1. **[О математике](http://barabash.ucoz.ru/index/o_matematike/0-91)**

# [**Развитие математики**](http://barabash.ucoz.ru/index/istorija_matematiki/0-81)

**История развития математики**

**Введение**  
Самой древней математической деятельностью был счет. Счет был необходим, чтобы следить за поголовьем скота и вести торговлю. Некоторые первобытные племена подсчитывали количество предметов, сопоставляя им различные части тела, главным образом пальцы рук и ног. Наскальный рисунок, сохранившийся до наших времен от каменного века, изображает число 35 в виде серии выстроенных в ряд 35 палочек-пальцев. Первыми существенными успехами в арифметике стали концептуализация числа и изобретение четырех основных действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Первые достижения геометрии связаны с такими простыми понятиями, как прямая и окружность. Дальнейшее развитие математики началось примерно в 3000 до н.э. благодаря вавилонянам и египтянам.  
  
**1. ГРЕЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА**  
Классическая Греция. С точки зрения 20 в. родоначальниками математики явились греки классического периода (6-4 вв. до н.э.). Математика, существовавшая в более ранний период, была набором эмпирических заключений. Напротив, в дедуктивном рассуждении новое утверждение выводится из принятых посылок способом, исключавшим возможность его неприятия.  
Настаивание греков на дедуктивном доказательстве было экстраординарным шагом. Ни одна другая цивилизация не дошла до идеи получения заключений исключительно на основе дедуктивного рассуждения, исходящего из явно сформулированных аксиом. Одно из объяснений приверженности греков методам дедукции мы находим в устройстве греческого общества классического периода. Математики и философы (нередко это были одни и те же лица) принадлежали к высшим слоям общества, где любая практическая деятельность рассматривалась как недостойное занятие. Математики предпочитали абстрактные рассуждения о числах и пространственных отношениях решению практических задач. Математика делилась на арифметику - теоретический аспект и логистику - вычислительный аспект. Заниматься логистикой предоставляли свободнорожденным низших классов и рабам.  
  
Греческая система счисления была основана на использовании букв алфавита. Аттическая система, бывшая в ходу с 6-3 вв. до н.э., использовала для обозначения единицы вертикальную черту, а для обозначения чисел 5, 10, 100, 1000 и 10 000 начальные буквы их греческих названий. В более поздней ионической системе счисления для обозначения чисел использовались 24 буквы греческого алфавита и три архаические буквы. Кратные 1000 до 9000 обозначались так же, как первые девять целых чисел от 1 до 9, но перед каждой буквой ставилась вертикальная черта. Десятки тысяч обозначались буквой М (от греческого мириои - 10 000), после которой ставилось то число, на которое нужно было умножить десять тысяч.  
  
Дедуктивный характер греческой математики полностью сформировался ко времени Платона и Аристотеля. Изобретение дедуктивной математики принято приписывать Фалесу Милетскому (ок. 640-546 до н.э.), который, как и многие древнегреческие математики классического периода, был также философом. Высказывалось предположение, что Фалес использовал дедукцию для доказательства некоторых результатов в геометрии, хотя это сомнительно.  
Другим великим греком, с чьим именем связывают развитие математики, был Пифагор (ок. 585-500 до н.э.). Полагают, что он мог познакомиться с вавилонской и египетской математикой во время своих долгих странствий. Пифагор основал движение, расцвет которого приходится на период ок. 550-300 до н.э. Пифагорейцы создали чистую математику в форме теории чисел и геометрии. Целые числа они представляли в виде конфигураций из точек или камешков, классифицируя эти числа в соответствии с формой возникающих фигур («фигурные числа»). Слово «калькуляция» (расчет, вычисление) берет начало от греческого слова, означающего «камешек». Числа 3, 6, 10 и т.д. пифагорейцы называли треугольными, так как соответствующее число камешков можно расположить в виде треугольника, числа 4, 9, 16 и т.д. - квадратными, так как соответствующее число камешков можно расположить в виде квадрата, и т.д.  
Из простых геометрических конфигураций возникали некоторые свойства целых чисел. Например, пифагорейцы обнаружили, что сумма двух последовательных треугольных чисел всегда равна некоторому квадратному числу. Они открыли, что если (в современных обозначениях) n2 - квадратное число, то n2 + 2n +1 = (n + 1)2. Число, равное сумме всех своих собственных делителей, кроме самого этого числа, пифагорейцы называли совершенным. Примерами совершенных чисел могут служить такие целые числа, как 6, 28 и 496. Два числа пифагорейцы называли дружественными, если каждое из чисел равно сумме делителей другого; например, 220 и 284 - дружественные числа (и здесь само число исключается из собственных делителей).  
  
Для пифагорейцев любое число представляло собой нечто большее, чем количественную величину. Например, число 2 согласно их воззрению означало различие и потому отождествлялось с мнением. Четверка представляла справедливость, так как это первое число, равное произведению двух одинаковых множителей.  
  
Пифагорейцы также открыли, что сумма некоторых пар квадратных чисел есть снова квадратное число. Например, сумма 9 и 16 равна 25, а сумма 25 и 144 равна 169. Такие тройки чисел, как 3, 4 и 5 или 5, 12 и 13, называются пифагоровыми числами. Они имеют геометрическую интерпретацию, если два числа из тройки приравнять длинам катетов прямоугольного треугольника, то третье число будет равно длине его гипотенузы. Такая интерпретация, по-видимому, привела пифагорейцев к осознанию более общего факта, известного ныне под названием теоремы Пифагора, согласно которой в любом прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.  
Рассматривая прямоугольный треугольник с единичными катетами, пифагорейцы обнаружили, что длина его гипотенузы равна , и это повергло их в смятение, ибо они тщетно пытались представить число в виде отношения двух целых чисел, что было крайне важно для их философии. Величины, непредставимые в виде отношения целых чисел, пифагорейцы назвали несоизмеримыми; современный термин - «иррациональные числа». Около 300 до н.э. Евклид доказал, что число несоизмеримо. Пифагорейцы имели дело с иррациональными числами, представляя все величины геометрическими образами. Если 1 и считать длинами некоторых отрезков, то различие между рациональными и иррациональными числами сглаживается. Произведение чисел и есть площадь прямоугольника со сторонами длиной и .Мы и сегодня иногда говорим о числе 25 как о квадрате 5, а о числе 27 - как о кубе 3.  
Древние греки решали уравнения с неизвестными посредством геометрических построений. Были разработаны специальные построения для выполнения сложения, вычитания, умножения и деления отрезков, извлечения квадратных корней из длин отрезков; ныне этот метод называется геометрической алгеброй.  
  
Приведение задач к геометрическому виду имело ряд важных последствий. В частности, числа стали рассматриваться отдельно от геометрии, поскольку работать с несоизмеримыми отношениями можно было только с помощью геометрических методов. Геометрия стала основой почти всей строгой математики по крайней мере до1600. И даже в 18 в., когда уже были достаточно развиты алгебра и математический анализ, строгая математика трактовалась как геометрия, и слово «геометр» было равнозначно слову «математик».  
Именно пифагорейцам мы во многом обязаны той математикой, которая затем была систематизированно изложена и доказана в Началах Евклида. Есть основания полагать, что именно они открыли то, что ныне известно как теоремы о треугольниках, параллельных прямых, многоугольниках, окружностях, сферах и правильных многогранниках.  
  
Одним из самых выдающихся пифагорейцев был Платон (ок. 427-347 до н.э.). Платон был убежден, что физический мир постижим лишь посредством математики. Считается, что именно ему принадлежит заслуга изобретения аналитического метода доказательства. (Аналитический метод начинается с утверждения, которое требуется доказать, и затем из него последовательно выводятся следствия до тех пор, пока не будет достигнут какой-нибудь известный факт; доказательство получается с помощью обратной процедуры.) Принято считать, что последователи Платона изобрели метод доказательства, получивший название «доказательство от противного». Заметное место в истории математики занимает Аристотель, ученик Платона. Аристотель заложил основы науки логики и высказал ряд идей относительно определений, аксиом, бесконечности и возможности геометрических построений.  
Величайшим из греческих математиков классического периода, уступавшим по значимости полученных результатов только Архимеду, был Евдокс (ок. 408-355 до н.э.). Именно он ввел понятие величины для таких объектов, как отрезки прямых и углы. Располагая понятием величины, Евдокс логически строго обосновал пифагорейский метод обращения с иррациональными числами.  
Работы Евдокса позволили установить дедуктивную структуру математики на основе явно формулируемых аксиом. Ему же принадлежит и первый шаг в создании математического анализа, поскольку именно он изобрел метод вычисления площадей и объемов, получивший название «метода исчерпывания». Этот метод состоит в построении вписанных и описанных плоских фигур или пространственных тел, которые заполняют («исчерпывают») площадь или объем той фигуры или того тела, которое является предметом исследования. Евдоксу же принадлежит и первая астрономическая теория, объясняющая наблюдаемое движение планет. Предложенная Евдоксом теория была чисто математической; она показывала, каким образом комбинации вращающихся сфер с различными радиусами и осями вращения могут объяснить кажущиеся нерегулярными движения Солнца, Луны и планет.  
  
Около 300 до н.э. результаты многих греческих математиков были сведены в единое целое Евклидом, написавшим математический шедевр Начала. Из немногих проницательно отобранных аксиом Евклид вывел около 500 теорем, охвативших все наиболее важные результаты классического периода. Свое сочинение Евклид начал с определения таких терминов, как прямая, угол и окружность. Затем он сформулировал десять самоочевидных истин, таких, как «целое больше любой из частей». И из этих десяти аксиом Евклид смог вывести все теоремы. Для математиков текст Начал Евклида долгое время служил образцом строгости, пока в 19 в. не обнаружилось, что в нем имеются серьезные недостатки, такие как неосознанное использование несформулированных в явном виде допущений.  
Аполлоний (ок. 262-200 до н.э.) жил в александрийский период, но его основной труд выдержан в духе классических традиций. Предложенный им анализ конических сечений - окружности, эллипса, параболы и гиперболы - явился кульминацией развития греческой геометрии. Аполлоний также стал основателем количественной математической астрономии.  
  
Александрийский период. В этот период, который начался около 300 до н.э., характер греческой математики изменился. Александрийская математика возникла в результате слияния классической греческой математики с математикой Вавилонии и Египта. В целом математики александрийского периода были больше склонны к решению чисто технических задач, чем к философии. Великие александрийские математики - Эратосфен, Архимед, Гиппарх, Птолемей, Диофант и Папп - продемонстрировали силу греческого гения в теоретическом абстрагировании, но столь же охотно применяли свой талант к решению практических проблем и чисто количественных задач.  
Эратосфен (ок. 275-194 до н.э.) нашел простой метод точного вычисления длины окружности Земли, ему же принадлежит календарь, в котором каждый четвертый год имеет на один день больше, чем другие. Астроном Аристарх (ок. 310-230 до н.э.) написал сочинение О размерах и расстояниях Солнца и Луны, содержавшее одну из первых попыток определения этих размеров и расстояний; по своему характеру работа Аристарха была геометрической.  
  
Величайшим математиком древности был Архимед (ок. 287-212 до н.э.). Ему принадлежат формулировки многих теорем о площадях и объемах сложных фигур и тел, вполне строго доказанные им методом исчерпывания. Архимед всегда стремился получить точные решения и находил верхние и нижние оценки для иррациональных чисел. Например, работая с правильным 96-угольником, он безукоризненно доказал, что точное значение числа ? находится между 31/7 и 310/71. Архимед доказал также несколько теорем, содержавших новые результаты геометрической алгебры. Ему принадлежит формулировка задачи о рассечении шара плоскостью так, чтобы объемы сегментов находились между собой в заданном отношении. Архимед решил эту задачу, отыскав пересечение параболы и равнобочной гиперболы.  
Архимед был величайшим математическим физиком древности. Для доказательства теорем механики он использовал геометрические соображения. Его сочинение О плавающих телах заложило основы гидростатики. Согласно легенде, Архимед открыл носящий его имя закон, согласно которому на тело, погруженное в воду, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной им жидкости, во время купания, находясь в ванной, и не в силах совладать с охватившей его радостью открытия, выбежал обнаженный на улицу с криком: «Эврика!» («Открыл!»)  
  
Во времена Архимеда уже не ограничивались геометрическими построениями, осуществимыми только с помощью циркуля и линейки. Архимед использовал в своих построениях спираль, а Диоклес (конец 2 в. до н.э.) решил проблему удвоения куба с помощью введенной им кривой, получившей название циссоиды.  
  
В александрийский период арифметика и алгебра рассматривались независимо от геометрии. Греки классического периода имели логически обоснованную теорию целых чисел, однако александрийские греки, восприняв вавилонскую и египетскую арифметику и алгебру, во многом утратили уже наработанные представления о математической строгости. Живший между 100 до н.э. и 100 н.э. Герон Александрийский трансформировал значительную часть геометрической алгебры греков в откровенно нестрогие вычислительные процедуры. Однако, доказывая новые теоремы евклидовой геометрии, он по-прежнему руководствовался стандартами логической строгости классического периода.  
Первой достаточно объемистой книгой, в которой арифметика излагалась независимо от геометрии, было Введение в арифметику Никомаха (ок. 100 н.э.). В истории арифметики ее роль сравнима с ролью Начал Евклида в истории геометрии. На протяжении более 1000 лет она служила стандартным учебником, поскольку в ней ясно, четко и всеобъемлюще излагалось учение о целых числах (простых, составных, взаимно простых, а также о пропорциях). Повторяя многие пифагорейские утверждения, Введение Никомаха вместе с тем шло дальше, так как Никомах видел и более общие отношения, хотя и приводил их без доказательства.  
  
Знаменательной вехой в алгебре александрийских греков стали работы Диофанта (ок. 250). Одно из главных его достижений связано с введением в алгебру начал символики. В своих работах Диофант не предлагал общих методов, он имел дело с конкретными положительными рациональными числами, а не с их буквенными обозначениями. Он заложил основы т.н. диофантова анализа - исследования неопределенных уравнений.  
  
Высшим достижением александрийских математиков стало создание количественной астрономии. Гиппарху (ок. 161-126 до н.э.) мы обязаны изобретением тригонометрии. Его метод был основан на теореме, утверждающей, что в подобных треугольниках отношение длин любых двух сторон одного из них равно отношению длин двух соответственных сторон другого. В частности, отношение длины катета, лежащего против острого угла А в прямоугольном треугольнике, к длине гипотенузы должно быть одним и тем же для всех прямоугольных треугольников, имеющих один и тот же острый угол А. Это отношение известно как синус угла А. Отношения длин других сторон прямоугольного треугольника получили название косинуса и тангенса угла А. Гиппарх изобрел метод вычисления таких отношений и составил их таблицы. Располагая этими таблицами и легко измеримыми расстояниями на поверхности Земли, он смог вычислить длину ее большой окружности и расстояние до Луны. По его расчетам, радиус Луны составил одну треть земного радиуса; по современным данным отношение радиусов Луны и Земли составляет 27/1000. Гиппарх определил продолжительность солнечного года с ошибкой всего лишь в 61/2 минуты; считается, что именно он ввел широты и долготы.  
  
Греческая тригонометрия и ее приложения в астрономии достигли пика своего развития в Альмагесте египтянина Клавдия Птолемея (умер в 168 н.э.). В Альмагесте была представлена теория движения небесных тел, господствовавшая вплоть до 16 в., когда ее сменила теория Коперника. Птолемей стремился построить самую простую математическую модель, сознавая, что его теория - всего лишь удобное математическое описание астрономических явлений, согласованное с наблюдениями. Теория Коперника одержала верх именно потому, что как модель она оказалась проще.  
  
Упадок Греции. После завоевания Египта римлянами в 31 до н.э. великая греческая александрийская цивилизация пришла в упадок. Цицерон с гордостью утверждал, что в отличие от греков римляне не мечтатели, а потому применяют свои математические знания на практике, извлекая из них реальную пользу. Однако в развитие самой математики вклад римлян был незначителен. Римская система счисления основывалась на громоздких обозначениях чисел. Главной ее особенностью был аддитивный принцип. Даже вычитательный принцип, например, запись числа 9 в виде IX, вошел в широкое употребление только после изобретения наборных литер в 15 в. Римские обозначения чисел применялись в некоторых европейских школах примерно до 1600, а в бухгалтерии и столетием позже.  
  
**2. СРЕДНИЕ ВЕКА И ВОЗРОЖДЕНИЕ**  
Средневековая Европа. Римская цивилизация не оставила заметного следа в математике, поскольку была слишком озабочена решением практических проблем. Цивилизация, сложившаяся в Европе раннего Средневековья (ок. 400-1100), не была продуктивной по прямо противоположной причине: интеллектуальная жизнь сосредоточилась почти исключительно на теологии и загробной жизни. Уровень математического знания не поднимался выше арифметики и простых разделов из Начал Евклида. Наиболее важным разделом математики в Средние века считалась астрология; астрологов называли математиками. А поскольку медицинская практика основывалась преимущественно на астрологических показаниях или противопоказаниях, медикам не оставалось ничего другого, как стать математиками.  
  
Около 1100 в западноевропейской математике начался почти трехвековой период освоения сохраненного арабами и византийскими греками наследия Древнего мира и Востока. Поскольку арабы владели почти всеми трудами древних греков, Европа получила обширную математическую литературу. Перевод этих трудов на латынь способствовал подъему математических исследований. Все великие ученые того времени признавали, что черпали вдохновение в трудах греков.  
Первым заслуживающим упоминания европейским математиком стал Леонардо Пизанский (Фибоначчи). В своем сочинении Книга абака (1202) он познакомил европейцев с индо-арабскими цифрами и методами вычислений, а также с арабской алгеброй. В течение следующих нескольких веков математическая активность в Европе ослабла. Свод математических знаний той эпохи, составленный Лукой Пачоли в 1494, не содержал каких-либо алгебраических новшеств, которых не было у Леонардо.  
Возрождение. Среди лучших геометров эпохи Возрождения были художники, развившие идею перспективы, которая требовала геометрии со сходящимися параллельными прямыми. Художник Леон Баттиста Альберти (1404-1472) ввел понятия проекции и сечения. Прямолинейные лучи света от глаза наблюдателя к различным точкам изображаемой сцены образуют проекцию; сечение получается при прохождении плоскости через проекцию. Чтобы нарисованная картина выглядела реалистической, она должна была быть таким сечением. Понятия проекции и сечения порождали чисто математические вопросы. Например, какими общими геометрическими свойствами обладают сечение и исходная сцена, каковы свойства двух различных сечений одной и той же проекции, образованных двумя различными плоскостями, пересекающими проекцию под различными углами? Из таких вопросов и возникла проективная геометрия. Ее основатель - Ж.Дезарг (1593-1662) с помощью доказательств, основанных на проекции и сечении, унифицировал подход к различным типам конических сечений, которые великий греческий геометр Аполлоний рассматривал отдельно.  
  
**3. НАЧАЛО СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ**  
Наступление 16 в. в Западной Европе ознаменовалось важными достижениями в алгебре и арифметике. Были введены в обращение десятичные дроби и правила арифметических действий с ними. Настоящим триумфом стало изобретение в 1614 логарифмов Дж.Непером. К концу 17 в. окончательно сложилось понимание логарифмов как показателей степени с любым положительным числом, отличным от единицы, в качестве основания. С начала 16 в. более широко стали употребляться иррациональные числа. Б.Паскаль (1623-1662) и И.Барроу (1630-1677), учитель И.Ньютона в Кембриджском университете, утверждали, что такое число, как , можно трактовать лишь как геометрическую величину. Однако в те же годы Р.Декарт (1596-1650) и Дж.Валлис (1616-1703) считали, что иррациональные числа допустимы и сами по себе, без ссылок на геометрию. В 16 в. продолжались споры по поводу законности введения отрицательных чисел. Еще менее приемлемыми считались возникавшие при решении квадратных уравнений комплексные числа, такие как , названные Декартом «мнимыми». Эти числа были под подозрением даже в 18 в., хотя Л.Эйлер (1707-1783) с успехом пользовался ими. Комплексные числа окончательно признали только в начале 19 в., когда математики освоились с их геометрическим представлением.  
  
Достижения в алгебре. В 16 в. итальянские математики Н.Тарталья (1499-1577), С.Даль Ферро (1465-1526), Л.Феррари (1522-1565) и Д.Кардано (1501-1576) нашли общие решения уравнений третьей и четвертой степеней. Чтобы сделать алгебраические рассуждения и их запись более точными, было введено множество символов, в том числе +, -, ?, , =, > и <. Самым существенным новшеством стало систематическое использование французским математиком Ф.Виетом (1540-1603) букв для обозначения неизвестных и постоянных величин. Это нововведение позволило ему найти единый метод решения уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Затем математики обратились к уравнениям, степени которых выше четвертой. Работая над этой проблемой, Кардано, Декарт и И.Ньютон (1643-1727) опубликовали (без доказательств) ряд результатов, касающихся числа и вида корней уравнения. Ньютон открыл соотношение между корнями и дискриминантом [b2 - 4ac] квадратного уравнения, а именно, что уравнение ax2 + bx + c = 0 имеет равные действительные, разные действительные или комплексно сопряженные корни в зависимости оттого, будет ли дискриминант b2 - 4ac равен нулю, больше или меньше нуля. В 1799 К.Фридрих Гаусс (1777-1855) доказал т.н. основную теорему алгебры: каждый многочлен n-й степени имеет ровно n корней.  
  
Основная задача алгебры - поиск общего решения алгебраических уравнений - продолжала занимать математиков и в начале 19 в. Когда говорят об общем решении уравнения второй степени ax2 + bx + c = 0, имеют в виду, что каждый из двух его корней может быть выражен с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней, производимых над коэффициентами a, b и с. Молодой норвежский математик Н.Абель (1802-1829) доказал, что невозможно получить общее решение уравнения степени выше 4 с помощью конечного числа алгебраических операций. Однако существует много уравнений специального вида степени выше 4, допускающих такое решение. Накануне своей гибели на дуэли юный французский математик Э.Галуа (1811-1832) дал решающий ответ на вопрос о том, какие уравнения разрешимы в радикалах, т.е. корни каких уравнений можно выразить через их коэффициенты в помощью конечного числа алгебраических операций. В теории Галуа использовались подстановки или перестановки корней и было введено понятие группы, которое нашло широкое применение во многих областях математики.  
  
Развитие теории групп служит хорошим примером преемственности творческой работы в математике. Галуа построил свою теорию, опираясь на работу Абеля, Абель опирался на работу Ж.Лагранжа (1736-1813). В свою очередь многие выдающиеся математики, в том числе Гаусс и А.Лежандр (1752-1833) в своих работах неявно использовали понятие группы. Ньютон не был чрезмерно скромен, когда заявил: «Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов».  
  
Аналитическая геометрия. Аналитическая, или координатная, геометрия была создана независимо П.Ферма (1601-1665) и Р.Декартом для того, чтобы расширить возможности евклидовой геометрии в задачах на построение. Однако Ферма рассматривал свои работы лишь как переформулировку сочинения Аполлония. Подлинное открытие - осознание всей мощи алгебраических методов - принадлежит Декарту. Евклидова геометрическая алгебра для каждого построения требовала изобретения своего оригинального метода и не могла предложить количественную информацию, необходимую науке. Декарт решил эту проблему: он формулировал геометрические задачи алгебраически, решал алгебраическое уравнение и лишь затем строил искомое решение - отрезок, имевший соответствующую длину.  
  
Собственно аналитическая геометрия возникла, когда Декарт начал рассматривать неопределенные задачи на построение, решениями которых является не одна, а множество возможных длин.  
  
Аналитическая геометрия использует алгебраические уравнения для представления и исследования кривых и поверхностей. Декарт считал приемлемой кривую, которую можно записать с помощью единственного алгебраического уравнения относительно х и у. Такой подход был важным шагом вперед, ибо он не только включил в число допустимых такие кривые, как конхоида и циссоида, но также существенно расширил область кривых. В результате в 17-18 вв. множество новых важных кривых, таких как циклоида и цепная линия, вошли в научный обиход.  
  
По-видимому, первым математиком, который воспользовался уравнениями для доказательства свойств конических сечений, был Дж.Валлис. К 1865 он алгебраическим путем получил все результаты, представленные в V книге Начал Евклида.  
  
Аналитическая геометрия полностью поменяла ролями геометрию и алгебру. Как заметил великий французский математик Лагранж, «пока алгебра и геометрия двигались каждая своим путем, их прогресс был медленным, а приложения ограниченными. Но когда эти науки объединили свои усилия, они позаимствовали друг у друга новые жизненные силы и с тех пор быстрыми шагами направились к совершенству».  
  
Математический анализ. Основатели современной науки - Коперник, Кеплер, Галилей и Ньютон - подходили к исследованию природы как математики. Исследуя движение, математики выработали такое фундаментальное понятие, как функция, или отношение между переменными, например d = kt2, где d - расстояние, пройденное свободно падающим телом, а t - число секунд, которое тело находится в свободном падении. Понятие функции сразу же стало центральным в определении скорости в данный момент времени и ускорения движущегося тела. Математическая трудность этой проблемы заключалась в том, что в любой момент тело проходит нулевое расстояние за нулевой промежуток времени. Поэтому определяя значение скорости в момент времени делением пути на время, мы придем к математически бессмысленному выражению 0/0.  
  
Задача определения и вычисления мгновенных скоростей изменения различных величин привлекала внимание почти всех математиков 17 в., включая Барроу, Ферма, Декарта и Валлиса. Предложенные ими разрозненные идеи и методы были объединены в систематический, универсально применимый формальный метод Ньютоном и Г.Лейбницем (1646-1716), создателями дифференциального исчисления. По вопросу о приоритете в разработке этого исчисления между ними велись горячие споры, причем Ньютон обвинял Лейбница в плагиате. Однако, как показали исследования историков науки, Лейбниц создал математический анализ независимо от Ньютона. В результате конфликта обмен идеями между математиками континентальной Европы и Англии на долгие годы оказался прерванным с ущербом для английской стороны. Английские математики продолжали развивать идеи анализа в геометрическом направлении, в то время как математики континентальной Европы, в том числе И.Бернулли (1667-1748), Эйлер и Лагранж достигли несравненно бльших успехов, следуя алгебраическому, или аналитическому, подходу.  
  
Основой всего математического анализа является понятие предела. Скорость в момент времени определяется как предел, к которому стремится средняя скорость d/t, когда значение t все ближе подходит к нулю. Дифференциальное исчисление дает удобный в вычислениях общий метод нахождения скорости изменения функции f (x) при любом значении х. Эта скорость получила название производной. Из общности записи f (x) видно, что понятие производной применимо не только в задачах, связанных с необходимостью найти скорость или ускорение, но и по отношению к любой функциональной зависимости, например, к какому-нибудь соотношению из экономической теории. Одним из основных приложений дифференциального исчисления являются т.н. задачи на максимум и минимум; другой важный круг задач - нахождение касательной к данной кривой.  
  
Оказалось, что с помощью производной, специально изобретенной для работ с задачами движения, можно также находить площади и объемы, ограниченные соответственно кривыми и поверхностями. Методы евклидовой геометрии не обладали должной общностью и не позволяли получать требуемые количественные результаты. Усилиями математиков 17 в. были созданы многочисленные частные методы, позволявшие находить площади фигур, ограниченных кривыми того или иного вида, и в некоторых случаях была отмечена связь этих задач с задачами на нахождение скорости изменения функций. Но, как и в случае дифференциального исчисления, именно Ньютон и Лейбниц осознали общность метода и тем самым заложили основы интегрального исчисления.  
  
Метод Ньютона - Лейбница начинается с замены кривой, ограничивающей площадь, которую требуется определить, приближающейся к ней последовательностью ломаных, аналогично тому, как это делалось в изобретенном греками методе исчерпывания. Точная площадь равна пределу суммы площадей n прямоугольников, когда n обращается в бесконечность. Ньютон показал, что этот предел можно найти, обращая процесс нахождения скорости изменения функции. Операция, обратная дифференцированию, называется интегрированием. Утверждение о том, что суммирование можно осуществить, обращая дифференцирование, называется основной теоремой математического анализа. Подобно тому, как дифференцирование применимо к гораздо более широкому классу задач, чем поиск скоростей и ускорений, интегрирование применимо к любой задаче, связанной с суммированием, например, к физическим задачам на сложение сил.  
  
**4. СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА**  
Создание дифференциального и интегрального исчислений ознаменовало начало «высшей математики». Методы математического анализа, в отличие от понятия предела, лежащего в его основе, выглядели ясными и понятными. Многие годы математики, в том числе Ньютон и Лейбниц, тщетно пытались дать точное определение понятию предела. И все же, несмотря на многочисленные сомнения в обоснованности математического анализа, он находил все более широкое применение. Дифференциальное и интегральное исчисления стали краеугольными камнями математического анализа, который со временем включил в себя и такие предметы, как теория дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными, бесконечные ряды, вариационное исчисление, дифференциальная геометрия и многое другое. Строгое определение предела удалось получить лишь в 19 в.  
  
Неевклидова геометрия. К 1800 математика покоилась на двух «китах» - на числовой системе и евклидовой геометрии. Так как многие свойства числовой системы доказывались геометрически, евклидова геометрия была наиболее надежной частью здания математики. Тем не менее аксиома о параллельных содержала утверждение о прямых, простирающихся в бесконечность, которое не могло быть подтверждено опытом. Даже версия этой аксиомы, принадлежащая самому Евклиду, вовсе не утверждает, что какие-то прямые не пересекутся. В ней скорее формулируется условие, при котором они пересекутся в некоторой конечной точке. Столетиями математики пытались найти аксиоме о параллельных соответствующую подходящую замену. Но в каждом варианте непременно оказывался какой-нибудь пробел. Честь создания неевклидовой геометрии выпала Н.И.Лобачевскому (1792-1856) и Я.Бойяи (1802-1860), каждый из которых независимо опубликовал свое собственное оригинальное изложение неевклидовой геометрии. В их геометриях через данную точку можно было провести бесконечно много параллельных прямых. В геометрии Б.Римана (1826-1866) через точку вне прямой нельзя провести ни одной параллельной.  
  
О физических приложениях неевклидовой геометрии никто серьезно не помышлял. Создание А.Эйнштейном (1879-1955) общей теории относительности в 1915 пробудило научный мир к осознанию реальности неевклидовой геометрии.  
  
Неевклидова геометрия стала наиболее впечатляющим интеллектуальным свершением 19 в. Она ясно продемонстрировала, что математику нельзя более рассматривать как свод непререкаемых истин. В лучшем случае математика может гарантировать достоверность доказательства на основе недостоверных аксиом. Но зато математики впредь обрели свободу исследовать любые идеи, которые могли показаться им привлекательными. Каждый математик в отдельности был теперь волен вводить свои собственные новые понятия и устанавливать аксиомы по своему усмотрению, следя лишь за тем, чтобы проистекающие из аксиом теоремы не противоречили друг другу. Грандиозное расширение круга математических исследований в конце прошлого века по существу явилось следствием этой новой свободы.  
  
Математическая строгость. Примерно до 1870 математики пребывали в убеждении, что действуют по предначертаниям древних греков, применяя дедуктивные рассуждения к математическим аксиомам, тем самым обеспечивая своими заключениями не меньшую надежность, чем та, которой обладали аксиомы. Неевклидова геометрия и кватернионы (алгебра, в которой не выполняется свойство коммутативности) заставили математиков осознать, что то, что они принимали за абстрактные и логически непротиворечивые утверждения, в действительности зиждется на эмпирическом и прагматическом базисе.  
  
Создание неевклидовой геометрии сопровождалось также осознанием существования в евклидовой геометрии логических пробелов. Одним из недостатков евклидовых Начал было использование допущений, не сформулированных в явном виде. По-видимому, Евклид не подвергал сомнению те свойства, которыми обладали его геометрические фигуры, но эти свойства не были включены в его аксиомы. Кроме того, доказывая подобие двух треугольников, Евклид воспользовался наложением одного треугольника на другой, неявно предполагая, что при движении свойства фигур не изменяются. Но кроме таких логических пробелов, в Началах оказалось и несколько ошибочных доказательств.  
Источник http://free-math.ru/

# [История математики в школе.](http://barabash.ucoz.ru/index/istorija_matematiki_v_shkole/0-84)

Глава **I. АРИФМЕТИКА**

**История арифметики на уроках**

*V класс*

1. [Натуральные числа](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2011)
   1. [О происхождении арифметики. Счет и десятичная система счисления](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2011)
   2. [О происхождении и развитии письменной нумерации. Цифры разных времен](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2013)
   3. [О счетных приборах. Русские счеты. Вычислительные машины](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2017)
   4. [О натуральном ряде. «Исчисление песчинок» Архимеда. Современная запись больших чисел](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2020)
   5. [О простых числах. Евклид и Эратосфен. Чебышев](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2023)
   6. [О задаче Гольдбаха. Нерешенные задачи теории чисел](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2024)
   7. [Возникновение и совершенствование мер длины. О метрической системе мер](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2026)
2. [Обыкновенные дроби](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2030)
   1. [О происхождении дробей. Дроби в древнем Риме](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2030)
   2. [Дроби в древнем Египте](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2030)
   3. [Вавилонская нумерация. Шестидесятеричные дроби](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2032)
   4. [Нумерация и дроби в древней Греции](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2036)
   5. [Древнекитайские задачи с дробями](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2037)
   6. [Староиндийская задача с цветами и пчелами](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2038)
   7. [Задачи с дробями у древних армян](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2040)
   8. [Нумерация и дроби на Руси](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2041)
   9. [Ал-Хорезми и его «Арифметика»](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2043)
   10. [Абацисты и алгоритмики в средневековой Европе](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2045)
   11. [«Арифметика» Магницкого. Задачи с дробями](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2047)
3. [Десятичные дроби](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2049)
   1. [Происхождение десятичных дробей](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2049)
   2. [От шестидесятеричных к десятичным дробям. Ал-Каши](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2050)
   3. [«Десятая» Симона Стевина](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2053)
   4. [Распространение десятичных дробей, их значение в жизни современного общества](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2054)
   5. [Фигурные числа](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2054)
   6. [Треугольные числа](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2055)
   7. [Квадратные числа. Формула Диофанта](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2055)
   8. [Магические квадраты](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2056)
   9. [Магический квадрат А.Дюрера. Гравюра «Меланхолия»](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2057)
   10. [Развитие понятия о числе. От натуральных к дробным числам](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2060)
4. [Совместные действия над обыкновенными и десятичными дробями. Отношение величин. Измерение величин](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2060)
   1. [О периодических дробях](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2060)
   2. [Древнеегипетская задача с дробями](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2061)
   3. [Из истории нуля](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2061)
   4. [Об измерении земного меридиана Эратосфеном](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2062)
   5. [От эмпирической к теоретической арифметике](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2063)

*VI класс*

1. [Приближенные вычисления](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2064)
   1. [О происхождении приближенных чисел](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2064)
   2. [«Правило А. Н. Крылова»](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2064)
2. [Проценты](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2065)
   1. [Проценты в прошлом и в настоящее время](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2065)
   2. [Арифметические знаки и обозначения. Знак процента](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2066)
   3. [Об арифметических таблицах](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2068)
3. [Пропорции](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2069)
   1. [Число и отношение](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2069)
   2. [Пропорции в древней Греции](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2070)
   3. [Как записывали пропорции в прошлом](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2071)
   4. [О тройном правиле](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2072)
   5. [Задача на пропорциональное деление из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2072)
   6. [О том, как дошли люди до настоящей арифметики](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2073)

**История арифметики па внеклассных занятиях**

1. [Пальцевый счет. Различные приемы умножения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2077)
2. [Проверка действий с помощью девятки](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2081)
3. [Пифагор и его школа. О дружественных и совершенных числах. Проблемы, ожидающие своего решения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2084)
4. [Из истории дробей](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2088)
5. [Старые русские, метрические и другие меры. Современная наука и создание международной системы мер](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2091)
6. [Cчет и системы счисления. Устная и письменная нумерация](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%2096)
7. [Счетные приборы. Вычислительные машины](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%20106)
8. [Как научились люди измерять время. (Из истории календаря). Новое определение секунды](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%20112)
9. [О происхождении некоторых числовых суеверий](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%20116)
10. [Исторические задачи](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=%20120)

Глава **II. АЛГЕБРА**

**История алгебры на уроках**

*VI класс*

1. [Алгебраические выражения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=129)
   1. [От арифметики к алгебре](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=129)
   2. [Буквы и знаки. Алгебраические выражения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=130)
2. [Рациональные числа. Уравнения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=132)
   1. [Возникновение отрицательных чисел](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=132)
   2. [«Люди не одобряют отрицательных чисел...» От Диофанта до Бхаскары](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=133)
   3. [Путь к признанию](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=134)
   4. [Задача на составление уравнений из «Московского папируса»](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=135)
3. [Действия над алгебраическими выражениями. Из истории алгебраической символики](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=136)
   1. [Начало буквенной символики. Возведение в степень](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=136)
   2. [О коэффициенте](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=137)
   3. [От алгебры риторической к алгебре символической](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=137)
   4. [Формулы умножения. Геометрическая алгебра в древности](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=139)
   5. [Алгебраические сведения в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=140)
   6. [«Всеобщая Арифметика» И. Ньютона](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=140)

*VII класс*

1. [Уравнения первой степени с одним неизвестным](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=141)
   1. [Из истории уравнений. Метод ложного положения в Египте](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=141)
   2. [Решение уравнений в древней Греции и Индии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=142)
   3. [О происхождении слова «алгебра»](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=143)
   4. [И. Ньютон о языке алгебры](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=144)
2. [Разложение многочленов на множители](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=145)
   1. [Из истории скобок](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=145)
   2. [Об основных законах действий. Распределительный закон у Евклида](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=146)
   3. [Об одной формуле Диофанта](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=146)
   4. [О записи и знаках умножения и деления](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=146)
   5. [«Универсальная Арифметика» Л. Эйлера](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=147)
3. [Алгебраические дроби](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=148)
   1. [И. Ньютон об алгебраической дроби](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=148)
   2. [Обозначение 1/an=a-n](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=149)
   3. [Алгебраические дроби у Диофанта](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=149)
   4. [Одно тождество Эйлера](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=149)
   5. [О буквенных коэффициентах. Задача Ариабхатты](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=149)
4. [Координаты и графики](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=151)
   1. [О координатах](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=151)
   2. [О методе координат и о графиках](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=151)
5. [Система уравнений первой степени с двумя неизвестными](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=152)
   1. [Неопределенные уравнения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=152)
   2. [Система уравнений первой степени с двумя неизвестными и ее решение в древности](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=153)
   3. [Две задачи ал-Хорезми](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=155)
   4. [Из «Греческой антологии»](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=155)
   5. [Учение об уравнениях и расширение понятия о числе](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=156)

*VIII класс*

1. [Счетная линейка](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=157)
   1. [О счетной линейке](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=157)
2. [Квадратный корень и квадратные уравнения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=158)
   1. [Извлечение квадратного корня из положительных чисел](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=158)
   2. [О знаке корня](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=159)
   3. [Квадратные уравнения в древнем Вавилоне](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=160)
   4. [Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=160)
   5. [Квадратные уравнения в Индии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=161)
   6. [Квадратные уравнения у ал-Хорезми](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=162)
   7. [Квадратные уравнения в Европе XIII—XVII вв](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=163)
   8. [О теореме Виета](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=164)
   9. [О знаках равенства и неравенства](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=164)
   10. [Из истории решения системы уравнений, содержащей одно уравнение второй степени и одно линейное](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=165)
3. [Функции и графики](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=166)
   1. [Декартова переменная величина — поворотный пункт в развитии математики](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=166)
   2. [Понятие функции](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=168)
   3. [Дальнейшее развитие понятия функции](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=168)
   4. [О кубическом корне](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=170)
   5. [О приближенном и графическом решении уравнений](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=171)
   6. [Краткий обзор исторического развития алгебры](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=172)

**История алгебры на внеклассных занятиях**

1. [Старинные математические развлечения и действия над алгебраическими выражениями](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=174)
2. [Алгебра в древней Индии и Китае](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=178)
3. [О Диофанте и диофантовых уравнениях, «Последняя теорема Ферма»](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=184)
4. [Женщины-математики](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=192)
5. [О термине и понятии «алгоритм»](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=202)
6. [Геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=206)
7. [Омар Хайям — математик и поэт](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=211)
8. [Арифметика и алгебра в Европе в XII—XV вв](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=215)
9. [Из истории развития алгебры в XVIв](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=218)
10. [Рене Декарт — великий математик и мыслитель XVIIв](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=227)
11. [О величайшем математике XVIIIв. — Леонарде Эйлере](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=230)
12. [О двух выдающихся русских математиках XIX в. Остроградском и Чебышеве](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=235)
13. [Исторические задачи](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=242)

Глава **III. ГЕОМЕТРИЯ**

**История геометрии на уроках**

*VI класс*

1. [Основные понятия](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=251)
   1. [О происхождении геометрии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=251)
   2. [О геометрических фигурах. Вычисление отрезков](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=253)
   3. [О происхождении некоторых терминов и понятий](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=254)
2. [Треугольники](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=256)
   1. [О треугольниках](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=256)
   2. [О симметрии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=256)
   3. [О равнобедренном треугольнике. Фалес Милетский](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=257)
   4. [О признаках равенства треугольников](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=259)
   5. [О прямоугольном треугольнике](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=260)
3. [Параллельность](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=260)
   1. [О параллельных прямых](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=260)
   2. [О построении прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой. Аксиома параллельности](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=261)
   3. [О сумме углов треугольника](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=262)
   4. [Геометрические инструменты](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=263)
   5. [Об одном старинном способе определения недоступных расстояний](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=264)

*VII класс*

1. [Четырехугольники](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=266)
   1. [О параллелограмме](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/0%22school.djvu?djvuopts&page=266%22)
   2. [О трапеции](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=267)
   3. [О задачах на построение](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=267)
2. [Площадь многоугольника. Поверхность и объем призмы](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=268)
   1. [Вычисление площадей в древности](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=268)
   2. [О теореме Пифагора. Геометрия в древней Индии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=269)
   3. [Измерение площадей в древней Греции. Герон Александрийский](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=270)
   4. [О призме и параллелепипеде](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=272)
   5. [Измерение объемов](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=273)
3. [Окружность](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=274)
   1. [Об окружности и ее радиусе](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=274)
   2. [О касательных к окружности. Архит Тарентский](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=275)
   3. [О вписанных углах. Гиппократ Хиосский](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=276)
   4. [О длине окружности и площади круга. Архимед](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=276)
   5. [О числе π](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=277)
   6. [О цилиндре, его поверхности и объеме](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=279)
   7. [Об одной ошибке древних египтян](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=279)

*VIII класс*

1. [Пропорциональные отрезки. Подобие фигур](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=280)
   1. [Отношение и пропорциональность отрезков](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=280)
   2. [О делении отрезка в данном отношении](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=281)
   3. [О подобии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=281)
   4. [«Деление в данном отношении» Аполлония](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=282)
   5. [О построении подобных фигур. Пропорциональный циркуль. Галилей](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=283)
2. [Тригонометрические функции острого угла](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=285)
   1. [О происхождении тригонометрии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=285)
   2. [О тригонометрических таблицах](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=285)
   3. [О тригонометрических функциях и о развитии тригонометрии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=287)
3. [Вписанные и описанные многоугольники](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=289)
   1. [«Замечательные» точки треугольника. Геометрия треугольника](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=289)
   2. [О правильных многоугольниках](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=290)
4. [Вычисление площадей и объемов геометрических тел](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=291)
   1. [О пирамиде и ее объеме](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=291)
   2. [О конусе](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=292)
   3. [О шаре](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=293)
   4. [Краткий обзор развития геометрии](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=295)

**История геометрии на внеклассных занятиях**

1. [Практическая геометрия у разных народов](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=298)
2. [О развитии геометрии в древней Греции до Евклида](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=304)
3. [Александрийская эпоха. Евклид](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=309)
4. [Архимед](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=312)
5. [Три знаменитых задачи древности](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=318)
6. [Сто доказательств. (Из истории теоремы Пифагора.)](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=325)
7. [Теорема Птолемея и составление тригонометрических таблиц](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=330)
8. [Деление площадей и преобразования равновеликих фигур](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=332)
9. [Приборы и инструменты в измерениях и геометрических построениях. Измерение меридиана](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=334)
10. [О развитии геометрии. Геометрия Лобачевского](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=342)
11. [Исторические задачи](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=350)

[Ответы, указания и решения](http://ilib.mccme.ru/djvu/istoria/school.djvu?djvuopts&page=352)

# [Исторические факты](http://www.math.ru/history/)

<https://math.ru/history/>

# [Апология математики](https://drive.google.com/file/d/131BT4T5ZzMf5Z7fIxCuHf4KPMMmcEKUZ/view)

<https://drive.google.com/file/d/131BT4T5ZzMf5Z7fIxCuHf4KPMMmcEKUZ/view>

[**2. Великие математики**](http://barabash.ucoz.ru/index/velikie_matematiki/0-83)

[**3. Занимательная математика**](http://barabash.ucoz.ru/index/zanimatelnaja_matematika/0-92)

[**4. Цитаты о математике**](http://barabash.ucoz.ru/index/citaty_o_matematike/0-82)