Поиск экстремумов функции.

1. (7) Можно ли выбрать несчетное число попарно не пересекающихся интервалов на прямой? А кругов на плоскости (точка не считается за круг)?
   Нет. Каждый отрезок содержит рациональные числа. Для каждого отрезка его рациональные числа уникальны. Рациональные числа одного отрезка больше всех рациональных чисел другого, если тот лежит левее. А значит мы можем сопоставить каждый отрезок любому рациональному числу на нем, тем самым сделав инъекцию в $\mathbb{Q}$, а значит и в $\mathbb{N}$. Поскольку $\mathbb{Q}^2$ тоже счетно, то это же рассуждение применимо и для кругов, а значит их множество тоже не может быть счетно.

2. (7) Число $a \in \mathbb{R}$ называется алгебраическим, если найдутся такие $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, что
   $$a^n + q_1 a^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \dots + q_{n-1} a + q_n = 0.$$
   Обозначим множество алгебраических чисел через $\mathcal{A}$. Докажите, что множество $\mathcal{A}$ счетно.
   Решение:
   Все алгебраические числа являются корнем какого-то многочлена с рациональными коэф-ами, и все корни таких многочленов – алгебраические числа. Значит множество этих чисел равно множеству корней всех многочленов с рациональными коэф-ами. У многочлена степени $n \leq n$ корней. Их можно расположить в возрастающем порядке. Рассмотрим множество корней многочлена степени n. Такой многочлен можно представить, как элемент мн-ва $\mathbb{Q}^n$. Множество всех таких многочленов является подмножеством $\mathbb{Q}^n$, а значит счетно. Каждый многочлен имеет $\leq n$ корней, значит множество всех корней всех многочленов степени n счетно. Степени многочленов – натуральные числа. А это значит, что множеств всех корней всех многочленов со степенью n счетное количество. Из этого следует, что и объединение всех этих множеств счетно. А значит и $\mathcal{A}$.

3. Найдите предельные точки множества A, если
   1) (4) $A = \{\frac{(1-(-1)^n)2^n+1}{2^n+3} \ \mid n \in \mathbb{N}\}$
      Решение:
      A – совокупность элементов двух последовательностей $x_n = \frac{2^{(2n+1)+1}+1}{2^{2n+1}+3}, y_n = \frac{1}{2^{2n}+3}$. $x_n \to \frac{2+0}{1+0} = 2, y_n \to 0$, $x_n \neq 2, y_n \neq 0$. Это значит, что в A в любых проколотых окрестностях 2 и 0 лежит бесконечное число точек, а значит 2 и 0 – предельные точки. А вне этих окрестностей лежит конечное число точек, а значит и предельных точек A больше нет.
   2) (4) $A = \{\frac{(1+\cos(\pi n))\log(3n)+\log(n)}{\log(2n)} \ \mid n \in \mathbb{N}\}$
      Решение:
      Похоже на предыдущий пункт. A – совокупность элементов $x_n = \frac{\log(2n+1)}{\log(2(2n+1))}, y_n = \frac{2\log(3(2n))+\log(2n)}{\log(2(2n))}, x_n \to 1, y_n \to 3$. По аналогии с предыдушим пунктом, 1 и 3 – предельные точки и так же, как и там, x_n и y_n имеют только конечное число элементов вне окрестностей этих точек, а значит и другие точки – не предельные.

4. (5) Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — счетное множество. Найдите $(\mathbb{R} \setminus A)'$.
   Ответ: $\mathbb{R}$. Предположим противное, т.е. $\exists x \in \mathbb{R}, \mathcal{E} > 0$ такие, что $\forall y \in (\mathbb{R} \setminus A)$ лежит вне проколотой $\mathcal{E}$ окрестности x. Тогда точки, которые лежали внутри этой окрестности принадлежат A, а это значит, что у A есть несчетное подмножество, чего не может быть.

5. (7) Докажите, что $A'' \subset A'$ для всякого $A \subset \mathbb{R}$. Решение:
   Нужно доказать, что любая точка A'' является предельной точкой A. Рассмотрим случайный $x \in A''$. По условию: $\forall \mathcal{E} > 0 \exists y \in A' : 0 < |x-y| < \mathcal{E}$. Также мы знаем, что для y $\forall \mathcal{E}' > 0$ $\exists a \in A : 0 < |y-a| < \mathcal{E}'$. Тогда возьмем $\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}-|x-y|}{2}$ и в этом случае a будет лежать и в $\mathcal{E}$ окрестности x. А значит $\forall \mathcal{E} > 0$ $\exists a \in A : 0 < |x-a| < \mathcal{E}$.