

历年真题

可计算性与计算复杂性（一）

一、（20 分）回答下列定义、定理

- 1、部分可计算函数
- 2、半可计算谓词
- 3、空间复杂度
- 4、通用程序
- 5、时间谱系定理

二、（10 分）写出计算函数 $f(x) = \lfloor \log_2(x+1) \rfloor$ 的原语言程序（可以使用学过的宏指令）。

三、（10 分）证明函数

$$\left. \begin{array}{c} 2 \\ 2^2 \\ 2^{2^2} \\ \vdots \\ 2^{2^{2^{\dots^2}}} \end{array} \right\} x \uparrow^2$$

是原始递归函数。

四、（20 分）设语言 $L = \{WCW^R CW \mid W \in \{0,1\}^*\}$ 。给出接受 L 的多带 TM。

五、（20 分）给出半图厄系统 π ，使得 $N(\pi) = \{x \mid (\exists n)(x = n \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}) \wedge (3 \mid x)\}$ 。

六、（10 分）给出计算函数 $f(x) = \lfloor \log_2 \log_2 x \rfloor$ 的多带 TM。

七、（10 分）证明 2^n 是完全时间可构造的。

一、(10 分) 回答下列问题

- 1、什么是部分可计算函数、可计算函数？
- 2、函数“ $S(n)$ 为空间可构造的”是怎样定义的？

二、(10 分) 用原语言程序（限用五条基本指令）计算谓词“ $x_1=x_2$ ”的特征函数。

三、(10 分) 证明 $\lceil \log_2 x \rceil$ 是原始递归函数。

四、(20 分) 用多带 TM 计算 x^x 。

五、(20 分) 给出半图厄系统 π ，使得 $N(\pi) = \{x \mid \exists n(x = n \cdot 2^{\lceil \sqrt{n} \rceil + 1}) \wedge \exists m(x = 3m)\}$ 。

六、(20 分) 证明 $\lceil \sqrt{n} \rceil$ 是空间可构造函数。

七、(10 分) 证明 $n \lceil \log_2 n \rceil$ 是完全时间可构造的。

一、(10 分) 用原语言证明函数 $f(x)=\min\{x_1, x_2\}$ 是可计算函数 (限用五条基本指令)。

二、(10 分) 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{当 } x=0 \text{ 时} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2^2 \\ 2^{2^2} \\ \dots \\ 2^{2^{2^{\dots 2}}} \end{matrix} \right\}^{x \uparrow 2} & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \end{cases} \quad \text{是原始递归函数。}$$

三、(20 分) 给出计算函数 $[X/Y]$ 的四元组 TM。

四、(20 分) 给出一个半图厄系统 σ , 其公理和所有产生式的左端字长都为 1, 且使 $T(\sigma) \cap \{0,1\}^* = S$, 其中 S 是所有能被 3 整除的二进制数组成的集合。

五、(10 分) 证明函数 $S(n)=n^2$ 是完全时间可构造的。

六、(10 分) 证明 $DTIME(2^{kn}) \subset DTIME(n2^{kn})$, 其中 k 为一常数。

七、(20 分) 令函数 $f(n, m) = C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}$ ($m \leq n$)

用双存贮带离线 TM 计算函数 $f(n, \lfloor n/2 \rfloor + 1)$, 并使其空间和时间复杂度均为 $O(2^n)$ 。

一、（20 分）回答下列定义

- (1) 受囿取极小值 (2) TAPE(x) (3) 半可计算谓词
(4) 图灵机 M 是 $S(n)$ 空间有界图灵机 (5) $NSPACE(S(n))$

二、（20 分）叙述下列定理

- (1) 迭代定理 (2) Post 定理 (3) 空间谱系定理 (4) 转换定理

三、（20 分）填空

- (1) 一元谓词 $K(x) \Leftrightarrow$ _____。
(2) Turning 机的停机问题 II: 对 _____ 的 Turning 机和 _____ X 判定 Turning 机 M 是否停机。
(3) $T(\sigma)$ 表示半图厄系统 σ 的 _____。
(4) 如果 L 在 $DSPACE(f(n))$ 中, 且 _____, 那么有某个常数 c (它依赖于 L), 使得 L 是在 $DTIME$ _____ 中。

四、（10 分）证明函数 $f(x) = x^{x^{\dots^x}}$ x 个 x , 是原始递归函数。

五、（10 分）给出半图厄系统 σ , 使得 $N(\sigma) = \{x \mid (\exists n)(x = 2^{3^n})\}$ 。

（限制：产生式不超过 10 个）

六、（10 分）给出计算谓词 $P(x, y) \Leftrightarrow (3x=2y)$ 的特征函数的五元组图灵机。

（限制：不限五元组的数目，但用的较多时扣分）

七、（10 分）用离线图灵机证明： $[\sqrt{n}] + 3$ 是空间可构造函数。

（限制：①只有一条存贮带

②输入带与存贮带都是单道的

③带上的符号除空格 B 外只有一个符号“1”）

一、（20 分）回答下列问题

- 1、递归算子的定义
- 2、计步谓词的定义
- 3、叙述 Post 定理
- 4、完全空间可构造函数的定义
- 5、叙述转换引理

二、（10 分）设 $f(x)$ 表示 x 的各位数字之和。证明 $f(x)$ 是原始递归函数。

三、（10 分）证明 $DTIME(2^{3n}) \subset DTIME(n2^{3n})$ 。

四、（20 分）用双向无穷单带四元组 TM 计算 $\lfloor \log_2 n \rfloor$ （ n 为输入）。

五、（20 分）设 S 是所有能被 3 整除的二进制数组成的集合，给出半图厄系统 σ ，

使得 $T(\sigma) \cap \{0,1\}^* = S$ 。

六、（20 分）给出计算谓词 $7|x$ 特征函数的离线 TM M 。这里输入带上不是 \bar{x} ，而是 x 的二进制表示，并且要求 M 的空间复杂度的阶最小。

（说明：若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1(n)}{S_2(n)} = 0$ ，则称 $S_1(n)$ 的阶小于 $S_2(n)$ 的阶，如上述极限为常数

则阶相等）本题要求给出算法说明。

一、（20 分）回答下列问题

- 1、计算 $3*2=?$ （*表示歌德尔数的连接运算符）。
- 2、举出一个不可计算的全函数（不必证明）。
- 3、用原语言程序证明函数 $\alpha(x \div 3)$ 是可计算函数（限用五条基本指令）。
- 4、证明 $DTIME(n) \subset DTIME(n^{1+E})$ ，其中 E 为大于零的任何实数（不必证明函数的完全可构造性）。

二、（20 分）给出计算函数 $f(x)=x+[x/2]$ 的四元组 TM。

三、（20 分）给出一个半图厄系统 π ，使得 $N(\pi) = \{x \mid (\exists n)(\exists m)(x = n^m)\}$ 。

四、（20 分）用双向无穷多带 TM（允许指针不动），求 x_1, x_2 的最大公约数。
（要指出结果所在的带）

五、（20 分）证明函数 $(n+1)^2$ 是完全时间可构造的。

注意：回答二～五题时都要先写清算法。

一、（20 分）回答下列问题

- 1、什么是半可计算集？
- 2、写出 Post 对应问题。
- 3、完全空间可构造函数是怎样定义的？
- 4、写出转换定理。

二、（20 分）以 \bar{x} 作为输入，在一条带上（要指明哪条）给出结果 \bar{y} ，用多带 TM 计算下面函数 $Y=X-2^{\lceil \log_2 X \rceil}$ 。

三、（20 分）设集合 $S=\{x \mid x \text{ 是能被 3 整除, 但不能被 4 整除的二进制数}\}$ ，给出半图厄系统 σ ，使得 $T(\sigma) \cap \{0,1\}^* = S$ 。

四、（20 分）证明 $\lceil \log_2 x \rceil$ 是原始递归函数。

五、（20 分）证明 $\sqrt{x}+1$ 是完全空间可构造的。

一、（25 分）回答下列问题

- 1、叙述 Post 定理。
- 2、叙述图形定理。
- 3、写出完全空间可构造函数的定义。
- 4、叙述转换定理。
- 5、说明半可判定性与半可计算性的区别。

二、（15 分）用原语言程序证明每一个原始递归函数都是可计算函数。

三、（15 分）设 $a_n=f(n)$, $b_n=g(n)$ 都是递增的原始递归函数，将 a_n , b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) 混合在一起，再从小到大排列得到函数 $c_n=\varphi(n)$ ，证明 $\varphi(n)$ 是原始递归函数。

四、（15 分）给出计算谓词 $x|y$ 的特征函数的广义 P-T 程序。

五、（15 分）给出计算 x_1, x_2 的最小公倍数的双向无穷多带图灵机。

六、（15 分）设 S 是所有能被 3 整除并且是奇数的二进制数组成的集合。给出半图厄系统 σ ，使得 $T(\sigma) \cap \{0,1\}^* = S$ 。（要求：用尽量少的产生式）

一、（20 分）回答下列问题

- 1、写出原始递归函数的定义。
- 2、写出半可计算谓词的定义。
- 3、写出迭代定理。
- 4、写出转换引理。

二、（10 分）将任意两个素数乘积按从小到大排成一个序列，令这个序列通项即第 n 项为 $f(n)$ ，证明 $f(n)$ 是原始递归函数。

三、（20 分）用四元组 TM 计算函数 $f(x, y) = x \ominus y$ 。

四、（10 分）举出一种运算，可计算谓词对这个运算是不封闭的（说明理由），半可计算谓词对这个运算是封闭的（不必说明理由）。

五、（20 分）给出半图厄系统 σ ，使得 $N(\pi) = \{x \mid (\exists n)(x = n \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor})\}$ 。

六、（20 分）用离线 TM 计算谓词 $\text{Prime}(x)$ （ x 是素数）的特征函数，并使其空间复杂度最小，并计算出其空间复杂度。

一、(20 分) 回答下列问题

1、原语言的五条基本指令是什么？

2、计算下面程序的歌德尔数。

[A1] RIGHT

TO A1 IF B

3、写出迭代定理。

4、给出一个不是半可计算的谓词。

二、(20 分) 利用已知的复杂性度量间的关系，给出 NSPACE 和 NTIME 之间的关系。(给出关系并写明条件，不必证明)

三、(20 分) 利用四元组 TM 计算函数 $\lceil \log_3(1+x) \rceil$ 。

四、(20 分) 构造半图厄系统 σ ，使得 $N(\sigma) = \{x \mid (\exists n)(x = n \lceil \log_2 n \rceil)\}$ 。

五、(20 分) 利用多带 TM 计算级数 $1, 2, 4, 7, 11, \dots, \frac{n(n-1)}{2} + 1, \dots$ 的前 n 项和，并计算其时间复杂度。

注：三、四、五题均需先写明算法并加简要注释。