

Под **надёжностью** (reability) понимается свойство системы сохранять заданный уровень производительности путём программной настройки её структуры и программной организации функционального взаимодействия между её ресурсами.

- $\lambda$  - интенсивность потока отказов в любой из  $N$  машин.
- $\lambda^{-1}$  - среднее время безотказной работы одной ЭМ (средняя наработка до отказа ЭМ)
- $\mu$  – интенсивность восстановления
- $1/\mu$  – обнаружение + восстановление

- $\xi(t)$  – число исправных машин в момент времени  $t$
- $P_j(i, t)$  – вероятность того, что в системе, начавшей функционировать в состоянии  $i \in E_0^N$ , в момент  $t$  будет  $j \in E_0^N$  исправных машин
- $R(t)$  – функция надежности
- $U(t)$  – функция восстановимости
- $S(t)$  – функция готовности

- Функция надежности  $R(t)$  — вероятность того, что производительность ВС, начавшей функционировать в состоянии  $i$  ( $n \leq i \ll N$ ) на промежутке времени  $[0, t)$ , равна производительности основной подсистемы.

$$R(t) = P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \Omega(\tau) = A_n n \omega | n \leq i \leq N\}$$

- Функция восстановимости  $U(t)$  — вероятность того, что в ВС, имеющей начальное состояние  $i$  ( $0 \leq i \ll n$ ), будет восстановлен на промежутке времени  $[0, t)$  уровень производительности равный производительности основной подсистемы.

$$U(t) = 1 - P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \Omega(\tau) = 0 | 0 \leq i < n\}$$

- Функция готовности  $S(t)$  — вероятность того, что производительность системы, начавшей функционировать в состоянии  $i$  ( $0 \leq i \ll N$ ), равна в момент времени  $t \geq 0$  производительности основной подсистемы.

$$S(t) = P\{\Omega(t) = A_n n \omega | i \in E_0^N\}$$

Предельные значения показателей при  $t \rightarrow \infty$  будут характеризовать надёжность ВС в стационарном режиме работы. Однако для данного режима такие показатели, как  $R(t)$  и  $U(t)$ , не информативны

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = 1$$

Для оценки производительности ВС на промежутке времени при длительной эксплуатации используются функции  $R^*(t)$  и  $U^*(t)$  **оперативной надёжности и восстановимости ВС.**

**Функция**  $R^*(t)$  – вероятность того, что производительность системы, которая в начальный момент времени находится в состоянии  $i$ ,  $n \leq i \leq N$ , с вероятностью  $P_i$ , равна на промежутке времени  $[0, t)$  производительности подсистемы.

$$R^*(t) = P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \Omega(\tau) = A_n n \omega | P_i, i \in E_n^N\}$$

или

$$R^*(t) = P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \xi(\tau) \geq n | P_i, i \in E_n^N\}$$

$(E_n^N = \{n, n + 1, \dots, N\})$ . Отсюда следует, что  $R^*(0) = \sum_{i=n}^N P_i$



**Функция  $U^*(t)$**  – вероятность того, что в ВС, находящейся в начальный момент времени в состоянии  $i$ ,  $0 \leq i < n$ , с вероятностью  $P_i$ , на промежутке времени  $[0, t)$  будет восстановлен уровень производительности основной подсистемы:

$$U^*(t) = 1 - P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \Omega(\tau) = 0 | P_i, 0 \leq i \leq n\}$$

или

$$U^*(t) = 1 - P\{\forall \tau \in [0, t) \rightarrow \xi(\tau) < n | P_i, 0 \leq i < n\}$$

(Отсюда следует, что  $U^*(0) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} P_i$ )

В отличие от функций надёжности и восстановимости, функция готовности, введённая для переходного режима, может быть использована *и в стационарном режиме* работы ВС. В самом деле:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \sum_{j=n}^N \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(i, t) = \sum_{j=n}^N P_j = S$$

Причём предел  $S$  не зависит от начального состояния системы  $i \in E_0^N$ . Величину  $S$  называют **коэффициентом готовности**. Он является самым распространённым показателем для стационарного режима функционирования ВС.



Показатели надёжности позволяют:

- Подобрать такой состав вновь komponуемой ВС, при котором обеспечиваются заданные уровни и производительности и надёжности.
- Проанализировать качество работы существующей ВС и оценить её возможности по решению задач.

### Показатели надёжности **для переходного режима**:

- С какой вероятностью задача будет решена, если в момент его поступления производительность не менее требуемой. Говоря иначе, сможет ли пользователь успешно решить свою задачу до отказа системы.
- Как быстро можно ожидать восстановления требуемого уровня производительности, если в момент поступления задачи производительность ВС низка.
- Будет ли ВС иметь необходимую производительность в момент поступления задачи в систему.

### Показатели надёжности **для стационарного режима:**

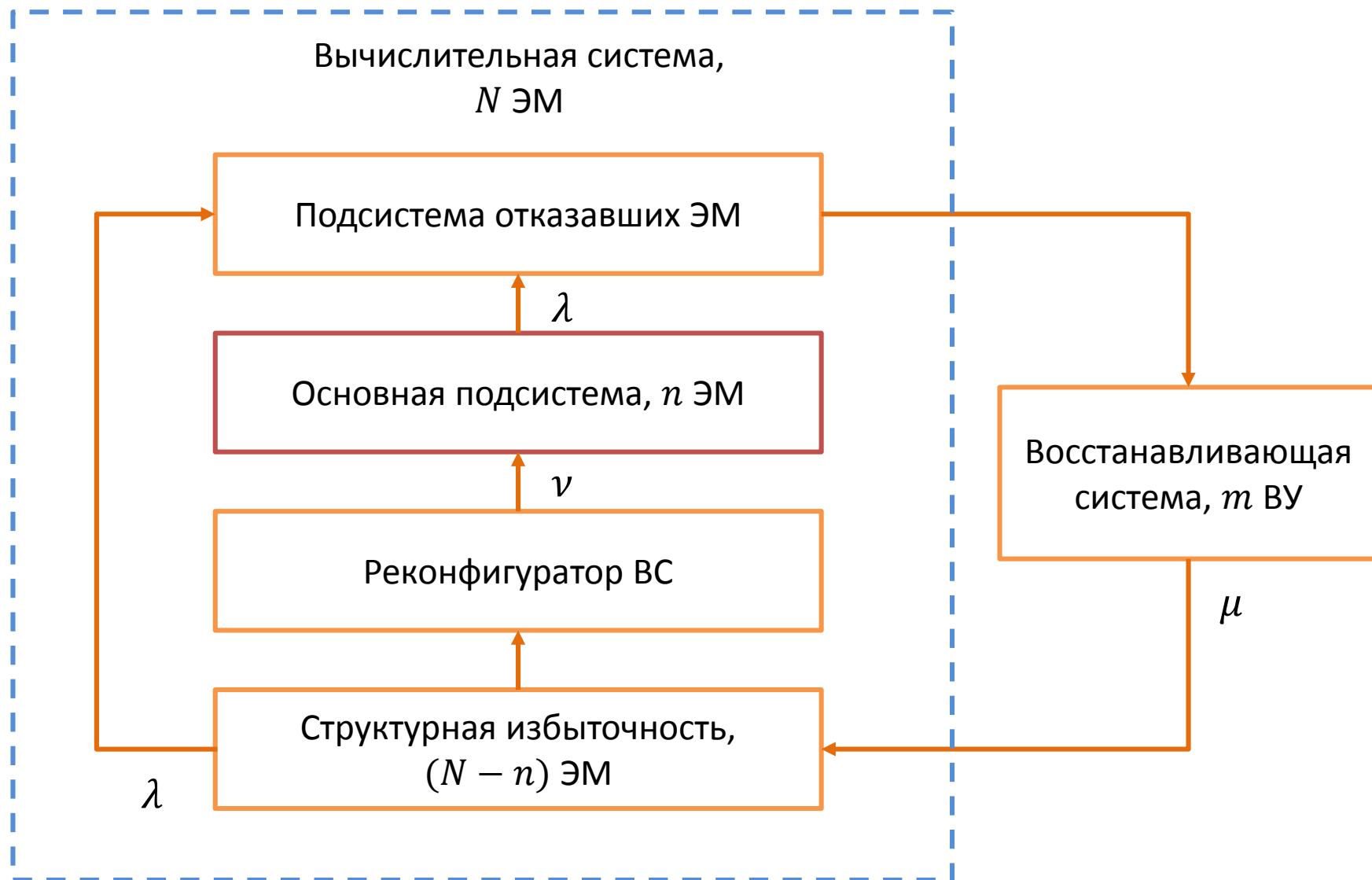
- Могут ли быть решены поступающие задачи, если система длительно эксплуатируется. Иначе, могут ли быть решены задачи, если в момент их поступления достоверно неизвестно, в каком состоянии находится система.
- Насколько быстро можно ожидать восстановления требуемой производительности, если ВС длительно эксплуатируется.
- Будет ли система иметь необходимую производительность в любой момент поступления задачи, если она уже достаточно долго находится в эксплуатации.

# **Методика расчёта показателей надёжности вычислительных систем**

К методике расчёта предъявляют требования:

1. Приемлемость к **большемасштабным** ВС (ВС с любым количеством ЭМ)
2. **Адекватность** реальному процессу работы ВС или реализация принципов *квазианалогии* (удовлетворительная для практики точность)
3. **Единообразие** методов исследования функционирования ВС в обоих режимах.
4. Простота численного анализа функционирования ВС при произвольном количестве ЭМ (**невысокая трудоёмкость** вычислений).
5. Возможность выявления **общих закономерностей**, которые отражают достигнутый и перспективный уровни технологии ВТ.

# Модель функционирования ВС со структурной избыточностью



В случае отказа ЭМ основной подсистемы и после их локализации требуется *реконфигурация* ВС в целом.

С помощью **реконфигуратора** порождается новая конфигурация основной подсистемы из  $n$  исправных ЭМ (e.g. все исправные ЭМ основной + исправные ЭМ избыточной).

Конфигуратор характеризуется *интенсивностью переключений*  $\nu$ . Для практики можно считать, что реконфигурация системы осуществляется мгновенно, т.е.  $\nu^{-1} = 0$ .

- Проверка работоспособности ВС и поиск отказавших машин выполняется средствами (само)контроля и (само) диагностики. Последние будем называть **контролером и диагностом**.
- Композиция контролера, диагност и реконфигуратора является **виртуальным восстанавливающим устройством (ВУ)** для распределённой ВС.
- Возможна генерация *нескольких виртуальных ВУ*. Каждое ВУ обслуживает одну ЭМ.



Функции компонентов каждого ВУ.

- **Для диагноста** – выбор (локализация) обслуживаемой ЭМ;
- **Для контролера** – проверка работоспособности выбранной машины;
- **Для реконфигуратора** – альтернативное выполнение одной из двух функций:
  - сохранение проверяемой ЭМ в составе основной подсистемы, если она исправна,
  - Включение машины из резерва в состав основной подсистемы в противном случае.

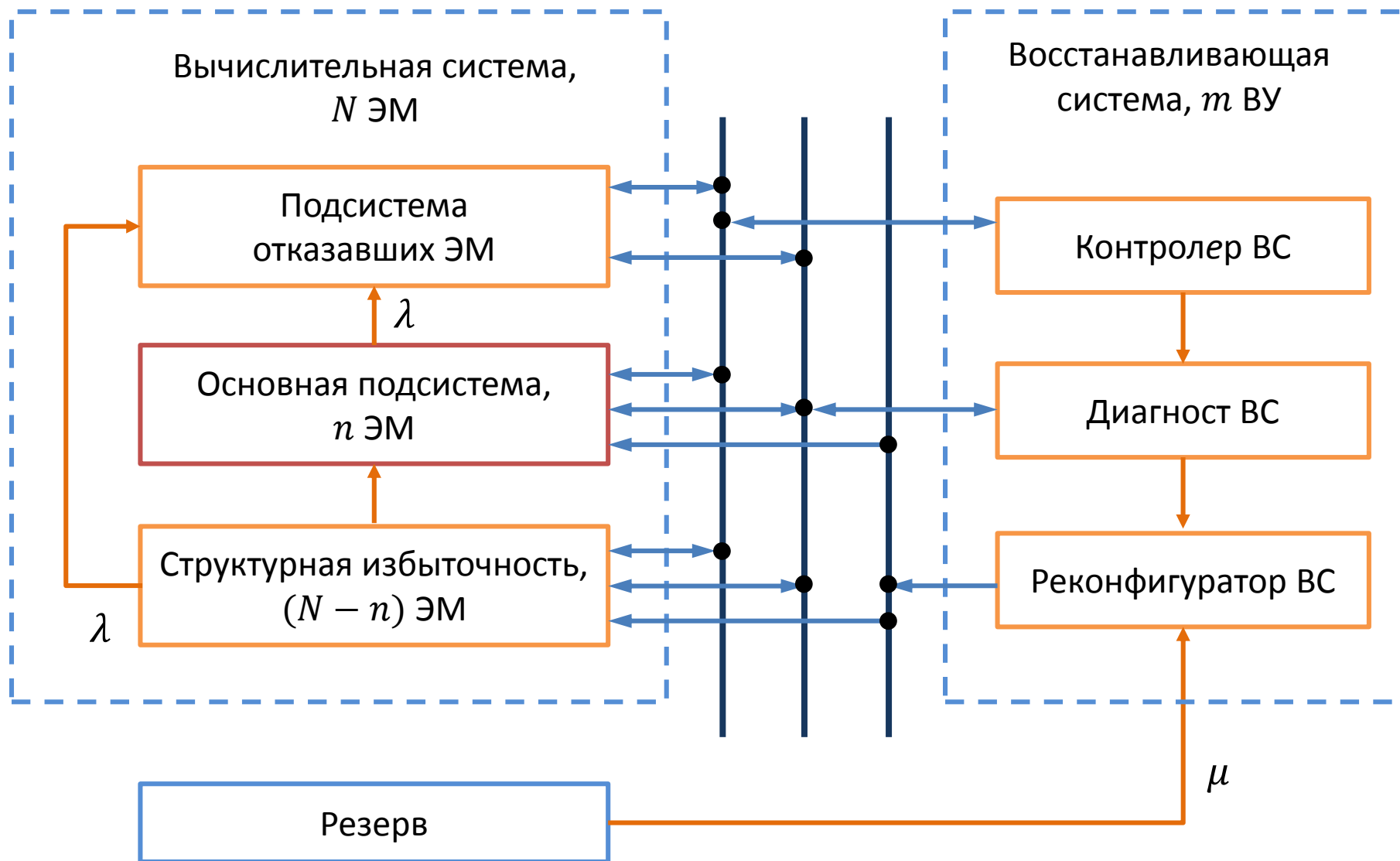
Будем считать, что  $m$  виртуальных ВС составляют **восстанавливающую систему**,  $1 \leq m \leq N$ .

Интенсивность  $\mu$  – среднее число машин резерва, включаемых в единицу времени одним ВУ в состав ВС вместо отказавших ЭМ. **Среднее время восстановления:**

$$\tau = \mu^{-1} = \tau_{\kappa} + \tau_{\text{д}} + \tau_{\text{р}}$$

где  $\tau_{\kappa}$ ,  $\tau_{\text{д}}$ ,  $\tau_{\text{р}}$  – математические ожидания времени соответственно контроля, диагностики и реконфигурации ВС.

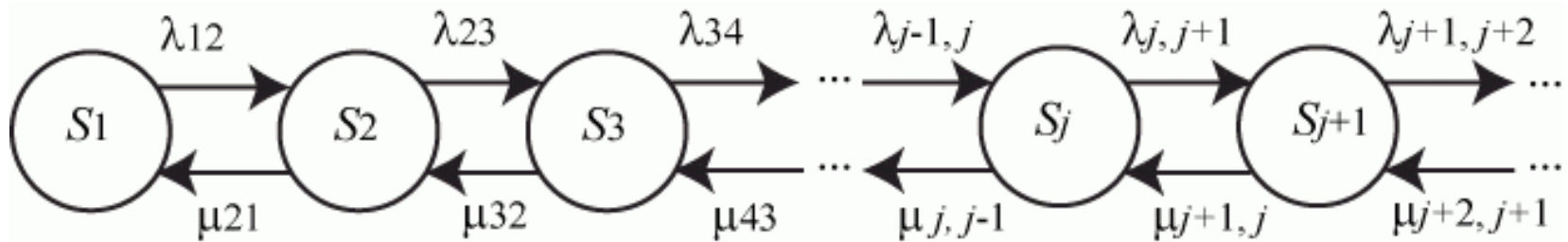
# Модель функционирования ВС со структурной избыточностью



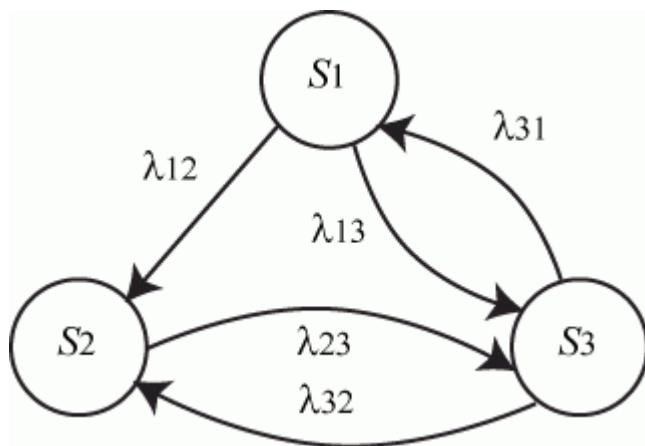
Практически приемлемым для вычисления показателей является подход, основанный на классическом аппарате массового обслуживания и методах приближенных вычислений. Схема подхода:

1. Составляются дифференциальные уравнения для вероятностей состояний системы с учётом подмножества поглощающих состояний.
2. Задаются начальные состояния.
3. Система дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа сводится к алгебраической.

## Процесс гибели и размножения



## Система дифференциальных уравнений Колмогорова



$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{31}p_3(t) - \lambda_{13}p_1(t) - \lambda_{12}p_1(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{32}p_3(t) - \lambda_{23}p_2(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13}p_1(t) + \lambda_{23}p_2(t) - \lambda_{31}p_3(t) - \lambda_{32}p_3(t) \end{cases}$$

4. Определяется решение алгебраической системы уравнений, причем решение выражается через полиномы, вычисляемые рекуррентно.
5. Доказываются свойства корней полиномов, позволяющие приближённо вычислять их значения.
6. После обращения преобразования Лапласа выписываются формулы для показателей качества функционирования ВС.
7. Для получения числовых значений показателей составляются программы.

Ограничимся асимптотическими оценками вероятностей безотказной работы и восстановления.