1，最小公倍数

李老师您好：

对于最小公倍数我有个想法。它大概是这样：让两个数在两个带上做往返运动并且不改变带上的值，如果两个数没有同时晕倒 B 那么他们继续做往返运动，直到他们同时遇到 B。每当带一带二走一步，在带 3 上写个 1，当程序结束时带 3 上的值就是所求。

程序在照片中

其中步骤一：是将第一个数的第一个 1 抹去。
步骤二：不断右移，将第一个数写在第二个带上，并从第一个带上抹去。
步骤三：当带 1 遇到 B 时，将带 1 右移，使其指向第二个数；讲带 2 左移，使其指向第一个数的最后一个 1.
步骤四：抹去带 1 上第二个数的一个 1.

q3 走的方向是：RL q4 走的方向：RR q5 方向：LL q6 方向：LR
初始带 1 指向的是第一个 1，带 2 指向的是最后一个 1.所以开始时带 1 向右走，带 2 向左走。
q3：当带 1 和带 2 都是 1 时，带 1 右走，带 2 左走。在带 3 上写 1.
当带 1 为 1 带 2 为 B 时，进入 q4；
当带 1 为 B 带 2 为 1 时，进入 q5；
当带 1 和带 2 都被 B 是，进入 q7，结束。
q4：当带 1 和带 2 都为 1 时，带 1 和带 2 都想有走，并在带 3 写 1；
当带 1 为 1，带 2 为 B 时，进入 q3；
当带 1 为 B，带 2 为 1 时，进入 q6；
当带 1 和带 2 都为 B 时，进入 q7 结束。

q5，q6 同理。

a b c

$\log_2 x$

$x \quad \lfloor \log_2 x \rfloor + 1$

设$L=\{wcw^R \mid w\in\{0,1\}^*, w^R$是$w$的逆字$\}$

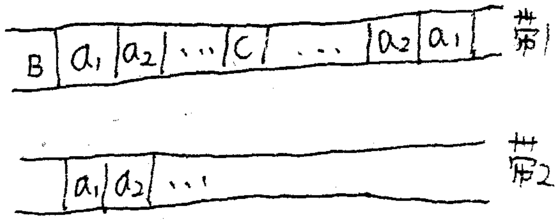
试接受L的图灵机M_1，使M_1的时间复杂度$DT(n)$为$n+1$，再设计接受L的图灵机M_2使M_2的空间复杂度$DS(n)=\lceil\log_2 n\rceil$

解：首先设计M_1，利用双向两带标图灵机，带1输入wcw^R

把w复制到带2上，然后比较带1上的w^R和带2上w

（它们关于c镜面对称）

若符合要求 则接受停机，否则无定义

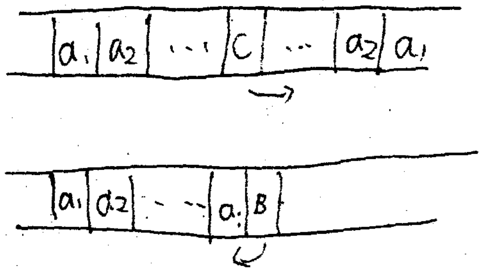


$M_1=\{Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F\}$

$\Sigma=\{0,1,c\}$，$\Gamma=\{0,1,c,B\}$

$Q=\{q_0,q_1,q_2\}$　$F=\{q_2\}$

1. $\delta(q_0,\left[\begin{smallmatrix}X\\B\end{smallmatrix}\right])=(q_0,\left[\begin{smallmatrix}X\\X\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}R\\R\end{smallmatrix}\right])$
2. $\delta(q_0,\left[\begin{smallmatrix}c\\B\end{smallmatrix}\right])=(q_1,\left[\begin{smallmatrix}c\\B\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}R\\L\end{smallmatrix}\right])$
3. $\delta(q_1,\left[\begin{smallmatrix}X\\X\end{smallmatrix}\right])=(q_1,\left[\begin{smallmatrix}X\\X\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}R\\L\end{smallmatrix}\right])$
4. $\delta(q_1,\left[\begin{smallmatrix}B\\B\end{smallmatrix}\right])=(q_2,\left[\begin{smallmatrix}B\\B\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}D\\D\end{smallmatrix}\right])$



我们来看时间复杂度

$2L+2$个动作 $=n+1$

设计M_2接受L使空间复杂度$DS(n)=\lceil\log_2 n\rceil$

用~~离线~~二带离线图灵机来计算，上带放长度为n的L，下带计数，数以二进制形式存放

M_2工作时

$k+1=\log_2(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil+1)$

$k=\log_2(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil+1)-1\le\lceil\log_2 n\rceil$

(1) 检查输入是否只有一个c，否则无定义

(2) 计算c的左右符号个数是否相等，若相等，则(3)

(3) 逐个比较与c等距离的符号是否相同，相同接受，否则无定义

(4) 在存储带上道记录(3)中c左右第一个位置…直到$\frac{n-1}{2}$的数，下道开始写$\frac{n-1}{2}$，每执行一次相符合的比较，则减值到为0。到达0时，则M_2接受。

由于计算图灵机空间复杂性用离线图灵机输入带空间不计，令存储带所用空间为数$i=\frac{n-1}{2}$以2进制存放

$i=\frac{n-1}{2}=i_0\cdot2^0+i_1\cdot2^1+\cdots+i_k\cdot2^k$　若$i_0=\cdots=i_k=1$则$\frac{n-1}{2}=2^0+2^1+\cdots+2^k=2^{k+1}-1$

……[Nx]+2 ……

(限制 ① 只有一条存储带；输入带和存储带都是单道的. ② 带上符号除B外只有符号1).

x	1	1	……	1

每次看出在存储带上增加一个"1"后，要经过在输入带上扫描. 2m+1个"1"后再加"1" 直到将输入带扫描一遍 这时存储带输出为 $[\sqrt{x}]$ 再加2个"1"和删除一个"1"。

1. $\delta(q_0,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_1,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$
2. $\delta(q_0,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}) = (q',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$ $x=0$
3. $\delta(q_1,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$ $x=1$
4. $\delta(q_1,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_1,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\L\end{bmatrix})$
5. $\delta(q_1,\begin{bmatrix}1\\\$\end{bmatrix}) = (q_2,\begin{bmatrix}1\\\$\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$
6. $\delta(q_2,\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}) = (q',\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$
7. $\delta(q_2,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_1,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$
8. $\delta(q_2,\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}) = (q',\begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$
9. $\delta(q',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}) = (q',\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$
10. $\delta(q',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}) = (q',\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$
11. $\delta(q',\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix}) = (q,\begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$

2m+1

1 +3 4 +5 9

1 +1 2 +1 3

2x1+1

最大公约数

基本思想：辗转相减法（求最大公约数），即尼考曼彻斯法，其特色是做一系列减法，从而求得最大公约数。始终用大的数减小的数，当差是0时结束，此时的被除数和除数相同，均为最大公约数。例如：两个自然数35和14，用大数减去小数，(35,14)->(21,14)->(7,14)->(7,7)。最后7就是35和14的最大公约数。

优点： ①只做减法;②不用事先知道两个数的大小；③只用两个带。最后两带的数都是最大公约数。

算法步骤：

x_1 x_2

x_1

1、

$$\delta(q_0,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_0,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

//步骤1-4是将x_1从带1转移到带2上

2、

$$\delta(q_0,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q_1,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\L\end{pmatrix})$$

3、

$$\delta(q_1,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_1,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\L\end{pmatrix})$$

4、

$$\delta(q_1,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q_2,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

5、$$\delta q_2,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_3,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

//两带同时摸掉1个“1”,因为带上的1数量比实际多一个

6、

$$\delta(q_3,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_3{}',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

//步骤6-8处理带2为0的情况，这时带2复制1

7、

$$\delta(q_3{}',\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_3{}',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

8、

$$\delta(q_3{}',\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$$

//两个带的结果都是最大公约数,结束

9、

$$\delta(q_3,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_3{}'',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

//9-10处理带1为0的情况，这时带1复制2

10、

$$\delta(q_3{}'',\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_3{}'',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

)

11、

$$\delta(q_3{}'',\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$$

//两个带的结果都是最大公约数,结束

12、$$\delta(q_3,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$$

//两个带同时为0的情况

13、$$\delta(q_3,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

//处理两数都不为0的情况。

14、

$$\delta(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

15、

$$\delta(q_4,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_5,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\L\end{pmatrix})$$

//q_5是带1长，并且往回走摸带1

16、

$$\delta(q_5,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_5,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\L\end{pmatrix})$$

17、

$$\delta(q_5,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q_5{}',\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

//带1摸完了

18、

$$\delta(q_5{}',\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_5{}',\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\D\end{pmatrix})$$ //带1往右走，带2指向了第一个“1”的位置

19、

$$\delta(q_5{}',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$$

： //回到q_4状态

20、

$$\delta(q_4,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_6,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\L\end{pmatrix})$$

//q_6是带2长，并且往回走摸带2

21、

$$\delta(q_6,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_6,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\L\end{pmatrix})$$

22、$$\delta(q_6,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q_6{}',\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$$

//带2摸完了

23、

B1…1B1…1B

x_1 x_2

x_1
x_2

$\delta(q_6{}', \begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_6{}', \begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix}D\\R\end{pmatrix})$ //带 2 往右走，带 1 指向

了第一个“1”的位置

24、

$\delta(q_6{}', \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_4, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$

//回到 q_4 状态

25、

$\delta(q_4, \begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix}) = (q, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$

//结束.有两种情况在这里结束：①两数同时为 0；②相减过程中当两数相等时在这里结束。

最大公约数

最大公约数

计算机软件与理论

2010532039，王强；2010532043，张小利

基本思想： 辗转相减法（求最大公约数），即尼考曼彻斯法，其特色是做一系列减法，从而求得最大公约数。始终用大的数减小的数，当差是 0 时结束，此时的被除数和除数相同，均为最大公约数。例如 ：两个自然数 35 和 14，用大数减去小数，(35,14)->(21,14)->(7,14) ->(7,7)。最后 7 就是 35 和 14 的最大公约数。

优点： ①只做减法;②不用事先知道两个数的大小；③只用两个带。最后两带的数都是最大公约数。

算法步骤：

1、$\delta(q_0,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_0,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$ //步骤 1-4 是将 x_1 从带 1 转移到带 2 上

2、$\delta(q_0,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q_1,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\L\end{pmatrix})$

3、$\delta(q_1,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_1,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\L\end{pmatrix})$

4、$\delta(q_1,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q_2,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$

5、$\delta(q_2,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_3,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$ //两带同时摸掉 1 个“1”，因为带上的 1 数量比实际多一个

6、$\delta(q_3,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_3',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$ //步骤 6-8 处理带 2 为 0 的情况，这时带 2 复制 1

7、$\delta(q_3',\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_3',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$

8、$\delta(q_3',\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$ //两个带的结果都是最大公约数,结束

9、$\delta(q_3,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_3'',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$ //9-10 处理带 1 为 0 的情况，这时带 1 复制 2

10、$\delta(q_3'',\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_3'',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$

11、$\delta(q_3'',\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$ //两个带的结果都是最大公约数,结束

12、$\delta(q_3,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$ //两个带同时为 0 的情况

13、$\delta(q_3,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$ //处理两数都不为 0 的情况。

14、$\delta(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$

15、$\delta(q_4,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_5,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\L\end{pmatrix})$ //q_5 是带 1 长，并且往回走摸带 1

16、$\delta(q_5,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_5,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\L\end{pmatrix})$

17、$\delta(q_5,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q_5',\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$ //带 1 摸完了

18、$\delta(q_5',\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_5',\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\D\end{pmatrix})$ //带 1 往右走，带 2 指向了第一个“1”的位置

19、$\delta(q_5',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$; //回到 q_4 状态

20、$\delta(q_4,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix})=(q_6,\begin{pmatrix}B\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\L\end{pmatrix})$ //q_6是带 2 长，并且往回走摸带 2

21、$\delta(q_6,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_6,\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L\\L\end{pmatrix})$

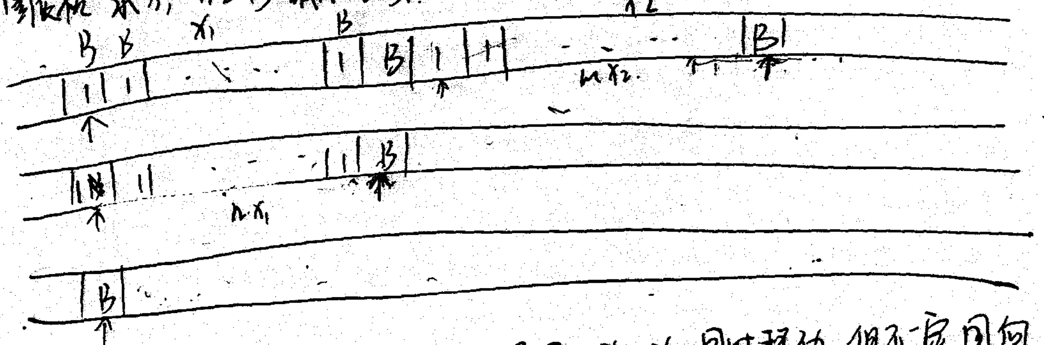
22、$\delta(q_6,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix})=(q_6',\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}R\\R\end{pmatrix})$ //带 2 摸完了

23、$\delta(q_6',\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix})=(q_6',\begin{pmatrix}1\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\R\end{pmatrix})$ //带 2 往右走，带 1 指向了第一个“1”的位置

24、$\delta(q_6',\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})=(q_4,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$ //回到q_4状态

25、$\delta(q_4,\begin{pmatrix}B\\B\end{pmatrix}) = (q,\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}D\\D\end{pmatrix})$ //结束.有两种情况在这里结束：①两数同时为 0；②相减过程中当两数相等时在这里结束。

1. 用多带图灵机 求 x_1, x_2 的最小公倍数 （三带同处理）



同时，指针在 x_1, x_2 后 x_3 计数 当 x_1, x_2 同时遇到 时 x_3 为 最小公倍数

将 x_2 放在带1，x_1 放在带2，带3 计数的作用，x_1, x_2 同时移动，但不一定同向，只要遇到B 就改变方向，带3只向右移动. 当两个表示 x_1, x_2 的带同时遇到1时，带3写1并向右移动一格. 否则带3指针不动. 当 x_1 x_2 同时遇到B时，程序结束. 此时带3的数是最小公倍数

1. $\delta(q^*, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}) = (q^*, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\\D\end{bmatrix})$ // 将 x_1 复制到带2上，并在带上删除 x_1

2. $\delta(q^*, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}) = (q_0, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\L\\D\end{bmatrix})$

3. $\delta(q_0, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_0, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\L\\D\end{bmatrix})$ // 将带2上指针左移至 x_1 第一个上.

4. $\delta(q_0, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\\D\end{bmatrix})$

5. $\delta(q_1, \begin{bmatrix}1\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_2, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\\D\end{bmatrix})$ // 消 x_1 x_2 同时去掉个"1".

6. $\delta(q_2, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_2', \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\R\\R\end{bmatrix})$

7. $\delta(q_2', \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}) = (q, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\D\\D\end{bmatrix})$

8. $\delta(q_2, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}) = (q_2', \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\L\\L\end{bmatrix})$

9. $\delta(q_2, \begin{bmatrix}1\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_5, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\\R\end{bmatrix})$.

10. $\delta(q_5, \begin{bmatrix}1\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_5, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\\R\end{bmatrix})$.

11. $\delta(q_5, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}) = (q_3, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\L\\D\end{bmatrix})$

12. $\delta(q_5, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_4, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\D\\D\end{bmatrix})$.

13. $\delta(q_5, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}) = (q, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\D\\D\end{bmatrix})$.

14. $\delta(q_3, \begin{bmatrix}1\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_3, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\L\\R\end{bmatrix})$

15. $\delta(q_3, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_6, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\L\\D\end{bmatrix})$

16. $\delta(q_3, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}) = (q_5, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\R\\D\end{bmatrix})$

17. $\delta(q_4, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}) = (q, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\D\\D\end{bmatrix})$

18. $\delta(q_4, \begin{bmatrix}1\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_4, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\R\\R\end{bmatrix})$

19. $\delta(q_4, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}) = (q_6, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\L\\D\end{bmatrix})$

q_3, q_4 一个左 一个右

q_6 x_1, x_2 左

q_5 x_1 x_2 右

q 为终止状态.

处理 x_1 或 x_2 为0的情况

下面开始处理 x_1, x_2 不为0的情况

20. $\delta(q_4, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_5, \begin{bmatrix}B\\1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\D\\D\end{bmatrix})$

21. $\delta(q_4, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}) = (q, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\D\\D\end{bmatrix})$.

22. $\delta(q_6, \begin{bmatrix}1\\1\\B\end{bmatrix}) = (q_6, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\L\\R\end{bmatrix})$

23. $\delta(q_6, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}) = (q_4, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\R\\D\end{bmatrix})$

24. $\delta(q_6, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}) = (q_4, \begin{bmatrix}1\\B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\R\\D\end{bmatrix})$

25. $\delta(q_6, \begin{bmatrix}B\\B\\B\end{bmatrix}) = (q, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D\\D\\D\end{bmatrix})$

第 1 章习题答案

用原语言程序 9 只准用基本指令)证明下列函数是可计算的.

1. $y=x_1^{x_2}$

$z=1$　　　目的是让执行[B2]的第 1 个循环结束时 $z_2=x_1$

$z_4=0$

[A] TO B_1 IF $x_1\neq0$

TO E

$Z=1$

[B_1] TO B_2 IF $x_1\neq0$

TO B_3

$Z=X_1$

[B_2] $z_2=z_2+1$

$z=z-1$

$z_3=z_3+1$　用z_3保存z，　$z_2=z_2+z$，z_2保存临时结果

TO B_2 IF $z\neq0$

[B_{21}] $z=z+1$　恢复z的值

$z_3=z_3-1$

TO B_{21} IF $z_3\neq0$　从[B_2]一直到这条指令计算 $z_2=z_2+z$

$z_1=z_1+1$

$x_1=x_1-1$　用z_1保存x_1

TO B_1 IF $x_1\neq0$　从[B_2]一直到这条指令目的是第 1 个循环把 x_1 赋给 z_2

[B_3] $x_1=x_1+1$

$z_1=z_1-1$

TO B_3 IF $z_1\neq0$　这 3 条指令恢复 x_1,z_1 的值

$z=z_2$　把计算结果 z_2 值赋给 z

$z_2=z_4$　让 z_2 的值归 0

[C] $x_2=x_{2-1}$

$z_5=z_5+1$　用Z_5保存X_2

TO B_1 IF $x_2\neq0$　指数 x_2 不为 0 时进入下一个循环

[D] $x_2=x_2+1$

$z_5=z_5-1$　这两条指令恢复 x_2,z_5 的值

TO D $z_5\neq0$

$y=z$

2 [$\sqrt{x}$](其中[ ]表示向下取整)

[A_1] TO A_2 IF $x\neq0$

TO E　z是不断加1的值　z_2用来保存z^2

[A_2] $z=z+1$

z用来保存x　$z_1''=x$ ← $Z''=Z$

~~[A_{21}]~~ $z_2'=z$

[A_{21}] $z_2=z_2+1$　z_2'用来保存z的值，z用作内部循环变量；z''用作外部循环变量

$z=z-1$

TO A_{21} IF $z\neq0$　从[A_{21}]到这条指令进行加法运算

$z''=z''-1$　一次内循环 $z+1$，共z次

$z=z_2'$　一个外循环 $z+z$，共z次

$$z^2=\underbrace{z+z+z+\cdots+z}_{z个相加即z\cdot z}$$

TO A_{21} IF $z''\neq 0$　从[A_{21}]到这条指令把 z 的平方赋给 z_2

[A_3]　$z_2=z_2-1$

$x=x-1$

TO A_5 IF $z_2\neq 0$　$z_2=0$

TO A_4 IF $x\neq 0$　$x=t^2$

$y=z$

TO A_1

[A_4]　$x=z_1$

TO A_1

[A_5]　TO A_3 IF $x\neq 0$

$z=z-1$　$x<(t+1)^2$

$y=z$

TO A_1

这个算法基本思想就是找到一个数 a 它的平方小于等于 x，当 a+1 的平方大于 x，这个 a 就是运算结果。　$a^2\leq x$ 且 $(a+1)^2>x$

各位同学如果有好的算法希望提供给我，在此表示感谢。

第 2 章习题答案

证明下列函数是原始递归的

1　$\left.\begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix}\right\}$ y 个 x

解：令 h(x,y)为此算式，于是

$h(x,0)=1$

$h(x,y+1)=\exp(x,h(x,y))$，而 $\exp(x,y)$是原始递归的，因此 h(x,y)是原始递归的。

2　$[\sqrt[y]{x}]$

解：令 $h(x,y)=[\sqrt[y]{x}]$，y=0 时无定义，$h(x,y)=\min\limits_{t\leq x}\{\exp(t,y)\leq x\wedge\exp(t,y+1)\geq x\}$。而 $\exp(x,y)$ 与 $x\leq y$ 是原始递归的，因此 $\exp(t,y)\leq x$ 和 $\exp(t,y+1)\geq x$ 是原始递归的，从而 h(x,y)~~是~~是原始递归的。

3　称三边均为整数的直角三角形的勾股数，将它们从小到大排列，第 n 个勾股数记作 R(n)证明 R(n)是原始递归。

证明：分析勾股数分别是 3，4，5，6，8，10，12，16，20，...的数，为此我们令 $p(n)\Leftrightarrow n>0\wedge(((\exists a)_{\leq n}(\exists b)_{\leq n}(a^2+b^2=n^2))\vee((\exists a)_{\leq n^2}(\exists b)_{\leq n^2}(a^2+n^2=b^2)))$，于是有递归式 R(0)=3， 5/ $y=[X/2]$

```
   TO A IF X≠0
   TO E
A  Z1=X
D  TO B IF Z1≠0
   Y=Z2
   TO E
B  Z1=Z1-1
   TO C IF Z1≠0
   Y=Z2
   TO E
C  Z1=Z1-1
   Z2=Z2+1
   TO D
```