

to be used is:

$$\left(\partial_z^2 - E_{\text{sc}} + \frac{2U(z)}{r^2} \right) \psi_{\text{sc}}(r) = V_{\text{sc}}(r) \psi_{\text{sc}}(r) + \int dr' V_{\text{sc}}(r, r') \psi_{\text{sc}}(r')$$

$$V_{\text{sc}}(E, r, r'; A, A, 0) = \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \left[f_{\text{sc}} e^{-\alpha_2 r^2} (-r^2 \alpha_2 r^2 \partial_z^2 - \frac{2U(z)}{r^2}) e^{-\alpha_2 r^2} f_{\text{sc}} + f_{\text{sc}} e^{-\alpha_2 r^2} f_{\text{sc}} (i f_{\text{sc}} r^2) r' e^{-\alpha_2 r^2} \right]$$

$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \right) \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1}$

$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \right) \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1}$

$$V_{\text{sc}}(r, A, A, 0) = \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \left[\frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \left(\frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \right) e^{-\alpha_2 r^2} + \frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \left(\frac{1}{2} \chi_{\text{sc}} N^{-1} \right) e^{-\alpha_2 r^2} \right]$$