Об эквивалентных определениях правильности

Научная конференция, посвященная 85-летию Валентина Александровича Носова

К.Д. Царегородцев

МГУ им. М.В. Ломоносова

27 октября 2025 г.

Правильное семейство

Семейство функций

$$f_i \colon Q^n \to Q, \quad 1 \leq i \leq n,$$

называется правильным, если для любых двух наборов $x \neq y$ найдется индекс i, что $x_i \neq y_i$, но $f_i(x) = f_i(y)$.

Galatenko, Nosov и Pankratiev, «Latin squares over quasigroups»; Носов, «Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом», «Построение классов латинских квадратов в булевой базе данных»; Носов и Панкратьев, «Латинские квадраты над абелевыми группами».

Некоторые примеры правильных семейств

- Константные семейства: $f_i \equiv const_i$

[0] Носов и Панкратьев, «Латинские квадраты над абелевыми группами».

Некоторые примеры правильных семейств

- Константные семейства: $f_i \equiv const_i$
- Треугольные семейства:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} const \\ f_2(x_1) \\ f_3(x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

[0] Носов и Панкратьев, «Латинские квадраты над абелевыми группами».

Содержание

Случай $k = 2$

Посмотрим несколько (не все!) эквивалентных определений для случая $k = 2$:

- одностоковые ориентации булевых кубов,
- булевы сети с наследственно единственной неподвижной точкой,
- отображение с несамодвойственными проекциями.

Одностоковые ориентации (USO)

Булев куб B_n

- вершины: $V = \{\alpha \in \mathbb{E}_2^n\}$;
- ребра: $\{\alpha, \beta\} \in E \Leftrightarrow \rho(\alpha, \beta) = 1$ (расстояние Хэмминга).

Яблонский, *Введение в дискретную математику*.

Одностоковые ориентации (USO)

Булев куб B_n

- вершины: $V = \{\alpha \in \mathbb{E}_2^n\}$;
- ребра: $\{\alpha, \beta\} \in E \Leftrightarrow \rho(\alpha, \beta) = 1$ (расстояние Хэмминга).

Яблонский, *Введение в дискретную математику*.

Ориентация с единственным стоком USO

Ориентация с единственным стоком (unique sink orientation, USO) куба $\mathbf{B}_n$ — ориентированный граф, построенный по $\mathbf{B}_n$ со следующим характеристическим свойством: в каждом подкубе $\mathbf{B}_n$ существует единственный сток.

Schurr, «Unique sink orientations of cubes»; Szabó и Welzl, «Unique sink orientations of cubes».

Такие геометрические конструкции исследовались в связи с задачами оптимизации.

USO: один пример

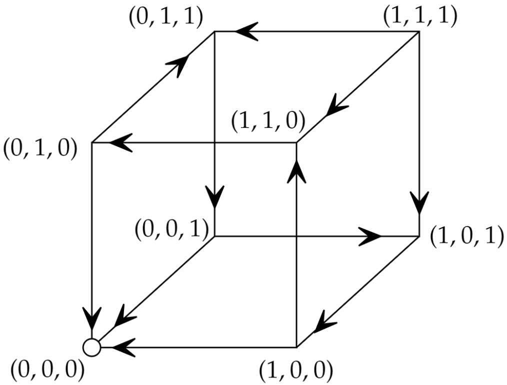
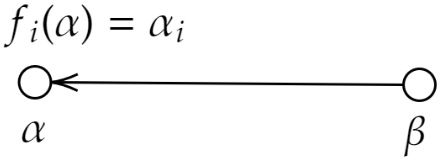


Рис. 1: Одностоковая ориентация трехмерного булева куба $\mathbf{B}_3$

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство булевых функций.

Граф семейства $\Gamma_{\mathcal{F}}$

- Вершины: $V = \{\alpha \in \mathbb{E}_2^n\}$.
- Пусть $\alpha \neq \beta$, $\rho(\alpha, \beta) = 1$, $\alpha_i \neq \beta_i$, добавим ориентированное ребро $(\beta, \alpha) \in E$ тогда и только тогда, когда $f_i(\alpha) = \alpha_i$.



Стоки графа $\Gamma_{\mathcal{F}}$

Неподвижные точки булевых семейств

У правильного семейства булевых функций всегда существует единственная неподвижная точка.

Стоки графа $\Gamma_{\mathcal{F}}$

Неподвижные точки булевых семейств

У правильного семейства булевых функций всегда существует единственная неподвижная точка.

- Неподвижная точка α отображения $x \to \mathcal{F}(x)$ соответствует стоку в графе $\Gamma_{\mathcal{F}}$: $f_i(\alpha) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n.$

Стоки графа $\Gamma_{\mathcal{F}}$

Неподвижные точки булевых семейств

У правильного семейства булевых функций всегда существует единственная неподвижная точка.

- Неподвижная точка α отображения $x \to \mathcal{F}(x)$ соответствует стоку в графе $\Gamma_{\mathcal{F}}$: $f_i(\alpha) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n.$
- Ориентации подкубов в $\Gamma_{\mathcal{F}}$ задаются проекциями $\mathcal{F}'$ семейства $\mathcal{F}$.

Взаимно-однозначное соответствие

Граф $\Gamma_{\mathcal{F}}$ семейства булевых функций $\mathcal{F}$ является одностоковой ориентацией (USO) тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ — правильное семейство.

USO и правильность: два описания одного объекта

- Существует взаимно-однозначное соответствие между «алгебраическим» (определение правильности) и «геометрическим» (USO) описаниями.

[1] Schurr, «Unique sink orientations of cubes»; Галатенко, Носов, Панкратьев и Староверов, «Порождение правильных семейств функций».

[2] Царегородцев, «О свойствах правильных семейств булевых функций».

USO и правильность: два описания одного объекта

- Существует взаимно-однозначное соответствие между «алгебраическим» (определение правильности) и «геометрическим» (USO) описаниями.
- Это позволяет переводить результаты с одного «языка» на другой (в частности, с помощью геометрической интуиции).

[1] Schurr, «Unique sink orientations of cubes»; Галатенко, Носов, Панкратьев и Староверов, «Порождение правильных семейств функций».

[2] Царегородцев, «О свойствах правильных семейств булевых функций».

USO и правильность: два описания одного объекта

- Существует взаимно-однозначное соответствие между «алгебраическим» (определение правильности) и «геометрическим» (USO) описаниями.
- Это позволяет переводить результаты с одного «языка» на другой (в частности, с помощью геометрической интуиции).
- Некоторые примеры переноса: вероятностный алгоритм порождения правильных семейств с помощью процедуры MCMC[1], оценка на число булевых правильных семейств[2], новые классы правильных семейств: рекурсивно треугольные семейства, локально треугольные семейства.

[1] Schurr, «Unique sink orientations of cubes»; Галатенко, Носов, Панкратьев и Староверов, «Порождение правильных семейств функций».

[2] Царегородцев, «О свойствах правильных семейств булевых функций».

Пример переноса

Пусть $T(n)$ ($\Delta(n)$) — число **булевых** правильных (треугольных) семейств размера n.

Оценка на число булевых правильных семейств

$$n^{A\cdot 2^n} \leq T(n) \leq n^{B\cdot 2^n},$$

где A, B — некоторые положительные константы.

Matousek, «The Number Of Unique-Sink Orientations of the Hypercube».

Пример переноса

Пусть $T(n)$ ($\Delta(n)$) — число **булевых** правильных (треугольных) семейств размера n.

Оценка на число булевых правильных семейств

$$n^{A\cdot 2^n} \le T(n) \le n^{B\cdot 2^n},$$

где A, B — некоторые положительные константы.

Matousek, «The Number Of Unique-Sink Orientations of the Hypercube».

Булевых треугольных семейств экспоненциально мало

$$\frac{\Delta(n)}{T(n)} = o\Big(\frac{1}{n^{D\cdot 2^n}}\Big) \text{ при } n \to \infty,$$

для некоторого $D > 0$. Почти все булевы правильные семейства не являются треугольными.

Неподвижные точки правильного семейства

О неподвижных точках

Булево семейство $\mathcal{F}$ является правильным тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}$ и каждая из его проекций имеет единственную неподвижную точку.

[3]Галатенко, Носов и Панкратьев, «Об одном критерии правильности семейства функций».

[4]Richard, «Fixed point theorems for Boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks»; Ruet, «Asynchronous Boolean networks and hereditarily bijective maps», «Local cycles and dynamical properties of Boolean networks»; Thomas, «Regulatory networks seen as asynchronous automata: a logical description».

Неподвижные точки правильного семейства

О неподвижных точках

Булево семейство $\mathcal{F}$ является правильным тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}$ и каждая из его проекций имеет единственную неподвижную точку.

Критерий имеет обобщение[3] на случай $k > 2$, но формулируется чуть более сложно.

[3] Галатенко, Носов и Панкратьев, «Об одном критерии правильности семейства функций».

[4] Richard, «Fixed point theorems for Boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks»; Ruet, «Asynchronous Boolean networks and hereditarily bijective maps», «Local cycles and dynamical properties of Boolean networks»; Thomas, «Regulatory networks seen as asynchronous automata: a logical description».

Неподвижные точки правильного семейства

О неподвижных точках

Булево семейство $\mathcal{F}$ является правильным тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{F}$ и каждая из его проекций имеет единственную неподвижную точку.

Критерий имеет обобщение[3] на случай $k > 2$, но формулируется чуть более сложно. В булевом случае свойство единственности неподвижной точки дает ещё одно характеристическое свойство правильных семейств, которое изучалось в контексте математической биологии (экспрессия генов[4]).

[3] Галатенко, Носов и Панкратьев, «Об одном критерии правильности семейства функций».

[4] Richard, «Fixed point theorems for Boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks»; Ruet, «Asynchronous Boolean networks and hereditarily bijective maps», «Local cycles and dynamical properties of Boolean networks»; Thomas, «Regulatory networks seen as asynchronous automata: a logical description».

Булевы сети с наследственно единственной неподвижной точкой

HUFP-сеть (сеть с наследственно единственной неподвижной точкой, hereditarily unique fixed point network) — булево семейство $\mathcal{F}$ со следующим свойством: $\mathcal{F}$ и все его проекции имеют единственную неподвижную точку (как отображения $\mathbb{E}_2^n \to \mathbb{E}_2^n$).

Richard, «Fixed point theorems for Boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks».

Булевы сети с наследственно единственной неподвижной точкой

HUFP-сеть (сеть с наследственно единственной неподвижной точкой, hereditarily unique fixed point network) — булево семейство $\mathcal{F}$ со следующим свойством: $\mathcal{F}$ и все его проекции имеют единственную неподвижную точку (как отображения $\mathbb{E}_2^n \to \mathbb{E}_2^n$).

Richard, «Fixed point theorems for Boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks».

Правильные семейства $\leftrightarrow$ HUFP-сети

Булево семейство $\mathcal{F}$ является правильным $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ задает HUFP-сеть.

Булевы сети с наследственно единственной неподвижной точкой

HUFP-сеть (сеть с наследственно единственной неподвижной точкой, hereditarily unique fixed point network) — булево семейство $\mathcal{F}$ со следующим свойством: $\mathcal{F}$ и все его проекции имеют единственную неподвижную точку (как отображения $\mathbb{E}_2^n \to \mathbb{E}_2^n$).

Richard, «Fixed point theorems for Boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks».

Правильные семейства $\leftrightarrow$ HUFP-сети

Булево семейство $\mathcal{F}$ является правильным $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ задает HUFP-сеть.

Соответствие между булевыми правильными семействами и HUFP-сетями позволяет перенести (и обобщить) часть результатов, полученных в контексте изучения динамики таких сетей, на правильные семейства.

Характеризация через несамодвойственные проекции

Самодвойственное семейство

Отображение $\mathcal{F}\colon \mathbb{E}_2^n \to \mathbb{E}_2^k$ самодвойственно, если для любого набора $x \in \mathbb{E}_2^n$ выполняется свойство $\mathcal{F}(\overline{x}) = \overline{\mathcal{F}(x)}$.

Характеризация через несамодвойственные проекции

Самодвойственное семейство

Отображение $\mathcal{F}\colon \mathbb{E}_2^n \to \mathbb{E}_2^k$ самодвойственно, если для любого набора $x \in \mathbb{E}_2^n$ выполняется свойство $\mathcal{F}(\overline{x}) = \overline{\mathcal{F}(x)}$.

О несамодвойственности проекций

Семейство $\mathcal{F}$ булевых функций правильно тогда и только тогда, когда каждая из его проекций

$$\Pi_{i_1,\ldots,i_k}^{a_1,\ldots,a_k}(\mathcal{F})$$

не является самодвойственным булевым отображением.

По сути — следствие результата из Richard, «Fixed point theorems for Boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks».

Сложность распознавания правильности

- В общем случае проверка правильности является сложной задачей: если семейство задано в форме КНФ, то задача проверки правильности coNP-полна[5].

[5] Носов, «Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом».
[6] Рыков, «О правильных семействах функций, используемых для задания латинских квадратов».
[7] Bosshard и Gärtner, «Pseudo unique sink orientations».

Сложность распознавания правильности

- В общем случае проверка правильности является сложной задачей: если семейство задано в форме КНФ, то задача проверки правильности coNP-полна[5].
- В определенных случаях задача проверки правильности может быть упрощена, в частности, за счет вида графа существенной зависимости[6].

[5] Носов, «Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом».

[6] Рыков, «О правильных семействах функций, используемых для задания латинских квадратов».

[7] Bosshard и Gärtner, «Pseudo unique sink orientations».

Сложность распознавания правильности

- В общем случае проверка правильности является сложной задачей: если семейство задано в форме КНФ, то задача проверки правильности coNP-полна[5].
- В определенных случаях задача проверки правильности может быть упрощена, в частности, за счет вида графа существенной зависимости[6].
- Алгоритм проверки правильности булева семейства требует порядка $\Theta(4^n)$ операций вычисления правильного семейства на двоичном наборе x (проверка по определению правильности).

[5] Носов, «Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом».
[6] Рыков, «О правильных семействах функций, используемых для задания латинских квадратов».
[7] Bosshard и Gärtner, «Pseudo unique sink orientations».

Сложность распознавания правильности

- В общем случае проверка правильности является сложной задачей: если семейство задано в форме КНФ, то задача проверки правильности coNP-полна[5].
- В определенных случаях задача проверки правильности может быть упрощена, в частности, за счет вида графа существенной зависимости[6].
- Алгоритм проверки правильности булева семейства требует порядка $\Theta(4^n)$ операций вычисления правильного семейства на двоичном наборе x (проверка по определению правильности).
- За счет критерия несамодвойственности можно предложить адаптацию алгоритма[7] со сложностью $\Theta(3^n)$, проверяющего, что ориентация $\Gamma_{\mathcal{F}}$, задаваемая семейством $\mathcal{F}$, является одностоковой.

[5] Носов, «Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом».
[6] Рыков, «О правильных семействах функций, используемых для задания латинских квадратов».
[7] Bosshard и Gärtner, «Pseudo unique sink orientations».

Содержание

Случай $k \geq 2$

- Регулярные отображения.
- Клики в графах особого вида.

Критерий в терминах регулярности

Семейство $\mathcal{F}_n$ на $Q_1 \times \ldots \times Q_n$ является правильным тогда и только тогда, когда для любого набора отображений $\psi_i \colon Q_i \to Q_i$, $1 \le i \le n$, следующее отображение из $Q_1 \times \ldots \times Q_n$ в себя биективно:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to \mathbf{x} \circ \Psi(\mathcal{F}_n(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} x_1 \circ_1 \psi_1(f_1(x_1, \ldots, x_n)) \\ \vdots \\ x_n \circ_n \psi_n(f_n(x_1, \ldots, x_n)) \end{bmatrix}, \ x_i \in Q_i.$$

Критерий обобщает известный результат[8] для абелевых групп.

[8] Носов и Панкратьев, «Латинские квадраты над абелевыми группами».

Случай $\mathbb{F}_p$

Регулярность для простых полей

Семейство функций $\mathcal{F}$ на $\mathbb{F}_p^n$, где $\mathbb{F}_p$ — простое поле, является правильным тогда и только тогда, когда для любых $a_i \in \mathbb{F}_p$ отображение

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 + a_1 \cdot f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n + a_n \cdot f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \ x_i \in \mathbb{F}_p$$

является биекцией $\mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p^n$.

Кликовое представление правильных семейств

- Правильные семейства находятся во взаимно-однозначном соответствии с кликами некоторым образом построенного графа («обобщенный граф Келлера»).

[9] Borzechowski, Doolittle и Weber, «A Universal Construction for Unique Sink Orientations».

[10] Mathew, Östergård и Popa, «Enumerating cube tilings»; Sikirić, Itoh и Poyarkov, «Cube packings, second moment and holes».

Кликовое представление правильных семейств

- Правильные семейства находятся во взаимно-однозначном соответствии с кликами некоторым образом построенного графа («обобщенный граф Келлера»).
- Для $k = 2$ перенос из теории USO-ориентаций[9], для $k > 2$ — авторское обобщение.

[9] Borzechowski, Doolittle и Weber, «A Universal Construction for Unique Sink Orientations».

[10] Mathew, Östergård и Popa, «Enumerating cube tilings»; Sikirić, Itoh и Poyarkov, «Cube packings, second moment and holes».

Кликовое представление правильных семейств

- Правильные семейства находятся во взаимно-однозначном соответствии с кликами некоторым образом построенного графа («обобщенный граф Келлера»).
- Для $k = 2$ перенос из теории USO-ориентаций[9], для $k > 2$ — авторское обобщение.
- Обобщенный граф Келлера $G(k, n)$: $V = \mathbb{E}_{k^2}^n$,

$$\{v, w\} \in E \leftrightarrow \exists i,\ 1 \leq i \leq n \colon v_i \equiv w_i \mod k,\ v_i \neq w_i.$$

[9] Borzechowski, Doolittle и Weber, «A Universal Construction for Unique Sink Orientations».

[10] Mathew, Östergård и Popa, «Enumerating cube tilings»; Sikirić, Itoh и Poyarkov, «Cube packings, second moment and holes».

Кликовое представление правильных семейств

- Правильные семейства находятся во взаимно-однозначном соответствии с кликами некоторым образом построенного графа («обобщенный граф Келлера»).
- Для $k = 2$ перенос из теории USO-ориентаций[9], для $k > 2$ — авторское обобщение.
- Обобщенный граф Келлера $G(k, n)$: $V = \mathbb{E}_{k^2}^n$,

$$\{v, w\} \in E \leftrightarrow \exists i,\ 1 \leq i \leq n \colon v_i \equiv w_i \mod k,\ v_i \neq w_i.$$

- Графы примечательны тем, что в случае $k = 2$ некоторым образом кодируют неэквивалентные замощения пространства гиперкубами[10].

[9] Borzechowski, Doolittle и Weber, «A Universal Construction for Unique Sink Orientations».

[10] Mathew, Östergård и Popa, «Enumerating cube tilings»; Sikirić, Itoh и Poyarkov, «Cube packings, second moment and holes».

Кликовое представление правильных семейств

- Правильные семейства находятся во взаимно-однозначном соответствии с кликами некоторым образом построенного графа («обобщенный граф Келлера»).
- Для $k = 2$ перенос из теории USO-ориентаций[9], для $k > 2$ — авторское обобщение.
- Обобщенный граф Келлера $G(k, n)$: $V = \mathbb{E}^n_{k^2}$,

$$\{v, w\} \in E \leftrightarrow \exists i,\ 1 \le i \le n\colon v_i \equiv w_i \mod k,\ v_i \ne w_i.$$

- Графы примечательны тем, что в случае $k = 2$ некоторым образом кодируют неэквивалентные замощения пространства гиперкубами[10].

Клики и правильные семейства

Каждой клике на k^n вершинах в графе $G(k, n)$ можно поставить в биективное соответствие некоторое правильное семейство $\mathcal{F}_n$ размера n на $\mathbb{E}^n_k$.

[9] Borzechowski, Doolittle и Weber, «A Universal Construction for Unique Sink Orientations».

[10] Mathew, Östergård и Popa, «Enumerating cube tilings»; Sikirić, Itoh и Poyarkov, «Cube packings, second moment and holes».

Спасибо за внимание!

Список литературы I

- Borzechowski, M., J Doolittle и S. Weber. «A Universal Construction for Unique Sink Orientations». Англ. В: *arXiv preprint arXiv:2211.06072* (2022).
- Bosshard, V. и B. Gärtner. «Pseudo unique sink orientations». Англ. В: *arXiv preprint arXiv:1704.08481* (2017).
- Galatenko, A. V., V. A. Nosov и A. E. Pankratiev. «Latin squares over quasigroups». Англ. В: *Lobachevskii Journal of Mathematics* 41.2 (2020), с. 194—203.
- Mathew, K. A., P. Östergård и A. Popa. «Enumerating cube tilings». Англ. В: *Discrete & Computational Geometry* 50.4 (2013), с. 1112—1122.
- Matousek, J. «The Number Of Unique-Sink Orientations of the Hypercube». Англ. В: *Combinatorica* 26 (февр. 2006), с. 91—99.
- Richard, A. «Fixed point theorems for Boolean networks expressed in terms of forbidden subnetworks». Англ. В: *Theoretical Computer Science* 583 (2015), с. 1—26.
- Ruet, P. «Asynchronous Boolean networks and hereditarily bijective maps». Англ. В: *Natural Computing* 14 (2015), с. 545—553.

Список литературы II

- Ruet, P. «Local cycles and dynamical properties of Boolean networks». Англ. В: *Mathematical Structures in Computer Science* 26.4 (2016), с. 702—718.
- Schurr, I. «Unique sink orientations of cubes». Англ. Дис. … док. ETH Zurich, 2004.
- Sikirić, M. D., Y. Itoh и A. Poyarkov. «Cube packings, second moment and holes». Англ. В: *European Journal of Combinatorics* 28.3 (2007), с. 715—725.
- Szabó, T. и E. Welzl. «Unique sink orientations of cubes». Англ. В: *Proceedings 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE. 2001, с. 547—555.
- Thomas, R. «Regulatory networks seen as asynchronous automata: a logical description». Англ. В: *Journal of theoretical biology* 153.1 (1991), с. 1—23.

Список литературы III

- Галатенко, А. В., В. А. Носов и А. Е. Панкратьев. «Об одном критерии правильности семейства функций». В: *Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории.* Материалы XIX Международной конференции, посвященной двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышёва. Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого. 2021.
- Галатенко, А. В., В. А. Носов, А. Е. Панкратьев и В. М. Староверов. «Порождение правильных семейств функций». В: *Интеллектуальные системы. Теория и приложения* 25.4 (2021), с. 100—103.
- Носов, В. А. «Критерий регулярности булевского неавтономного автомата с разделенным входом». В: *Интеллектуальные системы. Теория и приложения* 3.3-4 (1998), с. 269—280.

Список литературы IV

- Носов, В. А. «Построение классов латинских квадратов в булевой базе данных». В: *Интеллектуальные системы. Теория и приложения* 4.3-4 (1999), с. 307—320. ISSN: 2075-9460; 2411-4448.
- Носов, В. А. и А. Е. Панкратьев. «Латинские квадраты над абелевыми группами». В: *Фундаментальная и прикладная математика* 12.3 (2006), с. 65—71.
- Рыков, Д. О. «О правильных семействах функций, используемых для задания латинских квадратов». В: *Интеллектуальные системы. Теория и приложения* 18.1 (2014), с. 141—152.
- Царегородцев, К.Д. «О свойствах правильных семейств булевых функций». В: *Дискретная математика* 33.1 (2021), с. 91—102.
  EDN: JTVVAY; журнал индексируется в RSCI. Импакт-фактор: 0.385 (РИНЦ); общий объем 0.75 п. л..
  Перевод:

Список литературы V

Tsaregorodtsev K.D. Properties of proper families of Boolean functions // Discrete Mathematics and Applications. — 2022. — Vol. 32, No. 5. — PP. 369–378.
EDN: INXYMW; журнал индексируется в WOS, Scopus. Импакт-фактор: 0.3 (JIF); общий объем 0.75 п. л.

Яблонский, С. В. *Введение в дискретную математику*. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.