

设计求  $x_1$  与  $x_2$  的最大公约数的多带图灵机

算法（辗转相除，倒带，单向扫描）

//下带仅保存最终结果不用于中间值得传递

思想：使用三带图灵机，将  $x_2$  保留在上带， $x_1$  移到中带，输出  $y(x_1, x_2)$  的最大公约数）在下带，使用辗转相除法。

特殊情况： $x_1$  为 0，最大公约数为  $x_2$ ， $x_2$  为 0，最大公约数为  $x_1$

同时为 0，无最大公约数。

对应添加修改了 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20 行指令

步骤：

① 将  $x_1$  移到中带

② 三带初始化，上带  $x_2$  中带  $x_1$  分别去掉一个“1”，下带  $y$  添加一个“1”（即初始化  $y$  为 0）

中带回退到  $x_1$  头部

③ 辗转相除，同步扫描上带、中带（同向）

(1)若同时扫描到“1”，则继续扫描

(2)若扫描到不同字符

扫描到“B”的带回到带头

扫描到“1”的带回退一格，写“B”

然后两带同步扫描

(3)若同时扫描到“B”，辗转相除完成

选择中带，将其反向移动，并将下一个“B”之前的所有“1”均复制到下带

$q^*$ 为初始状态,  $q^\#$ 为终止状态

$$1. \quad \delta\left(q^*, \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q^*, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ R \\ D \end{bmatrix}\right)$$

// 步骤①, 将  $x_1$  移到中带

$$2. \quad \delta\left(q^*, \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q_0, \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ L \\ D \end{bmatrix}\right)$$

// 步骤①, 上带移到  $x_2$  头部, 中带移到  $x_1$  尾部

$$3. \quad \delta\left(q_0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q_1, \begin{bmatrix} B \\ B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ L \\ R \end{bmatrix}\right) \quad // \text{步骤②, 三带初始化, 并分别移到 } x_2 \text{ 头部, } x_1 \text{ 尾部, } y \text{ 尾部}$$

$$4. \quad \delta\left(q_1, \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q_2''', \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \\ R \end{bmatrix}\right) \quad // \text{特殊情况, } x_2 \text{ 为 } 0, \text{ 到 } q_2'''$$

把中带复制到下带, 输出  $y=x_1$

$$5. \quad \delta\left(q_2''', \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q_2''', \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \\ R \end{bmatrix}\right) \quad // \text{将中带复制到下带}$$

$$6. \quad \delta\left(q_2''', \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q^\#, \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ D \\ D \end{bmatrix}\right) \quad // \text{复制完成, 下带输出 } y \text{ 为最大}$$

公约数, 终止

$$7. \quad \delta\left(q_1, \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q_2''', \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ D \\ R \end{bmatrix}\right) \quad // \text{特殊情况, } x_1 \text{ 为 } 0, \text{ 到 } q_2'''$$

把上带复制到下带, 输出  $y=x_2$

$$8. \quad \delta\left(q_2''', \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q_2''', \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ D \\ R \end{bmatrix}\right) \quad // \text{把上带 } x_2 \text{ 复制到下带}$$

$$9. \quad \delta\left(q_2''', \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}\right) = \left(q^\#, \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ D \\ D \end{bmatrix}\right) \quad // \text{把上带 } x_2 \text{ 复制到下带, 复制}$$

完成, 下带输出  $y=x_2$  为最大公约数, 终止

$$10. \quad \delta \left( q_1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q'_1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤②, 到 } q_1' \text{ 中带倒带}$$


---

$$11. \quad \delta \left( q'_1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q'_1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤②, 中带回退}$$

$$12. \quad \delta \left( q'_1, \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q_2, \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ R \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤②, 中带回退到 } x_1 \text{ 头部进}$$

入  $q_2$

---

//  $q_2$ : 上带右移, 中带右移

$$13. \quad \delta \left( q_2, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q_2, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ R \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤③情况(1), 继续扫描}$$


---

$$14. \quad \delta \left( q_2, \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q'_2, \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ D \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤③情况(2), 上带回退一格}$$

$$15. \quad \delta \left( q'_2, \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q'_1, \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ L \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤③情况(2), 中带倒带, 上}$$

带写“B”向右移到下一个“1”, 进入  $q_1'$  继续倒带

---

$$16. \quad \delta \left( q_2, \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q''_2, \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤③情况(2), 中带回退一格}$$

$$17. \quad \delta \left( q''_2, \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q_3, \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ R \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤③情况(2), 上带倒带, 中}$$

带写“B” 向右移到下一个“1”, 进入  $q_3$  倒带

---

$$18. \quad \delta \left( q_3, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q_3, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L \\ D \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤③情况(2), } q_3 \text{ 上带继续倒带}$$

$$19. \quad \delta \left( q_3, \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q_2, \begin{bmatrix} B \\ 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ D \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤③情况(2), 上带倒带完成, 进入 } q_2 \text{ 继续扫描}$$

$$20. \quad \delta \left( q_2, \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix} \right) = \left( q_2'', \begin{bmatrix} B \\ B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \\ D \end{bmatrix} \right) \quad // \text{步骤③情况(3), 中带回退一格}$$

最后删除前带上下带剩下的值相等  
所以复制前带到下带即可

//  $q_0$ :  $x_1$  移到中带, 三带均在头部或尾部

//  $q_1$ : 三带初始化, 并处理特殊情况

//  $q_2$ : 上带中带同时右移扫描

//  $q_1'$ : 中带倒带, 回到  $x_1$  头部

//  $q_3$ : 上带倒带, 回到  $x_2$  头部

//  $q_2'$ : 把上带回退一格写 B

//  $q_2''$ : 把中带回退一格写 B

//  $q_2'''$ : 把中带复制到下带

//  $q_2''''$ : 把上带复制到下带

空间复杂度大约  $2*(m+n)$

同步扫描 1 的步数小于等于  $m+n$

时间复杂度约为  $2*(m+n) + 2*m = 4m + 2n$