bigcap\limits_{H\in F_k} P_H$.

证明：

如果$f \in I$，根据定理47，$\bigcap\limits_{H \in F_k} P_H = \bigcup\limits_{f \in I}(\bigcap\limits_{H \in F_k} X_{f(H)})$，其中$I = \prod\limits_{H \in F_k} H$. 如果$f \in I$，则$f(H) \in H$.

（1）如果$k \leq (n+1)/2$，设$x \in \bigcap\limits_{f \in I}(\bigcup\limits_{H \in F_k} X_{f(H)})$，则存在$f \in I$，使$x \in \bigcap\limits_{H \in F_k} X_{f(H)}$. 假设$pr_2 f$的元素数目小于$k$，则$[1, n] - pr_2 f$的元素数目大于等于$k$，因此存在$[1, n]$的$k$个元素的子集$H$，是$[1, n] - pr_2 f$的子集，因此$H \cap pr_2 f = \varnothing$. 而$f(H) \in H \cap pr_2 f$，矛盾. 因此，存在$k$个元素的子集$H$，即$H \in F_k$，使$x \in \bigcap\limits_{i \in H} X_i$. 因此，$x \in \bigcup\limits_{H \in F_k} Q_H$.

（2）如果$k \geq (n+1)/2$，设$x \in \bigcup\limits_{H \in F_k} Q_H$，则存在$H' \in F_k$，使$x \in \bigcap\limits_{i \in H'} X_i$. 对任意$H \in F_k$，$H \cap H' \neq \varnothing$，根据定理44，$\prod\limits_{H \in F_k}(H \cap H') \neq \varnothing$，根据定理45，$\prod\limits_{H \in F_k}(H \cap H') \subset I$. 因此存在$f \in \prod\limits_{H \in F_k}(H \cap H')$，且$f \in I$. 因此对任意$H \in F_k$，$f(H) \in H \cap H'$，即存在$i \in H'$，使$i = f(H)$，因此$X_i = X_{f(H)}$，由于$X_{f(H)} \subset \bigcap\limits_{i \in H'} X_i$，故$x \in X_{f(H)}$. 因而$x \in \bigcap\limits_{H \in F_k} X_{f(H)}$，故$x \in \bigcap\limits_{H \in F_k} P_H$. 注：习题66涉及尚未介绍的“自然数”知识.

2.6 等价关系（Relations d'équivalence）

元数学定义 30. 对称性（*symétrique*）

令R为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x、y、z为不同的不是常数的字母，且R不包含z，如果$R \Rightarrow (x|z)(y|x)(z|y)R$，则称$R$关于$x$、$y$具有对称性，在没有歧义的情况下也可以简称$R$具有对称性.

注：$(x|z)(y|x)(z|y)R$即为将R中的x、y对换得到的公式.

元数学定义 31. 传递性（*transitive*）

令R为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M的公式，x、y、z为不同的不是常数的字母，且R不包含z，如果R与$(y|x)(z|y)R \Rightarrow (z|y)R$，则称$R$关于$x$、$y$具有传递性，在没有歧义的情况下也可以简称$R$具有传递性.

元数学定义 32. 等价关系（*relation d'équivalence*）

令R为包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M的公式，如果R关于x、y具有对称性和传递性，则称R为关于x、y的等价关系，或称x模R等价于y，记作$x \equiv y(mod R)$，在没有歧义的情况下也可以简称R为等价关系.

补充证明规则 22.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的等价关系，则：

（*1*），令A、B为项，如果A不包含y、B不包含x，则$(A|x)(B|y)$为关于x、y的等价关系；

（*2*）R为关于x、y的等价关系，令u、v为字母，如果R不包含u、v，则$(u|x)(v|y)R$为关于u、v的等价关系.

证明：根据定义可证.

记号定义 18. 两个项的等价（*équivalence de deux termes*）

R为关于x、y的等价关系，如果A不包含y、B不包含x，则$(A|x)(B|y)R$记作
$A \equiv B(modR)$.

补充证明规则 23.

如果公式R为关于x、y的等价关系，则$R \Rightarrow (y|x)R$与$(x|y)R$.

证明：令z为不同于x、y的不是常数的字母，且R不包含z. 如果R为真，则$(x|z)(y|x)(z|y)R$，同时R与$(y|x)(z|y)R \Rightarrow (z|y)R$. 因此$(x|z)(y|x)(z|y)R \Rightarrow (x|z)(z|y)R$，故$(x|z)(z|y)R$，即$(y|x)R$. 因此，$(x|z)(y|x)(z|y)R$. 根据补充替代规则4，$(x|z)(y|x)(z|y)R$和$(y|z)(x|y)(z|x)R$相同，故同理可证$(x|y)R$.

补充证明规则 24.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R、S均为关于x、y的等价关系，则“$(R$与$S)$”为关于x、y的等价关系.

证明：根据定义可证.

元数学定义 33. 反身性（*réflexive*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为公式，x、y为不同的不是常数的字母，如果$(x|y)R \Leftrightarrow x \in E$，则称$R$关于$x$、$y$在$E$上具有反身性，在没有歧义的情况下也可以简称$R$在$E$上具有反身性，或简称$R$具有反身性.

元数学定义 34. 在集合上的等价关系（*relation d'équivalence dans un ensemble*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，并且R关于x、y在E上具有反身性，则称R为关于x、y在E上的等价关系，在没有歧义的情况下也可以简称R为在E上的等价关系..

补充证明规则 25.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的等价关系，则$R \Rightarrow x \in E$，$R \Rightarrow y \in E$.

证明：根据补充证明规则23可证.

补充证明规则 26.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的等价关系，则R为生成图的公式.

证明：根据补充证明规则25，$R \Rightarrow (x,y) \in E \times E$，根据补充证明规则18可证.

定义 75. 等价图（*graphe d'équivalence*）

G为图，如果$(x,y) \in G$为在E上的等价关系，则称G为在E上的等价图.

补充定理 145.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，$(G_i)_{i \in I}$为集族，且$(\forall I)(i \in I \Rightarrow G_i$为在$E$上的等价图)，则$\bigcap\limits_{i \in I} G_i$为在$E$上的等价图.

证明：

如果$(x,y) \in \bigcap\limits_{i \in I} G_i$，则对任意$i \in I$，$(x,y) \in G_i$，因此$(y,x) \in G_i$，故$(y,x) \in \bigcap\limits_{i \in I} G_i$，因此对称性成立.

同理可证传递性.

对任意$i \in I$，$x \in E \Leftrightarrow (x,x) \in G_i$，因此$x \in E \Leftrightarrow (x,x) \in G_i$，故反身性成立.

综上得证.

补充证明规则 27.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果公式R为关于x、y的等价关系，则$(\exists y)R \Leftrightarrow (x|y)R$，$(\exists x)R \Leftrightarrow (y|x)R$.

证明：根据公理模式5，$(x|y)R \Rightarrow (\exists y)R$. 另一方面，根据补充证明规则23，$(\exists y)R \Rightarrow (\exists y)(x|y)R$，后者即$(x|y)R$. 综上，则$(\exists y)R \Leftrightarrow (x|y)R$.

同理可证$(\exists x)R \Leftrightarrow (y|x)R$.

补充证明规则 28.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果公式R为关于x、y在E上的等价关系，G为其生成的图，则：$x \in pr_1 G \Leftrightarrow (x|y)R$，$pr_1 G = E$，$y \in pr_2 G \Leftrightarrow (y|x)R$，$pr_2 G = E$.

证明：根据补充证明规则27可证.

补充证明规则 29.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的等价关系，G为其生成的图，则：

（*1*）$x \in E \Leftrightarrow (x,x) \in G$；

（*2*）$(x,y) \in G$与$(y,z) \in G \Rightarrow (y,z) \in G$；

（*3*）$(x,y) \in G \Rightarrow (x,x) \in G$与$(y,y) \in G$.

（*4*）$x \in E \Rightarrow x \in G(x)$.

证明：根据补充证明规则23可证．

补充证明规则 30.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中：

（*1*）如果公式R、S均为关于x、y在E上的等价关系，则“R与S”为关于x、y在E上的等价关系．

（*2*）如果公式S为关于x、y在F上的等价关系，f为E到F的满射，则$(f(y)|y)(f(x)|x)S$为关于x、y在E上的等价关系．

（*3*）如果公式R为关于x、y在E上的等价关系，S为关于x、y在F上的等价关系，f为E到F的映射，则R与$(f(y)|y)(f(x)|x)S$为关于x、y在E上的等价关系．

证明：

（1）根据补充证明规则24可证．

（2）对称性和传递性根据补充证明规则22（1）、补充证明规则22（2）可证．根据替代规则2，$(f(x)|y)(f(x)|x)S$和$(f(x)|x)(x|y)S$相同，故$(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow f(x) \in F$，等价于$x \in E$，得证．

（3）对称性和传递性根据补充证明规则22（1）、补充证明规则22（2）可证．根据替代规则2，$(f(x)|y)(f(x)|x)S$和$(f(x)|x)(x|y)S$相同，故R与$(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow x \in E$与$f(x) \in F$，由于$x \in E \Rightarrow f(x) \in F$，故$R$与$(f(x)|y)(f(x)|x)S \Leftrightarrow x \in E$，得证．

补充定理 146.

（*1*）$x = y$为等价关系，但不是在任何集合上的等价关系．

（*2*）$x = y$与$x \in E$为在E上的等价关系．

（*3*）$(\exists F)(F$为X到Y的双射$)$为等价关系，但不是在任何集合上的等价关系．

（*4*）$x \in E$与$y \in E$为在E上的等价关系．

（*5*）如果$A \subset E$，则$(x \in E - A$与$y = x)$或$(x \in A$与$y \in A)$为在E上的等价关系．

（*6*）令f为函数，其定义域为E，则公式“$x \in E$与$y \in E$与$f(x) = f(y)$”为在E上的等价关系．

证明：根据定义可证以上各式的等价关系．

对于$x = y$、$(\exists F)(F$为X到Y的双射$)$，根据补充定理10可以证明其不是在任何集合上的等价关系．

定义 76. 在集合上的等价对应（*correspondance d'équivalence dans un ensemble*）

如果F为在E上的等价图，则(F, E, E)称为在E上的等价对应．

定理 56.

当且仅当同时满足下列三个条件时，X到X的对应F为在X上的等价对应：

第一，X为F的定义域；

第二，$F=F^{-1}$；

第三，$F\circ F=F$.

证明：令$F=(G,X,X)$. 如果F为在X上的等价对应，则$x\in X\Leftrightarrow(x,x)\in G$，故$F$的定义域为$X$；由于$(x,y)\in G\Leftrightarrow(y,x)\in G$，故$F=F^{-1}$；由于$(x,y)\in G$与$(y,z)\in G\Rightarrow(x,z)\in G$，故$G\circ G\subset G$，同时，$(x,y)\in G\Rightarrow(x,x)\in G$，故$(x,y)\in G\circ G$，故$G\subset G\circ G$，因此$G\circ G=G$.

反过来，由于$F=F^{-1}$，因此$(x,y)\in Gw\Psi'$，由于$F\circ F=F$，因此$(x,y)\in G$具有传递性. 由于F的定义域为X，因此对于$x\in X$，存在$(x,y)\in G$，则$(y,x)\in G$，因此$(x,x)\in G$；同时，如果$(x,x)\in G$，则$x\in X$，故$(x,y)\in G$在X上具有反身性. 因此，F为在X上的等价对应.

定义 77. 同函数相关的等价关系（*relation d'équivalence associée à une fonction*）

令f为函数，其定义域为E，其图为F，则公式$(x\in E$与$y\in E$与$f(x)=f(y))$称为同f相关的等价关系.

补充定理 147.

如果f的图为F，则同f相关的等价关系生成的图为$F^{-1}\circ F$.

证明：$x\in E$与$y\in E$与$f(x)=f(y)\Leftrightarrow(\exists z)((x,y)\in F$与$(y,z)\in F)$，进而等价于$(\exists z)((x,y)\in F$与$(y,z)\in F^{-1})$，等价于$(x,y)\in F^{-1}\circ F$，得证.

元数学定义 35. 等价类（*classe d'équivalence*），代表（*représentant*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，R生成的图为G，且$x\in E$，则称$G(x)$为x关于R的等价类. 如果$z\in(x$关于R的等价类$)$，则称z为该等价类的代表.

补充证明规则 31.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，R生成的图为G，且$x\in E$，则$(x$关于R的等价类$)\subset E$.

证明：根据补充证明规则25可证.

补充证明规则 32.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则$x\in(x$关于R的等价类$)$.

证明：根据补充证明规则29（1）可证.

补充证明规则 33.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，R生成的图为G，则$(\exists x)(x \in E$与$X = G(x))$为关于X的集合化公式.

证明：根据补充证明规则31，$(\exists x)(x \in E$与$X = G(x)) \Rightarrow X \subset E$，即$x \in \mathcal{P}(E)$，根据证明规则52得证.

元数学定义 36. 商集（*ensemble quotient*），到商集的规范映射（*l'application canonique dans l'ensemble quotient*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，R生成的图为G，则称$\{X|(\exists x)(x \in E$与$X = G(x))\}$为E除以R的商集，记作E/R．$x \to G(x)((x \in E, G(x) \in E/R)$称为$E$到$E/R$的规范映射.

补充证明规则 34.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则：

（*1*）$E = \varnothing \Leftrightarrow E/R = \varnothing$;

（*2*）对任意$X \in E/R$，$X \neq \varnothing$.

证明：

（1）如果$E = \varnothing$，则$x \in E$为假，根据定义，$E/R = \varnothing$；同时，如果$E \neq \varnothing$，对任意$x \in E$，$G(x) \in E/R$，故$E/R \neq \varnothing$，得证.

（2）令R生成的图为G，若$X = \varnothing$，则$(\exists x)(x \in E$与$\varnothing = G(x))$，故$(\exists x)(\varnothing = G(x))$，但$x \in G(x)$，矛盾，得证.

补充证明规则 35.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则E到E/R的规范映射为满射.

证明：根据定义可证.

证明规则 55.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，p为E到E/R的规范映射，则$R \Leftrightarrow (x \in E$与$y \in E$与$p(x) = p(y))$.

证明：令R生成的图为G，则$R \Leftrightarrow (x,y) \in G$．假设$(x,y) \in G$，则$x \in E$与$y \in E$，且$y \in G(x)$，因此$G(y) \subset G \circ G(x)$．根据定理56，$G(y) \subset G(x)$．同时，由于$(x,y) \in G$，故$(y,x) \in G$，同理$G(x) \subset G(y)$，因此$G(x) = G(y)$．反过来，假设$G(x) = G(y)$，由于$y \in G(y)$，故$y \in G(x)$，因此$(x,y) \in G$.

补充证明规则 36.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，p为E到E/R的规范映射，则：

（*1*）$(\forall x)(\forall y)(x \in E \Rightarrow (p(y) = p(x) \Leftrightarrow y \in p(x)))$；

（*2*）$(\forall x)(\forall X)(x \in E$与$X \in E/R \Rightarrow (X = p(x) \Leftrightarrow x \in X))$.

证明：

（1）令R生成的图为G，在$x \in E$的情况下，如果$y \in p(x)$，则$(x, y) \in G$，因此$p(x) = p(y)$.

反过来，如果$p(x) = p(y)$，根据补充证明规则32，$y \in p(y)$，故$y \in p(x)$.

（2）假设$x \in E$、$X \in E/R$，则存在$y \in E$，使$p(y) = X$，如果$X = p(x)$，则$p(x) = p(y)$，根据补充证明规则36（1），$x \in X$.

反过来，如果$x \in X$，根据补充证明规则36（1），$p(x) = p(y)$，故$p(x) = X$. 得证.

元数学定义 37. 集合对于公式的截面（*section d'un ensemble pour une relation*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，p为E到E/R的规范映射，则p的右逆称为E对于R的截面.

补充证明规则 37.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则$\Delta_{E/R}$为E的划分.

证明：如果$E = \varnothing$，根据补充证明规则34（1），$E/R = \varnothing$，$\Delta_\varnothing$=$\varnothing$，根据划分的定义可证.

如果$E \neq \varnothing$，设R生成的图为G，$X \in E/R$，$X' \in E/R$，设$X = G(x)$，$X' = G(x')$，设$a \in X \cap X'$，则$(x, a) \in G$，$(x', a) \in G$，故$(x, x') \in G$，因此$G(x) = G(x')$，所以$X = X'$. 同时，对任意$x \in E$，$x \in G(x)$. 综上得证.

注：$\Delta_{E/R}$即集族$(X)_{X \in E/R}$.

补充证明规则 38.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，则：

（*1*）$R \Leftrightarrow ((\exists X)(x \in X$与$y \in X$与$X \in E/R))$.

（*2*）$X = G(x) \Leftrightarrow X \in E/R$与$x \in X$.

证明：

（1）设R生成的图为G，则$R \Leftrightarrow (x, y) \in G$，如果$(x, y) \in G$，则$(\exists X)(x \in X$与$X \in E/R)$. 若$x \in X$，根据证明规则55，则$G(y) = X$，故$y \in X$，因此$(\exists X)(x \in X$与$y \in X$与$X \in E/R)$.

反过来，若$(\exists X)(x \in X$与$y \in X$与$X \in E/R)$，则$x \in E$、$y \in E$，且$G(x) = G(y)$，根据证明规则55，$(x, y) \in G$.

（2）如果$X = G(x)$，根据定义，$X \in E/R$、$x \in X$．反过来，如果$X \in E/R$、$x \in X$，由于$G(x) \in E/R$，如果$X \neq G(x)$，则$X \bigcap_G (x) = \varnothing$，矛盾，故$X = G(x)$.

补充定理 148.

令$(X_i)_{i \in I}$为E的划分，且$i \neq \varnothing$，$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \neq \varnothing)$，设$R$为$(\exists i)(i \in I$与$x \in X_i$与$y \in X_i)$，则$R$为关于$x$、$y$在$E$上的等价关系，且$i \to X_i (i \in I)$为$I$到$E/R$的双射.

证明：$(\exists i)(i \in I$与$x \in X_i$与$y \in X_i) \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I$与$y \in X_i$与$x \in X_i)$，故该公式具有对称性．若$(\exists i)(i \in I$与$x \in X_i$与$y \in X_i)$、$(\exists i)(i \in I$与$y \in X_i$与$z \in X_i)$，设$i \in I$、$i' \in I$，$x \in X_i$与$y \in X_i$，使$y \in X'_i$、$z \in X'_i$，故$i = i'$，因此$(\exists i)(i \in I$与$x \in X_i$与$z \in X_i)$，即该公式具有传递性．若$x \in E$，则存在$i$，使$(i \in I$与$x \in X_i)$，故反身性成立．综上，$R$为关于$x$、$y$在$E$上的等价关系.

令R生成的图为G，对任意$i \in I$，设$x \in X_i$，则$y \in G(x) \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I$与$x \in X_i$与$y \in X_i)$，等价于$y \in X_i$，故$G(x) = X_i$．所以$X_i \in E/R$，即该映射到达域为$E/R$．对任意$X \in E/R$，设$x \in X$，故$X = G(x)$，同时存在$i \in I$，使$x \in X_i$．则$X = X_i$，故该映射为满射．又因为$(X_i)_{i \in I}$为$E$的划分，且$i \neq \varnothing$，$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \neq \varnothing)$，故$X_i = X'_i \Rightarrow i = i'$，因此该映射为单射.

定义 78. 代表系统（*système de représentants*）

令$(X_i)_{i \in I}$为E的划分，且$i \neq \varnothing$，$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i \neq \varnothing)$，设$R$为$(\exists i)(i \in I$与$x \in X_i$与$y \in X_i)$，$S \subset E$，且$(\forall i)(\exists x)(S \cap X_i = \{x\})$，则称$S$为$R$的等价类的代表系统.

元数学定义 38. 同等价关系相容的公式（*relation compatible avec une relation d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，P为公式：

如果P不包含x'，且P与$R \Rightarrow (x'|x)P$，则称P关于x同等价关系R相容，在没有歧义的情况下也可以简称P同等价关系R相容；

如果P不包含x'、y'，R不包含y、y'，且P与R与$(y|x)(y'|x')R \Rightarrow (x'|x)(y'|y)P$，则称$P$关于$x$、$y$同等价关系$R$相容，在没有歧义的情况下也可以简称$P$同等价关系$R$相容.

证明规则 56.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，P为公式，t为字母，如果P关于x同等价关系R相容，则$t \in E/R$与$(\exists x)(x \in t$与$P) \Leftrightarrow t \in E/R$与$(\forall x)(x \in t \Rightarrow P)$.

证明：在$t \in E/R$的情况下，如果$(\exists x)(x \in t$与$P)$为真，即存在$a \in t$，使$(a|x)P$、$(x|x')(a|x)R$对一切$x \in t$为真，故P对一切$x \in t$为真，因此$(\forall a)(a \in t \Rightarrow (a|x)P)$；反过来，若$(\forall x)(x \in t \Rightarrow P)$，由于$t \neq \varnothing$，则$(\exists x)(x \in t$与$P)$．得证．

补充证明规则 39.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，P为公式，t为字母，如果R不包含y，且P关于x、y同等价关系R相容，则$t \in E/R$与$u \in E/R$与$(\exists x)(\exists y)(x \in t$与$y \in u$与$P) \Leftrightarrow t \in E/R$与$u \in E/R$与$(\forall x)(\forall y)(x \in t$与$y \in u \Rightarrow P)$.

证明：类似证明规则56可证．

元数学定义 39. 通过商导出的公式（*relation déduite par passage au quotient*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，且$E \neq \varnothing$，P为公式：

如果P关于x同等价关系R相容，t为字母且P不包含t，则$t \in E/R$与$(\exists x)(x \in t$与$P)$ 称为P关于x对于R通过商导出的公式，在没有歧义的情况下也可以简称为P对于R通过商导出的公式.

如果R不包含y，且P关于x、y同等价关系R相容，t、u为字母且P不包含t、u，则$t \in E/R$与$u \in E/R$与$(\exists x)(\exists y)(x \in t$与$y \in u$与$P)$称为$P$关于$x$、$y$对于$R$通过商导出的公式，在没有歧义的情况下也可以简称为$P$对于$R$通过商导出的公式.

补充证明规则 40.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、x'在E上的等价关系，P为公式，t为字母：

（*1*）如果P关于x同等价关系R相容，P'为P为关于x对于R通过商导出的公式，f为E到E/R的规范映射，则$z \in E$与$(f(z)|t)P' \Leftrightarrow z \in E$与$(z|x)P$.

（*2*）如果R不包含y，且P关于x、y同等价关系R相容，P'为P为关于x、y对于R通过商导出的公式，f为E到E/R的规范映射，则$z \in E$与$w \in E$与$(f(z)|t)(f(w)|u)P' \Leftrightarrow z \in E$与$w \in E$与$(z|x)(w|y)P$.

证明：

（1）若$z \in E$，根据证明规则56，$(f(z)|t)P' \Leftrightarrow (\forall x)(x \in f(z) \Rightarrow P)$．如果$(\forall x)(x \in f(z) \Rightarrow P)$，则$(z|x)P$．反过来，如果$(z|x)P$，根据证明规则56，$(\forall x)(x \in f(z) \Rightarrow P)$．得证．

（2）类似补充证明规则40（1）可证．

元数学定义 40. 浸润子集（*partie saturée*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，$A \subset E$，如果$x \in A$关于x同等价关系R相容，则称A为E对于R的浸润子集.

补充证明规则 41.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，$A \subset E$，则：

（*1*）如果A为E对R的浸润子集，则$x \in A \Rightarrow G(x) \subset A$.

（*2*）$(\exists F)(F \subset E/R$与$A = \bigcup_X \in FX) \Leftrightarrow (A$为$E$对于$R$的浸润子集$)$.

证明：令R生成的图为G.

（1）如果A为E对于R的浸润子集，则$x \in A$与$(x,y) \in G \Rightarrow y \in A$．对任意$y \in G(x)$，$x \in A \Rightarrow y \in A$，因此$x \in A \Rightarrow G(x) \subset A$.

（2）假设存在$F \subset E/R$，使$A = \bigcup_{X \in F} X$，设$x \in A$，则存在$X \in F$，使$x \in X$，则$X \in E/R$，故$X = G(x)$．对于$(x,y) \in G$，可得$y \in X$，故$y \in A$，因此A为E对于R的浸润子集.

反过来，如果A为E对于R的浸润子集，则$x \in A$与$(x,y) \in G \Rightarrow y \in A$．令$F = \{X|(X \in E/R$与$X \bigcap_A \neq \varnothing\}$，故$F \subset E/R$．当$x \in A$时，$G(x) \in F$，故$x \in \bigcup_{X \in F} X$；反过来，若$x \in \bigcup_{X \in F} X$，则存在$X \in F$，使$x \in X$，因此$X = G(x)$，根据补充证明规则41（1），$G(x) \subset A$，故$x \in A$．因此，$(\exists F)(F \subset E/R$与$A = \bigcup_{X \in F} X)$．注：本补充证明规则表明，当且仅当子集是若干个等价类的并集时，其为浸润子集.

补充证明规则 42.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f为E到E/R的规范映射，$A \subset E$，则$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle = A \Leftrightarrow (A$为$E$对于$R$的浸润子集$)$.

证明：设f的图为G．如果A为E对于R的浸润子集，对任意$x \in A$，$f\langle\{x\}\rangle = f(x)$，即等于$G(x)$，设$y \in E$且$f(y) = G(x)$，根据证明规则55，$(x,y) \in G$，故$y \in G(x)$，因此$f^{-1}f\langle\{x\}\rangle \subset G(x)$，根据补充证明规则41（1），$f^{-1}f\langle\{x\}\rangle \subset A$，因此$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle \subset A$，根据补充定理50，$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle = A$．另一方面，若$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle = A$，对任意$x \in A$，则$f(x) \in f\langle A\rangle$．令$K = f(x)$，根据补充证明规则36（1），$y \in K \Leftrightarrow f(y) = K$，故$f^{-1}\langle\{K\}\rangle = K$，因此$K \subset f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$，所以$K \subset A$．因此，$A$为$E$对于$R$的浸润子集.

补充证明规则 43.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，$(X_i)_{i \in I}$为E的子集族，$(\forall i)(i \in I \Rightarrow X_i$为$E$对于$R$的浸润子集$)$，则$\bigcup_{i \in I} X_i$和$\bigcap_{i \in I} X_i$都是$E$对于$R$的浸润子集.

证明：根据定理26、定理27、补充证明规则42可证．

补充证明规则 44.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，A为E对于R的浸润子集，则$\complement_E A$也是E对于R的浸润子集．

证明：令f为E到E/R的规范映射，根据补充证明规则42，$A = f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$．根据补充定理70（2），$E = f^{-1}\langle E/R\rangle$．根据定理30，$\complement_E A = f^{-1}\langle E/R - f\langle A\rangle\rangle$，根据补充证明规则42得证．

补充证明规则 45.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f为E到E/R的规范映射，$A \subset E$，则$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$为$E$对于$R$的浸润子集．

证明：令R生成的图为G．设$x \in f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$，则$f(x) \in f\langle A\rangle$．若$(x, y) \in G$，根据证明规则55，$f(y) \in f\langle A\rangle$，故$y \in f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$，得证．

补充证明规则 46.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f为E到E/R的规范映射，$A \subset E$，若A'为E对于R的浸润子集，且$A \subset A'$，则$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle \subset A'$．

证明：由于$A \subset A'$，因此$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle \subset f^{-1}\langle f\langle A'\rangle\rangle$，根据补充证明规则42，得证．

元数学定义 41. 子集的浸润子集（*partie saturée d'une partie*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f为E到E/R的规范映射，$A \subset E$，则称$f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle$为$A$对于$R$的浸润子集．

补充证明规则 47.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，$(X_i)_{i\in I}$为E的子集族，对任意$i \in I$，令A_i为X_i对于R的浸润子集，则$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$为$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$对于$R$的浸润子集．

证明：根据定理26、补充证明规则42可证．

元数学定义 42. 同等价关系相容的映射（*application compatible avec une relation d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，f是定义域为E的函数，z为字母，R不包含z，如果$z = f(x)$关于x同等价关系R相容，则称f为同等价关系R相容的映射．

注：同等价关系相容的映射，意味着同一个等价类的元素的函数值相等.

补充证明规则 48.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，g为E到E/R的规范映射，f是定义域为E的函数，z为字母，R不包含z，则当且仅当$z = f(x)$关于x同等价关系R相容时，$x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.

证明：

充分性：$z = f(x)$与$R \Rightarrow z = f(y)$，因此$R \Rightarrow f(x) = f(y)$，根据证明规则55得证.

必要性：如果$x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$，当$x \in E$与$y \in E$与$x \equiv y(modR)$时，$g(x) = g(y)$，故$f(x) = f(y)$，因此$z = f(x)$关于$x$同等价关系$R$相容.

证明规则 57.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，g为E到E/R的规范映射，对任意E到F的映射f，当且仅当存在E/R到F的映射h使$f = h \circ g$时，f为同等价关系R相容的映射. 并且，对任意f，h是唯一确定的且$h = f \circ s$，其中s是g的右逆.

证明：根据定理22（1）可证.

元数学定义 43. 通过商导出的映射（*application déduite par passage au quotient*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y在E上的等价关系，g为E到E/R的规范映射，对E到F的映射f，如果f为同等价关系R相容的映射，s是g的右逆，则称$f \circ s$为f对于R通过商导出的映射.

补充定理 149.

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，则f为同等价关系R相容的映射.

证明：根据定义可证.

补充定理 150.

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，则f对于R通过商导出的映射为E/R到F的单射.

证明：设f对于R通过商导出的映射为h，$t \in E/R$，$t' \in E/R$，若$h(t) = h'(t)$，则对任意$x \in t$、$x \in t'$，$f(x) = h(t)$，$f(x') = h(t')$，故$f(x) = f(x')$，根据R的定义，$x = x'$，得证.

补充定理 151.

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，f对于R通过商导出的映射h的值域为$f\langle E\rangle$，并且，令k为h通过F的子集$f\langle E\rangle$导出的函数，则k为E/R到$f\langle E\rangle$的双射.

证明：E到E/R的规范映射为g，其右逆为s．由于$h=f\circ s$，故(h的值域) $\subset f\langle E\rangle$．而对任意$a\in f\langle E\rangle$．存在$x\in E$，使$a=f(x)$，则$h(g(x))=a$，故$h$的值域为$f\langle E\rangle$，并且，$k$为满射，同时，根据补充定理150，$h$为单射，故$k$为单射，因此$k$为双射．

补充定理 152.

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，h为f对于R通过商导出的映射，k为h通过F的子集$f\langle E\rangle$导出的函数，g为E到E/R的规范映射，j为$f\langle E\rangle$到F的规范映射，则$f=j\circ k\circ g$．

证明：根据证明规则57可证．

定义 79. 规范分解（*décomposition canonique*）

令f为E到F的映射，R为同f相关的等价关系，h为f对于R通过商导出的映射，k为h通过F的子集$f\langle E\rangle$导出的函数，g为E到E/R的规范映射，j为$f\langle E\rangle$到F的规范映射，则称$j\circ k\circ g$为f的规范分解．

元数学定义 44. 同两个等价关系相容的映射（*application compatible avec deux relations d'équivalence*） 包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令f为E到F的映射，R为在E上的等价关系，S为在F上的等价关系，v为S到F/S的规范映射．如果$v\circ f$为同等价关系R相容的映射，则称f为同等价关系R和S相容的映射．

注：同两个等价关系相容的映射，意味着第一个等价关系的同一个等价类的元素的函数值，属于第二个等价关系的同一个等价类．

补充证明规则 49.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令f为E到F的映射，R为在E上的等价关系，S为在F上的等价关系，v为S到F/S的规范映射，u为E到E/R的规范映射，当且仅当f为同等价关系R和S相容的映射时，存在从E/R到F/S的映射h，使$v\circ f=h\circ u$，且h是唯一的，同时，令s为u的右逆，$h=v\circ f\circ s$．

证明：

必要性：$v\circ f$为同等价关系R相容的映射，则$R\Rightarrow v\circ f(x)=v\circ f(y)$，又因为$R\Leftrightarrow x\in E$与$y\in E$与$u(x)=u(y)$，根据定理22（1）可证存在性和唯一性，以及，$h=v\circ f\circ s$．

充分性：如果存在从E/R到F/S的映射h，使$v\circ f=h\circ u$，则当$x\in E$与$y\in E$与$x\equiv y(modR)$，均有$h\circ u(x)=h\circ u(y)$，即$v\circ f(x)=v\circ f(y)$，故f为同等价关系R和S相容的映射．

元数学定义 45. 通过两个商导出的映射（*application déduite par passage au deux quotients*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论M中，令f为E到F的映射，R为在E上的等价关系，S为在F上的等价关系，v为S到F/S的规范映射，u为E到E/R的规范映射，如果E/R到F/S的映射h满足$v \circ f = h \circ u$，则称h为f对于R和S通过商导出的映射.

元数学定义 46. 等价关系的原像（*Image réciproque d'une relation d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论M中，令f为E到F的映射，S为在F上的等价关系，v为F到F/S的规范映射，则同$v \circ f$相关的等价关系称为S在f下的原像.

补充证明规则 50.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论M中，令f为E到F的映射，S为在F上的等价关系，v为F到F/S的规范映射，令R为S在f下的原像，则$R \Leftrightarrow x \in E$与$y \in E$与$(f(y)|y)(f(x)|x)S$.

证明：R即为$(x \in E$与$y \in E$与$v(f(x)) = v(f(y)))$. 设S的图为G，则$R \Leftrightarrow (x \in E$与$y \in E$与$G\langle f(x)\rangle = G\langle f(y)\rangle)$，等价于$(x \in E$与$y \in E$与$(f(x), f(y) \in G))$，得证.

补充证明规则 51.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论M中，令f为E到F的映射，S为在F上的等价关系，v为F到F/S的规范映射，令R为S在f下的原像，则任何一个关于R的等价类，都是某个关于S的等价类在f下的原像，且该等价类与$f\langle E\rangle$的交集不为空；反过来，任何关于S的等价类，如果与$f\langle E\rangle$的交集不为空，则其在f下的原像是R的等价类.

证明：设R生成的的图为G，S生成的图为F，则对于任何$x \in E$，R的等价类为$G(x)$，对于S的等价类$F(f(x))$，满足$f(x) \in F(f(x))$，故其与$f\langle E\rangle$的交集不为空，同时，当$y \in E$时，$y \in G(x) \Leftrightarrow v(f(x)) = v(f(y))$，即$F(f(x)) = F(f(y))$，等价于$f(y) \in F(f(x))$，等价于$y \in f^{-1}(F(f(x)))$. 故$y$为关于$S$的等价类$F(f(x))$的原像.

反过来，任何关于S的等价类X，如果与$f\langle E\rangle$的交集不为空，设$a \in X \cap f\langle E\rangle$，则存在$x$，使$f(x) = a$，则$X = F(f(x))$，如上所述，其在$f$下的原像是$R$的等价类$G(x)$.

元数学定义 47. 导出的等价关系（*relation d'équivalence induite*） 包含2元特别符号$\in$ 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，j为A到E的规范映射，则R在j下的原像，称为在A上由R导出的等价关系，记作R_A.

补充证明规则 52.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理1、显式公理2、显式公理3和公理模式8的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，则$R_A \Leftrightarrow x \in A$与$y \in A$与$R$.

证明：根据补充证明规则50可证.

补充证明规则 53.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，则对任意$x \in A$，x关于R_A的等价类，是x关于R的等价类在A上的迹.

证明：设R_A的图为G，R的图为F，$G(x) = \{y|(x, y) \in G\}$，$F(x) = \{y|(x, y) \in F)$. 由于$R_A \Leftrightarrow x \in A$与$y \in A$与$R$，因此$G(x) = \{y|x \in A$与$y \in A$与$(x, y) \in F\}$，由于$x \in A$，故$G(x) = F(x) \bigcap\limits_{A}$，得证.

补充证明规则 54.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，j为A到E的规范映射，则j为同等价关系R和R_A相容的映射.

证明：设E到E/R的规范映射为v，则R_A为$x \in A$与$y \in A$与$v(j(x)) = v(j(y))$，因此$z = v(j(x))$与$R \Rightarrow z = v(j(y))$，故$v \circ j$为同等价关系$R_A$相容的映射，得证.

补充证明规则 55.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，j为A到E的规范映射，E到E/R的规范映射为v，h为j对于R_A和R通过商导出的映射，则：

（*1*）h为A/R_A到E/R的单射.

（*2*）$h\langle A/R_A\rangle = v\langle A\rangle$.

证明：设A到A/R_A的规范映射为u，

（1）当$x \in A$、$y \in A$时，$h(u(x)) = h(u(y)) \Leftrightarrow v(j(x)) = v(j(y))$，即等价于$v(x) = v(y)$，故$(x, y) \in R_A$生成的图，因此$u(x) = u(y)$，得证.

（2）当$x \in A$时，$v(x) = v(j(x))$，等于$h(u(x))$，因此$v\langle A\rangle \subset h\langle A/R_A\rangle$. 反过来，对于$y \in A/R_A$，由于$u$为满射，则存在$x \in A$使$y = u(x)$，则$h(y) = v(x)$，因此，$hh\langle A/R_A\rangle \subset v\langle A\rangle$. 得证.

元数学定义 48. 商之间的规范映射（*application canonique entre deux quotients*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的等价关系，$A \subset E$，j为A到E的规范映射，E到E/R的规范映射为v，h为j对于R_A和R通过商导出的映射，则h通过E/R的子集$v\langle A\rangle$导出的映射，称为A/R_A到$v\langle A\rangle$的规范映射，其逆映射称为$v\langle A\rangle$到A/R_A的规范映射.

元数学定义 49. 更细的等价关系（*relations d'équivalence plus fin*）

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果R、S均为关于x、y的等价关系，且$S \Rightarrow R$，则称S为比R更细的等价关系．

注：在原书中，“更细”这个概念包括与自身相等的情况，即一个等价关系比自身更细．

补充证明规则 56.

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果R、S均为关于x、y的等价关系，且S为比R更细的等价关系，则任何一个S的等价类，都是R的一个等价类的子集．

证明：设R生成的图为G，S生成的图为F，则$F \subset G$．则$F(x) \subset G(x)$，得证．

补充证明规则 57.

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果R、S均为关于x、y的等价关系，且S为比R更细的等价关系，f为E到E/R的规范映射，则f为同等价关系S相容的映射．

证明：根据定义可证．

元数学定义 50. 等价关系的商（*quotient de relations d'équivalence*）

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R、S均为关于x、y在E上的等价关系，且S为比R更细的等价关系，f、g分别为E到E/R和E到E/S的规范映射，h为f对于S通过商集导出的映射，则同h相关的等价关系称为R除以S的商，记作R/S．

补充证明规则 58.

包含2元特别符号∈ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R、S均为关于x、y在E上的等价关系，且S为比R更细的等价关系，f、g分别为E到E/R和E到E/S的规范映射，h为f对于S通过商集导出的映射，则：

（*1*）$f = h \circ g$．

（*2*）$x \equiv y(modR) \Leftrightarrow g(x) \equiv g(y)(modR/S)$．

（*3*）关于R/S的等价类，是关于R的等价类在g下的像．

证明：

（1）令$j = Id_E$，则$f \circ j = f$，因此$f = h \circ g$．

（2）根据补充证明规则58（1）可证．

（3）令R的图为G，R/S的图为F，对任意$x \in E$，考虑R的等价类$G(x)$和R/S的等价类$F(g(x))$．当$y \in E$时，$y \in G(x) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$，等价于$h(g(y)) = h(g(x))$，等价

于$g(y) \in F(g(x))$．同时，当$z \in E/S$时，$z \in g\langle G(x)\rangle \Leftrightarrow (\exists y)(y \in G(x)$与$g(y) = z)$，等价于$(\exists y)(g(y) \in F(g(x))$与$g(y) = z)$，等价于$z \in F(g(x))$与$(\exists y)(g(y) = z)$，根据补充证明规则35，$g$为$E$到$E/S$的满射，故$(\exists y)(g(y) = z)$，因此$z \in g\langle G(x)\rangle \Leftrightarrow z \in F(g(x))$，得证．

补充证明规则 59.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令S为关于x、y在E上的等价关系，T为关于x、y在E/S上的等价关系，g为E到E/S的规范映射，R为T在g下的原像，则S为比R更细的等价关系，并且$T \Leftrightarrow R/S$．

证明：$R \Leftrightarrow x \in E$与$y \in E$与$(g(y)|y)(g(x)|x)T$，同时，根据证明规则55，$S \Rightarrow (x \in E$与$y \in E$与$g(x) = g(y))$，当$g(x) = g(y)$时，$(g(y)|y)(g(x)|x)T \Leftrightarrow (g(x)|y)(g(x)|x)T$，后者即$(g(x)|x)(x|y)T$，其为真，因此$S \Rightarrow R$．

令f为E到E/R的规范映射，h为f对于S通过商集导出的映射，则$f = h \circ g$，当$x \in E$、$y \in E$时，$(g(y)|y)(g(x)|x)T \Leftrightarrow h(g(x)) = h(g(y))$，由于$g$为满射，故对任意$x \in E/S$、$y \in E/S$，均存在$g(a) = x$、$g(b) = y$，故$T \Leftrightarrow h(x) = h(y)$．又因为$T \Rightarrow x \in E/S$、$T \Rightarrow y \in E/S$，因此$T \Leftrightarrow R/S$．

补充证明规则 60.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的等价公式，R'为关于x'、y'的等价公式，令S为$(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u = (x, x')$与$v = (y, y')$与$R$与$(y'|y)(x'|x)R)$，则$S$为关于$u$、$v$的等价公式．

证明：根据定义可证．

元数学定义 51. 等价关系的积（*produit de relations d'équivalence*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的等价公式，R'为关于x'、y'的等价公式，则称关于u、v的等价公式$(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u = (x, x')$与$v = (y, y')$与$R$与$R')$为$R$和$R'$的积，记作$R \times R'$．

补充证明规则 61.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的等价公式，R'为关于x'、y'在E'上的等价公式，则$R \times R'$为在$E \times E'$上的等价公式．

证明：令S为$(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u = (x, x')$与$v = (y, y')$与$R$与$(y'|y)(x'|x)R)$，则$(u|v)S \Leftrightarrow (\exists x)(\exists x')(u = (x, x')$与$(x|y)R$与$(x'|y')R')$，等价于$(\exists x)(\exists x')(u = (x, x')$与$x \in E$与$x' \in R')$，等价于$u \in E \times E'$，得证．

补充证明规则 62.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的等价公式，R'为关于x'、y'在E'上的等价公式，f和f'分别为E到E/R和E'到E'/R'的规范映射，g为$E\times E'$到$(E\times E')/(R\times R')$的映射，则：

（*1*）$g((x,x'))=f(x)\times f'(x')$.

（*2*）关于$R\times R'$的等价类，是关于R的等价类和关于R'的等价类的积，反过来，关于R的等价类和关于R'的等价类的积，是关于$R\times R'$的等价类.

证明：

（1）令$x\in E$，$x'\in E'$，$u=(x,x')$，则$R\times R'\Leftrightarrow(\exists y)(\exists y')(v=(x,x')$与$R$与$R')$，令$R$和$R'$的图分别为$G$和$G'$，$R\times R'$的图为$F$，则$R\times R'\Leftrightarrow v\in G(x)\times G'(x')$，因此，$(u,v)\in F\Leftrightarrow v\in G(x)\times G'(x')$，即$F(u)=G(x)\times G'(x')$，得证.

（2）根据补充证明规则62（1）可证.

补充证明规则 63.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的等价公式，R'为关于x'、y'在E'上的等价公式，f和f'分别为E到E/R和E'到E'/R'的规范映射，则同$f\times f'$相关的等价关系等价于$R\times R'$.

证明：$f\times f'((x,x'))=(f(x),f'(x'))$，因此，同$f\times f'$相关的等价关系即$x\in E$与$x'\in E'$与$y\in E$与$y'\in E'$与$u=(x,x')$与$v=(y,y')$与$f(x)=f(y)$与$f'(x')=f'(y')$，由于$R\Leftrightarrow x\in E$与$y\in E$与$f(x)=f(y)$，$R'\Leftrightarrow x'\in E'$与$y'\in E'$与$f'(x')=f'(y')$，得证.

补充证明规则 64.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的等价公式，R'为关于x'、y'在E'上的等价公式，f和f'分别为E到E/R和E'到E'/R'的规范映射，g为$E\times E'$到$(E\times E')/(R\times R')$的规范映射，则存在唯一的映射$h$，使$f\times f'=h\circ g$，且$h$为$(E\times E')/(R\times R')$到$(E/R)\times(E'/R')$的双射.

证明：根据补充证明规则62（1），$g((x,x'))=f(x)\times f'(x')$，$f\times f'((x,x'))=(f(x),f'(x'))$，根据定理22（1），存在唯一的$h$，使$f\times f'=h\circ g$. 由于$f\times f'$为满射，故$h$为满射.

同时，设$h(a)=h(b)$，由于g为满射，故存在a、b使$a=g(x,x')$、$b=(y,y')$，因此$h(a)=(f(x),f'(x'))$，$h(b)=(f(y),f'(y'))$，故$f(x)=f(y),f'(x')=f'(y')$，故$g((x,x'))=g((y,y'))$，因此$a=b$，所以h为单射.

综上，h为双射.

补充证明规则 65.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，则：

（*1*）$(x'|y)R \Rightarrow \tau_y(R) = \tau_y((x'|x)R)$.
（*2*）$(x|y)R \Leftrightarrow (\tau_y(R)|y)R$.
（*3*）$(x|y)R$与$(x'|x)(x'|y)R$与$\tau_y(R) = \tau_y((x'|x)R) \Leftrightarrow (x'|y)R$.

证明：

（1）如果$(x'|y)R$，则$R \Leftrightarrow (x'|x)R$，根据公理模式7可证.

（2）$(\tau_y(R)|y)R$即$(\exists y)R$. 根据补充证明规则27可证.

（3）如果$(x'|y)R$，根据补充证明规则23，$(x|y)R$与$(x'|x)(x'|y)R$，根据补充证明规则65（1），$(x'|y)R \Rightarrow (x|y)R$与$(x'|x)(x'|y)R$与$\tau_y(R) = \tau_y((x'|x)R)$.

反过来，如果$(x|y)R$与$(x'|x)(x'|y)R$与$\tau_y(R) = \tau_y((x'|x)R)$，根据公理模式6，$(\tau_y((x'|x)R)|y)(x'|x)R \Leftrightarrow (\tau_y(R)|y)(x'|x)R$，根据补充证明规则65（2），$(x'|x)(x'|y)R \Leftrightarrow (\tau_y((x'|x)R)|y)(x'|x)$，故$(\tau_y(R)|y)(x'|x)R \Leftrightarrow (x'|x)(x'|y)R$，因此$(\tau_y(R)|y)(x'|x)R$，根据补充证明规则65（2），$(x|y)R \Leftrightarrow (\tau_y(R)|y)R$，故$(\tau_y(R)|y)R$，因此$(x'|x)R$. 得证.

元数学定义 52. 等价的对象类（*classe d'objets équivalents*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，则$\tau_y(R)$称为关于R等价于x的对象类.

补充证明规则 66.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，T为项且不包含x，如果$(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T$与$R))$，则$(\exists x)((x|y)R$与$z = \tau_y(R))$为$z$上的集合化公式.

证明：根据证明规则53，$x \in T$与$z = \tau_y(R)$为z上的集合化公式，令$X = \{z|x \in T$与$z = \tau_y(R)\}$，如果$(x|y)R$，则存在$x \in T$，使R为真，则$\tau_y(R) = (y|x)\tau_y(R)$，由于$\tau_y(R) \in X$，故$(y|x)\tau_y(R)$
$\in X$，因此$(y|x)R \Rightarrow (y|x)\tau_y(R) \in X$，因此$(x|y)R \Rightarrow \tau_y(R) \in X$，故$(\exists x)((x|y)R$与$z = \tau_y(R)) \Rightarrow z \in X$，根据证明规则52得证.

元数学定义 53. 等价的对象类的集合（*ensemble de classes d'objets équivalents*)）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，如果存在不包含x的项T，使$(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T$与$R))$，则称$\{z|(\exists x)((x|y)R$与$z = \tau_y(R))\}$为等价的对象类的集合.

补充证明规则 67.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的等价关系，存在不包含x的项T，使$(\forall y)((y|x)R \Rightarrow (\exists x)(x \in T$与$R))$，$X$为等价的对象类的集合，$(x|y)R$为真，则存在唯一的$z$，满足$z \in X\check{}(z|y)R$为真.

证明：$\tau_y(R)$满足上述条件，存在性得证.

另一方面，设$z=\tau_y((u|x)R)$且$(u|y)R$，因此$(u|x)(z|y)R$为真，因此$(u|y)R$为真，根据补充证明规则65（1），$\tau_y((u|x)R)=\tau_y(R)$，故$z=\tau_y(R)$，唯一性得证.

习题 67.

求证：当且仅当满足下列三个条件时，G为在E上的等价关系生产的图：

第一，$pr_1G=E$，$pr_2G=E$，

第二，$G\circ G^{-1}\circ G=G$，

第三，$\Delta_E\subset G$.

证明：

如果G为在E上的等价关系生产的图：根据补充证明规则25，$(x,y)\in G\Rightarrow x\in E$，$(x,y)\in G\Rightarrow y\in E$，同时，$x\in E\Leftrightarrow(x,x)\in G$，故$(\exists y)((x,y)\in G)\Leftrightarrow x\in E$、$(\exists x)((x,y)\in G)\Leftrightarrow y\in E$，即$pr_1G=E$，$pr_2G=E$.

$(x,t)\in G\Rightarrow(x,x)\in G$与$(x,x)\in G$与$(x,t)\in G$，故$(\exists y)(\exists z)((x,y)\in G$与$(z,y)\in G$与$(z,t)\in G)$，另一方面，如果$(\exists y)(\exists z)((x,y)\in G$与$(z,y)\in G$与$(z,t)\in G)$，则$(x,t)\in G$，$EG\circ G^{-1}\circ G=G$.

$x\in E\Leftrightarrow(x,x)\in G$，根据补充定理59，$(x,y)\in\Delta_E\Leftrightarrow x\in E$与$y=x$，由于$x\in E\Leftrightarrow(x,x)\in G$，$(x,y)\in\Delta_E\Rightarrow(x,y)\in G$，因此$\Delta_E\subset G$.

反过来，如果三个条件成立：由于$pr_1G=E$，$pr_2G=E$，$\Delta_E\subset G$，反身性成立.

如果$(x,y)\in G$，$(y,z)\in G$，由于$(y,y)\in G^{-1}$，故$(x,z)\in G\circ G^{-1}\circ G$，因此$(x,z)\in G$，传递性成立.

若$(x,y)\in G$，由于$(y,y)\in G$，因此$(y,x)\in G^{-1}$，$(x,x)\in G$，因此$(y,x)\in G$，对称性成立.

习题 68.

G为图，且$G\circ G^{-1}\circ G=G$，求证：$G^{-1}\circ G$和$G\circ G^{-1}$分别为在pr_1G上和在pr_2G上的等价图.

证明：当$x\in pr_1G$时，$(\exists y)((x,y)\in G)$，则$(y,x)\in G^{-1}$，故$(x,x)\in G^{-1}\circ G$；反过来，若$(x,x)\in G^{-1}\circ G$，$(\exists y)((x,y)\in G)$，故$x\in pr_1G$，反身性成立.

若$(x,y)\in G^{-1}\circ G$，$(y,z)\in G^{-1}\circ G$，则$(\exists z)((x,z)\in G)$，$(y,z)\in G$，因此$(y,x)\in G$，对称性成立.

若$(x,y)\in G^{-1}\circ G$，则$y\in pr_1G$，因此$(y,y)\in G$，故$(x,y)\in G\circ G^{-1}\circ G$，因此$(x,y)\in G$；由于$(y,z)\in G^{-1}\circ G$，则$(z,y)\in G^{-1}\circ G$，同理$(z,y)\in G$，因此$(x,z)\in G^{-1}\circ G$，传递性成立.

故$G^{-1}\circ G$为在pr_1G上的等价图. 同理可证$G\circ G^{-1}$为在pr_2G上的等价图.

习题 69.

$A \subset E$，R是同恒等映射$X \to X \cap A(X \in \mathcal{P}(E), X \bigcap\limits_{A} \in \mathcal{P}(E))$相关的等价关系．求证：存在$\mathcal{P}(A)$到$\mathcal{P}(E)/R$的双射．

证明：令映射$X \to X \cap A(X \in \mathcal{P}(E), X \bigcap\limits_{A} \in \mathcal{P}(E))$为$f$，对任意$Y \in \mathcal{P}(A)$，$Y \cap A = Y$，故$f(Y) = Y$，因此$f\langle \mathcal{P}(E) \rangle = \mathcal{P}(A)$，对$f$做规范分解$f = g \circ k \circ j$，其中，$k$为$E/R$到$\mathcal{P}(A)$的映射，根据补充定理150得证．

习题 70.

G为在E上的等价图，如果$A \subset G$且$pr_1 A = E$（或$pr_2 A = E$），B为图，则：$G \circ A = G$（或$A \circ G = G$），$(G \cap B) \circ A = G \cap (B \circ A)$（或$A \circ (G \cap B) = G \cap (A \circ B)$）．

证明：

若$pr_1 A = E$，如果$(x,z) \in G$，则$x \in E$，故存在y使$(x,y) \in A$，同时$(y,z) \in G$，故$(x,z) \in G \circ A$；反过来，如果$(x,z) \in G \circ A$，则存在y使$(x,y) \in A$与$(y,z) \in G$，故$(x,z) \in G$，因此$G \circ A = G$．

如果$(x,z) \in G \cap (B \circ A)$，则$(x,z) \in G$，且存在$y$，使$(x,y) \in A$，$(y,z) \in B$，因此$(y,z) \in G$，故$(y,z) \in G \cap B$，故$(x,z) \in (G \cap B) \circ A$．反过来，如果$(x,z) \in (G \cap B) \circ A$，则存在$y$，使$(x,y) \in A$，$(y,z) \in G \cap B$，故$(y,z) \in B$，$(y,z) \in G$，因此$(x,z) \in B \circ A$，$(x,z) \in G$，因此$(G \cap B) \circ A = G \cap (B \circ A)$．

同理可证$pr_2 A = E$的情形．

习题 71.

求证：在E上的多个等价图的交集，是在E上的等价图．并给出在E上的两个等价集，其并集不是在E上的等价集．

证明：证明部分即补充定理145．令a、b、c互不相等，$G = \{(a,a),(b,b),(c,c)\} \cup \{(a,b),(b,a)\}$，H=$\{(a,a),(b,b),(c,c)\} \cup \{(a,c),(c,a)\}$，则$G$、$H$均为在$\{a,b,c\}$上的等价图，但$G \cup H = \{(a,a),(b,b),(c,c)\} \cup \{(a,b),(b,a)\} \cup \{(a,c),(c,a)\}$，$(b,a) \in G \cup H$、$(a,c) \in G \cup H$，但$(b,c) \notin G \cup H$，故$G \cup H$不是等价图．

习题 72.

G、H均为在E上的等价图，求证：当且仅当$G \circ H = H \circ G$时，$G \circ H$为在E上的等价图，并且，这种情况下，令$I = X \in \{X | G \subset X与H \subset X与(H为在E上的等价图)\}$，则$G \circ H = \bigcap\limits_{X \in I} X$．

证明：

对任意$x \in E$，$(x,x) \in G$、$(x,x) \in H$、故$(x,x) \in G \circ H$，反过来，如果$(x,x) \in G \circ H$，则存在y使$(x,y) \in H$，故$x \in E$，因此$G \circ H$具有反身性．

如果$(x,y)\in G\circ H$，则存在z使$(x,z)\in H$，$(z,y)\in G$，因此$(y,x)\in H\circ G$，反之亦然．故当且仅当$G\circ H=H\circ G$时，$G\circ H$具有对称性．

如果$G\circ H=H\circ G$，则当$(x,y)\in G\circ H$、$(y,z)\in G\circ H$时，$(x,z)\in G\circ H\circ G\circ H$，因此$(x,z)\in G\circ G\circ H\circ H$．根据定理56，$G\circ G=G$、$H\circ H=H$，因此$(x,z)\in G\circ H$，即$G\circ H$具有传递性．

综上，当且仅当$G\circ H=H\circ G$时，$G\circ H$为在E上的等价图．

设$(x,y)\in G\circ H$，则存在z，使$(x,z)\in G$、$(z,y)\in H$，因此对任意$X\in I$，$(x,y)\in X$，故$X\in\bigcap\limits_{X\in I}X$，反过来，若$(x,y)\in\bigcap\limits_{X\in I}X$，则对任意$X\in I$，$(x,y)\in X$，因此$(x,y)\in G$、$(x,y)\in H$，故$(x,y)\in G\circ H$，得证．

习题 73.

令R为在F上的等价关系，f为E到F的映射，S为R在f下的原像．$A=f\langle E\rangle$，试给出E/S到R/R_A的双射．

答：设j为A到F的规范映射，则j为单射；h为f对于R与S通过商集导出的映射，根据补充定理150，h为E/S到F/R的单射；l为j对于R_A与R通过商集导出的映射，根据补充证明规则55（1），l为A/R_A到F/R的单射．

令p为F到F/R的规范映射，根据补充证明规则55（2），$l\langle A/R_A\rangle=p\langle A\rangle$，令$l'$为$l$通过$F/R$的子集$p\langle A\rangle$导出的函数，则$l'$为双射．同时，设$E$到$E/S$的规范映射为$k$，则$p\circ f=h\circ k$．对任意$x\in p\langle A\rangle$，则存在$y\in E$，使$p(f(y))=x$，故$x=h(k(y))$，反过来，对任意$z\in E/S$，设$z=G(u)$，则$h(z)=p(f(u))$，故$h(z)\in p\langle A\rangle$．因此，令$h'$为$h$通过$F/R$的子集$p\langle A\rangle$导出的函数，则$h'$为双射．

因此$l'^{-1}\circ h'$为E/S到R/R_A的双射．

习题 74.

R为在F上的等价关系，p为F到F/R的规范映射，f为G到F/R的满射，求证：存在E，以及E到F的满射g、E到G的满射h，使$p\circ g=f\circ h$．

证明：$(\exists X)(z\in p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle$与$X\in F/R)\Rightarrow z\in F\times G$，故$(\exists X)(z\in p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle$与$X\in F/R)$为集合化公式，令$E=\{z|(\exists X)(z\in p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle$与$X\in F/R)\}$，映射$g$为$z\to pr_1z(z\in E,pr_1z\in F)$，映射$h$为$z\to pr_2z(z\in E,pr_2z\in G)$．对任意$z\in E$，设$z\in p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle$与$X\in F/R$，故$p(g(z))=X$，$f(h(z))=X$，同时，由于$p$、$f$均为满射，故对任意$x\in F$，令$G(x)=X$，故$p^{-1}\langle X\rangle\times f^{-1}\langle X\rangle\neq\varnothing$，因此存在$z\in E$，使$g(z)=x$，故$g$为满射，同理可证$h$为满射．

习题 75.

（1）令R为公式，求证：公式R与$(x|z)(y|x)(z|y)R$关于x、y具有对称性，在什么情况下，该公式为关于x、y在E上具有反身性？

（2）令R为公式，R关于x、y具有对称性并且在E上具有反身性，令其生成的图为G，且$G\subset E\times E$．S为公式：

“存在自然数$n>0$以及$(x_i)_{i\in[0,n]}$（$(\forall i)(i\in[0,n]\Rightarrow x_i\in G)$），其中$x_0=x$，$x_n=y$，并且，对任意$i\in[0,n-1]$，$(x_{i+1}|y)(x_i|x)R$为真”．

求证：S是关于x、y在E上的等价关系，并且，包含G的一切等价图，均包含S的图．

（3）当$x\in E$时，（2）中的S的等价类，称为x所在的E关于R的连通分量，在没有歧义的情况下可以简称E关于R的连通分量．令$F=\{A|A\subset E$与$(\forall y)(\forall z)(y\in A$与$z\in E-A\Rightarrow$非$(y|x)(z|y)R)$，求证：对任意$x\in E$，$\bigcap_{A\in\{A|A\in F与x\in A\}}A$为$E$关于$R$的连通分量．

证明：

（1）对称性根据定义可证．$(x|y)R$与$(x|y)(x|z)(y|x)(z|y)R\Leftrightarrow x\in E$，即$(x|y)R\Leftrightarrow x\in E$，故当且仅当$R$在$E$上具有反身性时，公式$R$与$(x|z)(y|x)(z|y)R$在$E$上具有反身性．

（2）令R的图为G，S的图为F．假设$(x,y)\in F$，由于R具有对称性，令$y_i=x_{n-i}$，则$(y_i)_{0\le i与i\le n}$满足S，故$(y,x)\in F$，因此S具有对称性．

假设$x\in E$，由于R具有反身性，令$y_i=x$（$0\le i$与$i\le n$），则则$(y_i)_{0\le i与i\le n}$满足S；反过来若$(x_i)_{0\le i与i\le n}$满足S，且其中$x_0=x$，$x_n=x$，则$(x,x_1)\in G$，由于$G\subset E\times E$，故$x\in E$，因此S在E上具有反身性．

假设$(x,y)\in F$、$(y,z)\in F$，将相应的$(x_i)_{i\in[0,n]}$、$(Y_i)_{i\in[0,m]}$合在一起组成$(Zi)_{i\in[0,n+m+1]}$（当$i\in[0,n]$时，$Z_i=X_i$，当$i\in[n+1,n+m+1]$时，$Z_i=Y_{i-n-1}$），因此$(x,z)\in F$，因此S具有传递性．令$G^1=G$，$G^n=G^{n-1}\circ G$，则$F=\bigcup_{n\in N-\{0\}}G^n$．对满足$G\subset G'$的任意$G'$，如果$G$为在$E$上的等价关系，根据定理56，对任意自然数$n>0$，$G^n\subset G'$，因此$F\subset G$，得证．

（3）令R的图为G，S的图为F，则当$A\in F$且$x\in A$时，如果$(x,y)\in F$，则存在满足S的$(x_i)_{i\in[0,n]}$，如果存在i使$x_{i-1}\in A$但$x_i\notin A$，则$(x_{i-1},x_i)\notin G$，矛盾，因此$y\in A$，故$y\in\bigcap_{A\in\{A|A\in F与x\in A\}}A$．

反过来，如果$(x,y)\notin F$，则$y\notin F(x)$、$x\in F(x)$、$F(x)\in F$，因此$y\notin\bigcap_{A\in\{A|A\in F与x\in A\}}A$．得证．

注：习题75（2）、（3）涉及尚未介绍的“自然数”知识．

习题 76.

（1）公式R具有对称性并且在E上具有反身性．如果对任意互不相等的x、y、z、t，$x\in E$与$y\in E$与$z\in E$与$t\in E$与R与$(z|y)R$与$(t|y)R$与$(y|x)(z|y)R$与$(y|x)(t|y)R\Rightarrow(t|y)(z|x)R$，则称$R$具有1级非传递性．如果$A\subset E$，并且$x\in A$与$y\in A\Rightarrow R$，则称$A$关于$R$稳定．如果$a\in E$、$b\in E$，$a\neq b$，并且$(b|y)(a|x)R$为真，令$C(a,b)=\{x|x\in E$与$(x|y)(a|x)R$与$(x|y)(b|x)R\}$，求证：$C(a,b)$关于$R$稳定；任意$x\in C(a,b)$、$y\in C(a,b)v\check{}x\neq y$，均有$C(x,y)=C(a,b)$；此时，集合$C(a,b)$称为$E$关于$R$的组成部分，则$C(a,b)$是$E$关于$R$的连通分量；$E$

的两个不同组成部分的交集最多有一个元素，并且对于E的三个不同组成部分A、B、C，$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$至少有一个为空或者三者相同.

（*2*）反过来，设$(X_l)_{l\in L}$为E的覆盖，其中$l\in L\Rightarrow X_l\neq\varnothing$，并且：

第一，对任意$l\in L$、$m\in L$且$l\neq m$，$X_l\cap X_m$最多有一个元素；

第二，对任意$l\in L$、$m\in L$、$n\in L$且三者互不相等，$X_l\cap X_m$、$X_l\cap X_m$、$X_l\cap X_m$至少有一个为空或者三者相同.

令公式R为$(\exists l)(l\in L$与$x\in X_l$与$y\in X_l)$，求证：R在E上具有反身性、具有对称性，并且具有1级非传递性.

（*3*）公式R具有对称性并且在E上具有反身性．如果对于E的n个互不相等的元素$(x_i)_{1\leq i与i\leq n}$，只要$(x_i|x)(x_j|y)R$（$1\in[1,n]$，$j\in[1,n]$，$i\neq j$，且$(i,j)\neq(n-1,n)$，$(i,j)\neq(n,n-1)$）均为真，就有$(x_{n-1}|x)(x_n|y)R$为真，则称R具有$n-3$级非传递性．试类比习题*76*（*1*）、习题*76*（*2*），给出具有任意级非传递性的充分必要条件，并证明：具有p级非传递性的公式，也具有q级非传递性（$q>p$）.

证明：

（1）设$x\in C(a,b)$、$y\in C(a,b)$，则$R(a,x)$、$R(b,x)$、$R(a,y)$、$R(b,y)$、$R(a,b)$，且$a\in E$、$b\in E$、$x\in E$、$y\in E$，根据定义，无论a、b、x、y中是否有相等的，R均为真．故$C(a,b)$关于R稳定．如果$x\in C(a,b)$、$y\in C(a,b)$并且$x\neq y$，则对任意$z\in C(x,y)$，则$z\in E$并且$(z|y)(a|x)R$、$(z|y)(b|x)R$，故$z\in C(a,b)$，反之，同理可证对任意$z\in C(a,b)$，有$z\in C(x,y)$，因此$C(x,y)=C(a,b)$．对任意$x\in C(a,b)$，则$(x|y)(a|x)R$成立，反过来，如果x是a所在的E关于R的连通分量的元素，根据数学归纳法可证$x\in C(a,b)$，故$C(a,b)$是a所在的E关于R的连通分量．若E的两个不同组成部分的交集有两个元素x、y，则二者均为$C(x,y)$，矛盾，故最多有一个元素．假设$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$均不为空，设$A\cap B=\{a\}$，$B\cap C=\{b\}$，$C\cap A=\{c\}$，若其中$a=b$，则$a=c$，三者相同，若三者均不相同，则$A=C(a,c)$，$B=C(a,b)$，$C=C(b,c)$，因此$(b|y)(a|x)R$、$(a|y)(c|x)R$、$(c|y)(b|x)R$，因此$b\in A$、$c\in B$、$a\in C$，故$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$均有不少于三个公共元素，矛盾．得证.

（2）$(\exists l)(l\in L$与$x\in X_l)$为真，故R具有反身性；$(\exists l)(l\in L$与$x\in X_l$与$y\in X_l)\Leftrightarrow(\exists l)(l\in L$与$y\in X_l$与$x\in X_l)$，故$R$具有对称性．对任意互不相等的$x$、$y$、$z$、$t$如果$x\in E$与$y\in E$与$z\in E$与$t\in E$与$R$与$(z|y)R$与$(t|y)R$与$(y|x)(z|y)R$与$(y|x)(t|y)R$，则存在$l\in l$，使$\{x,y\}\subset X_i$，存在$m\in L$，使$\{y,z\}\subset X_m$，存在$n\in L$，使$\{z,x\}\subset X_n$，因此$l$、$m$、$n$相等，故$\{x,y,z\}\subset X_l$，同理存在$l'\in l$，使$\{x,y,t\}\subset X_l'$，因此$l=l'$，故$\{x,y,z,t\}\subset X_l$，因此，$(t|y)(z|x)R$，故$R$具有1级非传递性.

（3）充分必要条件为：

第一，集族任意两个元素的交集最多有$n-3$个元素；

第二，集族中任意三个集合A、B、C，如果$A\cap B$、$B\cap C$、$C\cap A$均有$n-3$个元素，且其中$n-4$个元素是三个集合共有的，则全部$n-3$个元素均为三个集合共有.

如果上述性质成立，考虑任何元素x，集族中包含x的集合，去掉x后，剩下的集合产生的公式具有$n-4$级非传递性，故充分性成立；如果R具有$n-3$级非传递性，对任意元素$x \in E$，考虑与x满足R的元素集合E'（不包含元素x），令$R' = R \cap (E' \times E')$，则$R'$具有$n-4$级非传递性，因此任意集合$A$、$B$、$C$，上述性质对$n-1$成立，则对于$A \cup \{x\}$、$B \cup \{x\}$、$C \cup \{x\}$，上述性质对$n$成立，必要性成立.

如果公式R具有p级非传递性，则集族任意两个元素的交集最多有p个元素，由于$q > p$，故q级非传递性的条件一成立；同时，如果集族中任意三个集合A、B、C，如果$A \cap B$、$B \cap C$、$C \cap A$均有q个元素，且其中$q-1$个元素是三个集合共有的，则令M有$q-p$个元素且$M \subset (A \cap B \cap C)$，令$A' = A - M$、$B' = B - M$、$C' = C - M$，则$A' \cap B'$、$B' \cap C'$、$C' \cap A'$均有$p-3$个元素，且其中$p-4$个元素是三个集合共有的，故全部$p3$个元素均属于$A' \cap B' \cap C'$，也就是说，$q$级非传递性的条件二成立．综上，$R$具有$q$级非传递性.

注：习题76（1）、（3）涉及尚未介绍的“自然数”知识.

Chapter 3

偏序集，基数，自然数（Ensembles ordonnés, cardinaux, nombres entiers）

3.1 偏序关系，偏序集（Relations d'ordre, ensembles ordonnés）

元数学定义 54. 偏序关系（*relation d'ordre*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为公式，x、y、z为不同的不是常数的字母，且R不包含z，如果下列三个公式为真：

第一，R关于x、y具有传递性；

第二，R与$(x|z)(y|x)(z|y)R \Rightarrow x = y$；

第三，$R \Rightarrow (x|y)R$与$(y|x)R$，

则称R为关于x、y的偏序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为R为偏序关系.

补充证明规则 68.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的偏序关系，则$(x|z)(y|x)(z|y)R$也是关于x、y的偏序关系.

证明：根据定义可证.

元数学定义 55. 在集合上的偏序关系（*relation d'ordre dans un ensemble*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的偏序关系，并且R关于x、y在E上具有反身性，则称R为关于x、y在E上的偏序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为R为在E上的偏序关系.

补充定理 153.

（*1*）$x=y$为关于x、y的偏序关系.

（*2*）$x\subset y$为关于x、y的偏序关系.

（*3*）$x=y$与$x\in E$为关于x、y在E上的偏序关系.

（*4*）$F\subset \mathcal{P}(E)$，则$x\subset y$与$x\in F$与$y\in F$为关于x、y在F上的偏序关系.

（*5*）E、F为集合，H的元素都是E的子集到F的映射，则$x\in H$与$y\in H$与(y为x的延拓)为关于x、y在H上的偏序关系.

（*6*）E为集合，$F=\{A|(\Delta_A$为E的划分$)\}$，$X\in F$与$Y\in F$与Δ_X为比Δ_Y更细$)\}$为关于X、Y在F上的偏序关系.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 69.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的偏序关系，则$R\Rightarrow x\in E$，$R\Rightarrow y\in E$.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 70.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的偏序关系，则R与$(x|z)(y|x)(z|y)R\Leftrightarrow x\in E$与$y\in E$与$x=y$.

证明：根据定义，R与$(x|z)(y|x)(z|y)R\Rightarrow x\in E$与$y\in E$与$x=y$. 另一方面，如果$x\in E$与$y\in E$与$x=y$，则$R\Leftrightarrow (y|x)R$、$R\Leftrightarrow (x|y)R$，进而$x\in E$与$y\in E$与$x=y\Rightarrow R$与$(x|z)(y|x)(z|y)R$.

补充证明规则 71.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的偏序关系，则R为生成图的公式.

证明：根据补充证明规则69，$R\Rightarrow (x,y)\in E\times E$，根据补充证明规则118可证.

定义 80. 偏序图（*graphe d'ordre*）

G为图，如果$(x,y)\in G$为在E上的偏序关系，则称G为在E上的偏序图.

定义 81. 在集合上的偏序对应（*correspondance d'ordre dans un ensemble*），偏序（*ordre*）

如果F为在E上的偏序图，则(F,E,E)称为在E上的偏序对应，或称为在E上的偏序.

定理 57. 当且仅当同时满足下列两个条件时，对应(G,E,E)为在E上的偏序对应：

第一，$G\circ G=G$;

第二，$G\cap G^{-1}=\Delta_E\times E$.

证明：如果(G,E,E)为偏序关系，由于$(x,y)\in G$与$(y,z)\in G\Rightarrow(x,z)\in G$，故$G\circ G\subset G$，同时，$(x,y)\in G\Rightarrow(y,y)\in G$，故$(x,y)\in G\circ G$，故$G\subset G\circ G$，因此$G\circ G=G$；根据补充证明规则70，$G\cap G^{-1}=\Delta_E\times E$.

反过来，如果$G\circ G=G$，则$(x,y)\in G$与$(y,z)\in G\Rightarrow(x,z)\in G$；如果$G\cap G^{-1}=\Delta_E\times E$，故$(x,y)\in G$与$(y,x)\in G\Rightarrow x=y$；$\Delta_E\times E\subset G$，故$x\in E\Rightarrow(x,x)\in G$，又因为$pr_1G=E$，$pr_2G\subset E$，因此$(x,x)\in G\Rightarrow x\in G$，$(x,y)\in G\Rightarrow x\in E$，$(x,y)\in G\Rightarrow y\in E$，因此$(x,y)\in G\Rightarrow(x,x)\in G$与$(y,y)\in G$. 故$F$为在$E$上的偏序图.

元数学定义 56. 预序关系（*relation de préordre*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为公式，x、y、z为不同的不是常数的字母，且R不包含z，如果以下二个公式为真：

（*1*）R关于x、y具有传递性；

（*2*）$R\Rightarrow(x|y)R$与$(y|x)R$,

则称R为关于x、y的预序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为R为预序关系.

补充证明规则 72.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y的预序关系，则$(x|z)(y|x)(z|y)R$也是关于x、y的预序关系.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 73.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为偏序关系，则R为预序关系.

证明：根据定义可证.

元数学定义 57. 相反关系（*relation opposée*）

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为预序关系，则$(x|z)(y|x)(z|y)R$称为R的相反关系.

补充证明规则 74.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为预序关系（或偏序关系），则R的相反关系也是预序关系（或偏序关系）.

证明：根据补充证明规则68、补充证明规则72可证.

补充证明规则 75.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为预序关系，则R与$(R$的相反关系$)$是等价关系.

证明：根据定义可证.

元数学定义 58. 在集合上的预序关系（*relation d'préordre dans un ensemble*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的预序关系，并且R关于x、y在E上具有反身性，则称R为关于x、y在E上的预序关系，在没有歧义的情况下也可以简称为R为在E上的预序关系.

补充证明规则 76.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为在E上的预序关系，S为R与(Rs)，x'、y'为与x、y不同的字母且R不包含x'、y'，则$(x'|y)S$与$(y|x)(y'|y)S$也是在E上的等价关系，并且R关于x、y同等价关系"$(x'|y)S$与$(y|x)(y'|y)S$"相容.

证明：根据定义，$(x'|y)S$与$(y|x)(y'|y)S$是等价关系，同时，根据传递性，R与$(x'|y)S$与$(y|x)(y'|y)S \Rightarrow (x'|x)(y'|y)R$，得证.

补充证明规则 77.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的预序关系，则$R \Rightarrow x \in E$，$R \Rightarrow y \in E$.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 78.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为关于x、y在E上的预序关系，令S为R与(R的相反关系)，R'为公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$y \in Y$与$R)$，则$R'$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的偏序关系.

证明：R'与$(Y|X)(Z|Y)R' \Leftrightarrow X \in E/S$与$Y \in E/S$与$Z \in E/S$与$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X$与$y \in Y$与$z \in Z \Rightarrow R$与$(y|x)(z|y)R)$，由于$R$具有传递性，故$R'$具有传递性.

R'与$(X|Z)(Y|X)(Z|Y)R' \Leftrightarrow X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\forall x)(\forall y)(x \in X$与$y \in Y \Rightarrow R$与$(x|z)(y|x)(z|y)R)$，等价于$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\forall x)(\forall y)(x \in X$与$y \in Y \Rightarrow S)$，如果$X \in E/S$与$Y \in E/S$，$x \in X$与$y \in Y$，根据补充证明规则38（1），$S \Leftrightarrow (\exists X)(x \in X$与$y \in X$与$X \in E/S)$，则$(\exists X)(x \in X$与$y \in X$与$X \in E/S)$，因此$X = Y$. 故$R'$与$(X|Z)(Y|X)(Z|Y)R' \Rightarrow X \in E/S$与$Y \in E/S$与$X = Y$.

同时，由于$R \Rightarrow (x|y)R$与$(y|x)R$，因此$R' \Rightarrow X \in E/S$与$(\forall X)(x \in X \Rightarrow (x|y)R)$，$R' \Rightarrow Y \in E/S$与$(\forall y)(y \in Y \Rightarrow (y|x)R)$，故$R' \Rightarrow (X|Y)R'$与$(Y|X)R'$.

另外，由于$x \in E \Leftrightarrow (y|x)R$，故$X \in E/S \Rightarrow (X|Y)R'$.

综上，得证.

补充证明规则 79.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为偏序关系（或预序关系），R'为R与$x\in E$与$y\in E$，如果$x\in E\Rightarrow(y|x)R$，则R'为在E上的偏序关系（或预序关系）.

证明：$x\in E\Rightarrow(y|x)R$，故$x\in E\Rightarrow(y|x)R'$，同时，$R'\Rightarrow x\in E$，得证.

补充证明规则 80.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，公式R为关于x、y在E上的预序关系，则R为生成图的公式.

证明：根据补充证明规则77，$R\Rightarrow(x,y)\in E\times E$，根据补充证明规则18可证.

定义 82. 预序图（*graphe d' préordre*）

对于图G，如果$(x,y)\in G$为在E上的预序关系，则称G为在E上的预序图.

定义 83. 在集合上的预序对应（*correspondance d'préordre dans un ensemble*），预序（*préordre*）

如果F为在E上的预序图，则(F,E,E)称为在E上的预序对应，或称为在E上的预序.

补充定理 154.

（*1*）当且仅当同时满足下列两个条件时，对应(G,E,E)为在E上的预序对应：

第一，$G\circ G\subset G$;

第二，$\Delta_{E\times E}\subset G$.

（*2*）G为在E上的预序图，则$(x,y)\in G$与$(y,x)\in G$为生成图的公式，其生成的图为$G\cap G^{-1}$.

证明：

（1）$G\circ G\subset G$等价于传递性，$\Delta_E\times E\subset G$与预序的第二个性质等价，得证.

（2）$(x,y)\in G$与$(y,x)\in G\Rightarrow(x,y)\in G$，故其为生成图的公式. 根据定义可证其生成的图为$G\cap G^{-1}$.

补充定理 155.

（*1*）在$\varnothing$上的唯一的预序图是$\varnothing$，在$\varnothing$上的唯一的预序是$(\varnothing,\varnothing,\varnothing)$. 并且，该预序图（或预序）是偏序图（或偏序）.

（*2*）在x上的唯一的预序图是$\{(x,x)\}$，在x上的唯一的预序是$(\{(x,x)\},x,x)$. 并且，该预序图（或预序）是偏序图（或偏序）.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理154（1）可证.

补充定理 156.

G为在E上的预序图，令S为公式$(x,y) \in G$与$(y,x) \in G$，令R'为公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$y \in Y$与$(x,y) \in G)$，则该公式生成的图$G'$为$(E/S) \times (E/S)$的子集，并且是$G$在$E \times E$到$(E \times E)/(S \times S)$的规范映射下的像.

证明：$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$y \in Y$与$(x,y) \in G) \Rightarrow X \in E/S$与$Y \in E/S$，故该公式生成的图$G'$为$(E/S) \times (E/S)$的子集.

令S的图为F，则$F = G \cap G^{-1}$. 令f为E到E/S的规范映射，g为$E \times E$到$(E \times E)/(S \times S)$的规范映射，根据补充证明规则62（1），$g(x,y) = f(x) \times f(y)$. 则$(u,v) \in g\langle G\rangle \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(u = f(x)$与$v = f(y)$与$(x,y) \in G)$，等价于$(\exists x)(\exists y)(u = F\langle x\rangle$与$v = F\langle y\rangle$与$(x,y) \in G)$，根据补充证明规则38（2），等价于$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$(\exists x)(\exists y)(x \in X$与$y \in Y$与$(x,y) \in G)$，得证.

记号定义 19. 不等式（*inégalité*）

令R为关于x、y的预序关系或偏序关系，在没有歧义的情况下，R可以记作$x \leq y$. $x \leq y$也可以记作$y \geq x$，$x \leq y$与$x \neq y$记作$x < y$，$x \geq y$与$x \neq y$记作$x > y$.

令G为在E上的预序图或偏序图，$S = (G, E, E)$，则$(x,y) \in G$可以记作$x \leq_S y$. $x \leq_S y$也可以记作$y \geq_S x$，$x \leq_S y$与$x \neq_S y$记作$x <_S y$，$x \geq_S y$与$x \neq_S y$记作$x >_S y$. 在没有歧义的情况下，可以分别简记为$x \leq y$、$y \geq x$、$x < y$、$x > y$.

定义 84. 更细的预序（*préordre plus fin*），更细的偏序（*ordre plus fin*）

(F,E,E)、(F',E,E)均为在E上的预序（或偏序），如果$F' \subset F$，则称(F,E,E)为比(F',E,E)更细的预序（或偏序）.

注：在原书中，“更细”这个概念包括与自身相等的情况，即一个预序（或偏序）比自身更细.

证明规则 58.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中：

（*1*）$x \leq y \Leftrightarrow x < y$或$x = y$;

（*2*）$x \leq y$与$y < z \Rightarrow x < z$;

（*3*）$x < y$与$y \leq z \Rightarrow x < z$;

（*4*）$x \leq y$与$y < z \Rightarrow x < z$.

证明：根据定义可证.

定义 85. 偏序集（*ensemble ordonné*），预序集（*ensemble préordonné*）

F是在E上的偏序（或预序），则称E为按偏序（或预序）F排序的偏序集（或预序集），或称E为按偏序关系（或预序关系）$y \in F\langle x\rangle$或与之等价的公式排序的偏序集（或预序集）.

定义 86. 集合的同构（*isomorphisme de ensembles*），集合的逆同构（*isomorphisme réciproque de ensembles*），同构于一个集合（*isomorphe à un ensemble*）

如果E、E'分别为按F、F'排序的偏序集（或预序集），f为E到E'的双射，且$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$，则称$f$为$E$到$E'$的同构，$f$的逆映射称为$f$的逆同构．如果存在$E$到$E'$的同构，则称$E$同构于$E'$.

补充定理 157. 同构的逆映射为同构

令f为E到E'的同构，则f的逆映射为E'到E的同构.

定义 87. 集合的逆同构（*isomorphisme réciproque de ensembles*）

令f为E到E'的同构，则f的逆映射称为f的逆同构.

定义 88. 按包含关系排序的偏序集（*ensemble ordonné par inclusion*）

$F \subset \mathcal{P}(E)$，则按偏序关系$x \subset y$与$x \in F$与$y \in F$排序的偏序集F，称为按包含关系排序的偏序集.

定义 89. 可比较的（*cornparable*），不可比较的（*incomparable*）

令E为预序集，如果$x \leq y$或$y \leq x$，则称x和y为可比较的．否则，称x和y为不可比较的.

补充定理 158.

令E为按F排序的偏序集（或预序集），F的图为G，$A \subset E$，则$(x, y) \in G \cap (A \times A)$为在$A$上关于$x$、$y$的偏序关系（或预序关系），$(G \cap (A \times A), A, A)$是在$A$上的偏序对应（或预序对应）.

证明：根据定义可证.

元数学定义 59. 导出的偏序（*ordre induits*），导出的预序（*préordre induits*），导出的偏序关系（*relation de ordre induits*），导出的预序关系（*relation de préordre induits*），偏序子集（*partie ordonné*），预序子集（*partie préordonné*），偏序的延拓（*prolongements de l'ordre*），预序的延拓（*prolongements de l'relation de ordre induits*），偏序关系的延拓（*prolongements de l'ordre*），预序关系的延拓（*prolongements de relation de l'ordre induits*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令E为按F排序的偏序集（或预序集），F的图为G，$A \subset E$，则$(G \cap (A \times A), A, A)$称为$F$在$A$上导出的偏序（或预序）；$(x, y) \in G \cap (A \times A)$或与之等价的公式，称为偏序关系$(x, y) \in G$或与之等价的公式在$A$上导出的偏序关系（或预序关系）；按该偏序关系（或预序关系）在A上导出的偏序排序的偏序集，称为E的偏序子集（或预序子集）．同时，F称为偏序（或预序）$(G \cap (A \times A), A, A)$在$E$上的延拓；$(x, y) \in G$或与之等价的公式，称为偏序关系（或预序关系）$(x, y) \in G \cap (A \times A)$或与之等价的公式在$E$上的延拓.

补充定理 159.

偏序集（或预序集）的偏序子集（或预序子集）的偏序子集（或预序子集），也是该偏序集（或预序集）的偏序子集（或预序子集）.

证明：根据定义可证.

补充定理 160.

令$(E_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i \in I$，F_i为在E_i上的偏序（或预序），其图为G_i，将关于x_i、y_i的偏序关系（或预序关系）$(x_i, y_i) \in G_i$记作$x_i \leq y_i$，令$F = \prod\limits_{i\in I} E_i$，则公式$(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_i x \leq pr_i y)$是关于$x$、$y$在$F$上的偏序关系（或预序关系）.

证明：根据定义可证.

定义 90. 偏序的乘积（*ordre produit*），预序的乘积（*préordre produit*），偏序关系的乘积（*relation du ordre produit*），预序关系的乘积（*relation du préordre produit*），偏序集的乘积（*produit d'ensembles ordonnés*），预序集的乘积（*produit d'ensembles préordonnés*）

令$(E_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i \in I$，F_i为在E_i上的偏序（或预序），其图为G_i，将关于x_i、y_i的偏序关系（或预序关系）$(x_i, y_i) \in G_i$记作$x_i \leq y_i$，令$F = \prod\limits_{i\in I} E_i$，$G$为公式$(\forall i)(i \in I \Rightarrow pr_i x \leq pr_i y)$生成的图，则$(G, F, F)$称为偏序（或预序）$(F_i)_{i\in I}$的乘积，$x \leq y$称为上述各偏序（或预序）相应的偏序关系（或预序关系）的乘积，按$(F_i)_{i\in I}$的乘积排序的F称为偏序集（或预序集）$(E_i)_{i\in I}$的乘积.

补充定理 161.

令F_1为在E_1上的偏序（或预序），F_2为在E_2上的偏序（或预序），则公式$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$是关于x、y在$E_1 \times E_2$上的偏序关系（或预序关系）.

证明：根据定义可证.

定义 91. 两个偏序的乘积（*produit de deux ordres*），两个预序的乘积（*produit de deux préordres*），两个偏序关系的乘积（*relation du produit de deux ordres*），两个预序关系的乘积（*relation du produit de deux préordres*），两个偏序集的乘积（*produit de deux ensembles ordonnés*），两个预序集的乘积（*produit de deux ensembles préordonnés*）

令F_1为在E_1上的偏序（或预序），F_2为在E_2上的偏序（或预序），G为公式$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$生成的图，则$(G, E_1 \times E_2, E_1 \times E_2)$称为偏序（或预序）$F_1$和$F_2$的乘积. $x \leq y$称为上述两个偏序（或预序）相应的偏序关系（或预序关系）的乘积，F_1和F_2的乘积排序的$E_1 \times E_2$称为偏序集（或预序集）E_1和E_2的乘积.

补充定理 162.

令$(E_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i\in I$，F_i为在E_i上的偏序（或预序），其图为G_i，将关于x_i、y_i的偏序关系（或预序关系）$(x_i,y_i)\in G_i$记作$x_i\le y_i$，令$F=\prod\limits_{i\in I}E_i$，$G$为上述偏序关系（或预序关系）的乘积生成的图，则$G$为$\prod\limits_{i\in I}G_i$在$\prod\limits_{i\in I}(E_i\times E_i)$到$F\times F$的规范映射下的像.

证明：

令该规范映射为F，对任意$f\in\prod\limits_{i\in I}G_i$，则$F(f)=((pr_1(pr_if))_{i\in I},(pr_2(pr_if))_{i\in I})$，等于$((pr_1f(i))_{i\in I},(pr_2f(i))_{i\in I})$，令$f(i)=(x_i,y_i)$，$x=(x_i)_{i\in I}$，$y=(y_i)_{i\in I}$，故$F(f)=(x,y)$. 并且，对任意$i\in I$，$(x_i,y_i)\in G_i$，故$(x,y)\in G$. 反过来，如果$(x,y)\in G$，则对任意$i\in I$，$(x_i,y_i)\in G_i$，因此$((x_i,y_i))_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I}G_i$. 综上，得证.

补充定理 163.

令h为B^A到$\mathcal{F}(A;B)$的规范映射，F为偏序集（或预序集），R为公式$f\in\mathcal{F}(A;B)$与$g\in\mathcal{F}(A;B)$与$x\in A\Rightarrow f(x)\le g(x)$，$R'$为公式$F\in B^A$与$g\in B^A$与$x\in A\Rightarrow(F,A,B)(x)\le(G,A,B)(y)$，则$R$为在$\mathcal{F}(A;B)$上的偏序关系（或预序关系），$R'$为在$B^A$上的的偏序关系（或预序关系），并且$h$为$B^A$到$\mathcal{F}(A;B)$的同构.

证明：根据定义可证R和R'为偏序关系（或预序关系），根据补充定理123，$G\to(G,A,B)$为双射，得证.

定义 92. 单增映射（*application croissante*），单减映射（*application décroissante*），单调映射（*application monotone*），严格单增映射（*application strictement croissante*），严格单减映射（*application strictement décroissante*），严格单调映射（*application trictement monotone*）

令E、F为预序集，f为E到F的映射，如果$x\le y\Rightarrow f(x)\le f(y)$，则称$f$为单增映射，如果$x\le y\Rightarrow f(x)\ge f(y)$，则称$f$为单减映射，如果$f$是单增映射或单减映射，则称$f$为单调映射. 如果$x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$，则称$f$为严格单增映射，如果$x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$，则称$f$为严格单减映射，如果$f$是严格单增的或严格单减的，则称$f$为严格单调映射.

补充定理 164.

令E、F为偏序集，f为E到F的映射，把E、F其中之一的偏序关系替代为其相反关系，如果f原来是单增映射（或单减映射），则变为单减映射（或单增映射）.

证明：根据定义可证.

补充定理 165.

（*1*）如果常数函数的定义域和到达域为偏序集，则该常数函数是单增映射，也是单减映射.

（*2*）如果函数是单调映射（或单增映射、单减映射），并且是单射，则该函数是严格单调映射（或单增映射、单减映射）

证明：根据定义可证.

补充定理 166.

E、F为偏序集，f为E到F的双射，则f为单增映射、f^{-1}为单增映射、f为E到F的同构三者等价.

证明：根据定义可证.

定义 93. 单增子集族（*famille de parties croissante*），单减子集族（*famille de parties décroissante*），严格单增子集族（*famille de parties strictement croissante*），严格单减子集族（*famille de parties strictement décroissante*）

$(X_i)_{i\in I}$为E的子集族，其指标集I为偏序集，$\mathcal{P}(E)$为按包含关系排序的偏序集，如果映射$i\to X_i(i\in I, X_i\in\mathcal{P}(E))$为单增映射（或单减映射、严格单增映射、严格单减映射），则称$(X_i)_{i\in I}$为单增子集族（或单减子集族、严格单增子集族、严格单减子集族）.

定理 58.

如果E、E'为偏序集，E到E'的映射u和E'到E的映射v均为单减映射，并且对任意$x\in E$、$x'\in E'$，$v(u(x))\geq x$，$u(v(x'))\geq x'$，则$u\circ v\circ u=u$、$v\circ u\circ v=v$.

证明：$v(u(x))\geq x$，故$u(v(u(x)))\leq u(x)$œ$u(v(x'))\geq x'$，故$u(v(u(x)))\geq u(x)$，因此$u\circ v\circ u=u$，同理可证$v\circ u\circ v=v$.

补充证明规则 81.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中*:*

（*1*）E为预序集，$x\leq y$为在E上的预序关系，S为在E上的等价关系，令R为公式$X\in E/S$与$Y\in E/S$与$((\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y)))$，则$R$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的预序关系.

（*2*）E为偏序集，$x\leq y$为在E上的偏序关系，S为在E上的等价关系，令R为公式$X\in E/S$与$Y\in E/S$与$((\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y)))$，如果$x\leq y$与$y\leq z$与$x\equiv z(modS)\Rightarrow x\equiv y(modS)$，则$R$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的偏序关系.

证明：

（1）如果$(\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y))$、$((\forall y)(y\in Y\Rightarrow(\exists z)(z\in Z$与$y\leq z)))$，则$(y\in Y$与$x\leq y)\Rightarrow(\exists z)(z\in Z$与$y\leq z)$与$x\leq y$，因此$(y\in Y$与$x\leq y)\Rightarrow(\exists z)(z\in Z$与$x\leq z)$，故$((\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists z)(z\in Y$与$x\leq z)))$，传递性得证.

由于$(x\in X\Rightarrow(x\in X$与$x\leq x))$，故$(\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in X$与$x\leq y)$. 得证.

（2）如果$(\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y))$、$((\forall y)(y\in Y\Rightarrow(\exists z)(z\in X$与$y\leq z)))$，则$x\in X\Rightarrow(\exists y)(\exists z)(y\in Y$与$x\leq y$与$z\in X$与$y\leq z)$，故$x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in X$与$y\in Y)$，因此$X=Y$，得证.

元数学定义 60. 预序关系的商（*quotient relation de préordre*），商预序集（*ensemble préordonné quotient*），偏序关系的商（*quotient relation de ordre*），商偏序集（*ensemble ordonné quotient*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中：

E为预序集，S为在E上的等价关系，公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$与$x \leq y)))$称为预序关系$x \leq y$除以$S$的商，按该预序排序的$E/S$，称为预序集$E$除以$S$的商预序集，或称为$E/S$的商预序集.

E为偏序集，S为在E上的等价关系，如果$x \leq y$与$y \leq z$与$x \equiv z(modS) \Rightarrow x \equiv y (modS)$，则公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$与$x \leq y)))$称为偏序关系$x \leq y$除以$S$的商，按该偏序排序的$E/S$，称为偏序集$E$除以$S$的商偏序集，或称为$E/S$的商偏序集.

补充证明规则 82.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，E为预序集，S为在E上的等价关系，f为E到E/S的规范映射：

（*1*）对任何E/S的商预序集到预序集F的映射g，如果$g \circ f$为单增映射，则g为单增映射.

（*2*）当且仅当S满足下列条件时，f为单增映射：$(x \leq y$与$x \equiv x'(modS)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$与$y \equiv y'(modS)$与$x' \leq y')$.

证明：

（1）如果$X \leq Y$，则对任意$x \in X$，存在$y \in Y$，并且$x \leq y$. 根据补充证明规则36（2），$f(x) = X$，$f(y) = Y$，由于$g(f(x)) \leq g(f(y))$，故$g(X) \leq g(Y)$，得证.

（2）如果f是单增映射，对任意E的元素x、y、x'，如果$x \leq y$、$x \equiv x'(modS)$，则$f(x) \leq f(y)$，故$f(x') \leq f(y)$，因此，存在$y' \in f(y)$，使$x' \leq y'$.

反过来，对任意E的元素x、y，$x \leq y$，则对任意$x' \in f(x)$，都存在$y' \in f(y)$，且$x' \leq y'$，故$f(x) \leq f(y)$，得证.

元数学定义 61. 同预序关系弱相容（*faiblement compatible avec une relation de préordre*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，E为预序集，S为在E上的等价关系，E/S为商预序集，f为E到E/S的规范映射，如果f为单增映射，则称S在x、y上同在E上的预序关系$x \leq y$弱相容，在没有歧义的情况下，也可以简称作S同在E上的预序关系$x \leq y$弱相容.

补充证明规则 83.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，E为预序集，S为在E上的等价关系，f为E到E/S的规范映射，如果$x \leq y$在x上同S相容，则S同$x \leq y$弱相容.

证明：根据补充证明规则82（2）可证.

补充定理 167.

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，令F为集族$(E_i)_{i\in I}$的和，$G=\{(x,y)|(x,y)$为有序对与$x \in F$与$y \in F$与$(pr_2x < pr_2y$或$(pr_2x = pr_2y$与$($在Epr_2x上$pr_1x \leq pr_1y)))\}$，则G为在F上的偏序.

证明：根据定义可证.

定义 94. 偏序集族的序数和（*somme ordinale de la famille d'ensembles ordonnés*）

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，令F为集族$(E_i)_{i\in I}$的和，$G=\{(x,y)|(x,y)$为有序对与$x \in F$与$y \in F$与$(pr_2x < pr_2y$或$(pr_2x = pr_2y$与$($在E_{pr_2x}上$pr_1x \leq pr_1y)))\}$，则称按G排序的F为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和.

注：偏序类族的序数和通常不满足交换律.

补充定理 168.

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$、$(Fi)_{i\in I}$为偏序集族，对任意$i \in I$，E_i同构于F_i，则$(E_i)_{i\in I}$的序数和同构于$(F_i)_{i\in I}$的序数和.

证明：令E_i到F_i的同构为f_i，则映射$x \to (f_{pr_2x}(pr_1x), pr_2x)$为$(E_i)_{i\in I}$的序数和到$(F_i)_{i\in I}$的序数和的同构.

补充定理 169. 偏序集族的序数和的结合律

L为偏序集，I为偏序集族$(J_l)_{l\in L}$的序数和，令F_l为偏序集族$(E_i)_{i\in J_l}$的序数和，则集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和同构于集族$(F_l)_{l\in L}$的序数和.

证明：令f为映射$x \to ((pr_1x, pr_1(pr_2x)), pr_2(pr_2x))$，其为同构.

定义 95. 极大元（*élément maximal*），极小元（*éléments minimal*）

E为预序集，$a \in E$，如果$x \leq a \Rightarrow x = a$（或$x \geq a \Rightarrow x = a$），则称$a$为极小元（或极大元）.

补充定理 170.

令E为预序集，a为极小元（或极大元），把E的预序关系替代为其相反关系，则a变为极大元（或极小元）.

证明：根据定义可证.

定义 96. 最大元（*éléments plus petit*），最小元（*éléments plus grand*）

E为预序集，$a \in E$，如果$x \in E \Rightarrow x \leq a$（或$x \in E \Rightarrow x \geq a$），则称$a$为$E$的最小元（或最大元）.

补充定理 171.

偏序集最多只有一个最小元，一个最大元.

证明：设a、b均为最小元，则$a \leq b$，$b \leq a$，因此$a = b$.

补充定理 172.

令E为偏序集，a为最小元（或最大元），把E的偏序关系替代为其相反关系，则a变为最大元（或最小元）.

证明：根据定义可证.

补充定理 173.

令f为偏序集E到偏序集F的同构，如果E有最小元（或最大元）a，则F有最小元（或最大元）$f(a)$.

证明：根据定义可证.

定理 59.

令E为偏序集，$a \notin E$，E'为E和$\{a\}$的和，则存在唯一的在E'上的偏序，其为在E上的偏序在E'上的延拓，且a为最大元（或最小元）.

证明：对于最大元的情况，令在E上的偏序为G，令$G' = G \cup \{z | pr_2 z = a)$与$pr_1 z \in E'\}$，则$G'$符合条件.

设G''也符合条件，则$G \subset G'$，且对任意$x \in E'$，$(x, a) \in G''$，故$G' \subset G''$，同时，设$z \in G''$，如果$pr_1 z \in E$且$pr_2 z \in E$，由于$G'' \cap E \times E = G$，故$z \in G$，因此$z \in G'$，如果$pr_1 z \in E$且$pr_2 z = a$，则$z \in G'$，如果$pr_1 z = a$，由于$x \geq a \Rightarrow x = a$，故$z = (a, a)$，因此$z \in G'$，综上，$G' = G''$.

同理可证最小元的情况.

定义 97. 向集合添加最大元得到的偏序集（*ensemble ordonné obtenu adjoignant à un ensemble un plus grand élément*），向集合添加最小元得到的偏序集（*ensemble ordonné obtenu adjoignant à un ensemble un plus petit élément*）

令E为偏序集，$a \notin E$，E'为E和$\{a\}$的和，令偏序F为在E上的偏序在E'上的延拓，且a为最大元（或最小元），则按该偏序排序的E'，称为向E添加最大元（或最小元）a得到的偏序集.

定义 98. 共尾子集（*partie cofinale*），共首子集（*partie coinitiale*） 令E为预序集，$A \subset E$，如果$(\forall x)(x \in E \Rightarrow (\exists y)(y \in A$与$x \leq y))$，则称$A$为$E$的共尾子集；如果$(\forall x)(x \in E \Rightarrow (\exists y)(y \in A$与$x \geq y))$，则称$A$为$E$的共首子集.

补充定理 174.

任何预序集都是自身的共尾子集和共首子集.

证明：根据定义可证.

补充定理 175.

当且仅当$\{a\}$是偏序集E的共尾子集（或共首子集）时，a是E的最大元（或最小元）.

证明：根据定义可证.

定义 99. 下界（*minorant*），上界（*majorant*），严格下界（*minorant strict*），严格上界（*majorant strict*）

E为预序集，$X \subset E$，$x \in E$，如果$(\forall y)(y \in X \Rightarrow x \leq y)$，则称$x$为$X$在$E$上的下界，在没有歧义的情况下也可以简称为$X$的下界；如果$(\forall y)(y \in X \Rightarrow x \geq y)$，则称$x$为$X$在$E$上的上界，在没有歧义的情况下也可以简称为$X$的上界. 如果上界不属于$X$，则称其为严格上界；如果下界不属于$X$，则称其为严格下界.

补充定理 176.

（*1*）令E为预序集，$X \subset E$，x为X在E上的下界（或上界），把E的预序关系替代为其相反关系，则x变为X在E上的上界（或下界）.

（*2*）令E为预序集，$X \subset E$，x为X在E上的下界（或上界），$x \leq z$（或$x \geq z$），则z为X在E
上的下界（或上界）.

证明：根据定义可证.

补充定理 177.

令E为预序集，$X \subset E$，$Y \subset X$，x为X在E上的下界（或上界），则x为Y在E上的下界（或上界）.

证明：根据定义可证.

补充定理 178.

E为偏序集，$X \subset E$，且X为E的偏序子集，则当且仅当$(\exists x)((x$为X在E上的下界$)$与$x \in X)$时，X有最小元；当且仅当$(\exists x)((x$为X在E上的上界$)$与$x \in X)$时，X有最大元.

证明：根据定义可证.

补充定理 179.

偏序集的子集如果有最大元，则最大元是其上界；如果有最小元，则最小元是其下界.

证明：根据定义可证.

补充定理 180.

E为预序集，$X \subset E$，则“x为X在E上的下界（或上界）”为关于x的集合化公式.

证明：x为X的下界 $\Rightarrow x \in E$，根据证明规则52，下界的情况得证，上界的情况同理可证.

定义 100. 下界集（*ensemble des minorant*），上界集（*majorant*）

E为预序集，$X \subset E$，则$\{x|x$为X在E上的下界$\}$（$\{x|x$为X在E上的上界$\}$）称为X在E上的下界集（或上界集），在没有歧义的情况下也可以简称为X的下界集（或上界集）.

定义 101. 有下界（*minorée*），有上界（*majorée*），有界（*bornée*）

E为预序集，$X \subset E$，如果“X在E上的下界集（或上界集）$\neq \varnothing$”，则称X在E上有下界（或有上界）. 如果X在E上有下界或有上界，则称X在E上有界. 在没有歧义的情况下也可以简称为X有上界（或有下界、有界）.

补充定理 181.

E为预序集，$X \subset E$，$Y \subset X$，X在E上有上界（或有下界、有界），则Y在E上有上界（或有下界、有界）.

证明：根据补充定理177可证.

定义 102. 有下界的映射（*application minorée*），有上界的映射（*application majorée*），有界的映射（*application bornée*）

E为预序集，f为A到E的映射，如果$f\langle A\rangle$在E上有下界（或有上界、有界），则称f为有下界的映射（或有上界的映射、有界的映射）.

定义 103. 集合的最大下界（*borne inférieure d'un ensemble*），集合的最小上界（*borne supérieure d'un ensemble*），族的最大下界（*borne inférieure d'une famille*），族的最小上界（*borne supérieure d'une famille*）

令E为偏序集，$X \subset E$，如果X在E上的下界集（或上界集）有最大元（或最小元），则称其为X在E上的最大下界（或最小上界），记作$inf_E X$（或$sup_E X$），在没有歧义的情况下也可以简记为$inf\ X$（或$sup\ X$）.

如果X为二元集合$\{x,y\}$、三元集合$\{x,y,z\}$、四元集合$\{x,y,z,t\}$，为X在E上的最大下界（或最小上界）也可以记作$inf_E(x,y)$、$inf_E(x,y,z)$、$inf_E(x,y,z,t)$（或$sup_E(x,y)$、$sup_E(x,y,z)$、$sup_E(x,y,z,t)$），在没有歧义的情况下也可以简记为$inf(x,y)$、$inf(x,y,z)$、$inf(x,y,z,t)$（或$sup(x,y)$、$sup(x,y,z)$、$sup(x,y,z,t)$）.

对于族$(a_i)_{i\in I}$，如果$\bigcup\limits_{i\in I}\{a_i\} \subset E$，则称$\bigcup\limits_{i\in I}\{a_i\}$的最大下界（或最小上界）为该族的最大下界（或最小上界），记作$inf_E(a_i)_{i\in I}$（或$sup_E(a_i)_{i\in I}$），在没有歧义的情况下也可以简记为$inf(a_i)_{i\in I}$（或$sup(a_i)_{i\in I}$），或者简记作$\underset{i\in I}{inf}\, a_i$（或$\underset{i\in I}{sup}\, a_i$）.

补充定理 182.

令E为偏序集，$X \subset E$，把E的偏序关系替代为其相反关系，则X在E上的最小上界变为最大下界，在E上的最大下界变为最小上界.

证明：根据定义可证.

补充定理 183.

令E为偏序集，X是E的偏序子集：

（*1*）如果X有最大元（或最小元），则X在E上的最小上界（或最大下界）是其最大元（或最小元）.

（*2*）如果X在E上有最小上界（或最大下界）x，且$x \in X$，则x是X的最大元（或最小元）.

证明：

（1）根据补充定理179可证.

（2）根据定义可证.

补充定理 184.

令E为偏序集，X是E的偏序子集，且$X \neq \varnothing$，如果x是X的最小上界，也是X的最大下界，则$X = \{x\}$.

证明：对任意$y \in X$，$x \leq y$、$y \leq x$，故$x = y$，因此$X \subset \{x\}$，又因为）$X \neq \varnothing$，故$X = \{x\}$.

定义 104. 映射的最大下界（*borne inférieure d'une application*），映射的最小上界（*borne supérieure d'une application*）

E为预序集，f为A到E的映射，$f\langle A\rangle$的最大下界称为映射f的最大下界，令x为不出现在f的图、A、E的任何一个字母，则记作$\underset{x\in A}{inf}\, f(x)$，$f\langle A\rangle$的最小上界称为映射$f$的最小上界，记作$\underset{x\in A}{sup}\, f(x)$.

定理 60.

令E为偏序集，$A \subset E$，并且有在E上的最大下界和最小上界，当$A \neq \varnothing$时，$inf\ A \leq sup\ A$；当$A = \varnothing$时，$inf\ A$为E的最大元，$sup\ A$为E的最小元.

证明：根据定义可证.

定理 61.

令E为偏序集，A、B均为E的子集，并且均有在E上的最大下界（或最小上界），如果$A \subset B$，则$inf\ A \geq inf\ B$（$sup\ A \leq sup\ B$）.

证明：根据定义可证.

定理 62.

令E为偏序集，E的元素族$(x_i)_{i \in I}$有在E上的最小上界（或最大下界），则对任意$J \subset I$，$(x_i)i \in J$也有在E上的最小上界（或最大下界），并且$\underset{i \in J}{sup}\, x_i \leq \underset{i \in I}{sup}\, x_i$（$\underset{i \in J}{inf}\, x_i \geq \underset{i \in I}{inf}\, x_i$）.

证明：根据定义可证.

定理 63.

令E为偏序集，E的元素族$(x_i)_{i \in I}$、$(y_i)_{i \in I}$是两个E的子集族，其指标集相同且均有最小上界（或最大下界），如果$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq y_i)$fiß$\underset{i \in I}{sup}\, x_i \leq \underset{i \in I}{sup}\, y_i$（$\underset{i \in I}{inf}\, x_i \leq \underset{i \in I}{inf}\, y_i$）.

证明：设$a = \underset{i \in I}{sup}\, y_i$，则$(\forall i)(i \in I \Rightarrow yi \leq a)$，故$(\forall i)(i \in I \Rightarrow x_i \leq a)$，因此$a/(x_i)_{i \in I}$的上界，上界的情况得证．下界的情况同理可证.

定理 64.

令E为偏序集，$(x_i)_{i \in I}$是E的元素族，$(J_l)l \in L$为指标集I的覆盖，对任意$l \in L$，$(x_i)_{i \in J_l}$有在E上的最小上界（或最大下界），则当且仅当$(\underset{i \in J_l}{sup}\, x_i)_{l \in L}$有在$E$上的最小上界（或最大下界）时，$(x_i)_{i \in I}$有在$E$上的最小上界（或最大下界），且$\underset{i \in I}{sup}\, x_i = \underset{l \in L}{sup}(\underset{i \in J_l}{sup}\, x_i)$（$\underset{i \in I}{inf}\, x_i = \underset{l \in L}{inf}(\underset{i \in J_l}{inf}\, x_i)$）.

证明：令$b_l = \underset{i \in J_l}{sup}\, x_i$，设$(x_i)_{i \in I}$有最小上界$a$，根据定理61，对任意$l \in L$，$a \geq b_l$．另一方面，由于$(J_l)_{l \in L}$为指标集$I$的覆盖，故若$c$满足对任意$l \in L$，$c \geq b_l$，则对任意$i \in I$，$c \geq x_i$，故$c$:$(x_i)_{i \in I}$的上界，因此$c \geq a$，故$a = \underset{l \in L}{sup}(\underset{i \in J_l}{sup}\, x_i)$．反过来，如果$(\underset{i \in J_l}{sup}\, x_i)_{l \in L}$有最小上界$a'$，则对任意$l \in L$，$a \geq x_i$．另一方面，如果$c'$满足对任意$l \in L$，$c' \geq x_i$，则对任意$l \in L$，$c' \geq b_l$，因此$c' \geq a'$，故$a = \underset{i \in I}{sup}\, x_i$.

最大下界的情况同理可证.

定理 65.

令E为偏序集，E的元素族$(x_{l,m})_{(l,m) \in L \times M}$为双族，如果对任意$m \in M$，$(x_{l,m})_{l \in L}$在$E$上有最小上界（或最大下界），则当且仅当$(\underset{l \in L}{sup}\, x_{l,m})_{m \in M}$在$E$上有最小上界（或最大下界）时，$(x_{l,m})_{(l,m) \in L \times M}$在$E$上有最小上界（或最大下界），且$\underset{(l,m) \in L \times M}{sup} x_{l,m} = \underset{m \in M}{sup}(\underset{l \in L}{sup}\, x_{l,m})$（$\underset{(l,m) \in L \times M}{inf} x_{l,m} = \underset{m \in M}{inf}(\underset{l \in L}{inf}\, x_{l,m})$）.

证明：根据定理64可证.

定理 66.

令$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，$E=\prod\limits_{i\in I}E_i$，$E$为按各偏序的乘积排序的偏序族，$A\subset E$，对任意$i\in I$，令$A_i=pr_iA$，则当且仅当对任意$i\in I$，$A_i$在$E_i$上有最小上界（或最大下界）时，$A$在$E$上有最小上界（或最大下界），且$sup\ A=\sup\limits_{i\in I}pr_iA$.

证明：如果存在$E_i=\varnothing$，则$E=\varnothing$，A_i和A均无上界和下界，无需考虑.

如果对任意$i\in I$，$E_i=\varnothing$，令A_i的最小上界为b_i，设$(c_i)_{i\in I}$为A的上界，则对任意$i\in I$，$c_i\geq b$，故$(b_i)_{i\in I}$为A的最小上界．反过来，设A的最小上界为$(a_i)_{i\in I}$，对任意$i\in I$、$x_i\in A_i$，根据定理41，存在$x\in A$，使$pr_ix=x_i$；由于$x\leq(a_i)_{i\in I}$，故$x_i\leq a_i$，因此，对任意$i\in I$，a_i为A_i的上界；另一方面，假设a'_i为A_i的上界，令$c=(a-(i,a_i))\cup(i,a'_i)$，由于$c\geq a$，故$a'_i\geq a_i$，因此，对任意$i\in I$，$a_i$为$A_i$的最小上界．最大下界的情况同理可证.

补充定理 185.

E为偏序集，f为E到E的单增映射，令$A=\{z|z\in E$与$f(z)\leq z\}$，$B=\{z|z\in E$与$z\leq f(z)\}$，则：

（*1*）如果A有最小上界v，则$v=f(v)$；

（*2*）如果B有最大下界w，则$w=f(w)$.

证明：

（1）对任意$z\in A$，$v\leq z$，因此$f(v)\leq f(z)$，则$f(v)\leq z$，故$f(v)$是A的下界，因此$f(v)\leq v$，故$f(f(v))\leq f(v)$，因此$f(v)\in A$，$v\leq f(v)$，综上，$v=f(v)$.

（2）类似补充定理185（1）可证.

注：本补充定理是习题63的推广.

定理 67.

令E为偏序集，$F\subset E$，$A\subset F$，如果A在E上和在F上均有最小上界（或最大下界），则$sup_EA\leq sup_FA$（$inf_EA\geq inf_FA$）；如果A在E上有最小上界，且$sup_EA\in F$，则sup_EA $=sup_FA$.

证明：根据定义可证.

定义 105. ***右方有向集（ensemble filtrant à droite/ensemble filtrant croissant），左方有向集（ensemble filtrant à gauche/ensemble filtrant décroissant）***

E是预序集，如果E的任意二元子集在E上都有上界（有下界），此时称E为右方有向集（左方有向集）.

定理 68.

E是偏序集，如果E是右方有向集（或左方有向集），则E的极大元是最大元（或极小元是最小元）.

证明：设E是右方有向集，a为极大元．对任意$x \in E$，设$\{x,a\}$的上界为y，则$a \leq y$，$x \leq y$，故$a = y$，因此$x \leq a$，因此a为最大元．左方有向集的情形同理可证．

补充定理 186.

令E为偏序集，如果E为右方有向集（或左方有向集），把E的偏序关系替代为其相反关系，则E变为为左方有向集（或右方有向集）．

证明：根据定义可证．

补充定理 187.

I、L均为右方有向集，$I \times L$的预序关系为$(x \in I \times L$与$y \in I \times L$与$pr_1x \leq pr_1y$与$pr_2x \leq pr_2y)$，则$I \times L$为右方有向集．

证明：设$(a,b) \in I \times L$，$(c,d) \in I \times L$，$\{a,c\}$在I上的上界为x，$\{b,d\}$在L上的上界为y，则$(x,y) \in I \times L$，且(x,y)为$\{(a,b),(c,d)\}$在$I \times L$上的上界，得证．

定义 106. 格（*ensemble réticulé*）

如果偏序集E的任何二元子集都有在E上的最大下界和最小上界，则称E为格．

补充定理 188.

（1）格的乘积是格．

（2）格的偏序子集为格．

（3）如果格有极小元，则其为格的最小元；如果格有极大元，则其为格的最大元．

证明：

（1）根据定理66可证．

（2）根据定义可证．

（3）根据定义可证．

定义 107. 不可约元素（*élément irréductible*）

E为格，$a \in E$，如果$(\forall x)(\forall y)(x \in E$与$y \in E$与$sup(x,y) = a \Rightarrow x = a$或$y = a)$，则称$a$为$E$的不可约元素．

补充定理 189.

E为格，a为E的最小元，则a为E的不可约元素．

证明：根据定义可证．

定义 108. 内部格（*ensemble coréticulée*）

E为格，$A \subset E$，如果对任意$x \in A$、$y \in A$，均有$sup_E(x,y) \in A$、$inf_E(x,y) \in A$，则称A为E的内部格．

定义 109. 全序集（*ensemble totalement ordonné*），全序（*ordre total*），全序关系（*relation d'ordre total*），全序图（*graphe d'ordre total*），全序子集（*partie totalement ordonné*），链（*chaîne d'ensemble*）

令E为偏序集，如果E的任何两个元素都是可比较的，则称E为全序集．E的偏序称为全序，E的偏序关系称为全序关系，其偏序图称为全序图．

令E为偏序集，如果E的偏序子集是全序集，则称其为E的全序子集，或称其为E的链．

补充定理 190.

（*1*）E为全序集，x、y为E的元素，则$x=y$或$x<y$或$x>y$．

（*2*）令E为全序集，把E的全序关系替代为其相反关系，则E仍为全序集．

证明：根据定义可证．

补充定理 191.

全序集是左方有向集，是右方有向集，也是格．

证明：根据定义可证．

补充定理 192. 偏序集族的序数和为右方有向集、全序集、格的条件

令F为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和，且对任意$i\in I$，$E_i\neq\varnothing$：

（*1*）当且仅当I为右方有向集且对I的任意极大元i，并且E_i均为右方有向集时，F为右方有向集．

（*2*）当且仅当I为全序集，且对任意$i\in I$，E_i均为全序集时，F为全序集．

（*3*）当且仅当满足下列条件时，F为格：

第一，I为格，并且，对任意$i\in I$、$j\in I$，如果i和j是不可比较的，则$E_{sup(i,j)}$有最小元，$E_{inf(i,j)}$有最大元；

第二，对任意$i\in I$，如果$x\in E_i$，$y\in E_i$，且$\{x,y\}$在E_i上有上界（或下界），则$\{x,y\}$在E_i上有最小上界（或最大下界）；

第三，对任意$i\in I$，如果$x\in E_i$，$y\in E_i$，且$\{x,y\}$在E_i上没有上界（或下界），则$\{k|k\in I$与$k>i\}$（或$\{k|k\in I$与$k<i\}$）有最小元（或最大元）j，且E_j有最大元（或最小元）．

证明：

（1）充分性：

对任意$x\in F$、$y\in F$，如果$pr_2x=pr_2y$，那么：若存在$j\in I$使$j>pr_2x$，设$z\in Ej$，则z为$\{x,y\}$的上界；若pr_2x为I的极大元，则存在z使$z\geq pr_1x$且$z\geq y$，则z为$\{x,y\}$的上界；

如果$pr_2x\neq pr_2y$，则存在$j\geq pr_2x$、$j\geq pr_2y$：若$j>pr_2x$、$j>pr_2y$，设$z\in E_j$，则z为$\{x,y\}$的上界；若$j>pr_2x$、$j=pr_2y$，则y为$\{x,y\}$的上界，若$j=pr_2x$、$j>pr_2y$，则x为$\{x,y\}$的上界．

必要性：

对任意$i \in I$、$j \in I$，$i \neq j$，设$x \in E_i$，$y \in E_j$，则存在$z \geq (x,i)$、$z \geq (y,j)$，设$z \in E_k$，则k为$\{i,j\}$的上界；

对I的任意极大元i，设$x \in E_i$，$y \in E_i$，则存在$z \geq (x,i)$、$z \geq (y,i)$，故$pr_2 z = i$，因此$pr_1 z \geq x$、$pr_1 z \geq y$，所以E_i为右方有向集.

（2）充分性：

对任意$x \in F$、$y \in F$：

如果$pr_2 x = pr_2 y$，由于$pr_1 x$和$pr_1 y$是可比较的，因此x和y是可比较的；

如果$pr_2 x \neq pr_2 y$，由于$pr_2 x$和$pr_2 y$是可比较的，因此x和y是可比较的；

必要性：对任意$i \in I$、$j \in I$，$i \neq j$，设$x \in E_i$，$y \in E_j$，由于(x,i)和(y,j)是可比较的，因此i和j是可比较的，所以I为全序集；

对任意$i \in I$，设$x \in E_i$，$y \in E_i$，由于(x,i)和(y,i)是可比较的，因此x和y是可比较的，所以E_i为全序集.

（3）充分性：

对任意$x \in F$、$y \in F$：

如果$pr_2 x = pr_2 y$，根据第二个条件和第三个条件，其有最小上界和最大下界；

如果$pr_2 x \neq pr_2 y$，根据第一个条件，其有最小上界和最大下界.

必要性：

对任意$i \in I$、$j \in I$，$i \neq j$，设$x \in E_i$，$y \in E_j$，由于(x,i)和(y,j)有最大上界和最小下界，因此第一个条件成立；

对任意$i \in I$，设$x \in E_i$，$y \in E_i$，由于(x,i)和(y,i)有最大上界和最小下界，因此第二个条件、第三个条件成立.

定理 69.

全序集E到全序集F的严格单调映射，为单射．如果f为严格单增映射，则f为E到$f(E)$的同构.

证明：如果$x \neq y$，则$x < y$或$x > y$，故$f(x) < f(y)$或$f(y) < f(x)$，因此$f(x) \neq f(y)$，故f为单射．如果f为严格单增映射，则$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$，同时$x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$，故$f(x) \leq f(y) \Rightarrow x < y$，因此$f$为$E$到$f(E)$的同构.

定理 70.

令E为全序集，$X \subset E$，当且仅当b为X在E上的上界（或下界），并且$(\forall c)(c \in E$与$c < b \Rightarrow (\exists x)(x \in X$与$c < x$与$x \leq b))$（或$(\forall c)(c \in E$与$c > b \Rightarrow (\exists x)(x \in X$与$c > x$与$x \geq b))$）时，$b$为$X$在$E$上的最小上界（或最大下界）.

证明：如果$(\forall c)(c \in E$与$c < b \Rightarrow (\exists x)(x \in X$与$c < x$与$x \leq b))$，同时$b$为上界，则对任意$c \in E$且$c < b$，$c$都不是$X$的上界，故$b$是最小上界；

反过来，如果b是最小上界，则b是上界，同时，对任意c $c \in E$且$c < b$，由于c不是X的上界，故存在$x \in X$，使$c < x$，同时，由于b是上界，故$x \le b$，得证.

下界的情况同理可证.

定义 110. 自由子集（*partie libre*），反链（*antichaîne d'ensemble*）

令E为偏序集，$X \subset E$，如果X的任何两个不同元素都是不可比较的，则称X为E的自由子集，或称X为E的反链.

补充定理 193.

$F = \{X|X为E的自由子集\}$，则：

（*1*）$X \in F$与$Y \in F$与$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y与x \le y))$为关于$X$、$Y$在$F$上的偏序关系；

（*2*）F按（*1*）的偏序关系排序，则$x \to \{x\}$为E到F的子集的同构；

（*3*）F按（*1*）的偏序关系排序，则如果$X \in F$、$Y \in F$、$X \subset Y$，则$X \le Y$；

（*4*）F按（*1*）的偏序关系排序，则当且仅当E为全序集、E到F存在同构时，F为全序集.

证明：

（1）如果$x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y与x \le y)$，$y \in Y \Rightarrow (\exists x)(x \in X与y \le x))$，那么对任意$x \in X$，存在$y \in Y$且$x \le y$，故存在$x' \in X$且$y \le x'$，因此$x \le x'$，故$x = x'$，故$x = y$，故$X \subset Y$，同理$Y \subset X$，因此$X = Y$；另外两个条件类似补充定理81（1）可证.

（2）根据定义，$x \le y \Leftrightarrow \{x\} \le \{y\}$，得证.

（3）根据定义可证.

（4）充分性根据定义可证. 如果F为全序集，则E为全序集，故$F = \{X|(\exists x)(X = \{x\})\}$，因此$E$到$F$存在同构，必要性得证.

定义 111. 完备格（*ensemble réticulé achevé*）

如果偏序集E的任何子集在E上都有最大下界和最小上界，则称E为完备格.

补充定理 194.

如果偏序集E的任何子集在E上都有最小上界，则E为完备格.

证明：对任意$F \subset E$，令$G = \{x|x为F在E上的下界\}$，G在E上有最小上界x，如果存在$y \in F$且$y < x$，则y也是G的上界，矛盾，故x是F的下界，所以$x \in G$，故x是G的最大元，因此F有最大下界，得证.

补充定理 195.

当且仅当各偏序集都是完备格时，偏序集的积是完备格.

证明：根据定义可证.

补充定理 196. 偏序集的序数和为完备格的条件

当且仅当集族$(E_i)_{i\in I}$满足下列条件时，其序数和为完备格：

第一，I为完备格；

第二，对任意$J\subset I$，如果J没有最大元，令$d=sup\ J$，则E_d有最小元；

第三，对任意$i\in I$和任意E_i的子集，如果在E_i上有上界，则有最小上界；

第四，对任意$i\in I$，如果E_i没有最大元，则$\{x|x>i$与$x\in I\}$有最小元a，并且E_a有最小元，

证明：

必要性：

如果$(E_i)_{i\in I}$的序数和为完备格，对I的任意子集K，$(E_i)_{i\in K}$的序数和有最大下界x和最小上界y，故K有最大下界pr_2x和最小上界pr_2y；如果$J\subset I$，且J没有最大元，令$(E_i)_{i\in J}$的最小上界x，则$pr_2x=d$，pr_1x为d的最小元；令$E_i\times\{i\}$的最小上界为x，则$pr_2x=a$，其最小元为pr_1x.

充分性：

对$(E_i)_{i\in I}$的序数和的任意子集K，令$J=pr_2k$，则J有最小上界d. 如果$d\notin J$，则E_d有最小元a，(a,d)即为K的最小上界，如果$d\in J$，那么，若$K\cap E_d$有上界，则有最小上界y，(y,d)即为K的最小上界，若$K\cap E_d$没有上界，则E_d没有最大元，故$\{x|x>d$与$x\in I\}$有最小元b，并且E_b有最小元z，(z,b)即为K的最小上界.

补充定理 197.

E、F为偏序集，令$A(E,F)=\{X|X\in FE$与$((X,E,F)$为单增函数$)\}$，并为按$f\in A(E,F)$与$g\in A(E,F)$与$(\forall x)(x\in E\Rightarrow f(x)\leq g(x))$排序的关于$f$、$g$的偏序集，则当且仅当$F$为完备格时，$A(E,F)$为完备格.

证明：

充分性：

对$A(E,F)$的任何子集G，映射$x\to(\{y|(y,E,F)(x)\}$的最小上界$)$的图，是G的最小上界，同理可证G有最大下界.

必要性：

对任意$X\subset F$，令$G=\{A|(\exists x)(A=E\times\{x\}$与$x\in X)\}$，设$G$的最小上界为$H$，对任意$z\in E$，令$u=(H,E,F)(z)$，则$u$是$X$的上界，如果$u'<u$且为$X$的上界，则令$H'=(H-\{(z,u)\})\cup\{(z,u')\}$，$H'<H$，且$H'$也是$G$的上界，矛盾，故$u$是$X$的最小上界，同理可证$X$的最大下界存在.

定义 112. 闭包（*fermeture*）

E为偏序集，E到E的映射f如果满足下列条件，则称f为在E上的闭包，在没有歧义的情况下也可以简称f为闭包：

第一，f是单增映射；

第二，对任意$x \in E$，$f(x) \geq x$；

第三，对任意$x \in E$，$f(f(x)) = f(x)$.

补充定理 198. 分配格的判定和性质

E为格，则以下五个公式等价：

第一，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow sup(x, inf(y, z)) = inf(sup(x, y), sup(x, z)))$；

第二，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow inf(x, sup(y, z)) = sup(inf(x, y), inf(x, z)))$；

第三，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) = inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x)))$；

第四，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow inf(z, sup(x, y)) \leq sup(x, inf(y, z)))$；

第五，$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y))) = sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)))$.

证明：

以上五个公式分别记作R_1、R_2、R_3、R_4、R_5：

如果$sup(x, inf(y, z)) = inf(sup(x, y), sup(x, z))$，则$sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) = sup(inf(sup(x, inf(y, z)), sup(y, inf(y, z)))), inf(z, x))$，等于$sup(inf(sup(x, y), sup(x, z), y, sup(y, z)), inf(z, x))$，等于$inf(sup(x, y, z), sup(x, z), sup(y, z), sup(x, y))$，等于$inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x))$，即$R_1 \Rightarrow R3$.

同理可证$R_2 \Rightarrow R_3$.

根据定义可证$sup(z, inf(x, y)) = inf(x, sup(y, z))$. 并且，$sup(sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)), x) = sup(inf(sup(x, y), sup(y, z), sup(z, x)), x)$，左边 $= sup(x, inf(y, z))$，右边 $= inf(sup(x, z), sup(x, y), sup(x, y, z))$，等于$inf(sup(x, y), sup(x, z))$，即$R_3 \Rightarrow R_1$.

同理可证$R_3 \Rightarrow R_2$.

如果$inf(x, sup(y, z)) = sup(inf(x, y), inf(x, z))$，则$inf(z, sup(x, y)) \leq sup(x, inf(y, z))$，即$R_2 \Rightarrow R_4$.

如果$inf(z, sup(x, y)) \leq sup(x, inf(y, z))$，则$sup(inf(x, y), inf(x, z)) \geq inf(x, sup(inf(x, y), z))$，故$sup(inf(x, y), inf(x, z)) \geq inf(x, sup(y, z))$，同时，由于$inf(x, y) \leq x$、$inf(x, y) \leq sup(y, z)$，故$inf(x, y) \leq inf(x, sup(y, z))$，同理$inf(x, z) \leq inf(x, sup(y, z))$，因此$sup(inf(x, y), inf(x, z)) = inf(x, sup(y, z))$. 因此$R_4 \Rightarrow R_2$.

如果$inf(x, sup(y, z)) = sup(inf(x, y), inf(x, z))$，则$inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y))) = sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x))$，即$R_2 \Rightarrow R_5$.

如果$inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y))) = sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x))$，而$inf(z, sup(x, y)) \leq inf(sup(x, y), sup(z, inf(x, y)))$，$sup(inf(x, y), inf(y, z), inf(z, x)) \leq$

$sup(x, inf(y,z))$，故$R_5 \Rightarrow R_4$.

定义 113. 分配格（*ensemble réticulé distributif*）

E为格，如果$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in E$与$y \in E$与$z \in E \Rightarrow sup(x, inf(y,z)) = inf(sup(x,y), sup(x,z)))$，则称$E$为分配格.

补充定理 199.

（*1*）全序集是分配格.

（*2*）按偏序的乘积排列的分配格的乘积，是分配格.

（*3*）分配格的内部格是分配格.

（*4*）E为分配格，a是E的不可约元素，则$a \leq sup(x,y) \Rightarrow a \leq x$或$a \leq y$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定理66可证.

（3）根据定义可证.

（4）由于$inf(z, sup(x,y)) = z$，故$sup(inf(x,z), inf(y,z)) = z$，因此$inf(x,z) = z$或$inf(y,z) = z$，得证.

定义 114. 互补格（*ensemble réticulé relativement complémenté*），补（*complément relatif*）

令E为格，并且有最小元a，如果对任意$x \in E$、$y \in E$、$x \leq y$，均存在$x' \in E$，使$sup(x,x') = y$，$inf(x,x') = a$，则称E为互补格，x'称为x对y的补.

补充定理 200.

E为分配格和互补格，则对任意$x \in E$、$y \in E$、$x \neq y$，x对y的补唯一.

证明：设t、t'均为x对y的补，根据补充定理198，$inf(t,t') = sup(t,t')$，根据补充定理184（3），$t = t'$.

定义 115. 布尔网络（*réseau booléien*）

如果E是分配格，也是互补格，并且有最大元，则称E为布尔网络.

补充定理 201.

E为布尔网络，最大元为z，对任意$x \in E$，令x^*为x对z的补，则$x \to x^*$为E到按在E上的偏序关系的相反关系排序的偏序集的同构，并且$(x^*)^* = x$.

证明：根据定义可证$(x^*)^* = x$. 对任意$x \leq y$，$sup(y, inf(x^*, y^*)) = sup(y, x^*)$. 根据定理63，$sup(y, x^*) \geq sup(x, x^*)$，故$sup(y, x^*) = z$，因此$sup(y, inf(x^*, y^*)) = z$，又因为$inf(y, inf(x^*, y^*)) = a$，因此$inf(x^*, y^*) = y^*$，所以$x^* \geq y^*$，得证.

补充定理 202.

对任意集合A，按包含关系排序的$\mathcal{P}(A)$，是布尔网络.

证明：根据定义可证.

补充定理 203.

E为布尔网络，且为完备格，$(x_i)_{i\in I}$为E的元素族，求证：$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) = sup(inf(y, x_i))_{i\in I}$.

证明：

令E的最大元为z，对任意$x \in E$，令x^*为x对z的补．则：

$inf(y, sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})) = sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，

$inf(y, sup(y^*, sup(x_i)_{i\in I})) = inf(y, sup(x_i)_{i\in I})$.

根据定理63，$inf(y, sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})) \leq inf(y, sup(y^*, sup(x_i)_{i\in I}))$，

因此$sup(inf(y, x_i))_{i\in I}) \leq inf(y, sup(x_i)_{i\in I})$.

同时，$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) \leq y$，

$sup(inf(y, x_i))_{i\in I} \leq y$.

对任意$i \in I$，$inf(y, x_i) \leq sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，

根据定理63，$sup(y, x_i) \leq sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，

因此$x_i \leq sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，

因此，$sup(x_i)_{i\in I} \leq sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$，

所以$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) \leq inf(y, sup(y^*, sup(inf(y, x_i))_{i\in I}))$，

故$inf(y, sup(x_i)_{i\in I}) \leq sup(inf(y, x_i))_{i\in I})$.

补充定理 204.

令E为偏序集，a、b是E的元素，则$x \in E$与$a \leq x$与$x \leq b$、$x \in E$与$a < x$与$x \leq b$、$x \in E$与$a \leq x$与$x < b$、$x \in E$与$a < x$与$x < b$均为关于x的集合化公式.

证明：根据证明规则52可证.

定义 116. 闭区间（*interval fermé*），左半开区间（*intervalle semi-ouvert à gauche*），右半开区间（*intervalle semi-ouvert à droite*），开区间（*intervalle ouvert*）

令E为偏序集，a、b是E的元素，$a \leq b$，则称$\{x | x \in E$与$a \leq x$与$x \leq b\}$为在E上以a为起点、以b为终点的闭区间，记作$[a, b]$；$\{x | x \in E$与$a < x$与$x \leq b\}$为在E上以a为起点、以b为终点的左半开区间，记作$]a, b]$；$\{x | x \in E$与$a \leq x$与$x < b\}$为在E上以a为起点、以b为终点的右半开区间，记作$[a, b[$；$\{x | x \in E$与$a < x$与$x < b\}$为在E上以a为起点、以b为终点的开区间，记作$]a, b[$. 在没有歧义的情况下，也可以省略“在E上”字样.

定义 117. 左无穷闭区间（*interval fermé illimité à gauche*），左无穷开区间（*intervalle semi-ouvert à gauche*），右无穷闭区间（*interval fermé illimité à droite*），右无穷开区间（*intervalle semi-ouvert à droite*）

令E为偏序集，a是E的元素，则称$\{x|x \in E与x \leq a\}$为在E上以a为终点的左无穷闭区间，记作$]\leftarrow, a]$；$\{x|x \in E与x < a\}$为在E上以a为终点的左无穷开区间，记作$]\leftarrow, a[$；$\{x|x \in E与a \leq x\}$为在E上以a为起点的右无穷闭区间，记作$[a, \rightarrow[$；$\{x|x \in E与a < x\}$为在E上以a为起点的右无穷开区间，记作$]a, \rightarrow[$. 在没有歧义的情况下，也可以省略“在E上”字样.

定义 118. 区间（*interval*）

左半开区间、右半开区间、闭区间、开区间、左无穷闭区间、左无穷开区间、右无穷闭区间、右无穷开区间统称为区间.

定理 71.

格的任何两个区间的交集和并集，都是区间.

证明：根据定义可证.

定义 119. 无间隙的偏序集（*ensemble ordonné sans trou*）

E为偏序集，且至少有一对可比较的不同元素，并且，对E的任何一对可比较的元素x、y，如果$x < y$，则$]x, y[\neq \varnothing$，则称E为无间隙的.

定义 120. 离散的偏序集（*ensemble ordonné dispersé*）

E为偏序集，如果E的任何偏序子集，都不是无间隙的，则称E为离散的.

补充定理 205.

离散集合的任何偏序子集都是离散的.

证明：根据定义可证.

定义 121. 开集（*ensemble ouvert*），正则开集（*ensemble ouvert régulier*）

E为偏序集，如果E的子集U满足对任意$x \in U$，$[x, \rightarrow[\subset U$，则称$U$为开集；如果$U$为开集，且不存在开集$V$，满足$U \neq V$且$U$是$V$的共尾子集，则称$U$为正则开集.

补充定理 206.

（*1*）开集族的并集仍是开集.

（*2*）E为偏序集，对任意$x \in E$，$[x, \rightarrow[$为开集.

证明：根据定义可证.

补充定理 207.

E为偏序集，则：

（1）对任意开集$U \subset E$，存在唯一的正则开集$\tilde{U}$，使U为$\tilde{U}$的共尾子集.

（2）U为开集，$x \in E$，如果对任意$y \geq x$，均存在$z \in U$使$y \leq z$，则$x \in \tilde{U}$.

（3）$\mathcal{P}(E)$按包含关系排序，则映射$U \to \tilde{U}$为单增映射.

（4）$\mathcal{P}(E)$按包含关系排序，则映射$U \to \tilde{U}$为闭包.

（5）对开集U、V，如果$U \cap V = \varnothing$，则$\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$.

证明：

（1）令$K = \{V|(V\text{为开集})\text{与}(U \neq V)\text{与}(U\text{是}V\text{的共尾子集})\}$，$\tilde{U} = \bigcup\limits_{X \in K} X$，根据补充定理206（1），$\tilde{U}$为开集；根据定义可证，$\tilde{U}$为正则开集.

同时，如果存在正则开集U'也满足条件，则$U' \subset \tilde{U}$，根据正则开集的定义，$U' = \tilde{U}$，$\tilde{U}$的唯一性得证.

（2）由于$U \cup [x, \to [$也是开集并且U是其共尾子集，根据补充定理207（1）的证明过程，$U \cup [x, \to [\subset \tilde{U}$，得证.

（3）设$U \subset V$，$x \in \tilde{U}$，对任意$y \geq x$，由于$y \in \tilde{U}$，故存在$z \geq y$且$z \in U$，因此$z \in V$，根据补充定理207（2），$x \in \tilde{V}$，因此映射$U \to \tilde{U}$为单增映射.

（4）根据补充定理207（1）、补充定理207（3）可证.

（5）$U \to \tilde{U}$为单增映射. 若存在$a \in \tilde{U}$且$a \in \tilde{V}$，则存在$x \geq a$且$x \in U$，因此$x \in \tilde{V}$，故存在$y \geq x$且$y \in V$，因此$y \in U$，矛盾，得证.

补充定理 208.

E为偏序集，U、V为正则开集，则$U \cap V$为正则开集.

证明：令$\tilde{X}$为正则开集且使U为$\tilde{X}$的共尾子集，f为映射$X \to \tilde{X}$.

根据补充定理207（3），$f(U \cap V) \subset f(U)$，$f(U \cap V) \subset f(V)$，故$f(U \cap V) \subset f(U)$. 根据补充定理207（1），$f(U) = U$、$f(V) = V$，因此$f(U \cap V) \subset U \cap V$. 又因为$U \cap V \subset f(U \cap V)$，得证.

补充定理 209.

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，并按包含关系排序：

（1）$\varnothing$为$R(E)$的最小元，E为$R(E)$的最大元.

（2）$R(E)$为完备格.

（3）$R(E)$为互补格.

（4）对任意$U \in R(E)$、$V \in R(E)$，$U \cap V \in R(E)$，且$inf(U, V) = U \cap V$.

（5）$R(E)$为分配格，

（6）$R(E)$布尔网络.

（7）当且仅当E非空且为右方有向集时，$R(E)$为仅有两个元素的结合.

证明：对于E的子集X，令$\tilde{X}$表示正则开集，并且X为其共尾子集：

（1）根据定义可证.

（2）对E的任意子集族，令其并集为F，则$\tilde{F}$为其上界，假设存在$H \in R(E)$、$F \subset H$且$H \subset \tilde{F}$，则$H = \tilde{H}$，并且，根据补充定理207（3），$\tilde(F) \subset \tilde{H}$，故$H = \tilde{F}$，即$\tilde{F}$是其最小上界，故$E$为完备格.

（3）设$X \in R(E)$，$Y \in R(E)$，令$Z = \{x | x \in Y$与$(\forall y)(y \in X \Rightarrow$ (非$x \leq y$))$\}$，则Z为开集，根据补充定理207（2），$Y \subset X \cup \tilde{Z}$，同时，$X \cap Z = \varnothing$，根据补充定理207（5），$X \cap \tilde{Z} = \varnothing$. 又因为$Z \subset Y$，故$\tilde{Z} \subset Y$，又$X \subset Y$，因此$Y = X \cup \tilde{Z}$，即$\tilde{Z}$是$X$对$Y$的补，因此$E$为互补格.

（4）根据补充定理208可证.

（5）设$X \in R(E)$，$Y \in R(E)$，$Z \in R(E)$，令$x \in Z \cap sup(X, Y)$，故存在$y \geq x$使$y \in X \cap Y$，同时$y \in Z$，又因为$Z \cap (X \cup Y) \subset X \cup (Y \cap Z)$，故$y \in sup(X, Y \cap Z)$，根据补充定理198，$E$为分配格.

（6）根据定义可证.

（7）如果E不是右方有向集，则存在x、y，使$[x, \rightarrow [\cap [y, \rightarrow [= \varnothing$，根据补充定理207（5），$R(E)$至少有两个非空集元素；反过来，如果$E$是右方有向集，设$U \in R(E)$，且$U \neq \varnothing$. 令$x \in U$，对任意$y \in E$，对任意$z \geq y$，存在$t$为$\{x, z\}$的上界，则$t \in U$，根据补充定理207（2），$y \in U$，故$U = E$，因此$R(E) = \{\varnothing, E\}$.

定义 122. 区间到正则开集的规范映射（*application canonique de interval dans ensemble ouvert régulier*）

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$. 对任意$x \in E$，令$r(x)$为正则开集，且$[x, \rightarrow [$是其共尾子集，则$r$称为$E$到$R_0(E)$的规范映射.

补充定理 210.

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$，并按包含关系的相反关系排序. r为E到$R_0(E)$的规范映射，则r为单增映射，并且$r(E)$的像是$R_0(E)$的共尾子集.

证明：根据补充定理207（3），r为单增映射. 对任意$X \in R_0(E)$，$x \in X$，$r(x) \subset X$，故$r(E)$的像是$R_0(E)$的共尾子集.

补充定理 211.

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$，并按包含关系的相反关系排序. r为E到$R_0(E)$的规范映射，则：

（1）$x \in E$、$y \in E$，则当且仅当对任意$z \geq y$且$z \in E$，$\{x, z\}$在E上均有上界时，$y \in r(x)$.

（*2*）$x\in E$、$y\in E$，则当且仅当存在$z\geq y$且$z\in E$，使$[x,\to[\cap[z,\to[=\varnothing$时，$y\notin r(x)$.

（*3*）$x\in E$、$y\in E$，如果$x\in r(y)$、$y\in r(x)$，则$r(x)=r(y)$.

证明：

（1）如果$y\in r(x)$，则$[y,\to[\subset r(x)$，由于$[x,\to[$是$r(x)$的共尾子集，故对任意$z\geq y$，$\{x,z\}$在E上均有上界；反过来，如果对任意$z\geq y$，$\{x,z\}$在E上均有上界，根据补充定理207（2），$y\in r(x)$.

（2）根据补充定理211（1）可证.

（3）如果$x\in r(y)$、$y\in r(x)$，则$[x,\to[\subset r(y)$，$[y,\to[\subset r(x)$，根据补充定理207（3），$r(y)\subset r(x)$，$r(x)\subset r(y)$，得证.

定义 123. *右方无向集（ensemble afiltrant à droite）*

E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E)=R(E)-\{\varnothing\}$. 对任意$x\in E$，令$r(x)$为区间$[x,\to[$相应的正则开集. 如果$r$为单射，则称$E$为右方无向集.

补充定理 212. 偏序集为右方无向集的条件

E为偏序集，当且仅当同时满足下列两个条件时，E为右方无向集：

第一，对任意$x\in E$、$y\in E$、$x<y$，均存在$z\in E$、$x<z$，使$[y,\to[\cap[z,\to[=\varnothing$；

第二，令x、y是E的一对不可比较的元素，那么，或者存在$x'\geq x$，使$[x',\to[\cap[y,\to[=\varnothing$，或者存在$y'\geq y$，使$[x,\to[\cap[y',\to[=\varnothing$.

证明：

令$R(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E)=R(E)-\{\varnothing\}$. r为E到$R_0(E)$的规范映射，

根据补充定理211（2），两个条件等价于$x\notin r(y)$或$y\notin r(x)$. 如果r为单射，即当$x\neq y$时，$r(x)\neq r(y)$，根据补充定理211（3），$x\notin r(y)$或$y\notin r(x)$. 反过来，当$x\neq y$时，如果$x\notin r(y)$或$y\notin r(x)$，则$r(x)\neq r(y)$，得证.

定义 124. *右方分叉集（ensemble fourchu à droite）*

E为偏序集，如果对任意$x\in E$，均存在$y\in E$、$z\in E$并且$x\leq y$、$x\leq z$，使$[y\to[\cap[z,\to[=\varnothing$，在则称$E$为右方分叉集.

补充定理 213.

（*1*）右方分叉集没有极大元.

（*2*）E为右方分叉集，$x\in E$，则存在$y\in E$、$z\in E$，使$x<y$、$x<z$且y和z不可比较.

（*2*）没有极大元的右方无向集，是右方分叉集.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

（3）根据补充定理212可证.

定义 125. 右方分支集（*ensemble ramifié à droite*），完全右方分支集（*ensemble complément ramifié à droite*）

E为偏序集，如果对任意$x \in E$、$y \in E$、$x < y$，均存在$z \in E$、$x < z$，使y和z是不可比较的，则称E为右方分支集．没有极大元的右方分支集，称为完全右方分支集．

补充定理 214.

右方无向集都是右方分支集．

证明：根据补充定理212可证．

习题 77.

E为偏序集，且至少有一对可比较的不同元素，令R为$x \in E$与$y \in E$与$x < y$，求证：R满足偏序关系前两个条件，不满足第三个条件．

证明：由于E的偏序具有传递性，因此$x \le y$与$y \le z \Rightarrow x \le z$．如果$x < y$、$y < z$且$x = z$，则$x = y$，矛盾，故$R$具有传递性；由于$x < y$与$y < x$为假，故第二式为真．但$E$的两个不同的可比较的元素$x$、$y$若满足$x < y$，而$x < x$、$y < y$为假，故第三式为假．

习题 78.

（1）E为预序集，$x \le y$为在E上的预序关系，令R为公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$与$x \le y)))$．求证：$R$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的预序关系．

（2） f为E到E/S的规范映射，求证：

对任意E/S的商预序集到预序集F的映射g，如果$g \circ f$为单增映射，则g为单增映射．

当且仅当S满足下列条件时，f为单增映射：

$(x \le y$与$x \equiv x'(modS)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$与$y \equiv y'(modS)$与$x' \le y')$．

如果$x \le y$关于x同S相容，则S同$x \le y$弱相容．

（3） E_1、E_2为预序集，令S_1为公式$pr_1 z = pr_1 z'$，求证：S_1在z、t上同在$E_1 \times E_2$上的预序关系的乘积$z \le t$弱相容；并且，令h_1为$E_1 \times E_2$到$(E_1 \times E_2)/S_1$的规范映射，$pr_1 = f_1 \circ h_1$，则f_1是$(E_1 \times E_2)/S_1$到E_1的同构．

（4）E为偏序集，$x \le y$ 为在E上的偏序关系，S为在E上的等价关系，令R为公式$X \in E/S$与$Y \in E/S$与$((\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$与$x \le y)))$，且$x \le y$与$y \le z$与$x \equiv z(modS) \Rightarrow x \equiv y(modS)$．求证：$R$为关于$X$、$Y$在$E/S$上的偏序关系．

（5）给出元素数目为4的全序集E以及在E上的等价关系S，使E/S为一个偏序集，但“$(x \le y$与$x \equiv x'(modS)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$与$y \equiv y'(modS)$与$x' \le y')$”、“$x \le y$与$y \le z$与$x \equiv z(modS) \Rightarrow x \equiv y(modS)$”都不成立．

（6） E、F为偏序集，f为E到F的单增函数，S为公式$f(x)=f(y)$与$x\in E$与$y\in E$，则$x\le y$与$y\le z$与$x\equiv z(modS)\Rightarrow x\equiv y(modS)$.

令R为公式$X\in E/S$与$Y\in E/S$与$((\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\le y)))$，$E/S$为按$R$排序的偏序集．当且仅当$x'\in E$与$x\le y$与$f(x)=f(x')\Rightarrow(\exists y')(y'\in E$与$x'\le y'$与$f(y)=f(y'))$时，$(x\le y$与$x\equiv x'(modS))\Rightarrow(\exists y')(y'\in E$与$y\equiv y'(modS)$与$x'\le y')$.

令$f=g\circ h$，h为E到E/S的规范映射，则当且仅当下列两个条件同时成立时，g为E/S到$f\langle E\rangle$的同构：

第一，$x'\in E$与$x\le y$与$f(x)=f(x')\Rightarrow(\exists y')(y'\in E$与$x'\le y'$与$f(y)=f(y'))$；

第二，$x\in E$与$y\in E$与$f(x)\le f(y)\Rightarrow(\exists x')(\exists y')(f(x)=f(x')$与$f(y)=f(y')$与$x'\le y'$.

证明：

（1）即补充证明规则81（1）.

（2）即补充证明规则82、补充证明规则83.

（3）根据定义可证S_1在z、t上同在$E_1\times E_2$上的预序关系的乘积$z\le t$弱相容，根据补充证明规则82（1）可证f_1是单增映射，即$X\le Y\Rightarrow f_1(X)\le f_1(Y)$.

反过来，如果$f_1(X)\le f_1(Y)$，对任意$x\in X$，设$y\in Y$，令$y'=(pr_1y,pr_2x)$，则$y'\in Y$，且$pr_1x\le pr_1y'$，故$x\le y'$，因此$X\le Y$.

（4）即补充证明规则81（2）.

（5）设a、b、c、d互不相等，令$E=\{a,b,c,d\}$，$S=\{(a,b),(b,a),(a,d),(d,a),(b,d),(d,b),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$，在$E$上的偏序的图为$\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$，则符合要求.

（6）第一部分、第二部分根据定义可证.

对于第三部分：

如果g为E/S到$f\langle E\rangle$的同构，则当$X\in E/s$、$Y\in E/s$时，$X\le Y\Leftrightarrow g(X)\le g(Y)$．对任意E的元素$x$、$y$、$x'$，如果$x\le y$以及$x\equiv x'(modS)$，则$g(h(x))\le g(h(y))$，故$h(x)\le h(y)$，因此$h(x')\le h(y)$，因此存在$y'\in h(y)$且$x'\le y'$；同时，如果$f(x)\le f(y)$，则$g(h(x))\le g(h(y))$，故对任意$x'\in h(x)$，存在$y'\in h(y)$且$x'\le y'$.

反过来，如果两个条件成立，若$X\le Y$，则对任意$x\in X$，存在$y\in Y$，使$x\le y$，故$g(h(x))\le g(h(y))$，因此$g(X)\le g(Y)$；如果$g(X)\le g(Y)$，则对任意$x\in X$、$y\in Y$，有$X=h(x)$、$Y=h(y)$，故$f(x)\le f(y)$，因此，存在x'、y'，使$f(x)=f(x')$、$f(y)=f(y')$且$x'\le y'$，故存在$y''\in Y$使$x\le y''$，因此$X\le Y$，得证.

习题 79.

I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$为非空偏序集族：

（1）令F为集族$(E_i)_{i\in I}$的序数和，$G=\{(x,y)|(x,y)$为有序对与$x\in F$与$y\in F$与$(pr_2x<pr_2y$或$(pr_2x=pr_2y$与在E_{pr_2x}上$pr_1x\le pr_1y))\}$，求证：

G为在F上的偏序.

令S为公式$x \in F$与$y \in F$与$pr_2 x = pr_2 y$，则：

第一，$(x \leq y$与$x \equiv x'(modS)) \Rightarrow (\exists y')(y' \in E$与$y \equiv y'(modS)$与$x' \leq y')$；

第二，$x \leq y$与$y \leq z$与$x \equiv z(modS) \Rightarrow x \equiv y(modS)$.

E/S的商偏序集，同构于I.

（*2*）L为偏序集，I为偏序集族$(J_l)_{l \in L}$的序数和，令F_l为偏序集族$(E_i)i \in J_l$的序数和，求证：集族$(E_i)_{i \in I}$的序数和同构于集族$(F_l)l \in L$的序数和．但令I为全序集$\{1, 2\}$，E_1、E_2为偏序集，$F_2 = E_1$，$F_1 = E_2$，偏序集族$(_E i)_{i \in I}$的序数和不同构于偏序集族$(F_i)_{i \in I}$的序数和．（*1*）求证：当且仅当I为右方有向集且对I的任意极大元i，并且E_i均为右方有向集时，F为右方有向集．

（*2*）求证：当且仅当I为全序集，且对任意$i \in I$，E_i均为全序集时，F为全序集．

（*3*）求证：当且仅当满足下列条件时，F为格：

第一，I为格，并且，对任意$i \in I$、$j \in I$，如果i和j是不可比较的，则$E_{sup(i,j)}$有最小元，$E_{inf(i,j)}$有最大元；

第二，对任意$i \in I$，如果$x \in E_i$，$y \in E_i$，且$\{x, y\}$在E_i上有上界（或下界），则$\{x, y\}$在E_i上有最小上界（或最大下界）；

第三，对任意$i \in I$，如果$x \in E_i$，$y \in E_i$，且$\{x, y\}$在E_i上没有上界（或下界），则$\{k | k \in I$与$k > i\}$（或$\{k | k \in I$与$k < i\}$）有最小元（或最大元）j，且E_j有最大元（或最小元）.

证明：

（1）第一部分即补充定理167.

第二部分根据定义可证.

第三部分：令g为映射$x \to E_x \times x(x \in I)$，则$g$为双射，且$g^{-1}$为$E/S$到$I$的同构，

（2）前一部分即补充定理169．设a、b、c互不相等，$E_1 = \{a\}$，$E_2 = \{b, c\}$，均按偏序关系$x = y$排序，则偏序集族$(E_i)_{i \in I}$的序数和不同构于偏序集族$(F_i)_{i \in I}$的序数和.

（3）即补充定理192（1）.

（4）即补充定理192（2）.

（5）即补充定理192（3）.

习题 80.

E为偏序集，$(E_i)_{i \in I}$为E的划分，并且均为E关于公式$(x = y$或x和y是不可比较的$)$的连通分量：

（*1*）求证：如果$i \leq k$，$x \in E_i$，$y \in E_k$，则x和y是可比较的；并且，如果$x \leq y$，$y' \in E_k$，$y \neq y'$，则$x \leq y'$.

（*2*）令S为公式$x \in F$与$y \in F$与$(\exists i)(i \in I$与$x \in Ei$与$y \in E_i)$，求证：$x \leq y$关于x、y同S相容，且E/S的商预序集为全序集.

（*3*）F、G为全序集，E为F和G两个全序集的乘积，那么，E的连通分量是什么？

证明：

（1）根据定义可证x和y是可比较的；如果$y' < x$，则$y' \leq y$，又因为$y \in E_k$、$y' \in E_k$，故$y = y'$，矛盾，因此，$x \leq y'$.

（2）根据习题80（1）可证$x \leq y$关于y同S相容，同理可证$x \leq y$关于x同S相容，根据习题80（1）和定义，可证E/S的商预序集为全序集.

（3）如果F、G分别有最小元a、b和最大元c、d，则E的连通分量为$\{(a,b)\}$、$\{(c,d)\}$、$E-\{(a,b),(c,d)\}$；如果E、F至少有一个没有最小元，并且至少有一个没有最大元，则E的连通分量为E；如果E、F至少有一个没有最小元，分别有最大元a、b，或者至少有一个没有最大元，分别有最小元a、b，则E的连通分量为$\{(a,b)\}$、$E-\{(a,b)\}$.

注：习题80中的概念“联通分量”，涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 81.

$F=\{X|X$为E的自由子集$\}$，求证：

（1）$X \in F$与$Y \in F$与$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in Y$与$x \leq y))$为关于$X$、$Y$在$F$上的偏序关系；

（2）F按（1）的偏序关系排序，则$x \to \{x\}$为E到F的子集的同构；

（3）F按（1）的偏序关系排序，则如果$X \in F$、$Y \in F$、$X \subset Y$，则$X \leq Y$；

（4）F按（1）的偏序关系排序，则当且仅当E为全序集、E到F存在同构时，F为全序集.

证明：即补充定理193.

习题 82.

E、F为偏序集，令$\mathcal{A}(E,F)=\{X|X \in FE$与$((X,E,F)$为单增函数$)\}$，并为按$f \in \mathcal{A}(E,F)$与$g \in \mathcal{A}(E,F)$与$(\forall x)(x \in E \Rightarrow f(x) \leq g(x))$排序的关于$f$、$g$的偏序集：

（1）E、F、G均为偏序集，$F \times G$为按$x \in F \times G$与$y \in F \times G$与$pr_1x \leq pr_1y$与$pr_2x \leq pr_2y$排序的关于x、y的偏序集，求证：$\mathcal{A}(E,F \times G)$同构于偏序集$\mathcal{A}(E,F)$和$\mathcal{A}(E,G)$的积.

（2）E、F、G均为偏序集，$E \times F$为按$x \in E \times F$与$y \in E \times F$与$pr_1x \leq pr_1y$与$pr_2x \leq pr_2y$排序的关于x、y的偏序集，求证：$\mathcal{A}(E \times F,G)$同构于$\mathcal{A}(E,\mathcal{A}(F,G))$.

（3）$E \neq \varnothing$，求证：当且仅当F为格时，$\mathcal{A}(E,F)$为格.

（4）$E \neq \varnothing$，$F \neq \varnothing$，求证：当且仅当满足下列条件之一时，$\mathcal{A}(E,F)$为全序集：第一，F的元素数目为1；第二，E的元素数目为1且F为全序集；第三，E为全序集，F的元素数目为2并且为全序集.

证明：

（1）映射$X \to (x \to pr_1(X,E,F \times G)(x)$的图$, x \to pr_2(X,E,F \times G)(x)$的图$)$，为其同构，得证.

（2）映射$X \to (x \to (y \to (X,E \times F,G)(x,y)$的图$)$的图$)$，为其同构，得证.

（3）类似补充定理197可证.

（4）充分性根据定义可证.

必要性：$\mathcal{A}(E,F)$为全序集，则F为全序集．如果F的元素数目大于2，E的元素数目大于1，设$x\in E$，$y\in E$，且$x\neq y$，$\{a,b,c\}\in F$，且$a<b$，$b<c$，则对任意$y\in E$，令$f(x)=b$，对任意$z\leq x$，令$g(z)=a$，对任意$u\geq y$，令$g(u)=c$，对其他$v\in E$，令$g(v)=b$，则f和g是不可比较的，矛盾，故E的元素数目为1;

如果F的元素数目为2，设$\{a,b\}\in F$，且$a<b$，如果$x\in E$，$y\in E$，且x和y不可比较，则对任意$z\leq x$，令$f(z)=a$，对其他$v\in E$，令$f(v)=b$，对任意$z\leq y$，令$g(z)=a$，对其他$v\in E$，令$g(v)=b$，则f和g是不可比较的，矛盾，故E为全序集．必要性得证.

注：习题82中的概念“元素数目”，涉及尚未介绍的知识.

习题 83.

E为偏序集，F为元素数目不少于2的偏序集，求证：当且仅当E为关于公式“$(x=y$或x和y是不可比较的$)$”的连通分量时，下列公式为真：

$(f$为E到F的映射$)$与$(f$是单增映射$)$与$(f$是单减映射$)\Rightarrow(f$是常数映射$)$.

特别是，当E为右方有向集或左方有向集时，满足上述条件.

证明：根据定义可证.

注：习题83中的概念“联通分量”，涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 84.

E、F为偏序集，f为E到F的单增映射，g为F到E的单增映射，$A=\{x|x\in E$与$g(f(x))=x\}$，$B=\{y|y\in F$与$f(g(y))=y\}$，求证：A同构于B.

证明：当$x\in A$时，$f(x)=f(g(f(x)))$，故$f(x)\in B$，因此，令f'为f通过A和B导出的函数，类似的，可以令g'为g通过B和A导出的函数．则f'和g'为单增映射，$f'\circ g'=Id_B$，$g'\circ f'=Id_A$，根据定理20，f'和g'均为双射，得证.

习题 85.

E为格，I、J均为有限集合，对任意$i\in I$、$j\in J$，$(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$为$E$的元素族，求证：$sup(inf(x_{i,j})_{i\in I})_{j\in J}\leq inf(sup(x_{i,j})_{j\in J})_{i\in I}$.

证明：

E为格，I、J均为有限集合，故$inf(x_{i,j})_{i\in I}$、$sup(x_{i,j})_{j\in J}$存在，$sup(inf(x_{i,j})_{i\in I})_{j\in J}$、$inf(sup(x_{i,j})_{j\in J})_{i\in I}$也存在.

对任意$i\in I$、$j\in J$，$(inf(x_{i,j})_{i\in I}\leq x_{i,j}$，根据定理63，对任意$i\in I$，$sup(inf(x_{i,j})_{i\in I})_{j\in J}\leq sup(x_{i,j})_{j\in J}$，得证.

注：习题85涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 86.

E、F为格，f为E到F的映射，求证：当且仅当对任意$x \in E$、$y \in E$均有$f(inf(x,y)) \leq inf(f(x),f(y))$时，$f$为单增函数．$N$为自然数集，$N \times N$为偏序集$N$和$N$的乘积，并试给出$N \times N$到$N$的单增映射$f$，且存在$(x,y)$，使$f(inf(x,y)) = inf(f(x),f(y))$不成立．

证明；

必要性：如果$x \leq y$，则$f(x) \leq f(y)$，故$f(inf(x,y)) \leq inf(f(x),f(y))$.

充分性：如果$x \leq y$，则$f(x) \leq inf(f(x),f(y))$，故$f(x) \leq f(y)$.

不成立的例子：令f为$(x,y) \to x+y$，$x = (0,1)$，$y = (1,0)$，则$f(inf(x,y)) = 0$，$inf(f(x),f(y)) = 1$.

注：习题86涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 87.

（1）求证：如果偏序集E的任何子集在E上都有最小上界，则E为完备格.

（2）求证：当且仅当各偏序集都是完备格时，偏序集的积是完备格.

（3）求证：当且仅当集族$(E_i)_{i \in I}$满足下列条件时，其序数和为完备格：

第一，I为完备格；

第二，对任意$J \subset I$，如果J没有最大元，令$d = sup\ J$，则E_d有最小元；

第三，对任意$i \in I$和任意E_i的子集，如果在E_i上有上界，则有最小上界；

第四，对任意$i \in I$，如果E_i没有最大元，则$\{x|x > i与x \in I\}$有最小元a，并且E_a有最小元，

（4）E、F为偏序集，令$A(E,F) = \{X|X \in FE与((X,E,F)为单增函数)\}$，并为按$f \in A(E,F)$与$g \in A(E,F)$与$(\forall x)(x \in E \Rightarrow f(x) \leq g(x))$排序的关于$f$、$g$的偏序集，求证：当且仅当$F$为完备格时，$A(E,F)$为完备格.

证明：

（1）即补充定理194.

（2）即补充定理195.

（3）即补充定理196.

（4）即补充定理197.

习题 88.

E为A到A的映射集合，$F = \{X|X \subset A与f(X) \subset X与f \in E\}$，且为按包含关系排序的偏序集，则$F$为完备格.

证明：F的任何子集的最小上界，是其并集，得证.

习题 89.

E为偏序集，f为闭包；令F为f的不动点集合：

（1）求证：

对任意$x \in E$，令$F_x = \{y|y \in F与x \leq y\}$，则其有最小元$f(x)$.

反过来，如果$G \subset E$，对任意$x \in E$，$\{y|y \in G与x \leq y\}$均有最小元$g(x)$，则g为闭包，且G为g的不动点集合.

（2）E为完备格，求证：F的任何非空子集在E上的最大下界属于F.

（3）如果E为格，求证：对任意$x \in E$、$y \in E$，$f(sup(x,y)) = sup(f(x), f(y))$.

证明：

（1）$f(x) \geq x$，因此$f(x) \in F_x$；设$y \in F_x$，则$x \leq y$，故$f(x) \leq f(y)$，$y \geq f(x)$，故$f(x)$为最小元．反过来，根据定义可证对任意$x \in E$ ，$g(x) \geq x$，$g(x) \in G$，故$g(g(x)) = g(x)$，同时，当$x \leq y$时，$\{z|z \in G与y \leq z\} \subset \{z|z \in G与x \leq z\}$，故$g(x) \leq g(y)$，因此，$G$为闭包．另外，对任意$x \in G$，$x = g(x)$，同时，对任意$x = g(x)$，$x \in G$，得证.

（2）如果该子集的最大下界x不属于F，则$f(x) > x$，且$f(x)$也是该子集的下界，矛盾.

（3）设$z = sup(x,y)$，对任意u，如果使$f(x) \leq u$，$f(y) \leq u$，则$x \leq f(u)$，$y \leq f(u)$，故$z \leq f(u)$，因此$f(z) \leq u$，所以$f(z) = sup(f(x), f(y))$，得证.

习题 90.

$R \subset A \times B$，对$X \subset A$、$Y \subset B$，令映射$r(X) = \{y|y \in B与(\forall x)(x \in X \Rightarrow (x,y) \in R)\}$，$s(Y) = \{x|x \in A与(\forall y)(y \in Y \Rightarrow (x,y) \in R)\}$，$\mathcal{P}(A)$、$\mathcal{P}(B)$为按包含关系排序的偏序集，求证：$r$、$s$为单减映射，并且映射$s \circ r$、$r \circ s$均为闭包.

证明：根据定义可证，r、s为单减映射，因此，$s \circ r$、$r \circ s$为单增映射．对任意$x \in X$，令$Y = r(X)$，则对任意$y \in Y$，$(x,y) \in R$，故$x \in s(r(X))$，因此$s(r(X)) \geq X$，同理$r(s(Y)) \geq Y$．因此$r(s(r(X))) \geq r(X)$，同时，由于r为单减函数，故$r(s(r(X))) \leq r(X)$，因此$r(s(r(X))) = r(X)$，故$s(r(s(r(X)))) = s(r(X))$，同理$r(s(r(s(Y)))) = r(s(Y))$，根据定义，$s \circ r$、$r \circ s$均为闭包.

习题 91.

（1）E为偏序集，对任意$X \subset E$，令$r(X) = \{A|A为X在E上的上界\}$，$s(X) = \{A|A为X在E上的下界\}$，映射i为$x \to s(\{x\})$.

求证：

令$E' = \{X|X \subset E与X = s(r(X))\}$，并按包含关系排序，则$E'$是完备格.

并且，映射i是E到E'的一个子集的同构.

同时，对任意$x_i \in E$，如果$\{x_i\}$有最小上界a，则在E'上，$i(a)$是$\{i(\{x_i\})\}$的最小上界.

（2）求证：对任意$X \subset E$，$s(r(X))$是$i(X)$在E'上的最小上界．同时，确定对E到完备格F的任意单增映射f，是否存在唯一的E'到F的单增映射f'，使$f = f' \circ i$，并且，对E'的任意子集Z，均有$f'(sup\ Z) = sup(f'(Z))$.

（3）如果E为全序集，求证：E'为全序集.

证明：

（1）令$f=s\circ r$，根据定义，f是闭包．因此，对E'的子集I，令$J=\bigcup\limits_{X\in I}X$，$f(J)$为$I$的最小上界．根据补充定理194，$E'$是完备格．

根据定义，$s\circ r$、$r\circ s$为增函数，r为减函数，故$s(r(s(\{x\})))\geq s(\{x\})$，$s(r(s(\{x\})))\leq s(\{x\})$，所以$s(r(s(\{x\})))=s(\{x\})$，因此映射$i$是$E$到$E'$的子集$i(E)$的双射．同时，如果$x\leq y$，则$s(\{x\})\leq s(\{y\})$，故$i$是$E$到$i(E)$的同构．根据定义可证，$i(a)/\{i(\{xi\})\}$的最小上界．

（2）根据定义，$s(r(\{x\}))=s(\{x\})$，由于$s\circ r$为增函数，因此，对任意$x\in X$，$s(r(X))\geq s(\{x\})$．如果对任意$x\in X$，$Y\geq s(\{x\})$且$s(r(Y)=Y$，则$Y\geq\bigcup\limits_{x\in X}s(\{x\})$，因此$Y\geq s(r(\bigcup\limits_{x\in X}s(\{x\})))$，又因为$r(\bigcup\limits_{x\in X}s(\{x\}))=r(X)$，故$s(r(X))=(r(\bigcup\limits_{x\in X}s(\{x\})))$，因此$Y\geq s(r(X))$，故$s(r(X))$是$i(X)$在$E'$上的最小上界．

设a、b、c互不相等，令E={a, b, c}，按({a, a}, {b, b}, {c, c}, {a, c}, {b, c})排序，F={a, b, c}，按({a, a}, {b, b}, {c, c}, {a, c}, {b, c}, {a, b})排序，映射$f=Id_E$，$Z=\{\{a\},\{b\}\}$，则$f'(sup\ Z)=c$，$sup(f'(Z))=b$，故为反例．

（3）根据定义可证．

注：原书习题91（2）后半部分是假命题．

习题 92.

E为格：

（1）求证：如果以下两个条件之中任何一个成立，则对任意$x\in E$、$y\in E$、$z\in E$，均有$sup(inf(x,y),inf(y,z),inf(z,x))=inf(sup(x,y),sup(y,z),sup(z,x))$：

第一，对任意$x\in E$、$y\in E$、$z\in E$，$sup(x,inf(y,z))=inf(sup(x,y),sup(x,z))$；

第二，对任意$x\in E$、$y\in E$、$z\in E$，$inf(x,sup(y,z))=sup(inf(x,y),inf(x,z))$．

（2）求证：如果对任意$x\in E$、$y\in E$、$z\in E$，均有$sup(inf(x,y),inf(y,z),inf(z,x))=inf(sup(x,y),sup(y,z),sup(z,x))$，则当$x\geq z$时，$sup(z,inf(x,y))=inf(x,sup(y,z))$，并且，（1）当中的两个条件都成立．即对任意$x\in E$、$y\in E$、$z\in E$，$sup(x,inf(y,z))=inf(sup(x,y),sup(x,z))$、$inf(x,sup(y,z))=sup(inf(x,y),inf(x,z))$、$sup(inf(x,y),inf(y,z),inf(z,x))=inf(sup(x,y),sup(y,z),sup(z,x))$都等价．

（3）求证：下列两个条件中的任何一个，均为E为分配格的充分必要条件：

第一，对任意$x\in E$、$y\in E$、$z\in E$，$inf(z,sup(x,y))\leq sup(x,inf(y,z))$；

第二，对任意$x\in E$、$y\in E$、$z\in E$，$inf(sup(x,y),sup(z,inf(x,y)))=sup(inf(x,y),inf(y,z),inf(z,x))$．

证明：即补充定理198．

习题 93.

（1）求证：按包含关系排序的维数不小于2的向量空间的子空间集合E，是互补格．但对$x\in E$、$y\in E$、$x\neq y$，通常x对y的补不是唯一的．

（2）E为分配格和互补格，求证：对任意$x \in E$、$y \in E$、$x \neq y$，x对y的补唯一．如果E为分配格和互补格，并且有最大元z，则称E为布尔网络．对任意$x \in E$，令x^*为x对z的补，则$x \to x^*$为E到按在E上的偏序关系的相反关系排序的同构，并且$(x^*)^* = x$．对任意集合A，按包含关系排序的$\mathcal{P}(A)$，是布尔网络．

（3）E为布尔网络，且为完备格，$(x_i)_{i \in I}$为E的元素族，求证：$inf(y, sup(x_i)_{i \in I}) = sup(inf(y, x_i))_{i \in I}$．

证明：

（1）对E的任何两个元素，其交集为最大下界，其和为最小上界，故E为格．对任意$x \leq y$，将x的基扩展为y的基，则扩展的基，为x对y的补，故E为互补格．同时，当y不是E的最大元时，扩展的基和x的基线性组合可以得到不同的补，故x'存在且通常不是唯一的．

（2）即补充定理200、补充定理201、补充定理202．

（3）即补充定理203．

注：习题93（1）涉及尚未介绍的“向量空间”知识．

习题 94.

A的元素数目不小于$3F = \{A|(\Delta_A$为E的划分$)\}$，并按偏序关系“$X \in F$与$Y \in F$与Δ_X为比Δ_Y更细”排序．求证：F是完备格，不是分配格，但是互补格．

证明：对F的任意子集X，$\{B|B \neq \varnothing$与$(\forall x)(\forall z)(x \in B$与$z \in X \Rightarrow (\exists t)(t \in z$与$x \in t$与$t \subset B))\}$为其最小上界，$\{C|C \neq \varnothing$与$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in C$与$y \in C$与$z \in X \Rightarrow (\exists t)(t \in z$与$x \in t$与$y \in t))\}$为其最大下界，故$F$为完备格．

对F的任意子集X、Y，且$X \leq Y$，对任意$z \in Y$，令$H_z = \{x|x \in X$与$x \subset z\}$，$T_z = \bigcup\limits_{x \in H_z} \{\tau_u(u \in x)\}$．$D = \{u|(\exists z)(u = T_z$与$z \in Y)\}$，$E = A - \bigcup\limits_{x \in D} x$，$K = D \cup \{X|(\exists x)(X = \{x\}$与$x \in E)\}$，则$K$为$X$的补．

F不是分配格的反例：

令x、y、z互不相等，$A = \{x, y, z\}$，$X = \{\{x\}, \{y, z\}\}$，$Y = \{\{y\}, \{x, z\}\}$，$Z = \{\{z\}, \{x, y\}\}$，则$sup(X, inf(Y, Z)) \neq inf(sup(X, Y), sup(X, Z))$．

注：证明互补格时，K的含义是：从Y的每个集合对应的X的各集合中，各取一个元素，组成若干个新集合（D），然后将A剩下的每个元素均作为一个集合．

习题 95.

求证：当且仅当集族$(E_i)_{i \in I}$满足下列条件时，其序数和为无间隙的：

第一，I至少有一对可比较的不同元素，或者存在$i \in I$使E_i至少有一对可比较的不同元素；

第二，对任意$i \in I$，如果E_i至少有一对可比较的不同元素，则E_i为无间隙的；

第三，$a \in I$、$b \in I$，$a < b$且$]a, b[$为空，则E_a没有极大元或者E_b没有极小元．

特别是：

对任意$i \in I$，E_i都是无间隙的，且没有极大元（或极小元），则其序数和是无间隙的.

如果I是无间隙的，并且对任意$i \in I$，E_i都是无间隙的或者没有可比较的元素，则其序数和是无间隙的.

证明：根据定义可证.

习题 96.

（*1*）E是离散的，求证：对任意$x \in E$、$y \in E$、$x < y$，存在$x' \in E$、$y' \in E$，使$x \leq x'$、$x' < y'$、$y' \leq y$，且$]x', y'[= \varnothing$. 并给出一个满足该条件，但不是离散的全序集.

（*2*）$(E_i)_{i \in I}$为集族，其中$I \neq \varnothing$，对任意$i \in I$，$E_i \neq \varnothing$，求证：当且仅当I为离散的，并且对任意$i \in I$，E_i为离散的，该集族的序数和是离散的，

证明：

（1）根据定义可证. 康托尔集是一个例子.

（2）令E为其序数和.

必要性：如果E是离散的，根据习题96（1），对任意$i \in I$，$E_i \times \{i\}$是离散的，因此E_i是离散的；同时，令$F = \{x | (\exists i)(i \in I与x = \tau_y(y \in Ei))\}$，则$F$是离散的，因此$I$是离散的，必要性得证.

充分性：对E的任何偏序子集F，令$J = pr_2 F$，则F为集族$(E_i \cap F)_{i \in J}$的序数和，如果F是无间隙的，根据习题95， J至少有一对可比较的不同元素，令其为x、y且$x < y$，则存在$x' \in E$、$y' \in E$，使$x \leq x'$、$x' < y'$、$y' \leq y$，且$]x', y'[= \varnothing$. 同时，根据习题95，对任意$i \in J$，$E_i \cap F$没有可比较的不同元素，因此，对任意$i \in J$，$E_i \cap F$有极大元也有极小元，矛盾.

注：习题96（1）反例部分部分涉及尚未介绍的“康托尔集”知识.

习题 97.

E为非空全序集，公式S为$([x, y]$是离散的$)$，求证：S和在E上的偏序$x \leq y$弱相容；关于S的等价类是离散的；E/S的商偏序集存在，其或者是仅有一个元素的集合，或者是无间隙的. 并且，E同构于某个离散集合族的序数和，其指标集或者是仅有一个元素的集合，或者是无间隙的.

证明：根据补充定理*169*，S和在E上的偏序$x \leq y$弱相容.

考虑关于S的某个等价类的任何偏序子集F，设$x \in F$，$y \in F$，则$[x, y]$是离散的，令$G = F \cap [x, y]$，根据习题*96*（*3*），存在$x' \in G$、$y' \in G$，使$x \leq x'$、$x' < y'$、$y' \leq y$，且$]x', y'[= \varnothing$，因此，关于S的等价类是离散的.

同时，E同构于集族$(X)_{X \in E/S}$的序数和. 如果E是离散的，根据习题*96*（*1*），对任意$x \in E$、$y \in E$，$[x, y]$都是离散的，故$E/S = \{E\}$，即是仅有一个元素的集合；如果E不是离散的，则集族$(X)_{X \in E/S}$的序数和也不是离散的，根据习题*96*（*4*），E/S不是离散的，得证.

习题 98.

（*1*）E为偏序集，求证：对任意开集$U \subset E$，存在唯一的正则开集$\tilde{U}$，使U为$\tilde{U}$的共尾子集，并且，映射$U \to \tilde{U}$为单增映射．同时，对开集U、V，如果$U \cap V = \varnothing$，则$\tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$．

（*2*）E为偏序集，令$R(E)$为E的正则开子集集合，并按包含关系排序，求证：$R(E)$为布尔网络，且为完备格．并且，当且仅当E非空且为右方有向集时，$R(E)$为仅有两个元素的结合．

（*3*）令F为E的共尾子集，$R(E)$、$R(F)$均按包含关系排序，求证：映射$U \to U \cap F$为$R(E)$到$R(F)$的同构．

（*4*）E_1、E_2为偏序集，$E1 \times E2$按偏序关系$(pr_1 x \leq pr_1 y)$与$(pr_2 x \leq pr_2 y)$排序，求证：$E_1 \times E_2$的任意开集，均可表示为$U_1 \times U_2$的形式，其中U_1、U_2分别为在E_1上的开集、在E_2上的开集．并确定$R(E1 \times E2)$是否同构于$R(E1) \times R(E2)$．

证明：

（1）即补充定理207（1）、补充定理207（3）、补充定理207（5）．

（2）即补充定理209（2）、补充定理209（6）、补充定理209（7）．

（3）$U \in R(E)$，因此在F上$U \cap F$是开集，设$U \cap F$在F上相应的正则开集是V，对任意$x \in V$，显然$x \in F$，同时，对任意$y \geq$x，存在$z \in F$且$y \leq z$，因此，$z \in V$，因此存在$z \leq t$且$t \in U \cap F$，根据补充定理207（2），$x \in \tilde{U}$，故$x \in U$，因此$x \in U \cap F$，所以$U \cap F$在F上是正则开集．

对任意$V \in R(F)$，设V在E上相应的正则开集为U，则U是唯一的；同时，对任意$x \in U \cap F$，对任意$y \geq x$且$y \in F$，存在$z \in F$且$y \leq z$，故$z \in U \cap F$，故存在$t \in V$使$t \geq z$，根据补充定理207（2），$x \in V$，因此，$U \cap F = V$．因此，$U \to U \cap F$为$R(E)$到$R(F)$的双射．根据定义$U \subset V \Rightarrow U \cap F \subset V \cap F$；反过来，如果$U \cap F \subset V \cap F$，如果$x \in U$，对任意$y \geq x$，存在$z \in F$且$y \leq z$，因此$z \in V$，根据补充定理207（2），$x \in V$，故$U \subset V$，综上，该映射为同构．

（4）对于$F \subset E_1 \times E_2$，且F为开集，令$U_1 = pr_1 F$，$U_2 = pr_2 F$，根据定义可证$F = U_1 \times U_2$且U_1、U_2均为开集．

令$E_1 = \{a\}$、$E_2 = \{b\}$，则$R(E_1 \times E_2)$不同构于$R(E_1) \times R(E_2)$．

注：原书习题98（4）后半部分是假命题．

习题 99.

E为偏序集，令$R_(E)$为E的正则开子集集合，$R_0(E) = R(E) - \{\varnothing\}$，并按包含关系的相反关系排序．令为$E$到$R_0(E)$的规范映射：

（*1*）求证：r为单增映射，并且$r(E)$的像是$R_0(E)$的共尾子集．

（*2*）求证：E为偏序集，当且仅当同时满足下列两个条件时，E为右方无向集：

第一，对任意$x \in E$、$y \in E$、$x < y$，均存在$z \in E$、$x < z$，使$[y, \to [\cap [z, \to [= \varnothing$；

第二，令x、y是E的一对不可比较的元素，那么，或者存在$x' \geq x$，使$[x', \rightarrow [\cap [y, \rightarrow [= \varnothing$，或者存在$y' \geq y$，使$[x, \rightarrow [\cap [y', \rightarrow [= \varnothing$.

（*3*）求证：$R_0(E)$为右方无向集，并且$R_0(E)$到$R_0(R_0(E))$的规范映射为双射.

证明：

（1）即补充定理210.

（2）即补充定理212.

（3）对任意$X \in R_0(E)$、$Y \in R_0(E)$，如果$Y \subset X$或者Y、X不可比较，根据补充定理209（3），存在$Z \in R_0(E)$且$Z \subset X$、$Z \cap Y = \varnothing$；根据补充定理212，$R_0(E)$为右方无向集，并且$R_0(E)$到$R_0(R_0(E))$的规范映射为单射．对任意$U \in R_0(R_0(E))$，设其最小元为X，则对任意$Y \subset X$，存在$X \cap Y \subset U$，根据补充定理207（2），$X \in U$，故$[X, \rightarrow [\subset U$，因此$r(X) = U$，得证.

习题 100.

（*1*）求证：没有极大元的右方无向集，是右方分叉集.

（*2*） E为实数区间$[k2-n,(k+1)2-n]$（n为自然数，k为整数且$k \in [0, 2^n-1]$）的集合，按包含关系的相反关系排列，求证：E为右方分叉集，并且没有极大元.

（*3*）给出一个右方分叉集，其不存在右方无向的共尾子集.

（*4*）给出偏序集，它不是右方分叉集，但存在右方分叉的共尾子集.

证明：

（1）即补充定理213（3）.

（2）根据补充定理212、补充定理213（3）可证.

（3）设E为习题100（2）所称的集合，F为不包含可数共尾子集的全序集，根据定义，$E \times F$为右方分叉集．同时，$E \times F$的任何共尾子集，都有元素(x, a)，(x, b)，故该共尾子集不是右方无向集.

（4）设E为习题100（2）所称的集合，F为非空全序集，则偏序集族$(F)_{i \in E}$的序数和，不是右方分叉集，但令其序数和为A，$y \in F$，则$\{x | x \in A$与$pr_1 x = y\}$为右方分叉的共尾子集.

注：习题100（2）、（3）、（4）涉及尚未介绍的“有理数”知识.

3.2 良序集（Ensembles bien ordonnés）

元数学定义 62. 良序关系（*relation de bon ordre*），良序图（*graphe d'un bon ordre*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令R为关于x、y的偏序关系，并且对任意满足$E \neq \varnothing$并且$x \in E \Rightarrow (x|y)R$的集合$E$，$E$均为按偏序关系$R$与$x \in E$与$y \in E$排序的偏序集，并且有最小元，则称$R$为$x$、$y$之间的良序关系，在没有歧义的情况下简称为$R$为良序关系．良序关系生成的图称为良序图.

定义 126. 良序（*bien ordonné*）

F为在E上的偏序，如果$y \in F\langle x\rangle$为x、y之间的良序关系，则称F为在E上的良序.

定义 127. 良序集（*ensemble bien ordonné*），良序子集（*partie bien ordonné*）

任何非空子集都有最小元的偏序集，称为良序集. 偏序集的偏序子集如果是良序集，则称为良序子集.

补充证明规则 84.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果E是按照偏序关系R排序的良序集，则R是良序关系；如果E是根据偏序F排序的良序集，则F是良序.

证明：由于E的任何非空子集E'，都满足$x \in E' \Rightarrow (x|y)R$，且$E'$为按偏序关系$R$与$x \in E$与$y \in E$排序的偏序集，故$R$为偏序关系. 进而，如果$E$是良序集，则$y \in F\langle x\rangle$为良序关系，$F$为良序.

补充证明规则 85.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，如果R是关于x、y的良序关系，$E \neq \varnothing$并且$x \in E \Rightarrow (x|y)R$，则按$R$与$x \in E$与$y \in E$排序的$E$，为良序集.

证明：根据定义可证.

补充定理 215.

良序集是全序集.

证明：根据定义可证.

补充定理 216.

良序集的子集如果有上界，则有最小上界.

证明：令良序集为E，其子集为A，A的上界集为B，则B的最小元为其最小上界.

补充定理 217.

（*1*）良序集的偏序子集也是良序集.

（*2*）良序集是离散的.

（*3*）当且仅当指标集和各偏序集均为良序集时，偏序集族的序数和为良序集.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）设E为良序集，F为其偏序子集，且有一对可比较的不同元素，则F有最小元a，$F-\{a\}$有最小元b，则区间$]a, b[=\varnothing$，得证.

（3）根据定义可证.

补充定理 218.

$\varnothing$、x按其唯一的偏序排序得到的偏序集，都是良序集.

证明：根据定义可证.

定义 128. 片段（*segement*）

E为偏序集，$S \subset E$，如果$x \in S$与$y \in E$与$y \leq x \Rightarrow y \in S$，则称$S$为$E$的片段.

补充定理 219.

（*1*）偏序集是其自身的片段.

（*2*）偏序集的任何两个片段的交集和并集，都是其片段.

证明：根据定义可证.

补充定理 220.

令E为偏序集，S为E的片段，则E的偏序子集S的片段，也是E的片段.

证明：根据定义可证.

定理 72.

E为良序集，S为E的片段，$S \neq E$，则$(\exists a)(a \in E$与$S =]\leftarrow, a[)$.

证明：由于$E - S$非空，故令a为$E - S$的最小元，由于$a \notin S$，又因为$x \in S$与$a \leq x \Rightarrow a \in S$，故$x \geq a \Rightarrow x \notin S$，又因为$x \in E - S \Rightarrow x \geq a$，因此$E - S = [a, \rightarrow [$，得证.

补充定理 221. 偏序集的每个元素均确定一个以该元素为终点的片段

E为偏序集，$a \in E$，则$]\leftarrow, a[$为E的片段.

证明：假设$x \in]\leftarrow, a[$、$y \in E$、$y \leq x$，则$x \leq a$，故$y \leq a$，得证.

定义 129. 以元素为终点的片段（*segment d'extrémité un élément*）

E为良序集，$a \in E$，则$]\leftarrow, a[$称为以a为终点的片段，记作S_a.

补充定理 222.

E为全序集，$A = \bigcup\limits_{x \in E} S_x$，如果$E$没有最大元，则$A = E$，如果$E$有最大元$b$，则$A = E - \{b\}$.

证明：对任意$c \in E$，如果c不是E的最大元，则存在d，使$c < d$，因此$c \in S_d$，故$c \in A$；反过来，对任意$c \in A$，存在S_d，使$c < d$，故$c \in E$，并且c不是E的最大元，得证.

补充定理 223.

E为良序集，$a \in E$，$b \in E$，$S_a = S_b$，则$a = b$.

证明：如果$a < b$，则$a \notin S_a$，但$a \in S_b$，矛盾．同理$a > b$也矛盾，得证．

补充定理 224.

映射f为偏序集E到偏序集F的同构，则：

（1）如果E为良序集，则F为良序集．

（2）如果S为E的片段，则$f\langle S\rangle$为F的片段．

证明：（1）对于F的任何非空子集B，令$A = f^{-1}\langle B\rangle$，设$A$的最小元为$a$，由于对任意$x \in A$，$a \leq x$，故对任意$y \in B$，令$z = f^{-1}(y)$，则$f(a) \leq f(z)$，即$f(a) \leq y$，因此$f(a)$为$B$的最小元．得证．

（2）如果$S = E$，则$f\langle S\rangle = F$，得证；

如果$S \neq E$，根据定理72，令S为$]\leftarrow, a[$，$a \in E$，则$f(x) < f(a) \Leftrightarrow x < a$，故$f\langle S\rangle$为$]\leftarrow, f(a)[$，得证．

补充定理 225.

（1）E为良序集，如果其片段S_a同构于S_b，则$a = b$．

（2）E为良序集，如果E同构于其片段S，则$E = S$．

证明：

（1）令f为S_a到S_b的同构，令$X = \{x|x \in S_a$与$x \neq f(x)\}$，如果$X \neq \varnothing$，则X有最小元y，因此$f(y) \neq y$．令$z = f^{-1}(y)$，则$z \neq y$，故$f(z) \neq z$，因此$z > y$，故$f(y) < y$，故$f(f(y)) < f(y)$，因此$f(y) \in X$，矛盾，因此$X = \varnothing$，故对任意$x \in S_a$，$x = f(x)$，所以$S_a = S_b$，根据补充定理223，$a = b$．

（2）类似补充定理225（1）可证．

定理 73.

E为良序集：

（1）偏序集$F = \{X|(X$为E的片段$)$与$X \neq E\}$，并按包含关系排序，则映射$x \to S_x$为E到F的同构．

（2）$E^* = \{S|S$为E的片段$\}$，则E^*为按包含关系排序的良序集．

证明：

（1）$x < y \Rightarrow S_x \subset S_y$，因此$S_x \neq S_y$，根据定理69，映射$x \to S_x$为$E$到$F$的同构．

（2）$E^* = F \cup \{E\}$，根据补充定理224（1），F的任意非空子集G均有最小元，进而，$G \cup \{E\}$也有同样的最小元，同时，$\{E\}$也有最小元E，得证．

定理 74.

令$(X_a)_{a\in A}$为偏序集族，集合$\bigcup\limits_{a\in A}\{X_a\}\}$按包含关系排序，且为右方有向集．对任意$a \in A$、$b \in A$，如果$X_a \subset X_b$，则在$X_a$上的偏序，都是在$X_b$上的偏序在$X_a$上导出的偏序．令$E =$

$\bigcup_{a \in A} X_a$，则存在唯一的在E上的偏序，令E为按该偏序排序的偏序集，对任意$a \in A$， X_a都是偏序集E的偏序子集.

证明：令G_a为在X_a上的偏序的图，如果G为在E上的偏序，且对任意$a \in A$时，该偏序在X_a上导出的偏序，等于X_a上的偏序，则对任意$a \in A$，$G_a \subset G$，因此$\bigcup_{a \in A} G_a \subset G$；同时，由于该集族为右方有向集，故对任意$x \in E$、$y \in E$，存在$x \in X_a$，$y \in X_a$，因此$(x, y) \in G \Rightarrow (x, y) \in G_a$，故$G = \bigcup_{a \in A} G_a$，唯一性成立.

设$G = \bigcup_{a \in A} G_a$，由于对任意$a \in A$、$b \in A$，$X_a \subset X_b \Rightarrow G_b \cap (X_a \times X_a) = G_a$，因此当$x \in G \cap (X_a \times X_a)$时，存在$c \in A$，使$x \in G_c$且$x \in X_a \times X_a$，因此$x \in G_c \cap (X_a \times X_a)$，故$x \in G_a$．反过来，当$x \in G_a$时，$x \in G$、$x \in X_a \times X_a$．故$a \in A$时，$G \cap (X_a \times X_a) = G_a$.

同时，对E的任意三个元素x、y、z，均存在$a \in A$，使$\{x, y, z\} \subset X_a$，故G为偏序图.存在性成立.

定理 75.

令$(X_i)_{i \in I}$为良序集族，对任意$i \in I$、$k \in I$，X_i和X_k其中都有一个是另一个的片段，令$E = \bigcup_{i \in I} X_i$，则存在唯一的在$E$上的偏序满足下列条件：

第一，E为良序集；第二，对任意$i \in I$， X_i都是E的偏序子集.

同时，对任意$i \in I$，X_i的片段都是E的片段，并且，对任意$x \in X_i$，X_i的以x为终点的片段，是E的以x为终点的片段．反过来，E的片段或者是E，或者存在$i \in I$，使之为X_i的片段.

证明：根据定理74，存在唯一E上的偏序.

对E的任意非空子集H，存在$i \in I$，使$H \cap X_i \neq \varnothing$，设$a$是$H \cap X_i$的最小元，对任意$x \in H$，设$x \in X_k$，若$X_k \subset X_i$，则$a \leq x$，若$X_i \subset X_k$，且$x < a$，则$x \in]\leftarrow, a[$，根据补充定理220、定理72，该区间是$X_i$的片段，故$x \in H \cap X_i$，矛盾，因此$a$是$H$的最小元，故$E$为按该偏序排序的良序集.

如果$x \in X_i$，$y \in E$，则存在$k \in I$，使$x \in X_k$，$y \in X_k$．同时，根据补充定理220、定理72，对任意$x \in X_i$，X_i的以x为终点的片段，是E的区间$]\leftarrow, x[$，因此是E的以x为终点的片段.

反过来，E的片段如果不是E，则存在$x \in E$，该片段为$]\leftarrow, x[$，由于存在X_i使$x \in X_i$，故该区间也是X_i的片段.

定理 76.

E是良序集，F的元素均为E的片段，并且，任何F的元素族的并集也是F的元素，同时，如果$S_x \in F$，则$S_x \cup \{x\} \in F$，则F是E的片段集合.

证明：设有E的片段不属于F，根据定理73（2），不属于F的E的片段的集合，有最小元S．如果S没有最大元，根据补充定理222，S是所有片段的并集，因此$S \in F$，矛盾；如果S有最大元a，则$S-\{a\} \in F$，则$S \in F$，同样矛盾．

证明规则 59. 超限归纳法

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，x不是常数，E为按良序关系$x \leq y$排序的良序集，如果$(x \in E$与$(\forall y)(y \in E$与$y < x \Rightarrow (y|x)R)) \Rightarrow R$是$M$的定理，则$x \in E \Rightarrow R$是$M$的定理．

证明：令F为E的满足$x \in S \Rightarrow R$的片段S的集合，因此F任何元素的并集也是F的元素，同时，如果$S_x \in F$，则$S_x \cup \{x\} \in F$，根据定理76可证．

证明规则 60. 超限归纳法定义的映射的存在性和唯一性

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，E为良序集，u为字母，T为项，则存在唯一的项U和E到U的满射f，使$(f^{(x)}|u)T = f(x)$，其中$f^{(x)}$为任意一个S_x到$f\langle S_x \rangle$的满射，并且在S_x上和f重合．

证明：设f和U、f'和U'均满足条件，令F为使f和f'在S上重合的E的片段S的集合，因此，F任意若干个元素的并集都是F的元素，并且对于F的元素S_x，$f^{(x)} = f'^{(x)}$，$f(x) = (f^{(x)}|u)T$，$f'(x) = (f'^{(x)}|u)T$，因此，$S_x \cup \{x\} \in F$，根据定理76，F是E的片段集合，故$E \in F$．由于$U = f(E)$，$U' = f'(E)$，因此f和f'在E上重合，且$U = U'$．故唯一性成立．

令G为存在满足条件的项和满射的E的片段的集合，对任意$S \in G$，根据唯一性，存在唯一的满足条件的项和满射，分别记作f_S和U_S．则对任意$S' \in G$、$S'' \in G$，设$S' \subset S''$，$f_{S'}$和$f_{S''}$在S'上重合．根据定理32（2），G的元素的并集也属于G．同时，令$S_x \in G$，由于$f_{S_x}(x) = ({f_{S_x}}^{(x)}|u)T$，根据定理33，$S_x \cup \{x\} \in F$，根据定理76可证存在性．

定理 77.

G为$\mathcal{P}(E)$的子集，p为G到E的映射，对任意$X \in G$，$p(X) \notin X$，则存在E的子集M和在M上的良序F，满足下列条件：

第一，令$x \leq y$表示$y \in F\langle x \rangle$，S_x表示在M上的区间$] \leftarrow, x[$，$(\forall x)(x \in M \Rightarrow S_x \in G$与$p(S_x) = x)$；

第二，$M \notin G$．

证明：

令K为满足下列条件的图H的集合：

第一，$H \subset E \times E$；

第二，令$U = pr_1 H$，H为在U上的良序图；

第三，偏序关系$(x, y) \in H$记作$x \leq y$，令S_x为U的片段，则$(\forall x)(x \in U \Rightarrow S_x \in G$与$p(S_x) = x)$．

设H、H'都是K的元素，相应的第一射影为U、U'，设$V=\{x|x\in U\cap U'$与$(U$的以x为终点的片段$)=(U'$的以x为终点的片段$)\}$，对任意$x\in V$、$y\in V$，若在U上$x\le y$，则在U'上$x\le y$，故(H,U,U)和(H',U',U')在V上导出的偏序相同．如果$x\in V$，$y\le x$，$y\in U$，则$y\in U'$，同时，在U上$z\le y$等价于在U'上$z\le y$，故$y\in V$，因此V是U的片段，同理，V也是U'的片段．

如果$V\ne U$且$V\ne U'$，设x为$U-V$的最小元，x'为$U'-V$的最小元，则在U上$V=S_x$，在U'上$V=S_{x'}$，且$p(S_x)=x$，$p(S_{x'})=x'$，故$x=x'$，根据V的定义，$x\in V$，矛盾．

因此，$V=U$或$V=U'$．不妨设$V=U$，故$U\subset U'$，且U是U'的片段．

令$M=\bigcup\limits_{H\subset K}H$，根据定理75，存在唯一的偏序，使$M$为按该偏序排序的良序集，且任意$K$的元素$H$，都是$M$的偏序子集．并且，对任意$x\in M$，存在$H\in K$，使$x\in H$，则$(\forall x)(x\in U\Rightarrow S_x\in H$与$p(S_x)=x)$；由于在$H$上的$S_x$和在$M$上的$S_x$相等，故$(\forall x)(x\in M\Rightarrow S_x\in G$与$p(S_x)=x)$．

如果$M\in G$，令$a=p(M)$，则$a\notin M$，把a作为最大元加入M，则M'也是良序集，由于在M'上，$M=S_a$，因此对于上述在偏序集M'上延拓的偏序，相应的偏序图也是K的元素，矛盾．

注：本定理的证明利用了并集，即：对于所有符合条件一的子集，证明这些子集彼此具有包含关系；然后，取所有子集的并集，证明其仍然符合条件一，并符合条件二．

定理 78. 策梅洛定理

在任何集合上均存在良序．

证明：令$G=\mathcal{P}(E)-\{E\}$，对于$X\in G$，令$p(X)=\tau_x(x\in E-X)$，根据定理77，存在子集M以及在M上的良序使$M\notin G$，故$M=E$，得证．

定义 130. 归纳集（*ensemble inductif*）

如果偏序集的任何全序子集在该偏序集上都有上界，则称其为归纳集．

补充定理 226.

（1）$F\subset\mathcal{P}(E)$，并且$(\forall G)(G\subset F$与G为按包含关系排序的全序集$\Rightarrow\bigcup\limits_{X\in G}X\in F)$，则$F$是归纳集．

（2）“x为A的子集到B的映射”，为x上的集合化公式．并且，令$F=\{x|x$为A的子集到B的映射$\}$，R为公式$(v$为u在pr_1v上的延拓$)$，则R为关于u、v的偏序关系，并且按R与$u\in F$与$v\in F$排序的偏序集F，为归纳集．

证明：

（1）根据定义可证．

（2）由于“x为A的子集到B的映射$\Rightarrow x\in A\times B\times A\times B$”，故“$x$为$A$的子集到$B$的映射”为$x$上的集合化公式．根据定义可证$R$为偏序关系．根据定理32（2），$F$的任何全序

子集，存在唯一映射，是各元素在所有元素的定义域的并集上的延拓，该映射即为上界，故F为归纳集.

定理 79.

如果偏序集E的任何良序子集在E上都有上界，则E有极大元.

证明：令G为E的有严格上界的子集的集合，p为G到E的映射，其中$p(x) = \tau_v(v$为x的严格上界)，根据定理77，存在E的子集M和在M上的良序F，使$(\forall x)(x \in M \Rightarrow S_x \in G$与$p(S_x) = x)$，且$M$没有严格上界.

在M上，$y \in F\langle X\rangle$与$x \neq y \Leftrightarrow x \in S_y$，同时，$p(S_y) = y$，因此，在$E$上，$y$为$S_y$的严格上界，进而，在$E$上，$x < y$.

又因为M是全序集，故良序F是在E上的偏序在M上的导出的偏序.

由于M有上界，且M没有严格上界，因此该上界是E的极大元.

定理 80. 佐恩引理

归纳集有极大元.

证明：根据定理79可证.

定理 81.

E为归纳集，$a \in E$，则存在E的极大元m，使$m \geq a$.

证明：令$F = \{x|x \in E$与$x \geq a\}$，则F为归纳集．设m为F的极大元，则m同时是E的极大元，得证.

定理 82.

F的元素都是E的子集，并且对F的任意子集G，只要G是按包含关系排序的全序集，G的所有元素的并集（或交集）都是F的元素，则F有极大元（或极小元）.

证明：对于并集的情况，根据补充定理226（1），F为归纳集，根据定理80可证．将F的所有全序子集变为按相反关系排序的全序集，则可证得交集的结论.

补充定理 227.

$K = \{F|F$为在E上的偏序$\}$，并且按$(F \in K$与$F' \in K$与F是比F'更细的偏序$)$排序，则K的极小元是在E上的全序.

证明：令H为K的极小元，其图为G，设a、b是不可比较的，令$A = \{z|z \in E$与$z \leq a\}$，$B = \{z|z \in E$与$b \leq z\}$，因此$A \cap B = \varnothing$．令$G' = G \cup (A \times B)$，H'为偏序(G', E, E)．对任意$(x, y) \in G'$，$(y, z) \in G'$：如果$(x, y) \in G$，$(y, z) \in G$，则$(x, z) \in G$；如果$(x, y) \in A \times B$，$(y, z) \in G$，由于$(b, y) \in G$，故$(b, z) \in G$，因此$(x, z) \in A \times B$，故$(x, z) \in G'$；如果$(x, y) \in G$，$(y, z) \in A \times B$，同理可证$(x, z) \in G'$．故对G'，传递性成立，根据定义可以证明其他两个条件也成立，因此H'是比H更细的偏序，矛盾.

补充定理 228.

F为在E上的偏序，则F的图是所有不等于F且比F更细的全序的图的交集.

证明：令F的图为G，对任意不等于F且比F更细的全序的图的交集的元素(a,b)，如果$(a,b)\notin G$，则$a\neq b$．按照补充定理227的证明过程构造F'，使$(b,a)\in F'$，考虑$M=\{H|H\in K与F'\subset H\}$，对于按相反关系排序的偏序集，根据定理80，其有极大元Q，其同时为K的极小元．根据补充定理227，Q为全序．$(b,a)\in Q$，因此$(a,b)\in Q$，矛盾.

补充定理 229.

任何偏序集同构于全序集族的乘积的一个子集.

证明：对于按偏序F排序的偏序集E，令F的图为G，$M=$
$\{H|H\neq F与(H为比F更细的全序)\}$，根据补充定理228，$G=\bigcap\limits_{H\in M}(H的图)$．根据定义，映射$x\to(x)_{i\in M}(x\in E)$为$E$到$\prod\limits_{H\in M}E$的同构.

补充定理 230.

对于任何偏序集，存在在该集合上的全序图，其偏序图是该全序图的子集.

证明：设E为偏序集，其偏序图为G，$H=\{K|G\subset K与K为在E上的偏序图\}$，根据定理82，$H$有极大元$M$，如存在$x\in E$、$y\in E$且$(x,y)\notin M$，则令$M'=M\cup(x,y)\cup\{(a,b)|b=y与a\leq x\}\cup\{(a,b)|a=x与y\leq b\}$，则$M'\subset H$，矛盾．故$M$为全序图.

定理 83.

E、F为良序集，f、g为E到F的两个单增映射，并且，$f(E)$是F的片段，g为严格单增映射，则对任意$x\in E$，$f(x)\leq g(x)$.

证明：如果$\{x|x\in E与f(x)>g(x)\}\neq\varnothing$，设其最小元为$a$，令$x<a$，则$f(x)\leq g(x)$，$g(a)<f(a)$，$g(x)<g(a)$．由于$f(E)$是$F$的片段，故存在$z$，使$g(a)=f(z)$，则$f(z)<f(a)$，因此$z<a$，则$f(z)<f(a)$，$g(z)<g(a)$，故$f(z)<g(a)$，因此$f(z)<f(z)$，矛盾.

定理 84.

E、F为良序集，则下列两个公式至少有一个为真：

第一，存在唯一的E到F的片段的同构；

第二，存在唯一的F到E的片段的同构.

证明：令G为E的片段到F的片段的同构的集合，并为按“v是u的延拓”排序的偏序集．设G的全序子集为H，由于H各元素的定义域都是E的片段，故其并集S也是E的片段，根据定理32，存在以S为定义域的映射，是H各元素的延拓，故为H的最小上界，设其为v，则$v(S)$为H各元素值域的并集，因此也是F的片段．由于H为全序子集，因此对于S
的任意两个元素$x<y$，存在$u\in H$，使x、y均为u的定义域的元素，故$u(x)<u(y)$，因此$v(x)<v(y)$，故v是S到$v(S)$的同构，因此$v\in G$，故G为归纳集，因此G有极大元.

设G的极大元为u，定义域为S，如果$S \neq E$且$u(S) \neq F$，则存在$a \in E$、$b \in F$，使$S =]\leftarrow, a[$，$u(S) =]\leftarrow, b[$，u为S到$u(S)$的延拓，将u延拓为w，其定义域为$]\leftarrow, a]$，值域为$]\leftarrow, b]$，其中$w(a) = b$，则$w \in G$，与u是G的极大元矛盾.

故S=E或$u(S)$=F，存在性得证.

根据定理83可证唯一性.

定理 85.

E为良序集，E到E的片段的唯一同构，是E到E的恒等映射.

证明：设存在E到其片段S的同构，根据补充定理225（2），$S = E$，根据定理84可证.

定理 86.

E、F为良序集，如果存在E到F的片段S的同构f，以及F到E的片段T的同构g，则S=E，T=F并且f和g互为反函数.

证明：根据补充定理224（2），$g(T)$为E的片段，故$g \circ f$为E到E的片段的同构，根据定理85，$S = E$，故$g \circ f = Id_E$，同理$f \circ g = Id_F$，$T = F$，得证.

定理 87.

良序集的任何子集同构于该良序集的一个片段.

证明：设A为良序集的子集，对于该良序集的片段S_a，如果A不同构于E的任何一个片段，则存在映射g，为E到A的某个片段S_a的同构，故$g(a) \in S_a$，且g为严格单增映射，令$f = Id_E$，根据定理83，$a \leq g(a)$，矛盾.

定义 131. 部分良序集（*ensemble partiellement bien ordonné*）

如果E的任意全序子集都是良序集，则称E为部分良序集.

补充定理 231.

（1）对任意偏序集E，存在$F \subset E$，F为部分良序集，并且是E的共尾子集.

（2）对任意全序集E，存在$F \subset E$，F为良序集，并且是E的共尾子集.

证明：

（1）令$H = \{X | X \subset E$与X为部分良序集$\}$，R为公式$X \in H$与$Y \in H$与$X \subset Y$与$(\forall x)(\forall y)(x \in X$与$y \in Y - X \Rightarrow$ 非$(y \leq x))$，则R为在$\mathcal{P}(E)$上的偏序关系.

对H的任意全序子集K，令$Z = \bigcup_{X \in K} X$，对任意$X \in K$，$x \in X$，$y \in Z - X$，则存在$Y \in K$使$y \in Y$，因此$X \leq Y$，故非$(y \leq x)$，$X \leq Z$，因此Z为K的上界，故H为归纳集，根据定理80，H有极大元M. 如果存在$y \in E$，对任意$x \in M$，均有非$(y \leq x)$，令$M' = M + \{x\}$，则M'为部分良序集，且$M < M'$，矛盾，故M为E的共尾子集.

（2）根据补充定理231（1）可证.

定义 132. 关于函数的链（*chaîne pour une fonction*）

E为偏序集，f为E到E的映射，并且对任意$x\in E$，$f(x)\geq x$：令H为满足下列条件的E的子集M的集合：

第一，$x\in M\Rightarrow f(x)\in M$；

第二，如果M的非空子集在E上有最小上界x，则x是M的元素．

令$K=\{X|X\in H$与$a\in X\}$，则称$\bigcap\limits_{X\in K}X$为a关于函数f的链，记作C_a，在没有歧义的情况下可以简称为a的链．

补充定理 232.

E为偏序集，f为E到E的映射，并且对任意$x\in E$，$f(x)\geq x$．令H为满足下列条件的E的子集M的集合：

第一，$x\in M\Rightarrow f(x)\in M$；

第二，如果M的非空子集在E上有最小上界x，则x是M的元素．

则：

（*1*）对任意$a\in E$，$C_a\in H$；

（*2*）E的偏序子集C_a，为良序集；

（*3*）如果C_a在E上有最小上界b，则$b\in C_a$并且$f(b)=b$．

证明：

（1）由于$E\in H$，故$H\neq\varnothing$，根据定义可证$C_a\in H$．

（2）令$K=\{X|X\subset E$与$a\in X$与$(X$在E上有最小上界$m)$与$(m\notin X$或$f(m)>m)\}\cup\{\varnothing\}$，并定义$K$到$E$的映射$p$，其中：

$p(\varnothing)=a$；

如果$sup_EX\notin X$，则$p(X)=sup_EX$；

如果$sup_EX\in X$，则$p(X)=f(sup_EX)$．

根据定理77，存在E的子集U及在U上的良序F，使U满足：

第一，在U上，$(\forall x)(x\in U\Rightarrow S_x\in K$与$p(S_x)=x)$；

第二，$U\notin K$．

在按F排序的U上，如果$y<x$，则$y\in S_x$，令$c=sup_ES_x$，则在E上$y\leq c$，又因为$c\leq p(S_x)$，故$c\leq x$，因此在E上$y\leq x$，由于$x\neq y$，因此$y<x$，故良序F是在E上的偏序在U上的导出的偏序．

由于$U\not inK$，故$U\neq\varnothing$；同时，令$x\in U$，如果在U上，$S_x=\varnothing$，则$x=a$；如果$S_x\neq\varnothing$，则$a\in S_x$．综上有，$a\in U$．

在U上，对任意$y\in U$：

如果y为U的最大元，由于$a\in S_y$，故$a\in U$，而$U\notin K$，因此$f(y)=y$，故$f(y)\in U$；

如果y不是U的最大元，令z为$\{x|x>y$与$x\in U\}$的最小元，则$y=sup_E(S_z)$，故$p(S_z)=f(y)$，因此$z=f(y)$，即$f(y)\in U$．

综上，U满足第一个条件.

对任意U的子集V，设V在E上有最小上界m：

如果$\{y|y \geq m$与$y \in U\} = \varnothing$，则$m = sup\ U$，故$m \in U$；

如果$\{y|y \geq m$与$y \in U\} \neq \varnothing$，设其最小元为$z$，如果$z \in V$，则$z = m$，且$z \in U$；如果$z \notin V$，则$V \subset S_z$，令$t$为$S_z$在$E$上的最小上界，则$m \leq t$，$t \leq z$，如果$t \in S_z$，则$t \in \{y|y \geq m$与$y \in U\}$，则$z = t$，与$t \in S_z$矛盾，故$t \notin S_z$，$p(S_z) = t$，因此$z = t$，如果存在$q \in S_z$，使$m < q$，由于$q < z$，与$z$为$\{y|y \geq m$与$y \in U\}$的最小元矛盾，因此$m$为$S_z$在$E$上的上界，故$t \leq m$，因此$t = m$，所以$m = z$，故$U$满足第二个条件.

综上，$U \in H$，故$C_a \subset U$，因此C_a为良序集.

（3）根据定义可证.

补充定理 233. 布尔巴基-维特定理

E为归纳集，f为E到E的映射，并且对任意$x \in E$，$f(x) \geq x$，则存在$b \in E$，使$f(b) = b$.

证明：根据补充定理232可证.

补充定理 234. 字典式排序为偏序关系

令$(E_i)_{i \in I}$为良序集族，I为良序集，$E = \prod\limits_{i \in I} E_i$，对于$x \in E$、$y \in E$，且$x \neq y$，令$j$为集合$\{i|i \in I$与$pr_i x \neq pr_i y\}$的最小元，则公式$(x \in E$与$y \in E$与$(x \neq y \Rightarrow pr_j x < pr_j y))$为在$E$上的偏序关系.

证明：

令R为$x \in E$与$y \in E$与$pr_j x < pr_j y$，则$(y|x)R \Leftrightarrow x \in E$，$R \Rightarrow (y|x)R$与$(x|y)R$，$R$与$(y|z)(x|y)(z|x)R \Rightarrow x = y$. 对于$R$与$(y|x)(z|y)R$，如果$x = y$或$y = z$，显然$(z|y)R$为真，如果$x \neq y$、$y \neq z$，设满足$pr_i x \neq pr_i y$的最小$i$为$j$，满足$pr_i y \neq pr_i z$的最小$i$为$k$，若$j < k$，则$pr_j x \neq pr_j z$，且$pr_j x < pr_j y$，$pr_i y = pr_i z$，因此$pr_j x < pr_j z$；若$j > k$，同理可得$pr_k x < pr_k z$；若$j = k$，则$pr_j x < pr_j y$，$pr_j y < pr_j z$，因此$pr_j x < pr_j z$. 综上，得证.

定义 133. 字典式偏序关系（*relation d'ordre lexicographique*），字典式偏序（*ordre lexicographique*），字典式乘积（*produit lexicographique*）

令$(E_i)_{i \in I}$为良序集族，I为良序集，$E = \prod\limits_{i \in I} E_i$，对于$x \in E$、$y \in E$，且$x \neq y$，令$j$为集合$\{i|i \in I$与$pr_i x \neq pr_i y\}$的最小元，则公式$(x \in E$与$y \in E$与$(x \neq y \Rightarrow pr_j x < pr_j y))$称为在$E$上的字典式偏序关系，令该公式生成的图为$G$，则$(G, E, E)$称为在$E$上的字典式偏序；按该偏序排序的偏序集$E$，称为偏序集族$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积.

补充定理 235.

I为良序集，如果对任意$i \in I$，E_i为全序集，则$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积是全序集.

证明：根据定义可证.

补充定理 236. 偏序的同构为等价关系

令R为公式(F为在E上的偏序)与(F'为在E'上的偏序)与(按F排序的E同构于在F'上排序的E')，则R为关于F、F'的等价关系.

证明：根据定义可证.

定义 134. 偏序类（*type d'ordre*）

令R为公式(F为在E上的偏序)与(F'为在E'上的偏序)与(按F排序的E同构于在F'上排序的E')，则称$\tau_{F'}(R)$为F的偏序类，记作$Ord(F)$，在没有歧义的情况下也可以记作$Ord(E)$.

补充定理 237.

当且仅当两个偏序的偏序类相等时，这两个偏序集同构.

证明：根据定义可证.

补充定理 238. 偏序类之间的预序关系

令S为公式(X为偏序类)与(Y为偏序类)与$(\exists A)(\exists B)$((A为按偏序类为X的偏序排序的偏序集)与(B为按偏序类为Y的偏序排序的偏序集)与$(\exists Z)$($Z \subset Y$与X同构于Z)). 则S为关于X、Y的预序关系.

证明：根据定义可证.

记号定义 20. 偏序类之间的不等式（*inégalité entre types d'ordre*）

X、Y为偏序类，则预序关系(X为偏序类)与(Y为偏序类)与$(\exists A)(\exists B)$((A为按偏序类为X的偏序排序的偏序集)与(B为按偏序类为Y的偏序排序的偏序集)与$(\exists Z)$($Z \subset Y$与X同构于Z))记作$X \prec Y$或$Y \succ X$.

定义 135. 偏序类族的序数和（*somme ordinale de la famille des types d'ordre*）

令I为偏序集，$(l_i)_{i \in I}$为偏序类族，对任意$i \in I$，令$E_i = l_i$的定义域. 令E为偏序集族$(E_i)_{i \in I}$的序数和，则称$Ord(E)$为偏序类族$(l_i)_{i \in I}$的序数和，记作$\sum\limits_{i \in I} l_i$.

定义 136. 两个偏序类的序数和（*somme ordinale de deux types d'ordre*）

令$a \neq b$，$I = \{a, b\}$，按$\{(a,a),(a,b),(b,b)\}$排序，l、m为偏序类，$E_a = l$的定义域，$E_b = m$的定义域. 令E为偏序集族$(E_i)_{i \in I}$的序数和，则称$Ord(E)$为偏序类l和m的序数和，记作$l + m$.

补充定理 239.

I为偏序集，$(E_i)_{i \in I}$为偏序集族，F为其序数和，则$\sum\limits_{i \in I} Ord(E_i) = Ord(F)$.

证明：根据补充定理168可证.

补充定理 240. 序数和的结合律

$(J_k)_{k\in K}$为偏序集族，其和为I，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，则$\sum\limits_{k\in K}(\sum\limits_{i\in J_k\times\{k\}} l_i)=\sum\limits_{i\in I} l_i$.

证明：根据补充定理169可证.

定义 137. 偏序类族的序数乘积（*produit ordinale de la famille des types d'ordre*）

令I为良序集，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，对任意$i\in I$，令$E_i=l_i$的定义域. 令E为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的字典式乘积，则称$Ord(E)$为偏序类族$(l_i)_{i\in I}$的序数乘积，记作$\underset{i\in I}{\mathsf{P}} l_i$.

定义 138. 两个偏序类的序数乘积（*produit ordinale de deux types d'ordre*）

令$a\neq b$，$I=\{a,b\}$，按$\{(a,a),(a,b),(b,b)\}$排序，l、m为偏序类，$E_a=l$的定义域，$E_b=m$的定义域. 令E为偏序集族$(E_i)_{i\in I}$的序数乘积，则称$Ord(E)$为偏序类l和m的序数乘积，记作ml.

补充定理 241.

令I为良序集，$(E_i)_{i\in I}$、$(F_i)_{i\in I}$为偏序集族，且对任意$i\in I$，E_i同构于F_i，则$(E_i)_{i\in I}$的字典式乘积同构于$(F_i)_{i\in I}$的字典式乘积.

证明：令f_i为E_i到F_i的同构，则$x\to\bigcap\limits_{i\in I}\{(i,f_i(pr_i x))\}$是$(E_i)_{i\in I}$的字典式乘积到$(F_i)_{i\in I}$的字典式乘积的同构.

补充定理 242.

I为良序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，F为其字典式乘积，则$\underset{i\in I}{\mathsf{P}} Ord(E_i)=Ord(F)$.

证明：根据补充定理241可证.

补充定理 243. 序数乘积的结合律

$(J_k)_{k\in K}$为良序集族，其序数和为良序集I，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，则$\underset{k\in K}{\mathsf{P}}(\underset{i\in J_k\{k\}}{\mathsf{P}} l_i)=\underset{i\in I}{\mathsf{P}} l_i$.

证明：根据定理64可证.

补充定理 244.

I为良序集，$(m)_{i\in I}$为偏序类族，$Ord(I)=l$，则$\sum\limits_{i\in I} m=ml$.

证明：令$a\neq b$，$J=a,b$，$E_a=I$，$E_b=m$的定义域，偏序集族$(E_i)_{i\in J}$的序数乘积为E. $(E_b)i\in I$的序数为F，则$x\to\{(a,pr_2x),(b,pr_1x)\}$是E到F的同构，得证.

补充定理 245. 两个序数的和与乘积的结合律、分配律

l、m、n为偏序类，则：

（1）$(l+m)+n=l+(m+n)$;

（2）$(lm)n=l(mn)$;

（3）$l(m+n)=lm+ln$.

证明：根据定义可证.

补充定理 246.

（*1*）令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$、$(m_i)_{i\in I}$为两个偏序类族，对任意$i\in I$，$l_i\prec m_i$，则$\sum\limits_{i\in I} l_i \prec \sum\limits_{i\in I} m_i$，并且，如果$I$是良序集，则$\mathop{\mathsf{P}}\limits_{i\in I} l_i \prec \mathop{\mathsf{P}}\limits_{i\in I} m_i$.

（*2*）令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，$J\subset I$，则$\sum\limits_{i\in J} l_i \prec \sum\limits_{i\in I} l_i$，并且，如果$I$是良序集，并且对任意$i\in I$，$l_i\neq\varnothing$，则$\mathop{\mathsf{P}}\limits_{i\in J} l_i \prec \mathop{\mathsf{P}}\limits_{i\in I} l_i$.

证明：

（1）根据补充定理97（1）、定理45可证.

（2）根据补充定理246（1）可证.

定义 139. 序数（*ordinal*）

良序集的偏序类，称为序数.

补充定理 247.

（*1*）I为良序集，$(l_i)_{i\in I}$为序数族，则$\sum\limits_{i\in I} l_i$为序数.

（*2*）m、l为序数，则$m+l$、ml为序数.

证明：

（1）令E_i为l_i的定义域，$(E_i)_{i\in I}$的和为S，对S的任意子集F，令$pr_2 f$的最小元为i，$S\cap$ (˘˘$Ei\times\{i\}$)的最小元为a，则(a,i)为S的最小元，得证.

（2）$m+l$部分根据补充定理247（1）可证；ml部分根据定义可证.

定义 140. 序数*0*（*ordinal zéro*），序数*1*（*ordinal un*），序数*2*（*ordinal deux*），序数*3*（*ordinal trois*）

$Ord(\varnothing)$称为序数0；$Ord(\{\varnothing\})$称为序数1. 在没有歧义的情况下也可以分别简称为0、1.

1和1的序数和，称为序数2，在没有歧义的情况下也可以简称为2.

2和1的序数和，称为序数3，在没有歧义的情况下也可以简称为3.

补充定理 248.

（*1*）$0=\varnothing$;

（*2*）$Ord(A)=0\Leftrightarrow A=\varnothing$;

（*3*）$Ord(A)=1\Leftrightarrow(\exists x)(A=\{x\})$.

（*4*）序数族$(l_i)_{i\in\varnothing}$的序数和为0，序数乘积为1.

（*5*）序数族$(\varnothing)_{i\in I}$的序数和为0.

（*6*）序数族$(l_i)_{i\in I}$中，如果存在$i\in I$，使$l_i=0$，则其序数乘积为0.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

（3）根据定义可证.

（4）根据补充定理116（4）、补充定理127（1）可证.

（5）根据补充定理116（5）可证.

（6）根据补充定理127（2）可证.

补充定理 249.

a为序数，则：

（*1*）$a+0=a$；$0+a=a$；$a1=a$；$1a=a$.

（*2*）$a_0=0$；$0a=0$.

（*3*）$a+a=a2$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理248（4）、补充定理248（5）可证.

（3）根据定义可证.

补充定理 250.

对任意两个序数l、m，均有$l \prec m$或$m \prec l$.

证明：根据定理84可证.

补充定理 251.

公式(l为序数)与(m为序数)与($l \prec m$)，为良序.

证明：

对任意元素均为序数的非空集合X，令$x \in X$，x的定义域为E，$Y=\{y|y \prec x$与$y \neq x\}$，如果$Y=\varnothing$，则x为X的最小元；如果$y \neq \varnothing$，根据定理87、定理72，对任意$y \in Y$且$y \neq x$，存在$a \in E$使$y=Ord(] \leftarrow, a[)$，令$f(y)=\tau_a(y=Ord(] \leftarrow, a[))$，则$\{z|z=f(y)$与$y \in Y$与$y \neq x\}$有最小元，令其最小元为$b$，设$f(u)=b$，因此$u$是$Y$的最小元，进而，$u$也是$X$的最小元，得证.

记号定义 21. 序数之间的不等式（*inégalité entre ordinaux*）

l、m为序数，如果$l \prec m$，则记作$l \leq m$.

补充定理 252.

a为序数：

（*1*）公式x为序数与$x<a$是x上的集合化公式.

（*2*）公式x为序数与$x \leq a$是x上的集合化公式.

证明：

（1）令$E=pr_1a$．则$x<a\Leftrightarrow(\exists y)(y\in E$与$x=Ord(Sy))$．令$F_y=\{S_y\}$，$A=\bigcup\limits_{y\in E}F_y$，则$x<a\Rightarrow x\in A$，得证．

（2）根据补充定理252（1）可证．

补充定理 253.

（1）令$O_a=\{x|x$为序数与$x<a\}$，则O_a为良序集且$Ord(O_a)=a$．

（2）$\{x|x$为序数与$x\leq a\}$为良序集，且$Ord(\{x|x$为序数与$x\leq a\})=a+1$．

证明：

（1）令$E=a$的定义域．根据定理87，$x<a\Leftrightarrow(\exists y)(y\in E$与$x=Ord(S_y))$，根据补充定理225、定理73（1），$O_a$同构于E，根据补充定理224（1）得证．

（2）根据补充定理253（1）可证．

补充证明规则 86.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，x不是常数，如果$(x$为序数与$(\forall y)(y$为序数与$y<x\Rightarrow(y|x)R))\Rightarrow R$是$M$的定理，则$x$为序数$\Rightarrow R$是$M$的定理．

证明：根据证明规则59、补充定理253（2）可证．

补充定理 254.

（1）令$(x_i)_{i\in I}$为序数族，则存在唯一的序数a，使$(l$为序数与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow xi\leq l))\Leftrightarrow(a\leq l)$．

（2）H的元素都是序数，则存在唯一的序数a，使$(l$为序数与$(\forall x)(x\in H\Rightarrow x\leq l))\Leftrightarrow(a\leq l)$．

证明：

（1）令$x=\sum\limits_{i\in I}x_i$，$A=\{l|l\leq a$与$l$为序数与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow xi\leq l)\}$，根据补充定理246（2），对任意$i\in I$，$x_i\leq x$，故$A\neq\varnothing$，因此令$A$的最小元为$a$，存在性得证．根据定义可证唯一性．

（2）类似补充定理254（1）可证．

定义 141. 序数族的最小上界（*borne supérieure de la famille d'ordinaux*），序数集合的最小上界（*borne supérieure du ensemble d'ordinaux*）

令$(x_i)_{i\in I}$为序数族，使$(l$为序数与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow x_i\leq l))\Leftrightarrow(a\leq l)$成立的$a$，称为$(x_i)_{i\in I}$的最小上界，记作$\sup\limits_{i\in I}(x_i)$．令$H$的所有元素均为序数，使$(l$为序数与$(\forall x)(x\in H\Rightarrow x\leq l))\Leftrightarrow(a\leq l)$成立的$a$，称为$H$的最小上界，记作$sup\ H$．

定义 142. 前导（*prédécesseur*）

a、b为序数，如果$a=b+1$，则称b为a的前导.

补充定理 255.

a为序数，则序数族$(x)_{x<a}$的最小上界为a或a的前导.

证明：

设最小上界为b，假设$b \neq a$且$b+1 \neq a$.

由于$b<a$，设a的定义域为E，根据定理87，存在$y \in E$，使$b=Ord(S_y)$.

由于$b+1=Ord(S_y \cup \{y\})$，故$b+1 \neq a$，又因为$b+1 \neq a$，因此$b+1<a$．但根据补充定理246（2），$b<b+1$，矛盾.

补充定理 256.

a为序数，且$a \neq 0$，则$a>0$并且$a \geq 1$.

证明：根据定义可证.

补充定理 257.

a、b、x为序数，则：

（1）$a<b \Leftrightarrow a+1 \leq b$.

（2）如果$a<b$，则$x+a<x+b$，$a+x \leq b+x$，$ax \leq bx$;

（3）如果$a<b$，$x>0$，则$xa<xb$.

（4）$a<a+1$.

（5）$a>1 \Leftrightarrow a \geq 2$.

（6）$a+1=b+1 \Leftrightarrow a=b$.

（7）$a+1<b+1 \Leftrightarrow a<b$.

证明：

（1）令b的定义域为E，如果$a<b$，则a同构于E的片段S_x，$a+1$同构于E的片段$S_x \cup \{x\}$.

反过来，如果$a+1 \leq b$，根据补充定理246（1）、补充定理249（1），$a<a+1$，因此$a<b$.

（2）根据补充定理257（1）、补充定理246（1）、补充定理245（1）可证.

（3）根据补充定理257（1）、补充定理246（1）、补充定理245（3）可证.

（4）根据补充定理257（1）可证.

（5）根据补充定理257（1）可证.

（6）根据公理模式6，$a=b \Rightarrow a+1=b+1$．反过来，如果$a+1=b+1$，令a的定义域为E，b的定义域为E'，设$x \not{in} E$，$y \not{in} y$，把x作为最大元加入E，把y作为最大元加入E'，

则$a+1=Ord(E\cup\{x\})$，$b+1=Ord(E'\cup\{y\})$，故$E\cup\{x\}$同构于$E'\cup\{y\}$．因此E同构于E'，故$a=b$．

（7）根据补充定理257（2）、补充定理257（6）可证．

补充定理 258. 前导的唯一性

一个序数的前导如果存在，则是唯一的．

证明：根据补充定理257（6）可证．

补充定理 259. 所有序数不能组成集合

非$Coll_x(x为序数)$．

证明：设序数的集合的最小上界为a，但$a<a+1$，矛盾．

补充定理 260.

a、b、c为序数，则：

（*1*）$c+a<c+b\Rightarrow a<b$，$a+c<b+c\Rightarrow a<b$;

（*2*）如果$c>0$，则$ca<cb\Rightarrow a<b$，$ac<bc\Rightarrow a<b$;

（*3*）$c+a=c+b\Rightarrow a=b$;

（*4*）$ca=cb\Rightarrow a=b$.

证明：

（1）根据补充定理246（1）可证．

（2）根据补充定理246（1）可证．

（3）根据补充定理257（2）可证．

（4）根据补充定理257（3）可证．

补充定理 261. 序数的差的存在性和唯一性

a、b为序数，$a\leq b$，则存在唯一的序数c，使$a+c=b$.

证明：令b的定义域为E，则a同构于E的区间S_x，令$c=Ord(E-S_x)$，则$a+c=b$；根据补充定理260（3），c具有唯一性．

定义 143. 序数的差（*différence ordinale*）

a、b为序数，$a\leq b$，如果序数c满足$a+c=b$，则称c为a和b的差，记作$(-a)+b$.

补充定理 262. 序数的商和余数的存在性和唯一性

a、b、c为序数，$c<ab$，则存在唯一的一组序数d、e，使$c=ae+d$，且$d<a$，$e<b$.

证明：

由于$c<ab$，故$a\neq 0$.

令a的定义域为E，b的定义域为F，c的定义域为G，则G同构于ab的区间S_x，令x的射影分别为m、n，其中$m \in F$、$n \in E$．令$Ord(\{t|t\text{为序数与}t < m\}) = e$，$Ord(\{t|t\text{为序数与}t < n\}) = d$，则$d < a$，$e < b$．令$E$和序数集合$\{t|t\text{为序数与}t < m\}$的字典式乘积为$X$，则$Ord(X) = ae$．令$Y = \{t|t\text{为序数与}t < n\}$，根据定义，$Ord(X) + Ord(Y) = Ord(S_x)$，因此$c = ae + d$．存在性得证．

设$c = ae+d$，$c = ae'+d'$．设$e < e'$，则$e+1 \le e'$，因此$ae+a \le ae'$，故$ae+a+d' \le ae+d$，故$a + d' \le d$，和$d < a$矛盾．唯一性得证．

定义 144. 序数的商（*quotient ordinal*），序数的余数（*reste ordinal*）

a、b、c为序数，$c < ab$，如果序数d、e，使$c = ae + d$，且$d < a$，$e < b$，则称e为c除以a的商，d为c除以a的余数．

定义 145. 可约的序数（*ordinal décompasable*），不可约的序数（*ordinal indécompasable*）

序数$r > 0$，如果存在序数$s < r$、$t < r$使$s + t = r$，则称r可约，否则，称r不可约．

补充定理 263.

序数$r > 0$，当且仅当对任意序数$s < r$均有$s + r = r$时，r不可约．

证明：根据补充定理261可证．

补充定理 264.

序数$r > 0$，当且仅当对任意序数$a < r$、$b < r$，均有$a + b < r$时，r不可约．

证明：

充分性：根据补充定理263，$a + r = r$，由于$b < r$，根据补充定理257（2），$a + b < r$．

必要性：根据定义可证．

补充定理 265.

a、r为序数，$r > 1$，$a > 0$，则当且仅当r不可约时，ar不可约．

证明：

如果r可约，令$r = x + y$，其中$x < r$，$y < r$，根据补充定理245（3），$ar = ax + ay$，根据补充定理257（3），$ax < ar$，$ay < ar$，故ar可约．

反过来，如果ar可约，令$ar = p + q$，$p < ar$、$q < ar$，则存在e、d使$p = ae + d$，故$ar = ae + d + q$，因此$e < r$．如果r不可约，根据补充定理263，$r = e + r$，根据补充定理260（3），$ar = d + q$，由于$d + r = r$，故$d + ar = ar$，因此$q = ar$，矛盾．

补充定理 266.

a、r为序数，$a > 0$，$r > 0$，r不可约，则存在不可约的序数x，使$r = ax$．

证明：如果$r = ar$，得证；如果$r < ar$，则存在d、e使$r = ae + d$，且$d < r$，故$r = ae$，根据补充定理265，e不可约，得证.

补充定理 267.

不可约的序数族的最小上界是不可约的序数.

证明：令$c = \underset{i \in I}{sup}(x_i)$，设$a < c$，$b < c$，则存在$i \in I$，使$a < x_i$、$b < x_i$，故$a + b < x_i$，因此$a + b < c$，得证.

补充定理 268.

序数$a > 0$，则$\{x | x$为序数与$x \le a$与x不可约$\}$有最大元.

证明：根据补充定理267可证.

元数学定义 63. 序数函数符号（*symbole fonctionnel ordinal*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令T为项：

令a_0为序数，如果(x为序数与$x \ge a_0$) $\Rightarrow$ T为序数，则称T为关于x定义在$x \ge a_0$上的序数函数符号，或简称为定义在$x \ge a_0$上的序数函数符号.

令a_0、b_0为序数，如果(x为序数与$x \ge a_0$与y为序数与$y \ge b_0$) $\Rightarrow$ T为序数，则称T为关于x、y定义在$x \ge a_0$、$y \ge b_0$上的序数函数符号，或简称为定义在$x \ge a_0$、$y \ge b_0$上的序数函数符号.

注：由于所有序数不能组成集合，故“序数函数符号”只是类似函数的一种表达式，并非真正的函数.

使用“序数函数符号”的主要意义是用于定义序数幂.

元数学定义 64. 标准序数函数符号（*symbole fonctionnel ordinal*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，令T为项：

令a_0为序数，T为关于x定义在$x \ge a_0$上的序数函数符号，如果对任意序数x、y，$x < y$与$x \ge a_0 \Rightarrow T < (y|x)T$，并且，对任意序数族$(x_i)_{i \in I}$且$i \ne \varnothing$，如果对任意$i \in I$，均有$x_i \ge a_0$，则$(\underset{i \in I}{sup}(x_i)|x)T = \underset{i \in I}{sup}((x_i|x)T)$，则称$T$为关于$x$的标准序数函数符号，在没有歧义的情况下也可以简称$T$为标准序数函数符号.

补充定理 269.

序数$a > 0$，则$a + x$、ax均为定义在$x \ge 0$上的序数函数符号.

证明：根据补充定理257（2）、补充定理257（3）可证.

补充定理 270.

$w(x)$为定义在$x \geq a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \geq a_0$，$w(x) \geq x$，并且，$(x$为序数$)$与$(y$为序数$)$与$x < y$与$x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令$g(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq a_0$上的序数函数符号，并满足$((x$为序数$)$与$(y$为序数$)$与$x \geq a_0$与$y \geq a_0) \Rightarrow g(x,y) > x$.

$f(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq 1$上的序数函数符号，其按下列方式定义：

第一，对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,1) = w(x)$；

第二，对任意序数$x \geq a_0$， $y > 1$，$f(x,y) = \sup\limits_{z \in]0,y[} g(f(x,z),x)$.

那么，

（*1*）如果序数函数符号$f_1(x,y)$也满足上述条件，则对任意序数$x \geq a_0$， $y \geq 1$，$f_1(x,y) = f(x,y)$.

（*2*）对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,y)$是关于y定义在$y \geq 1$上的标准序数函数符号.

（*3*）对任意序数$x \geq a_0$， $y \geq 1$，均有$f(x,y) \geq x$，对任意序数$x \geq sup(a_0,1)$，$y \geq 1$，均有$f(x,y) \geq y$.

（*4*）如果序数a、b满足$a > 0$，$a \geq a_0$，$b \geq w(a)$，则存在唯一的序数x，使$f(a,x) \leq b$，$b < f(a,x+1)$，并且$x \leq b$.

（*5*）令$a_0 = 0$，$w(x) = x+1$，$g(x,y) = x+1$，则$f(x,y) = x+y$.

令$a_0 = 1$，$w(x) = x$，$g(x,y) = x+y$，则$f(x,y) = xy$.

（*6*）如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$，则$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$1 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow f(x,y) \leq f(x',y')$.

如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y < y' \Rightarrow g(x,y) < g(x,y')$与$g(x,y) \leq g(x',y)$，则$a_0 \leq x$与$x < x'$与$0 \leq y \Rightarrow f(x,y+1) < f(x',y+1)$.

（*7*）如果$w(x) = x$，并且，$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y < y' \Rightarrow g(x,y) < g(x,y')$与$g(x,y) \leq g(x',y)$，同时，对任意序数$x \geq a_0$，$g(x,y)$为关于$y$定义在$y \geq a_0$上的标准序数函数符号，此外，对任意序数$x \geq a_0$，$y \geq a_0$，$z \geq a_0$，均有$g(g(x,y),z)) = g(x,g(y,z))$，则对任意$x \geq a_0$，$y \geq 1$，$z \geq 1$，$g(f(x,y),f(x,z)) = f(x,y+z)$，$f(f(x,y),z) = f(x,yz)$.

（*8*）如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$，则对任意序数$x \geq a_0$，$y > 0$，均有$f(x,y+1) \geq w(x) + y$.

证明：

（1）根据证明规则60可证.

（2）根据定义，对任意$a > b$、$b \geq 1$，$f(x,a) > f(x,b)$，同时，对于集族$(x_i)_{i \in I}$且$i \neq \varnothing$，设$a = \sup\limits_{i \in I}(x_i)$，故$f(x,a) = \sup\limits_{z \in]0,a[}(g(f(x,z),x))$. 同时，$\sup\limits_{i \in I}(f(x_i)) = \sup\limits_{i \in I}(\sup\limits_{z \in]0,x_i[}(g(f(x,z),x)))$，对任意$i \in I$， $\sup\limits_{z \in]0,x_i[}(g(f(x,z),x)) \leq f(a)$，故$\sup\limits_{i \in I}(f(x,x_i)) \leq f(x,a)$，同时，对任意z$\in]0,a[$，存在$x_i \geq z$，故$g(f(x,z),x) \leq$

$\sup\limits_{z\in]0,x_i[}(g(f(x,z),x))$，故$g(f(x,z),x)\leq \sup\limits_{i\in I}(f(x_i))$，因此$f(x,a)\leq \sup\limits_{i\in I}(f(x_i))$，故$f(x,a)=\sup\limits_{i\in I}(f(x_i))$，综上，对任意$x\geq a_0$，$f(x,y)$是关于$y$定义在$y\geq 1$上的标准序数函数符号.

（3）根据定义可证$f(x,y)\geq x$，同时，$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[}(g(f(x,z),x))$，$y=1$时，显然$f(x,1)\geq 1$，$y>1$时，设命题对$]0,y[$成立，则$f(x,y)\geq=\sup\limits_{z\in]0,y[}z$，根据补充定理255，$f(x,y)\geq y$或$f(x,y)\geq b$，其中$b$为$y$的前导，如果$f(x,y)\geq b$，由于$b\in]0,y[$，因此$g(f(x,b),x)>b$，矛盾，因此$f(x,y)\geq y$，根据补充证明规则86，对任意$x\geq sup(a_0,1)$，$y\geq 1$，$f(x,y)\geq y$.

（4）令$A=\{y|f(a,y)\leq b\}$，则$A\neq\varnothing$，令$z=\sup\limits_{i\in A}f(a,i)$，则$z=f(a,\sup\limits_{i\in A}i)$，故$\sup\limits_{i\in A}i$满足条件，存在性得证；设$x$、$x'$都满足条件，如果$x<x'$，则$x+1\leq x'$，$f(a,x+1)\leq f(a,x')$，矛盾，唯一性得证.

（5）前一部分：$y=1$显然成立，$y>1$时，设命题对$]0,y[$成立，则$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[}(x+z+1)$，根据补充定理257（1）、补充定理259（1）可证.

后一部分：$y=1$显然成立，$y>1$，设命题对$]0,y[$成立，则$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[}(xz+x)$，根据补充定理262可证.

（6）根据补充证明规则86可证.

（7）前半部分：根据定义可证$g(f(x,y),f(x,1))=f(x,y+1)$. 设命题对$]1,z[$成立，则$g(f(x,y),f(x,z))=g(f(x,y),\sup\limits_{i\in]0,z[}g(f(x,i),x))$，等于$\sup\limits_{i\in]0,z}[g(f(x,y),g(f(x,i),x))$，等于$\sup\limits_{i\in]0,z}[g(f(x,y+i),x)$，等于$\sup\limits_{j\in]0,y+z[}g(f(x,j),x)$，等于$f(x,y+z)$.

后半部分：$f(x,yz)=\sup\limits_{j\in]0,yz[}f(x,j+1)$，$f(f(x,y),z)=\sup\limits_{j\in]0,z}[f(x,y(i+1))$，如果存在$i+1=z$，则$f(x,yz)=f(f(x,y),z)$，如果对任意$i<z$均有$i+1<z$，对任意$j<yz$，根据补充定理262，存在$h$、$k$使$j=yh+k$，且$h<z$，$k<y$，故$j+1\leq y(h+1)$，因此$\sup\limits_{j\in]0,yz[}f(x,j+1)\leq\sup\limits_{j\in]0,z[}f(x,y(i+1))$，反过来，对任意$i<z$，$y(i+1)<yz$，故$\sup\limits_{j\in]0,yz[}f(x,j+1)\geq\sup\limits_{j\in]0,z[}f(x,y(i+1))$，得证.

（8）$y=0$显然成立；设命题对$]0,y[$成立，$z\in]0,y[$时，$g(f(x,z+1),x)\geq x+z+1$，则$f(x,y+1)\geq z\in]0,y[(w(x)+z+1)$，故$f(x,y+1)\geq w(x)+y$.

定义 146. 序数幂（*exponentiation ordinale*）

按下列方式定义序数函数符号$f(x,y)$：

第一，对任意$x\geq 2$，$f(x,1)=x$；

第二，对任意$x\geq 2$，$y>1$，$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[}f(x,z)x$；

第三，对任意序数a，$f(a,0)=1$；

第四，对任意序数$b \geq 1$，$f(0,b) = 0$，$f(1,b) = 1$．则称$f(a,b)$为a的b次序数幂，记作a^b．

补充定理 271.

$a > 1 \Rightarrow a^b > 1$．

证明：根据补充证明规则86可证．

补充定理 272.

a、b、b'为序数，如果$a > 1$，$b > b'$，则$a^{b'} < a^b$，并且，a^b为关于b的标准序数函数符号．

证明：根据补充定理270（2）可证．

补充定理 273.

a、a'、b为序数，如果$a' > 0$，$a \geq a'$，则$a'^b \leq a^b$．

证明：根据补充证明规则86可证．

补充定理 274.

a、x、y为序数，则$a^x a^y = a^{x+y}$，$(a^x)^y = a^{xy}$．

证明：根据补充定理270（7）可证．

补充定理 275.

a、b为序数，$a \geq 2$，$b \geq 1$，则$a^b \geq ab$．

证明：$a^b = \underset{i \in]0,b[}{sup}\, a^i a$，$ab = \underset{i \in]0,b[}{sup}\,(ai + a)$，根据补充证明规则86可证．

补充定理 276.

a、b为序数，$a \geq 2$，$b \geq 1$，则存在唯一的序数c、d、e，使$b = a^c d + e$，且$d > 0$、$d < a$、$e < a^c$．

证明：根据补充定理270（4）、补充定理262可证．

定义 147. 传递集合（*ensemble transitif*）

如果$(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \subset X)$，则称$X$为传递集合．

补充定理 277.

（*1*）$\varnothing$、$\{\varnothing\}$、$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$、$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$为传递集合．

（*2*）如果Y为传递集合，则$Y \cup \{Y\}$为传递集合．

（*3*）如果$(Y_i)_{i \in I}$为传递集族，则$\bigcup\limits_{i \in I} Y_i$为传递集合，如果$i \neq \varnothing$，则$\bigcap\limits_{i \in I} Y_i$为传递集合．

证明：根据定义可证.

定义 148. 伪序数（*pseudo-ordinal*）

如果$(\forall Y)(Y \subset X$与$(Y$为传递集合$)$与$Y \neq X \Rightarrow Y \in X)$，则称$X$为伪序数.

定义 149. 正式集合（*ensemble decent*）

如果$(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \notin x)$，则称$X$为正式集合.

补充定理 278.

伪序数是传递集合也是正式集合.

证明：令A为伪序数，$B = \{Y|Y \subset A$与$(Y$为传递集合$)$与$(Y$为正式集合$)\}$，$C = \bigcup\limits_{Y \in B} Y$，因此$C \subset A$. 根据补充定理277（3），$C$为传递集合. 同时，对任意$x \in C$，故存在$Y \in B$使$x \in Y$，故$x \notin x$，因此$C$为正式集合.

如果$C \in C$，则存在$Y \in B$使$C \in Y$，故$C \notin C$，矛盾；因此，$C \notin C$.

如果$C \neq A$，则$C \in A - C$，根据补充定理277（2），$C \cup \{C\}$为传递集合，

同时，对任意$x \in C \cup \{C\}$，如果$x = C$，则$x \notin x$，如果$x \neq C$，则$x \in C$，故$x \notin x$，因此，$C \cup \{C\}$为正式集合，故$C \cup \{C\} \subset C$，矛盾.

因此$C = A$，得证.

补充定理 279.

如果X是伪序数，则$X \cup \{X\}$也是伪序数.

证明：根据定义可证.

补充定理 280.

X、Y均为伪序数，则$X \subset Y$或$Y \subset X$.

证明：根据补充定理279、补充定理277（3），$X \cap Y$为传递集合，且$X \cap Y \notin X \cap Y$，因此，$X \cap Y = X$或$X \cap Y = Y$，得证.

补充定理 281.

X为传递集合，如果对任意$x \in X$，x均为伪序数，则X为伪序数.

证明：如果$Y \subset X$，$Y \neq X$，Y为传递集合，对任意$x \in X - Y$，$y \in Y$，根据补充定理280，$x \subset y$或$y \subset x$. 如果$x \subset y$，由于$x \neq y$，故$x \in y$，又因为$y \subset Y$，故$x \in Y$，矛盾；因此，$y \subset x$，由于$x \neq y$，故$y \in x$，因此$Y \subset x$. 如果$Y = x$，则$Y \in X$，如果$Y \neq x$，则$Y \in x$，由于$x \subset X$，故$y \in X$，得证.

补充定理 282.

$\varnothing$为伪序数.

证明：根据定义可证.

补充定理 283.

伪序数的每一个元素都是伪序数.

证明：设X为伪序数，$A=\{Y|Y\subset X$与(Y为传递集合)与$(\forall x)(x\in Y\Rightarrow x$为伪序数)$\}$，$B=\bigcup\limits_{Y\subset A}Y$，则$B$为传递集合，故$B$为伪序数，因此$B\notin B$. 根据补充定理279，$B\cup\{B\}$也是伪序数，且$B\cup\{B\}\neq B$. 如果$B\neq X$，则$B\in X$，故$B\cup\{B\}\subset X$，因此，$B\cup\{B\}\in A$，所以$B\cup\{B\}\subset B$，矛盾. 因此$B=X$，得证.

补充定理 284.

（1）令$(X_i)_{i\in I}$是伪序数族，且$i\neq\varnothing$，则$\bigcap\limits_{i\in I}X_i$是$\{Y|(\exists i)(i\in I$与$Y=X_i)\}$按包含关系排序的偏序集的最小元.

（2）E为伪序数，则$x\in E$与$y\in E$与$x\subset y$为良序.

证明：

（1）令$X=\bigcap\limits_{i\in I}X_i$，根据补充定理281、补充定理277（3），$X$为伪序数，故$X\notin X$. 根据补充定理279，$X\cup\{X\}$为伪序数，如果对任意$i\in I$，均有$X_i\neq X$，则$X\cup\{X\}\subset X$，矛盾. 因此，存在$i\in I$使$X_i=X$，其即为最小元.

（2）根据补充定理284（1）可证.

补充定理 285.

对任意序数a，存在唯一的伪序数E_a，使$Ord(Ea)=a$.

证明：由于$Ord(\varnothing)=0$，故命题对$[0,1[$成立，设命题对$[0,a[$成立，令$X=\bigcup\limits_{i\in[0,a[}\{E_i\}$，并且是按包含关系排序的偏序集. 根据补充定理281、补充定理277（3），E_a为伪序数，根据补充定理253（1），$Ord(E_a)=a$，同时，根据补充定理280，这样的伪序数是唯一的. 根据补充证明规则86得证.

注：本补充定理表明，序数和伪序数一一对应.

习题 101.

$K=\{F|F$为在E上的偏序$\}$，并且是按($F\in K$与$F'\in K$与F是比F'更细的偏序)排序的偏序集，求证：K的极小元是在E上的全序；对在E上的任意偏序F，F的图是所有不等于E且比F更细的全序的图的交集；进而，任何偏序集同构于全序集族的乘积的一个子集.

证明：即补充定理227、补充定理228、补充定理229.

习题 102.

E为集合，$P=\{F|F\subset E$与(F是按E的偏序在F上导出的偏序排序的良序集)$\}$，求证：

（1）“(X是Y的片段” 是关于X、Y在P上的偏序关系；

（*2*）P是归纳集；

（*3*）存在E的良序子集，在E上没有严格上界.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

（3）根据定理80，P有极大元F．假设F有严格上界x，则$F\cup\{x\}\in P$，且$F<F\cup\{x\}$，矛盾，因此F没有严格上界.

习题 103.

E为偏序集，求证：存在A、B，使$A\cup B=E$，$A\cap B=\varnothing$，且A为良序集，B没有最小元．并举出这样的例子.

证明：

令B为E的所有没有最小元的子集的并集，如果B有最小元x，设$x\in X$，X为没有最小元的E的子集，则x为X的最小元，矛盾．令$A=E-B$，如果A的子集Y没有最小元，则$Y\subset B$，矛盾.

例：E为整数集，A为E的任意有限子集，$B=E-A$.

注：习题103例子部分涉及未介绍的“整数”知识.

习题 104.

对任意偏序集E，存在$F\subset E$，F为部分良序集，并且是E的共尾子集.

证明：即补充定理231（1）.

习题 105.

E为偏序集，$F=\{X|X$为E的自由子集$\}$，并且为按$X\in F$与$Y\in F$与$(\forall x)(x\in X\Rightarrow(\exists y)(y\in Y$与$x\leq y))$排序的偏序集，求证：如果$E$为归纳集，则$F$有极大元.

证明：根据定理80，E有极大元，令$X=\{x|x$为E的极大元$\}$，则$X\in F$．如果存在E的自由子集Y使$X\leq Y$，则$X\subset Y$，若$Y-X\neq\varnothing$，则令$u\in Y-X$，根据定理81，存在E的极大元v，使$u\leq v$，又因为$v\in X$，故$v\in Y$，矛盾．故X是F的极大元.

习题 106.

E为偏序集，f为E到E的映射，并且对任意$x\in E$，$f(x)\geq x$：

（*1*）C_a为a关于函数f的链，求证：

对任意$a\in E$，$C_a\in H$；

E的偏序子集C_a，为良序集；

如果C_a在E上有最小上界b，则$b\in C_a$并且$f(b)=b$.

（*2*）如果E为归纳集，求证：存在$b\in E$，使$f(b)=b$.

证明：

（1）即补充定理232.

（2）即补充定理233.

习题 107.

E为良序集，F为在E上的闭包的集合．F按关于u、v的偏序关系"$u \in F$与$v \in F$与$(\forall x)$ $(x \in E \Rightarrow u(x) \leq v(x))$"排序．对任$u \in F$，令$I(u)$为$u$的不动点集合：

（1）求证：当且仅当$I(v) \subset I(u)$时，$u \leq v$.

（2）求证：如果E的任何两个元素在E上有最大下界，则F的任何两个元素在F上有最大下界；如果E是完备格，则F是完备格.

（3）求证：如果E为归纳集，则F的任何两个元素在F上有最小上界.

证明：

（1）当$u \leq v$时，根据定义可证$I(v) \subset I(u)$；反过来，当$I(v) \subset I(u)$时，对任意$x \in E$，$u(v(x)) = v(x)$，由于$u(v(x)) \geq u(x)$，得证.

（2）对任意$u \in F$、$v \in F$，令t为映射$x \to inf(u(x), v(x))$，根据定义，$t \in F$，且t为u、v的最大下界．同理可证映射$x \to sup(u(x), v(x))$ 为u、v的最小上界，因此，如果E是完备格，则F是完备格.

（3）对于$u \in F$、$v \in F$，令$f = u \circ v$，根据定义，$I(f) = I(u) \bigcap_I (v)$．对任意$x \in E$，令$w(x)$为$x$的链$C_x$的最大元．则对任意$x \in E$、$y \in E$、$x \leq y$，$x \leq w(y)$，同时，根据习题106（1），$C_x$为良序集．令$X = \{a | a \in C_x$与$a \leq w(y)\}$，则$X$非空，令$Y = C_x - X$，如果$Y$非空，则$Y$有最小元$b$，因此对任意$c \in X$，$c \leq w(y)$，故$f(c) \leq w(y)$，因此$f(c) \in X$，故$f(c) < b$．所以$w(y)$、$b$都是X的上界．根据定义，存在$X$的子集$Z$，$Z$在$X$上有最小上界，且该最小上界是$Y$的元素，故$sup\ Z = b$．又因为$w(y)$也是$X$的上界，故也是$Z$的上界，因此$b \leq w(y)$，矛盾．故$Y$为空，即$w(x) \leq w(y)$．$w$满足闭包的其他条件，故$w$是闭包，并且，$I(w) = I(u) \cap I(v)$；根据习题107（1），$w$为最小上界.

习题 108.

E为偏序集，$a \in E$，R_a为E的以a为最小元的右方分支子集的集合，并按包含关系排序：

（1）求证：R_a有极大元.

（2）E为右方分叉集，求证：R_a的极大元均为完全右方分支集.

（3）给出一个是右方分叉集但不是右方分支集的例子．并且，设E为习题100（2）所称的集合，F为不包含可数共尾子集的全序集，$E \times F$为完全右方分支集.

（4）E为集合，对任意$x \in E$，区间$] \leftarrow, x]$均为全序集，是否一定存在E的共尾右方无向子集.

证明：

（1）根据定理82可证.

（2）如果R_a的极大元U有极大元x，根据补充定理213（2），存在$y \in E$、$z \in E$使$y > x$、$z > x$，且y和z是不可比较的．因此$U \cup \{y, z\}$也是右方分支集，矛盾，得证.

（3）设E为习题100（2）所称的集合，$\{R\} \cup E$按包含关系的相反关系排序，则其是右方分叉集，但不是右方分支集．同时，根据定义可证$E \times F$为完全右方分支集.

（4）如果E为无最大元的全序集，显然不存在.

注：

习题108（3）涉及尚未介绍的“实数”知识.

原书习题108（4）有误.

习题 109.

求证：当且仅当指标集和各偏序集均为良序集时，偏序集族的序数和为良序集.

证明：即补充定理217（3）.

习题 110.

E、I为偏序集，$\{a, b\}$为良序集，其中$a < b$；$F_a = I$，$F_b = E$．求证：$(E)_{i \in I}$的偏序集族的序数和，同构于集族$(F_i)_{i \in \{a,b\}}$的字典式乘积.

证明：根据定义可证.

习题 111.

I为良序集，$(E_i)_{i \in I}$为偏序集族，并且对任意$i \in I$，E_i均中少有一对可比较的不同元素．则当且仅当I为有限集合，并且对任意$i \in I$，E_i均为良序集时，$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积为良序集.

证明：

必要性：如果$(E_i)_{i \in I}$的字典式乘积为良序集，根据定义，对任意$i \in I$，E_i均为良序集．同时，如果I为无穷集合，令k的自然数集N到I的子集的同构，$G(n) = \{(x, y) | x \in E_k(n)$与$y \in E_k(n)$与$x < y\}$，则对任意$n \in N$，$G(n) \neq \varnothing$．进而，令$f(n) = pr_1(\tau_z(z \in G(n)))$，$g(n) = pr_2(\tau_z(z \in G(n)))$.

令$F(n) = \{z | (\exists i)(i \in N - n$与$z = (k(i), g(i)))\} \cup \{z | (\exists i)(i \in I - k\langle N \rangle$与$z = (i, tau_a(a \in E_i)))\}$，$A = \{X | (\exists n)(n \in N$与$X = F(n))\}$，那么对任意$A$的元素$F(n)$，令自然数$m > n$，则$F(n) > F(m)$，故$A$没有最小元，矛盾．必要性得证.

充分性：对I的元素数目用数学归纳法可证.

注：习题111涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 112.

I为全序集，$(E_i)_{i \in I}$为偏序集族，$E = \prod\limits_{i \in I} E_i$，$R$为公式$(\{i | i \in I$与$pr_i x \neq pr_i y\}$是良序集$)$与$((\exists j)(j$是$\{i | i \in I$与$pr_i x \neq pr_i y\}$的最小元$)$与$(pr_j x \leq pr_j y))$.

求证：R为关于x、y在E上的偏序关系．如果对任意$i\in I$，E_i均为全序集，则E关于"x和y是可比较的"的连通分量是全序集．如果对任意$i\in I$，E_i都有不少于两个元素，则当且仅当I为良序集，且对任意$i\in I$，E_i均为全序集时，E为全序集，并且此时，E为$(E_i)_{i\in I}$的字典式乘积．

证明：

根据定义可证R为关于x、y在E上的偏序关系．

设x、y是可比较的，y、z是可比较的，令$A=\{i|i\in I$与$pr_i x\neq pr_i y\}$，$B=\{i|i\in I$与$pr_i y\neq pr_i z\}$，则$A\cup B$是良序集，$\{i|i\in I$与$pr_i x\subset pr_i y\}A\cup B$，也是良序集．故$x$、$z$是可比较的．使用数学归纳法可证$E$关于"$x$和$y$是可比较的"的连通分量是全序集．

充分性根据定义可证．

必要性：若E为全序集，令$f(i)=\tau_x(x\in E_i)$，$g(i)=\tau_x(x\in E_i-\{f(i)\})$．则对$I$的任意子集$J$，令$x=\bigcup\limits_{i\in I}\{(i,f(i))\}$，$y=(\bigcup\limits_{i\in I-J}\{(i,f(i))\})\cup(\bigcup\limits_{i\in J}\{(i,g(i))\})$，由于$x$、$y$是可比较的，故$J$为良序集，根据定义，$I$为良序集．

同时，对任意$i\in I$、$x\in E_i$、$y\in E_i$，令$A=(\bigcup\limits_{j\in I-i}\{(j,f(j))\})\cup\{i,x\}$，$B=(\bigcup\limits_{j\in I-i}\{(j,f(j))\})\cup\{i,y\}$，由于$A$、$B$是可比较的，故$x$、$y$是可比较的．

综上，必要性成立．

根据定义可证，此时，E为$(E_i)_{i\in I}$的字典式乘积．

注：习题112涉及尚未介绍的知识．

习题 113.

（1）令R为公式(F为在E上的偏序)与(F'为在E'上的偏序)与
(按F排序的E同构于在F'上排序的E')，求证：R为关于F、F'的等价关系．同时，当且仅当两个偏序的偏序类相等时，这两个偏序集同构．

（2）令S为公式(X为偏序类)与(Y为偏序类)与$(\exists A)(\exists B)$
((A为按偏序类为X的偏序排序的偏序集)与(B为按偏序类为Y的偏序排序的偏序集)与$(\exists Z)$
($Z\subset Y$与X同构于Z))．求证：S为关于X、Y的预序关系．

（3）I为偏序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，F为其序数和，求证：$\sum\limits_{i\in I}Ord(E_i)=Ord(F)$．

$(J_k)_{k\in K}$为偏序集族，其和为I，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，求证：$\sum\limits_{k\in K}(\sum\limits_{i\in J_k\times\{k\}}l_i)=\sum\limits_{i\in I}l_i$．

（4）I为良序集，$(E_i)_{i\in I}$为偏序集族，F为其字典式乘积，求证：$\prod\limits_{i\in I}Ord(E_i)=Ord(F)$．

$(J_k)_{k\in K}$为良序集族，其序数和为良序集I，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，求证：$\prod\limits_{k\in K}(\prod\limits_{i\in J_k\{k\}}l_i)=\prod\limits_{i\in I}l_i$．

（5）I为良序集，$(m)_{i\in I}$为偏序类族，$Ord(I)=l$，求证：$\sum\limits_{i\in I}m=ml$．

l、m、n为偏序类，求证：$(l+m)+n=l+(m+n)$，$(lm)n=l(mn)$，$l(m+n)=lm+ln$．

（6）令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$、$(m_i)_{i\in I}$为两个偏序类族，对任意$i \in I$，$l_i \prec m_i$，求证：$\sum\limits_{i\in I} l_i \prec \sum\limits_{i\in I} m_i$，并且，如果$I$是良序集，则$\prod\limits_{i\in I} l_i \prec \prod\limits_{i\in I} m_i$.

令I为偏序集，$(l_i)_{i\in I}$为偏序类族，$J \subset I$，求证：$\sum\limits_{i\in J} l_i \prec \sum\limits_{i\in I} l_i$，并且，如果$I$是良序集，并且对任意$i \in I$，$l_i \neq \varnothing$，则$\prod\limits_{i\in J} l_i \prec \prod\limits_{i\in I} l_i$.

（7）l为偏序类，l^*表示按l相反关系排序的l的定义域，求证：$(l^*)^* = l$，$(\sum\limits_{i\in I} l_i)^* = (\sum\limits_{i\in I^*} l_i^*)$，其中$I^*$表示按相反关系排序的$I$.

证明：

（1）即补充定理236、补充定理237.

（2）即补充定理238.

（3）即补充定理239、补充定理240.

（4）即补充定理242、补充定理243.

（5）即补充定理244、补充定理245.

（6）即补充定理246.

（7）根据定义可证.

习题 114.

（1）I为良序集，$(l_i)_{i\in I}$为序数族，求证：$\sum\limits_{i\in I} l_i$为序数；如果I为有限集合，则$\prod\limits_{i\in I} l_i$为序数；$a$为序数，则$a+0=a$；$0+a=a$；$a1=a$；$1a=a$.

（2）公式l为序数与m为序数与$l \prec m$，为良序.

（3）a为序数，求证：公式x为序数与$x \leq a$是x上的集合化公式．并且，令$O_a = \{x|x\text{为序数与}x<a\}$，则$O_a$为良序集且$Ord(O_a)=a$.

（4）a为序数，求证：序数族$(x)_{x<a}$的最小上界为a或a的前导.

证明：

（1）前半部分序数和即补充定理247（1）；序数乘积对I的元素数目用数学归纳法可证．后半部分即补充定理249（1）.

（2）即补充定理251.

（3）前半部分即补充定理252（2），后半部分即补充定理253（1）.

（4）即补充定理255.

注：习题114（1）涉及尚未介绍的“有限集合”知识.

习题 115.

（1）a、b为序数：

求证：$a<b \Leftrightarrow a+1 \leq b$；

x为序数，$a<b$，求证：$x+a<x+b$，$a+x \leq b+x$，$ax \leq bx$；

x为序数，$a<b$，$x>0$，求证：$xa<xb$.

（2）不存在一个集合，使所有序数都是其元素.

（3） a、b、c为序数：

求证：$c+a<c+b \Rightarrow a<b$，$a+c<b+c \Rightarrow a<b$.

如果$c>0$，求证：$ca<cb \Rightarrow a<b$，$ac<bc \Rightarrow a<b$.

（4）a、b、c为序数，求证：$c+a<c+b \Rightarrow a<b$；如果$c>0$，则$ca<cb \Rightarrow a<b$；

（5）a、b为序数，$a \le b$，求证：存在唯一的序数c，使$a+c=b$；

（6）a、b、c为序数，$c<ab$，求证：存在唯一的一组序数d、e，使$c=ae+d$，且$d<a$，$e<b$.

证明：

（1）即补充定理257（1）、补充定理257（2）、补充定理257（3）；

（2）即补充定理259；

（3）即补充定理260（1）、补充定理260（2）；

（4）即补充定理260（3）、补充定理260（4）；

（5）即补充定理261；

（6）即补充定理262.

习题 116.

（1）$r>0$，求证：当且仅当对任意序数$s<r$均有$s+r=r$时，r为不可约的序数.

（2）a、r为序数，$r>1$，$a>0$，求证：当且仅当r不可约时，ar不可约.

（3）a、r为序数，$a>0$，$r>0$，r不可约，求证：存在不可约的序数x，使$r=ax$.

（4）序数$a>0$，求证：$\{x|x$为序数与$x \le a$与x不可约$\}$有最大元.

（5）求证：不可约的序数族的最小上界是不可约的序数.

证明：

（1）即补充定理263.

（2）即补充定理265.

（3）即补充定理266.

（4）即补充定理268.

（5）即补充定理267.

习题 117.

（1）序数$a>0$，求证：$a+x$、ax均为定义在$x \ge 0$上的序数函数符号.

（2）$w(x)$为定义在$x \ge a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \ge a_0$，$w(x) \ge x$，并且，$(x$为序数$)$与$(y$为序数$)$与$x<y$与$x \ge a_0 \Rightarrow w(x)<w(y)$.

令$g(x,y)$为定义在$x \ge a_0$、$y \ge a_0$上的序数函数符号，并满足$((x$为序数$)$与$(y$为序数$)$与$x \ge a_0$与$y \ge a_0) \Rightarrow g(x,y)>x$.

$f(x,y)$为定义在$x \ge a_0$、$y \ge 1$上的序数函数符号，其按下列方式定义：

第一，对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,1)=w(x)$；

第二，对任意序数$x \geq a_0$， $y>1$，$f(x,y)=\sup\limits_{z\in]0,y[} g(f(x,z),x)$.

求证：

如果序数函数符号$f_1(x,y)$也满足上述条件，则对任意序数$x \geq a_0$， $y \geq 1$，$f_1(x,y)=f(x,y)$.

对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,y)$是关于y定义在$y \geq 1$上的标准序数函数符号.

对任意序数$x \geq a_0$， $y \geq 1$，均有$f(x,y) \geq x$，对任意序数$x \geq sup(a_0,1)$，$y \geq 1$，均有$f(x,y) \geq y$.

如果序数a、b满足$a>0$，$a \geq a_0$，$b \geq w(a)$，则存在唯一的序数x，使$f(a,x) \leq b$，$b<f(a,x+1)$，并且$x \leq b$.

（*3*）令$a_0=0$，$w(x)=x+1$，$g(x,y)=x+1$，求证：$f(x,y)=x+y$.

令$a_0=1$，$w(x)=x$，$g(x,y)=x+y$，求证：$f(x,y)=xy$.

（*4*）如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$，求证：$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$1 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow f(x,y) \leq f(x',y')$.

如果$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y<y' \Rightarrow g(x,y)<g(x,y')$与$g(x,y) \leq g(x',y)$，求证：$a_0 \leq x$与$x<x'$与$0 \leq y \Rightarrow f(x,y+1)<f(x',y+1)$.

（*5*）如果$w(x)=x$，并且，$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y<y' \Rightarrow g(x,y)<g(x,y')$与$g(x,y) \leq g(x',y)$，同时，对任意序数$x \geq a_0$，$g(x,y)$为关于$y$定义在$y \geq a_0$上的标准序数函数符号，此外，对任意序数$x \geq a_0$，$y \geq a_0$，$z \geq a_0$，均有$g(g(x,y),z))=g(x,g(y,z))$，求证：对任意$x \geq a_0$，$y \geq 1$，$z \geq 1$，$g(f(x,y),f(x,z))=f(x,y+z)$，$f(f(x,y),z)=f(x,yz)$.

证明：

（1）即补充定理269.

（2）即补充定理270（1）、补充定理270（2）、补充定理270（3）、补充定理270（4）.

（3）即补充定理270（5）.

（4）即补充定理270（6）.

（5）即补充定理270（7）.

习题 118.

（*1*）a、a'、b、b'为序数，求证：如果$a>1$，$b>b'$，则$a^{b'}<a^b$，并且，a^b为关于b的标准序数函数符号．此外，如果$a'>0$，$a \geq a'$，则$a'^b \leq a^b$.

（*2*）a、x、y为序数，求证：$a^x a^y=a^{x+y}$，$(a^x)^y=a^{xy}$.

（*3*）a、b为序数，$a \geq 2$，$b \geq 1$，求证：$a^b \geq ab$.

（*4*）a、b为序数，$a \geq 2$，$b \geq 1$，求证：存在唯一的序数c、d、e，使$b=a^c d+e$.

证明：

（1）即补充定理272、补充定理273.

（2）即补充定理274.

（3）即补充定理275.

（4）即补充定理276.

习题 119.

a、b为序数，E、F为良序集，且$a = Ord(E)$，$b = Ord(F)$，令$G = \{g|g \in E^F$与$F - \{y|y \in F$与$(y, E$的最小元$) \in g\}$为有限集合$\}$，F^*为F按相反关系排序的偏序集．E^{F^*}按公式$(\{i|i \in I$与$(x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\}$是良序集$)$与$((\exists j)(j$是$\{i|i \in I$与$(x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\}$的最小元$)$与$(x, F, E)(i) \leq (y, F, E)(i))$排序，求证：$G$是$E^{F^*}$关于“$x$和$y$是可比较的”的连通分量，并且，$G$是良序集，$Ord(G) = a^b$.

证明：

令$T_{x,y}$表示集合$\{i|i \in I$与$(x, F, E)(i) \neq (y, F, E)(i)\}$，如果$x$和$y$是可比较的，则$T_{x,y}$的任何子集均有最大元和最小元，故$T_{x,y}$是有限集合，反过来，如果$T_{x,y}$是有限集合，则$x$和$y$是可比较的.

令$x \in G$，如果y和x属于同一个连通分量，运用数学归纳法可证$y \in G$．反过来，如果$x \in G$、$y \in G$，则x、y是可比较的．故G是E^{F^*}关于“x和y是可比较的”的联通分量，并且，G是全序集.

令F的最小元为m，$I_g = F - \{y|y \in F$与$(y, E$的最小元$) \in g\}$，对G的任意子集Y，令$A_Y = \bigcup\limits_{g \in Y} I_g$．对于$G$的子集$X$，考虑所有满足$(\forall x)(\forall y)(x \in Y$与$y \in X - Y \Rightarrow x < y)$的集合$Y$，则所有$A_Y$均为有限集合，

设其中元素数目最小的是A_Z，如果$A_Z = \varnothing$，即$x \to m$的图是G的最小元；如果$A_Z \neq \varnothing$，令其最小元为v，设$\{u|(\exists g)(g \in Z$与$(g, F, E)(v) = u)\}$的最小元为w，且$x \in Z$、$(g, F, E)(v) = u$，若有$y \in Z$、$(g, F, E)(v) = u$、$y \neq x$，则$A\{g|(g, F, E)(v) = u)\}$的元素数目小于A_Z的元素数目，矛盾，故x为G的最小元.

如果良序集E和E'同构、F和F'同构，则相应的G、G'同构．令$P_{a,b}$为和a、b相应的$Ord(G)$，则$P_{a,0} = 1$，当$b = c + d$时，$P_{a,b} = P_{a,c}P_{a,d}$，同时，当$b < b'$时，$P_{a,b} \leq P_{a,b'}$，因此，$P_{a,b} \geq \sup\limits_{i \in]0,b[} P_{a^i,a}$．如果$P_{a,b} > \sup\limits_{i \in]0,b[} P_{a^i,a}$，设在$G$上，$\sup\limits_{i \in]0,b[} P_{a^i,a} = Ord(S_x)$，$Q = \{i|(i, m) \notin x\}$，设$Q$的最大元是$t$，则$x \in P_{a,Ord[0,t]}$．一方面，$Ord(]0, x]) > \sup\limits_{i \in]0,b[} P_{a^i,a}$，另一方面，$P_{a,Ord([0,t])} = P_{a,Ord([0,t[)}a$，$Ord(]0, x]) \leq P_{a,t}a$，同时，$Ord([0, t[) < b$，矛盾．故$P_{a,b} = \sup\limits_{i \in]0,b[} P_{a^i,a}$．因此$P_{a,b} = a^b$.

注：习题119涉及尚未介绍的“自然数”知识.

习题 120.

（1）如果Y为传递集合，求证：$Y \cup \{Y\}$为传递集合．如果$(Y_i)_{i \in I}$为传递集族，求证：$\bigcup\limits_{i \in I} Y_i$为传递集合，如果$i \neq \varnothing$，求证：$\bigcap\limits_{i \in I} Y_i$为传递集合.

（2）求证：伪序数是传递集合也是正式集合．并且，如果X是伪序数，$X\cup\{X\}$也是伪序数．

（3）X、Y均为伪序数，求证：$X\subset Y$或$Y\subset X$．

（4）X为传递集合，如果对任意$x\in X$，x均为伪序数，求证：X为伪序数．

（5）求证：$\varnothing$为伪序数．伪序数的每一个元素都是伪序数．

（6）令$(X_i)_{i\in I}$是伪序数族，且$i\neq\varnothing$，求证：$\bigcap\limits_{i\in I}X_i/\{Y|(\exists i)(i\in I$与$Y=X_i)\}$按包含关系排序的偏序集的最小元．并且，如果$E$为伪序数，则$x\in E$与$y\in E$与$x\subset y$为良序．

（7）求证：对任意序数a，存在唯一的伪序数E_a，使$Ord(E_a)=a$．并且，序数0、1、2、3相应的伪序数分别是$\varnothing$、$\{\varnothing\}$、$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$、$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$．

证明：

（1）即补充定理277．

（2）即补充定理278、补充定理279．

（3）即补充定理280．

（4）即补充定理281．

（5）即补充定理282、补充定理283．

（6）即补充定理284．

（7）前半部分即补充定理285，后半部分根据定义可证．

3.3 集合等势，基数（Ensembles équipotents, cardinaux）

定义 150. 等势（*équipotent*）

如果存在X到Y的双射，则称X和Y等势，记作$Eq(X,Y)$．

补充定理 286.

（1）$Eq(X,Y)$为等价关系．

（2）如果$Eq(X,Y)$，则$\tau_Z(Eq(X,Z))=\tau_Z(Eq(Y,Z))$．

证明：

（1）根据定义可证．

（2）根据补充定理286（1）、公理模式7可证．

定义 151. 基数（*cardinal*）

$\tau_Z(Eq(X,Z))$称为X的基数，记作$Card(X)$．

补充定理 287.

$Eq(Card(X),X)$．

证明：根据公理模式5可证.

定理 88.

$Eq(X, Y) \Leftrightarrow Card(X) = Card(Y)$.

证明：根据补充定理287可证.

补充定理 288.

$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X, Z)) \Leftrightarrow (\exists f)(f$为$X$到$Y$的单射).

证明：根据定义可证.

补充定理 289.

a为基数，则$Card(a) = a$.

证明：a为基数，故存在X，使$Card(X) = a$，根据补充定理287，$Eq(a, X)$，根据定理88，$Card(a) = a$.

定义 152. 基数*0*（*cardinal zéro*），基数*1*（*cardinal un*），基数*2*（*cardinal deux*）

$Card(\varnothing)$称为基数0；$Card(\{\varnothing\})$称为基数1；$Card(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$称为基数2. 在没有歧义的情况下也可以分别简称为0、1、2.

补充定理 290.

（*1*）$0 = \varnothing$;

（*2*）$Card(A) = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$;

（*3*）$Card(A) = 1 \Leftrightarrow (\exists x)(A = \{x\})$;

（*4*）$Card(A) = 2 \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(x \neq y$与$A = \{x, y\})$.

证明：

（1）$(\exists Z)(Z = \varnothing)$，即$\tau_Z(Z = \varnothing)) = \varnothing$，又因为$Z = \varnothing \Leftrightarrow Eq(\varnothing, Z)$，因此$0 = \varnothing$.

（2）根据定义可证.

（3）根据定义可证.

（4）根据定义可证.

定理 89. 基数之间的良序关系

$(X$为基数)与$(Y$为基数)与$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X, Z))$为X、Y之间的良序关系.

证明：

根据定义可知其为偏序关系.

令R为$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X, Z))$，对任意元素均为基数的集合E，令$A = \bigcup\limits_{X \in E} X$，根据定理78，在$A$上存在良序.

根据定理87，任何A的子集同构于A的一个片段，对任意$X \in E$，考虑和X等势的A的片段的集合，根据定理73（2），该集合有最小元，用$f(X)$表示该最小元.

当$f(X) \subset f(Y)$时，存在$f(X)$到$f(Y)$的单射，因此存在X到Y的单射，故$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X, Z))$；反过来，若$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X, Z))$，则存在X和$f(Y)$的某个子集等势，此时，若$f(Y) \subset f(X)$且$f(X) \neq f(Y)$，则根据定理87、定理75，$f(X)$的某个片段和X等势，与$f(X)$的定义矛盾，故公式R与$X \in E$与$Y \in E \Leftrightarrow f(X) \subset f(Y)$. 根据定理73（2），$A$的片段集合为良序集，得证.

记号定义 22. 基数之间的不等式（*inégalité entre cardinaux*）

$(X$为基数$)$与$(Y$为基数$)$与$(\exists Z)(Z \subset Y$与$Eq(X, Z))$记作$X \leq Y$或$Y \geq X$.

补充定理 291.

（*1*）X和Y的子集等势$\Leftrightarrow Card(X) \leq Card(Y)$.

（*2*）$X \subset Y \Rightarrow Card(X) \leq Card(Y)$.

（*3*）a为基数，对任意Y，如果$a \leq Card(Y)$，则存在$Z \subset Y$，使$Card(Z) = a$.

（*4*）a为基数，则$a \geq 0$.

（*5*）a为基数，则$a \neq 0 \Leftrightarrow a \geq 1$.

证明：

（1）根据补充定理288可证.

（2）由于X和X等势，根据补充定理291（1），得证.

（3）根据补充定理289，$Card(a) = a$，根据补充定理291（1），a和Y的子集等势，设该子集为Z，得证.

（4）令$Card(A) = a$，$\varnothing \subset A$，得证.

（5）令$Card(A) = a$，如果$a \neq 0$，则$a \neq \varnothing$，故存在$x \in A$，因此$\{x\} \subset A$；反过来，如果$a \geq 1$，则$a \neq \varnothing$，故$a \neq 0$，得证.

定理 90.

任意两个集合中，必有一个集合和另一个集合的子集等势.

证明：根据定理84、定理78可证.

定理 91.

两个集合之中的任何一个都和另一个集合的子集等势，则两个集合等势.

证明：根据定理86、定理78可证.

补充定理 292.

$(\exists X)(x = Card(X)$与$X \subset A)$是x上的集合化公式.

证明：由于$X \in \mathcal{P}(A)$，根据证明规则53可证.

补充定理 293.

a为基数，则(x为基数)与$x \le a$是x上的集合化公式.

证明：根据定义，(x为基数)与$x \le a \Leftrightarrow (\exists X)(x = Card(X)$与$X \subset a)$，根据补充定理292可证.

定理 92.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，则存在唯一的基数b，使对任意$i \in I$，$a_i \le b$，并且，如果c满足对任意$i \in I$，$a_i \le c$，则$b \le c$.

证明：令E为$(a_i)_{i\in I}$的和，则对任意$i \in I$，$a_i \le Card(E)$，令$F = \{x|(x$为基数)与$x \le Card(E)\}$，根据定理89，F为良序集，且对任意$i \in I$，$a_i \in F$，根据补充定理216，集族$(a_i)_{i\in I}$有最小上界b. 另一方面，如果c满足对任意$i \in I$，$a_i \le c$，且$c < b$，则与b为最小上界矛盾，得证.

定理 93.

如果存在X到Y的满射，则$Card(Y) \le Card(X)$.

证明：设满射为f，则其右逆s为Y到X的单射，得证.

补充定理 294.

f为X到Y的映射，则$Card(f\langle X\rangle) \le Card(X)$.

证明：f为X到$f\langle X\rangle$的满射，根据定理93得证.

定义 153. 基数乘积（*produit cardinal*），基数和（*somme cardinal*）

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，则$(a_i)_{i\in I}$的乘积及和的基数，分别称为该基数族的基数乘积及基数和，分别记作$\prod_{i\in I} a_i$、$\sum_{i\in I} a_i$.

补充定理 295.

令$(E_i)_{i\in I}$为集族，其乘积为P，其和为S，对任意$i \in I$，$Card(E_i) = a_i$，则$Card(P) = \prod_{i\in I} a_i$，$Card(S) = \sum_{i\in I} a_i$.

证明：对任意$i \in I$，存在E_i到a_i的双射，根据定理35、定理55，存在P到$\prod_{i\in I} a_i$、S到$\sum_{i\in I} a_i$的双射，得证.

补充定理 296.

$(a_i)_{i\in\varnothing}$为基数族，则$\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$；$\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$.

证明：根据补充定理116（4）、补充定理127（1）可证.

定理 94.

（*1*）令$(E_i)_{i\in I}$为集族，则$\bigcup\limits_{i\in I} E_i \leq \sum\limits_{i\in I} Card(E_i)$.

（*2*）令$(E_i)_{i\in I}$为两两不相交的集族，则$\bigcup\limits_{i\in I} E_i = \sum\limits_{i\in I} Card(E_i)$.

证明：

（1）根据补充定理116（1）可证.

（2）根据定理35可证.

定理 95. 基数的和与乘积的交换律、结合律、分配律

（*1*）令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，f为K到I的双射，则$\sum\limits_{k\in K} a_{f(k)} = \sum\limits_{i\in I} a_i$，$\prod\limits_{k\in K} a_{f(k)} = \prod\limits_{i\in I} a_i$.

（*2*）令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，$(J_l)_{l\in L}$为I的划分，则$\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{l\in L}(\sum\limits_{i\in J_l} a_i)$，$\prod\limits_{i\in I} a_i = \prod\limits_{l\in L}(\prod\limits_{i\in J_l} a_i)$.

（*3*）令$((a_{l,i})_{i\in J_l})_{l\in L}$为基数族，令$I = \prod\limits_{l\in L} J_l$，则$\prod\limits_{l\in L}(\sum\limits_{i} \in J_l ali) = \sum\limits_{f\in I}(\prod\limits_{l\in L} a_{l,f(l)})$.

证明：

（1）根据定理23、定理40可证.

（2）根据定理25、定理46、定理47可证.

（3）根据定理49、定理50可证.

定义 154. 两个基数的乘积（*produit de deux cardinaux*），两个基数的和（*somme de deux cardinaux*）

$x\neq y$，a，b为基数，基数族$(a_i)_{i\in\{x,y\}}$中，$a_x = a$，$a_y = b$，则$\prod\limits_{i\in\{x,y\}} a_i$称为$a$和$b$的乘积，记作$ab$或者$a\cdot b$，$\sum\limits_{i\in\{x,y\}} a_i$称为$a$和$b$的和，记作$a+b$.

定理 96. 两个基数的和与乘积的交换律、结合律、分配律

a、b、c为基数，则：

（*1*）$a+b=b+a$;

（*2*）$(a+b)+c=a+(b+c)$;

（*3*）$ab=ba$;

（*4*）$(ab)c=a(bc)$;

（*5*）$(a+b)c=ac+bc$.

证明：根据定理95可证.

定理 97.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，$J\subset I$，对于$i\in I$但$i\notin J$，$a_i=0$（或$a_i=1$），则$\sum\limits_{i\in J} a_i = \sum\limits_{i\in I} a_i$（或$\prod\limits_{i\in J} a_i = \prod\limits_{i\in I} a_i$）.

证明：

对于加法，$i \in I - J$时，$a_i = \varnothing$，根据定理95（2）可证.

对于乘法，$i \in I - J$时，a_i为单元素集合，根据补充定理138，$\prod\limits_{i \in J} a_i$到$\prod\limits_{i \in I} a_i$存在一一对应，得证.

定理 98.

a为基数，则$a + 0 = a$，$0 + a = a$，$a \cdot 1 = a$，$1 \cdot a = a$.

证明：根据定理97可证.

定理 99.

令$(a_i)_{i \in I}$、$(c_i)_{i \in I}$为基数族，a、b为基数，$b = Card(I)$，并且对任意$i \in I$，$a_i = a$，$c_i = 1$，则$ab = \sum\limits_{i \in I} a_i$，$b = \sum\limits_{i \in I} c_i$.

证明：$c_i = 1$，故c_i为单元素集合，故存在I到$\bigcup\limits_{i \in I} c_i$的双射，因此第二式成立．第一式根据定理95（3）、定理98可证.

定理 100.

令$(a_i)_{i \in I}$为基数族，$\prod\limits_{i \in I} a_i \neq 0$，则对任意$i \in I$，$a_i \neq 0$.

证明：根据定理44可证.

定理 101.

a、b为基数，如果$a + 1 = b + 1$，则$a = b$.

证明：令$X = a+1$，则$X = b+1$，则存在$A \subset X$、$B \subset X$，使$Card(A) = a$，$Card(B) = b$，故$Card(X - A) = 1$，$Card(X - B) = 1$，因此$X - A = \{x\}$、$X - B = \{y\}$．如果$x = y$，则$A = B$，故$a = b$；如果$x \neq y$，令$C = A \cap B$，则$A = C \cup \{y\}$，$B = C \cup \{x\}$，因此$a = Card(C) + 1$，$b = Card(C) + 1$，得证.

补充定理 297.

a、b为基数，则$a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow a = b$.

证明：根据公理模式7、定理101可证.

定义 155. 基数幂（*exponentiation des cardinaux*）

a、b为基数，则a到b的映射集合的基数，称为b的a次基数幂，记作b^a.

定理 102.

$Card(X) = a$，$Card(Y) = b$，则$Card(X^Y) = a^b$.

证明：根据定理38可证.

定理 103.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，a、b为基数，$b = Card(I)$，并且对任意$i \in I$，$a_i = a$，则$a^b = \prod\limits_{i\in I} a_i$.

证明：根据集合的乘积的定义可证.

定理 104.

令a为基数，$(b_i)_{i\in I}$为基数族，则$a^{(\sum\limits_{i\in I} b_i)} = \prod\limits_{i\in I}(a^{b_i})$.

证明：令S为$(b_i)_{i\in I}$的和，当$s \in S$时，令$a_s = a$，根据定理103，左边等于$\prod\limits_{s\in S} a_s$，根据定理95（2），右边等于$\prod\limits_{s\in S} a_s$，得证.

定理 105.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，b为基数，则$\prod\limits_{i\in I} {a_i}^b = (\prod\limits_{i\in I} a_i)^b$.

证明：对于$(x, y) \in I \times b$，令$a_{x,y} = a_x$，根据定理95（2），$\prod\limits_{i\in I} {a_i}^b = \prod\limits_{y\in b}(\prod\limits_{x\in I} a_{x,y})$，等于$\prod\limits_{(x,y)\in I\times b} a_{x,y}$，等于$\prod\limits_{x\in I}(\prod\limits_{y\in b} a_{x,y})$，等于$(\prod\limits_{i\in I} a_i)^b$.

定理 106.

a、b、c为基数，则$a^{bc} = (a^b)^c$.

证明：对任意$i \in c$，令$b_i = b$，则$a^{bc} = a^{\sum\limits_{i\in c} b_i}$，根据定理104，等于$\prod\limits_{i\in c} a^{b_i}$，等于$\prod\limits_{i\in c} a^b$，根据定理103，等于$(a^b)c$.

定理 107.

令a为基数，则$a^0 = 1$，$a^1 = a$，$1^a = 1$，如果$a \neq 0$，则$0^a = 1$.

证明：根据补充定理127（1）、补充定理132及定义可证.

定理 108.

$Card(X) = a$，则$Card(\mathcal{P}(X)) = 2^a$.

证明：令$A = \{a, b\}$. 对任意$Y \subset X$，令f_Y为X到A的映射，对于$x \in X$，如果$x \in Y$，则$f_Y(x) = a$，如果$x \in X - Y$，则$f_Y(x) = b$，令u为映射$Y \to f_Y(Y \in \mathcal{P}(X), f_Y \in A^X)$. 反过来，对任意$X$到$A$的映射$g$，$g^{-1}(a) \subset X$，令$v$为映射$g \to g^{-1}(a)(g \in A^X, g^{-1}(a) \in \mathcal{P}(X))$，则$u \circ v$和$v \circ u$均为恒等映射，根据定理20，$u$、$v$均为双射，故$Card(\mathcal{P}(X)) = Card(A^X)$，得证.

定理 109.

a、b均为基数，则当且仅当存在基数c使$a = b + c$时，$a \geq b$.

证明：$a \geq b \Leftrightarrow (\exists B)(B \subset a$与$Card(B) = b)$，令$c = Card(a-B)$，因此等价于$a = b+c$.

定理 110.

令$(a_i)_{i\in I}$、$({}_bi)_{i\in I}$为基数族，$(\forall I)(i\in I\Rightarrow a_i\geq b_i)$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i\geq\sum\limits_{i\in I}b_i$，$\prod\limits_{i\in I}a_i\geq\sum\limits_{i\in I}b_i$.

证明：根据定理45、补充定理97（1）可证.

补充定理 298.

令a、b、c为基数，$a\leq b\Rightarrow a+c\leq b+c$，$a\leq b\Rightarrow ac\leq bc$.

证明：根据定理110可证.

定理 111.

令$(a_i)_{i\in I}$为基数族，$J\subset I$，则$\sum\limits_{i\in J}a_i\leq\sum\limits_{i\in I}a_i$；如果对任意$i\in I-J$，$a_i\neq 0$，则$\prod\limits_{i\in J}a_i\leq\prod\limits_{i\in I}a_i$.

证明：令$b_i=a_i$（$i\in J$），$b_i=0$（或$b_i=1$）（$i\in I-J$），根据定理110可证.

定理 112.

a、a'、b、b'均为基数，$a\leq a'$，$b\leq b'$，则$a^b\leq {a'}^{b'}$.

证明：根据定理111、定理103可证.

定理 113. 康托尔定理

a为基数，则$2^a>a$.

证明：由于$x\to\{x\}$为a到$\mathcal{P}(a)$的单射，故$a\leq 2^a$.

对任意a到$\mathcal{P}(a)$的映射f，令X为a的元素中满足$x\notin f(x)$的元素集合，如果$x\notin X$，则$f(x)\neq X$，如果$x\in f(x)$，则$x\in a-X$，故$f(x)\neq X$，因此，$X\notin f(a)$，因此不存在a到$\mathcal{P}(a)$的满射，故$2^a>a$.

定理 114. 所有基数不能组成集合

非$Coll_x(x$为基数$)$.

证明：如果存在这样的集合U，令S为$(X)_{X\in U}$的和，则任何基数都和S的某个子集等势.令$s=Card(S)$，则$s<2^s$，但2^s也是基数，矛盾，

补充定理 299.

（1）$1+1=2$.

（2）$a+a=2a$.

证明：

（1）令$A=\{x\}$，$B=\{y\}$，其中$x\neq y$，则$A\cup B=\{x,y\}$，$A\cap B=\varnothing$，根据定理94（2）可证.

（2）根据补充定理299（1）、定理96（5）可证.

补充定理 300.

令$(a_i)_{i\in I}$、$(b_i)_{i\in I}$为基数族，对任意$i\in I$，$b_i\geq 2$：

（*1*）对任意$i\in I$，$a_i\leq b_i$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq\prod\limits_{i\in I}b_i$.

（*2*）对任意$i\in I$，$a_i<b_i$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i<\prod\limits_{i\in I}b_i$.

证明：

（1）对任意$i\in I$，令p_i为a_i到b_i的单射，p为映射$x\to p_{pr_2x}(pr_1x)$.

如果$Card(I)=0$，根据补充定理296，命题成立.

如果$Card(I)=1$，令$I=\{i\}$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i=a_i$，$\prod\limits_{i\in I}b_i=b_i$，命题成立.

如果$Card(I)=2$，令$I=\{i,j\}$，令$c_i=b_{i-1}$，$c_j=b_{j-1}$，则$b_ib_j\geq c_ic_j+c_i+c_j+1$，大于等于$b_i+b_j$，大于等于$a_i+a_j$，命题成立.

如果$Card(I)>2$，令f为映射$i\to\tau_x(x\in b_i)$，g为映射$i\to\tau_x(x\in b_i-f(i))$．令$A$为$(a_i)_{i\in I}$的和，对任意$x\in A$，如果$p(x)\neq f(pr_2x)$，令$h(x)=(\bigcup\limits_{i\in I-pr_2x}\{(f(i),i)\})\cup\{f(pr_2x),pr_2x\}$，如果$p(x)=f(pr_2x)$，令$h(x)=(\bigcup\limits_{i\in I-pr_2x}\{(g(i),i)\})\cup\{f(pr_2x),pr_2x\}$，根据定义，$h$为$A$到$\prod\limits_{i\in I}a_i$的单射，故$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq\prod\limits_{i\in I}b_i$.

（2）类似补充定理300（1）可证.

记号定义 23. 序数的第一射影的基数（*cardinal de la première projection d'une ordinal*）

令a为序数，在没有歧义的情况下，$Card(pr_1a)$可以简记为$Card(a)$.

补充定理 301.

（*1*）E、F为良序集，且E同构于F，则$Card(E)=Card(F)$.

（*2*）$Card(\text{序数}0)=\text{基数}0$；$Card(\text{序数}1)=\text{基数}1$.

（*3*）$(l_i)_{i\in I}$为序数族，I为良序集，则$Card(\sum\limits_{i\in I}l_i)=\sum\limits_{i\in I}Card(l_i)$，$Card(\prod\limits_{i\in I}l_i)=\prod\limits_{i\in I}Card(l_i)$.

（*4*）$Card(\text{序数}2)=\text{基数}2$.

（*5*）a、b为序数，且$Card(a)<Card(b)$，则$a<b$.

（*6*）序数$a\leq b$，则$Card(a)\leq Card(b)$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理248（2）、补充定理248（3）、补充定理290（2）、补充定理290（3）可证.

（3）根据定义可证.

（4）根据补充定理299（1）、补充定理301（3）可证.

（5）根据定义可证.

（6）根据定义可证.

补充定理 302.

$(\forall E)(\exists X)(X \subset E$与$X \notin E)$.

证明：根据定理113可证.

习题 121.

f为E到F的映射，g为F到E的映射，求证：存在E的子集A、B以及F的子集A'、B'，使$B = E - A$，$B' = F - A'$，且$A' = f\langle A\rangle$，$B = g\langle B'\rangle$.

证明：考虑$X \to E - g\langle F - f\langle X\rangle\rangle(X \in \mathcal{P}(E))$，根据习题63，存在$A$使$A = E - g\langle F - f\langle A\rangle\rangle$，令$A' = f\langle A\rangle$，$B' = F - f\langle A\rangle$，$B = E - A$，则$B = g\langle B'\rangle$.

注：原书习题121中f为单射的条件，是多余的.

习题 122.

E和F是不同的集合，求证：$E^F \neq F^E$，并且，如果$Card(E) = 2$，$Card(F) = 2 + 2$，则E^F、F^E至少有一个不是基数.

证明；如果E、F其中一个为$\varnothing$，显然成立.

如果均不为$\varnothing$，且$E^F = F^E$，对任意$G \in F^E$，$pr_1 G = E$，由于$G \in E^F$，故$pr_1 G = F$，因此$E = F$，矛盾.

如果$Card(E) = 2$，$Card(F) = 2 + 2$，由于$Card(E^F) = Card(F^E)$，故E^F、F^E至少有一个不是基数. 其中至少有一个不是基数.

习题 123.

令$(a_i)_{i\in I}$、$(b_i)_{i\in I}$为基数族，对任意$i \in I$，$b_i \geq 2$：

（1）对任意$i \in I$，$a_i \leq b_i$，求证：$\sum\limits_{i\in I} a_i \leq \prod\limits_{i\in I} b_i$.

（2）对任意$i \in I$，$a_i < b_i$，求证：$\sum\limits_{i\in I} a_i < \prod\limits_{i\in I} b_i$.

证明：即补充定理300.

习题 124.

令f为$\mathcal{P}(E) - \{\varnothing\}$到$E$的映射，并且，对任意$X \subset E$且$X \neq \varnothing$，$f(X) \in X$：

（1）b为基数，$A = \{x | x \in E$与$Card(f^{-1}\langle x\rangle)) \leq b\}$，令$a = Card(A)$，求证：$2^a \leq 1 + ab$.

（2）$B = \{x | x \in E$与$(X \in f^{-1}\langle x\rangle) \Rightarrow Card(X) \leq b)\}$，求证：$Card(B) \leq b$.

证明：

（1）令$Y = \bigcup_{x \in A} f^{-1}\langle x \rangle$，则$Card(Y) \leq ab$，对任意$y \in \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}$，$f(y) \in A$，故$y \in Y$，因此$\mathcal{P}(A) - \{\varnothing\} \subset Y$，所以$Card(\mathcal{P}(A)) \leq 1 + ab$，得证.

（2）令$x = f(B)$，则$x \in B$，故$Card(B) \leq b$.

习题 125.

$(l_i)_{i \in I}$为序数族，I为良序集，求证：$Card(\sum_{i \in I} l_i) = \sum_{i \in I} Card(l_i)$，$Card(\prod_{i \in I} l_i) = \prod_{i \in I} Card(l_i)$.

证明：即补充定理301（3）.

习题 126.

求证：$(\forall E)(\exists X)(X \subset E$与$X \notin E)$.

证明：即补充定理302.

3.4 自然数，有限集合（Entiers naturels, ensembles finis）

定义 156. 有限基数（*cardinal fini*），自然数（*entier naturel*），有限集合（*ensemble finie*），元素数目（*nombre d'éléments*），数目（*nombre*），有限族（*famille finie*）

对于基数a，如果$a + 1 \neq a$，则称a为有限基数，又称自然数．如果$Card(E)$为自然数，则称E为有限集合，此时，$Card(E)$称为E的元素数目．在没有歧义的情况下，某类项的集合的元素数目，也可以简称为该类项的数目．如果族的指标集是有限集，则称该族为有限族．

定理 115.

当且仅当$a + 1$为自然数时，a为自然数．

证明：根据补充定理297，$a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow a = b$，因此$a \neq a + 1 \Leftrightarrow a + 1 \neq a + 1 + 1$，得证.

定理 116.

n为自然数，基数$a \leq n$，则a为自然数；并且，如果$n \neq 0$，则存在唯一的自然数m使$n = m + 1$，且$a < n \Leftrightarrow a \leq m$.

证明：由于$a \leq n$，因此存在b使$n = a + b$，由于$n \neq n + 1$，因此$a + 1 + b \neq a + b$，因此$a + 1 \neq a$，故a为自然数．如果$n \neq 0$，则$n \geq 1$，根据定理109，存在自然数m使$n = m + 1$；根据定理101，m是唯一的.

令$a < n$时，设$n = a + b$，且$b \neq 0$，由于$b \leq n$，故b为自然数，因此存在c使$b = c + 1$，因此$m = a + c$，因此$a \leq m$，得证．

定理 117.

有限集合的的子集是有限集合．

证明：根据定理116可证．

定理 118.

X为有限集合E的子集，且$X \neq E$，则$Card(X) < Card(E)$．

证明：设$a \in E - X$，令$Y = E - \{a\}$，则$Card(X) \leq Card(Y)$，同时$Card(Y) + 1 = Card(E)$，根据定理116得证．

定理 119.

f为有限集合E到F的映射，则$f(E)$为有限集合．

证明：根据定理93，$Card(f(E)) \leq Card(E)$，根据定理116得证．

定理 120.

E和F的元素数目相同，f为E到F的映射，则以下三个公式等价：

第一，f是单射；

第二，f是满射；

第三，f是双射．

证明：若f是单射，则$Card(f(E)) = Card(E)$，等于$Card(F)$，根据定理118，f为满射；反过来，若f不是单射，设存在$x \neq x'$使$f(x) = f(x')$，则$f(E - \{x\}) = f(E)$，故$Card(f(E - \{x\})) \leq Card(E - \{x\})$，又因为$Card(E - \{x\}) < Card(E)$，故$f(E) < Card(E)$，因此$f$不是满射．综上得证．

证明规则 61. 数学归纳法

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n不是常数，如果“$(0|n)R$与$(\forall n)(n$为自然数与$R \Rightarrow (n+1|n)R)$”是M的定理，则$(\forall n)(n$为自然数$\Rightarrow R)$是M的定理．

证明：假设$(\exists n)(n$为自然数与非$R)$为真，令q为自然数，且非$(q|n)R$．由于集合$\{n|n$为自然数与$n \leq q$与$R\}$为非空良序集，故有最小元s，如果$s = 0$，矛盾；如果$s > 0$，令$s = s' + 1$，根据定理116，$s' < s$，因此$(s'|n)R$为真，故$(s|n)R$为真，矛盾．

补充证明规则 87.

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n、p不是常数，令S为$(\forall p)(n$为自然数与p为自然数与$p < n \Rightarrow (p|n)R)$，如果$S \Rightarrow R$是$M$的定理，则$(\forall n)(n$为自然数$\Rightarrow R)$是$M$的定理．

证明：$(0|n)S$为真，故$(0|n)R$为真．设R对n成立，由于$(n+1|n)S \Leftrightarrow S$与$R$，故$(n+1|n)S$为真，因此$(n+1|n)R$为真，根据证明规则61得证．

补充证明规则 88.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n不是常数，k为自然数，如果$(k|n)R$与$(\forall n)(n$为自然数与$n \geq k$与$R \Rightarrow (n+1|n)R)$是M的定理，则$(\forall n)(n$为自然数与$n \geq k \Rightarrow R)$是M的定理．

证明：令$m = n - k$，根据证明规则61可证．

补充证明规则 89.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n不是常数，a、b为自然数，如果$(a|n)R$与$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n < b$与$R \Rightarrow (n+1|n)R)$是M的定理，则$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n \leq b \Rightarrow R)$是M的定理．

证明：令S为$a \leq n$与$n \leq b \Rightarrow R$，根据证明规则61，S为真，故$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n \leq b \Rightarrow R)$．

补充证明规则 90.

包含2元特别符号$\in$、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*和公理模式*8*的等式理论M中，R为公式，n不是常数，a、b为自然数，如果$(b|n)R$与$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n < b$与$(n+1|n)R \Rightarrow R)$是M的定理，则$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n \leq b \Rightarrow R)$是M的定理．

证明：$(\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n < b$与$(n+1|n)R \Rightarrow R) \Leftrightarrow (\forall n)(n$为自然数与$a \leq n$与$n < b$与非$R \Rightarrow$ 非$(n+1|n)R)$．如果存在k，$a \leq k$与$k \leq b$，并且非$(k|n)R$为真，则根据补充证明规则89，非$(b|n)R$为真，矛盾．

定理 121.

令E为右方有向集（或左方有向集、格、全序集），则E的非空有限子集有上界（或有下界、有最小上界和最大下界、有最大元和最小元）．

证明：考虑右方有向集的情况，令n为1，命题显然成立．设公式对n成立，对于设元素数目为$n+1$的子集X，设$x \in X$，令$Y = X - \{x\}$，则Y有上界y，又由于$\{x, y\}$有上界，该上界也是X的上界，得证．其他情况同理可证．

定理 122.

任何非空全序有限集合是有最大元的良序集．

证明：根据定理121可证．

定理 123.

任何非空偏序有限集合有极大元．

证明：根据定理121，该集合为归纳集，根据定理80可证.

补充定理 303.

任何非空偏序有限集合有极小元.

证明：考虑按相反关系排序的偏序集，根据定理123可证.

定义 157. 有限性（*caractère fini*）

F的元素都是E的子集，如果$X \in F \Leftrightarrow (\forall Y)((Y \subset X)$与$(Y$为有限集合$) \Rightarrow (Y \in F))$，则称$F$具有有限性.

定理 124.

F的元素都是E的子集，且具有有限性，则F按包含关系排序的非空偏序集有极大元.

证明：令G为F的全序子集，设G的元素的并集为X，X的任意有限子集Y当中的元素y，存在$Z_y \in G$使$y \in Z_y$，根据定理122，Z_y（$y \in Y$）的集合为全序有限集合，因此有最大元S，故$Y \subset S$且$S \in G$，由于$S \in F$且F具有有限性，因此$Y \in F$，由于F具有有限性，因此$X \in F$．根据定理82，F有极大元.

补充定理 304.

当且仅当任意按包含关系排序的$\mathcal{P}(E)$的非空子集均有极大元时，E为有限集合.

证明：必要性根据定理123可证.

充分性：令F为E的有限子集的集合，假设其有极大元X，如果$X \neq E$，则存在$a \in X - E$，$X \cup \{a\}$也是E的有限子集，矛盾，故$X = E$，得证.

补充定理 305.

E为良序集，E按相反关系排序的偏序集也是良序集，则E为有限集合.

证明：如果$E = \varnothing$，命题显然成立；如果$E \neq \varnothing$，令$S = \{x|] \leftarrow, x[$为有限集合$\}$，则$S \neq \varnothing$．设S的最大元为y，则$] \leftarrow, y[gcup\{y\}$为有限集合，如果$E - (] \leftarrow, y[\cup\{y\}) \neq \varnothing$，则其有最小元$z$，则$] \leftarrow, z[$为有限集合，故$z \in S$，且$z > y$，矛盾．因此，$E =] \leftarrow, y[\cup\{y\}$，得证.

定义 158. 最长反链的长度（*longueur de l'antichaîne la plus longue*），最长反链（*antichaîne la plus longue*）

E为偏序集，$A = \{a|(\exists X)((X$为E的自由子集$)$与$Card(X) = a)\}$，如果A有最大元自然数k，则称A为E的最长反链的长度．对E的任意自由子集X，如果$Card(X) = k$，则称X为E的最长反链.

补充定理 306. 狄尔沃斯定理

E为偏序集，其最长反链的长度为自然数k，则存在E的划分Δ_F使$Card(F) = k$，并且，F的元素均为E的全序子集.

证明：

如果E为有限集合，设E的元素数目为n，对n用数学归纳法：

令a为E的极小元．对于$E-\{a\}$：

如果E的最长反链的长度为k，根据归纳假设，存在$E-\{a\}$的划分Δ_F使$Card(F)=k$，且F的个元素均为全序集．令$X=x|(\exists G)(G\in F$与x为G的最小元)，则$Card(X)=k$，故a和X的某个元素y是可比较的，设$y\in G$、$G\in F$，则将a加入G，可得到符合条件的划分．

如果果E的最长反链的长度为$k-1$，根据归纳假设，存在$E-\{a\}$的划分Δ_F使$Card(F)=k-1$，且F的个元素均为全序集．则将$\{a\}$单独作为一个集合，加入F中，可得到符合条件的划分．

根据证明规则61，对有限集合命题得证．

如果E不是有限集合，设命题对$k-1$成立，令G为满足下列条件的集合C的集合：

对E的任意有限子集F，均存在F的划分Δ_G使$Card(G)\leq k$，且G的个元素均为全序集，并使$C\cap F$是G的一个元素的子集．

根据定义，这样的集合均为全序集，同时，根据定理82，C有极大元C_0．

如果存在$E-C_0$的自由子集，其元素数目为k，令其为$\bigcup\limits_{i\in[1,k]}\{a_i\}$（对任意$i\in[1,k]$、$j\in[1,k]$、$i\neq j$，均有$a_i\neq a_j$），则对任意$i\in[1,k]$，均存在有限集合$F_i$，使其任何划分$\Delta_G$，只要$Card(G)\leq k$，则$(C_0\cup\{a_i\})\cap F_i$均不是$G$的任何一个元素的子集，故$a_i\in F_i$．

令$H=\bigcup\limits_{i\in[1,k]}F_i$，则$\bigcup\limits_{i\in[1,k]}\{a_i\}\subset H$．同时，存在$H$的某个划分$\Delta_G$，其满足$Card(G)=k$．

此时，令E_i为G的元素且满足$a_i\in E_i$，则存在$j\in[1,k]$，使$C_0\cap H\subset E_j$，令$P_i=E_i\cap F_j$，则$(P_i)_{i\in[1,k]}$是F_j的划分，故$(C_0\cup\{a_j\})\cap F_j\subset P_j$，矛盾．

因此，$E-C_0$的最长反链的长度小于k，由于C_0为全序集，$E-C_0$的最长反链的长度为$k-1$，根据归纳假设，存在$E-C_0$的划分Δ_G使$Card(G)\leq k-1$，将C_0加入该划分，即可证得命题对k也成立．

补充定理 307.

A为集合，$(X_i)i\in[1,m]$，$(Y_j)j\in[m+1,m+n]$均为A的有限子集族．自然数h满足下列条件：

第一，$m\leq n+h$，$h<m$；

第二，对任意自然数$r\in[1,m-h]$，以及$[1,m]$的元素数目为$r+h$的子集$\bigcup\limits_{k\in[1,r+h]}\{i_k\}$（对任意$x\in[1,r+h]$、$y\in[1,r+h]$、$x\neq y$，均有$i_k\neq i_y$），存在$[m+1,m+n]$的元素数目为$r$的子集$\bigcup\limits_{l\in[1,r]}\{j_l\}$（对任意$x\in[m+1,m+n]$、$y\in[m+1,m+n]$、$x\neq y$，均有$j_k\neq j_y$），使对任意$l\in[1,r]$，$\bigcup\limits_{k\in[1,r+h]}X_{i_k}$均和$Y_{j_l}$相交，

则存在A的有限集合B，$Card(B) \leq n+h$，并且所有的X_i（$i \in [1,m]$）和所有的Y_j（$j \in [m+1, m+n]$）均和B相交.

证明：令$G = \Delta_{[1,m+n]} \cup \{(x,y)|(x \in [1,m])与(y \in [m+1,m+n])与(X_x \cap Y_y \neq \varnothing)\}$，则$G$为在$[1,m+n]$上的偏序图.

令$[1,m+n]$按$(x,y) \in G$排序，则其最长反链的长度为$n+h_0$，根据补充定理306可证.

补充定理 308. 霍尔定理

E、F为有限集合，$x \to A(x)$为E到$\mathcal{P}(F)$的映射. 则当且仅当对E的任意子集H均有$Card(\bigcup\limits_{x \in H} A(x)) \geq Card(H)$时，存在$E$到$F$的单射$f$，使对任意$x \in E$均有$f(x) \in A(x)$.

证明：

必要性根据定义可证.

充分性：

令a、b互不相等，$G = \Delta_{(E\times\{a\})\cup(F\times\{b\})} \cup \{(x,y)|(x \in (E\times\{a\}))与(y \in (A(x)\times\{b\}))与y \in A(x)\}$，根据补充定理306，$(E\times\{a\})\bigcup\limits_{(} F\times\{b\})$存在$Card(F)$个全序集的划分$(x_i)_{i\in[0,Card(F)]}$.

对任意x_i，$Card(x_i \cap (F\times\{b\})) \leq 1$，$Card(x_i \cap (E\times\{a\})) \leq 1$. 因此，对任意$x_i$，$Card(x_i \cap (F\times\{b\})) = 1$，令$g$为映射$v \to x_i (v \in E)$，其中$x_i$为$(v,a)$所在的集合，$h$为映射$x_i \to pr_1(x_i \cap (F\times\{b\}))$，令$f = h \circ g$，$f$即满足要求.

补充定理 309.

E、F为有限集合，$x \to A(x)$为E到$\mathcal{P}(F)$的映射，$G \subset F$. 则当且仅当对E的任意子集H均有$Card(\bigcup\limits_{x \in H} A(x)) \geq Card(H)$，并且对任意$L \subset G$均有$Card(\{x|x \in E与A(x) \cap L \neq \varnothing\} \geq Card(L))$时，存在$E$到$F$的单射$f$，使对任意$x \in E$均有$f(x) \in A(x)$，且$G \subset f(E)$.

证明：

必要性根据定义可证.

充分性：

对$Card(E)$用数学归纳法：

$Card(E) = 0$时，命题显然成立，

设命题对$Card(E) \leq n$成立，当$Card(E) = n+1$时：

根据补充定理308，存在G到E的单射f、E到F的单射g，令其图分别为P、Q，如果$f\langle G\rangle = E$，则命题成立；否则，令$x \in E - f\langle G\rangle$，如果$g(x) \in F - G$，根据归纳假设命题对$E - x$、$F - g(x)$、$G$成立，故命题对$E$、$F$、$G$成立；如果$g(x) \in G$，根据归纳假设命题对$E - x$、$F - g(x)$、$G - g(x)$成立，故命题对$E$、$F$、$G$成立. 综上，得证.

定义 159. 流动性（*mobile*）

A为集合，R的元素都是A的有限子集，如果R满足下列条件，则称R具有流动性：

对R的任何两个不同元素X、Y，如果$z \in X \cap Y$，则存在$Z \in R$，使$Z \subset X \cup Y$且$z \notin Z$.

定义 160. 纯子集（*partie pure*）

$Q \subset A$，$R \subset \mathcal{P}(A)$，如果Q的任何子集都不是R的元素，则称Q为A关于R的纯子集.

习题 127.

（*1*）E为集合，$F(E)$是E的有限子集集合．令H为满足下列条件的$\mathcal{P}(E)$的子集G的集合：

第一，$\varnothing \in G$；

第二，对任意$X \in G$、$x \in E$，均有$X \cup \{x\} \in G$.

求证：$F(E)$是按包含关系排序的H的最小元.

（*2*）求证：E的任何两个有限子集A、B的并集是E的有限子集.

（*3*）E为有限集合，求证：$\mathcal{P}(E)$为有限集合.

证明：

（1）根据定义可证$F(E) \in H$．反过来，$\varnothing \in G$，因此基数为0的E的子集都是G的元素，设基数为n的E的子集都是G的元素，对任意基数为$n+1$的E的子集X，由于$X \neq \varnothing$，故令$x \in X$，根据定理94（2）、定理101，$Card(X - \{x\}) = n$，故$X - \{x\} \in G$，因此$X \in G$，根据证明规则61得证.

（2）令$H = \{X | X \subset E$与$X \bigcup_A$为有限集合$\}$，则$\varnothing \in H$，并且，对任意$X \in G$、$x \in E$，$Card(X \cup A \cup \{x\})$为$Card(X \cup A)$或$Card(X \cup A) + 1$，根据定理115，$X \cup \{x\} \in G$，根据习题127（1），$F(E) \subset H$，故$B \in H$，得证.

（3）当$Card(E) = 0$时，命题显然成立，设命题对$Card(E) = n$成立，当$Card(E) = n + 1$时：

令$x \in E$，$E' = E - \{x\}$，则$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E') \cup g(\mathcal{P}(E'))$，其中$g$为$\mathcal{P}(E')$到$\mathcal{P}(E)$的映射$X \rightarrow X \bigcup_{\{} x\}$．由于$\mathcal{P}(E)$为有限集合，$g$为$\mathcal{P}(E')$到$g(\mathcal{P}(E')$的双射，故$g(\mathcal{P}(E')$为有限集合，根据习题127（2），$\mathcal{P}(E)$为有限集合，根据证明规则61得证.

习题 128.

求证：当且仅当任何按包含关系排序的$\mathcal{P}(E)$的非空子集均有极大元时，E为有限集合.

证明：即补充定理304.

习题 129.

E为良序集，E按相反关系排序的偏序集也是良序集，求证：E为有限集合.

证明：即补充定理305.

习题 130.

E为有限集合，其元素数目$n \geq 2$，$C \subset E \times E$，对任意$x \neq y$，(x, y)和(y, x)有且只有一个是C的元素．求证：存在$[1, n]$到E的映射f，对任意$i \in [1, n-1]$，$(f(i), f(i+1)) \in C$．

证明：将命题加强为存在双射．

$n = 2$，命题显然成立．

设命题对n成立，对于元素数目为$n+1$的集合E，设$a \in E$，令$E' = E - \{a\}$，$C' = C \cap E' \times E'$，设f'为$[1, n]$到E'的双射并且关于图C'满足条件，令$A = \{x | x \in [1, n]$与$(f'(x), a) \in C\}$，$m = sup_E A$，则当$i \in [1, m]$时，$f(i) = f'(i)$，当$i = m+1$时，$f(i) = a$，如果$m < n$，则当$i \in [m+2, n+1]$时，$f(i) = f'(i-1)$．则f为满足条件的双射．根据补充证明规则88得证．

习题 131.

E为偏序集，其最长反链的长度为自然数k，求证：存在E的划分Δ_F使$Card(F) = k$，并且，F的元素，均为按E的偏序在该集合上导出的偏序排序的全序集．

证明：即补充定理306．

习题 132.

（*1*）A为集合，$(X_i) i \in [1, m]$，$(Y_j) j \in [m+1, m+n]$均为A的有限子集族．存在自然数h满足下列条件，且其中最小的为h_0：

第一，$m \leq n + h$，$h < m$；

第二，对任意自然数$r \in [1, m-h]$，以及$[1, m]$的元素数目为$r+h$的子集$\bigcup\limits_{k \in [1, r+h]} \{i_k\}$（对任意$x \in [1, r+h]$、$y \in [1, r+h]$、$x \neq y$，均有$i_k \neq i_y$），存在$[m+1, m+n]$的元素数目为$r$的子集$\bigcup\limits_{l \in [1, r]} \{j_l\}$（对任意$x \in [m+1, m+n]$、$y \in [m+1, m+n]$、$x \neq y$，均有$j_k \neq j_y$），使对任意$l \in [1, r]$，$\bigcup\limits_{k \in [1, r+h]} X_{i_k}$均和$Y_{j_l}$相交，

则存在A的有限集合B，$Card(B) \leq n + h_0$，并且所有的X_i（$i \in [1, m]$）和所有的Y_j（$j \in [m+1, m+n]$）均和B相交．

求证：存在A的有限集合B，其元素数目小于等于$n+h$，并且所有的X_i（$i \in [1, m]$）和所有的Y_j（$j \in [m+1, m+n]$）均和B相交．

（*2*）E、F为有限集合，$x \to A(x)$为E到$\mathcal{P}(F)$的映射．求证：当且仅当对E的任意子集H均有$Card(\bigcup\limits_{x \in H} A(x)) \geq Card(H)$时，存在$E$到$F$的单射$f$，使对任意$x \in E$均有$f(x) \in A(x)$．

（*3*）E、F为有限集合，$x \to A(x)$为E到$\mathcal{P}(F)$的映射，$G \subset F$．求证：当且仅当对E的任意子集H均有$Card(\bigcup\limits_{x \in H} A(x)) \geq Card(H)$，并且对任意$L \subset G$均有$Card(\{x | x \in E$与$A(x) \cap L \neq \varnothing\} \geq Card(L))$时，存在$E$到$F$的单射$f$，使对任意$x \in E$均有$f(x) \in A(x)$，且$G \subset f(E)$．

证明：

（1）根据补充定理307可证.

（2）即补充定理308.

（3）即补充定理309.

习题 133.

（*1*）E为有限格，求证：E的任意元素a，都是有限个不可约元素的最小上界.

（*2*）E为有限格，J为其不可约元素集合. 令$S(x)=\{y|y\in J与y\leq x\}$，求证：$x\to S(x)$为$E$到按包含关系排序的$\mathcal{P}(J)$的一个子集的同构，并且，$S(inf(x,y))=S(x)\cap S(y)$.

证明：

（1）令$J=\{v|v\in E与y为E的不可约元素\}$，$H=\{u|u\in E与(\exists X)(X\subset J与sup\ X=u)\}$. 如果$E-H\neq\varnothing$，则有极小元$z$，故$z=sup(x,y)$，且$x<z$、$y<z$，故$x\in H$、$y\in H$，因此$x$、$y$均为有限个不可约元素的最小上界，故$z\in H$，矛盾.

（2）根据习题133（1）可证.

习题 134.

（*1*）E为分配格，a是E的不可约元素，求证：$a\leq sup(x,y)\Rightarrow a\leq x或a\leq y$.

（*2*）E为有限分配格，J为其不可约元素集合. 令$S(x)=\{y|y\in J与y\leq x\}$，求证：$x\to S(x)$为$E$到按包含关系排序的$\mathcal{P}(J)$的一个子集的同构，并且，$S(sup(x,y))=S(x)\cup S(y)$；同时，令$J^*$为按在$J$上的偏序关系的相反关系排序的偏序集，$I=\{0,1\}$，$A(J^*,I)$为$J^*$到$I$的单增映射的集合，按$f\in A(J^*,I)与g\in A(J^*,I)与(\forall x)(x\in J^*\Rightarrow f(x)\leq g(x))$排序，则$E$同构于$A(J^*,I)$.

（*3*）E为有限分配格，J为其不可约元素集合. 令$S(x)=\{y|y\in J与y\leq x\}$. 令$(y_i)i\in[1,k]$为$]x,\to[$的所有两两不相等的极小元组成的元素族. 对任意$i\in[1,k]$，令$q_i$为$S(y_i)-S(x)$的一个元素，求证：对任意$i\in[1,k]$、$j\in[1,k]$且$i\neq j$，$q_i$和$q_j$是不可比较的.

（*4*）E为有限分配格，J为其不可约元素集合. 令$S(x)=\{y|y\in J与y\leq x\}$，$a$为$E$的最小元，$P=J-\{a\}$. 令$(q_i)i\in[1,k]$为$P$的元素族，且对任意$i\in[1,k]$、$j\in[1,k]$且$i\neq j$，$q_i$和$q_j$是不可比较的. 令$u=\underset{i\in[1,k]}{sup}\ q_i$，$v_j=\underset{i\in[1,k]-\{i\}}{sup}\ q_i$（$j\in[1,k]$），$x=\underset{i\in[1,k]}{inf}\ v_i$，$y_j=\underset{i\in[1,k]-\{i\}}{inf}\ v_i$，求证：对任意$i\in[1,k]$，$v_i<u$，$x<y_i$，并且，区间$]x,\to[$有$k$个两两不相等的极小元.

证明：

（1）即补充定理199（4）.

（2）根据补充定理199（4）可证.

（3）如果$q_i=q_j$，则$y_i=y_j$，矛盾；如果$q_i<q_j$，则q_i、x均为$\{yi,yj\}$的下界，故$x<q_i$，因此$q_i<y_j$，与y_j是最小元矛盾.

（4）由于$u = sup(v_i, q_i)$，因此$v_i < u$．如果$y_i = v_i$，则对任意$j \in [1, k]$且$i \neq j$，$v_i \leq v_j$，则$v_j \geq u$，矛盾，故$x < yi$．令$A_i = \{s|s > x与s \leq yi\}$，如果$A_i \cap A_j \neq \varnothing$（$i \neq j$），设$t \in A_i$、$t \in A_j$，则$t \leq x$，矛盾，故$A_i \cap A_j = \varnothing$．令$A_i$的其中一个极小元为$z_i$，故$z_1$、$z_2$、$\cdots$、$z_k$为两两不相等的极小元．

习题 135.

（1）令$(C_i)_{i \in [1,n]}$为全序集有限族，E为其乘积．A为E的内部格，求证：A最多有n个两两不可比较的不可约元素．

（2）令F为有限分配格，J为其不可约元素集合．a为F的最小元，$P = J - \{a\}$．令$A = \{a|(\exists X)((X为P的自由子集)与Card(X) = a)\}$，$A$的最大元为$n$，求证：$F$同构于全序集有限族的乘积的某个内部格．

证明：

（1）若A有r个两两不可比较的不可约元素且$r > n$，设其组成元素族$(a_i)_{i \in [1,r]}$．令$u = \underset{i \in [1,r]}{sup}\ a_i$，$v_j = \underset{i \in [1,r]-\{j\}}{sup}\ a_i$．则对任意$i \in [1, n]$，$pr_i(v_j)$之中最多有一个不等于$pr_i(u)$，因此，存在$j \in [1, r]$，使$v_j = u$，故$a_i \leq v_i$．根据补充定理199（1）、补充定理199（2）、补充定理199（3），A为分配格．但根据补充定理199（4），运用数学归纳法可得，$a_i \leq v_i$为假，矛盾．

（2）根据补充定理306，存在的P的划分Δ_G，其中G的元素均为全序集并且元素数目为n．将最小元a加入G的每个元素，得到全序集族$(Ci)_{i \in [1,n]}$．对任意$x \in F$，令x_i为$\{b|b \in Ci与b \leq x\}$在C_i上的最小上界，根据定义可证，$x \to \{(i, c)|(i, c)为有序对与(\exists i)(i \in [1, n]与c = x_i)\}$为$F$到$\prod_{i \in [1,n]} C_i$的某个内部格的同构．同时，令该映射为$f$，令$f_i = pr_i f$，当$x \in F$、$y \in F$时，令$z = sup(x, y)$，则对任意$i \in [1, n]$，$f_i(z) \geq sup(f_i(x), f_i(y))$，同时，$f_i(z) \leq sup(x, y)$，根据补充定理199（4），$fi_(z) \leq x$或$f_i(z) \leq y$，故$f_i(z) \leq sup(f_i(x), f_i(y))$，因此$f_i(z) =$
$sup(f_i(x), f_i(y))$，故$f(z) = sup(f(x), f(y))$，同理可证最大下界的情况．故该映射的值域为内部格．得证．

习题 136.

（1）求证：当且仅当E的偏序图是n个在E上的全序图的交集时，E同构于n个全序集的乘积的某个子集．

（2）E为偏序集，其偏序为F，求证：当且仅当存在在E上的偏序F'，使E的任何两个不同元素x、y，仅在按其中一个偏序排序的E上是可比较的时，E同构于两个全序集的乘积的子集．

（3）A是元素数目为n的有限集合，$E = \{X|(\exists x)(x \in A与X = \{x\})\} \cup \{X|(\exists x)(x \in A与X = A - \{x\})\}$，求证：$E$同构于$n$个全序集的乘积的某个子集，并且，当$m < n$时，$E$不能同构于任意$m$个全序集的乘积的任意子集，.

（1）充分性：

设E的偏序图为G，$G=\bigcap\limits_{i\in[1,n]}G_i$，其中$G_i$均为在$E$上的全序图．令$E_i$为按$(x,y)\in G$排序的全序集，则$E$同构于$\prod\limits_{i\in[1,n]}E_i$的一个子集．根据定义可证．

必要性：设E同构于$\prod\limits_{i}\in[1,n]F_i$的一个子集$A$，$F=\prod\limits_{i}\in[1,n]F_i$．令$(f_i)_{i\in[1,n]}$为$[1,n]$的排列族，其中$f_i(1)=i$，$G_i$为集族$(F_{f_i(j)})_{j\in[1,n]}$的字典式乘积在$E$上导出的全序的全序图，根据定义可证，$E$的偏序图为$\bigcap\limits_{i\in[1,n]}G_i$．

（2）根据习题136（1）可证．

（3）设E的偏序图为G，根据习题136（1），G为某个全序图族$(G_i)_{i\in[1,m]}$的并集，且$m<n$．令$F=\{X|(\exists x)(x\in A$与$X=\{x\})\}$，令全序图族$G_i\cap F\times F$相应的最大元为a_i，故存在$\{x\}\in F$，使$\{x\}$不是任何$G_i\cap F\times F$的最大元，则$(\{x\},A-\{x\})\in G$，矛盾．

另一方面，令$(a_i)_{i\in[1,m]}$为所有A的单个元素的集合组成的族，$b_i=A-a_i$，全序图G_1按照a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-1}、b_n、a_n、b_{n-1}、$\cdots$、b_1排序，G_2按照a_2、a_3、$\cdots$、a_n、b_1、a_1、b_n、$\cdots$、b_2排序，以此类推，则全序图族$(G_i)_{i\in[1,m]}$的并集为G，根据习题136（1），存在性得证．

习题 137.

令$R\subset\mathcal{P}(A)$：

（1）求证：A关于R的纯子集集合有极大元，并且，A关于R的任何纯子集都是某个极大元的子集．

（2）令M为A关于R的纯子集集合的某个极大元，求证：对任意$x\in\complement_A M$，存在唯一的有限集合$E_M(x)$，满足$E_M(x)\subset M$并且$E_M(x)\cup\{x\}\in R$．并且，对任意$y\in E_M(x)$，$E_M(x)\cup\{x\}-\{y\}$是A关于R的纯子集集合的某个极大元．

（3）M、N均为A关于R的纯子集集合的极大元，并且$N\cap\complement_A M$为有限集合，求证：$Card(M)=Card(N)$．

（4）M、N均为A关于R的纯子集集合的极大元，令$N'=N\cap\complement_A M$，$M'=M\cap\complement_A N$，求证：$M'\subset EM(x)$，并且$Card(M)=Card(N)$．

证明：

（1）对于A关于R的任何纯子集E，令$X=\{M|E\subset M$与M为A关于R的纯子集$\}$，根据定理82，X有极大元，得证．

（2）前半部分根据定义可证．根据定义可证，$E_M(x)\cup\{x\}-y$是纯子集．设它不是极大元，其是极大元N的子集，则$E_M(x)\cup\{x\}\in R$、$N\cup\{y\}\in R$，矛盾．

（3）根据习题137（2），对$Card(N\cap\complement_A M)$运用数学归纳法可证．

（4）对任意$x\in N'$，存在$y\in M'$且$y\notin E_M(x)$，如果存在$z\in M'$且$z\notin E_M(x)$，则$E_M(x)\cup\{x\}-\{y\}$是A关于R的纯子集集合的某个极大元，故$(E_M(x)\cup\{x\}-\{y\})\cup\{z\}$有

一个子集是R的元素，矛盾，因此，$M' \subset E_M(x)$，且M'为有限集合，同理N'为有限集合，因此$Card(M) = Card(N)$.

注：原书习题137（4）有误.

3.5 自然数的运算（Calcul sur les entiers）

定理 125. 有限个自然数的和、积均为自然数

令$(a_i)_{i\in I}$为自然数有限族，则$\sum\limits_{i\in I} a_i$、$\prod\limits_{i\in I} a_i$均为自然数.

证明：

先证自然数a、b的和是自然数：

$b = 0$，$a + b = a$，命题显然成立，假设命题对b成立，即$a + b$为自然数，则$a + (b + 1) = (a + b) + 1$，根据定理115，其为自然数，得证.

令$n = Card(I)$，当$n = 0$，$\sum\limits_{i\in I} a_i = 0$，命题显然成立；设命题对$n$成立，则对于$Card(I) = n + 1$，令$I = J \cup \{k\}$，其中$k \notin J$，则$Card(J) = n$，故$\sum\limits_{i\in J} a_i$为自然数，而$\sum\limits_{i\in I} a_i = (\sum\limits_{i\in J} a_i) + a_k$，因此也是自然数.

对于乘法，根据定理99及上述证明，自然数a、b的乘积为自然数．类似加法可证.

定理 126.

令$(X_i)_{i\in I}$为有限集族，则$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$为有限集合.

证明：根据定理125，$(X_i)_{i\in I}$的和S为有限集合．根据补充定理116（1），存在S到$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$的满射，得证.

定理 127.

令$(X_i)_{i\in I}$为有限集族，则$\prod\limits_{i\in I} X_i$为有限集合.

证明：根据定理125可证.

定理 128. 自然数的自然数次幂为自然数

令a、b为自然数，则a^b为自然数.

证明：根据定理127、定理103可证.

定理 129.

有限集合的子集集合是有限集合.

证明：根据定理128、定理108可证.

定理 130.

a、b为自然数，则$a < b \Leftrightarrow (\exists c)(c > 0$与$b = a + c)$.

证明：由于$a < b$，故存在c使$b = a + c$，由于$a \neq b$，故$c > 0$；反过来，如果$b = a + c$，由于$c \geq 1$，故$a < b$.

定理 131.

令$(a_i)_{i\in I}$、$(b_i)_{i\in I}$为自然数有限族，$(\forall I)(i \in I \Rightarrow a_i \leq b_i)$，且$(\exists I)(i \in I$与$a_i < b_i)$，则$\sum\limits_{i\in I} a_i < \sum\limits_{i\in I} b_i$；如果$(\forall I)(i \in I \Rightarrow b_i \neq 0)$，则$\prod\limits_{i\in I} a_i < \prod\limits_{i\in I} b_i$.

证明：设$a_j < b_j$，则对$I - \{j\}$，根据定理110，$\sum\limits_{i\in I-\{j\}} a_i \leq \sum\limits_{i\in I-\{j\}} b_i$；令$b_j = a_j + c$，则$c > 0$，故$c + \sum\limits_{i\in I} a_i \leq \sum\limits_{i\in I} b_i$，因此$\sum\limits_{i\in I} a_i < \sum\limits_{i\in I} b_i$．根据定理110，$\prod\limits_{i\in I-\{j\}} a_i \leq \prod\limits_{i\in I-\{j\}} b_i$，因此$\prod\limits_{i\in I} a_i \leq c \cdot \prod\limits_{i\in I-\{j\}} b_i + \prod\limits_{i\in I} b_i$．根据定理100，$c \cdot \prod\limits_{i\in I-\{j\}} b_i > 0$，得证.

定理 132.

a、a'、b为自然数，$b > 0$，$a < a'$，则$a^b < a'^b$.

证明：根据定理103、定理131可证.

定理 133.

a、b、b'为自然数，$b < b'$，$a > 1$，则$a^b < a^{b'}$.

证明：设$b' = b + c$，则$c > 0$．$a^{b'} = a^b \cdot a^c$．由于$c > 0$，故$a^c \geq a$，因此$a^c > 1$，故$ab < ab'$.

定理 134.

a、b、b'为自然数，则$a + b = a + b' \Leftrightarrow b = b'$，如果$a > 0$，则$ab = ab' \Leftrightarrow b = b'$.

证明：若$b < b'$，根据定理131，$a + b < a + b'$，$ab < ab'$；若$b > b'$，根据定理131，$a + b > a + b'$，$ab > ab'$；若$b = b'$，则$a + b = a + b'$，$ab = ab'$，得证.

补充定理 310.

a、b、b'为自然数，则$a + b < a + b' \Leftrightarrow b < b'$，如果$a > 0$，则$ab < ab' \Leftrightarrow b < b'$.

证明：类似定理134可证.

补充定理 311.

a、b是自然数，$b > 1$，则$a < b^a$.

证明：根据补充定理310可证.

定理 135. 自然数的差的唯一性

a、b为自然数，$a \leq b$，则存在唯一的自然数c，使$b = a + c$.

证明：根据定理109，存在性成立．若$b=a+c$、$b=a+c'$，根据定理134，$c=c'$，唯一性成立．

定义 161. 自然数的差（*différence de entiers*）

a、b、c为自然数，$b=a+c$，则称c为b和a的差，记作$b-a$.

补充定理 312.

a、b为自然数，$a\leq b$，c为b和a的差，则c小于a，并且a是b和c的差.

证明：根据定理95（1）可证.

定理 136.

a、b为自然数，则映射$x\to x+a$为区间$[0,b]$到区间$[a,a+b]$的同构，且为严格单增映射，$y\to y-a$为其逆同构.

证明：令$y=x+a$，则$x=y-a$．根据补充定理310，$x\in[0,b]\Leftrightarrow y\in[a,a+b]$．因此，$x\to x+a$、$y\to y-a$均为双射，且互为逆映射．同时，$x\to x+a$、$y\to y-a$均为严格单增映射．根据定义得证.

定理 137.

a、b为自然数，$a\leq b$，则区间$[a,b]$的元素数目为$b-a+1$.

证明：如果$a=0$，$b=0$，命题显然成立．如果命题对$[0,b]$成立，则$[0,b+1]=[0,b]\cup\{b+1\}$，显然命题对$[0,b+1]$成立.

如果$a>0$，则区间$[a,b]$同构于$[0,b-a]$，故命题也成立.

定理 138.

非空有限全序集的基数为n，则该集合同构于区间$[1,n]$.

证明：根据定理84，该非空有限全序集同构于区间$[1,n]$的某个区间，或者区间$[1,n]$同构于该非空有限全序集的某个区间．由于同构集合等势，根据定理118，得证.

定义 162. 有限序列（*suite finie*），序列的长度（*longueur d'une suite*）

如果族的指标集的元素都是自然数，则称该族为有限序列；指标集的基数，称为该序列的长度.

补充定理 313.

有限序列的长度为n，则区间$[1,n]$同构于指标集.

证明：根据定理138可证.

定义 163. 第k项（*k-éme terme*），首项（*premier terme*）

令f为区间$[1,n]$到有限序列$(t_i)_{i\in I}$的指标集I的同构，则$t_{f(k)}$称为该有限序列的第k项，$t_{f(1)}$称为该有限序列的首项.

定义 164. 特征函数（*fonction caractéristique*）

$A \subset E$，E到$\{0,1\}$的映射f满足下列条件：

当$x \in A$时，$f(x) = 1$；当$x \in E - A$时，$f(x) = 0$，

则称f为E的子集A的特征函数，记作ψ_A.

补充定理 314.

对于E的子集A、B，$A = B \Leftrightarrow \psi_A = \psi_B$.

证明：根据定义可证.

定理 139.

对于E的子集A、B：

（*1*）$\psi_E - A(x) = 1 - \psi_A(x)$.

（*2*）$\psi_A \cap B(x) = \psi_A(x)\psi_B(x)$.

（*3*）$\psi_A \cup B(x) + \psi_A \cap B(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x)$.

证明：根据定义可证.

定理 140. 自然数的商和余数的唯一性

a、b为自然数，$b > 0$，则存在唯一的一对q、r，使q、r均为自然数，$a = bq + r$，并且$r < b$.

证明：由于$ba \geq a$，因此$\{q|q{:}6p$与$bq \leq a\} \subset [1, a]$，故$\{q|q{:}6p$与$bq \leq a\}$为全序有限集，令其最大元为$q$，则$bq \geq a$，令$r = a - bq$，$r < b$，存在性得证．令$q$、$r$和$q'$、$r'$都符合条件，则$bq + r = bq' + r'$，如果$q < q'$，设$q' = q + c$，$c > 0$，则$r = bc + r'$，因此$r > b$，矛盾，同理$q' < q$也矛盾，因此$q = q'$，故$r = r'$，唯一性得证.

定义 165. 自然数的商（*quotient de entiers*），自然数的余数（*reste de entiers*），整除（*divisible*），约数（*diviseur*）

a、b为自然数，$b > 0$，q、r均为自然数，$a = bq + r$，并且$r < b$，则q称为a除以b的商，记作$[a/b]$，r称为a除以b的余数．如果$r = 0$，则称a能被b整除，或称b整除a，或称b是a的约数，此时商记作a/b.

补充定理 315.

a、b、c均为自然数，$b > 0$，$c > 0$，且b整除a、c整除b，则c整除a，且$a/c = (a/b)(b/c)$.

证明：根据定义可证.

补充定理 316.

a、b、c均为自然数，$c > 0$，且c整除a、c整除b，则c整除$a + b$，且$(a + b)/c = a/c + b/c$；如果$a \geq b$，则c整除$a - b$，且$(a - b)/c = a/c - b/c$.

证明：根据定义可证.

补充定理 317.

（1）a为自然数，$a>0$，则a整除0.

（2）a为自然数，则1整除a.

证明：根据定义可证.

补充定理 318.

a、b、c为自然数，a除以c的商为q，余数为r，b除以c的商为q'，余数为r'，则$a<b \Leftrightarrow (q<q')$或$((q=q')$与$(r<r'))$.

证明：由于$a=cq+r$，$b=cq'+r'$，如果$a<b$，且$q>q'$，则$cq\geq cq'+c$，由于$r'<c$，故$cq+r>cq'+r'$，矛盾．如果$q=q'$，则$r<r'$．反过来，如果$q<q'$，则$q+1\leq q'$，又因为$r<c$，故$cq+r<c(q+1)$，因此$a<cq'$，故$a<b$.

定义 166. 偶数（*pairs*）、奇数（*impairs*）

a为自然数，如果2整除a，则称a为偶数，否则，称a为奇数.

补充定理 319.

a为自然数，则a为偶数 $\Leftrightarrow (\exists n)(n$为自然数与$a=2n)$，$a$为奇数 $\Leftrightarrow (\exists n)(n$为自然数与$a=2n+1)$.

证明：根据定义可证.

定理 141.

令b、k、h为自然数，$b>1$、$k>0$，$(J_h)_{h\in[0,k-1]}$，对任意$h\in[0,k-1]$, $J_h\in[0,b-1]$，令E_k为该族的字典式乘积，令r为$(r_h)_{h\in[0,k-1]}$，则映射$r\to\sum\limits_{h\in[0,k-1]}r_hb^{k-h-1}$为$E_k$到$[0,b^k-1]$的同构.

证明：

当$k=1$时，命题显然成立.

如果命题对k成立，令E_k到$[0,b^k-1]$的映射为f：

令$(r_h)_{h\in[0,k]}\in E_{k+1}$，则$\sum\limits_{h\in[0,k]}r_hb^{k-h}\leq r_0b^k+b^k-1$，由于$r_0+1\leq b$，故$\sum\limits_{h\in[0,k]}r_hb^{k-h}<b^{k+1}-1$，即$r\to\sum\limits_{h\in[0,k]}r_hb^{k-h}$为$E_{K+1}$到$[0,b^{k+1}-1]$的映射，设该映射为$g$.

对于$r\in E_{k+1}$（$r=(r_h)_{h\in[0,k]}$），$r'\in E_{k+1}$（$r'=({r'}_h)_{h\in[0,k]}$），令$s=(r_{i+1})_{i\in[0,k-1]}$，$s'=({r'}_{i+1})_{i\in[0,k-1]}$，则$g(r)=r_0b^k+f(s)$，$g(r')={r'}_0b^k+f(s')$：

如果$g(r)=g(r')$，由于$f(s)<b^k$、$f(s')<b^k$，根据定理140，$r=r'$，故g为单射.

同时，对任意$x\in E_{k+1}$，根据定理140，存在$q<b$、$t<b^k$，使$x=qb^k+t$，令$r_0=q$，$s=f^{-1}(t)$，$r_i=s_{i-1}$（$i\in[1,k]$），则$g(r)=x$，故g为满射.

如果$r < r'$，则：

若$r_0 < r'_0$，则$g(r) < r_0 b^k + b^k$，$g(r') \geq r'_0 b^k$，又因为$r_0 + 1 \leq r'_0$，因此$g(r) \leq g(r')$；

若$r_0 = r'_0$，则令j为$\{i | i \in [1,k]与r_i \neq r'_i\}$的最小元，故$r_j < r'_j$，因此$s < s'$，根据归纳假设，$f(s) < f(s')$，因此$g(r) \leq g(r')$.

故g为单增函数.

综上，根据补充定理166，得证.

补充定理 320. 自然数展开的唯一性

令a、b为自然数，$b > 1$、$a > 0$，则存在唯一的自然数k以及族$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$，使$(\forall h)(h \in [0,k-1] \Rightarrow r_k \in [0,k-1])$，$r_0 \neq 0$，并且$a = \sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$.

证明：根据补充定理311，$a < b^a$，因此$\{x | x \leq a与a < b^x\}$有最小元k，因此$b^{k-1} \leq a$，$a < b^k$. 根据定理141，存在唯一的族，$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$，使$(\forall h)(h \in [0,k-1] \Rightarrow r_k \in [0,k-1])$并且$a = \sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$. 此时，如果$r_0 = 0$，则令$s_i = r_{i+1}$（$i \leq k-2$），根据定理141，$\sum\limits_{h \in [0,k-2]} s_h b^{k-h-2} \leq b^{k-1}$，故$a \leq b^{k-1} - 1$，矛盾，因此$r0 \neq 0$.

如果另有k'满足条件，若$k' < k$，则$a \leq b^{k'} - 1$，故$a \leq b^{k-1} - 1$，矛盾；若$k < k'$，则$a \geq b^k$，同样矛盾. 得证.

定义 167. 自然数的展开（*développement d'un entier*）

令a、b为自然数，$b > 1$、$a > 0$，如果自然数k以及族$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$，使$(\forall h)(h \in [0,k-1] \Rightarrow r_k \in [0,k-1])$，$r_0 \neq 0$，并且$a = \sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$，则称$(r_h)_{h \in [0,k-1]}$为$a$基于$b$的展开.

注：原书将$\sum\limits_{h \in [0,k-1]} r_h b^{k-h-1}$称为$a$基于$b$的展开，但这一式子本身等于$a$，不应作为单独的概念，故修改.

定理 142. 乘法原理

a、b为基数，$Card(E) = a$，$Card(E) = b$，f为E到F的满射，对任意$y \in F$，$Card(f^{-1}\langle y \rangle) = c$，则$a = bc$.

证明：对任意$y \neq y'$，$f^{-1}\langle y \rangle \cap f^{-1}\langle y' \rangle = \varnothing$，因此$(f^{-1}\langle y \rangle)_{y \in F}$是$E$的划分. 根据定理94（2）、定理99可证.

定义 168. 阶乘（*factorielle*）

n为自然数，则$\prod\limits_{i \in [1,n]} i$称为$n$的阶乘，记作$n!$.

补充定理 321.

$0! = 1$；$1! = 1$.

证明：根据定义可证.

定理 143.

m、n为自然数，$m \le n$，A的元素数目为m，B的元素数目为n，A到B的单射的数目为$n!/(n-m)!$.

证明：$m=0$，则$A=\varnothing$，故仅有单射$(\varnothing,\varnothing,B)$，因此元素数目为1，故命题对0成立.

设命题对m成立，考虑$m+1$：

设$a \in A$，令$A' = A - \{a\}$．F为A到B的单射，F'为A'到B的单射，g为映射$f \to f'|A$，由于$f(a) \in B - f'(A')$，其元素数目为$n-m$，故对任意f'，$g^{-1}\langle f' \rangle$的元素数目为$n-m$，根据定理142，F的数目为$(n!/(n-m)!) \cdot (n-m)$，得证.

定理 144.

A的排列的数目为$n!$.

证明：根据定理143可证.

补充定理 322.

E为元素数目为n的集合，$(p_i)_{i\in[1,h]}$为自然数有限序列，$\sum\limits_{i\in[1,h]} p_i = n$．则存在两两不相交的集族$(X_i)i \in [1,h]$，其为$E$的覆盖且满足$(\forall i)(i \in [1,h] \Rightarrow Card(X_i) = p_i)$.

证明：若$h=0$，则$n=0$，$E=\varnothing$，$\varnothing$显然满足条件.

设命题对h成立，则对$h+1$：

由于E存在元素数目为$\sum\limits_{i\in[1,h]} p_i$的子集$E'$，其存在满足条件的覆盖$(X_i)_{i\in[1,h]}$．因此$E-E'$的元素数目为$p_{h+1}$，则$(p_i)_{i\in[1,h]} \cup (h+1, E-E')$是满足条件的覆盖．得证.

定理 145.

E的元素数目为n，$(p_i)_{i\in[1,h]}$为自然数有限序列，$\sum\limits_{i\in[1,h]} p_i = n$．满足$(\forall i)(i \in [1,h] \Rightarrow Card(X_i) = p_i)$且两两不相交的$E$的覆盖$(X_i)_{i\in[1,h]}$的数目为$n!/\prod\limits_{i\in[1,h]}(p_i!)$.

证明：令G为E的排列集合，P为满足条件的覆盖的集合．根据补充定理322，P不是空集.

令$(A_i)_{i\in[1,h]}$为符合条件的一个覆盖，对G的任何一个元素f，则$(f(A_i))_{i\in[1,h]}$也是P的元素．令该覆盖为$g(f)$.

则对任意$(X_i)_{i\in[1,h]} \in P$，如果$g(f) = (X_i)_{i\in[1,h]}$，则对任意$i \in [1,h]$，$f(A_i) = X_i$．根据定理33，集族$(f_i)_{i\in I}$（其中$f_i = f|A_i$）与f一一对应，令T_i表示A_i到X_i的双射的集合，则其数目为$p_i!$，因此使$g(f) = f(X_i)_{i\in[1,h]}$的f，与$\prod\limits_{i\in[1,h]} T_i$的元素一一对应，故其数目为$\prod\limits_{i\in[1,h]}(p_i!)$，由于$G$的元素数目为$n!$，根据定理142得证.

定理 146.

A的元素数目为n，$p \le n$，则元素数目为p的A的元素的子集数目为$n!/(p!(n-p)!)$.

证明：根据定理145可证.

定义 169. 组合数（*coefficient binomial*）

n、p为自然数，且$p \leq n$，则$n!/(p!(n-p)!)$称为n取p的组合数，记作$\binom{n}{p}$.

补充定理 323.

n、p为自然数，且$p \leq n$，则$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

证明：根据定义可证.

定理 147.

E、F均为全序有限集，元素数目分别是p、n，$p \leq n$，则E到F的严格单增映射的数目为$\binom{n}{p}$.

证明：全序有限集为良序集，根据定理84，E到F的任何元素数目为p的子集的严格单增映射唯一，根据定理146可证.

定理 148.

$\sum\limits_{p \in [0,n]} \binom{n}{p} = 2^n$.

证明：根据定理108可证.

补充定理 324.

n为自然数，则$\binom{n}{0} = 1$.

证明：根据定义可证.

补充定理 325.

n为自然数且$n > 0$，则$\binom{n}{1} = n$.

证明：令A的元素数目为n，A的元素数目为1的子集和A的元素一一对应，得证.

定理 149.

$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

证明：

令E的元素数目为$n+1$，其中一个元素为a，令$E' = E - \{a\}$，F为E的元素数目为$p+1$的子集的集合，G为E'的元素数目为p或$p+1$的子集的集合.

对任意$A \in F$，$A \cap E' \in G$，因此，$A \to A \cap E'$为F到G的映射，令其为f；且对任意$B \in G$，如果B的元素数目为p，则$f(B \cup \{a\}) = B$，如果B的元素数目为$p+1$，则$f(B) = B$．令$A \neq A'$，如果$a \notin A$、$a \notin A'$，则$f(A) = A$，$f(A') = A'$，$f(A) \neq f(A')$；如果$a \in A$、$a \in A'$，则$f(A) = A - \{a\}$，$f(A') = A' - \{a\}$，$f(A) \neq f(A')$；如果$a \in A$、$a \notin A'$，则$f(A)$元素数目为p，$f(A')$元素数目为$p+1$，$f(A) \neq f(A')$；如果$a \in A'$、$a \notin A$，同理$f(A) \neq f(A')$.

综上，f是F到G的双射．得证.

补充定理 326.

n为自然数且$n > 1$，则$\binom{n}{2} = n(n-1)2$.

证明：$n = 2$时，命题显然成立．设命题对n成立，根据定理149，$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$，得证.

补充定理 327.

n、m为自然数，则$\sum\limits_{i\in[0,m-1]} \binom{n+i}{n} = \binom{n+m}{n+1}$.

证明：根据定理149，对i用数学归纳法可证.

补充定理 328.

（1）t、r、q为自然数，则$\sum\limits_{i\in[0,r]} \binom{t+r-i}{t}\binom{q+i}{q} = \binom{q+t+r+1}{r}$.

（2）p、q、n为自然数，且$p \leq n$，$q < p$，则$\sum\limits_{k\in[q+1,n-p+q+1]} \binom{n-k}{p-q-1}\binom{k-1}{q} = \binom{n}{p}$.

证明：

（1）如果$t = 0$，对i使用数学归纳法可证命题成立．如果$r = 0$，根据定义，命题成立．根据定理149，对$r + t$使用数学归纳法可证.

（2）令$t = p-q-1$，$i = k-q-1$，$r = n-p$，根据补充定理328（1）、补充定理323可证.

定理 150.

n为自然数，且$n > 0$，则满足$i \in [1,n]$、$j \in [1,n]$且$i < j$（或$i \leq j$）的有序对(i,j)的数目是$n(n-1)/2$（或$n(n+1)/2$）.

证明：满足$i \in [1,n]$、$j \in [1,n]$且$i < j$的有序对(i,j)，与$[1,n]$的元素数目为2的子集一一对应，故为$n(n-1)/2$；满足$i \in [1,n]$、$j \in [1,n]$且$i < j$的有序对(i,j)，与$[1,n]$的元素数目为2或1的子集一一对应，故为$n(n+1)/2$.

定理 151.

n为自然数，且$n > 0$，则$\sum\limits_{i\in[1,n]} i = n(n+1)/2$.

证明：对于满足$i \in [1,n]$、$j \in [1,n]$且$i \leq j$的有序对(i,j)，对任意$j \in [1,n]$，有序对(i,j)的数目为j，根据定理150得证.

定理 152.

n、h为自然数，E为元素数目为h的集合，E到$[0,n]$且满足$\sum\limits_{x\in E} u(x) \leq n$（或$\sum\limits_{x\in E} u(x) = n$且$h > 0$）的映射$u$的数目是$\binom{n+h}{n}$（或$\binom{n+h-1}{h-1}$）.

证明：

设g为$[1,h]$到E的双射.

对于E到$[0,n]$且满足$\sum\limits_{x\in E} u(x)\le n$的映射$u$，定义$f_u$如下：$f_u(1)=u(g(1))+1$，当$1\le i$与$i\le h-1$时，$f_u(i+1)=f_u(i)+1+u(g(i+1))$；则$f_u$为$[1,h]$到$[1,n+h]$的严格单增映射. 根据定义可证$u\to f_u$为双射，故$u$的集合的元素数目为$\binom{n+h}{n}$.

满足$\sum\limits_{x\in E} u(x)=n$的$u$的集合的元素数目为$\binom{n+h}{n}-\binom{n+h-1}{n-1}$，故等于$\binom{n+h-1}{h-1}$.

补充定理 329. 二项式定理

a、b、n为自然数：

（1）$(a+b)^n=\sum\limits_{i\in[0,n]}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$.

（2）如果$a\ge b$，则$(a-b)^n=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为偶数}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i-\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$.

（3）n为自然数，则：$\sum\limits_{i\in[0,n]与i为偶数}\binom{n}{i}=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}$.

证明：

（1）根据定理149，对n用数学归纳法可证.

（2）根据定理149，对n用数学归纳法可证.

（3）令$a=1$，$b=1$，根据补充定理329（2）可证.

补充定理 330.

$(a_i)_{i\in[0,n]}$、$(b_i)_{i\in[0,n]}$为自然数族，则$(\forall x)(x为自然数\Rightarrow\sum\limits_{i\in[0,n]}a_ix^i=\sum\limits_{i\in[0,n]}b_ix^i)\Leftrightarrow(\forall i)(i\in[0,n]\Rightarrow a_i=b_i)$.

证明：根据公理模式7，右边⇒ 左边；令$x=sup(sup(a_i)_{i\in I},sup(b_i)_{i\in I})+1$，根据补充定理320，左边⇒右边.

补充定理 331.

a、b、n、p为自然数：

（1）$\binom{n}{p}(a+b)^p=\sum\limits_{i\in[0,p]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}a^{p-i}b^i$；

（2）$\binom{n}{p}(a-b)^p=\sum\limits_{i\in[0,p]与i为偶数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}a^{p-i}b^i-\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}a^{p-i}b^i$.

（3）$\sum\limits_{i\in[0,p]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}=2^p\binom{n}{p}$.

（4）$\sum\limits_{i\in[0,p]与i为偶数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$.

证明：

（1）根据补充定理329（1），$(x+a+b)^n=\sum\limits_{p\in[0,n]}\binom{n}{p}(a+b)^px^{n-p}$；

同时，$(x+a+b)^n=\sum\limits_{i\in[0,n]}\binom{n}{i}(x+a)^{n-i}b^i$，

即$\sum\limits_{i\in[0,n]}\binom{n}{i}b^i(\sum\limits_{q\in[0,n-i]}\binom{n-i}{q}x^qa^{n-i-q})$，

即$\sum\limits_{(i,q)\in\{(x,y)|x\in[0,n]与y\in[0,n-x]\}}\binom{n}{i}\binom{n-i}{q}x^qa^{n-i-q}b^i$，

即$\sum\limits_{q\in[0,n]}(\sum\limits_{i\in[0,n-q]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{q}x^qa^{n-i-q}b^i)$，

即$\sum\limits_{p\in[0,n]}(\sum\limits_{i\in[0,p]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}x^{n-p}a^{p-i}b^i)$.

根据补充定理330，得证.

（2）考虑$(x+a-b)^n$，类似补充定理331（1）可证.

（3）令$a=1$，$b=1$，根据补充定理331（1）可证.

（4）令$a=1$，$b=1$，根据补充定理331（2）可证.

习题 138.

p、q、n为自然数，且$p\le n$，$q<p$，求证：$\sum\limits_{k\in[q+1,n-p+q+1]}\binom{n-k}{p-q-1}\binom{k-1}{q}=\binom{n}{p}$.

证明：即补充定理328（2）.

习题 139.

n为自然数，求证：$(a-b)^n=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为偶数}\binom{n}{i}=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}$.

证明：即补充定理329（3）.

习题 140.

n、p为自然数，求证：

（*1*）$\sum\limits_{i\in[0,p]}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}=2^p\binom{n}{p}$；

（*2*）$\sum\limits_{i\in[0,p]与i为偶数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}=\sum\limits_{i\in[0,n]与i为奇数}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$.

证明：

（1）即补充定理331（3）.

（2）即补充定理331（4）.

习题 141.

定义$[1,h]$到$[0,n]$且满足$\sum\limits_{x\in E}u(x)\le n$的映射$u$的集合，到$[1,h]$到$[1,n+h]$的严格单增映射的集合的双射，从而证明定理*152*.

证明：参见定理152的证明.

习题 142.

（*1*）E为分配格，f为E到具有运算法则“$+$”的可交换幺半群M的映射，并且对任意$x\in E$、$y\in E$，$f(x)+f(y)=f(sup(x,y))+f(inf(x,y))$，求证：对$E$的任意有限子集$I$，

$f(sup(I))+\sum\limits_{n\in\{k|k>0与2k\le Card(I)\}}(\sum\limits_{H\in\{K|K\subset I与Card(K)=2n\}}f(inf(H)))=$
$\sum\limits_{n\in\{k|2k+1\le Card(I)\}}(\sum\limits_{H\in\{K|K\subset I与Card(K)=2n+1\}}f(inf(H)))$.

（2）A为集合，$(B_i)_{i\in I}$为A的有限子集族，$B=\bigcup\limits_{i\in I}B_i$，对任意$H\subset I$，令$B_H=\bigcap\limits_{i\in H}B_i$，求证：$Card(B)+\sum\limits_{n\in\{k|k>0与2k\le Card(I)\}}(\sum\limits_{H\in\{K|K\subset I与Card(K)=2n\}}Card(B_H))=$
$\sum\limits_{n\in\{k|2k+1\le Card(I)\}}(\sum\limits_{H\in\{K|K\subset I与Card(K)=2n+1\}}Card(B_H)))$.

证明：

（1）对$Card(I)$运用数学归纳法可证.

（2）根据习题142（1）可证.

注：习题142涉及尚未介绍的“可交换幺半群”知识.

习题 143.

n、h为自然数，求证：$\sum\limits_{i\in\{k|k为偶数与k\in[0,n]\}}\binom{h}{i}\binom{n+h-i}{h}=\sum\limits_{i\in\{k|k为奇数与k\in[0,n]\}}\binom{h}{i}\binom{n+h-i}{h}+1$.

证明：令$B=\{u|u为[1,h]到[0,n]的映射与\sum\limits_{x\in[1,h]}u(x)\le n\}-\{u|u为[1,h]到[0,n]的映射与(\forall x)(x\in[1,h]\Rightarrow u(x)=0\}$，$B_i=\{u|u\in B与u(i)\ge 1\}$（$i\in[1,h]$），根据习题142（2）可证.

习题 144.

令$S_{n,p}$为$[1,n]$到$[1,p]$的满射的数目：

（1）求证：$\sum\limits_{i\in\{k|k为偶数与k\in[0,n]\}}\binom{p}{i}(p-i)^n=S_{n,p}+\sum\limits_{i\in\{k|k为奇数与k\in[0,n]\}}\binom{p}{i}(p-i)^n$.

（2）求证：$S_{n,p}=p(S_{n-1,p}+S_{n-1,p-1})$.

（3）求证：*Sn+1, n=n((n+1)!)/2*，*Sn+2, n=n(3n+1)((n+2)!)/24*.

（4）令$P_{n,p}$为满足下列条件的G的数目：

第一，Δ_G为$[1,n]$的划分；

第二，$Card(G)=p$.

求证：$S_{n,p}=p!P_{n,p}$.

证明：

（1）由于$p^n=\sum\limits_{i\in[0,n]}S_{n,p-i}\binom{p}{i}$，根据补充定理331（2）可证.

（2）根据习题144（1）、定理149可证.

（3）考虑$[1,n+1]$、$[1,n+2]$的n个集合的划分，根据定理142可证.

（4）根据定理142可证.

习题 145.

E的元素数目为n，p_n为$\{u|u$为E的排列与$(\forall x)(x \in E \Rightarrow u(x) \neq x)\}$，求证：$\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为偶数与}k\in[0,n]\}} \binom{n}{i}(n-i)! = p_n + \sum\limits_{i\in\{k|k\text{为奇数与}k\in[0,n]\}} \binom{n}{i}(n-i)!$，并且，当$n$趋向无穷大时，$p_n$趋向$n!/e$.

证明：根据习题142（2）可证.

注：习题145涉及尚未介绍的“实数”和“数列极限”知识.

习题 146.

（*1*）E的元素数目为qn，求证：满足下列条件的集合G的数目，为$(qn)!/(n!(q!)n)$：

第一，G的元素数目为n；

第二，G的任何元素的元素数目均为p；

第三，Δ_G为E的划分.

（*2*）$E=[1,qn]$，令A为满足下列条件的集合G的数目，为*(qn)!/(n!(q!)n)*：

第一，G的元素数目为n；

第二，G的任何元素的元素数目均为p；

第三，Δ_G为E的划分；

第四，G的任何元素都不是区间.

则$\sum\limits_{i\in\{k|k\text{为偶数与}k\in[0,n]\}} (qn-i(q-1))!/(i!(n-i)!q^{n-i}) = A + \sum\limits_{i\in\{k|k\text{为奇数与}k\in[0,n]\}} (qn-i(q-1))!/(i!(n-i)!q^{n-i})$.

证明：

（1）根据定理142可证.

（2）根据习题142（2）可证.

习题 147.

令$q_{n,k}$为$[1,k]$到$[1,n]$的满足下列条件的严格单增映射u的数目：对任意奇数（或偶数）$x\in[1,k]$，$u(x)$为偶数（或奇数），则$q_{n,k}=C([(n+k)/2],k)$.

证明：令$u'(x)=u(x)+x$，则$u\to u'$为双射，故所求映射数目等于$[1,k]$到$[1,n+k]$中的偶数组成的集合的映射数目，得证.

习题 148.

E为n个符号组成的集合，S为将符号f添加到E得到的集合．设f的权重为2，E的元素的权重为0.

（*1*）M为$L_0(S)$中满足下列条件的有意义的单词的集合：

E的各元素均出现且仅出现一次．令u_n为M的元素数目，求证：$u_{n+1}=(4n-2)u_n$，并且当$n\geq 2$时，$u_n=\prod\limits_{i\in[2,n]}(4n-6)$.

（*2*）令x_i为E的第i个符号，求证：如果给定E的符号顺序，则M的单词数目$v_n=\binom{2n-2}{n-1}/n$，并且$v_{n+1}=\sum\limits_{i\in[1,n]}(v_iv_{n+1-i})$.

证明：

（1）长度为$2n-2$的字符串，其中$n-1$个符号为f（权重为2）、$n-1$个符号为g（权重为0），其数目为$\binom{2n-2}{n-1}$)；而其中“不合法”即存在$m<n-1$，使前m个字符权重之和小于m，对任意不合法的字符串S，对其中满足条件的最小m，从$m+1$个字符开始，将f和g调换，则得到长度$2n-2$的字符串S'，其中$n-2$个符号为f，n个符号位g．$S\to S'$为双射，故“合法”的字符串为$\binom{2n-2}{n-1}-\binom{2n-2}{n-2}=\binom{2n-2}{n-1}/n$，因此$u_n=(2n-2)!/(n-1)!$，因此$u_{n+1}=(4n-2)u_n$，用数学归纳法可证当$n\geq 2$时，$u_n=\prod\limits_{i\in[2,n]}(4n-6)$．

（2）根据习题148（1）可证．

习题 149.

（1） p、q为自然数且$p\geq 1$、$q\geq 1$，$n=2p+q$，E的元素数目为n，令$N=\binom{n}{p}$，$(X_i)_{i\in[1,n]}$为E的所有元素数目为p的子集按某种顺序排成的序列，$(Y_i)_{i\in[1,n]}$为E的所有元素数目为$p+q$的子集按某种顺序排成的序列，

求证：存在一个$[1,N]$到$[1,N]$的双射f，使对任意$i\in[1,N]$，均有$X_{f(i)}\subset Y_i$．

（2） h、k为自然数且$p\geq 1$、$q\geq 1$，n为自然数且$2h+k<n$，E的元素数目为n，

$(X_i)_{i\in[1,r]}$为E的若干不同的各元素数目为h的子集按某种顺序排成的序列，求证：存在E的若干不同的各元素数目为$h+k$的子集按某种顺序排成的序列$(Y_i)i\in[1,r+1]$，并且，对任意$i\in[1,r+1]$，均存在$j\in[1,r]$，使$X_j\subset Y_i$，对任意$i\in[1,r]$，均存在$j\in[1,r+1]$，使$X_i\subset Y_j$．

证明：

（1）根据补充定理308可证．

（2）对n用数学归纳法，分别考虑含有某个元素a的集合，和不含某个元素a的集合，根据习题149（1）可证．

习题 150.

m、q为自然数，E的元素数目为$2m$，且$q<m$，F是满足下列条件的$\mathcal{P}(E)$的子集G的集合：令X、Y为G的两个不同元素，且$X\subset Y$，则$Card(Y-X)\leq 2q$．

（1） 设$\{k|(\exists M)(M\in F与k=Card(M))\}$的最大元为$p$，并且，$p=Card(M)$，$M\in F$，求证：对任意$A\in M$，$Card(A)\geq m-q$，$Card(A)\leq m+q$．

（2） 对任意$M\in F$，求证：$Card(M)\leq\sum\limits_{k\in[0,2q]}\binom{2m}{m-q+k}$．

（3） 将$2m$和$2q$均替换为$2m+1$、$2q+1$，试给出相应的结论．

证明：

（1）设$\{x|(\exists A)(A\in M与x=Card(A))\}$的最小元是$m-q-s$（$s\geq 1$），令$X=\{A|A\in M与Card(A)=m-q-s\}$，$Card(X)=r$，根据习题149（2），存在$r+1$个基数为$m+q-s+1$个$E$的子集组成集合$Y$，使$X$的任何元素都是某个$Y$的元素的子集，且$Y$的任何元素都包含$X$的某个元素．则$(M-X)\cup Y\in F$，且$Card((M-X)\cup Y)>Card(M)$，矛盾．

（2）根据习题150（1）可证．

（3）类似习题150（1）、150（2）可知，相应的基数为$\sum\limits_{k\in[0,2q+1]}\binom{2m+1}{m-q+k}$．

习题 151.

E为有限集合，元素数目为n，$(a_i)_{i\in[1,n]}$为E的各元素按某种顺序排成的序列，$(A_i)i\in[1,m]$为E的若干子集按某种顺序排成的序列，

（1）令$k_j=Card(\{i|i\in[1,m]$与$a_j\in Ai\})$，$s_i=Card(A_i)$，求证：$\sum\limits_{j\in[1,n]}k_j=\sum\limits_{i}\in[1,m]s_i$．

（2）对任意$x\in E$、$y\in E$，均存在唯一的$i\in[1,n]$，使$x\in A_i$、$y\in A_i$，求证：如果$a_j\notin A_i$，则$s_i\le k_j$．

（3）对任意$x\in E$、$y\in E$，均存在唯一的$i\in[1,n]$，使$x\in A_i$、$y\in A_i$，求证：存在$i\in[1,n]$使$A_i=E$，或者$m\ge n$．

（4）对任意$x\in E$、$y\in E$，均存在唯一的$i\in[1,n]$，使$x\in A_i$、$y\in A_i$，且$m=n$，求证：$(A_i)_{i\in[1,m]}$必然符合下列两种情况之一：

第一，$A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$，以及$A_i=\{a_i,a_n\}\Phi i\in[1,n-1]\Psi$；第二，每个子集都有$k$个元素，每个元素都属于$k$个子集．

证明：

（1）根据定义可证．

（2）根据定义可证．

（3）设k是$\{a|a=k_i$与$i\in[1,n]\}$的最小元，相应的元素为a，子集为A_1、A_2、$\cdots$、A_k，令$B_i=A_i-\{a\}$，令$b_i=Card(B_i)$，设其中最大元为b_k，如果$b_k\ge k$，根据习题151（2），对任意$a_i\notin A_k$，$1+b_k\le k_i$，根据习题151（2），$\sum\limits_{i\in[1,m]}s_i\ge(1+b_k)\sum\limits_{i\in[1,k-1]}b_i+k(b_k+1)$．同时，$\sum\limits_{i\in[1,m]}s_i\le k+\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i+(m-k)k$．令$y=b_k$，$\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i=x$，由于$(y-k)(x-1)+k(k-2)\ge 0$，故$m\ge 1+x+y$．如果$b_k<k$，根据习题151（2），$(1+\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i)k\le k+\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i+(m-k)k$，由于$\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i\le k(k-1)$，故$m\ge 1+\sum\limits_{i\in[1,k]}b_i$．

（4）根据习题151（3）证明过程中等号成立的条件可证．

注：原书习题151（3）有误．

习题 152.

E为有限集合，X、Y为$\mathcal{P}(E)$的两个非空子集，a、b、c、d是四个不等于0的自然数，并且满足下列条件：

第一，对任意$A\in X$、$B\in Y$，$Card(A\cap B)\ge a$；

第二，对任意$A\in X$，$Card(A)\le b$；

第三，对任意$B\in Y$，$Card(B)\le c$；

第四，对任意$x\in E$，$X\cup Y$的元素中，含有x的数目均为d．

求证：$Card(E) \le bc/a$，并且，当且仅当满足下列条件时，等号成立：

第一，对任意$A \in X$、$B \in Y$，$Card(A \cap B) = a$；

第二，对任意$A \in X$，$Card(A) = b$；

第三，对任意$B \in Y$，$Card(B) = c$；

第四，存在$r \le d$，使对任意$x \in E$，X的元素中，含有x的元素数目均为r.

证明：令$Card(X) = s$，$Card(Y) = t$，E的元素为a_1、a_2、$\cdots$、a_n，r_i为含有a_i的X的元素的数目，则$\sum\limits_{i \in [1,n]} r_i \le sb$，$\sum\limits_{i \in [1,n]} (d - r_i) \le tc$，$\sum\limits_{i \in [1,n]} (r_i(d - r_i)) \ge ast$，对$n$用数学归纳法，可证$n \sum\limits_{i \in [1,n]} (r_i(d - r_i)) \le (\sum\limits_{i \in [1,n]} r_i)(\sum\limits_{i \in [1,n]} (d - r_i))$，故$Card(E) \le bc/a$. 其中等号成立的条件是所有$r_i$都相等、且对任意$A \in X$、$B \in Y$，$Card(A \cap B) = a$；对任意$A \in X$，$Card(A) = b$；对任意$B \in Y$，$Card(B) = c$.

习题 153.

E为有限集合，元素数目为n，X为$\mathcal{P}(E)$的非空子集，a、b、c是三个不等于0的自然数，并且满足：

第一，对X的任意不同的元素A、B，$Card(A \cap B) = a$；

第二，对任意$A \in X$，$Card(A) \le b$；

第三，对任意$x \in E$，X的元素中，含有x的元素数目均为c.

求证：$n(a - 1) \le b(b - 1)$.

证明：令$x \in E$，$Y = \{Q | (\exists A)(A \in X$与$x \in A$与$Q = A - \{x\})\}$，$Z = \{Q | Q \in X$与$x \notin Q\}$，根据习题152，$a(n - 1) \le b(b - 1)$，又因为$a \le n$，故$n(a - 1) \le b(b - 1)$.

习题 154.

i、h、k是自然数，$i \ge 1$，$h \ge i$，$k \ge i$，求证：存在满足下列条件的自然数$m_i(h, k)$：

对任意有限集合E，令$F_i(E)$为E的元素数目为i的子集的集合，如果E的元素数目不小于$m_i(h, k)$，且对满足$X \subset F_i(E)$的任意集合X，令$Y = F_i(E) - X$，则E的任意h个元素的子集都包含一个X的元素，E的任意k个元素的子集都包含一个Y的元素，不可能同时出现.

证明：根据定义，$m_1(h, k) = h + k - 1$，$m_i(i, k) = k$，$m_i(h, i) = h$.

下面证明$m_i(h, k) = m_{i-1}(m_i(h - 1, k), m_i(h, k - 1)) + 1$.

如果元素数目为该数的E不满足条件，即存在$X \subset F_i(E)$、$Y = F_i(E) - X$，使E的任意h个元素的子集都包含一个X的元素，E的任意k个元素的子集都包含一个Y的元素. 令$a \in E$，$E' = E - \{a\}$，E'的任意$m_i(h - 1, k)$个元素的子集，其任意k个元素的子集都包含一个$Y \cup \mathcal{P}(E')$的元素，故存在某个$h - 1$个元素的子集Z，其所有i个元素的子集都是$Y \cup \mathcal{P}(E')$的元素，由于$Z \cup \{a\}$包含一个X的元素U，故$a \in U$，令$X' = \{G | G \subset E'$与$G \cup \{a\} \in X\}$，故$U - \{a\} \in X'$，即E'的任意$m_i(h - 1, k)$个元素的子集，包含一个X'的元素，

同理，令$Y' = \{G|G \subset E'$与$G \cup \{a\} \in Y\}$，则E'的任意$m_i(h, k-1)$个元素的子集，包含一个Y'的元素.

此外，$X' \subset F_{i-1}(E')$，$Y' = F_{i-1}(E') - X'$，矛盾.

习题 155.

（*1*）E为有限偏序集，元素数目为p，m、n为自然数且$mn < p$，求证：E有m元全序子集，或者有n元自由子集.

（*2*）令h、k为不等于0的自然数，令$r(h,k) = (h-1)(k-1)$，I为有限集，其元素均为自然数，且元素数目不小于$r(h,k)$，E为全序集，$(X_i)_{i\in I}$为E的元素的有限序列，求证：存在I的元素数目为h的子集H使$(x_i)_{i\in H}$为单增序列，或者存在I的元素数目为k的子集K使$(x_i)_{i\in K}$为单减序列.

证明：

（1）根据补充定理306可证.

（2）根据补充定理306可证.

注：根据序列的定义，习题151（2）的条件中，集合I的性质做了修改.

3.6 无穷集合（Ensembles infinis）

定义 170. 无穷集合（*ensemble infini*）

如果一个集合不是有限集合，则称其为无穷集合.

定义 171. 无穷基数（*cardinal infini*）

无穷集合的基数称为无穷基数.

补充定理 332. 无穷公理和自然数集合的存在性等价

$(x$为自然数$)$是x上的集合化公式$\Leftrightarrow (\exists X)(X$为无穷集合$)$.

证明：

若存在无穷集合，令a为无穷集合的基数，根据定理116，对任意自然数n，$a > n$. 根据补充定理293，存在集合$\{x|x$为基数与$x < a\}$，则任意自然数n均属于该集合，根据证明规则52可证.

反过来，如果$(x$为自然数$)$是x上的集合化公式，令该集合为E，对任意自然数n，$Card([0,n]) = n+1$，因此$Card(E) \neq n$，故E为无穷集合.

显式公理 4. 无穷公理

$(\exists X)(X$为无穷集合$)$.

元数学定义 65. 集合论（*théorie des ensembles*）

包含2元特别符号$\in$ 、显式公理*1*、显式公理*2*、显式公理*3*、显式公理*3*、显式公理*4*和公理模式*8*的等式理论，称为集合论.

定理 153. 存在自然数集合

(x为自然数)是x上的集合化公式.

证明：根据显式公理4、补充定理332可证.

定义 172. 自然数集合（*ensemble des entiers*）

$\{n|n$为自然数$\}$称为自然数集合，记作N.

补充定理 333.

（*1*）N为良序集.

（*2*）a为有限基数，E为无穷集合，则$a < Card(E)$.

证明：

（1）根据定理89可证.

（2）根据定理116可证.

定义 173. 序列（*suite*），元素序列（*suite d'éléments*），无穷序列（*suite infinie*）

指标集是N的子集的族（或E的元素族），称为序列（或元素序列）；序列$(x_n)_{n \in N与R}$也可以记作$(x_n)_R$；在没有歧义的情况下，$(x_n)_{n \geq 0}$和$(x_n)_{n \geq 1}$均可简记为(x_n). 指标集是N的无穷子集的序列，称为无穷序列.

定义 174. 单增序列（*suite croissante*），单减序列（*suite décroissante*），单调序列（*suite monotone*），严格单增序列（*suite strictement croissante*），严格单减序列（*suite strictement décroissante*），严格单调序列（*suite strictement monotone*）

如果序列相应的映射为单增映射（或单减映射、单调映射、严格单增映射、严格单减映射、严格单调映射），则称该序列为单增序列（或单减序列、单调序列、严格单增序列、严格单减序列、严格单调序列）.

定义 175. 仅顺序不同的序列（*suite qui ne diffèrent que par l'ordre des termes*）

如果$(x_n)_{n \in I}$和$(y_n)_{n \in I}$的指标集相同，且存在I的排列f，使$(\forall n)(n \in I \Rightarrow x_{f(n)} = y_n)$，则称$(x_n)_{n \in I}$和$(y_n)_{n \in I}$为仅顺序不同的序列.

证明规则 62.

集合论中，u为字母，T为项，则存在唯一的项U和N到U的满射f，使对任意自然数n，令$f(n)$为$[0, n[$到$f\langle[0, n[\rangle$的满射，并在$[0, n[$上和f重合，使$(f(n)|u)T = f(n)$.

证明：根据证明规则60可证.

证明规则 63.

集合论中，S和a为项，则存在唯一的项V和N到V的满射f，使$f(0) = a$，并且对任意$n \geq 1$，$f(n) = (f(n-1)|n)S$.

证明：令T为$\tau_y((u = (\varnothing,\varnothing,\varnothing)$与$(y = a))$或$(u \neq (\varnothing,\varnothing,\varnothing)$与$y = (u(M(u))|v)S))$，其中$M(u) = (u$的定义域的最小上界)，由于$f(0) = (\varnothing,\varnothing,\varnothing)$，所以$(u|f(0))T = a$；$n > 0$时，$(u|f(n))T = (f(n-1)|n)S$，根据证明规则62，得证.

定理 154.

任何无穷集合E，均存在和N等势的子集.

证明：根据定理78，在E上存在良序，令E为按该良序排序的良序集. 假设E不包含和N等势的子集，则E和N的片段等势，故E为有限集合，矛盾.

定理 155.

$Card(N \times N) = Card(N)$.

证明：考虑映射$(m,n) \to (m+n)(m+n)+m$，如果$(m'+n')(m'+n')+m' = (m+n)(m+n)+m$，假设$m'+n' > m+n$，则$(m'+n')(m'+n') \geq (m+n+1)(m+n+1)$，故$(m'+n')(m'+n') > (m+n)(m+n)+m$，矛盾；同理$m'+n' < m+n$也矛盾，故$m'+n' = m+n$，因此$m = m'$，$n = n'$，故该映射为$N \times N$到$N$的单射. 故$Card(N \times N) \leq Card(N)$. 考虑映射$n \to (n,0)$，其为$N$到$N \times N$的单射. 故$Card(N) \leq Card(N \times N)$. 得证.

定理 156.

a为无穷基数，则$a^2 = a$.

证明：

令$card(E) = a$，D为E的子集且D和N等势. 根据定理155，$Card(D \times D) = Card(D)$.

令f_0为D到$D \times D$的双射，令$M = \{z|z$为有序对与$pr_1 z \subset E$与$D \subset pr_1 z$与$(pr_2 z$为$pr_1 z$到$pr_1 z \times pr_1 z$的双射)与$(pr_2 z$为f_0在$pr_1 z$上的延拓)$\}$，R为$z \in M$与$z' \in M$与$(pr_1 z \subset pr_1 z')$与$(pr_2 z'$为$pr_2 z$在$pr_1 z'$上的延拓)，则R为偏序关系.

因此，根据补充定理226（2），M是归纳集，因此令M的极大元是(F,f).

令$b = Card(F)$，则$b = b^2$，由于b为无穷基数，因此$b \leq 2b$，$2b \leq 3b$，$3b \leq b^2$，故$b = 2b$，$2b = 3b$.

假设$b < a$，若$Card(E-F) \leq b$，则$Card(E) \leq 2b$，即$Card(E) \leq b$，矛盾，故$Card(E-F) > b$.

因此存在$Y \subset E-F$，且Y和F等势，令$Z = F \cup Y$，则$Z \times Z = (Y \times Y) \cup (F \times Y) \cup (Y \times F)\big(F \times F)$，由于$Card(Y \times Y) = b$，$Card(Y \times F) = b$，$Card(F \times Y) = b$，故$Card(Z \times Z - F \times F) = b$，因此存在$Y$到$Z \times Z - F \times F$的双射，故存在$Z$到$Z \times Z$的双射，其为$f$的延拓，与$(F,f)$是极大元矛盾.

因此$b = a$，故$a^2 = a$.

定理 157.

a为无穷基数，n为自然数且$n > 0$，则$a^n = a$.

证明：根据定理156，用数学归纳法可证.

定理 158.

如果基数有限族$(a_i)_{i\in I}$满足$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i\neq 0)$，$\bigcup\limits_{i\in I}\{a_i\}$的最大元$a$为无穷基数，则该基数族的积等于$a$.

证明：设其积为b，I的元素数目为n，由于$b\leq a^n$，则$b\leq a$，同时，由于$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i\geq 1)$，因此$b\geq a$，故$b=a$.

定理 159.

a为无穷基数，基数族$(a_i)_{i\in I}$满足$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i\leq a)$，并且$Card(I)\leq a$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq a$，如果$(\exists i)(i\in I$与$a_i=a)$，则$\sum\limits_{i\in I}a_i=a$.

证明：$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq Card(I)\cdot a$，因此$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq a^2$，故$\sum\limits_{i\in I}a_i\leq a$. 如果存在$i\in I$使$a_i=a$，因为$a_i\leq\sum\limits_{i\in I}a_i$，故$\sum\limits_{i\in I}a_i=a$.

定理 160.

a、b均不为0，且其中至少有一个为无穷基数，则$a+b=sup(a,b)$，$ab=sup(a,b)$.

证明：根据定理158、159可证.

补充定理 334.

a、b、c、d均为基数，如果$a<c$，$b<d$，则$a+b<c+d$，$ab<cd$.

证明：如果c、d均为有限集合，根据定理131可证. 如果c、d至少有一个为无穷集合，则$c+d=sup(c,d)$，$cd=sup(c,d)$. 如果a、b均为有限集合，则$a+b$、ab为有限集合，命题成立；如果a、b至少有一个是无穷集合，则$a+b=sup(a,b)$，$ab=sup(a,b)$，命题同样成立.

补充定理 335.

E为无穷集合，则：

（1）$Card(E)Card(N)=Card(E)$，$Card(E)+Card(N)=Card(E)$；

（2）n为自然数，$nCard(E)=Card(E)$，$n+Card(E)=Card(E)$.

证明：根据定理160可证.

补充定理 336.

a为基数，b、c为无穷基数：

（1）$(2^b)^b=2^b$.

（2）如果$a\leq 2^b$且$a\geq 2$，则$a^b=2^b$.

（3）如果$a<b$且$b<a^c$，则$b^c=a^c$.

（4）$b^b=2^b$.

证明：

（1）根据定理156、定理106可证.

（2）根据定理112、补充定理336（1）可证.

（3）根据定理112，$b^c \geq a^c$，$b^c \leq a^{cc}$，根据定理156，$b^c \leq a^c$，得证.

（4）根据补充定理336（2）可证.

定义 176. 可数集合（*ensemble dénombrable*），不可数集合（*ensemble non dénombrable*）

如果A和N的某个子集等势，则称A为可数集合，否则，称A为不可数集合.

定理 161.

（1）可数集合的子集是可数集合.

（2）有限个可数集的集族的积是可数集合.

（3）各项均为可数集的序列的并集是可数集合.

证明：根据定理158、定理159可证.

定理 162.

可数无穷集合和N等势.

证明：根据定理154可证.

定理 163.

E为无穷集合，可数无穷集族$(X_i)_{i\in I}$是E的划分，则E和I等势.

证明：$Card(E) = Card(N)Card(I)$，根据定理160可证.

定理 164.

f为E到F的满射，F为无穷集合，如果对任意$y \in F$，$f^{-1}\langle y\rangle$均为可数集合，则F和E等势.

证明：根据补充定理115，$(f^{-1}\langle y\rangle)_{)y\in F}$是$E$的划分，则$Card(E) \leq Card(F)Card(N)$，根据补充定理335，$Card(E) \leq Card(F)$，又因为$f$为$E$到$F$的满射，因此$Card(E) \geq Card(F)$，得证.

定理 165.

无穷集合E的有限子集集合F，和E等势.

证明：令F_n为E的元素数目为n的子集的集合，对任意$X \in F_n$，均存在$[1,n]$到X的双射，则F_n的基数小于等于区间$[1,n]$到E的映射数目，即$(Card(E))^n$，等于$Card(E)$. 因此$Card(F) \leq Card(E)Card(N)$，等于$Card(E)$；

另一方面，$x \to \{x\}$是E到F的映射，故$Card(E) \leq Card(F)$，得证.

定理 166.

无穷集合E的元素的有限序列集合S，和E等势.

证明：令F为N的有限子集集合．S即所有E^I的并集，其中$I \subset N$．由于$I \subset N$的子集，故$Card(E^I) = Card(E)$，根据定理165，$Card(F) = Card(N)$，因此$Card(S) \leq Card(E)$.

同时，E的每个元素可以单独组成有限序列，故$Card(E) \leq Card(S)$，得证.

定义 177. 连续统（*puissance du continu*）

如果E和$\{X|X \subset N\}$等势，则称E为连续统.

定理 167.

连续统是不可数集合.

证明：根据定理113可证.

定义 178. 稳定序列（*suite stationnaire*）

E的元素序列$(x_n)_{n \in N}$，如果存在自然数m，对任意$n \geq m$，$x_m = x_n$，则称其为稳定序列.

定理 168.

E为偏序集，则下列两个公式等价：

第一，E的一切非空子集都有极大元;

第二，E的一切单增元素序列$(x_n)_{n \in N}$都是稳定序列.

证明：如果第一个公式为真，设(x_n)各项组成的集合为X，则X有极大元，设为x_m，则当$n \geq m$时，$x_m = x_n$，故其为稳定序列.

如果第二个公式为真，假设E的非空子集A没有极大元，对任意$x \in A$，令$T_x = \{y|y > x与y \in A\}$，故$T_x \neq \varnothing$．根据定理41，存在$A$到$A$的映射$f$，使$f(x) > x$．设$a \in A$，则递归定义$x_0 = a$，$x_{n+1} = f(x_n)$，该序列是单增序列且不是稳定序列.

定理 169.

E为全序集，当且仅当E的一切单减元素序列$(x_n)_{n \in N}$都是稳定序列时，E为良序集.

证明：类似定理168可证.

定理 170.

偏序有限集的一切序列$(x_n)_{n \in N}$都是稳定序列.

证明：根据定理123，偏序有限集有极大元，根据定理168可证.

补充定理 337.

（*1*）E为集合，如果$Card(E) > 1$，则存在E的排列，该排列没有不动点.

（*2*）E为无穷集合，则E的排列的集合，和$\mathcal{P}(E)$等势.

（*3*）E、F均为无穷集合，$Card(E) = Card(F)$，则E到F的满射的集合，和$\mathcal{P}(E)$等势.

（*4*）F为无穷集合，$Card(E) < Card(F)$，则$Card(\{X|X \subset F与Card(X) = E\}) = Card(F^E)$;

（*5*）F为无穷集合，$Card(E) < Card(F)$，则$Card(\{f|f为E到F的单射\}) = Card(F^E)$;

（*6*）E为无穷集合，m为自然数，则$Card(\{X|X \subset F与Card(X) = m\}) = Card(E)$;

（*7*）E为无穷集合，则$Card(\{X|X \subset F与Card(X)为自然数\}) = Card(E)$;

（*8*）F为无穷集合，$Card(E) < Card(F)$，则$Card(\{X|X \subset F与Card(X) \leq E\}) = Card(F^E)$.

证明：

（1）对于有限集合，对其基数运用数学归纳法可证.

对于无穷集合，令$F = E \times \{0, 1\}$，则$Card(F) = Card(E)$，则存在E到F的双射f.

令g为：

如果$pr_2x = 0$，则$g(x) = (pr_1x, 1)$;

如果$pr_2x = 1$，则$g(x) = (pr_1x, 0)$.

则g为F到F的双射，故排列$f^{-1} \circ g \circ f$没有不动点，得证.

（2）令E的排列的集合为F，对任意$f \in F$，均有$f \subset E \times E$，所以$Card(F) \leq Card(\mathcal{P}(E))$.

同时，对E的任意子集A，如果$Card(E - A) > 1$，或者$E = A$，根据补充定理337（1），存在以A为不动点的E的排列，故$Card(F)+Card(E) \geq Card(\mathcal{P}(E))$，因此$Card(F) \geq Card(\mathcal{P}(E))$，得证.

（3）该集合的元素，为$E \times F$的子集，故其势均小于等于$\mathcal{P}(F)$.

令$a \in F$，对任意$A \subset E$且$Card(A) = Card(E)$，设A到$F - \{a\}$的双射为f，当$x \in A$，$g(x) = f(x)$，当$x \in E - A$时，$g(x) = a$，则g是E到F的满射，根据补充定理337（2），以上映射的集合，势为$\mathcal{P}(F)$.

（4）对任意X，如果$X \subset F$与$Card(X) = E$，则存在E到X的双射f，则f在F上的延拓，是F^E的元素，故$Card(\{X|X \subset F与Card(X) = E\}) \leq Card(F^E)$. 反过来，任意$E$到$F$的映射，对应$x \to (x, f(x))$，其函数图是$E \times E \times F$的子集且势为$Card(E)$，根据定理160，$Card(E \times E \times F) = Card(F)$，故$Card(\{X|X \subset F与Card(X) = E\}) \geq Card(F^E)$，得证.

（5）根据定义，$Card(\{f|f为E到F的单射\}) \leq Card(F^E)$. 反过来，对任意$E$到$F$的映射，对应$x \to (x, f(x))$，是$E$到$E \times F$的单射. 得证.

（6）令$Card(\{X|X \subset F$与$Card(X) = m\}) = A$，根据定理165，$A \leq E$，同时，令B为E的子集，且$Card(B) = m-1$，则$Card(E-B) = Card(E)$．且对任意$x \in E-B$，$Card(B \cup \{x\}) = m$，故$A \geq E$，得证．

（7）根据补充定理337（6），$Card(\{X|X \subset F$与$Card(X)$为自然数$\}) = Card(E)$ $Card(N)$，得证．

（8）根据补充定理337（4），$Card(\{X|X \subset F$与$Card(X) \leq E\}) \leq Card(F^E)Card(E)$，得证．

补充定理 338.

（*1*）在有限集合上的任何两个良序均同构．

（*2*）在无穷集合E上的良序的序数的集合，没有最大元．

（*3*）在无穷集合E上的良序的序数的集合的最小上界，不是E上的良序．

（*4*）a为在无穷集合E上的良序，则$Ord(N) \leq Ord(a)$．

证明：

（1）对元素数目运用数学归纳法可证．

（2）设a为该集合最大元，根据补充定理301（3），$Card(a+1) = Card(a)+1$．

根据补充定理301（1），$Card(a) = Card(E)$，又因为E为无穷集合，根据定理160，$Card(a$
$+1) = Card(E)$，故存在E上的良序，其序数为$a+1$，而$a+1 > a$，矛盾．

（3）根据补充定理338（2）可证．

（4）如果$Ord(a) < Ord(n)$，则E同构于N的一个片段，故E为有限集合，矛盾．

定义 179. 有限序数（*ordinal fini*），无穷序数（*ordinal infini*），可数序数（*ordinal dénombrable*），极限序数（*ordinal limite*）

如果序数是在有限集合上的良序，称其为有限序数．

如果序数是在无穷集合上的良序，称其为无穷序数．

如果序数是可数集合上的良序，称其为可数序数．

如果序数不是零也没有前导，称其为极限序数．

补充定理 339.

（*1*）有限序数小于无穷序数．

（*2*）a为有限序数，b为没有前导的序数，则对任意序数$c < b$，$c+a < b$．

（*3*）有限个有限序数的和、有限个有限序数的积，均为有限序数．

（*4*）a、b为有限序数，则a^b为有限序数，并且，令$A = Card(a)$，$B = Card(b)$，则A^B $= Card(a^b)$．

（*5*）a为有限序数，且$a > 0$，则a有前导．

证明：

（1）根据补充定理333（2）可证.

（2）对a用数学归纳法可证.

（3）根据定理125、补充定理301（3）可证.

（4）根据定理103，对b用数学归纳法可证.

（5）根据定理135、补充定理301（3）可证.

补充定理 340.

a为基数，则“x为序数与$Card(x) < a$”为x上的集合化公式.

证明：令p为在a上的良序，如果$p \leq x$，则$Card(p) \leq Card(x)$，故$a \leq Card(x)$. 因此，x为序数与$Card(x) < a \Rightarrow x < p$，根据补充定理252（1）可证.

补充定理 341.

令序数$a > 0$，$O'(a)$为良序集$\{x|x$为序数与$x \leq a\}$，并按下列方式定义定义域为$O'(a)$的函数f_a：

$f_a(0) = Ord(N)$，

对$x > 0$且$x \leq a$，令$f_a(x)$为$\{y|y$为序数与$(\exists z)(z$为序数与$z < x$与$Card(y) \leq Card(f_a(z)))\}$的最小上界.

则：

（1）令$x \leq a$、$y \leq a$，如果$x < y$，则$Card(f_a(x)) < Card(f_a(y))$；

（2）如果$x \leq a$、$a \leq b$，则$f_a(x) = f_b(x)$.

证明：

（1）根据补充定理338（3）可证.

（2）如果$x \leq a$、$a \leq b$，$Card(f_a(x)) \neq Card(f_b(x))$，令$\{y|y \leq a$与$Card(f_a(y)) \neq Card(f_b(y))\}$的最小元是$t$，则$t \neq 0$，且对任意$z < t$，$f_a(z) = f_b(z)$，因此$f_a(t) = f_b(t)$，矛盾，因此$Card(f_a(x)) = Card(f_b(x))$.

定义 180. 初始序数（*ordinal initial*），阿列夫（*aleph*）

令序数$a \geq 0$，$O'(a)$为良序集$\{x|x$为序数与$x \leq a\}$，并按下列方式定义定义域为$O'(a)$的函数f_a：

$f_a(0) = Ord(N)$，

对$x > 0$且$x \leq a$，令$f_a(x)$为$\{y|y$为序数与$(\exists z)(z$为序数与$z < x$与$Card(y) \leq Card(f_a(z)))\}$的最小上界.

则称$f_a(a)$为指标a的初始序数，记作ω_a，称$Card(\omega_a)$为指标a的阿列夫，记作$\aleph_a$. 其中，在没有歧义的情况下，ω_0也可以简记为ω.

补充定理 342.

（*1*）$\aleph_0 = Card(N)$.

（*2*）如果$a < b$，则$\omega_a < \omega_b$.

（*3*）初始序数都是无穷序数.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理341（1）、补充定理301（5），$f_b(a) < f_b(b)$，根据补充定理341（2），$f_a(a) < f_b(b)$，得证.

（3）根据补充定理342（2）、补充定理339（1）可证.

补充定理 343.

令a为无穷基数，$W(a)$为$\{y|y$为序数与$Card(y) < a\}$的最小上界，则：

（*1*）$W(a)$为$\{y|y$为序数与$Card(y) = a\}$的最小元；

（*2*）是$\{y|y$为序数与$Card(y) = a\}$的最小元是初始序数，并且，令其为ω_x，则$a = \aleph_x$.

证明：

（1）如果$a = Card(N)$，根据补充定理338（4）、补充定理339（1），$W(a) = OrdN$.

如果$a > Card(N)$，根据补充定理338（3）可证.

（2）如果$a = Card(N)$，根据补充定理343（1），$W(a) = OrdN$，故为初始序数.

如果$a > Card(N)$：

令$H = \{z|z$为序数与$\omega_z < u\}$，则$H \neq \varnothing$.

如果$sup\ H \in H$，则令$x = sup\ H + 1$，如果$sup\ H \notin H$，则令$x = sup\ H$. 故对任意$w < x$，$Card(\omega_w) < a$，因此$\omega_x \leq u$；如果$\omega_x < W(a)$，则$x \in H$，矛盾，因此$\omega_x = W(a)$.

进而，根据定义可证$a = \aleph_x$.

补充定理 344.

令a为序数：

（*1*）$O'(a) = \{x|x$为序数与$x \leq a\}$，$W'(a) = \{x|x$为无穷基数与$x \leq \aleph_a\}$，则映射$x \to \aleph_x (x \in O'(a))$为$O'(a)$到$W'(a)$的同构.

（*2*）$a \leq \omega_a$.

（*3*）$Card([0, \aleph_a[) \leq \aleph_a$；

（*4*）$Card(a) \leq \aleph_a$.

证明：

（1）根据补充定理341（1）、补充定理343（2）可证.

（2）根据补充定理344（1）可证.

（3）$Card([0, \aleph_a[) = \aleph_0 + Card([0, a[)$，因此$Card([0, \aleph_a[) = \aleph_0 + Card(a)$，故$Card([0, \aleph_a[) \leq \aleph_0 + \aleph_a$，得证.

（4）根据补充定理344（2）可证.

补充定理 345.

a为序数，则$(\forall x)(x$为基数$\Rightarrow x \le \aleph_a$或$x \ge \aleph_{a+1})$.

证明：根据补充定理344（1）可证.

补充定理 346.

令a为无穷序数、b为序数，a没有前导，则对任意定义域为$\{y|y$为序数与$y<b\}$、值域的元素都是序数的严格单增映射f，如果$a = \sup_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} f(x)$，则：

（*1*）$\sum_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_{f(x)} = \aleph_a$.

（*2*）$\sum_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \omega_{f(x)} = \omega_a$.

证明：

（1）根据定理159，$\sum_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_f(x) \le \aleph_a$.

如果$\{y|y$为序数与$y<b\}$有最大元v，则$a=f(v)$，根据定理159可证；如果$\{y|y$为序数与$y<b\}$没有最大元，则对任意序数$c<a$，均存在$x\in\{y|y$为序数与$y<b\}$，使$f(x)>c$，故$\sum_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_f(x) > \aleph_c$，根据补充定理344（1），$\sum_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_f(x) = \aleph_a$.

（2）根据补充定理346（1）、补充定理301（3）可证.

补充定理 347.

ω_a为标准序数函数符号.

证明：

对任意序数族$(x_i)_{i\in I}$且$i=\varnothing$，令$a=\sup_{i\in I} x_i$，$b=\sup_{i\in I}\omega_{x_i}$.

根据补充定理342（2），$\omega_a \ge b$.

根据补充定理301（6），对任意$i\in I$均有$\aleph_{x_i} \le Card(b)$.

根据补充定理343（2），存在序数x使$Card(b)=\aleph_x$.

根据补充定理341（1），对任意$i\in I$，$x_i \le x$.

因此，$x \ge a$.

根据补充定理342（2），$\omega_a \le \omega_x$.

根据补充定理343（1），$\omega_x \le b$.

综上，$\omega_a = b$，得证.

补充定理 348.

（*1*）如果有限序数$a>0$，则a有前导.

（*2*）如果有限序数$a>1$，则a为可约的序数.

证明：

（1）令a为在E上的良序，则$Card(E)$为非空有限集；令其最大元为y，$b = Ord(Card(E) - \{y\})$，则$a = b + 1$，得证.

（2）根据补充定理348（1）可证.

补充定理 349.

（*1*）a*为序数，则*ω_a*没有前导.*

（*2*）*如果序数*x*没有前导，且*$x > 0$*，则*$x \geq \omega_0$*.*

（*3*）ω_0*是不可约的序数.*

（*4*）a*为序数，当且仅当*$a < \omega_0$*时，*a*为有限序数.*

（*5*）$\{a|a$*为有限序数*$\}$*的最小上界为*ω_0*.*

（*6*）*如果序数*x*没有前导，则存在序数*y*，使*$x = \omega_0 y$*.*

（*7*）a*为有限序数，则*$a\omega_0 = \omega_0$*.*

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理348（1）可证.

（3）如果$\omega_0 = x + y$，其中x、y为序数，则$Card(x)$、$Card(y)$均为有限基数，但根据补充定理301（3），$Card(N) = Card(x) + Card(y)$，矛盾.

（4）如果a为有限序数，根据定义可证$a < \omega_0$. 反过来，如果$a < \omega_0$，则a同构于N的区间上的良序，故a为有限序数.

（5）设最小上界为x，则$x \leq \omega_0$. 如果x为有限序数，则$x + 1$也是有限序数，矛盾.

（6）根据补充定理262，存在y、z使$x = \omega_0 y + z$，且$z < \omega_0$. 由于x没有前导，故$z = 0$，得证.

（7）根据定义可证.

补充定理 350.

令序数$a > 0$*，则：*

（*1*）$a\omega_0$*是不可约的序数；*

（*2*）$a\omega_0 > a$*；*

（*3*）*如果序数*x*不可约，且*$x > a$*，则*$x \geq a\omega_0$*.*

证明：

（1）根据补充定理265、补充定理349（3）可证.

（2）根据补充定理257（3）可证.

（3）根据补充定理262可证.

补充定理 351.

令序数$a > 0$*，则*$(a + 1)\omega_0 = a\omega_0$*.*

证明：根据补充定理246（1），$(a+1)\omega_0 \geq a\omega_0$.

另一方面，根据补充定理350（1），$a\omega_0$不可约，同时，根据补充定理350（2），$a\omega_0 > a$，因此$a\omega_0 \geq a+1$，由于$a\omega_0$不可约，故$a\omega_0 > a+1$，根据补充定理350（3），$a\omega_0 \geq (a+1)\omega_0$，得证.

补充定理 352.

（*1*）a为序数，则当且仅当存在序数b，使$a = {\omega_0}^b$时，a为不可约的序数.

（*2*）a、b为序数，$a < b$，则${\omega_0}^a + {\omega_0}^b = {\omega_0}^b$.

证明：

（1）根据补充定理350（1）、补充定理276可证.

（2）根据补充定理352（1）、补充定理263可证.

补充定理 353.

（*1*）对任意序数a，以及序数$c > 1$，存在唯一的一对序数有限序列$(l_i)_{i\in[1,k]}$、$(m_i)_{i\in[1,k]}$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} c^{l_i} m_i$，其中，对任意$i \in [1,k]$，$m_i > 0$与$m_i < c$，对任意$i \in [1,k-1]$，$li > l_{i+1}$.

（*2*）对任意序数a，存在唯一的单减有限序列$(b_i)i \in [1,k]$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} {\omega_0}^{b_i}$.

证明：

（1）命题对$a = 0$、$a = 1$显然成立．假设命题对$[0,a[$成立，根据补充定理276，存在唯一的序数e、f、g，使$a = c^e f + g$，则$g < a$，根据证明规则59可证.

（2）根据补充定理353（1）可证.

定义 181. 序数的展开（*développement d'un ordinal*），序数的展开的最大指数（*plus grand indice d'une développement d'un ordinal*）

对任意序数$a > 0$，如果单减有限序列$(b_i)_{i\in[1,k]}$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} {\omega_0}^{b_i}$，则称$(b_i)_{i\in[1,k]}$为$a$的展开，$b_1$为$a$的展开的最大指数，记作$\psi(a)$.

补充定理 354.

a、b为序数：

（*1*）$a < {\omega_0}^{\psi(a)+1}$.

（*2*）如果$\psi(a) < \psi(b)$，则$a < b$.

（*3*）如果$a < b$，则$\psi(a) \leq \psi(b)$.

（*4*）a、b为序数，$a < {\omega_0}^b$，则$a + {\omega_0}^b = {\omega_0}^b$.

证明：

（1）根据补充定理257（3）可证.

（2）设a的展开有n项，则$a \leq {\omega_0}^{\psi(a)} n$，又因为$a < \omega_0 \psi(a) + 1$，因此$a < \omega_0 \psi(b)$，故$a < b$.

（3）根据补充定理354（1）可证.

（4）根据补充定理352（2）、补充定理353（2）可证.

补充定理 355.

$w(x)$为定义在$x \geq a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \geq a_0$、$y > x$，均有$w(x) < w(y)$. 则对任意序数$x \geq a_0$和序数y，$w(x+y) \geq w(x) + y$. 进而，存在序数a，对任意序数$x \geq a$，均有$w(x) \geq x$.

证明：假设存在y使$w(x+y) < w(x) + y$，设其中最小的为y_0，则$w(x+y_0) < w(x) + y_0$，令b满足$w(x+y_0) = w(x)+b$，则$b < y_0$且$w(x+b) < w(x)+b$，矛盾，故$w(x+y) \geq w(x)+y$.

令$a = a_0\omega_0$，根据补充定理350（1），a不可约，根据补充定理263，$a = a_0+a$，故$w(a) \geq a$，进而，当$x \geq a$时，均有$w(x) \geq x$.

定义 182. 临界序数（*ordinal critique*）

令$f(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq b_0$上的序数函数符号，c为无穷序数且$c > a_0$、$c > b_0$，如果对任意序数$x \geq a_0$、$x < c$，均有$f(x,c) = c$，则称c为$f(x,y)$的临界序数.

补充定理 356.

$w(x)$为定义在$x \geq a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \geq a_0$，$w(x) \geq x$，并且，对任意序数x、y，$x < y$与$x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令$g(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq a_0$上的序数函数符号，并满足:

第一，(x为序数与y为序数与$x \geq a_0$与$y \geq a_0$) $\Rightarrow g(x,y) > x$;

第二，$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x,y) \leq g(x',y')$.

$f(x,y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq 1$上的序数函数符号，其按下列方式定义：

第一，对任意序数$x \geq a_0$，$f(x,1) = w(x)$;

第二，对任意序数$x \geq a_0$， $y > 1$，$f(x,y) = \sup\limits_{z \in]0,y[} g(f(x,z),x)$.

则：

（1）对任意序数b，最多存在有限个序数y，使$f(x,y) = b$至少有一个解.

（2）$f(x,y)$的临界序数没有前导.

（3）如果存在集合A，对任意$x \in A$，(x为序数)与$f(x,c) = c$，并且，c为A的最小上界，则c为$f(x,y)$的临界序数.

（4）令$h(x) = f(x,x)$（$x \geq a_0$），序列$(a_n)_{n \in N=\{0\}}$满足$a_1 = a_0 + 2$、$a_{n+1} = h(a_n)$，则序列$(a_n)_{n \in N=\{0\}}$的最小上界，为$f(x,y)$的临界序数.

（5）如果集合的元素都是$f(x,y)$的临界序数，则该集合最小上界是$f(x,y)$临界序数.

（6）$f(x,y)$的临界序数是不可约的.

证明：

（1）设y组成的集合为A，$f(y)$为$\{x|f(x,y)=b\}$的最小元．如果$y<y'$，根据补充定理270（6），$f(y)>f(y')$，令$f(y)$的值域的最小元为x_0，则相应的y_0为A的最大元．由于A有最小元也有最大元，故A为有限集合．

（2）根据补充定理270（8），$f(y,y+1)\geq y+y$，得证．

（3）对任意$z<c$，存在$x\in A$使$x>z$，由于$f(x,c)=c$，故$f(z,c)\leq c$，根据补充定理270（3）可证．

（4）令$(a_n)_{n\in N=\{0\}}$的最小上界为z，对任意$i\in N-\{0\}$，$f(a_i,z)\geq z$，同时，$f(a_i,a_{i+1})\leq f(a_{i+1},a_{i+1})$，故$f(a_i,a_{i+1})\leq z$，因此$f(a_i,z)=z$，根据补充定理356（3）可证．

（5）根据补充定理356（3）可证．

（6）如果r为$f(x,y)$的临界序数，且$r=\sum\limits_{i\in[1,k]}{\omega_0}^{b_i}$（$k\geq 2$），则$f({\omega_0}^{b_1},r)\geq{\omega_0}^{b_1}+r$，故$f({\omega_0}^{b_1},r)>r$，矛盾．

补充定理 357.

a、b为序数，$a\geq 2$，b没有前导，则a^b不可约．

证明：假设$a^b=x+y$，根据补充定理353（1），x、y对a均有唯一的展开．设最大的指数分别是p、q，相应的系数分别是m、n．则$p<b$，$q<b$．如果$p\geq q$，则$x+y\leq a^p(m+n)$，故$x+y\leq a^{p+1}2$，进而$x+y\leq a^{p+2}$，由于b没有前导，故$p+2<b$，根据补充定理272，矛盾．如果$p<q$，则$x+y\leq a^{q+2}$，同样矛盾．

补充定理 358.

（1）a为有限序数，$a\geq 2$，则$a^{\omega_0}=\omega_0$．

（2）a为无穷序数，则$a^{\omega_0}={\omega_0}^{\psi(a)\omega_0}$．

证明：

（1）令b为有限序数，根据补充定理311、补充定理339（4），$a^b>b$，因此$a^{\omega_0}\geq\omega_0$．同时，由于a^b为有限序数，故$a^{\omega_0}\leq\omega_0$．得证．

（2）根据补充定理273，$a^{\omega_0}\geq{\omega_0}^{\psi(a)\omega_0}$，$a^{\omega_0}\leq{\omega_0}^{(\psi(a)+1)\omega_0}$，根据补充定理351可证．

补充定理 359.

a为有限序数，$a\geq 2$，$b=\omega_0c$，则$a^b={\omega_0}^c$．

证明：根据补充定理358（1）、补充定理274可证．

补充定理 360.

$a>0$，则$\{x|x$为不可约的序数与$x\leq a\}$的最大元为${\omega_0}^{\psi(a)}$．

证明：根据补充定理352（2）、补充定理354（3）可证．

补充定理 361.

a为无穷序数，p为$\{x|x$为不可约的序数与$x\leq a\}$的最大元，序数b没有前导，则$a^b=p^b$．

证明：根据补充定理358（2）、补充定理274可证.

补充定理 362.

当且仅当存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$时，$c$为$xy$的临界序数.

证明：如果c是xy的临界序数．由于${\omega_0}^{\psi(c)c}>c$，故$c={\omega_0}^{\psi(c)}$．根据补充定理263，$\psi(c)$不可约，根据补充定理352（1），存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$.

反过来，如果存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$，根据补充定理352（1），$\psi(c)$不可约；由于$a<c$时，$a<{\omega_0}^{\psi(a)+1}$，因此$ac\leq{\omega_0}^{\psi(a)+1+\psi(c)}$，又因为$\psi(a)+1<\psi(c)$，根据补充定理354（4），$ac\leq c$，同时，由于$ac\geq c$，因此$ac=c$.

补充定理 363.

令c为序数，则当且仅当存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$时，对任意序数$a>1$、$a\leq c$，均存在$x$使$c=a^x$.

证明：如果对任意序数$a>1$、$a\leq c$，均存在x使$c=a^x$，则令$a={\omega_0}^{\psi(c)}$，故$c={\omega_0}^{\psi(c)x}$，因此$\psi(c)x=\psi(c)$，故$c={\omega_0}^{\psi(c)}$.

如果$\psi(c)$可约：若$\psi(c)=a+b$，且$a>b$，则${\omega_0}^a<c$，${\omega_0}^{a2}>c$，矛盾；若$\psi(c)=a+b$，且$a<b$，则${\omega_0}^b<c$，${\omega_0}^{b2}>c$，矛盾；若$\psi(c)=2$，则$\omega_0+1<{\omega_0}^2$，$(\omega_0+1)^2>{\omega_0}^2$，矛盾；若$\psi(c)=a+a$，且$a>1$，则${\omega_0}^{a+1}<c$，${\omega_0}^{(a+1)2}>c$，矛盾.

因此，$\psi(c)$不可约．根据补充定理352（1），存在序数b使$\psi(c)={\omega_0}^b$.

反过来，如果$c={\omega_0}^{\psi(c)}$，$\psi(c)={\omega_0}^b$，根据补充定理358（1）、补充定理358（2）、补充定理266，对任意序数$a>1$、$a\leq c$，均存在x使$c=ax$.

补充定理 364.

b为序数，$c={\omega_0}^{{\omega_0}^b}$，则存在唯一的$x$使$c=ax$，并且$x$不可约.

证明：根据补充定理272，x具有唯一性．如果a为有限序数，根据补充定理358（1），$x={\omega_0}^{1+b}$，故x不可约；如果a为无穷序数，根据补充定理266，x不可约.

补充定理 365.

x^y的最小的临界序数是ω_0.

证明：根据补充定理349（5）、补充定理339（4）可证.

定义 183. 艾普塞朗数（*nombre epsilon*），艾普塞朗序数（*ordinal epsilon*）

如果a为序数，${\omega_0}^a=a$，则称a为艾普塞朗数，或称a为艾普塞朗序数.

补充定理 366.

艾普塞朗数为无穷序数.

证明：由于$a=0$不满足要求，故$a>0$，因此$a\geq\omega_0$，故a为无穷序数.

补充定理 367. 艾普塞朗数的构建

$(x_i)_{i\in N}$为序数序列，其中对任意$i\in N$，$x_{i+1}=\omega_0{}^{x_i}$，则：

（1）$\sup\limits_{i\in N} x_i$是艾普塞朗数.

（2）如果$x_0=\omega_0$，则$\sup\limits_{i\in N} x_i$是最小的艾普塞朗数.

证明：

（1）令$a=\sup\limits_{i\in N} x_i$.

如果$x_0=x_1$，则对任意$i\in N$，$x_0=x_1$，故$a=x_0$，命题得证.

如果$x_0\neq x_1$，则$(x_i)_{i\in N}$为严格单增序列．设$\psi(a)=b$，则对任意$i\in N$，如果$b<a$，则存在$x_i\geq b+1$，故$x_{i+1}\geq a$，因此$a=x_{i+1}$，故$a<x_{i+2}$，矛盾．因此$a=b$，即$a\geq\omega_0{}^a$．同时，根据补充定理275，$a\leq\omega_0{}^a$，得证.

（2）如果无穷序数$b<\sup\limits_{i\in N} x_i$，则存在$i\in N$，使$x_i\leq b$，$x_{i+1}>b$，故$b$不是艾普塞朗数，得证.

补充定理 368.

艾普塞朗数是xy的临界序数.

证明：根据补充定理362可证.

补充定理 369.

当且仅当序数a是艾普塞朗数或ω_0时，a是x^y（$x\geq 2$、$y\geq 1$）的临界序数.

证明：

根据定义可证ω_0是x^y（$x\geq 2$、$y\geq 1$）的临界序数．令a为艾普塞朗数，$x<a$且$x\geq 2$，则$x^a\leq{\omega_0}^{(\psi(x)+1)a}$，由于$a$不可约，故$\psi(x)+1<a$，因此$x^a\leq\omega_0{}^a$，进而可得$x^a=a$.

反过来，根据定义，如果a是x^y（$x\geq 2$、$y\geq 1$）的临界序数，则a是艾普塞朗数或ω_0.

定义 184. 共尾性（*caractère final*），正规序数（*ordinal régulier*），奇异序数（*ordinal singulier*）

E为全序集，其共尾良序子集的偏序类的集合的最小元，称为E的共尾性；令序数a为在E上的良序集，则E的共尾性也称为a的共尾性．令a为序数，如果a的共尾性为a，则称a为正规序数，否则，称a为奇异序数.

补充定理 370.

a、b为序数，则$b+a$、ba的共尾性都等于a的共尾性.

证明：令$pr_1 b=E$，$pr_1 a=F$，E和F的和集为G，令G的偏序类最小的共尾良序子集为G'，F的偏序类最小的共尾良序子集为F'，由于$F\times\{1\}$是G的共尾子集，故$Ord(G')\leq Ord(F')$；同时，$G'\cap(F\times\{1\})$是G的共尾子集，故$Ord(G')=Ord(G'\cap(F\times\{1\}))$．由于$pr_1(G'\cap(F\times\{1\}))$是$F$的共尾子集，故$Ord(F')\leq Ord(G')$，$b+a$的情形得证．类似可证$ba$的情形.

补充定理 371.

（*1*）有前导的序数的共尾性为1.

（*2*）0、1是正规序数.

（*3*）a有限序数且$a > 0$，则a的共尾性是1.

（*4*）ω_0是正规序数.

（*5*）序数$a < b$，则a的共尾性不大于b的共尾性.

（*6*）$a > 0$，则a的共尾性大于0.

（*7*）a为无穷序数，如果a没有前导，则a的共尾性是无穷序数.

（*8*）b为序数，$I = \{y|y为序数与y < b\}$，$(x_i)_{i\in I}$为序数族，且$x \to x_i$为单增函数，则$\sup\limits_{i\in I}(x_i)$的共尾性小于等于$b$，

（*9*）b为序数，$I = \{y|y为序数与y < b\}$，$(x_i)_{i\in I}$为序数族，则$\sum\limits_{i\in I} x_i$的共尾性小于等于b，

证明：

（1）根据补充定理370可证；

（2）根据定义可证；

（3）根据补充定理371（1）、补充定理339（5）可证.

（4）令$pr_1\omega_0 = E$，如果E有有限共尾子集F，设F的最大元为a，则a为E的最大元，故ω_0有前导，矛盾.

（5）根据定义可证.

（6）根据定义可证.

（7）令a为没有前导的序数，且$a > 0$，如果其共尾性为有限序数，设pr_1a的共尾良序子集种，偏序类最小的是E，则E有最大元，故pr_1a有最大元，故a有前导，矛盾.

（8）令$a = \sup\limits_{i\in I}(x_i)$，$O_a = \{x|x为序数与x < a\}$，$A = \bigcup\limits_{i\in I} x_i$，则根据补充定理253（1），$Ord(O_a) = a$，$Ord(I) = b$. 且$A$是$(O_a)$的共尾子集.

同时，令g为映射$i \to x_i$，f为映射$y \to (g^{-1}\langle y\rangle的最小元)$，则$f$为$A$到$I$的子集的同构，故$Ord(A) \geq b$，得证.

（9）根据补充定理371（8）可证.

补充定理 372.

无穷正规序数都是初始序数.

证明：令a为无穷正规序数，$E = Card(a)$，E上的良序集合的最小元为b. 令按b排序的E的最小元为p，定义E到$\{0, 1\}$的映射f：

$f(p) = 1$；

对任意$x \in E$，$x >_b p$，如果$(\forall i)(i <_b x \Rightarrow i <_a x)$，则令$f(x) = 1$，否则$f(x) = 0$.

令$A=\{z|z\in E$与$f(z)=1\}$，按b在A上导出的偏序排序，故$Ord(A)\le b$．如果存在$x\in E$，对任意$y\in A$，均有$x>_a y$，则$f(x)=0$，故$\{i|i\in E$与$i<_b x$与$i>_a x\}\neq\varnothing$，设其最小元为m，因此$(\forall i)(i<_b m\Rightarrow i<_a m)$，故$m\in A$，且$m>_a x$，矛盾．因此，$A$为按$a$排序的$E$的共尾良序子集．故$a$的共尾性小于等于$b$，故$a=b$，根据补充定理343（2）得证．

补充定理 373.

a为序数，如果$a=0$或a有前导，则初始序数ω_a是正规序数．

证明：

如果$a=0$，根据补充定理371（4），命题成立．

如果a有前导，令$a=b+1$，$F=pr_1\omega_a$，设初始序数ω_a的偏序类最小的共尾良序子集为E，$r\notin E$，令良序集$E'=E\cup\{r\}$，其中r为最小元．如果$Ord(E)<\omega_a$，根据补充定理345，$Card(E)\le\aleph_b$，故$Card(E')\le\aleph_b$．当$i\in E$时，令$X_i=\{z|z\in F$与$z\ge i$与$(\forall j)(j\in E$与$j>i\Rightarrow j>z)\}$，$X_r=\{z|z\in F$与$(\forall j)(j\in E\Rightarrow j>z)\}$，故$\sum\limits_{i\in E'}Card(X_i)=\aleph_b+1$，因此存在$m\in E'$，使$Card(X_m)=\aleph_a$．设$\omega_a$在$X_i$上导出的偏序的偏序类是$x_i$，则$\sum\limits_{i\in E'}x_i=\omega_a$，同时$x_m\ge\omega_a$，$x_m>0$，矛盾．

补充定理 374.

$a>0$，a没有前导，且$a<\omega_a$，则初始序数ω_a是奇异序数．

证明：根据补充定理346（1），$\sum\limits_{x\in\{y|y\text{为序数与}y<a\}}\aleph_x=\aleph_a$．根据补充定理371（9），$\omega_a$的共尾性小于等于$a$，得证．

补充定理 375.

ω_{ω_0}是最小的奇异序数．

证明：根据补充定理373、补充定理374可证．

定义 185. 不可达序数（*ordinal inaccessible*）

如果序数a没有前导，且ω_a是正规序数，则称ω_a为不可达序数．

补充定理 376.

$a>0$，且ω_a为不可达序数，则$a=\omega_a$．

证明：根据补充定理344（2）、补充定理374可证．

补充定理 377.

ω_0是不可达序数．

证明：根据定义可证．

补充定理 378.

（*1*）令k为最小的艾普塞朗数，则ω_k的共尾性是ω_0.

（*2*）当$a > 0$、$a \leq k$时，ω_a不是不可达序数.

证明：

（1）令$x_0 = \omega_0$，对于$i \in N$，令$x_{i+1} = \omega_{x_i}$，则$k = \sup\limits_{i \in N}(x_i)$，根据补充定理367（2），$k$为最小的艾普塞朗数.

同时，ω_k的共尾性不大于ω_0. 而根据补充定理349（1），k没有前导，根据补充定理371（7），k的共尾性为无穷序数，故k的共尾性是ω_0.

（2）根据补充定理376可证.

注：不能确定是否存在ω_0以外的不可达序数.

补充定理 379.

E为全序集，则：

（*1*）E的共尾性是正规序数；

（*2*）如果E非空且没有最大元，则E的共尾性是初始序数.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据补充定理371（7）、补充定理372可证.

补充定理 380.

（*1*）a、a'为序数，ω_a为的共尾性为$\omega_{a'}$，I为良序集且$Ord(I) < \omega_{a'}$，$(x_i)_{i \in I}$为序数族，如果对任意$i \in I$均有$x_i < \omega_a$，则$\sum\limits_{i \in I} x_i < \omega_a$.

（*2*） a为序数，ω_a为正规序数，I为良序集且$Ord(I) < \omega_a$，$(x_i)_{i \in I}$为序数族，如果对任意$i \in I$均有$x_i < \omega_a$，则$\sum\limits_{i \in I} x_i < \omega_a$.

证明：

（1）设$[0, Ord(I)[$到I的同构为f，对任意序数a，令$I_a = f([0, a[)$，$s_a = \sum\limits_{i \in I} axi$. 考虑集合$\bigcup\limits_{i \in [0, Ord(I)[} \{si\}$，由于$Ord(I) < \omega_{a'}$，故存在$y \in [0, \omega_a[$，对任意$i \in [0, Ord(I)[$，均有$s_i < y$，即$y > \sum\limits_{i \in I} x_i$，得证.

（2）根据补充定理380（1）可证.

定义 186. 正规基数（*cardinal régulier*），奇异基数（*cardinal singulier*）

a为序数，如果ω_a为正规序数（或奇异序数），则称$\aleph_a$为正规基数（或奇异基数）.

补充定理 381.

（*1*）a、a'为序数，ω_a为的共尾性为$\omega_{a'}$，$Card(I) < \aleph_{a'}$，$(x_i)_{i\in I}$为基数族，如果对任意$i \in I$均有$x_i < \aleph_a$，则$\sum\limits_{i\in I} x_i < \aleph_a$.

（*2*）a、a'为序数，ω_a为的共尾性为$\omega_{a'}$，$Card(I) = \aleph_{a'}$，则存在基数族$(x_i)_{i\in I}$使$\sum\limits_{i\in I} x_i = \aleph_a$.

（*3*）a为序数，当且仅当对任意基数族$(x_i)_{i\in I}$，若$Card(I) < \aleph_a$，且对任意$i \in I$均有$x_i < \aleph_a$，则$\sum\limits_{i\in I}(x_i)_{i\in I} < \aleph_a$时，$\aleph_a$为正规基数.

证明：

（1）根据补充定理380（1）、补充定理201可证.

（2）类似补充定理373的证明可证.

（3）根据补充定理381（1）、补充定理381（2）可证.

补充定理 382.

a为序数，基数$m \neq 0$，则：

（*1*）${\aleph_{a+1}}^m = {\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

（*2*）序数c满足$Card(c) \leq m$，则${\aleph_{a+c}}^m = {\aleph_a}^m {\aleph_{a+c}}^{Card(c)}$.

（*3*）$Card(a) \leq m$，则${\aleph_a}^m = 2^m {\aleph_a}^{Card(a)}$.

证明：

（1）如果$m \geq \aleph_{a+1}$，根据补充定理336（2），）${\aleph_{a+1}}^m = 2^m$、${\aleph_a}^m = 2^m$、$2^m > \aleph_{a+1}$，根据定理160得证.

如果$m < \aleph_{a+1}$，则$m \leq \aleph_a$，由于${\aleph_{a+1}}^m \geq {\aleph_a}^m$，${\aleph_{a+1}}^m \geq \aleph_{a+1}$，根据定理160，${\aleph_{a+1}}^m \geq {\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

同时，令$\aleph_{a+1}$按其最小良序排序，该最小良序同构于ω_{a+1}. 对任意m到$\aleph_{a+1}$的映射f，根据补充定理373，$f\langle m\rangle$不是$\aleph_{a+1}$共尾子集，即$\{x|(\forall y)(y \in f(m) \Rightarrow y < x)\}$非空，令其最小元为$n_f$.

根据定理85，$Ord(S_{n_f}) < \omega_{a+1}$，故$Card(S_{n_f}) < \aleph_a$. 因此$Card(S_{n_f}) \leq \aleph_a$.

令映射g为$f \to n_f$，对任意$p \in \aleph_{a+1}$，$Card(g^{-1}\langle p\rangle =) = Card(S_{n_f})^m$，因此
$Card(g^{-1}\langle p\rangle)$
$= {\aleph_a}^m$.

因此，m到$\aleph_{a+1}$的映射f的数目，小于等于${\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

综上，${\aleph_{a+1}}^m = {\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

（2）使用超限归纳法：

命题对$c = 0$显然成立，对1，根据补充定理382（1）可证.

假设命题对小于$c = 1$的序数（$c > 1$）成立：

如果c有前导，根据归纳假设可证；

如果c为极限序数，根据定理160，${\aleph_{a+c}}^m \geq {\aleph_a}^m {\aleph_{a+c}}^{Card(c)}$．同时，根据补充定理346（1）、补充定理300（1）、定理105，${\aleph_{a+c}}^m \leq \sum\limits_{d\in[0,c[} {\aleph_{a+d}}^m$，根据归纳假设，${\aleph_{a+c}}^m \leq$ $\sum_{d\in[0,c[}({\aleph_a}^m {\aleph_{a+d}}^{Card(d)})$，根据补充定理253（1），${\aleph_{a+c}}^m \leq {\aleph_a}^{m\cdot Card(c)} {\aleph_{a+d}}^{Card(c)Card(c)}$，根据定理160可证．

（3）根据补充定理382（2）、补充定理336（2）可证．

补充定理 383.

a、b为序数，a没有前导，$x \to s_x$为$[0,\omega_b[$到$[0,a[$的严格单增映射，且$\sup\limits_{x\in[0,\omega_b[} s_x = a$，则${\aleph_a}^{\aleph_b} = \sum\limits_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$．

证明：

$x \to s_x$为$[0,\omega_b[$到$[0,a[$的严格单增映射，故$[0,a[\neq \varnothing$，因此a为无穷序数．同时，对任意$x \in [0,\omega_b[$、$y \in [0,\omega_b[$、$x \neq y$、均有$s_x \neq s_y$．

对任意$[0,\omega_b[$到$[0,\omega_a[$的映射f，用通过超限归纳法定义$[0,\omega_b[$到$[0,\omega_b[$的映射h_f：

第一，如果$\{x|x \in [0,\omega_b[$与$f(0) \leq \omega_{s_x}\} = \varnothing$，令$Card(f(0)) = \aleph_z$，则对任意$x \in [0,\omega_b[$，$s_x \leq z$，故$z \geq a$，$f(0) \geq \omega_a$，矛盾，因此，$\{x|x \in [0,\omega_b[$与$f(0) \leq \omega_{s_x}\} \neq \varnothing$，令$h_f(0)$为其最小元．

第二，对$t \in [0,\omega_b[$，同理可证$\{x|x \in [0,\omega_b[$与$f(0) \leq \omega_{s_x}\} \neq \varnothing$，令$k$为其最小元．由于$Card(k) < aleph_b$，同时$Card([0,k[) = Card(k)$，故$Card[k,\omega_b[= \aleph_b$．因此，$\{x|x \in [[k,\omega_b[$与$(\forall)(i \in [0,t[\Rightarrow f(i) \neq x)\} \neq \varnothing$．令$h_f(t)$为其最小元．

故h_f为单射．

令g为映射$f \to h_f (f \in \mathcal{F}([0,\omega_b[;[0,\omega_a[, h_f \in \mathcal{F}([0,\omega_b[);[0,\omega_b[))$，

对任意$t \in [0,\omega_b[$，$Card([0,\omega_{s_{h_f(t)}}]) = \aleph s_{h_f(t)} + 1$，等于$\aleph s_{h_f(t)}$，则对任意$u \in$ $\mathcal{F}([0,\omega_b[;[0,\omega_b[)$，$g^{-1}\langle z\rangle = \sum\limits_{t\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_{h_t}}$，小于等于$\sum\limits_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$，

故${\aleph_a}^{\aleph_b} \leq {\aleph_b}^{\aleph_b} \sum\limits_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$．

又因为对任意$x \in [0,\omega_b[$，$2 \leq \aleph_{s_x}$，同时，${\aleph_b}^{\aleph_b} = 2^{\aleph_b}$，因此，$2^{\aleph_b} \leq \sum\limits_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$，故${\aleph_a}^{\aleph_b} \leq$ $2^{\aleph_b} \sum\limits_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$，因此${\aleph_a}^{\aleph_b} \leq \sum\limits_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$．

同时，根据定理110，故${\aleph_a}^{\aleph_b} \geq \sum\limits_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$，得证．

补充定理 384.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，则${\aleph_a}^{\aleph_{a'}} > \aleph_a$．

证明：如果$a = 0$或a有前导，根据补充定理373，$a = a'$，根据定理113可证．

如果a没有前导，设ω_a的共尾子集为A，且$Ord(A) = \omega_{a'}$．

令g为A到$[0,a[$的映射：

对任意$x \in A$，如果$Card(x)$为有限基数，则$g(x) = 0$；如果$Card(x)$为无穷基数，令其为$\aleph_y$，则$g(x) = \omega_y$.

令g的值域$= G$，则$Card(G) \le \aleph_{a'}$，同时，$\bigcup\limits_{i \in G} \{\omega_i\}$也是$\omega_a$的共尾子集，故则$Card(G) = \aleph_{a'}$. 令$h$为$[0, \omega_{a'}[$到$G$的同构，则$\sup\limits_{x \in [0, \omega'_a[} h(x) = a$. 根据补充定理383，${\aleph_a}^{\aleph_{a'}} = \prod\limits_{x \in [0, \omega_{a'}[} \aleph_{h(x)}$. 根据补充定理300（2）、补充定理346（1）可证.

补充定理 385.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，c为序数，如果存在基数n使$\aleph_a = n^{\aleph_c}$，则$c < a'$.

证明：假设$c \ge a'$，则$\aleph_c \aleph_{a'} = \aleph_c$，故${\aleph_a}^{\aleph_{a'}} = \aleph_a$，矛盾.

补充定理 386.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，序数$b < a'$，则${\aleph_a}^{\aleph_b} = \sum\limits_{c \in [0,a[} {\aleph_c}^{\aleph_b}$.

证明：$\sum\limits_{c \in [0,a[} {\aleph_c}^{\aleph_b} \le Card(a){\aleph_a}^{\aleph_b}$，由于$Card(a) \le \aleph_a$，故$\sum\limits_{c \in [0,a[} {\aleph_c}^{\aleph_b} \le {\aleph_a}^{\aleph_b}$.

另一方面，对任意$[0, \omega_b[$到$[0, \omega_a[$的映射f，均存在$c \in [0, a[$，使$f\langle [0, \omega_b[\rangle \subset [0, \omega_c[$，因此$\sum\limits_{c \in [0,a[} {\aleph_c}^{\aleph_b} \ge {\aleph_a}^{\aleph_b}$，得证.

补充定理 387.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，基数$b < \aleph_{a'}$且$b \ne 0$，则${\aleph_a}^b = \aleph_a \sum\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$.

证明：对任意b到$\aleph_a$的映射f，$Card(f(b)) < \aleph_a$，同时，当$m < \aleph_a$时，如果m为无穷基数，根据补充定理339（4）、补充定理337（6），$Card(\{x | x \subset \aleph_a 与 Card(x) = m\}) \ge \aleph_a$，因此${\aleph_a}^b \ge \aleph_a \sum\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$.

如果b为自然数，则${\aleph_a}^b = \aleph_a$，故${\aleph_a}^b \le \aleph_a \sum\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$，命题成立.

如果$b \ge \aleph_0$且$b < a$，根据补充定理386，${\aleph_a}^b \le \aleph_a \sum\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b$，命题成立.

补充定理 388.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，基数$b \ge \aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^b = (\sup\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}}$.

证明：

令$(x_i)_{i \in \aleph_{a'}}$为$\omega_a$的共尾子集，则$\aleph_a = \bigcup\limits_{i \in \aleph_{a'}} ([0, x_i + 1])$，令$y_i = Card([0, x_i + 1])$，则$\aleph_a \le \sum\limits_{i \in \aleph_{a'}} y_i$，根据补充定理300（1），${\aleph_a}^b \le \prod\limits_{i \in \aleph_{a'}} y_i^b$，因此${\aleph_a}^b \le (\sup\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}}$.

另一方面，$(\sup\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}} \le {\aleph_a}^{b \aleph_{a'}}$，故$(\sup\limits_{m \in [0, \aleph_a[} m^b)^{\aleph_{a'}} \le {\aleph_a}^b$，得证.

补充定理 389.

a为无穷基数，基数$b \ge a$，则$a^b = a \sum\limits_{m \in [0,a[} m^b$.

证明：根据补充定理336（2），$a^b=2^b$，$a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b=a(Card([0,a[)2^b$．由于$Card([0,a[$ $\le a$，又因为$a\le 2^b$，故$a^b=a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b$．

补充定理 390.

a为正规基数，基数$b\neq 0$，则$a^b=a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b$．

证明：根据补充定理387、补充定理389可证．

补充定理 391.

a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，y为基数，并且，$(\forall z)(z$为基数与$z<\aleph_a\Rightarrow z^y\le\aleph_a)$:

（*1*）如果$y>0$与$y<\aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^y=\aleph_a$；

（*2*）如果$y\ge\aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^y={\aleph_a}^{\aleph_{a'}}$．

证明：

（1）如果y为自然数，根据定理157可证．

如果y为无穷基数，根据补充定理386，${\aleph_a}^y\le\aleph_aCard(a)\aleph_a$，故${\aleph_a}^y\le\aleph_a$，得证．

（2）根据补充定理388可证．

补充定理 392. 广义连续统假设下的定理*1*

如果$(\forall k)(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k}=\aleph_k+1)$，则:

（*1*）x、y均为无穷基数，则$y<x\Rightarrow 2^y\le x$；

（*2*）a为序数，x、y均为基数，$x<\aleph_a$、$y<\aleph_a$，则$x^y\le\aleph_a$；

（*3*）a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，y为基数，$y>0$与$y<\aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^y=\aleph_a$；

（*4*）a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，y为基数，$y\le\aleph_a$与$y\ge\aleph_{a'}$，则${\aleph_a}^y=\aleph_{a+1}$；

（*5*）a为基数且$a>0$，如果对任意基数$b\neq 0$均有$a^b=a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b$，则$a$为正规基数．

证明：

（1）令$y=\aleph_a$，$x=\aleph_b$（a、b为序数），则$a<b$，故$a+1\le b$，得证．

（2）根据补充定理392（1），$2^x\le\aleph_a$、$2^y\le\aleph_a$，则$2^{xy}\le\aleph_a$，又因为$x<2^x$，故$x^y\le\aleph_a$．

（3）根据补充定理392（2）、补充定理391（1）可证．

（4）根据补充定理384，${\aleph_a}^y>\aleph_a$，故${\aleph_a}^y\ge\aleph_a+1$．同时，$\aleph_ay\le{\aleph_a}^{\aleph_a}$，故${\aleph_a}^y\le 2^{\aleph_a}$，得证．

（5）令$a=\omega_x$，$\omega_{x'}$为ω_x的共尾性，如果$x'<x$，令$b=\omega_{x'}$，则$a^b=\aleph_{x+1}$．根据补充定理392（2），$a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b\le aaa$，故$a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b\le a$，因此$a\sum\limits_{m\in[0,a[}m^b<a^b$，矛盾．

补充定理 393.

a为基数且$a>2$，对任意基数$m\in]0,a[$，均有$a^m=a$，则a为正规基数．

证明：根据补充定理384可证.

补充定理 394. 广义连续统假设的等价命题

$(\forall a)(\forall m)((a$为正规基数$)$与$(m$为基数$)$与$(m \in]0,a[) \Rightarrow a^m = a) \Leftrightarrow (\forall k)(k$为序数 $\Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1})$.

证明：如果广义连续统假设成立，根据补充定理392（3），左边公式为真.

反过来，如果左边公式为真，由于$\aleph_{k+1}$为正规基数，故${\aleph_{k+1}}^{\aleph_k} = \aleph_{k+1}$，由于$\aleph_{k+1} \leq 2^{\aleph_k}$，故广义连续统假设成立.

定义 187. 支配基数（*cardinal dominant*）

a为无穷基数，如果对任意基数$m < a$、$n < a$均有$m^n < a$，则称a为支配基数.

补充定理 395.

（*1*）$\aleph_0$为支配基数.

（*2*）a为序数，如果$\aleph_a$为支配基数，则a没有前序.

证明：根据定义可证.

补充定理 396.

基数$a > 0$，对任意基数$m < a$，均有$2^m < a$，则a为支配基数.

证明：如果a为有限基数，1、2显然不符合条件；$a > 2$时，$2^{a-1} \geq a$，矛盾，故a为无穷基数.

如果$a = \aleph_0$，a为支配基数. $a > \aleph_0$时，令$p = sup\{m, n, \aleph_0\}$. 则无穷基数$p < a$，$p^p = 2^p$，故$p^p < a$，因此$m^n < a$. 得证.

补充定理 397.

递归定义基数序列$(a_i)_{i \in N}$：

$a_0 = \aleph_0$，

对任意$i \in N$，$a_{i+1} = 2^{a_i}$.

令$b = \sum\limits_{i \in N} a_i$，则$b$是大于$\aleph_0$的最小的支配基数.

证明：由于$a_1 > \aleph_0$，故$b > \aleph_0$.

对任意基数$m < b$，存在自然数n使$m < a_n$，故$2^m < b$，根据补充定理396，b为支配基数.

对于支配基数x，如果$x > \aleph_0$，且$x < b$，则存在自然数n使$x \leq a_n$，设其中最小的为n_0，那么$2^{a_{n_0-1}} \geq x$，矛盾. 故$x \geq b$.

补充定理 398.

递归定义基数序列$(a_i)_{i\in N}$：

$a_0=\aleph_0$，

对任意$i\in N$，$a_{i+1}=2^{a_i}$.

令$b=\sum\limits_{i\in N}a_i$，则：

（*1*）$b^{\aleph_0}=2^b$；

（*2*）${\aleph_0}^b=b^{\aleph_0}$；

（*3*）$b^{\aleph_0}=(2^b)^b$.

证明：

（1）根据补充定理336（4），$b^b=2^b$，由于$b>\aleph_0$，故$b^{\aleph_0}\le 2^b$；同时，$2^b=2^{\sum\limits_{i\in N}a^i}$，等于$\prod\limits_{i\in N-\{0\}}a_i$，故$2^b\le b^{\aleph_0}$，得证.

（2）根据补充定理398（1）可证.

（3）由于$(2^b)^b=2^b$，得证.

定义 188. 不可达基数（*cardinal inaccessible*），强不可达基数（*cardinal fortement inaccessible*）

a为序数，如果ω_a为不可达序数，则称$\aleph_a$为不可达基数. 不可达基数同时是支配基数的，称为强不可达基数.

补充定理 399. 广义连续统假设下的定理*2*

如果$(\forall k)(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k}=\aleph_k+1)$，则不可达基数均为强不可达基数.

证明：根据补充定理396可证.

补充定理 400.

基数$a\ge 3$，当且仅当对任意基数族$(a_i)_{i\in I}$均有$Card(I)<a$与$(\forall i)(i\in I\Rightarrow a_i<a)\Rightarrow \prod\limits_{i\in I}a_i<a$时，$a$为强不可达基数.

证明：

充分性：根据定义，a为支配基数；令$a=\aleph_k$，如果$k=m+1$，则$2^{\aleph_m}\ge a$，矛盾，故k没有前导；同时，根据补充定理381（3），a是正规基数. 充分性得证.

必要性：令$s=\sum\limits_{i\in I}(a_i)$，由于$a$为正规基数，根据补充定理381（3），$s<a$；因此$\prod\limits_{i\in I}a_i\le s^{Card(I)}$，由于$a$为支配基数，必要性得证.

补充定理 401.

a为基数，则：

（*1*）如果对任意基数$b>0$且$b<a$，均有$a^b=a$，则对任意基数$b>0$，均有$a^b=a2^b$.

（*2*）a为支配基数，如果对任意基数$b>0$，均有$a^b=a2^b$，则对任意基数$b>0$且$b<a$，均有$a^b=a$.

证明：

（1）当$2^b > a$时，$a^b = 2^b$，$a2^b = 2^b$；当$a \geq 2^b$时，$b < a$，故$a^b = a$，$a2^b = a$，故$a^b = a2^b$.

（2）当$b < a$时，$2b < a$，故$a^b = a$.

补充定理 402.

a为无穷基数，当且仅当a为支配基数并且对任意基数$b > 0$且$b < a$均有$a^b = a$时，a为强不可达基数.

证明：充分性根据补充定理393可证．必要性根据补充定理391（1）可证.

定义 189. 发散映射（*application divergente*）

序数$a > 0$，$[0, a[$到$[0, a[$的映射f，如果满足对任意序数$l_0 < a$，均存在序数$m_0 < a$，使$(x$为序数与$x \geq m_0$与$x < a) \Rightarrow f(x) \geq l_0$，则称$f$为发散映射.

补充定理 403.

a、b为序数，g为$[0, b[$到$[0, a[$的严格单增映射，并且，对任意序数c，$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) = \sup\limits_{d \in [0,c[} g(d)$，$\sup\limits_{d \in [0,b[} g(d) = a$．则当且仅当存在$[0, b[$到$[0, b[$的发散映射$h$满足$(\forall x)(x \in]0, b[\Rightarrow h(x) < x)$时，存在$[0, a[$到$[0, a[$的发散映射$f$满足$(\forall x)(x \in]0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

证明：

设h存在，对任意序数$x < a$，由于$\sup\limits_{d \in [0,b[} g(d) = a$，故$sup\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\} < b$，令$f(x) = g(h(sup\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\}))$，当$x > 0$时，由于$\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) > x\} \neq \varnothing$，故可令其最小元为$c$，则$\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\} = [0, c[$，由于$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) = \sup\limits_{d \in [0,c[} g(d)$，故$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) \leq x$，因此$g(h(sup\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\})) < x$，即$(\forall x)(x \in]0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

同时，对任意$y_0 < a$，$\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \geq y_0\} \neq \varnothing$，令$l_0$为其最小元，则存在$m_0 < b$使$(x$为基数与$x \geq m_0$与$x < b) \Rightarrow h(x) \geq l_0$，令$x_0 = g(m_0)$，当$x \geq x_0$时，$sup\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\} \geq m_0$，故$h(sup\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\}) \geq l_0$，因此$g(h(sup\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq x\})) \geq y_0$，故$f$为$[0, a[$到$[0, a[$的发散映射.

反过来，设f存在，对任意序数$x < b$，由于$\sup\limits_{d \in [0,b[} g(d) = a$，故$\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq f(g(x))\} \neq b$，令$h(x) = sup\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq f(g(x))\}$，当$x > 0$时，由于$\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) > f(g(x))\} \neq \varnothing$，故可令其最小元为$c$，则$\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \leq f(g(x))\} = [0, c[$，如果$h(x) \geq x$，即$\sup\limits_{d \in [0,c[} d \geq x$，因此$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) > f(g(x))$，但$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) = \sup\limits_{d \in [0,c[} (g(d))$，故$g(\sup\limits_{d \in [0,c[} d) \leq f(g(x))$，矛盾，即$(\forall x)(x \in]0, a[\Rightarrow f(x) < x)$.

同时，对任意$y_0 < b$，令$l_0 = g(y_0)$，则存在$m_0 < a$使$(x$为基数与$x \geq m_0$与$x < a) \Rightarrow f(x) \geq l_0$，$\{z|z$为序数与$z < b$与$g(z) \geq m_0\} \neq \varnothing$，令$x_0$为其最小元，当$x \geq x_0$时，$g(x) \geq m_0$，故$f(g(x)) \geq l_0$，因此$h(x) \geq y_0$．故$h$为$[0, b[$到$[0, b[$的发散映射.

补充定理 404.

a为序数，则当且仅当ω_a的共尾性为ω_0时，存在$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的发散映射f满足$(\forall x)(x\in[0,\omega_a[\Rightarrow f(x)<x)$.

证明：如果ω_a的共尾性为ω_0，令E为$[0,\omega_a[$的共尾子集，令$g(x)=\{z|z\in E$与$z>x\}$的最小元，根据补充定理403可证.

反过来，设f为$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的满足条件的发散映射，令$x_0=1$，$x_{n+1}=\{z|(\forall y)$ $(y$为序数与$y<\omega_a$与$y\geq z\Rightarrow f(z)>x_n\}$的最小元．假设存在序数$u<\omega_a$，且对任意$i\in N$，均有$x_i<u$．设满足条件的最小序数为$u_0$，则对任意$i\in N$，$f(u_0)>x_i$，矛盾．故$\bigcup\limits_{i\in N}\{x_i\}$为$a$的共尾子集，得证.

补充定理 405.

a、a'为为序数，且$a'>0$，ω_a的共尾性为$\omega_{a'}$，f为$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的映射，且满足$(\forall x)$ $(x\in[0,\omega_a[\Rightarrow f(x)<x)$，则存在序数$l_0$，使$Card(\{x|x\in[0,\omega_a[$与$f(x)=l0\})\geq\aleph_{a'}$.

证明：假设对任意$x\in[0,\omega_a[$，均存在$y\in[0,\omega_a[$使$f(y)>x$，则令$x_0=1$，$x_{n+1}=\{z|(\forall y)(y$为序数与$y<\omega_a$与$y\geq z\Rightarrow f(z)>x_n\}$的最小元，故$\bigcup\limits_{i\in N}\{x_i\}$为$a$的共尾子集，矛盾，故存在$x\in[0,\omega_a[$，使$(\forall x)(x\in[0,\omega_a[\Rightarrow f(x)\in[0,x])$，因此$Card(f\langle[0,\omega_a[\rangle)<\aleph_a$，令$x_i=Card(\{x|x\in[0,\omega_a[\Rightarrow f(x)=i\}$，则$\sum\limits_{f\langle[0,\omega_a[\rangle x_i}=\aleph_a$．根据补充定理381（1）可证.

补充定理 406.

F为无穷集合，其元素都是E的子集，对任意$A\in F$均有$Card(A)=Card(F)$，则：

（1）存在E的子集P使$Card(P)=Card(F)$，并且F的所有元素都不是P的子集.

（2）如果对F的任意子集G，$Card(G)<Card(F)$，均有$Card(E-\bigcup\limits_{A\in G}A)\geq Card(F)$，则存在$E$的子集$P$使$Card(P)=Card(F)$，并且对任意$A\in F$均有$Card(A\cap P)<Card(F)$.

证明：

（1）令$Card(F)=\aleph_a$，其中a为序数，h为$\{z|z$为序数与$z<\omega_a\}$到F的同构．令$f(0)=\tau_z(z\in h(0))$，$g(0)=\tau_z(z\in h(0)-\{f(0)\})$，对任意序数$x>0$、$x<\omega_a$，令$u=h(x)-h(x)\cap(\bigcup\limits_{b\text{为序数与}b<x}\{f(b),g(b)\})$，由于$2^Card(a)<\aleph_a$，故$u\neq\varnothing$，因此令$f(x)=\tau_z(z\in u)$，$g(0)=\tau_z(z\in u-\{f(x)\})$．$f\langle\omega_a\rangle$、$g\langle\omega_a\rangle$不相交，其中至少有一个符合条件，得证.

（2）令$Card(F)=\aleph_a$，其种a为序数，h为$\{z|z$为序数与$z<F\}$到F的同构．令$f(0)=\tau_z(z\in E-h(0))$，对任意序数$x>0$、$x<\omega_a$，令$u=E-\bigcup\limits_{b\text{为序数与}b\leq x}h(b)$，则$u\neq\varnothing$，因此令$f(x)=\tau_z(z\in u)$，$f\langle\omega_a\rangle$即符合条件，得证.

定义 190. 不相交度（*degré de disjonction*）

E为无穷集合，集族$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，且对任意$i\in I$、$j\in I$且$i\neq j$，均有$X_i\neq X_j$．如果存在最小基数c，使对任意$i\in I$、$j\in I$且$i\neq j$，均有$Card(X_i\cap X_j)<c$，则称c为$(X_i)_{i\in I}$的不相交度.

补充定理 407.

E为无穷集合，集族$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，且对任意$i\in I$、$j\in I$且$i\neq j$，均有$X_i\neq X_j$，c为$(X_i)_{i\in I}$的不相交度，则$Card(I)\leq Card(E)^c$.

证明：当$c=0$时，命题显然成立.

$c>0$时，E的任意势为c的子集，最多只能是$\{A|(\exists i)(i\in I$与$Card(X_i)\geq c$与$A=X_i)\}$当中一个元素的子集，根据补充定理337（4），$Card(\{A|(\exists i)(i\in I$与$Card(X_i)\geq c$与$A=X_i)\})\leq Card(E)^c$.

同时，$\{A|(\exists i)(i\in I$与$Card(X_i)<c$与$A=X_i)\}\leq\sum\limits_{d\in[0,c[}E^d$，而$\sum\limits_{d\in[0,c[}E^d\leq cE^c$，故$\sum\limits_{d\in[0,c[}E^d\leq E^c$. 综上，$Card(I)\leq Card(E)^c$.

定义 191. 诺特集（*ensemble noethérien*）

E为偏序集，如果E的任何非空子集都有极大元，则称E为诺特集.

定理 171.

E为诺特集，$F\subset E$，并且，$((a\in E)$与$(x>a\Rightarrow x\in F))\Rightarrow(a\in F)$，则$F=E$.

证明：如果$F\neq E$，则$E-F$有极大元b，因此$b\in F$，矛盾.

补充定理 408.

（*1*）诺特集的子集也是诺特集.

（*2*） E为偏序集，则有限个按导出的偏序排序的E的诺特子集的并集，按导出的偏序排序，也是诺特集.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）对子集数目用数学归纳法可证.

补充定理 409.

E为偏序集，当且仅当对任意$a\in E$，区间$]a,\rightarrow[$均为诺特集时，E为诺特集.

证明：根据定义可证.

补充证明规则 91. 按诺特集的偏序的相反关系排序的偏序集的超限归纳法

集合论中，E为偏序集，其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集. u为字母，T为项. 则存在集合U和E到U的满射f，使对任意$x\in E$，均有$f(x)=(f(x)|u)T$，其中$f(x)$是$f(x)$在区间$]\leftarrow,x[$上的限制，并且，满足条件的U和f是唯一的.

证明：设U和f、U'和f'均满足条件，$A=\{x|x\in E$与$f(x)\neq f'(x)\}$，如果$A\neq\varnothing$，则其有极小元a，则$f(a)=f'(a)$，矛盾. 唯一性得证.

设所有存在U和f的E的子集的并集为A，则A也存在U和f. 如果$A\neq E$，则$E-A$有极小元a，故$A\cup\{a\}$存在U和f，矛盾，存在性得证.

补充定理 410.

（*1*）E为诺特集，并且E的任何有限子集均有最小上界，则E有最大元.

（*2*）E为诺特集，并且E的任何有限子集均有最小上界，则E为完备格.

证明：

（1）令x为E的极大元，如果存在$y\in E$且x、y不可比较，$\{x,y\}$没有上界，矛盾，故x为E的最大元.

（2）对E的任意非空子集F，令a_0为F的任意元素，对任意$i\in N$，如果存在$x>a_i$并且x是F的某个有限子集的最小上界，则令a_{i+1}为任何一个x，否则令$a_{i+1}=a_i$．根据定理168，存在自然数m，对任意$n\geq m$，$a_m=a_n$，因此a_m为F的最小上界．得证.

习题 156.

当且仅当对任意E到E的映射f，存在E的非空子集S使$S\neq E$与$f(S)\subset S$时，E为无穷集合.

证明：对于元素数目为n有限集合，令g为E到$[1,n]$的双射，$f=((\bigcup\limits_{i\in[1,n-1]}\{(i,i+1)\})\cup\{(n,1)\},[1,n],[1,n])$．则考虑映射$g^{-1}\circ f\circ g$．对任意$S\subset E$，令$T=g(S)$，如果$g^{-1}\circ f\circ g(S)\subset S$，则$f(T)\subset T$，设$a$为$[1,n]-T$的最小元，如果$a=1$，则$n\notin T$，设$T$的最大元为$b$，则$b<n$，$f(b)=b+1$，而$b+1\notin T$，矛盾．如果$a\neq 1$，则$a-1\in T$，$f(a-1)=a$，而$a\notin T$，矛盾．故不存在$E$的非空子集$S$使$S\neq E$与$f(S)\subset S$.

对于无穷集合E，对任意映射f，令$x\in E$，$y_0=x$，$y_n=f(y_{n-1})$，$S=\bigcup\limits_{i\in N}\{y_i\}$，则$f(S)\subset S$．假设$S=E$，则存在$y_n=x$，则$S=\bigcup\limits_{i\in[0,n-1]}\{y_i\}$，故$Card(S)\leq n$，矛盾.

习题 157.

a、b、c、d均为基数，如果$a<c$，$b<d$，求证：$a+b<c+d$，$ab<cd$.

证明：即补充定理334.

习题 158.

E为无穷集合，则$Card(\{X|X\subset E与Card(X)=Card(E)\}=Card(\mathcal{P}(E))$.

证明：

设$a\neq b$，则$Card(E\times\{a\}\cup E\times\{b\})=E$，设$f$为$(E\times\{a\})\cup(E\times\{b\})$到$E$的双射，令$g$为$X\rightarrow f\langle(X\times\{a\})\bigcup\limits_{(}E\times\{b\})\rangle(X\in\mathcal{P}(E))$，

由于$Card((X\times\{a\})\cup(E\times\{b\}))=Card(E)$，故$Cardf\langle(X\times\{a\})\bigcup\limits_{(}E\times\{b\})\rangle)=Card(E)$，因此$g$为$\mathcal{P}(E)$到$\{X|X\subset E与Card(X)=Card(E)\}$的单射，故$Card(\{X|X\subset E与$

$Card(X)=Card(E)\}\geq Card(\mathcal{P}(E))$，得证，

习题 159.

E为无穷集合，$F=\{G|\Delta_G$为E的划分$\}$，求证：$Card(F)=Card(\mathcal{P}(E))$.

证明：

令$H=\{Y|(\exists I)(I\subset E$与$Y=\{E,E-I\})\}$，根据定理142，$2^H=\mathcal{P}(E)$，根据定理160，$Card(H)=Card(\mathcal{P}(E))$.

由于$H\subset F$，故$Card(F)\geq Card(\mathcal{P}(E))$.

反过来，令f为$X\rightarrow\{\{x,y\}|x=y$与$x\in X\}$，则$f(X)\subset E\times E$，故$Card(F)\leq Card(\mathcal{P}(E\times E))$，即$Card(F)\leq Card(\mathcal{P}(E))$，得证.

习题 160.

E为无穷集合，求证：E的排列的集合，和$\mathcal{P}(E)$等势.

证明：即补充定理337（2）.

习题 161.

E、F均为无穷集合，$Card(E)\leq Card(F)$，求证：E到F的满射的集合（如果$CardE=Card(F)$），E到F的映射的集合，E的子集到F的映射的集合，均和$\mathcal{P}(F)$等势.

证明：根据补充定理337（3）、补充定理336（2）可证. 注：原书习题161第一部分有误.

习题 162.

E、F均为无穷集合，$Card(E)<Card(F)$，求证：$Card(\{X|X\subset F$与$Card(X)=E\})=Card(F^E)$，$Card(\{f|f$为E到F的单射$\})=Card(F^E)$.

证明：根据补充定理337（4）、补充定理337（5）可证.

注：习题162中，E为无穷集合的条件可以去掉.

习题 163.

E为无穷集合，求证：在E上的良序集合，和$\mathcal{P}(E)$等势.

证明：任何良序的图，都是$E\times E$的子集.

另一方面，令F为在E上的良序，对任意E的排列f，$f(x)\leq(y)$与$x\in E$与$y\in E$也是良序关系，对于不同的f，其相应的良序也互不相同. 根据习题160可证.

习题 164.

令E为非空良序集合，对任意$x\in E$，如果x不是E的最小元，则$]\leftarrow,x[$有最大元，求证：E同构于N或者E同构于$[0,n]$（n为自然数）.

证明：如果命题为假，根据定理84，存在$x\in E$，使$]\leftarrow,x[$同构于N，矛盾.

习题 165.

（1）a为基数，求证："x为序数与$Card(x) < a$"为x上的集合化公式.

（2）令序数$a \geq 0$，$O'(a)$为良序集$\{x|x$为序数与$x \leq a\}$，并按下列方式定义定义域为$O'(a)$的函数f_a：

$f_a(0) = Ord(N)$，

对$x > 0$且$x \leq a$，令$f_a(x)$为$\{y|y$为序数与$(\exists z)(z$为序数与$z < x$与$Card(y) \leq Card(f_a(z)))\}$的最小上界.

求证：

令$x \leq a$、$y \leq a$，如果$x < y$，则$Card(f_a(x)) < Card(f_a(y))$；

如果$x \leq a$、$a \leq b$，则$f_a(x) = f_b(x)$；

特别是，$\aleph_0 = Card(N)$.

（3）求证：

令a为无穷基数，$W(a)$为$\{y|y$为序数与$Card(y) < a\}$的最小上界，则$W(a)$是初始序数，并且，设其为ω_x，则$a = \aleph_x$；进而，ω_x为$\{y|y$为序数与$Card(y) = a\}$的最小元.

令a为序数，$O'(a) = \{x|x$为序数与$x \leq a\}$，$W'(a) = \{x|x$为无穷基数与$x \leq \aleph_a\}$，则：

映射$x \to \aleph_x (x \in O'(a))$为$O'(a)$到$W'(a)$的同构；

特别是，令a为序数，则$(\forall x)(x$为基数$\Rightarrow x \leq \aleph_a$或$x \geq \aleph_a + 1)$.

令a为无穷序数、b为序数，a没有前导，则：

对任意定义域为$\{y|y$为序数与$y < b\}$、值域的元素都是序数的严格单增映射f，如果$a = \sup\limits_{x \in \{y|y\text{为序数与}y<b\}} f(x)$，即有$\sum\limits_{x \in \{y|y\text{为序数与}y<b\}} \aleph_{f(x)} = \aleph_a$.

（4）求证：ω_a为标准序数函数符号.

证明：

（1）即补充定理340.

（2）即补充定理341、补充定理342（1）.

（3）第一部分根据补充定理343（1）、补充定理343（2）可证，后面得部分即补充定理344（1）、补充定理345、补充定理346（1）.

（4）即补充定理347.

注：习题165（2）开头应改为"$a \geq 0$".

习题 166.

（1）求证：

a为序数，则ω_a没有前导.

如果序数x没有前导，且$x > 0$，则$x \geq \omega_0$.

ω_0是不可约的序数.

令序数$a > 0$，则：$a\omega_0$是不可约的序数；$a\omega_0 > a$；如果序数x不可约，且$x > a$，则$x \geq a\omega_0$.

令序数$a > 0$，则$(a+1)\omega_0 = a\omega_0$.

（*2*）a为序数，求证：当且仅当存在序数b，使$a = {\omega_0}^b$时，a为不可约的序数.

证明：

（1）即补充定理349（1）、补充定理349（2）、补充定理349（3）、补充定理350、补充定理351.

（2）即补充定理352（1）.

习题 167.

（*1*）求证：

对任意序数a，以及序数$c > 1$，存在唯一的一对序数有限序列$(l_i)_{i\in[1,k]}$、$(m_i)_{i\in[1,k]}$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} c^{l_i} m_i$，其中，对任意$i \in [1,k]$，$m_i > 0$与$m_i < c$，对任意$i \in [1,k-1]$，$li > l_{i+1}$.

对任意序数a，存在唯一的单减有限序列$(b_i)i \in [1,k]$，使$a = \sum\limits_{i\in[1,k]} {\omega_0}^{b_i}$.

（*2*）令n为大于0的自然数，按下列方式定义$N - \{0\}$到N的映射f：

$f(1) = 1$;

$f(n) = \sup\limits_{k\in[1,n-1]} (k2^{k-1}+1)f(n-k)$.

求证：

对任意序数族$(a_i)_{i\in[1,n]}$，$Card(\{x|(\exists g)(g$为$[0,n]$的排列与$x = \sum\limits_{i\in[1,n]} a_{g(i)}\}) \le f(n)$，并且存在某个序数族$(a_i)_{i\in[1,n]}$使等号成立.

同时，当$n \ge 20$时，$f(n) = 81f(n-5)$.

（*3*）令g为$[0,n]$的排列，求证：对不同的g，$\sum\limits_{i\in[1,n]} (\omega_0 + g(i))$各不相同.

证明：

（1）即补充定理353.

（2）考虑a_i的展开的最大指数，设其中最大指数等于最小值的有k个序数. 在排列中，另外$n-k$个序数的序数和多对有$f(n-k)$种可能. 考虑这些序数后面的序数：如果有序数，最后一个序数有k种可能，前面的序数有2^{k-1}种可能，不等式得证.

同时，设$f(n) = (k2^{k-1}+1)f(n-k)$，则令$a_i = \omega_0 i + i$（$i \in [1,k]$），$a_{k+1}$、$a_{k+2}$、$\cdots$、$a_n$为使等号成立的$n-k$个序数展开所有指数加2后得到的结果，则此时等号成立.

通过数学归纳法可证当$n \ge 20$时，$f(n) = 81f(n-5)$.

（3）用数学归纳法可证$\sum\limits_{i\in[1,n]} (\omega_0 + g(i)) = {\omega_0}^n + \sum\limits_{i\in[1,n]} {\omega_0}^{n-i} g(i)$，得证.

习题 168.

（*1*）$w(x)$为定义在$x \ge a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \ge a_0$、$y > x$，均有$w(x) < w(y)$. 求证：对任意序数$x \ge a_0$和序数y，$w(x+y) \ge w(x) + y$. 进而，存在序数a，对任意序数$x \ge a$，均有$w(x) \ge x$.

（2）$w(x)$为定义在$x \geq a_0$上的序数函数符号，对任意序数$x \geq a_0$，$w(x) \geq x$，并且，对任意序数x、y，$x < y$与$x \geq a_0 \Rightarrow w(x) < w(y)$.

令$g(x, y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq a_0$上的序数函数符号，并满足:

第一，(x为序数与y为序数与$x \geq a_0$与$y \geq a_0$) $\Rightarrow g(x, y) > x$;

第二，$a_0 \leq x$与$x \leq x'$与$a_0 \leq y$与$y \leq y' \Rightarrow g(x, y) \leq g(x', y')$.

$f(x, y)$为定义在$x \geq a_0$、$y \geq 1$上的序数函数符号，其按下列方式定义：

第一，对任意序数$x \geq a_0$，$f(x, 1) = w(x)$;

第二，对任意序数$x \geq a_0$，$y > 1$，$f(x, y) = \sup\limits_{z \in]0, y[} g(f(x, z), x)$.

求证：

对任意序数b，最多存在有限个序数y，使$f(x, y) = b$至少有一个解.

（3）$f(x, y)$的临界序数没有前导.

同时，如果存在集合A，对任意$x \in A$，(x为序数)与$f(x, c) = c$，并且，c为A的最小上界，则c为$f(x, y)$的临界序数.

（4）令$h(x) = f(x, x)$（$x \geq a_0$），序列$(a_n)_{n \in N = \{0\}}$满足$a_1 = a_0 + 2$、$a_{n+1} = h(a_n)$，则序列$(a_n)_{n \in N = \{0\}}$的最小上界，为$f(x, y)$的临界序数.

（5）如果集合的元素都是$f(x, y)$的临界序数，则该集合最小上界是$f(x, y)$临界序数.

并且，$f(x, y)$的临界序数是不可约的.

证明：

（1）即补充定理355.

（2）即补充定理356（1）.

（3）即补充定理356（2）、补充定理356（3）.

（4）即补充定理356（4）.

（5）即补充定理356（5）、补充定理356（6）.

习题 169.

（1）求证：a、b为序数，$a \geq 2$，b没有前导，则a^b不可约.

a为有限序数，$a \geq 2$，$b = \omega_0 c$，则$a^b = {\omega_0}^c$.

a为无穷序数，p为$\{x | x$为不可约的序数与$x \leq a\}$的最大元，序数b没有前导，则$a^b = p^b$.

（2）求证：

令序数函数符号$f(x, y) = x^y$，c为序数，则当且仅当对任意序数$a > 1$、$a \leq c$，均存在x使$c = a^x$时，c为f的临界序数；并且，使$c = a^x$成立的x是唯一且不可约的.

反过来，对任意$a > 1$和不可约的序数p，a^p为f的临界序数.

进而，当且仅当存在序数b使c等于${\omega_0}^{{\omega_0}^b}$时，$c$为$f$的临界序数.

（3）令序数函数符号$f(x, y) = xy$，则f的最小的临界序数是可数序数.

证明：

（1）即补充定理357、补充定理359、补充定理361.

（2）根据补充定理362、补充定理363、补充定理364可证.

（3）根据补充定理365可证.

习题 170.

令序数$a>0$、$c>1$，序数有限序列$(l_i)_{i\in[1,k]}$、$(m_i)_{i\in[1,k]}$，使$a=\sum\limits_{i\in[1,k]}c^{l_i}m_i$，其中，对任意$i\in[1,k]$，$m_i>0$与$mi<c$，对任意$i\in[1,k-1]$，$li>l_{i+1}$．令$L(a)=\{x|(\exists i)(i\in[1,k]$与$x=l_i\}$，求证：

（*1*）对任意$i\in[1,k]$，$l_i\le a$，并且，如果存在$i\in[1,k]$使$l_i=a$，则a为x^y（$x\ge 2$）的临界序数.

（*2*）令$L_1(a)=L(a)$，对于自然数$n>1$，$L_n(a)=\bigcup\limits_{b\in L_{n-1}(a)}L(b)$，求证：存在自然数$n_0$，对任意自然数$n\ge n_0$，均有$L_{n+1}(a)=L_n(a)$，并且，$L_n(a)$的元素均为$x^y$的临界序数.

证明：

（1）根据补充定理275，$c^{l_i}\ge cl_i$，故$c^{l_i}\ge l_i$，又因为$a\ge c^{l_i}$，因此$l_i\le a$．如果存在$i\in[1,k]$使$l_i\le a$，则$a=c^a$.

如果c为有限序数，设$a=\omega_0d+e$（e为有限序数），则$a={\omega_0}^dc^e$，设$d=1+k$，则$e=0$，$d={\omega_0}^k$，因此d为不可约的序数，故$d=k$或$d=1$．如果$d=1$，则$a=\omega_0$，故a为x^y（$x\ge 2$）的临界序数．如果$d=k$，则$a={\omega_0}^a$，根据补充定理369，a为x^y（$x\ge 2$）的临界序数.

如果c为无穷序数，则$a\ge{\omega_0}^a$，故$a={\omega_0}^a$，根据补充定理369，a为x^y（$x\ge 2$）的临界序数.

（2）令$M_n(a)=\{b|b\in Ln(a)$与$b\notin L(b)\}$，如果对任意$n\in N$，$M_n(a)\ne\varnothing$，令y_n为$M_n(a)$的最大元．则$\{z|(\exists y)(y\in N$与$z=y_n)\}$有最小元y_m，但$y_m\notin L(ym_)$，故对任意$z\in M_{n+1}(a)$，均有$z<y_m$，即$y_{m+1}<y_m$，矛盾.

注：原书习题170关于“$a=0$”的内容有误.

习题 171.

（*1*）求证：

无穷正规序数都是初始序数.

a为序数，如果$a=0$或a有前导，则初始序数ω_a是正规序数.

$a>0$，a没有前导，且$a<\omega_a$，则初始序数ω_a是奇异序数.

ω_{ω_0}是最小的奇异序数.

（*2*）求证：$a>0$，且ω_a为不可达序数，则$a=\omega_a$.

令k为最小的艾普塞朗数，则ω_k的共尾性是ω_0.

进而，当$a>0$、$a\le k$时，ω_a不是不可达序数.

（*3*）E为全序集，求证：E的共尾性是正规序数；如果E非空且没有最大元，则E的共尾性是初始序数；进而，令ω_a的共尾性为$\omega_{a'}$，则$a'\le a$，并且，当且仅当$a'=a$时，ω_a为正

规序数.

（4）a为序数，ω_a为正规序数，I为良序集且$Ord(I) < \omega_a$，$(x_i)_{i\in I}$为序数族，如果对任意$i \in I$均有$x_i < \omega_a$，求证：$\sum\limits_{i\in I} x_i < \omega_a$.

证明：

（1）即补充定理372、补充定理373、补充定理374、补充定理375.

（2）即补充定理376、补充定理378.

（3）前两部分即补充定理379，最后一部分根据定义可证.

（4）即补充定理380（2）.

习题 172.

a为序数，求证：当且仅当对任意基数族$(x_i)_{i\in I}$，若$Card(I) < \aleph_a$，且对任意$i \in I$均有$x_i < \aleph_a$，则$\sum\limits_{i\in I}(x_i)_{i\in I} < \aleph_a$时，$\aleph_a$为正规基数.

证明：即补充定理381（3）.

习题 173.

a为序数，基数$m \neq 0$，则：

（1）${\aleph_{a+1}}^m = {\aleph_a}^m \aleph_{a+1}$.

（2）序数c满足$Card(c) \le m$，则${\aleph_{a+c}}^m = {\aleph_a}^m {\aleph_{a+c}}^{Card(c)}$.

（3）$Card(a) \le m$，则${\aleph_a}^m = 2^m {\aleph_a}^{Card(a)}$.

证明：即补充定理382.

习题 174.

（1）a、b为序数，a没有前导，$x \to s_x$为$[0,\omega_b[$到$[0,a[$的严格单增映射，且$\sup\limits_{x\in[0,\omega_b[} s_x = a$，求证：$\aleph_a \aleph_b = \prod\limits_{x\in[0,\omega_b[} \aleph_{s_x}$.

（2）a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，则${\aleph_a}^{\aleph_{a'}} > \aleph_a$. 并且，令$c$为序数，如果存在基数$n$使$\aleph_a = n^{\aleph_c}$，则$c < a'$.

（3）a、a'为序数，令$\omega_{a'}$为ω_a的共尾性，序数$b < a'$，则${\aleph_a}^{\aleph_b} = \sum\limits_{c\in[0,a[} {\aleph_c}^{\aleph_b}$.

证明：

（1）即补充定理383.

（2）即补充定理384、补充定理385.

（3）即补充定理386.

注：习题174（1）中“严格单增”的条件可以去掉.

习题 175.

（1）求证：a为正规基数，基数$b \neq 0$，则$a^b = a \sum_{m \in [0,a[} m^b$．并且，如果$(\forall k)(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_k + 1)$，$a$为基数且$a > 0$，如果对任意基数$b \neq 0$均有$a^b = a \sum_{m \in [0,a[} m^b$，则$a$为正规基数．

（2）a为基数且$a > 2$，对任意基数$m \in]0, a[$，均有$a^m = a$，求证：a为正规基数．

（3）求证：$(\forall a)(\forall m)((a$为正规基数$)$与$(m$为基数$)$与$(m \in]0, a[) \Rightarrow a^m = a) \Leftrightarrow (\forall k)$ $(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1})$．

证明：

（1）即补充定理390、补充定理392（5）．

（2）即补充定理393．

（3）即补充定理394．

习题 176.

（1）基数$a > 0$，对任意基数$m < a$，均有$2^m < a$，求证：a为支配基数．

（2）递归定义基数序列$(a_i)_{i \in N}$：

$a_0 = \aleph_0$，

对任意$i \in N$，$ai + 1 = 2^{a_i}$．

令$b = \sum_{i \in N} a_i$，求证：b是大于$\aleph_0$的最小的支配基数．

（3）递归定义基数序列$(a_i)_{i \in N}$：

$a_0 = \aleph_0$，

对任意$i \in N$，$ai + 1 = 2^{a_i}$．

令$b = \sum_{i \in N} a_i$，求证：

$b^{\aleph_0} = 2^b$；

${\aleph_0}^b = b^{\aleph_0}$；

$b^{\aleph_0} = (2^b)^b$．

证明：

（1）即补充定理396．

（2）即补充定理397．

（3）即补充定理398．

习题 177.

（1）求证：如果$(\forall k)(k$为序数$\Rightarrow 2^{\aleph_k} = \aleph_k + 1)$，则不可达基数均为强不可达基数．

（2）基数$a \geq 3$，求证：当且仅当对任意基数族$(a_i)_{i \in I}$均有$Card(I) < a$与$(\forall i)(i \in I \Rightarrow a_i < a) \Rightarrow \prod_{i \in I} a_i < a$时，$a$为强不可达基数．

（3）a为无穷基数，求证：当且仅当a为支配基数并且满足下列条件之一时，a为强不可达基数：

第一，对任意基数$b>0$且$b<a$均有$a^b=a$；

第二，如果对任意基数$b>0$，均有$a^b=a2^b$，则对任意基数$b>0$且$b<a$，均有$a^b=a$.

证明：

（1）即补充定理399；

（2）即补充定理400；

（3）根据补充定理401、补充定理402可证.

习题 178.

（*1*）a、b为序数，g为$[0,b[$到$[0,a[$的严格单增映射，并且，对任意序数c，$g(\sup\limits_{d\in[0,c[} d)$ $=\sup\limits_{d\in[0,c[} g(d)$，$\sup\limits_{d\in[0,b[} g(d)=a$．求证：当且仅当存在$[0,b[$到$[0,b[$的发散映射$h$满足$(\forall x)$ $(x\in]0,b[\Rightarrow h(x)<x)$时，存在$[0,a[$到$[0,a[$的发散映射$f$满足$(\forall x)(x\in]0,a[\Rightarrow f(x)<x)$.

（*2*）a为序数，求证：当且仅当ω_a的共尾性为ω_0时，存在$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的发散映射f满足$(\forall x)(x\in[0,\omega_a[\Rightarrow f(x)<x)$.

（*3*）a、a'为为序数，且$a'>0$，ω_a的共尾性为$\omega_{a'}$，f为$[0,\omega_a[$到$[0,\omega_a[$的映射，且满足$(\forall x)$ $(x\in[0,\omega_a[\Rightarrow f(x)<x)$，求证：存在序数$l_0$，使$Card(\{x|x\in[0,\omega_a[$与$f(x)=l0\})\geq\aleph_{a'}$.

证明：

（1）即补充定理403.

（2）即补充定理404.

（3）即补充定理405.

习题 179.

F为无穷集合，其元素都是E的子集，对任意$A\in F$均有$Card(A)=Card(F)$，求证：

（*1*）存在E的子集P使$Card(P)=Card(F)$，并且F的所有元素都不是P的子集.

（*2*）如果对F的任意子集G，$Card(G)<Card(F)$，均有$Card(E-\bigcup\limits_{A\in G} A)\geq Card(F)$，则存在$E$的子集$P$使$Card(P)=Card(F)$，并且对任意$A\in F$均有$Card(A\cap P)<Card(F)$.

证明：即补充定理406.

习题 180.

（*1*）E为无穷集合，集族$(X_i)_{i\in I}$为E的覆盖，且对任意$i\in I$、$j\in I$且$i\neq j$，均有$X_i\neq X_j$，c为$(X_i)_{i\in I}$的不相交度，求证：$Card(I)\leq Card(E)^c$.

（*2*）a为序数，集合F满足$Card(F)\geq 2$且$Card(F)<\aleph_a$，E为$[0,\omega_a[$不同于自身的片段集合到F的映射的集合．对任意$[0,\omega_a[$到F的映射f，令K_f为f在$[0,\omega_a[$的不同于自身的片段上的限制的集合．令$G=(K_f)_{f\in\{z|z为[0,\omega_a[到F的映射\}}$．求证：$Card(E)\leq Card(F)\aleph_a$，$G$为$E$的覆盖，$Card(\{z|$为$[0,\omega_a[$到$F$的映射$\})=Card(F)\aleph_a$，并且其不相交度等于$\aleph_a$.

（3）E为无穷集合，$Card(E)=a$，基数$p>1$、$c>p$，并且，对任意基数$m<c$，均有$p^m<a$，同时$a=\sum\limits_{m\in[0,c[}p^m$．求证：存在集族$(X_i)_{i\in I}$，对任意$i\in I$，$Card(X_i)=c$，$Card(I)=p^c$，且其不相交度等于$c$．特别是，$E$为可数无穷集合时，存在$E$的覆盖$(X_i)_{i\in I}$，$Card(I)=2^{\aleph_0}$，且对任意$i\in I$、$j\in I$，$X_i\cap X_j$为有限集合．

证明：

（1）即补充定理407．

（2） $Card(E)=\sum\limits_{m\in[0,\aleph_a[}Card(F)^m$，故$Card(E)\leq\aleph_a Card(F)^{\aleph_a}$，因此$Card(E)\leq Card(F)^{\aleph_a}$．

根据定义可证G为E的覆盖、$Card(\{z|z为[0,\omega_a[到F的映射\})=Card(F)^{\aleph_a}$．

对任意$[0,\omega_a[$到F的映射f、g，$K_f\cap K_g=\bigcup\limits_{x\in\{x|x\in[0,\omega_a[与f|Sx=g|Sx\}}\{f|Sx\}$，故$Card(K_f\cap Kg)<\aleph_a$．同时，对任意基数$c<\aleph_a$，令$u$、$v$是$F$的不同元素，$h$为任何一个$[0,c[$到$F$的映射，令$f$、$g$为$h$在$[0,\omega_a[$上的延拓，其中，当$x\in[c,\omega_a[$时，$f(x)=u$，$g(x)=v$，则$Card(K_f\cap K_g)=c$，故$G$的不相交度等于$\aleph_a$．

（3）类似习题180（2）可证．

习题 181.

E为无穷集合，F的元素均为E的子集，$A\in F$，基数$a\geq\aleph_0$，$Card(E)=a$、$Card(A)=a$、$Card(F)=a$，求证：存在E的划分$(B_i)_{i\in I}$，使$Card(I)=a$，对任意$i\in I$均有$Card(B_i)=a$，并且对任意$i\in I$、$A\in F$均有$A\cap B_i\neq\varnothing$．

证明：令$a=\aleph_c$，h_0为$[0,\omega_c[$到F的同构．令$f_0(0)=\tau_x(x\in h_0(0))$，对于$i\in[1,\omega_c[$，$h_0(i)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,i[}\{f0(j)\})\neq\varnothing$，故令$f_0(i)=\tau_x(x\in h_0(i)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,i[}\{f0(j)\}))$，$g(0)=f_0\langle[0,\omega_c[\rangle$；对$k\in[1,\omega_c[$，$x\in[0,\omega_c[$，令$h_k(x)=h_0(x)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,k[}g(j))$，则$h_k(x)\neq\varnothing$，此时，令$f_k(0)=\tau_x(x\in h_k(0))$，对于$i\in[1,\omega_c[$，$h_k(i)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,i[}\{fk(j)\})\neq\varnothing$，故令$f_k(i)=\tau_x(x\in h_k(i)\cap(\bigcup\limits_{j\in[0,i[}\{fk(j)\}))$，$g(k)=f_k\langle[0,\omega_c[\rangle$．

最后令$B_0=E-\bigcup\limits_{j\in[1,\omega_c[}g(j)$，对$i\in[1,\omega_c[$，$B_i=g(i)$，$I=[0,\omega_c[$，则$(B_i)_{i\in I}$满足要求．

习题 182.

L为无穷集合，$(E_l)_{l\in L}$为非空集族，对任意自然数$n>0$，$Card(\{l|l\in L与Card(E_l)>n\})=Card(L)$，$E=\prod\limits_{l\in L}E_l$，求证：存在$F\subset E$，$Card(F)=2^{Card(E)}$，并且，对$F$的元素组成的任意有限序列$(f_k)_{k\in[1,n]}$，均存在$l\in L$，使所有的$f_k(l)$各不相同．

证明：

对任意自然数n，令$A_n=\{l|l\in L与Card(E_l)=n\}$；如果$A_n$为有限集合，令$g$为$A_n$到$[0,Card(A_n)-1]$的双射，当$l\in A_n$时，$f(l)=\{g(l)\}$；如果$A_n$为无穷集合，令$h$为$A_n$到$N\times A_n$的双射，当$l\in A_n$时，$f(l)=pr_1(h(l))$．

对任意自然数n，令$B_n = \{l | l \in L与f(l) = n\}$，对任意自然数$j$，令$S_j = [2^j, 2^{j+1} - 1]$，$L_j = \bigcup_{k \in S_j} B_k$，则对任意$l \in L_j$，$Card(E_l) \geq 2^j$，$Card(L_j) = Card(L)^j$，并且，$(L_j)_{j \in N}$是$L$的划分.

令p_j为L_j到$\prod_{i \in [1,j]} L$的双射，q_l为$\prod_{i \in [1,j]} \{0,1\}$到$E_l$的单射，$G = \mathcal{F}(L; \{0,1\})$，对任意$g \in G$，设$l \in L_j$，$p_j(l) = (x_i)_{i \in [1,j]}$，则令$f_g(l) = q_l(g(x_i)_{i \in [1,j]})$．令$F = \bigcup_{g \in G} \{f_g\}$.

对F的元素组成的任意有限序列$(f_k)_{k \in [1,n]}$，令$A = \bigcup_{(i,j) \in [1,n] \times [1,n] - \Delta_{[1,n]}} \{\tau_z(g_i(z) \neq g_j(z))\}$，则$A$为有限集合，令$l = {p_{Card(A)}}^{-1}((i)_{i \in A})$，则所有的$f_k(l)$各不相同，得证.

注：原书习题182遗漏“非空”的条件.

习题 183.

E为无穷集合，n为自然数，$F_n(E)$为E的元素数目为n的子集的集合，m为自然数，$(x_i)_{i \in [1,m]}$为$F_n(E)$的划分，求证：存在$i \in [1,m]$和E的无穷子集F，使F的元素数目为n的子集，都是x_i的元素.

证明：

命题对$n = 1$显然成立；假设命题对$[1, n-1]$成立，则对任意$a \in E$，均存在$j(a) \in [1,m]$和$E - \{a\}$的无穷子集$M(a)$，使$M(a)$任意元素数目为$n-1$的子集A，都满足$A \cup \{a\}$为、、$X_j(a)$的元素.

令a_1为E的任意元素，a_2为$M(a_1)$的任意元素，a_3为$M(a_1)$按照同样方法确定的无穷子集的任意元素，以此类推．则$\bigcup_{i \in N} \{a_i\}$符合要求，得证.

习题 184.

（1）E为偏序集，求证：有限个按导出的偏序排序的E的诺特子集的并集，按导出的偏序排序，也是诺特集.

（2）E为偏序集，求证：当且仅当对任意$a \in E$，区间$]a, \rightarrow[$均为诺特集时，E为诺特集.

（3）E为偏序集，其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集．u为字母，T为项．求证：存在集合U和E到U的映射f，使对任意$x \in E$，均有$f(x) = (f(x)|u)T$，其中$f(x)$是$f(x)$在区间$] \leftarrow, x[$上的限制，并且，满足条件的U和f是唯一的.

（4）E为诺特集，并且E的任何非空有限子集均有最小上界．求证：如果E有最小元，则E为完备格；如果E没有最小元，则将a添加到集合E并使a为最小元得到的偏序集E'，为完备格.

证明：

（1）即补充定理408（2）.

（2）即补充定理409.

（3）即补充证明规则91.

（4）根据补充定理410（2）可证．

注：原书习题184（4）遗漏“非空”的条件．

习题 185.

E为格，其按相反关系排序得到的偏序集为诺特集．

求证：

对任意$a \in E$，a可以表示为$\underset{i \in [1,n]}{sup}\ e_i$，其中，$n$为自然数，并且，对任意$i \in [1,n]$，$e_i$为$E$的不可约元素．

J为其不可约元素集合．令$S(x) = \{y|y \in J与y \leq x\}$，则$x \to S(x)$为$E$到按包含关系排序的$\mathcal{P}(J)$的一个子集的同构，并且，$S(inf(x,y)) = S(x) \cap S(y)$．

E为分配格，J为其不可约元素集合．令$S(x) = \{y|y \in J与y \leq x\}$，则$x \to S(x)$为$E$到按包含关系排序的$\mathcal{P}(J)$的一个子集的同构，并且，$S(sup(x,y)) = S(x) \cup S(y)$；同时，令$J^*$为按在$J$上的偏序关系的相反关系排序的偏序集，$I = \{0,1\}$，$A(J^*,I)$为$J^*$到$I$的单增映射的集合，按$f \in A(J^*,I)$与$g \in A(J^*,I)$与$(\forall x)(x \in J^* \Rightarrow f(x) \leq g(x))$排序,则$E$同构于$A(J^*,I)$．

E为分配格，J为其不可约元素集合．a为E的最小元，$P = J - \{a\}$．令$A = \{a|(\exists X)((X为P的自由子集)与Card(X) = a)\}$，$A$的最大元为$n$，则$E$同构于全序集有限族的乘积的某个内部格．

证明：

第一部分：设a不是不可约元素，则存在b、c使$sup(b,c) = a$且$b < a$，$c < a$．则b、c是不可比较的，令$inf(b,c) = d$．如果$\{x|x \in E与x < b与(非x \leq d)\}$为空，则$b$为不可约元素，令$e = b$；否则$\{x|x \in E与x < b与(非x \leq d)\}$存在极小元$e$，$e$为不可约元素．在两种$i$情况下均有$a = sup(e,c)$．根据定理168可证．

其他部分，类似习题133（2）、习题134（2）、习题135（2）可证．

习题 186.

A为无穷集合，E为A的无穷子集集合，并按包含关系的相反关系排序．求证：E为完全右方分支集，但不是右方无向集．

证明：根据定义可以证明E为完全右方分支集．对任意无穷集合$y \subset A$且$y \neq A$，$a \in A - y$，令$x = y \cup \{a\}$，则对任意无穷集合$z \subset x$，$z \cap y \subset A$且为无穷集合．根据补充定理212，E不是右方无向集．

习题 187.

$(M_n)_{n \in Z}$、$(P_n)_{n \in Z}$均为两两不相交且不全为空集的有限集合序列，其中，指标集Z为整数集．令$a_n = Card(M_n)$，$b_n = Card(P_n)$．如果存在自然数$k > 0$，使对任意$n \in Z$和自然数$l \geq 1$，均有：

$a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+l}\le b_{n-k}+b_{n-k+1}+\cdots+b_{n+k+l}$；

$b_n+b_{n+1}+\cdots+b_{n+l}\le a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n+k+l}$.

令$M=\bigcup\limits_{n\in Z}M_n$，$P=\bigcup\limits_{n\in Z}P_n$.

求证：存在M到P的双射f，使对任意$n\in Z$，均有：

$f(M_n)\subset\bigcup\limits_{i\in[n-k-1,n+k+1]}P_i$，$f^{-1}(P_n)\subset\bigcup\limits_{i\in[n-k-1,n+k+1]}M_i$.

证明：令M、P按各集合全序的序数和排序，设$M_{m_0}\ne\varnothing$，其最小元为x；d为所有$b_{n-k}+b_{n-k+1}+\cdots+b_{n+k+l}-(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+l})$、$a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n+k+l}-(b_n+b_{n+1}+\cdots+b_{n+l})$（$n\in Z$、自然数$l\ge 1$）的最小值，令$g$为$M$到$P$的同构，其中$g(x)$为$\bigcup\limits_{i\in[m0-k,\rightarrow[}P_i$的最小元素.

令$S_0=0$，$S_i=\sum\limits_{j\in[-k,i-k-1]}b_{m_0+j}-\sum\limits_{j\in[0,i-1]}a_{m_0+j}$（$i>0$），$S_i=\sum\limits_{j\in[-1,i]}a_{m_0+j}-\sum\limits_{j\in[-k-1,i-k]}b_{m_0+j}$（$i<0$），$T_0=\sum\limits_{j\in[-k,k-1]}b_{m_0+j}$，$T_i=\sum\limits_{j\in[-k,k+i-1]}b_{m_0+j}-\sum\limits_{j\in[0,i-1]}a_{m_0+j}$（$i>0$），$T_i=\sum\limits_{j\in[-1,i]}a_{m_0+j}+\sum\limits_{j\in[-k,k+i-1]}b_{m_0+j}$（$i<0$且$i>-2k$），$T_{-2k}=\sum\limits_{j\in[-1,-2k]}a_{m_0+j}$，$T_i=\sum\limits_{j\in[-1,i]}a_{m_0+j}-\sum\limits_{j\in[-k-1,i+k]}b_{m_0+j}$（$i<-2k$）. 则对任意$i\in Z$、$j\in Z$，$S_i\le T_j$，因此存在$d$，对于任意$i\in Z$，均有$S_i\le d$，$T_i\ge d$，令$f$为$M$到$P$的同构，其中$f(x)$: $\bigcup\limits_{i\in[m_0-k,\rightarrow[}P_i$的第$d+1$个元素. 则$f$满足要求.

注：

习题187的结论可加强为$f(M_n)\subset\bigcup\limits_{i\in[n-k,n+k]}P_i$，$f^{-1}(P_n)\subset\bigcup\limits_{i\in[n-k,n+k]}M_i$.

同时，习题187涉及尚未介绍的“整数”知识.

习题 188.

a、b为基数，$a\ge 2$、$b\ge 1$，其中至少有一个是无穷基数. E为集合，$F\subset\mathcal{P}(E)$，$Card(F)>a^b$，并且对任意$X\in F$，均有$Card(X)\le b$. 求证：存在$G\subset F$，$Card(G)>a^b$，并且G的任何两个元素都有相同的交集.

证明：

令c为大于a^b的最小基数，$G\subset F$且$Card(G)=c$，$M=\bigcup\limits_{X\in G}X$. 假设$M\le a^b$，若$b$为有限基数，根据补充定理337（7），$Card(G)\le a^b$，若$b$为无穷基数，根据补充定理337（8），$Card(G)\le a^b$，矛盾，因此$Card(M)\ge c$，同时，$Card(M)\le\sum\limits_{X\in G}Card(X)$，故$Card(M)=c$.

令M按最小良序排序，在b上的最小良序的偏序类为r. 对任意$X\in G$，令其偏序类为t_X，f_X为$[0,t_X[$到X的同构，对任意序数$i\in[0,r[$，$y_i=\bigcup\limits_{X\in\{Y|Y\in G与i<t_Y\}}\{f_X(i)\}$，由于$\bigcup\limits_{i\in[0,r[}y_i=M$，故存在序数$i\in[0,r[$，使$Card(y_i)=c$，设满足条件的最小序数为$j$，故

$Card(\bigcup\limits_{i\in[0,j[}y_i)<c$.

进而，存在$N \subset G$，使$Card(N) = c$且对任意$Y \in N$，$f_Y(j)$各不相同. 令$N_0 \subset N$，使$Card(N_0) = c$且对任意$Y \in N_0$，$f_Y(0)$全部相等，进而，递归定义N_i（$i < j$），令$N_i \subset \bigcap\limits_{k\in[0,i[} N_k$，且对任意$Y \in N_0$，$f_Y(i)$全部相等.

令$Q = \bigcup\limits_{i\in[0,j[} f_Y(i)$，$R = \bigcap\limits_{i\in[0,j[} N_i$，$s$为在$c$上的最小良序的偏序类. 令$X_0 \in R$且$f_{X_0}(j)$是所有$f_Y(j)$（$Y \in R$）的最小元，进而，递归定义$X_i$（$i < s$），令$X_i$为所有$f_Y(j)$（$Y \in R$且$Y - Q \subset M - \bigcup\limits_{j\in[0,i[} X_j$)的最小元. 因此，对任意$i \in [0,s[$、$j \in [0,s[$且$i \neq j$，均有$X_i \cap X_j = Q$，得证.

3.7 射影极限和归纳极限（Limites projectives et limites inductives）

定义 192. 集合射影系统（*système projectif d'ensembles*），集族的射影极限（*limite projective de famille d'ensembles*），集族的射影极限到集合的规范映射（*application canonique de la limite projective da famille d'ensembles dans un ensemble*）

I为预序集，$(E_a)_{a\in I}$为集族，$(f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\le b}$为函数族，其中$f_{ab}$为$E_b$到$E_a$的映射，并且满足下列条件:

第一，如果$a \le b$，$b \le c$，则$f_{ab} \circ f_{bc} = f_{ac}$；

第二，$f_{aa} = Id_{E_a}$，

则$((E_a)_{a\in I}, (f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\le b})$称为关于$I$的集合射影系统，在没有歧义的情况下可以简记为$((E_a), (f_{ab}))$或$(E_a, f_{ab})$.

令$G = \prod\limits_{a\in I} E_a$，$E = \{x | x \in G与(\forall a)(\forall b)(a \in I与b \in I与a \le b \Rightarrow pr_a x = f_{ab}(pr_b x))\}$，则称$E$为集族$(E_a)_{a\in I}$对于函数$(f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\le b}$的射影极限，记作$\lim\limits_{\leftarrow a}(E_a, f_{ab})$，在没有歧义的情况下可以简记为$\lim\limits_{\leftarrow}(E_a, f_{ab})$或$\lim\limits_{\leftarrow} E_a$. pr_a在E上的限制称为E到E_a的规范映射.

补充定理 411.

$((E_a)_{a\in I}, (f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\le b})$为关于预序集$I$的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow}(E_a, f_{ab})$，对任意$a \in I$，令$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，则当$a \in I$、$b \in I$、$a \le b$时，$f_a = f_{ab} \circ f_b$.

证明：根据定义可证.

补充定理 412.

I为按$x = y$与$x \in I$排序的预序集，$(E_a)_{a\in I}$为集族，$(f_{aa})_{a\in I}$为函数族，且对任意$a \in I$，$f_{aa} = Id_{E_a}$. 则$\lim\limits_{\leftarrow} E_a = \prod\limits_{a\in I} E_a$.

证明：由于$a \in I$与$b \in I$与$a \le b \Rightarrow a = b$. 令$G = \prod\limits_{a\in I} E_a$，因此，对任意$x \in G$，$pr_a x = f_{aa}(pr_a x)$为真，得证.

补充定理 413.

关于$\varnothing$的集合射影系统的射影极限为$\{\varnothing\}$.

证明：根据定义可证.

补充定理 414.

(Ea, f_{ab})为关于I的集合射影系统，其中I为右方有向集，$\varprojlim E_a = E$，对任意$a \in I$，令f_a为E到E_a的规范映射，如果对任意$a \in I$、$b \in I$，f_{ab}均为单射，则对任意$a \in I$，f_a为单射.

证明：

设$x \in E$、$y \in E$，且$f_a(x) = f_a(y)$，对任意$b \in I$，存在$c \in I$使$a \leq c$、$b \leq c$，由于f_{ac}为单射，故$f_c(x) = f_c(y)$，故$f_b(x) = f_b(y)$. 即对任意$b \in I$，$pr_b x = pr_b y$，因此$x = y$，得证.

补充定理 415. 限制指标集可以得到集合射影系统

I为预序集，$((E_a)_{a\in I}, (f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合射影系统，$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的射影极限为$E$，$J$为$I$的预序子集，则$((E_a)_{a\in J}, (f_{ab})_{a\in J与b\in J与a\leq b})$是关于$J$的集合射影系统，并且，令$E'$为$(E_a)a \in J$对于$(f_{ab})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的射影极限，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，则对任意$x \in E$，$(f_a(x))_{a\in J} \in E'$.

证明：根据定义可证.

定义 193. 通过限制得到的集合射影系统（*système projectif d'ensembles obtenu par restriction*），集族的射影极限的之间的规范映射（*application canonique entre limites projectives de familles d'ensembles*）

I为预序集，$((E_a)_{a\in I}, (f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合射影系统，$J$为$I$的预序子集，则$((E_a)_{a\in J}, (f_{ab})_{a\in J与b\in J与a\leq b})$称为通过将指标集限制在$J$上得到的集合射影系统.

令$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的射影极限为$E$，为$(E_a)a \in J$对于$(f_{ab})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的射影极限为$E'$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，则函数$x \to (f_a(x))_{a\in J}$称为$E$到$E'$的规范映射.

补充定理 416.

I为预序集，J为I的预序子集，J'为J的预序子集，$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ab})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的射影极限为$E$，$(E_a)_{a\in J}$对于$(f_{ab})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的射影极限$E'$，$(E_a)_{a\in J'}$对于$(f_{ab})_{a\in J'与b\in J'与a\leq b}$的射影极限为$E''$，$E$到$E'$的规范映射为$g$，$E'$到$E''$的规范映射为$g'$，$E$到$E''$的规范映射为$g''$，则$g'' = g' \circ g$.

证明：根据定义可证.

定理 172. 集合到集族的映射族的映射族的射影极限唯一存在

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$．对任意$a \in I$，令$u_a$为$F$到$E_a$的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ab} \circ u_b = u_a)$．则存在唯一的$F$到$E$的映射$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = f_a \circ u)$，此时，该映射$u$满足$(\forall y)(y \in F \Rightarrow u(y) = (u_a(y))a \in I)$，并且，$(\exists y)(\exists z)(\exists a)(y \in F$与$z \in F$与$a \in I$与$u_a(y) \neq u_a(z)) \Leftrightarrow (u$为单射$)$．

证明：

$u_a = f_a \circ u$，即对任意$y \in F$，$pr_a(u(y)) = u_a(y)$，因此，当且仅当$u(y) = (u_a(y))_{a \in I}$时，$u_a = f_a \circ u$；同时，当$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$时，$u_a(y) = f_{ab}(u_b(y))$，因此，$pr_a(u(y)) = f_{ab}(pr_b(u(y)))$，故$u(y) \in E$，故$u$为$F$到$E$的映射．根据定义可证$(\exists y)(\exists z)(\exists a)(y \in F$与$z \in F$与$a \in I$与$u_a(y) \neq u_a(z)) \Leftrightarrow (u$为单射$)$．

定义 194. 集合到集族的映射射影系统（*système projectif d'applications d'un ensemble dans la famille d'ensembles*），集合到集族的映射族的射影极限（*limite projective de famille d'applications d'un ensemble dans la famille d'ensembles*）

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$．对任意$a \in I$，令$u_a$为$F$到$E_a$的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ab} \circ u_b = u_a)$．则称映射族$(u_a)_{a \in I}$为$F$到$(E_a, f_{ab})$的映射射影系统．如果$F$到$E$的映射$u$使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = f_a \circ u)$，则称$u$为映射族$(u_a)_{a \in I}$的射影极限，记作$\lim\limits_{\leftarrow} u_a$．

补充定理 417.

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，则$(f_a)_{a \in I}$为$E$到$(_E a, f_{ab})$的映射射影系统，且$\lim\limits_{\leftarrow} f_a = Id_E$．

证明：根据补充定理411可证．

定理 173. 集族之间的映射族的映射族的射影极限唯一存在

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(F_a, g_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，$F = \lim\limits_{\leftarrow} F_a$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，$F$到$F_a$的规范映射为$g_a$．对任意$a \in I$，令$u_a$为$E_a$到$F_a$的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_a \circ f_{ab} = g_{ab} \circ u_b)$，则存在唯一的$E$到$F$的映射$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow ua \circ f_a = g_a \circ u)$，此时，该映射满足$u(y) = (u_a(pr_a(y)))_{a \in I}$．

证明：令$v_a = u_a \circ f_a$，则$v_a = u_a \circ f_{ab} \circ f_b$，等于$g_{ab} \circ u_b \circ f_b$，等于$g_{ab} \circ v_b$．根据定理172，存在唯一的$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow v_a = g_a \circ u)$．

定义 195. 集族之间的映射射影系统（*système projectif d'applications entre familles d'ensembles*），集族之间的映射族的射影极限（*limite projective de famille d'applications entre familles d'ensembles*）

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(F_a, g_{ab})均为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，$F = \lim\limits_{\leftarrow} F_a$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，$F$到$F_a$的规范映射为$g_a$．对任意$a \in I$，令$u_a$为$E_a$到$F_a$的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_a \circ f_{ab} = g_{ab} \circ u_b)$，则称映射族$(u_a)_{a \in I}$为$(E_a, f_{ab})$到$(F_a, g_{ab})$的映射射影系统．如果$E$到$F$的映射$u$使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a \circ f_a = g_a \circ u)$，则称$u$为映射族族$(u_a)_{a \in I}$的射影极限，记作$\lim\limits_{\leftarrow a} u_a$，在没有歧义的情况下也可以简记为$\lim\limits_{\leftarrow} u_a$．

定理 174.

I为预序集，(Ea, f_{ab})、(Fa, g_{ab})、(G_a, h_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，$F = \lim\limits_{\leftarrow} F_a$，$G = \lim\limits_{\leftarrow} G_a$，对任意$a \in I$，$E$到$E_a$的规范映射为$f_a$，$F$到$F_a$的规范映射为$g_a$，$G$到$G_a$的规范映射为$h_a$．对任意$a \in I$，令$u_a$为$E_a$到$F_a$的映射，$v_a$为$F_a$到$G_a$的映射，则映射族$(v_a \circ u_a)_{a \in I}$为$(E_a, f_{ab})$到$(G_a, h_{ab})$的映射射影系统，并且$\lim\limits_{\leftarrow}(v_a \circ u_a) = \lim\limits_{\leftarrow} v_a \circ \lim\limits_{\leftarrow} u_a$．

证明：令$w_a = v_a \circ u_a$．则$w_a \circ f_{ab} = v_a \circ u_a \circ f_{ab}$，等于$v_a \circ g_{ab} \circ u_b$，等于$h_{ab} \circ v_b \circ u_b$，等于$h_{ab} \circ w_b$，因此映射族$(v_a \circ u_a)_{a \in I}$为$(E_a, f_{ab})$到$(G_a, h_{ab})$的映射射影系统．

同时$h_a \circ v \circ u = v_a \circ g_a \circ u$，等于$v_a \circ u_a \circ f_a$，得证．

补充定理 418. 子集上的系统为射影系统

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，对任意$a \in I$，$M_a \subset E_a$，如果$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ab}(M_b) \subset M_a)$，当$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$时，令$g_{ab}$为$f_{ab}$在$M_b$上的限制，则$(M_a, g_{ab})$也是关于$I$的集合射影系统，并且$\lim\limits_{\leftarrow} M_a = E \cap \prod\limits_{a \in I} M_a$．

证明：根据定义可证．

定义 196. 子集射影系统（*système projectif de parties*）

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，对任意$a \in I$，$M_a \subset E_a$，如果$(\forall a)(\forall b)$ $(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow f_{ab}(M_b) \subset M_a)$，则称$(M_a, g_{ab})$为$(E_a)_{a \in I}$的子集射影系统．

定理 175.

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(E'_a, f'_{ab})均为关于I的集合射影系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，则映射族$(u_a)_{a \in I}$为映射射影系统．令$u = \lim\limits_{\leftarrow} u_a$，$E' = \lim\limits_{\leftarrow} E'_a$，则对任意$(x'_a)_{a \in I} \in E'$，$(u^{-1}(x'_a))_{a \in I}$是$(E_a)_{a \in I}$的子集射影系统，并且$\lim\limits_{\leftarrow}({u_a}^{-1}(x'_a)) = u^{-1}(x')$．

证明：设$x_b \in u^{-1}(x'_b)$，$u_a(f_{ab}(x_b)) = f'_{ab}(u_b(x_b))$，等于$f'_{ab}(x'_b)$，等于$x'_a$，因此，$({u_a}^{-1}(x'_a))_{a \in I}$是$(E_a)_{a \in I}$的子集射影系统．设$x \in E$且$u(x) = x'$，根据定理172，$u$是唯一的，且$u(x) = (u_a(x))_{a \in I}$，对任意$a \in I$，$u_a(x) = x'_a$．因此，$x \in E \Leftrightarrow u(x) \in E'$，因此，$x \in u^{-1}(x') \Rightarrow x' \in E'$，并且，$x \in u^{-1}(x') \Rightarrow x \in \prod\limits_{a \in I} u^{-1}(x'_a)$，根据补充定理418，得证．

定理 176.

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(E'_a, f'_{ab})均为关于I的集合射影系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，则映射族$(u_a)_{a \in I}$为映射射影系统．令$u = \varprojlim u_a$，如果对任意$a \in I$，u_a为单射（或双射），则u是单射（或双射）．

证明：根据定理175可证．

补充定理 419.

I为预序集，(E_a, f_{ab})、(E'_a, f'_{ab})均均为关于I的集合射影系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，则映射族$(u_a)_{a \in I}$为映射射影系统．令$u = \varprojlim u_a$，$E = \varprojlim E_a$，$E' = \varprojlim E'_a$，如果对任意$a \in I$，u_a为满射，则$(u_a(E_a))_{a \in I}$是$(E'a)_{a \in I}$的子集射影系统，$u(E) \subset \varprojlim u_a(E_a)$．

证明：设$x'_b \in u_b(E_b)$，令$x'_b = u_b(x_b)$，$f'_{ab}(x'_b) = f'_{ab}(u_b(x_b))$，等于$u_a(f_{ab}(u_b))$，根据定义，$(u_a(E_a))_{a \in I}$是$(E'_a)_{a \in I}$的子集射影系统．同时，设$x \in E$且$u(x) = x'$，对任意$a \in I$，$u_a(x) = x'_a$，得证．

定理 177.

I为预序集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，$E = \varprojlim E_a$，F为E的共尾子集，并且是右方有向集，令$(E_a)_{a \in J}$对于$(f_{ab})_{a \in J与b \in J与a \leq b}$的射影极限为$E'$，则$E$到$E'$的规范映射$g$为双射．

证明：对$a \in J$，令f'_a为E'到E_a的规范映射，根据定理172，g是唯一满足$a \in J \Rightarrow f_a = f'_a \circ g$的映射．如果$x \in E$、$y \in E$且$x \neq y$，则存在$a \in I$使$f_a(x) \neq f_a(y)$，由于$F$为$E$的共尾子集，因此存在$b \in F$，使$a \leq b$，因此$f_b(x) \neq f_b(y)$，故$f_a$为单射，因此$g$为单射．对任意$x' \in E'$，对任意$a \in I$，存在$b \in J$且$a \leq b$，假设$c \in J$且$a \leq b$，若$b \leq c$，则$f_{ac}(x'_c) = f_{ab}(f_{bc}(x'_c))$，等于$f_{ab}(x'_b)$，因此，$f_{ab}(x'_b)$和$b$无关，令其为$x_a$．令$x = (x_a)_{a \in J}$，对任意$a \in I$，如果$a \in I$，$b \in I$且$a \leq b$，则存在$b \leq c$，且$c \in J$，因此$f_{ab}(x_b) = f_{ab}(f_{bc}(x'_c))$，等于$f_{ac}(x'_c)$，等于$x_a$．因此$x \in E$．当$a \in J$时，由于$x'_a = f_{aa}(x'_a)$，因此$x'_a = x_a$，因此$f_a(x) = x'_a$，故$g(x) = x'$．因此$g$为满射．

定义 197. 集族的双重射影极限（*double limite projective de famille d'ensembles*）

I、L为预序集，$I \times L$的预序关系为$(x \in I \times L与y \in I \times L与pr_1 x \leq pr_1 y与pr_2 x \leq pr_2 y)$，$((E_a^x)_{(a,x) \in I \times L}, (f_{ab}^{xy})_{(a,x) \in I \times L与(b,y) \in I \times L与(a,x) \leq (b,y)})$为关于$I \times L$的集合射影系统，则其射影极限称为双重射影极限，记作$\varprojlim_{a,x} E_a^x$，在没有歧义的情况下也可以简记为$\varprojlim E_a^x$．

补充定理 420.

I、L均为预序集，$I \times L$的预序关系为$(x \in I \times L与y \in I \times L与pr_1 x \leq pr_1 y与pr_2 x \leq pr_2 y)$，$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$为关于$I \times L$的集合射影系统，则$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$为关于$I$的集合射影系统，也是关于$L$的集合射影系统．并且，$(\varprojlim_a E_a^x, g^{xy})$、$(\varprojlim_x E_a^x, h_{ab})$分别是关于$L$的集合射影系统和关于$I$的集合射影系统，其中$g^{xy} = \varprojlim_a f_{aa}^{xy}$，$h_{ab} = \varprojlim_x f_{ab}^{xx}$．

证明：根据定义，可证(E_a^x, f_{ab}^{xy})为关于I的集合射影系统，也是关于L的集合射影系统．根据定理174，$g^{xz} = g^{xy} \circ g^{yz}$，$h_{ac} = h_{ab} \circ h_{bc}$，因此$(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x, g^{xy})$、$(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x, h_{ab})$分别是关于$L$的集合射影系统和关于$I$的集合射影系统．

定理 178.

I、L均为预序集，$I \times L$的预序关系为($x \in I \times L$与$y \in I \times L$与$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$)，(E_a^x, f_{ab}^{xy})为关于$I \times L$的集合射影系统，令$\prod\limits_{(a,x) \in I \times L} E_a^x$到$\prod\limits_{x \in L}(\prod\limits_{a \in I} E_a^x)$的规范映射为$f$，$\prod\limits_{(a,x) \in I \times L} E_a^x$到$\prod\limits_{a \in I}(\prod\limits_{x \in L} E_a^x)$的规范映射为$g$，则$f$在$(\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x)$上的限制为$(\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x)$到$\lim\limits_{\leftarrow x}(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$的双射；$g$在$(\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x)$上的限制为$(\lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x)$到$\lim\limits_{\leftarrow a}(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x)$的双射．

证明：令$g^{xy} = \lim\limits_{\leftarrow a} f_{aa}^{xy}$，$F^x = \lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x$，$F = \lim\limits_{\leftarrow x} F^x$，$G = \lim\limits_{\leftarrow a,x} E_a^x$．根据定理46，$f$为$h \to (pr_{I \times \{x\}} h)_{x \in L}$．

对任意$u \in F$，如果$x \leq y$，则$pr_x u = g^{xy}(pr_y u)$；如果$a \leq b$，则$pr_a(pr_x u) = f_{ab}^{xy}(pr_b(pr_y u))$．由于$h \to (pr_{I \times \{x\}} h)_{x \in L}$为双射，故令$u = (pr_{I \times \{x\}} u')_{x \in L}$，则$pr_{(a,x)} u' = f_{ab}^{xy}(pr_{(b,y)} u')$．故$u' \in G$．

反过来，如果$u' \in G$，且$a \leq b$、$x \leq y$，则$pr_{(a,x)} u' = f_{ab}^{xy}(pr_{(b,y)} u')$，令$u = (pr_{I \times \{x\}} u')_{x \in L}$，因此$pr_a(pr_x u) = f_{ab}^{xy}(pr_b(pr_y u))$，因此，对任意$a \in I$，$pr_a(pr_x u) = pr_a(g^{xy}(pr_y u))$，故$pr_x u = g^{xy}(pr_y u)$，因此$u \in F$．故$f$的限制为双射．

同理可证g的限制为双射．

补充定理 421.

I、L均为预序集，$I \times L$的预序关系为($x \in I \times L$与$y \in I \times L$与$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$)，(E_a^x, f_{ab}^{xy})、$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$均为关于$I \times L$的集合射影系统，对于$(a,b) \in I \times L$，$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x) \in I \times L}$为$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统，则$(u_a^x)_{a \in I}$、$(u_a^x)_{x \in L}$均为$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统，$(\lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x)_{x \in L}$为$(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$到$(\lim\limits_{\leftarrow a} {E'}_a^x)$的映射射影系统，$(\lim\limits_{\leftarrow x} u_a^x)_{a \in I}$为$(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x)$到$(\lim\limits_{\leftarrow x} {E'}_a^x)$的映射射影系统．

证明：

根据定义可证$(u_a^x)_{a \in I}$、$(u_a^x)_{x \in L}$均为(E_a^x, f_{ab}^{xy})到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统．

令$u^x = \lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x$，$g^{xy} = \lim\limits_{\leftarrow a} f_{aa}^{xy}$，$g'^{xy} = \lim\limits_{\leftarrow a} {f'}_{aa}^{xy}$，则当$x \leq y$时，$u_a^x \circ f_{aa}^{xy} = {f'}_{aa}^{xy} \circ u_a^y$，根据定理174，$u^x \circ g^{xy} = g'^{xy} \circ u^y$，因此$(\lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x)_{x \in L}$为$(\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$到$(\lim\limits_{\leftarrow a} {E'}_a^x)$的映射射影系统，$(\lim\limits_{\leftarrow x} u_a^x)_{a \in I}$为$(\lim\limits_{\leftarrow x} E_a^x)$到$(\lim\limits_{\leftarrow x} {E'}_a^x)$的映射射影系统．

定义 198. 映射族的双重射影极限（*double limite projective de famille d'applications*）

I、L均为预序集，$I \times L$的预序关系为($x \in I \times L$与$y \in I \times L$与$pr_1 x \leq pr_1 y$与$pr_2 x \leq pr_2 y$)，(E_a^x, f_{ab}^{xy})、$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$均为关于$I \times L$的集合射影系统，对于$(a,b) \in I \times L$，$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的

映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统，则其射影极限称双重射影极限，记作$\lim\limits_{\leftarrow a,x} u_a^x$.

定理 179.

I、L为预序集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，(E_a^x, f_{ab}^{xy})、$({E'}_{ax}, {f'}_{ab}^{xy})$均为关于$I\times L$的集合射影系统，对于$(a,b)\in I\times L$，$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x, f_{ab}^{xy})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ab}^{xy})$的映射射影系统，$u_a=\lim\limits_{\leftarrow x} u_a^x$，$u^x=\lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x$，$u=\lim\limits_{\leftarrow a,x} u_a^x$. 令$\prod\limits_{(a,x)\in I\times L} E_a^x$到$\prod\limits_{x\in L}(\prod\limits_{a\in I} E_a^x)$的规范映射为$f$，$\prod\limits_{(a,x)\in I\times L} {E'}_a^x$到$\prod\limits_{x\in L}(\prod\limits_{a\in I} {E'}_a^x)$的规范映射为$f'$，$\prod\limits_{(a,x)\in I\times L} E_a^x$到$\prod\limits_{a\in I}(\prod\limits_{x\in L} E_a^x)$的规范映射为$g$，$\prod\limits_{(a,x)\in I\times L} {E'}_a^x$到$\prod\limits_{a\in I}(\prod\limits_{x\in L} {E'}_a^x)$的规范映射为$g'$. 则$\lim\limits_{\leftarrow a,x} u_a^x = {f'}^{-1}\circ\lim\limits_{\leftarrow x}(\lim\limits_{\leftarrow a} u_a^x)\circ f$，$\lim\limits_{\leftarrow a,x} u_a^x = {g'}^{-1}\circ\lim\limits_{\leftarrow a}(\lim\limits_{\leftarrow x} u_a^x)\circ g$.

证明：根据定理178可证.

定理 180.

I为预序集，$(E_a^x, f_{ab}^x)_{x\in L}$为关于$I$的集合射影系统族，${f'}_{ab}$是映射族$(f_{ab}^x)_{x\in L}$在乘积上的规范扩展，则$(\prod\limits_{x\in L} E_a^x, {f'}_{ab})$是关于$I$的集合射影系统，且${pr_{\{a\}\times L}}^{-1}(\lim\limits_{\leftarrow a}\prod\limits_{x\in L} E_a^x)=$
${pr_{I\times\{x\}}}^{-1}(\prod\limits_{x\in L}\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$.

证明：令L为按($x=y$与$x\in L$)排序的预序集，令$g_{ab}^{xy}=f_{ab}^x$，根据补充定理420、补充定理412，$(\prod\limits_{x\in L} E_a^x, {f'}_{ab})$是关于$I$的集合射影系统，并且，根据定理178、补充定理412可证
${pr_{\{a\}\times L}}^{-1}(\lim\limits_{\leftarrow a}\prod\limits_{x\in L} E_a^x)={pr_{I\times\{x\}}}^{-1}(\prod\limits_{x\in L}\lim\limits_{\leftarrow a} E_a^x)$.

定理 181.

I为预序集，且为右方有向集，并有一个可数共尾子集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，对任意$a\in I$与$b\in I$与$a\le b$，f_{ab}为满射，令$E=\lim\limits_{\leftarrow} E_a$. 对任意$a\in I$，令$f_a$为$E$到$E_a$的规范映射，则$f_a$为满射. 进而，对任意$a\in I$，$E_a\ne\varnothing$，则$E\ne\varnothing$.

证明：令(a_n)为I的元素序列，并且各项构成I的可数共尾子集，则递归构建a的元素序列(b_n)：令$b_0=a_0$，$b_n=sup(a_n, b_{n-1})$，则(b_n)为单增序列，并且各项构成I的共尾子集. 对任意$x_{b_0}\in E_{b_0}$，由数学归纳法可知存在$x_{b_n}\in E_{b_n}$，使对任意$m<n$，$x_{b_m}=f_{b_mb_n}(x_{b_n})$，对任意$a<b_n$，令$x_a=f_{ab_n}(x_{b_n})$，则$x_a\in E$. 故$f_{b_0}$为满射. 同理可证，对任意$n\in N$，$f_{b_n}$为满射，进而，当$a\le b_n$时，$f_a$为满射. 因此，对任意$a\in I$，$E_a\ne\varnothing$，则$E\ne\varnothing$.

定理 182.

I为预序集，且为右方有向集，(E_a, f_{ab})为关于I的集合射影系统，对任意$a\in I$，令F_a的元素都是E_a的子集，并且：

第一，F_a的任何元素的交集也是F_a的元素；

第二，如果$G \subset F_a$，并且G中任何有限个元素的交集都不是空集（或等价公式：F_a为按包含关系排序的偏序集，G为左方有向集，且其元素都不是空集），

则$\bigcap\limits_{M \in F} G$不是空集．

同时，对任意a、b，如果满足$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$，均有：

第一，对任意$x_a \in E_a$，${f_{ab}}^{-1}(x_a) \in F_b$；

第二，对任意$M_b \in F_b$，$f_{ab}(M_b) \in F_a$．令$E = \lim\limits_{\leftarrow} E_a$，并且对任意$a \in I$，令$f_a$为$E$到$E_a$的规范映射，

则：

第一，对任意$a \in I$，$f_a(E) = \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b)$；

第二，对任意$a \in I$，$E_a \neq \varnothing$，则$E \neq \varnothing$．

证明：令S为符合下列条件的集族$(A_a)_{a \in I}$的集合：对任意$a \in I$，$A_a \neq \varnothing$，$A_a \in F_a$，并且对任意a、b满足$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$，$f_{ab}(A_b) \subset A_a$．令R为$M \in S$与$N \in S$与$N \subset M$，则E为按R排序的偏序集．令L为S的全序子集，$L_a = \{x|(\exists A)(\exists a)(A \in L与a \in I与(a, x) \in A)\}$．$B_a = \bigcap\limits_{x \in L} a_x$．则$(B_a)_{a \in I} \in S$，故$S$为归纳集．

设S的极大元为A，令${A'}_a = \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(A_b)$．对任意$a \leq b$，$b \leq c$，$f_{ac}(A_c) = f_{ab}(f_{bc}(A_c)$，因此$f_{ac}(A_c) \subset f_{ab}(A_b)$．如果$a \leq b$，$f_{ab}({A'}_b) \subset \bigcap\limits_{c \geq a与c \in I} f_{ac}({A'}_c)$，另一方面，对任意$d \geq b$，存在$c \geq d$且$c \geq b$，使$f_{ac}(A_c) \subset f_{ad}(A_d)$，故$\bigcap\limits_{c \geq a与c \in I} f_{ac}({A'}_c) \subset {A'}_a$，因此$f_{ab}({A'}_b) \subset {A'}_a$．又因为$f_{ab}(A_b) \in F$a，$f_{ab}(A_b) \neq \varnothing$，故$A' \in S$，同时，$A' \subset A$，所以$A = A'$，故对任意$a$、$b$满足$a \in I$与$b \in I$与$a \leq b$，$f_{ab}(A_b) = A_a$．

设$x_a \in A_a$，当$b \geq a$时，令$B_b = A_b \cap {f_{ab}}^{-1}(x_a)$，当$b < a$时，令$B_b = A_b$，如果$b < a$，对任意$c \geq b$，$f_{bc}(B_c) \subset f_{bc}(A_c)$，因此$f_{b_c}(B_c) \subset B_b$；当$b \geq a$时，对任意$c \geq b$，${f_{ac}}^{-1}(x_a) = ({f_{bc}}^{-1}({f_{ab}}^{-1}(x_a)))$，因此$f_{bc}({f_{ac}}^{-1}(x_a)) \subset {f_{ab}}^{-1}(x_a)$，又因为$f_{bc}(A_c) \subset A_b$，故$f_{bc}(B_c) \subset B_b$；同时，由于$f_{ab}(A_b) = A_a$，故$A_b \cap {f_{ab}}^{-1}(x_a) \neq \varnothing$；此外，由于${f_{ab}}^{-1}(x_a) \in F_b$，$A_b \in F_b$，$B_b \in F_b$．综上，$B \in S$，因此$A = B$，故$A_a = \{x_a\}$，且其对一切$a \in I$都成立．

根据补充定理411，$f_a(E) \subset \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b)$．另一方面，设$x_a \in \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b)$，当$b \geq a$时，令$B_b = {f_{ab}}^{-1}(x_a)$，当$b < a$时，令$B_b = E_b$．因此$B_b \neq \varnothing$，并且$b \leq c$时，$f_{bc}(B_c) \subset B_b$，故$B \in S$．根据定理81，$S$有极大元$A$，满足$A \geq B$，设$A_a = \{y_a\}$，令$y = (y_a)$，则$y \in E$．故$f_a(y) = x_a$，因此，$f_a(E) = \bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b)$．如果$I = \varnothing$，则$E = \{\varnothing\}$，故$E \neq \varnothing$．如果$I \neq \varnothing$，则当$a \leq b$时，$f_{ab}(E_b) \neq \varnothing$．由于$b \leq c$时，$f_{ab}(E_b) \subset f_{ac}(E_c)$，因此$\bigcap\limits_{b \geq a与b \in I} f_{ab}(E_b) \neq \varnothing$，故$f_a(E) \neq \varnothing$，因此$E \neq \varnothing$．

补充定理 422. 集合归纳系统涉及的公式为等价关系

I为右方有向集，$(E_a)_{a \in I}$为集族，$(f_{ba})_{a \in I与b \in I与a \leq b}$为函数族，其中$f_{ba}$为$E_a$到$E_b$的映射，并且满足下列条件：

第一，如果$a \le b$，$b \le c$，则$f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$.

第二，$f_{aa} = Id_{E_a}$.

令G为集族$(E_a)_{a \in I}$的和，令R为公式$x \in G$与$y \in G$与$(\exists c)(c \in I$与$c \ge pr_2 x$与$c \ge pr_2 y$与$f_{c\ pr_2 x}(pr_1 x) = f_{c\ pr_2 y}(pr_1 y)$，则$R$为在$G$上的等价关系.

证明：显然R具有反身性和对称性.

设$u \in G$、$v \in G$、$w \in G$，令$u = (x, a)$，$v = (y, b)$，$w = (z, c)$，则$x \in E_a$，$y \in E_b$，$z \in E_c$，设$l \ge a$、$l \ge b$，$f_{la}(x) = f_{lb}(y)$，$m \ge b$，$m \ge c$，$f_{mb}(y) = f_{mc}(z)$. 由于I为右方有向集，则存在$n \ge l$、$n \ge m$，故$f_{na}(x) = f_{nc}(z)$. 因此R具有传递性.

定义 199. 集合归纳系统（*système inductif d'ensembles*），集族的归纳极限（*limite inductive de famille d'ensembles*），集合到集族的归纳极限的规范映射（*application canonique de la limite inductif d'un ensemble dans la famille d'ensembles*）

I为右方有向集，$(E_a)_{a \in I}$为集族，$(f_{ba})_{a \in I 与 b \in I 与 a \le b}$为函数族，其中$f_{ba}$为$E_a$到$E_b$的映射，并且满足下列条件：

第一，如果$a \le b$，$b \le c$，则$f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$.

第二，$f_{aa} = Id_{E_a}$，则$(E_a)_{a \in I}$，$(f_{ba})_{a \in I 与 b \in I 与 a \le b)}$称为关于$I$的集合归纳系统，在没有歧义的情况下可以简记为$((E_a), (f_{ba}))$或$(E_a, f_{ba})$.

令G为集族$(E_a)_{a \in I}$的和，令R为等价关系$x \in G$与$y \in G$与$(\exists c)(c \in I$与$c \ge pr_2 x$与$c \ge pr_2 y$与$f_{c\ pr_2 x}(pr_1 x) = f_{c\ pr_2 y}(pr_1 y)$，则称商集$G/R$为集族$(E_a)_{a \in I}$对于函数族$(f_{ba})_{a \in I 与 b \in I 与 a \le b}$的归纳极限，记作$\lim\limits_{\to a}(E_a, f_{ba})$，在没有歧义的情况下可以简记为$\lim\limits_{\to}(E_a, f_{ba})$或$\lim\limits_{\to} E_a$. 令$f$为$G$到$E/R$的规范映射，$g_a$为映射$x \to (x, a)(x \in E_a)$，则映射$f \circ g_a$称为$E_a$到$\lim\limits_{\to} E_a$的规范映射.

补充定理 423.

I为右方有向集，$((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I 与 b \in I 与 a \le b)}$为关于$I$的集合归纳系统，$E = \lim\limits_{\to}(E_a, f_{ba})$，对任意$a \in I$，令$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，则当$a \in I$、$b \in I$、$a \le b$时，$f_a = f_b \circ f_{ba}$.

证明：对任意$x \in E_a$，$f_{bb}(f_{ba}(x)) = f_{ba}(x)$. 由于$f_{ba}(x) \in E_b$，故$f_b(f_{ba}(x)) = f_a(x)$，得证.

补充定理 424.

I为右方有向集，$((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I 与 b \in I 与 a \le b)}$为关于$I$的集合归纳系统，$E = \lim\limits_{\to}(E_a, f_{ba})$，对任意$a \in I$，令$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，则：

（1）对任意$x \in E$，存在$a \in I$、$z \in E_a$，使$f_a(z) = x$.

（2）$E = \bigcup\limits_{a \in I} f_a \langle E_a \rangle$.

证明：

（1）根据补充证明规则35，G到E的规范映射f为满射，因此存在$y \in G$，使$f(y) = x$. 令$y = (z, a)$，则$a \in I$、$z \in E_a$，令g_a为映射$x \to (x, a)(x \in E_a)$，则$g_a(z) = y$，故$f(g_a(z)) = x$，得证.

（2）对任意$x \in E_a$，$f_a(x) \in E$；反过来，对任意$x \in E$，根据补充定理424（1），存在$a \in I$、$z \in E_a$，使$f_a(z) = x$. 得证.

补充定理 425.

$((E_a)_{a \in I}, (f_{ba})_{a \in I与b \in I与a \leq b})$为关于$I$的集合归纳系统，$E = \varinjlim(E_a, f_{ba})$，对任意$a \in I$，令$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，则对任意$a \in I$、$x \in E$、$y \in E$，如果$f_a(x) = f_a(y)$，则$(\exists b)(b \in I与b \geq a与f_{ba}(x) = f_{ba}(y))$.

证明：令g_a为映射$x \to (x, a)(x \in E_a)$，则$f(g_a(x)) = f(g_a(y))$，根据证明规则55，$(\exists b)(b \in I与b \geq a与f_{ba}(x) = f_{ba}(y))$.

补充定理 426.

关于$\varnothing$的集合归纳系统，其归纳极限为$\varnothing$.

证明：根据补充证明规则34（1）可证.

定理 183.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，则：

（1）令n为自然数，$(x^{(i)})_{i \in [1,n]}$为E的有限元素族，则存在$a \in I$，使$(x_a^{(i)})_{i \in [1,n]}$为$E_a$的有限元素族，并且，当$i \in [1, n]$时，$x^{(i)} = f_a(x_a^{(i)})$.

（2）令n为自然数，$(y^{(i)})_{i \in [1,n]}$为E的有限元素族，如果对任意$i \in [1, n]$、$j \in [1, n]$，均有$f_a(y_a^{(i)}) = fa(y_a^{(j)})$，则存在$b \geq a$，使得对任意$i \in [1, n]$、$j \in [1, n]$，均有$f_{ba}(y(i)a) = f_{ba}(y(j)a)$.

证明：

（1）根据补充定理424（1），对任意$i \in [1, n]$，存在$b_i \in I$及$z \in E_{b_i}$，使$x^{(i)} = f_{b_i}(z_{b_i})$，取$a \geq b_i$（对任意$i \in [1, n]$），则$x_a^{(i)} = f_{ab_i}(z_{b_i})$，根据补充定理423可证.

（2）根据补充定理425，对任意$i \in [1, n]$、$j \in [1, n]$，存在$c_{ij} \geq a$，使$f_{c_{ij}a}(y_a^{(i)}) = f_{c_{ij}a}(y_a^{(j)})$，进而，存在$b$，使对任意$i \in [1, n]$、$j \in [1, n]$均有$b \geq c_{ij}$，由于$f_{ba} = f_{bc_{ij}} \circ f_{c_{ij}a}$，因此$f_{ba}(y_a^{(i)}) = f_{ba}(y_a^{(j)})$.

定理 184. 集族到集合的映射族的归纳极限的性质

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I与b \in I与a \leq b \Rightarrow u_b \circ f_{ba} = u_a)$，则：

（1）存在唯一的E到F的映射u，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u_a = u \circ f_a)$;

（2）当且仅当$F=\bigcup\limits_{a\in I}u_a(E_a)$时，$u$为满射；

（3）当且仅当$(\forall a)(a\in I$与$x\in E_a$与$y\in E_a$与$u_a(x)=u_a(y)\Rightarrow(\exists b)(b\geq a$与$f_{ba}(x)=f_{ba}(y)))$时，$u$为单射.

证明：

（1）令G到E的规范映射为f，g_a为映射$x\to(x,a)(x\in E_a)$，$F_a=g_a\langle E_a\rangle$，则 $v_a=u_a\circ g_a{}^{-1}$，故v_a为F_a到F的映射，令v为G到F的映射，且对任意$a\in I$，v在F_a上与v_a重合．令R为等价关系$x\in G$与$y\in G$与$(\exists c)(c\in I$与$c\geq pr_2x$与$c\geq pr_2y$与$f_{c\ pr_2x}(pr_1x)=f_{c\ pr_2y}(pr_1y)$，设$x\in F_a$，$y\in F_b$，如果$R$为真，则存在$c$，使$f_{ca}(pr_1x)=f_{cb}(pr_1y)$，由于$v_a=u_a\circ g_a{}^{-1}$，故$v_a(x)=u_a(pr_1x)$，因此$v(x)=u_c(f_{ca}(pr_1x))$，同理$v(y)=u_c(f_{cb}(pr_1y))$，因此$R\Rightarrow v(x)=v(y)$，因此$v$是同等价关系相容的映射，根据证明规则57，存在唯一的映射u，使$u\circ f=v$．由于$u_a=v\circ g_a$，$f_a=f\circ g_a$，因此$u_a=u\circ f_a$，得证.

（2）当$F=\bigcup\limits_{a\in I}u_a(E_a)$时，对任意$x\in F$，存在$a\in I$、$z\in E_a$，使$x=u_a(z)$，因此$x=u(f_a(z))$，故$u$为满射．反过来，若$u$为满射，则对任意$x\in F$，存在$y\in E$使$x=u(y)$，根据补充定理424（1），存在$a\in I$、$z\in E_a$，使$y=f_a(z)$，故$x=u_a(z)$，因此$x\in u_a(E_a)$.

另一方面，对任意$x\in u_a(E_a)$，存在$z\in E_a$，使$x=u_a(z)$，因此$x=u(f_a(z))$，故$x\in F$；综上，$F=\bigcup\limits_{a\in I}u_a(E_a)$.

（3）假设$(\forall a)(a\in I$与$x\in E_a$与$y\in E_a$与$u_a(x)=u_a(y)\Rightarrow(\exists b)(b\geq a$与$f_{ba}(x)=f_{ba}(y)))$，如果$u(x)=u(y)$，且$x\in E$、$y\in E$，则存在设$a\in I$、$b\in I$、$m\in E_a$、$n\in E_a$，使$f_a(m)=x$、$f_b(n)=y$，因此$u_a(m)=u_b(n)$，故存在$c\in I$，使$c\geq a$，$c\geq b$，且$u_c(f_{ca}(m))=u_c(f_{cb}(n))$，因此存在$d\geq c$，使$f_{da}(m)=f_{db}(n)$．根据补充定理423，$x=f_d(f_{da}(m))$，$y=f_d(f_{db}(n))$，因此$x=y$.

反过来，如果u为单射，且$a\in I$与$x\in E_a$与$y\in E_a$与$u_a(x)=u_a(y)$，则$u(f_a(x))=u(f_a(y))$，则$f_a(x)=f_a(y)$，由于$f_a(x)\in E$，$f_a(y)\in E$，根据补充定理425，$(\exists b)(b\geq a$与$f_{ba}(x)=f_{ba}(y))$，得证.

定义 200. 集族到集合的映射归纳系统（*système inductif d'applications da famille d'ensembles dans un ensemble*），集族到集合的映射族的归纳极限（*limite inductive de famille d'applications da famille d'ensembles dans un ensemble*）

I为右方有向集，(E_a,f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E=\varinjlim E_a$，对任意$a\in I$，E_a到E的规范映射为f_a，对任意$a\in I$，令u_a为E_a到F的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a\in I$与$b\in I$与$a\leq b\Rightarrow u_b\circ f_{ba}=u_a)$，则称映射族$(u_a)_{a\in I}$为$(E_a,f_{ba})$到$F$的映射归纳系统．如果$E$到$F$的映射$u$，使$(\forall a)(a\in I\Rightarrow u_a=u\circ f_a)$，则称$u$为映射族$(u_a)_{a\in I}$的归纳极限，记作$\varinjlim u_a$.

补充定理 427.

I为右方有向集，(E_a,f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E=\varinjlim E_a$，对任意$a\in I$，E_a到E的规范映射为f_a，则$(f_a)_{a\in I}$为(E_a,f_{ba})到E的映射归纳系统，且$\varinjlim f_a=Id_E$.

证明：根据补充定理423可证.

定理 185. 集族之间的映射族的归纳极限的存在性和唯一性

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(F_a, g_{ba})均为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，$F = \varinjlim F_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，F_a到F的规范映射为g_a．对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F_a的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_b \circ g_{ba} = f_{ba} \circ u_a)$，则存在唯一的$E$到$F$的映射$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u \circ f_a = g_a \circ u_a)$.

证明：令$v_a = g_a \circ u_a$，则$v_b \circ f_{ba} = g_b \circ u_b \circ f_{ba}$，等于$g_b \circ g_{ba} \circ u_a$，等于$g_a \circ u_a$，等于$v_a$. 根据定理184（1），存在唯一的$u$，使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow v_a = u \circ f_a)$.

定义 201. 集族之间的映射归纳系统（*système inductif d'applications entre familles d'ensembles*），集族之间的映射族的归纳极限（*limite inductive de famille d'applications entre familles d'ensembles*）

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(F_a, g_{ba})均为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，$F = \varinjlim F_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，F_a到F的规范映射为g_a．对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F_a的映射，并且$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \leq b \Rightarrow u_b \circ g_{ba} = f_{ba} \circ u_a)$，则称映射族$(u_a)_{a\in I}$为$(E_a, f_{ba})$到$(F_a, g_{ba})$的映射归纳系统．如果$E$到$F$的映射$u$使$(\forall a)(a \in I \Rightarrow u \circ f_a = g_a \circ u_a)$，则称$u$为映射族$(u_a)_{a\in I}$的归纳极限，记作$\varinjlim_{a} u_a$，在没有歧义的情况下也可以简记为$\varinjlim u_a$.

定理 186.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(F_a, g_{ba})、(G_a, h_{ba})均为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，$F = \varinjlim F_a$，$G = \varinjlim G_a$，对任意$a \in I$，E_a到E的规范映射为f_a，F_a到F的规范映射为g_a，G_a到G的规范映射为h_a．对任意$a \in I$，令u_a为E_a到F_a的映射，v_a为F_a到G_a的映射，则映射族$(v_a \circ u_a)_{a\in I}$为(E_a, f_{ba})到$(G_a, h_{ba}$的映射归纳系统，并且$\varinjlim(v_a \circ u_a) = \varinjlim(v_a \circ (\varinjlim u_a))$.

证明：令$w_a = v_a \circ u_a$．则$h_{ab} \circ w_a = h_{ab} \circ v_a \circ u_a$，等于$v_b \circ g_{ba} \circ u_a$，等于$w_b \circ f_{ba}$，映射族$(v_a \circ u_a)_{a\in I}$为$(E_a, f_{ba})$到$(G_a, h_{ba}$的映射归纳系统．同时$v \circ u \circ f_a = v \circ g_a \circ u_a$，等于$h_a \circ v_a \circ u_a$，得证.

定理 187.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(E'_a, f'_{ba})均为关于I的集合归纳系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，则映射族$(u_a)_{a\in I}$为映射归纳系统．令$u = \varinjlim u_a$，如果对任意$a \in I$，u_a为单射（或满射），则u是单射（或满射）.

证明：令f_a为E_a到E的规范映射，f'_a为E'_a到E'的规范映射.

如果对任意$a \in I$，u_a为单射，令$x \in E_a$，$y \in E_a$，且$f'_a(u_a(x)) = f'_a(u_a(y))$，根据定理183（2），存在$b \geq a$，使$f'_{ba}(u_a(x)) = f'_{ba}(u_a(y))$，故$u_b(f_{ba}(x)) = u_b(f_{ba}(y))$，因此$f_{ba}(x) = f_{ba}(y)$，根据定理184（3），$u$是单射.

如果对任意$a \in I$，u_a为满射，根据补充定理424（2），$E' = \bigcup_{a\in I} f'_a\langle E'_a\rangle$．因此$E = \bigcup_{a\in I} u\langle f_a\langle E_a\rangle\rangle$，故$E = u\bigcup_{a\in I} f_a\langle E_a\rangle$，因此$E' = u(E)$，故$u$是满射．

补充定理 428. 子集上的系统为归纳系统

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，$E = \varinjlim E_a$，对任意$a \in I$，$M_a \subset E_a$，如果$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \le b \Rightarrow f_{ba}(M_a) \subset M_b)$，当$a \in I$与$b \in I$与$a \le b$时，令$g_{ba}$为$f_{ba}$在$M_a$上的限制，则$(M_a, g_{ba})$也是关于$I$的集合归纳系统，并且，对任意$a \in I$，令$j_a$为$M_a$到$E_a$的规范映射，并且，$\varinjlim j_a$为$\varinjlim M_a$到$E$的单射．

证明：根据定义可证(M_a, g_{ba})为关于I的集合归纳系统．根据定理187可证，$\varinjlim j_a$为$\varinjlim M_a$到E的单射．

定义 202. 子集归纳系统（*système inductif de parties*）

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，对任意$a \in I$，$M_a \subset E_a$，如果$(\forall a)(\forall b)(a \in I$与$b \in I$与$a \le b \Rightarrow f_{ba}(M_a) \subset M_b)$，则称$(M_a)_{a\in I}$为$(E_a)_{a\in I}$的子集归纳系统．

定理 188.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(E'_a, f'_{ba})均为关于I的集合归纳系统，对任意$a \in I$，u_a为E_a到E'_a的映射，令$u = \varinjlim u_a$，则：

（1）$(M_a)_{a\in I}$为$(E_a)_{a\in I}$的子集归纳系统，则$(u_a(M_a))_{a\in I}$为$(E'_a)_{a\in I}$的子集归纳系统，并且，$\varinjlim u_a(M_a) = u(\varinjlim M_a)$.

（2）$I \ne \varnothing$，$(x'_a)_{a\in I}$为族，对任意$a \in I$，$x'_a \in E'_a$，当$a \in I$与$b \in I$与$a \le b$时，$f_{ba}(x'_a) = x'_b$，则$u_a{}^{-1}(x'_a)$为$(E'_a)_{a\in I}$的子集归纳系统，则存在唯一的$x' \in \varinjlim E'_a$，使对任意$a \in I$，$x' = f'_a(x'_a)$，并且$\varinjlim u_a{}^{-1}(x'_a) = u^{-1}(x')$，其中$f'_a$为$E$到$\varinjlim E'_a$的规范映射．

证明：

（1）根据定义，$(u_a(M_a))_{a\in I}$为$(E'_a)_{a\in I}$的子集归纳系统．令v_a为u_a通过E_a的子集M_a和E'_a的子集$u_a(M_a)$导出的函数，则v_a为满射，根据定理187可以证明$\varinjlim u_a(M_a) = u(\varinjlim M_a)$.

（2）对任意$a \in I$，$b \in I$，$a \le b$，$f'_a(x'_a) = f'_b(f'_{ba}(x'_a))$，因此$f'_a(x'_a) = f'_b(x'_b)$，令其为$x'$，故$x' \in \varinjlim E'_a$．令$N_a = u_a{}^{-1}(x'_a)$，如果$x_a \in N_a$，且$b \ge a$，则$x'_b = f'_ba(x'_a)$，等于$f'_ba(u'_a(x_a))$，等于$u_b(f_{ba}(x_a))$，因此$f_{ba}(x_a) \in N_b$，故$(N_a)_{a\in I}$为$(E_a)_{a\in I}$的子集归纳系统．对任意$x \in \varinjlim N_a$，存在$a \in I$、$x_a \in N_a$，使$x = f_a(x_a)$，则$u(x) = u(f_a(x_a))$，等于$f'_a(u_a(x_a))$，等于$f'_a(x'_a)$，等于$x'$，故$x \in u^{-1}(x')$.

反过来，如果$x \in u^{-1}(x')$，则存在$a \in I$、$x_a \in N_a$，使$x = f_a(x_a)$．由于$f'_a(x'_a)$等于x'，等于$u(x)$，等于$u(f_a(x_a))$，等于$f'_a(u_a(x_a))$，根据定理183（2），存在$b \ge a$，使$f'_ba(x'_a) = f'_ba(u_a(x_a))$，即$f'_ba(u_a(x_a)) = x'_b$，故$u_b(f_{ba}(x_a)) = x'_b$，因此$f_{ba}(x_a) \in N_b$，又因为$x = f_b(f_{ba}(x_a))$，因此$x \in \varinjlim N_a$．综上，$\varinjlim u_a{}^{-1}(x'_a) = u^{-1}(x')$.

补充定理 429. 限制指标集可以得到集合归纳系统

I为右方有向集，$((E_a)_{a\in I},(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合归纳系统，$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$J$为$I$的预序子集，则$((E_a)_{a\in J},(f_{ba})_{a\in J与b\in J与a\leq b})$是关于$J$的集合归纳系统.

证明：根据定义可证.

定义 203. 通过限制得到的集合归纳系统（*système inductif d'ensembles obtenu par restriction*）；集族的归纳极限的之间的规范映射（*application canonique entre limites inductives de familles d'ensembles*）

I为右方有向集，$((E_a)_{a\in I},(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合归纳系统，$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$J$为$I$的预序子集，则$((E_a)_{a\in J},(f_{ba})_{a\in J与b\in J与a\leq b})$称为通过将指标集限制在$J$上得到的集合归纳系统.

令$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$(E_a)_{a\in J}$对于$(f_{ab})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的归纳极限为$E'$，对任意$a\in I$，$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，则映射族$(f_a)_{a\in J}$的归纳极限，称为$E'$到$E$的规范映射.

补充定理 430.

I为右方有向集，J为I的预序子集，J'为J的预序子集，$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$(E_a)_{a\in J}$对于$(f_{ba})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的归纳极限$E'$，$(E_a)_{a\in J'}$对于$(f_{ba})_{a\in J'与b\in J'与a\leq b}$的归纳极限为$E''$，$E'$到$E$的规范映射为$g$，$E''$到$E'$的规范映射为$g'$，$E''$到$E$的规范映射为$g''$，则$g''=g\circ g'$.

证明：根据定义可证.

定理 189.

I为右方有向集，$((E_a)_{a\in I},(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b})$为关于$I$的集合归纳系统，$J$为$I$的预序子集和共尾子集．令$(E_a)_{a\in I}$对于$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限为$E$，$(E_a)_{a\in J}$对于$(f_{ba})_{a\in J与b\in J与a\leq b}$的归纳极限为$E'$，则$E'$到$E$的规范映射为双射.

证明：令E'到E的规范映射为g，根据定理184（3），g为单射．对任意$x\in E$，根据补充定理424（1），存在$a\in I$、$z\in E_a$，使$f_a(z)=x$．由于J为I的共尾子集，故存在$b\geq a$，且$b\in J$，根据补充定理423，$f_b(f_{ba}(z))=x$，因此$x\in\bigcup\limits_{a\in J}f_a(E_a)$；反过来，对任意$x\in\bigcup\limits_{a\in J}f_a(E_a)$，均有$x\in E$，因此$E=\bigcup\limits_{a\in J}f_a(E_a)$，根据定理184（2），$g$为满射.

定义 204. 集族的双重归纳极限（*double limite inductive de famille d'ensembles*）

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为$(x\in I\times L与y\in I\times L与pr_1x\leq pr_1y与pr_2x\leq pr_2y)$，$((E_a^x)(a,x)\in I\times L,(f_{ba}^{yx})_{(a,x)\in I\times L与(b,y)\in I\times L与(a,x)\leq(b,y)})$为关于$I\times L$的集合归纳系统，则其归纳极限称为双重归纳极限，记作$\lim\limits_{\to a,x}E_a^x$，在没有歧义的情况下也可以简记为$\lim\limits_{\to}E_a^x$.

补充定理 431.

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，$((E_a^x)(a,x)\in I\times L,(f_{ba}^{yx})_{(a,x)\in I\times L与(b,y)\in I\times L与(a,x)\le(b,y)})$为关于$I\times L$的集合归纳系统，则$(E_a^x,f_{ba}^{yx})$为关于$I$的集合归纳系统，也是关于$L$的集合归纳系统．并且，$(\lim\limits_{\to a}E_a^x,g^{yx})$、$(\lim\limits_{\to x}E_a^x,h_{ba})$分别是关于$L$的集合归纳系统和关于$I$的集合归纳系统，其中$g^{yx}=\lim\limits_{\to a}f_{aa}^{yx}$，$h_{ba}=\lim\limits_{\to x}f_{ba}^{xx}$.

证明：根据定义，可证则(E_a^x,f_{ba}^{yx})为关于I的集合归纳系统，也是关于L的集合归纳系统．根据定理186，$g^{zx}=g^{zy}\circ g^{yx}$，$h_{ca}=h_{cb}\circ h_{ba}$，因此，$(\lim\limits_{\to a}E_a^x,g^{yx})$、$(\lim\limits_{\to x}E_a^x,h_{ba})$分别是关于$L$的集合归纳系统和关于$I$的集合归纳系统.

定理 190.

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，(E_a^x,f_{ba}^{yx})为关于$I\times L$的集合归纳系统，令E_a^x到$\lim\limits_{\to a}E_a^x$的规范映射为g_a^x，$\lim\limits_{\to a}E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$的规范映射为$h_x$，$u=\lim\limits_{\to a,x}(h_x\circ g_a^x)$，则$u$为$\lim\limits_{\to a,x}E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$的双射；令$E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}E_a^x$的规范映射为$j_a^x$，$\lim\limits_{\to x}E_a^x$到$\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$的规范映射为$k_a$，$v=\lim\limits_{\to a,x}(k_a\circ j_a^x)$，则$v$为$\lim\limits_{\to a,x}E_a^x$到$\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$的双射.

证明：令$h^{yx}=\lim\limits_{\to a}f_{aa}^{yx}$，$F_x=\lim\limits_{\to a}E_a^x$，$F=\lim\limits_{\to x}F_x$，$E=\lim\limits_{\to a,x}E_a^x$．根据补充定理424（2），$F=\bigcup\limits_{x\in L}h_x(F_x)$，$F_x=\bigcup\limits_{a\in I}g_a^x(E_a^x)$，因此$F=\bigcup\limits_{x\in L}(h_x\circ g_a^x(E_a^x))$，根据定理184（2），$u$为满射.

另一方面，令$m\in E_a^x$、$n\in E_a^x$，并且$h_x\circ g_a^x(m)=h_x\circ g_a^x(n)$，因此，存在$y\ge x$，使$h^{yx}(g_a^x(m))=h^{yx}(g_a^x(n))$，故$g_a^y(f_{aa}^{yx}(m))=g_a^y(f_{aa}^{yx}(m))$，因此，存在$b\ge a$，使$f_{ba}^{yy}(f_{aa}^{yx}(m))=f_{ba}^{yy}(f_{aa}^{yx}(m))$，因此，$f_{ba}^{yx}(m)=f_{ba}^{yx}(n)$，根据定理184（3），$u$为单射.

补充定理 432.

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，(E_a^x,f_{ba}^{yx})、(E'^x_a,f'_ba^{yx})均为关于$I\times L$的集合归纳系统，对于$(a,b)_{\in I\times L}$，令u_a^x为E_a^x到E'^x_a的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x,f_{ba}^{yx})$到$(E'^x_a,f'^{yx}_{ba})$的映射归纳系统，则$(u_a^x)_{a\in I}$、$(u_a^x)_{x\in L}$均为$(E_a^x,f_{ba}^{yx})$到$(E'^x_a,f'_{ba}yx)$的映射归纳系统，$(\lim\limits_{\to a}u_a^x)_{x\in L}$为$(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$到$(\lim\limits_{\to a}E'^x_a)$的映射归纳系统，$(\lim\limits_{\to x}u_a^x)_{a\in I}$为$(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$到$(\lim\limits_{\to x}E'^x_a)$的映射归纳系统.

证明：根据定义可证$(u_a^x)_{a\in I}$、$(u_a^x)_{x\in L}$均为(E_a^x,f_{ba}^{yx})到$(E'^x_a,f'_{ba}yx)$的映射归纳系统.

令$u_x=\lim\limits_{\to a}u_a^x$，$g^{yx}=\lim\limits_{\to a}f_{aa}^{yx}$，$g'^{yx}=\lim\limits_{\to a}f'^{yx}_{aa}$，则当$x\le y$时，$u_a^y\circ f_{aa}^{yx}=f'^{yx}_{aa}\circ u_a^x$，根据定理186，$u_y\circ g^{yx}=g'^{yx}\circ u_x$，因此，$(\lim\limits_{\to a}u_a^x)_{x\in L}$为$(\lim\limits_{\to a}E_a^x)$到$(\lim\limits_{\to a}E'^x_a)$的映射归纳系统.

同理可证$(\lim\limits_{\to}xu_a^x)_{a\in I}$为$(\lim\limits_{\to x}E_a^x)$到$(\lim\limits_{\to x}E'^x_a)$的映射归纳系统.

定义 205. 映射族的双重归纳极限（*double limite inductive de famille d'applications*）

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，(E_a^x, f_{ba}^{yx})、$({E'}_a^x, {f'}_{ba}^{yx})$均为关于$I\times L$的集合归纳系统，对于$(a,b)\in I\times L$，令$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x, f_{ba}^{yx})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ba}^{yx})$的映射归纳系统，则其归纳极限称双重归纳极限，记作$\lim\limits_{\to a,x} u_a^x$.

定理 191.

I、L均为右方有向集，$I\times L$的预序关系为($x\in I\times L$与$y\in I\times L$与$pr_1x\le pr_1y$与$pr_2x\le pr_2y$)，(E_a^x, f_{ba}^{yx})、$({E'}_a^x, {f'}_{ba}^{yx})$均为关于$I\times L$的集合归纳系统，对于$(a,b)\in I\times L$，令$u_a^x$为$E_a^x$到${E'}_a^x$的映射，并且$(u_a^x)_{(a,x)\in I\times L}$为$(E_a^x, f_{ba}^{yx})$到$({E'}_a^x, {f'}_{ba}^{yx})$的映射归纳系统，$u_a=\lim\limits_{\to x} u_a^x$，$u_x=\lim\limits_{\to a} u_a^x$，$u=\lim\limits_{\to a,x} u_a^x$. 令$E_a^x$到$\lim\limits_{\to a} E_a^x$的规范映射为$g_a^x$，$\lim\limits_{\to a} E_a^x$到$\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a} E_a^x)$的规范映射为$h_x$，$u=\lim\limits_{\to a,x}(h_x\circ g_a^x)$；令$E_a^x$到$\lim\limits_{\to x} E_a^x$的规范映射为$j_a^x$，$\lim\limits_{\to x} E_a^x$到$\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x} E_a^x)$的规范映射为$k_a$，$v=\lim\limits_{\to a,x}(k_a\circ j_a^x)$；令${E'}_a^x$到$\lim\limits_{\to a} {E'}_a^x$的规范映射为${g'}_a^x$，$\lim\limits_{\to a} {E'}_a^x$到$\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a} {E'}_a^x)$的规范映射为${h'}_x$，$u'=\lim\limits_{\to a,x}({h'}_x\circ {g'}_a^x)$；令${E'}_a^x$到$\lim\limits_{\to x} {E'}_a^x$的规范映射为${j'}_a^x$，$\lim\limits_{\to x} {E'}_a^x$到$\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x} {E'}_a^x)$的规范映射为${k'}_a$，$v'=\lim\limits_{\to a,x}({k'}_a\circ {j'}_a^x)$. 则$\lim\limits_{\to a,x} u_a^x={u'}^{-1}\circ\lim\limits_{\to x}(\lim\limits_{\to a} u_a^x)\circ u$，$\lim\limits_{\to a,x} u_a^x={v'}^{-1}\circ\lim\limits_{\to a}(\lim\limits_{\to x} u_a^x)\circ v$.

证明：根据定理190和可证.

定理 192.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、$({E'}_a, {f'}_{ba})$为关于I的集合归纳系统，$E=\lim\limits_{\to a} E_a$，$E'=\lim\limits_{\to a} {E'}_a$，对任意$a\in I$，$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，${E'}_a$到$E'$的规范映射为${f'}_a$，则$(E_a\times {E'}_a, f_{ba}\times {f'}_{ba})$也是关于$I$的集合归纳系统，$(fa\times {f'}_a)$是$(E_a\times {E'}_a, f_{ba}\times {f'}_{ba})$到$E\times E'$的映射归纳系统，且$\lim\limits_{\to}(f_a\times {f'}_a)$是$\lim\limits_{\to}(E_a\times {E'}_a)$到$(\lim\limits_{\to} E_a)\times(\lim\limits_{\to} {E'}_a)$的双射.

证明：根据定义，$(E_a\times {E'}_a, f_{ba}\times {f'}_{ba})$也是关于$I$的集合归纳系统，$(f_a\times {f'}_a)$是$(E_a\times {E'}_a, f_{ba}\times {f'}_{ba})$到$E\times E'$的映射归纳系统.

令$g=\lim\limits_{\to}(f_a\times {f'}_a)$，由于$E\times E'=\bigcup\limits_{a\in I} f_a(E_a)\times {f'}_a({E'}_a)$，根据定理184（2），$g$为满射.

另一方面，设$(x,x')\in E_a\times {E'}_a$，$(y,y')\in E_a\times {E'}_a$，并且$f_a(x)=f_a(y)$、${f'}_a(x)={f'}_a(y)$，则存在$b\ge a$、$c\ge a$，使$f_{ba}(x)=f_{ba}(y)$、${f'}_{ca}(x)={f'}_{ca}(y)$，进而，存在$d\ge c$、$d\ge b$，故$f_{da}(x)=f_{da}(y)$、${f'}_{da}(x)={f'}_{da}(y)$，根据定理184（3），$g$为单射.

定义 206. 乘积的归纳极限到归纳极限的乘积的规范映射（*application canonique de la limite inductive d'un produit dans du produit de limites inductives*）

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、$({E'}_a, {f'}_{ba})$为关于I的集合归纳系统，$E=\lim\limits_{\to} E_a$，$E'=\lim\limits_{\to} {E'}_a$，对任意$a\in I$，$E_a$到$E$的规范映射为$f_a$，${E'}_a$到$E'$的规范映射为${f'}_a$，则$(f_a\times {f'}_a)$称为$\lim\limits_{\to}(E_a\times {E'}_a)$到$(\lim\limits_{\to} E_a)\times(\lim\limits_{\to} {E'}_a)$的规范映射.

定理 193.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、$({E'}_a, {f'}_{ba})$、(F_a, g_{ba})、$({F'}_a, {g'}_{ba})$均为关于I的集合归纳系统，对任意$a\in I$，u_a为E_a到F_a的映射，${u'}_a$为${E'}_a$到${F'}_a$的映射，且(u_a)和$({u'}_a)$均为映射归纳系

统，则$(u_a\times u'_a)$为映射归纳系统，令$\varinjlim(E_a\times E'_a)$到$(\varinjlim aE_a)\times(\varinjlim aE'_a)$的规范映射为$f$，$\varinjlim(F_a\times F'_a)$到$(\varinjlim F_a)\times(\varinjlim F'_a)$的规范映射为$g$，则$\varinjlim(u_a\times u'_a)=g^{-1}\circ((\varinjlim u_a)\times(\varinjlim u'_a))\circ f$.

证明：根据定理192可证.

习题 189.

I为右方有向预序集，$(J_l)_{l\in L}$为I的子集族，其中L为右方有向预序集，并且：

第一，J_l按在I上的预序关系导出的预序关系排序，且为右方有向集；

第二，$i\in L$与$j\in L$与$i\leq j\Rightarrow J_i\subset J_j$；

第三，$I=\bigcup\limits_{l\in L}J_l$.

(E_a,f_{ab})为集合映射系统，$\varprojlim E_a=E$，对任意$l\in L$，对于(E_a,f_{ab})通过将指标集限制在J_l上得到的集合射影系统，令F_l为其集族对于其函数族的射影极限．当$i\in L$与$j\in L$与$i\leq j$时，令g_{ij}为F_j到F_i的规范映射．求证：(F_i,g_{ij})为关于I的集合射影系统，并且，令$F=\varprojlim F_l$，试定义F到E的规范双射.

证明：

根据补充定理416可以证明(F_i,g_{ij})为关于I的集合射影系统.

对任意$x\in E$，根据定义可证$((f_i(x))_{i\in J_j})_{j\in L}\in F$；反过来，对任意$y\in F$、$i\in L$、$j\in L$，如果$a\in J_i\cap J_j$，则$pr_a(pr_iy)=pr_a(pr_jy)$．令$x=(pr_a(pr_{\tau_i(i\in L与a\in J_i)}y))_{a\in I}$，对任意$a\in I$、$b\in I$，存在$i\in L$，使$a\in J_i$、$b\in J_i$，因此$f_{ab}(pr_b(pr_{\tau_i(i\in L与a\in J_i)}y))=pr_a(pr_{\tau_i(i\in L与a\in J_i)}y)$，故$x\in E$，因此，可定义$F$到$E$的规范双射为$y\to(pr_a(pr_{\tau_i(i\in L与a\in J_i)}y))_{a\in I}$.

习题 190.

(Ea,f_{ab})为关于I的集合射影系统，其中I为右方有向集，$\varprojlim E_a=E$，对任意$a\in I$，令f_a为E到E_a的规范映射，如果对任意$a\in I$、$b\in I$，f_{ab}均为单射，求证：对任意$a\in I$，f_a为单射.

证明：即补充定理414.

习题 191.

I为预序集，(E_a,f_{ab})、(F_a,g_{ab})均为关于I的集合射影系统，映射族$(u_a)_{a\in I}$为(E_a,f_{ab})到(F_a,g_{ab})的映射射影系统．对任意$a\in I$，令G_a为u_a的图，$u=\varprojlim u_a$．求证：(G_a)为某个映射射影系统的集族，并给出其射影极限.

证明：令h_{ab}为映射$(x,y)\to(f_{ab}(x),g_{ab}(y))$，则$(G_a,h_{ab})$为映射射影系统，其射影极限为$\bigcup\limits_{z\in u的图}\{(pr_i(pr_1z),pr_i(pr_2z))_{i\in I}\}$.

习题 192.

I为非空右方有向集，且无最大元．F为满足下列条件的I的元素序列$x=(a_i)_{i\in[1,2n]}$（其中n为自然数且$n\geq 1$）的集合：

第一，当$i\in[1,n]$时，$a_{2i-1}<a_{2i}$；

第二，当$j\in[1,n]$、$i\in[1,n]$且$j<i$时，非$(a_{2i-1}\leq a_{2j-1})$．

$F\neq\varnothing$．令$r(x)=a_{2n-1}$，$s(x)=a_{2n}$，n称为x的长度．

（1）对于任意$a\in I$，令$E_a=\{x|x\in F$与$r(x)=a\}$．当$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$时，按照下列方式定义E_b到E_a的函数f_{ab}：对于$x\in E_b$，令$x=(a_i)_{i\in[1,2n]}$，令j为$\{i|i\in[1,n]$与$a\leq a_{2j-1}\}$的最小元，$f_{ab}(x)=(a_i)_{i\in[1,2j-2]}\cup\{(2j-1,a),(2j,a_{2j})\}$，求证：对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，$E_a\neq\varnothing$，$f_{ab}(E_b)=E_a$，并且，$(E_a,f_{ab})$为关于$I$的集合射影系统．

（2）令$x_a\in E_a$、$x_b\in E_b$，存在$c\in I$以及$x_c\in E_c$，使$c\geq a$、$c\geq b$，并且，$x_a=f_{ac}(x_c)$，$x_b=f_{bc}(x_c)$，如果x_a和x_b的长度相等，求证：$s(x_a)=s(x_b)$．

（3）$E=\varprojlim E_a$，且$E\neq\varnothing$，令$(a_i)\in E$，求证：$\{x|(\exists i)(i\in I$与$x=s(a_i))\}$可数并且和I共尾．

（4）令I为不可数集合A的有限子集集合，并按包含关系排序．求证：不存在I的可数共尾子集，并且，给出(E_a,f_{ab})，对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，$E_a\neq\varnothing$，$f_{ab}(E_b)$为满射，但$\varprojlim E_a=\varnothing$．

（5）给出关于I的集合射影系统(E_a,f_{ab})到(E'_a,f'_ab)的映射射影系统(u_a)，令$u=\varprojlim u_a$，对任意$a\in I$，u_a均满射，但u不是满射．

证明：

（1）对任意$a\in I$，令$d>a$，对任意$i\in[1,n]$，令$a_{2i-1}=a$，$a_{2i}=d$，故$(a_i)_{i\in[1,2n]}\in E_a$，因此$E_a\neq\varnothing$．当$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$时，对任意$x\in E_a$，均有$x\in E_b$，且$f_{ab}(x)=x$，故$f_{ab}(E_b)=E_a$．根据定义可证$f_{ac}=f_{ab}\circ f_{bc}$，故$(E_a,f_{ab})$为关于$I$的集合射影系统．

（2）根据定义可证．

（3）根据习题192（2）可证．

（4）设J为I的共尾子集，令$B=\bigcup\limits_{X\in J}X$，则$B$为可数集合，令$x\in A-B$，则不存在$Z\in J$使$\{x\}\subset Z$，矛盾，故不存在I的可数共尾子集．根据习题192（3）确定的集合射影系统符合条件．

（5）令(E_a,f_{ab})为根据习题192（3）确定的集合射影系统，对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，令E'_a均为单元素集合，f'_{ab}为E'_b到E'_a的双射，u_a为E_a到E'_a的满射，则(u_a)符合条件．

习题 193.

I为右方有向集，$(E_a)_{a\in I}$为格族，对任意$a\in I$，E_a按相反关系排序，为诺特集．对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，f_{ab}为E_b到E_a的单增映射，(E_a,f_{ab})为关于I的集合射影系统．对任意$a\in I$，G_a均为E_a的非空子集，并且满足下列条件：

第一，对任意$a\in I$，G_a的任何两个不相同元素都是不可比较的；

第二，对任意$a\in I$、$b\in I$、$a\leq b$，$f_{ab}(G_b)=G_a$；

第三，对任意$a \in I$、$b \in I$、$a \leq b$、$x_a \in G_a$，${f_{ab}}^{-1}(x_a)$有最大元$M_{ab}(x_a)$；

第四，对任意$a \in I$、$b \in I$、$a \leq b$，如果$h_b \in E_b$，且存在$y_b \in G_b$且$y_b \leq h_b$，则对任意$x_a \in G_a$且$x_a \leq f_{ab}(h_b)$，均存在$x_b \in G_b$且$x_b \leq h_b$使$x_a = f_{ab}(x_b)$.

求证：子集射影系统(G_a)的射影极限不是空集.

证明：令J为I的有限子集，考虑满足下列条件的元素族$(x_a)_{a \in J}$：

第一，对任意$a \in J$、$b \in J$、$a \leq b$、$x_a \in G_a$、$x_b \in G_b$，$x_a = f_{ab}(x_b)$；

第二，对任意$c \in I$并且c是J在I上的上界，存在$x_c \in c$并且对任意$a \in J$均有$x_a = f_{ac}(x_c)$.

因此，对任意$c \in I$并且c是J在I上的上界，$\bigcap\limits_{a \in J} {f_{ac}}^{-1}(x_a)$不为空，且所有元素均为$\bigcup\limits_{a \in J}\{M_{ac}(x_a)\}$的下界．由$\bigcup\limits_{a \in J}\{M_{ac}(x_a)\}$为有限集合，且$E_c$为格，故其在$E_c$上有最大下界，令$z = \underset{a \in J}{inf}(M_{ac}(x_a))$，$u \in \bigcap\limits_{a \in J} {f_{ac}}^{-1}(x_a)$，则$u \leq z$，故对任意$a \in J$，均有$f_{ac}(z) \geq x_a$，同时，由于$z \leq M_{ac}(x_a)$，故$f_{ac}(z) \leq x_a$，因此$f_{ac}(z) = x_a$，故$\underset{a \in J}{inf}(M_{ac}(x_a))$为$\bigcap\limits_{a \in J} {f_{ac}}^{-1}(x_a)$的最大元．进而，对任意$y \in G_c$且$y \leq z$，以及任意$d \in J$，$f_{dc}(y) \leq x_d$，由于$f_{dc}(y) \in G_d$、$x_d \in G_d$，故$f_{dc}(y) = x_d$，因此，$\{y|y \in G_c与y \leq \underset{a \in J}{inf}(M_{ac}(x_a))\} = G_c \cap (\bigcap\limits_{a \in J} {f_{ac}}^{-1}(x_a))$.

令J为I的子集，考虑满足下列条件的元素族$(x_a)_{a \in J}$：对J的任意有限子集F，$(x_a)_{a \in F}$满足上一段的两个条件．如果$J \neq I$，令$b \in I - J$．对J的任意有限子集F、$F \cup \{b\}$的上界c，$\{y|y \in G_c与y \leq \underset{a \in F}{inf}(M_{ac}(x_a))\} = Gc \cap (\bigcap\limits_{a \in F} {f_{ac}}^{-1}(x_a))$．因此$\{y|y \in G_b与y \leq f_{bc}(\underset{a \in F}{inf}(M_{ac}(x_a)))\} = f_{bc}(G_c \cap (\bigcap\limits_{a \in F} {f_{ac}}^{-1}(x_a)))$．根据补充定理410（1），存在$F_0 \subset J$以及$F_0 \cup \{b\}$的上界$c_0$，对任意$J$的有限子集$F$，以及任意$F \cup \{b\}$的上界$c$，均有$\underset{a \in F}{inf}(M_{ac}(x_a)) \geq \underset{a \in F_0}{inf}(M_{ac_0}(x_a))$．令$x_b$为$\{y|y \in G_b与y \leq f_{bc_0}(\underset{a \in F_0}{inf}(M_{ac_0}(x_a)))\}$的任何一个元素，则$(x_a)_{a \in F \cup \{b\}}$符合条件.

令K为存在满足条件的元素组的I的子集的集合，则K非空．K按关于J、J'的偏序关系（存在满足条件的元素族$(x_i)_{a \in J}$和$(y_i)_{a \in J'}$并且前者是后者的子族）的包含关系排序，根据定理80，K有极大元，并且其极大元为I，故存在元素族$(x_i)_{a \in J}$符合条件，即子集射影系统(G_a)的射影极限不是空集.

习题 194.

I为右方有向预序集，$(J_l)_{l \in L}$为I的子集族，其中L为右方有向预序集，并且：

第一，J_l按在I上的预序关系导出的预序关系排序，且为右方有向集；

第二，$i \in L$与$j \in L$与$i \leq j \Rightarrow J_i \subset J_j$；

第三，$I = \bigcup\limits_{l \in L} J_l$．$(E_a, f_{ba})$为集合归纳系统.

令$\lim\limits_{\rightarrow} E_a = E$，对任意$l \in L$，对于$(E_a, f_{ba})$通过将指标集限制在$J_l$上得到的集合归纳系统，令$F_l$为其集族对于其函数族的归纳极限．当$i \in L$与$j \in L$与$i \leq j$时，令$g_{ji}$为$F_i$到$F_j$的规

范映射．求证：(F_i, g_{ji})为关于I的集合归纳系统，并且，令$F = \lim\limits_{\rightarrow} F_l$，试定义$F$到$E$的规范双射．

证明：

根据补充定理430可以证明(F_i, g_{j_i})为关于I的集合归纳系统．

令G为$(E_a)_{i\in I}$的和，其等价关系为R，H为$(F_i)_{i\in L}$的和，其等价关系为S．对任意$X \in F$，令关于S的等价类的代表为K，将指标集限制在J_{pr_2k}上得到的集合归纳系统的等价关系为T，pr_1k关于T的等价类的代表为x，x关于R的等价类为$G(x)$，则$X \rightarrow G(x)$为F到E的规范双射．

习题 195.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})为关于I的集合归纳系统，其中，$\lim\limits_{\rightarrow} E_a = E$，对任意$a \in I$，$f_a$为$E$到$E_a$的规范映射，$R_a$为公式$(x \in E_a$与$y \in E_a$与$f_a(x) = f_a(y))$，求证：对任意$a \in I$、$b \in I$、$a \leq b$，$f_{ba}$是同$R_a$和$R_b$相容的映射；令$E'_a = E_a/R_a$，$f'_{ba}$为$f_{ba}$对于$R_a$和$R_b$通过商导出的映射，则$f'_{ba}$为单射，$(E'_a, f'_{ba})$为关于$I$的集合归纳系统，试定义$E$到$\lim\limits_{\rightarrow} E'_a$的规范双射．

证明：

对任意$x \in E_a$、$y \in E_a$，如果$f_a(x) = f_a(y)$，则存在c使$f_{ac}(x) = f_{ac}(y)$．令$d = sup(b, c)$，则$f_{bd}(f_{ab}(x)) = f_{bd}(f_{ab}(y))$，故$f_b(f_{ab}(x)) = f_b(f_{ab}(y))$，因此，$f_{ba}$是同$R_a$和$R_b$相容的映射．

设$f'_{ba}(x) = f'_{ba}(y)$，$x = f_a(u)$，$y = f_a(v)$，则$f_b(f_{ab}(u)) = f_b(f_{ab}(v))$，故$f_a(u) = f_a(v)$，因此$x = y$，所以$f'_{ba}$为单射．同时，根据定义可证$(E'_a, f'_{ba})$为关于$I$的集合归纳系统．$x \rightarrow \bigcup\limits_{a\in I}\{pr_1(x \cap (E_a \times \{a\}))\} \times \{a\}$为$E$到$\lim\limits_{\rightarrow} E'_a$的规范双射．

习题 196.

I为右方有向集，(E_a, f_{ba})、(F_a, g_{ba})为关于I的集合归纳系统，映射族$(u_a)_{a\in I}$为(E_a, f_{ba})到(F_a, g_{ba})的映射归纳系统．对任意$a \in I$，令G_a为u_a的图，$u = \lim\limits_{\rightarrow} u_a$．求证：$(G_a)$为某个映射归纳系统的集族，并给出其归纳极限．

证明：令h_{ba}为映射$(x, y) \rightarrow (f_{ba}(x), g_{ba}(y))$，则$(G_a, h_{ba})$为映射归纳系统，其归纳极限为$\bigcup\limits_{z} \in u$的图$\{\{(x, y)|x \in pr_1(pr_1 z)$与$y = u_{pr_2(pr_1 z)}(x)\}\}$．

习题 197.

I为预序集，$(E_a)_{a\in I}$为集族，$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$为函数族，其中$f_{ba}$为$E_a$到$E_b$的映射，并且满足下列条件：

第一，如果$a \leq b$，$b \leq c$，则$f_{ba} \circ f_{cb} = f_{ca}$．

第二，$f_{aa} = Id_{E_a}$，则$(E_a)_{a\in I}$，$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b)}$称为关于$I$的集合归纳系统，在没有歧义的情况下可以简记为$((E_a), (f_{ba}))$或$(E_a, f_{ba})$．

令R为公式$(x \in G$与$y \in G$与$pr_2 x \leq pr_2 y$与$f_{pr_2 y pr_2 x}(pr_1 x) = pr_1 y)$，$R'$为公式：

“存在自然数$n > 0$以及$(x_i)_{i\in[0,n]}$（$(\forall i)(i \in [0,n] \Rightarrow x_i \in G)$），其中$x_0 = x$，$x_n = y$，并且，对任意$i \in [0,n-1]$，$(x_{i+1}|y)(x_i|x)R$或$(x_i|y)(x_{i+1}|x)R$为真”.

令E=G/R'，则称E为集族

$(E_a)_{a\in I}$对于函数族$(f_{ba})_{a\in I与b\in I与a\leq b}$的归纳极限，记作$\lim\limits_{\to a}(E_a, f_{ba})$，在没有歧义的情况下可以简记为$\lim\limits_{\to}(E_a, f_{ba})$或$\lim\limits_{\to} E_a$. 令$f$为$G$到$E/R'$的规范映射，$g_a$为映射$x \to (x,a)(x \in E_a)$，则映射$f \circ g_a$称为$E_a$到$\lim\limits_{\to} E_a$的规范映射.

证明：根据定义可证I为右方有向集时，$\lim\limits_{\to} E_a$,即为集族归纳系统(E_a, f_{ba})的归纳极限. 类似定理184（1）、定理185的证明，可证明u的存在性和唯一性.

Chapter 4

结构（Structures）

4.1 结构和同构（Structures et isomorphismes）

结构定义 1. 阶梯构造模式（*schéma de construction d'échelon*）

满足下列条件的自然数有序对有限序列$(a_i, b_i)_{i\in[1,m]}$，称为阶梯构造模式：

（*1*）如果$b_i = 0$，则$a_i \in [1, i-1]$；

（*2*）如果$a_i \neq 0$且$b_i \neq 0$，则$a_i \in [1, i-1]$且$b_i \in [1, i-1]$.

结构定义 2. 在n个项上的阶梯构造模式（*schéma de construction d'échelon sur n termes*）

对于阶梯构造模式$(a_i, b_i)_{i\in[1,m]}$，如果$a_1 = 0$、$b_1 > 0$且$\{x | i \in [1, m]$与$a_i = 0$与$x = b_i\}$的最大元为n，则称其为在n个项上的阶梯构造模式.

结构定义 3. 阶梯构造（*construction d'échelon*），阶梯（*échelon*）

令M为比集合论强的理论，E_1、E_2、$\cdots$、E_n为M的n个项，对于在n个项上的阶梯构造模式$S = (a_i, b_i)_{i\in[1,m]}$，如果$M$的$m$个项$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_m$满足下列条件，则称其为阶梯构造模式$S$在$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的阶梯构造，并且，其中$A_m$称为阶梯构造模式$S$在基集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的阶梯，记作$S(E_1, E_2, \cdots, E_n)$：

（*1*）如果$a_i = 0$，则A_i为项E_{b_i}；

（*2*）如果$b_i = 0$，则A_i为项$\mathcal{P}(A_{a_i})$；

（*3*）如果$a_i \neq 0$且$b_i \neq 0$，则A_i为项$A_{a_i} \times A_{b_i}$.

结构定义 4. 映射对模式的规范扩展（*extension canonique de schema d'applications*）

在比集合论强的理论中，令在n个项上的阶梯构造模式$S = (a_i, b_i)_{i\in[1,m]}$，$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$、$E'_1$、$E'_2$、$\cdots$、$E'_n$为$M$的项，$f_1$、$f_2$、$\cdots$、$f_n$为映射，且对于$i \in [1, n]$，$f_i$为$E_i$到$E'_i$的映射，设$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_m$为模式$S$在$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的阶梯构造，$A'_1$、$A'_2$、$\cdots$、

A'_m为模式S在E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的阶梯构造．如果g'_1、g'_2、$\cdots$、g'_m为映射，且对于$i \in [1, m]$，g_i为A_i到A'_i的映射，并满足下列条件，则称g_m为f_1、f_2、$\cdots$、f_n对模式S的规范扩展，记作$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle^S$：

（*1*）如果$a_i = 0$，则g_i为f_{b_i}；

（*2*）如果$b_i = 0$，则g_i为g_{a_i}在子集上的规范扩展；

（*3*）如果$a_i \neq 0$且$b_i \neq 0$，则g_i为g_{a_i}和g_{b_i}在乘积集合上的规范扩展．

结构规则 1.

在比集合论强的理论中，S为在n个项上的阶梯构造模式，f_1、f_2、$\cdots$、f_n、f'_1、f'_2、$\cdots$、f'_n为映射，且对于$i \in [1, n]$，f_i为E_i到E'_i的映射，f'_i为E'_i到E''_i的映射，则$\langle f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \cdots, f'_n \circ f_n \rangle^S = \langle f'_1, f'_2, \cdots, f'_n \rangle^S \circ \langle f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle^S$.

证明：根据补充定理86、补充定理88、补充定理119（1）、补充定理119（2）可证．

结构规则 2.

在比集合论强的理论中，S为在n个项上的阶梯构造模式，f_1、f_2、$\cdots$、f_n均为单射（或满射），则$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle^S$为单射（或满射）．

证明：根据补充定理85、定理36可证．

结构规则 3.

在比集合论强的理论中，S为在n个项上的阶梯构造模式，f_1、f_2、$\cdots$、f_n均为双射，则$(\langle f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle^S)^{-1} = \langle {f_1}^{-1}, {f_2}^{-1}, \cdots, {f_n}^{-1} \rangle^S$.

证明：根据结构规则1、结构规则2可证．

补充结构规则 1.

在比集合论强的理论中，S为在n个项上的阶梯构造模式，f_1、f_2、$\cdots$、f_n均为恒等映射，则$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle^S$为恒等映射．

证明：根据补充定理87、补充定理119（3），运用数学归纳法可证．

结构定义 5. 类型化（*typification*）

令M为比集合论强的理论，x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p为互不相同的字母，且都不是M的常数．A_1、A_2、$\cdots$、A_m为M的项（其中m也可以为0），并且均不包含x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p．S_1、S_2、$\cdots$、S_p均为在$n+m$个项上的阶梯构造模式，令公式T为$(s_1 \in S_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$与$s_2 \in S_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$与$\cdots$与$s_p \in S_p(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m))$，则称$T$为$s_1$、$s_2$、$\cdots$、$s_p$的类型化．

结构定义 6. 可转换的公式（*relation transportable*），可转换的公式的主要基集合（*ensemble de base principal de la relation transportable*），可转换的公式的辅助基集合（*ensemble de base auxiliaire de la relation transportable*）

令M为比集合论强的理论，x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p为互不相同的字母，且都不是M的常数．A_1、A_2、$\cdots$、A_m为M的项（其中m也可以为0），并且均不包含x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p，T为s_1、s_2、$\cdots$、s_p的类型化．

如果公式R满足下列条件，则称公式R对类型化T是可转换的，在没有歧义的情况下也可以简称R是可转换的，其中，x_1、x_2、$\cdots$、x_n称为主要基集合，A_1、A_2、$\cdots$、A_m称为辅助基集合：

设y_1、y_2、$\cdots$、y_n、f_1、f_2、$\cdots$、f_p为互不相同的字母，与x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s_1、s_2、$\cdots$、s_p也均不相同，且都不是M的常数，则$(T$与$(f_1$是x_1到y_1的双射$)$与$(f_2$是x_2到y_2的双射$)$与$\cdots$与$(f_n$是x_n到y_n的双射$)\Rightarrow(R\Leftrightarrow(y_1|x_1)(y_2|x_2)\cdots(y_n|x_n)(s'_1|s_1)(s'_2|s_2)\cdots(s'_p|s_p)R)$，其中$s'_j=\langle f_1,f_2,\cdots,f_n,Id_{A_1},Id_{A_2},\cdots,Id_{A_m}\rangle^{S_j}(s_j)$（$j\in[1,p]$）．

结构定义 7. 结构种类（*espèce de structure*），结构种类的主要基集合（*ensemble de base principal de l'espèce de structure*），结构种类的主要基集合（*ensemble de base auxiliaire de l'espèce de structure*），结构种类的代表特征（*caractérisation typique de l'espèce de structure*），结构种类的公理（*axiome de l'espèce de structure*）

令M为比集合论强的理论，满足下列条件的文本，称为结构种类，其中x_1、x_2、$\cdots$、x_n称为结构种类的主要基集合，A_1、A_2、$\cdots$、A_m称为结构种类的辅助基集合，T称为结构种类的代表特征，R称为结构种类的公理：

第一，x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s为互不相同的字母，且都不是M的常数；

第二，A_1、A_2、$\cdots$、A_m为M的项，并且均不包含x_1、x_2、$\cdots$、x_n、s（其中m也可以为0）；

第三，T为s的类型化；

第四，公式R对T是可转换的．

注：在原书中，主要讨论T为s的类型化（即$p=1$）的情况，T为多个字母的类型化（即$p>1$）的情况，用同样的方法也可以得到类似的结论．

结构定义 8. 通用结构（*structure générique*）

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，代表特征为$s\in S(x_1,x_2,\cdots,x_n,A_1,A_2,\cdots,A_m)$，则在理论$M_X$中，常数$s$称为通用结构．

结构定义 9. 偏序结构种类（*espèce de structure d'ordre*）

以A为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件，则称为偏序结构种类：

第一，结构种类的代表特征为$s\in\mathcal{P}(A\times A)$；

第二，结构种类的公理为$(s\circ s=s)$与$(s\cap s^{-1}=\Delta_A)$．

结构定义 10. 代数结构种类（*espèce de structure algébriques*）

以A为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件，则称为偏序结构种类：

第一，结构种类的代表特征为$F \in \mathcal{P}((A \times A) \times A)$；

第二，结构种类的公理为"F是定义域为$A \times A$的函数图".

结构定义 11. 拓扑结构种类（*espèce de structure topologique*）

以A为主要基集合、没有辅助基集合的结构种类如果满足下列条件，则称为偏序结构种类：

第一，结构种类的代表特征为$V \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$；

第二，结构种类的公理为$(\forall V')((V' \subset V) \Rightarrow ((\bigcup_{X \in V'} X) \in V))$与$(A \in V)$与$(\forall X)(\forall Y)$ $((X \in V$与$Y \in V) \Rightarrow (X \cap Y \in V))$.

结构定义 12. 结构种类的理论（*théorie de espèce de structure*）

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，满足下列条件的理论，称为结构种类X的理论，记作M_X：

第一，显式公理包括M的显式公理和"R与T"；

第二，公理模式、特别符号均和M相同.

结构定义 13. 结构（*structure*），具有结构（*munis de la structure*）

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，其代表特征为T，公理为R. 令M'为比M强的理论，E_1、E_2、$\cdots$、E_n、U为M'的项，且"$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(U|s)R$与$(E_1|x_1)$ $(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(U|s)T$"是$M'$的定理，则称在理论$M'$中$U$为$X$在主要基集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$和辅助基集合$A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_m$上的结构，在没有歧义的情况下也可以简称在理论$M'$中$U$为$X$在主要基集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的结构，或者简称$U$为$X$在主要基集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$上的结构. 同时，称在理论$M'$中$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$具有$X$的结构$U$，在没有歧义的情况下也可以简称$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$具有$X$的结构$U$，或简称$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$具有结构$U$.

补充结构规则 2.

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，其代表特征为T，公理为R. 令M'为比M强的理论，E_1、E_2、$\cdots$、E_n、U为M'的项，在理论M'中U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n和辅助基集合A_1、A_2、$\cdots$、A_m上的结构. 则对M_X的任意定理B，$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots$
$(E_n|x_n)(U|s)B$
是M'的定理.

证明：根据证明规则2可证.

补充结构规则 3.

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，其代表特征为T，公理为R，S为其阶梯构造模式．令M'为比M强的理论，在理论M'中U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n和辅助基集合A_1、A_2、$\cdots$、A_m上的结构．则在理论M'中，公式“U为在理论M'中X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构”为U上的集合化公式．

证明：在理论M'中，根据定义，$U \in S(E_1, E_2, \cdots, E_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$，根据证明规则52可证．

结构定义 14. 结构种类的结构集合（*ensemble des structures d'espèce*）

令M为比集合论强的理论，X为结构种类，其代表特征为T，公理为R，S为其阶梯构造模式．令M'为比M强的理论，则在理论M'中，$\{U|U$为在理论M'中X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构$\}$称为结构种类X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构集合．

结构定义 15. 结构的同构（*isomorphisme de structures*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m．S为X的代表特征中的在$n+m$个项上的阶梯构造模式，R为X的公理．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，U'为X在主要基集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$上的结构．对任意$i \in [1, n]$，令f_i为E_i到${E'}_i$的双射，如果$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U) = U'$，则称$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为具有结构$U$的集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$到具有结构$U'$的集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$的同构，在没有歧义的情况下也可以称$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$到集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$的同构、或称$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为结构$U$到结构$U'$的同构，或称$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为同构，或者称具有结构$U$的集合$E_1$、$E_2$、$\cdots$、$E_n$同构于具有结构$U'$的集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$．

补充结构规则 4. 逆同构的存在

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m．S为X的代表特征中的在$n+m$个项上的阶梯构造模式，R为X的公理．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，U'为X在主要基集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$上的结构．对任意$i \in [1, n]$，令f_i为E_i到${E'}_i$的双射，如果$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U) = U'$，则$\langle {f_1}^{-1}, {f_2}^{-1}, \cdots, {f_n}^{-1}, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U') = U$．

证明：根据补充结构规则3可证．

结构定义 16. 结构的逆同构（*isomorphisme réciproques de structures*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m．S为X的代表特征中的在$n+m$个项上的阶梯构造模式，R为X的公理．令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，U'为X在主要基集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$上的结构．对任意$i \in [1, n]$，令f_i为E_i到

${E'}_i$的双射，如果$\langle f_1,f_2,\cdots,f_n,Id_{A_1},Id_{A_2},\cdots,Id_{A_m}\rangle^S(U)=U'$，则称$({f_1}^{-1},{f_2}^{-1},\cdots,{f_n}^{-1})$为$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$的逆同构.

补充结构规则 5.

$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$为同构，如果$({f_1}^{-1},{f_2}^{-1},\cdots,{f_n}^{-1})$为$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$的逆同构，则$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$为$({f_1}^{-1},{f_2}^{-1},\cdots,{f_n}^{-1})$的逆同构.

证明：根据定义可证.

补充结构规则 6.

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m. S为X的代表特征中的在$n+m$个项上的阶梯构造模式，R为X的公理. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构. 则$(Id_{E_1},Id_{E_2},\cdots,Id_{E_n})$为结构$U$到结构$U$的同构.

证明：根据补充结构规则1可证.

结构规则 4. 同构的复合为同构

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，U、U'、U''分别为结构种类X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上、在主要基集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$
上、在主要基集合${E''}_1$、${E''}_2$、$\cdots$、${E''}_n$上的结构，对任意$i\in[1,n]$，f_i为E_i到${E'}_i$的双射，g_i为${E'}_i$到${E''}_i$的双射，如果$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$、$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$均为同构，则$(g_1\circ f_1,g_2\circ f_2,\cdots,g_n\circ f_n)$为同构.

证明：根据结构规则1可证.

结构定义 17. 同构的复合（*composée de deux isomorphismes*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，U、U'、U''分别为结构种类X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上、在主要基集合${E'}_1$、${E'}_2$、$\cdots$、${E'}_n$上、在主要基集合${E''}_1$、${E''}_2$、$\cdots$、${E''}_n$上的结构，对任意$i\in[1,n]$，f_i为E_i到${E'}_i$的双射，g_i为${E'}_i$到${E''}_i$的双射，如果$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$、$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$均为同构，则称$(g_1\circ f_1,g_2\circ f_2,\cdots,g_n\circ f_n)$为$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$和$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$的复合.

结构定义 18. 自同构（*automorphisme*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，具有X的结构U的集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n到具有X的结构U的集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n的同构，称为自同构.

补充结构规则 7.

自同构的复合是自同构. 自同构的逆同构是自同构.

证明：根据定义可证.

结构规则 5. 通过转换可以得到结构

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，对任意$i \in [1,n]$，f_i为E_i到E'_i的双射，则在理论M'中存在X在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的结构U'，使$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$为集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n到集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n的同构.

证明：令$U' = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U)$，由于$R$是可转换的，因此，$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(U|s)R \Leftrightarrow (E'_1|x_1)(E'_2|x_2)\cdots(E'_n|x_n)(U'|s)R$，得证.

结构定义 19. 通过转换得到的结构（*structure obtenue en transportant*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，对任意$i \in [1,n]$，f_i为E_i到E'_i的双射，令$U' = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(U)$，则称$U'$为$U$通过映射$f_1$、$f_2$、$\cdots$、$f_n$的转换在$E'_1$、$E'_2$、$\cdots$、$E'_n$上得到的结构.

结构定义 20. 统一的结构种类（*espèce de structure univalente*）

如果结构种类的任何两个结构都存在同构，则称该结构种类为统一的.

结构定义 21. 固有项（*terme intrinsèque*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，通用结构为常数s. S是在$n+m$个项上的阶梯构造模式. 如果项V满足下列条件，则称V对于常数s是固有的：

第一，V包含的字母都是理论M_X的常数；

第二，$V \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$是理论$M_X$的定理；

第三，令M'_X为理论M_X添加公理"f_i是x_i到y_i的双射"（$i \in [1,n]$）得到的理论，并且所有的字母f_i、y_i都不是理论M_X的常量且互不相同，s'为s通过映射f_1、f_2、$\cdots$、f_n的转换在y_1、y_2、$\cdots$、y_n上得到的结构，并且$(y_1|x_1)(y_2|x_2)\cdots(y_n|x_n)(s'|s)V = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^S(V)$是理论$M'_X$的定理.

结构定义 22. 演绎过程（*procédé de déduction*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征是$s \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$；$Y$也是理论$M$的结构种类，其主要基集合为$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_r$，辅助基集合为$B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_p$，其代表特征是$t \in T(y_1, y_2, \cdots, y_r, B_1, B_2, \cdots, B_p)$，其公理不包含字母$x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$、$s$.

如果在理论M_X中P为Y在主要基集合U_1、U_2、$\cdots$、U_r上的结构，且P、U_1、U_2、$\cdots$、U_r对于常数s是固有的，则称P、U_1、U_2、$\cdots$、U_r为从X的结构到Y的结构的演绎过程，在没有歧义的情况下，也可以称P为从X的结构到Y的结构的演绎过程，或者称P为演绎过程.

补充结构规则 8. 从过程中演绎得到结构

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征是$s \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$；$Y$也是理论$M$的结构种类，其主要基集合为$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_r$，辅助基集合为$B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_p$，其代表特征是$t \in T(y_1, y_2, \cdots, y_r, B_1, B_2, \cdots, B_p)$，其公理不包含字母$x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$、$s$.

如果在理论M_X中P为Y在主要基集合U_1、U_2、$\cdots$、U_r上的结构，令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，则$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K|s)P$为$Y$在主要基集合$U'_1$、$U'_2$、$\cdots$、$U'_r$上的结构，其中，对任意$j \in [1, r]$，$U'_j$为$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K|s)U_j$.

证明：根据替代规则2可证.

结构定义 23. 从过程中演绎（*déduite par le procédé*），从属于结构（*subordonnée à le structure*）

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征是$s \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$；$Y$也是理论$M$的结构种类，其主要基集合为$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_r$，辅助基集合为$B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_p$，其代表特征是$t \in T(y_1, y_2, \cdots, y_r, B_1, B_2, \cdots, B_p)$，其公理不包含字母$x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$、$s$.

如果P、U_1、U_2、$\cdots$、U_r为从X的结构到Y的结构的演绎过程，令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，则结构$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K|s)P$称为$K$从过程$P$演绎所得，或称其从属于$K$.

结构规则 6.

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合为A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征是$s \in S(x_1, x_2, \cdots, x_n, A_1, A_2, \cdots, A_m)$；$Y$也是理论$M$的结构种类，其主要基集合为$y_1$、$y_2$、$\cdots$、$y_r$，辅助基集合为$B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_p$，其代表特征是$t \in T(y_1, y_2, \cdots, y_r, B_1, B_2, \cdots, B_p)$，其公理不包含字母$x_1$、$x_2$、$\cdots$、$x_n$、$s$.

P、U_1、U_2、$\cdots$、U_r为从X的结构到Y的结构的演绎过程，其中，对任意$j \in [1, r]$，和U_j相关的阶梯构造模式为$\mathcal{P}(T_j)$. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(g_1, g_2, \cdots, g_n)$为具有结构K的集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n到具有结构K'的集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n的同构. 对任意$j \in [1, r]$，令$h_j = \langle g_1, g_2, \cdots, g_n, Id_{A_1}, Id_{A_2}, \cdots, Id_{A_m}\rangle^{T_j}$，$F_j = (E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K'|s)U_j$，$F'_j = (E'_1|x_1)(E'_2|x_2)\cdots(E'_n|x_n)(K'|s)U_j$，令$Q$、$Q'$分别从属于结构$K$、$K'$，则$(h_1, h_2, \cdots, h_r)$为具有结构$(E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K'|s)P$的集合$F_1$、$F_2$、$\cdots$、$F_r$到具有结构$(E'_1|x_1)(E'_2|x_2)\cdots(E'_n|x_n)(K'|s)P$的集合$F'_1$、$F'_2$、$\cdots$、$F'_r$的同构.

证明：根据结构规则2，h_i为双射，$\langle h_1, h_2, \cdots, h_r, Id_{B_1}, Id_{B_2}, \cdots, Id_{B_p}\rangle^T$也是双射. 由于$U_i$对于常数$s$是固有的，故$h_i\langle F_i\rangle = F'_i$. 由于$P$对于常数$s$是固有的，故$(E'_1|x_1)(E'_2|x_2)\cdots(E'_n|x_n)(K'|s)P = \langle h_1, h_2, \cdots, h_r, Id_{B_1}, Id_{B_2}, \cdots, Id_{B_p} >^T ((E_1|x_1)(E_2|x_2)\cdots(E_n|x_n)(K'|s)P)$，得证.

结构定义 24. 等价的结构种类（*espèce de structure équivalente*）

令M为比集合论强的理论，X、Y是理论M的结构种类，其主要基集合均为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，通用结构分别为s、t．令P为从X的结构到Y的结构的演绎过程，Q为从Y的结构到X的结构的演绎过程，在理论M_X中，$(P|s)Q = t$是定理，在理论M_Y中，$(Q|t)P = s$是定理，则称结构种类X和Y通过演绎过程P和Q等价．

结构规则 7.

令M为比集合论强的理论，X是理论M的结构种类，其主要基集合为x_1、x_2、$\cdots$、x_n，K为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，K'为X在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的结构．K_0、K'_0均为结构种类Y的结构，并且分别和K、K'等价，则当且仅当$(g_1, g_2, \cdots, g_n)$为K到K'的同构时，$(g_1, g_2, \cdots, g_n)$为K_0到K'_0的同构．

证明：根据结构规则6可证．

习题 198.

令S为符号P、X、x_1、x_2、$\cdots$、x_n组成的集合，P的权重为1，X的权重为2，其他符号的权重为0．如果$L_0(S)$的单词T是平衡单词，则称T为在x_1、x_2、$\cdots$、x_n上的阶梯类．令M为比集合论强的理论，E_1、E_2、$\cdots$、E_n为M的项，定义$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$如下：

第一，如果T为字母x_i，则$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$为集合E_i；

第二，如果T为PU的形式，则$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$为集合$\mathcal{P}(U(E_1, E_2, \cdots, E_n))$；

第三，如果T为XUV的形式，则$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$为集合$U(E_1, E_2, \cdots, E_n) \times V(E_1, E_2, \cdots, E_n)$．

求证：对任意在x_1、x_2、$\cdots$、x_n上的阶梯类T，$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$是在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的阶梯，反之，任何在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的阶梯，都可以用唯一的方法表示为$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$．此时，称$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$为阶梯类T在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的实现．进而，试用在x_1、x_2、$\cdots$、x_n上的阶梯类T表示映射的规范扩展，并证明，对于在n个项上的阶梯构造模式S和S'，如果$S(x_1, x_2, \cdots, x_n) = S'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^S = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^{S'}$．

证明：

用数学归纳法可证$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$和阶梯可相互表达并具有唯一性；

映射的规范扩展定义为：

第一，T为字母x_i，则相应的映射为f_i；

第二，T为PU的形式，则相应的映射为U相应的映射在子集上的规范扩展；

第三，T为XUV的形式，则相应的映射为U和V相应的映射在乘积集合上的规范扩展．

用数学归纳法可以证明映射的规范扩展用$T(E_1, E_2, \cdots, E_n)$表达的唯一性．故如果$S(x_1, x_2, \cdots, x_n) = S'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则$\langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^S = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^{S'}$．

4.2 态射和派生结构（Morphismes et structures dérivées）

结构定义 25. 态射集合（*ensemble des morphismes*），态射（*morphisme*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类．σ为项，字母x、y、s、t互不相同，且都不是X的代表特征和公理包含的字母．

在理论M中，如果项σ满足下列条件，则称σ为X的态射集合：

第一，在理论M中，$((s$是X在主要基集合x上的结构$)$与$(t$是X在主要基集合y上的结构$))$ $\Rightarrow (\sigma \subset \mathcal{F}(x;y))$；

第二，令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'、E''在理论M'中分别具有X的结构K、K'、K''，E、E'、E''、K、K'、K''都不含字母s、t、x、y，则$(f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)$ $(E|x)\sigma$与$g \in (K''|t)(K'|s)(E''|y)(E'|x)\sigma) \Rightarrow g \circ f \in (K''|t)(K|s)(E''|y)(E|x)\sigma$；

第三，令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'在理论M'中分别具有X的结构K、K'，E、E'、K、K'都不含字母s、t、x、y，f为E到E'的双射，则$((f)$为同构$) \Leftrightarrow (f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$与$f^{-1} \in (K|t)(K'|s)(E|y)(E'|x)\sigma)$．

此时，令M'为比M强的理论，在理论M'中，对具有结构K的集合E、具有结构K'的集合E'，对任意$f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$，称$f$为具有$K$的$E$到具有$K'$的$E'$的态射，在没有歧义的情况下，可以简称$f$为$E$到$E'$的$\sigma$态射，或$f$为$E$到$E'$的态射，或$f$为$\sigma$态射：

注：原书主要研究仅有一个基集合的结构种类的态射问题．对于多个基集合的结构种类的态射，也可用类似的方法下定义．

补充结构规则 9. 恒等映射为态射

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，E具有X的结构，则Id_E是σ态射．

证明：根据根据补充结构规则6，(f)为同构，根据定义可证．

结构定义 26. 满态射（*morphisme surjectif*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'分别具有X的结构U、U'，f为E到E'的σ态射．如果$\langle f\rangle^S(U) = U'$，则称$f$为满态射．

结构规则 8.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'为具有X的结构的集合，f为E到E'的σ态射，g为E'到E的σ态射，如果$g \circ f = Id_E$，$f \circ g = Id_{E'}$，则(f)为E到E'的同构，(g)为(f)的逆同构．

证明：根据定理20可证．

结构定义 27. 更细的结构（*structure plus fine*），更粗的结构（*structure plus fine*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，K_1、K_2为X在集合E上的结构，如果具有K_1的E到具有K_2的E的恒等映射是σ态射，则称K_1是比K_2更细的结构，或称K_2是比K_1更粗的结构．

注：在原书中，“更细”这个概念包括与自身相等的情况，即一个结构比自身更细．

补充结构规则 10.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，则在理论M'中，(K_1为X在集合E上的结构)与(K_2为X在集合E上的结构)与(K_1比K_2更细)是在X在E上的结构集合上的偏序关系．

证明：根据定义可证．

结构定义 28. 起始结构（*structure initiale*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合，并且，对任意$i\in I$，K_i为X在A_i上的结构，f_i为E到A_i的映射．对于X在E上的结构F，如果对任意集合E'、X在E'上的结构F'、E'到E的映射g，均有(g为E'到E的σ态射) $\Leftrightarrow$ $(\forall i)(i\in I\Rightarrow f_i\circ g$为$E'$到$A_i$的$\sigma$态射)，则称$F$为关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构．

补充结构规则 11.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合，并且，对任意$i\in I$，K_i为X在A_i上的结构，f_i为E到A_i的映射，关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构为F，则对任意$i\in I$，f_i为具有F的E到具有K_i的A_i的σ态射．

证明：根据补充结构规则9，Id_E为σ态射，根据定义可证．

结构规则 9.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，对于集合E，如果存在X在E上的结构F，为关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构，那么，对任意X在E上的结构F'，如果对任意$i\in I$，f_i为具有F'的E到具有K_i的A_i的σ态射，则F比F'更粗，进而，F是唯一的．

证明：根据定义，对于结构F，对任意$i\in I$，f_i均为σ态射．同时，具有结构F的E的恒等映射Id_E是σ态射，根据定义，$f_i\circ Id_E$为具有F的E到具有F'的E的σ态射，因此，F比F'更粗．进而，根据定义，F是唯一的．

结构规则 10.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(Ai)_{i\in I}$为集族，E为集合，并且，对任意$i\in I$，K_i为X在A_i上的结构．$(J_l)_{l\in L}$是I的划分，$(B_l)_{l\in L}$是集族．对任意$l\in L$，h_l为E到B_l的映射；对任意$l\in L$和$i\in J_l$，g_{li}为B_l到A_i的映射，并且$f_i=g_{li}\circ h_l$．如果，对任意$l\in L$，存在X在B_l上的结构K'_l，为关于三元组族$(A_i,K_i,g_{li})_{i\in J_l}$的起始结构，则下列两个命题等价：

第一，存在X在E上、关于$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构U；

第二，存在X在E上，关于$(B_l,K'_l,h_l)_{l\in L}$的起始结构U'．

并且，$U=U'$．

证明：令F为具有结构的集合，v为F到E的映射，根据定义，$(h_l\circ v$为F到B_l的σ态射$)\Leftrightarrow(\forall i)(i\in J_l\Rightarrow g_{li}\circ hl\circ v$为$F$到$A_i$的$\sigma$态射$)$，后者即$(\forall i)(i\in J_l\Rightarrow f_i\circ v$为$F$到$A_i$的$\sigma$态射$)$．故$(\forall l)(l\in L\Rightarrow hl\circ v$为$F$到$B_l$的$\sigma$态射$)\Leftrightarrow(\forall i)(i\in I\Rightarrow fi\circ v$为$F$到$A_i$的$\sigma$态射$)$．

因此，两个命题等价，同时，$(v$是F到具有结构U'的E的态射$)\Leftrightarrow(v$是F到具有结构U的E的态射$)$，根据结构规则9，U、U'都是唯一的，得证．

结构定义 29. 结构的原像（*image réciproque d'une structure*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，关于$(A,K,f)_{i\in\{i\}}$的起始结构，称为结构K在f下的原像．

结构定义 30. 导出的结构（*structure induite*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在A上的结构，$B\subset A$，j为B到A的规范映射，如果结构K在j下的原像存在，则称其为结构K在B上导出的结构．

结构定义 31. 可采子集（*partie permise*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在A上的结构，$B\subset A$，如果K在B上导出的结构存在，则称B为A的可采子集．

结构规则 11.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$B\subset A$，$C\subset B$，K为X在A上的结构，K'为K在B上导出的结构，则当且仅当K'在C上导出的结构存在时，K在C上导出的结构存在，并且二者相等．

证明：根据结构规则10可证．

结构规则 12.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，K为X在A上的结构，K'为X在A'上的结构，$B\subset A$，$B'\subset A'$．K在B上导出的结构J存在，

K'在B'上的导出的结构J'存在．令F为A到A'的σ态射，且$f\langle B\rangle \subset B'$，令$g = f|B$，则$g$是具有结构$J$的$B$到具有结构$J'$的$B'$的$\sigma$态射．

证明：令B到A的规范映射为j，B'到A'的规范映射为j'，因此$f \circ j = j' \circ g$，由于f、j为σ态射，因此$j' \circ g$为σ态射，根据定义，g为σ态射．

结构定义 32. 乘积结构（*structure produit*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i \in I$，K_i为X在A_i上的结构．$E = \prod\limits_{i\in I} A_i$，$pr_i$为指标$i$的射影函数，则称关于$(A_i, K_i, pr_i)_{i\in I}$的起始结构为结构族$(K_i)_{i\in I}$的乘积结构．

结构定义 33. 两个结构的乘积结构（*structure produit deux stuctures*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，A、B为集合，K_A、K_B分别为X在A_i上的结构．令$E = A\times B$，如果X在E上的结构K满足下列条件，则称K为K_A和K_B的乘积结构：对任意集合E'，令F'为X在E'上的结构，g为E'到E的映射，则(g为E'到E的σ态射) $\Leftrightarrow$ (($pr_1 \circ g$为E'到A的σ态射)与($pr_2 \circ g$为E'到B的σ态射))．

结构规则 13.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的结构．$(J_l)_{l\in L}$是I的划分．对于$l \in L$，令$B_l = \prod\limits_{i\in J_l} A_i$ ，并且$(K_i)_{i\in J_l}$的乘积结构K'_l存在，K'为$(K'_l)_{l\in L}$的乘积结构，则当且仅当$(K'_l)_{l\in L}$的乘积结构K'存在，并且$\prod\limits_{i\in I} A_i$到$\prod\limits_{l\in L} B_l$的规范映射为同构时，$(K_i)_{i\in I}$的乘积结构$K$存在．

证明：根据结构规则10可证．

结构规则 14.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i \in I$，令K_i为X在A_i上的结构，$B_i \subset A_i$，K_i在B_i上导出的结构为K'_i．$(K_i)_{i\in I}$的乘积结构K_0存在，则下列两个命题等价：

第一，存在K_0在$\prod\limits_{i\in I} B_i$上导出的结构$K$；

第二，存在$(K'_i)_{i\in I}$的乘积结构K'．

并且，$K = K'$．

证明：令j_i为B_i到A_i的规范映射，j为$\prod\limits_{i\in I} B_i$到$\prod\limits_{i\in I} A_i$的规范映射，令$p_i$为$\prod\limits_{i\in I} A_i$的指标$i$的射影函数，$p'_i$为$\prod\limits_{i\in I} B_i$的指标$i$的射影函数，则$p_i \circ j = j_i \circ p'_i$．根据结构规则10，$(A_i, K_i, j_i \circ p'_i)$的起始结构为$K'$，$(A_i, K_i, p_i \circ j)$的起始结构为$K$，得证．

结构规则 15.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i\in I$，令K_i为X在A_i上的结构，f_i为E到A_i的映射，K为$(K_i)_{i\in I}$的乘积结构．则当且仅当结构K在E到A的映射$x\to(f_i(x))_{i\in I}$下存在原像时，存在关于$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的起始结构．并且，两个结构相等．

证明：令E到A的映射$x\to(f_i(x))_{i\in I}$为f，则$f_i=pr_i\circ f$，根据结构规则10可证．

结构规则 16.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$、$(B_i)_{i\in I}$为集族，并且，对任意$i\in I$，令K_i为X在A_i上的结构，K'_i为X在B_i上的结构，$(K_i)_{i\in I}$、$(K'_i)_{i\in I}$的乘积结构存在，对任意$i\in I$，f_i为A_i到B_i的σ态射，则$(f_i)_{i\in I}$为A到B的σ态射．

证明：令$f=(f_i)_{i\in I}$，p_i为$(A_i)_{i\in I}$的指标i的射影函数，q_i为$(B_i)_{i\in I}$的指标i的射影函数，则$q_i\circ f=f_i\circ p_i$，根据补充结构规则11，p_i为σ态射，故$q_i\circ f$为σ态射，因此f为σ态射．

结构规则 17.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、B分别具有结构K_A、K_B，K_A和K_B的乘积结构为K．令f为A到B的映射，$F\subset A\times B$，p为A到F的双射$x\to(x,f(x))$，则当且仅当K在F上导出的结构K'存在，且p为A到具有K'的F的同构时，f为A到B的σ态射．

证明：

充分性：令j为F到$A\times B$的规范映射，则$f=pr_2\circ j\circ p$，因此f是σ态射．

必要性：令K_F是K_A通过p的转换在F上得到的结构，j为F到$A\times B$的规范映射．根据定义，$j\circ p$为σ态射，由于p^{-1}为同构，故j为σ态射．令E为集合，g为E到F的映射，且$j\circ g$为σ态射，故$pr_1\circ j\circ g$为σ态射，即$p^{-1}\circ g$为σ态射，故g为σ态射．综上，K_F是K在F上导出的结构，且p为A到具有K_F的F的同构，得证．

结构定义 34. 最终结构（*structure finale*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合，并且，对任意$i\in I$，令K_i为X在A_i上的结构，f_i为A_i到E的映射．对于X在E上的结构F，如果对任意集合E'，X在E'上的结构F'，E到E'的映射g，均有(g为E到E'的σ态射) $\Leftrightarrow$ $(\forall i)(i\in I\Rightarrow g\circ f_i$为$A_i$到$E'$的$\sigma$态射)，则称$F$为关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的最终结构．

补充结构规则 12.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合；对任意$i\in I$，令K_i为X在A_i上的

结构，f_i为A_i到E的映射．如果关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的最终结构为F，则对任意$i\in I$，f_i为具有K_i的A_i到具有F的E的σ态射．

证明：类似补充结构规则11可证．

结构规则 18.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，对于集合E，如果存在X在E上的结构F，为关于三元组族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的最终结构，那么，对任意X在E上的结构F'，如果对任意$i\in I$，f_i为具有K_i的A_i到具有F'的E的σ态射，则F比F'更细，进而，F是唯一的．

证明：类似结构规则论10可证．

结构规则 19.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，令M'为比M强的理论，在理论M'中，$(A_i)_{i\in I}$为集族，E为集合，同时，对任意$i\in I$，令K_i为X在A_i上的结构．$(J_l)_{l\in L}$是I的划分，$(B_l)_{l\in L}$是集族．对任意$l\in L$，h_l为B_l到E的映射；对任意$l\in L$和$i\in J_l$，g_{li}为A_i到B_l的映射，并且$f_i=h_l\circ g_{li}$．如果，对任意$l\in L$，存在X在B_l上的结构${K'}_l$，为关于三元组族$(A_i,K_i,g_{li})_{i\in J_l}$的最终结构，则下列两个命题等价：

第一，存在X在E上、关于$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的最终结构U；

第二，存在X在E上，关于$(B_l,{K'}_l,h_l)_{l\in L}$的最终结构$U'$．

并且，$U=U'$．

证明：类似结构规则论11可证．

结构定义 35. 结构的直像（*image direct d'une structure*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，关于$(A,K,f)_{i\in\{i\}}$的最终结构，称为结构K在f下的直像．

结构定义 36. 商结构（*structure quotient*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，K为X在A上的结构，R为在A上的等价关系，f为A到A/R的规范映射，如果结构K在f下的直像存在，则称其为结构K对于等价关系R的商结构．

补充结构规则 13.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、B分别具有X的结构K、K'．f为A到B的σ态射，R为等价关系$f(x)=f(y)$，h为A到A/R的规范映射，j为$f\langle A\rangle$到B的规范映射．设K对于R的商结构为K_0，K'在$f\langle A\rangle$上导出的结构为${K'}_0$，令f的规范分解为$j\circ g\circ h$，其中g为A/R到$f\langle A\rangle$的双射，则g为具有K_0的A/R到具有${K'}_0$的$f\langle A\rangle$的σ态射．

证明：根据定义，$j\circ g$为A/R到B的σ态射，因此，g为σ态射.

结构规则 20.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、A'分别具有X的结构K、K'．R为在A上的等价关系，R'为A'上的等价关系．K对于R的商结构为K_0，K'对于R'的商结构为K'_0．如果f是A到A'的σ态射，并且是同等价关系R和R'相容的映射，g为f对于R和R'通过商导出的映射，则g为A/R到A'/R'的σ态射.

证明：令h为A到A/R的规范映射，h'为A'到A'/R'的规范映射，故$g\circ h=h'\circ f$，由于h'、f为σ态射，故$g\circ h$为σ态射，根据定义，g为σ态射.

结构规则 21.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合．令M'为比M强的理论，在理论M'中，A为集合，K为X在A上的结构．R、S为在A上的等价关系，S比R更细，K对于R的商结构为K'，当且仅当K对于S的商结构K_0存在，并且，具有K_0的A/S到具有K''的$(A/R)/(S/R)$的规范映射为同构时，K'对于S/R的商结构K''存在.

证明：令j为A到A/R的规范映射，k为A/R到$(A/R)/(S/R)$的规范映射．根据结构规则19，K''为K'对于S/R的商结构，等价于K''为$(A,K,k\circ j)_{i\in\{i\}}$的最终结构.

如果K_0存在，且A/S到 $(A/R)/(S/R)$的规范映射为同构，根据定义，K''为$(A,K,k\circ j)_{i\in\{i\}}$的最终结构．反过来，如果$K''$为$(A,K,k\circ j)_{i\in\{i\}}$的最终结构，令$g$为$A/S$到$(A/R)/(S/R)$的规范映射，则$K_0=g^{-1}(K'')$，则$g$为同构，并且，根据定义，$K_0$为$K$对于$S$的商结构，得证.

习题 199.

令S为符号P、P^-、X、X^-、x_1、x_2、$\cdots$、x_n组成的集合，P和P^-的权重为1，X和X^-的权重为2，其他符号的权重为0.

对于$L_0(S)$的单词A，按下列方式定义A的变异数：

令任意字母x_i、P、X的变异数为0，P^-、X^-的变异数为*1*;

如果A的符号有偶数个变异数为1的符号，则A的变异数为0，否则A的变异数为*1*.

满足下列条件之一的平衡单词A，称为有符号阶梯类：

第一，A为符号x_i;

第二，A为$fA_1A_2\cdots A_p$的形式，其中$p=1$或者$p=2$，A_i（$i\in[1,p]$）均为平衡单词且为符号阶梯类，同时，如果$f=X$，则A_1、A_2的变异数均为0，如果$f=X^-$，则A_1、A_2的变异数均为1.

符号阶梯类的变异数为0的，称为协变的，变异数为1的，称为逆变的.

将有符号阶梯类中的所有P^-替换为P，X^-替换为X，得到平衡单词A^*，A^*在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的实现，称为有符号阶梯类A在E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的实现，记作$A(E_1, E_2, \cdots, E_n)$.

令E_1、E_2、$\cdots$、E_n、E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n为集合，对于$i \in [1, n]$，f_i为E_i到E'_i的映射，求证：

对任意有符号阶梯类S，按照下列规则，任何$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$都是某个确定的映射：

第一，如果S是协变的，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$S(E_1, E_2, \cdots, E_n)$到$S(E'_1, E'_2, \cdots, E'_n)$的映射，如果$S$是逆变的，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$S(E'_1, E'_2, \cdots, E'_n)$到$S(E_1, E_2, \cdots, E_n)$的映射；

第二，如果S是x_i，$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$f_i$；

第三，如果S是PT（或P^-T）的形式，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^T$在子集上的规范扩展（或在子集上的逆扩展）；

第四，如果S是XUV或X^-UV的形式，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$是$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^U$和$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^V$在乘积集合上的规范扩展.

$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$称为$f_1$、$f_2$、$\cdots$、$f_n$和有符号阶梯类$S$对应的规范扩展．对于$i \in [1, n]$，$f_i$为$E_i$到$E'_i$的映射，$f'_i$为$E'_i$到$E''_i$的映射，那么：

如果S是协变的，则$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S \circ \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$.

如果S是逆变的，则$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S \circ \{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$.

并且，如果对任意$i \in [1, n]$，f_i为双射，f'_i为其反函数，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$和$\{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$均为双射且互为反函数.

同时，令S^*为将S中的所有P^-替换为P，X^-替换为X得到的阶梯类，则如果S是协变的，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle^{S^*}$，如果$S$是逆变的，则$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S = \langle f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\rangle^{S^*}$.

证明：

用数学归纳法可证任何$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$都是某个确定的映射.

类似结构规则1可以证明：

如果S是协变的，则$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S \circ \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$.

如果S是逆变的，则$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S \circ \{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$.

类似结构规则2可以证明$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$和$\{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$均为双射.

并且，用数学归纳法可证$\{f'_1 \circ f1, f'_2 \circ f2, \cdots, f'_n \circ f_n\}^S$是恒等对应，故$\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^S$和$\{f'_1, f'_2, \cdots, f'_n\}^S$互为反函数.

根据补充定理78、补充定理88及数学归纳法可以证明：

如果S是协变的，则$\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}^S=\langle f_1,f_2,\cdots,f_n\rangle^{S^*}$，如果$S$是逆变的，则$\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}^S=\langle f'_1,f'_2,\cdots,f'_n\rangle^{S^*}$.

习题 200.

令M为比集合论强的理论，S是在$n+m$个字母上的有符号阶梯类，X是结构种类，其主要基集合是x_1、x_2、$\cdots$、x_n，辅助基集合是A_1、A_2、$\cdots$、A_m，其代表特征为$s\in\mathcal{P}(S(x_1,$
$x_2,\cdots,x_n,A_1,A_2,\cdots,$
$A_n))$.

令M'为比M强的理论，在理论M'中，U为X在主要基集合E_1、E_2、$\cdots$、E_n上的结构，U'为X在主要基集合E'_1、E'_2、$\cdots$、E'_n上的结构，对于$i\in[1,n]$，f_i为E_i到E'_i的映射.

求证：按照下列条件定义的$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$是态射：

第一，如果S是协变的，则$\langle f_1,f_2,\cdots,f_n,Id_{A_1},Id_{A_2},\cdots,Id_{A_m}\rangle^S(U)\subset U'$；第二，如果$S$是逆变的，则$\langle f_1,f_2,\cdots,f_n,Id_{A_1},Id_{A_2},\cdots,Id_{A_m}\rangle^S(U')\subset U$.

并且，可以通过适当的选择，定义偏序结构、代数结构和拓扑结构的态射.

证明：

根据定义可证$(f_1,f_2,\cdots,f_n)$的集合符合态射集合的三个条件.

对于偏序结构，单增映射为态射；对于代数结构，令A、A'上的合成运算分别为p、p'，如果$p'(f(x),f(y))=f(p(x,y))$，则f为态射；对于拓扑结构，令A、A'上的拓扑分别为V、V'，如果$X'\in V'\Rightarrow f^{-1}(X')\in V$，则$f$为态射.

习题 201.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、B、C都具有结构种类X的结构，A到B映射f是满态射，B到C的映射g是态射，$g\circ f$是同构，求证：f、g都是同构.

证明：类似定理21（3）、定理21（4）、定理21（6）可证.

习题 202.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A、B、C、D都具有结构种类X的结构，A到B映射f、B到C的映射g、C到D的映射h都是态射，$g\circ f$、$h\circ g$都是同构，求证：f、g、h都是同构.

证明：类似习题51可证.

习题 203.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，集合A具有结构种类X的结构U，集合B具有结构种类X的结构U'，f为A到B的态射，g为B到A的态射，令$M=\{x|x\in A与g(f(x))=x\}$，$N=\{y|y\in B与f(g(y))=y\}$，M具有U在M上导出的结构，N具有U'在N上导出的结构，求证：M同构于N.

证明：类似习题84可证.

习题 204.

结构种类X的主要基集合为A，辅助基集合为k，代表特征为$s \in (\mathcal{P}(A\times A\times A)\times\mathcal{P}(A\times A\times A)\times\mathcal{P}(k\times A\times A))\times\mathcal{P}(A)$．公理为：$(pr_1 s$为有单位元的$k$代数结构$)$与$(pr_2 s$为不可约理想$)$．集合$A$、$A'$分别具有结构种类$X$的结构$(F, H)$、$(F', H')$，如果$f$是$A$到$A'$的$\sigma$态射，并且，其将单位元映射为单位元，同时$f(H)\subset H'$，则称$f$为$k$代数同态．在$A$上的$X$的结构的集合，按$(K_1$为$X$在集合$E$上的结构$)$与$(K_1$为$X$在集合$E$上的结构$)$与$(K_1$比$K_2$更细$)$排序．

试给出X在A上的结构族(S_i)，使(S_i)的最小上界存在，但不是(A_i, S_i, Id_i)的起始结构，其中A_i是具有结构S_i的集合A，Id_i是A到A_i的规范映射．

同时，试给出X在A上的结构族(S_i)，使(S_i)的最大下界存在，但不是(A_i, S_i, Id_i)的最终结构，其中A_i是具有结构S_i的集合A，Id_i是A_i到A的规范映射．

答：对于前半段，考虑多项式环$A = k[T]$，则A的不可约理想是极大理想的幂．令F为k代数结构，p、q为A的不同极大理想．考虑X在A上的结构$A_p = (F, p)$、$A_q = (F, q)$，其最小上界是$(F, (0))$．令$B = p\cap q$，考虑B到A的映射$f = (x \to x)$，其不是同态，但$f\circ Id_p$、$f\circ Id_q$是同态，故$(F, (0))$不是起始结构．对于后半段，A的对偶空间和结构A_p、A_q的转置，符合题目条件．

注：习题204涉及尚未介绍的“代数结构”知识．

习题 205.

结构种类X的主要基集合为A，辅助基集合为实数集R，代表特征为$s \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))\times\mathcal{P}(R\times A)$．公理为：$(\forall V')((V'\subset pr_1 s)\Rightarrow ((\bigcup\limits_{X\in V'} X)\in pr_1 s))$与$(A\in pr_1 s)$与$(\forall X)(\forall Y)((X\in pr_1 s$与$Y\in pr_1 s)\Rightarrow (X\bigcap\limits_{Y}\in pr_1 s))$与$($存在实数$a>0$，使$pr_2 s$为区间$[0, a]$到$A$对拓扑$pr_1 s$的连续单射的函数图$)$．集合$A$、$A'$分别具有结构种类$X$的结构$(V, f)$、$(V', f')$，定义$A$到$A'$的$\sigma$态射为：$g$为对$V$、$V'$的连续映射，并且$g$的函数图$F$满足$F\circ f\subset f'$，则称$g$为$\sigma$态射．

求证：该态射可以通过习题*199*的方式来定义；并且，对具有任意X的结构的集合A_1、A_2，存在在$A_1\times A_2$上的乘积结构．

同时，试给出一个例子，在$A_1\times A_2$上的乘积结构在pr_1下的直像所具有的结构，不是在A_1上原本的结构．

证明：

根据定义可证该态射可以通过习题199的方式来定义．

令A_1具有结构(V_1, f_1)，f_1的定义域为$[0, a_1]$，A_2具有结构(V_2, f_2)，f_2的定义域为$[0, a_2]$，则结构$(V_1\times V_2, f)$为其乘积结构，其中f为$x\to (f_1(x), f_2(x))(x\in[0, a_1]\cap[0, a_2])$．

如果$a_1 > a_2$，则直像的第二射影，是f_1在$[0, a_2]$上的限制．

注：习题205涉及尚未介绍的“拓扑”知识．

习题 206.

结构种类X的主要基集合为A，代表特征为$s \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times A \times A$，公理为：$(\forall V')((V' \subset pr_1 pr_1 s) \Rightarrow ((\bigcup_X \in V'X) \in pr_1 pr_1 s))$与$(A \in pr_1 pr_1 s)$与$(\forall X)(\forall Y)((X \in pr_1 pr_1 s$与$Y \in pr_1 pr_1 s) \Rightarrow (X \bigcap_Y \in pr_1 pr_1 s))$与$prr2pr_1 s \neq pr_2 s$．集合$A$、$A'$分别具有结构种类$X$的结构$(V, a, b)$、$(V', a', b')$，定义$A$到$A'$的$\sigma$态射为：$f$为对$V$、$V'$的连续映射，并且$f(a) = a'$，$f(b) = b'$，则称$f$为$\sigma$态射．

求证：该态射可以通过习题*199*的方式来定义；并且，对分别具有任意X的结构F、F'的集合A、B，存在在$A \times B$上的乘积结构，并且，该乘积结构在pr_1（或pr_2）下的直像所具有的结构，为A（或B）．同时，同时，试给出pr_1的截面不存在，但存在A到$A \times B$的σ态射的例子．

证明：

根据定义可证该态射可以通过习题199的方式来定义．

令A的结构为(V, a, b)，B的结构为(V', a', b')，则$(V \times V', (a, a'), (b, b'))$为其乘积结构．

令A为联通空间，B为离散空间．则pr_1的截面不存在，但存在A到$A \times B$的σ态射．

注：习题206涉及尚未介绍的“拓扑”知识．

习题 207.

X为域结构种类，

求证：

可以这样定义σ态射：f或者为K到K'的群同态，或者为f_0，其中$f_0(0) = 0$，$f_0(x) = 1$（$x \neq 0$）．

并且，该态射具有以下性质：对任何域K，存在K的结构在$\{0, 1\}$导出的结构（同构于F_2），令R为等价关系，其等价类为$\{0\}$和K^*，其中$K^* = K - \{0\}$，存在K的结构对于R的商结构（同构于F_2）．

证明：根据定义可证．

注：习题207涉及尚未介绍的“域”知识．

习题 208.

X为有序阿基米德完全域结构种类．对任意具有X的结构的集合A，令g_A为A到R唯一同构．A、B为具有X的结构的两个集合，

求证：可以按下列方式定义A到B的σ态射：

对任意$x \in A$，均有$g_B(f(x)) \geq g_A(x)$，则称f为σ态射．

并且，尽管结构种类X是统一的，但存在不同构的双射态射．

证明：

根据定义可证σ符合态射集合的条件．

令k为映射$x \to a_x$（当$x \geq 0$时，$a = 2$，当$x < 0$时，$a = 1/2$），$f = g_B^{-1} \circ k \circ g_A$，则$f$为$A$到$B$的双射态射，但不是同构.

注：习题208涉及尚未介绍的“域”知识.

习题 209.

在理论M中，结构种类X只有一个主要基集合，其代表特征为$s \in F(x)$，公理为R. $A(x)$为X在x上的结构的集合. σ为项，其符合态射的前两个条件，并符合下列条件：

令M'为比M强的理论，在理论M'中，E、E'分别是具有X的结构K、K'的集合，E、E'、K、K'都不含字母s、t、x、y，f为E到E'的双射，则$((f)$为同构$) \Rightarrow f \in (K'|t)(K|s)(E'|y)(E|x)\sigma$. 求证：

（1）$s \in A(x)$与$t \in A(x)$与$Id_x \in (x|y)\sigma \cap (x|y)(s|p)(t|s)(p|t)\sigma$（其中$\sigma$不含字母$p$）是在$A$上关于$s$、$t$的等价关系.

（2）令$B(x)$为商集$A(x)/q$，g_x为$A(x)$到$B(x)$的规范映射. 假设$s' \in B(x)$是可转换的，W为结构种类，其代表特征为$s' \in \mathcal{P}(F(x))$，公理为$s' \in B(x)$. 令σ'为满足下列条件的x到y的映射的集合：$s' \in B(x)$与$y' \in B(y)$，并且，存在$s \in A(x)$、$t \in B(x)$，使$s' = g_x(s)$、$t' = g_y(t)$、$f \in \sigma$. 求证：对于结构种类W，σ'为态射，并且$\sigma \subset \sigma'$.

证明：

（1）根据定义可证.

（2）根据定义可证.

4.3 普遍性映射（Applications universelles）

结构定义 37. 到具有结构的集合的映射（*application dans un ensemble muni d'une structure*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项. 在理论M_X中，s为通用结构，如果项α满足下列条件，则$(F|x)(K|s)\alpha$的元素，称为E到具有K的F的α映射：

第一，在理论M_X中，$\alpha \subset \mathcal{F}(E; x)$；

第二，令M'为比M强的理论，在理论M'中，K、K'分别为X在F、F'上的结构，如果f是F到F'的σ态射，则$g \in (F|x)(K|s)\alpha \Rightarrow f \circ g \in (F'|x)(K'|s)\alpha$.

结构定义 38. 具有普遍性的集合和映射（*ensemble et application universels*），普遍性映射问题的解（*solution du problème d'application universelle*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项. 令M'为比M强的理论，在理论M'中，f为E到具有K的F的α映射，如果对任意具有X的任意结构的集合G和任意E到G的α映射g，存在唯一的F到G的σ态射h，使$g = h \circ f$. 则称集

合F和α映射f具有普遍性．有序对(F,f)称为关于X、σ、α对E的普遍性映射问题的解，在没有歧义的情况下也可以简称为对E的普遍性映射问题的解．

补充结构规则 14.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，在理论M'中，(F',f')和(F'',f'')都是对E的普遍性映射问题的解，则存在F'到F''的同构g，令其逆同构为g^{-1}，使$f'=g^{-1}\circ f''$，$f''=g\circ f'$．

证明：根据定义，存在映射h_1、h_2，使$f'=h_1\circ f''$，$f''=h_2\circ f'$．因此，$h_1\circ h_2=Id_{F'}$，$h_2\circ h_1=Id_{F''}$，根据结构规则8可证．

补充结构规则 15.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，在理论M'中，F为具有X的结构的集合．f为E到F的α映射，则当且仅当(F,f)满足下列两个条件时，其为对E的普遍性映射问题的解：

第一，对任意集合G和任意E到G的α映射g，存在F到G的σ态射h，使$g=h\circ f$；

第二，对任意集合G，F到G的任何两个σ态射，如果在$f\langle E\rangle$上重合，则相等．

证明：

充分性根据定义可证．

必要性：如果(F,f)为对E的普遍性映射问题的解，对任意集合G，F到G的任何两个σ态射h、h'，如果在$f\langle E\rangle$上重合，则$h\circ f=h'\circ f$，根据定义，$h=h'$，得证．

结构规则 22.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，则在理论M'中，满足下列三个条件时，对E的普遍性映射问题的解存在：

第一，对X在任意集族上的结构族，乘积结构存在；

第二，令$(F_i)_{i\in I}$为集族，对任意$i\in I$，f_i为E到F_i的α映射，则E到$\prod\limits_{i\in I}F_i$的映射$(f_i)_{i\in I}$也是α映射；

第三，存在具有以下性质的基数m：对任意集合F和E到F的α映射，存在F的可采子集G，满足$f\langle E\rangle\subset G$、$Card(G)\leq m$、$f$通过$F$的子集$G$导出的映射也是$\alpha$映射并且任何两个以$G$为定义域的$\sigma$态射只要在$f\langle E\rangle$上重合则相等．

证明：

令$s\in S(x)$为X的类型化，L是符合下列条件的三元组(C,Q,P)的集合：

$C\subset m$，Q是X在C上的结构，P是E到具有Q的C的α映射的图．对任意$l\in L$，令$l=(C_l,Q_l,P_l)$，f_l为映射(P_l,E,C_l)，令$F=\prod\limits_{l\in L}X_l$，$f$为$x\rightarrow(f_l(x))_{l\in L}$，因此$f$为$\alpha$映射．

对任意E到H的映射h，令G为满足第三个条件的集合，j为G到H的规范映射，g为E到G的映射并且其图和h相等，则$h = j \circ g$，故g是E到G的α映射．令$G' \subset m$，并和G等势，令k为G到G'的双射．因此，存在l，使$X_l = G'$．故$k \circ g = f_l$，$q = j \circ k^{-1} \circ pr_l$，进而$h = q \circ f$，因而补充结构规则15的第一个条件成立．进而，根据第三个条件，补充结构规则15的第二个条件成立，得证．

结构规则 23.

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，在理论M'中，(F, f)为关于X、σ、α对E的普遍性映射问题的解，则当且仅当对任意$x \in E$、$y \in E$，均存在具有X的结构的G以及E到G的α映射h使$h(x) \neq h(y)$时，f为单射．

证明：根据定义可证．

结构定义 39. 分开元素的映射（*application qui sépare les éléments*）

令M为比集合论强的理论，X是仅有一个基集合的结构种类，σ为X的态射集合，E为项．令M'为比M强的理论，在理论M'中，(F, f)为关于X、σ、α对E的普遍性映射问题的解，如果f为单射，则称f为分开E的元素的映射．

习题 210.

E为拓扑空间，结构种类X和态射按照习题*205*或者习题*206*定义．α映射为E到具有结构种类X的某个集合的连续映射．求证：不存在E的普遍性映射问题的解．

证明：

按照习题205定义的情况下，令A具有结构(V, f)，其中f为$[0, a]$到A的映射，设(A', k)为A的普遍性映射问题的解，A'具有结构(V', f')，其中f'为$[0, a']$到A'的映射．考虑带有结构(V'', f'')的集合A''，和A到A''的连续映射g，其中f''为$[0, a'']$到A'的映射且不是满射，$g(0) \notin f''([0, a''])$．设$h$为使$g = h \circ k$的态射，则$h \circ k(A) \subset f''([0, a''])$，矛盾．

按照习题206定义的情况下，令A具有结构(V, a, b)，设(A', f)为A的普遍性映射问题的解，A'具有结构(V', a', b')．考虑任意带有结构(V'', f'')的集合A''，和A到A''的连续映射g，如果$f(a) = f(b)$，令$g(a) \neq g(b)$，如果$f(a) \neq f(b)$，令$g(a) = g(b)$，则均不存在态射h使$g = h \circ f$，矛盾．

注：习题210涉及尚未介绍的“拓扑”知识．

习题 211.

E为交换域，X为代数闭交换域结构种类．定义σ态射为同态，α映射为E到代数闭域的同态．F_E为E的代数闭包．求证：E到F_E的规范单射，符合普遍性的映射问题的存在性条件，但不存在E的普遍性的映射问题的解．

证明：根据定义可证．注：习题211涉及尚未介绍的“交换域”知识．

习题 212.

X为结构种类，$(A_i)_{i\in I}$为两两不相交的集族，对任意$i\in I$，K_i为X在A_i上的结构，E为$(A_i)_{i\in I}$的并集．定义X的σ态射，并定义α为E到具有X的结构的集合F并符合下列条件的映射f的集合：

对任意$i\in I$，f在A_i上的限制是态射．

令M'为比M强的理论，求证：在理论M'中，如果E的普遍性映射问题的解(F,f)存在，并且f为满射，则F具有的结构K为族$(A_i,K_i,f_i)_{i\in I}$的最终结构，其中f_i为f在A_i上的限制．

此外，令G为集合，对任意$i\in I$，g_i为A_i到G的映射，如果族$(A_i,K_i,g_i)_{i\in I}$的最终结构存在，则$g_i=g\circ f_i$，其中g为F到G的态射，G具有的结构是F具有结构在f下的直像．

证明：

对任意集合F'以及F到F'的映射p，如果p为态射，根据定义，对任意$i\in I$，f_i为态射，故$p\circ f_i$为态射；反过来，如果对任意$i\in I$，$p\circ f_i$为态射，则$p\circ f$为α映射，则存在F到F'的态射p'使$p\circ f=p'\circ f$．因此$p=p'$，故p为态射．

如果族$(A_i,K_i,g_i)_{i\in I}$的最终结构存在，则对任意$i\in I$，g_i为态射，故存在F到G的态射g，且$g_i=g\circ f_i$；同时，对任意G到G'的映射q，如果q为态射，则$q\circ g$为态射，反过来，如果$q\circ g$为态射，则任意$i\in I$，$q\circ g_i$为态射，故q为态射．

注：原书习题212遗漏“f为满射”的条件．