

# ELS 발행 및 헤지에 따른 주식시장의 영향과 녹-인 효과 연구\*

임현철<sup>1</sup>, 최영수<sup>2</sup>

## <요 약>

본 논문은 저금리 기조가 지속되면서 빠르게 성장한 ELS시장의 대표적인 상품인 두 개의 기초자산 기반 조기상환 스텝다운(auto call step down)형 ELS(Equity Linked Security) 상품에 내재된 급락위험<sup>1</sup>(shortfall risk)을 분석하고 급락위험을 관리하는 헤지 전략을 제시한다.

조기상환 스텝다운 ELS 발행자 입장에서 1) 기초자산이 KI(Knock-In)가격에 도달하기 전까지는 ELS에 내포된 풋옵션 매수 및 DO(Down and Out)옵션 매도를 헤지하려면 발행금액의 수배에 달하는 기초자산 델타수량 매수를 지속적으로 증가시켜야 하나, 2) 하락폭이 큰 기초자산 가격이 KI가격을 터치한 즉시 DO옵션이 소멸되어 발행금액 수준으로 매수한 물량을 급격히 매도하여야 한다. 이런 급락위험을 관리하는 방안으로 본 논문에서는 급락위험을 최소화시키는 헤지 전략과 KI 발생확률 여부에 따른 헤지 전략을 제시하고 이를 검증 가상상품에 적용하여 기존의 BS(Black-Scholes) 헤지 전략보다 우수함을 보여준다.

정책적인 제안으로 첫째, 녹-인(Knock-In) 집중현상을 예방하기 위하여 같은 기초자산 주식 기반 ELS 발행금액을 해당주식의 평상시 유동물량과 최대 델타량의 총합을 고려하여 결정해야 하고, 둘째, 녹-인 영역 혹은 녹-아웃(Knock-Out) 영역과 같이 레버리지가 커지는 핀리스크(pin risk)구간에서는 연속 헤지가 가능하다는 전제하에 구한 BS델타를 이용한 위험관리 한도 규정을 완화할 필요가 있다.

핵심 주제어: 녹-인(Knock-In) 효과, 녹-아웃(Knock-Out) 효과, 급락위험(shortfall risk), ELS, TARC, 헤지 전략

1. KB증권 OTC 자산운용팀 ([limhc31@naver.com](mailto:limhc31@naver.com)), 2. 한국외국어대학교 수학과 ([choiys@hufs.ac.kr](mailto:choiys@hufs.ac.kr))

<sup>1</sup> 헤지 운용면에서 급락위험은 헤지 포트폴리오의 가치가 급락하는 상황을 의미한다.

## I. 서 론

ELS(Equity Linked Security)란 기초자산인 개별주식의 주가나 주가지수에 연동하여 사전에 정해진 조건에 따라 조기 및 만기상환 수익률이 결정되는 유가증권이다. 파생상품의 성격을 띠기 때문에 자본시장법에서 파생결합증권으로 분류한다. ELS는 채권보다 수익률이 높고 주식보다 위험이 낮은 중위험·중수익 상품으로 투자자의 요구에 맞춘 다양한 투자기회를 제공함으로써 글로벌 금융위기 이후에 저금리 기조가 지속되면서 ELS시장이 빠르게 성장하였다.

2003년 도입 당시에는 디지털 콜(Digital Call), 녹-아웃 콜(Knock-Out Call)형, 콜 스프레드(Call Spread) 및 클리켓(Cliquet)과 같이 비교적 간단한 구조의 ELS가 주로 발행되었으나 2004년 이후에는 기초자산을 두 개 이상으로 한 조기상환형 스텝다운(Step Down)구조가 발행되고 있다. 대표적인 "2 stock 조기상환형 스텝다운(Auto Call Step Down) ELS"은 수익구조가 자동조기상환과 만기상환으로 구분되는 데, ELS발행자 입장에서는 자동조기상환일 혹은 만기일에 조건부<sup>2</sup> 디지털 콜옵션(Digital Call Options)을 매도하고 ELS 만기일에 조건부 녹-인(Knock-In; KI) 풋옵션(plain put option)을 매수한 합성포지션을 갖는 것과 같다. 녹-인 조건인 룩백(look back) 및 조건부 소멸 조건과 같은 ELS의 특이옵션 구조(exotic option structure)는 정적 및 동적 헤지를 위한 기준상품(basic instruments for static and dynamic hedging)들이 부족한 현실 상황에서 유럽형 단순 옵션 및 기초자산을 이용한 발행시의 정적 헤지 및 조기상환일 또는 만기일근처의 동적 헤지도 어렵게 만든다<sup>3</sup>. 따라서 완전시장을 가정한 기존 헤지 방법을 적용하는데 한계가 있다. 뿐만 아니라 디지털 콜옵션의 자동조기 상환조건이 충족되지 않으면 고객에게 지급하여야 되는 쿠폰금액의 상승으로 다음 조기 상환일의 레버리지가 더욱 커지게 되어 헤지를 더욱 어렵게 만든다. 따라서 완전시장을 가정한 기존 헤지 방법을 적용하는데 한계가 있다. 뿐만 아니라 디지털 콜옵션의 자동조기 상환조건이 충족되지 않으면 고객에게 지급하여야 되는 쿠폰금액의 상승으로 다음 조기 상환일의 레버리지가 더욱 커진다. 이런 상황에서 하락폭이 큰 기초자산 가격이 녹-인이 되지 않은 상태에서 녹-인 가격 근처에 있을 경우 발행 ELS의 순자산가치(Net Present Value; NPV) 변화가 원활(smooth)하지 않아서 헤지 물량을 결정하기 매우 어렵게 된다. 구체적으로 KI가격에 도달하기 전까지는 ELS에 내포되어 있는 풋옵션 매수 및 DO(Down and Out) 옵션 매도<sup>4</sup>를 헤지하기 위하여 하락폭이 큰 기초자산을 발행금액의 수배에 달하는 델타수량만큼 매수를 지속적으로 해야 하며, KI가격을 터치한 즉시 DO옵션의 소멸로 발행금액 수준으로 매수한 물량을 매도하여야 한다.

또한 발행시점의 기초자산 변동성이 축소되어 개별주식 ELS를 발행한 운용사는 2011년부터

---

<sup>2</sup> 자동 조기상환이 이뤄지면 남아있는 디지털 콜 및 녹-인 풋 옵션은 모두 소멸된다.

<sup>3</sup> 디지털 옵션 및 배리어 옵션에 대한 동적 헤지는 일반적으로 매우 어렵다.

<sup>4</sup> 녹-인 가격보다 크고 디지털 콜의 행사가격보다 작은 영역에서 디지털 콜은 감마매도(short Gamma)인 상태이나 매수한 풋옵션 및 매도한 DO옵션은 감마매수(long Gamma)상태이다. 하지만 풋옵션 및 DO옵션의 영향이 더 크므로 전체적으로 해당영역에서는 감마매수 상태가 된다.

대규모 손실이 입었다. 이는 2008년 금융위기 이후 생성된 과도한 개별주식의 변동성이 축소되면서 생긴 현상으로 알려져 있으나 ELW(Equity Linked Warrant)시장과 ELS시장간의 시장상황 변화가 현물시장에도 영향을 미쳐 발생한 것으로 판단된다. 구체적으로 개별주식 변동성이 축소된 원인으로는 첫째, 정부의 ELW시장에 대한 정책변화로 개별주식 ELW시장이 축소되어 확장되었던 변동성이 급격히 위축되었고, 둘째, ELS시장에 많이 발행되었던 TARC(Two Asset Reverse Convertible) ELS의 헤지 전략인 감마매수전략(long gamma trading)이 개별주식 현물시장에 영향을 미쳐 변동성을 축소시켰다. 즉, 2011년 이후 ELW시장의 축소로 변동성 추정방법이 내재변동성에서 역사적 변동성으로 전환된 사건과 감마매수전략이 개별주식 변동성을 급격히 감소<sup>5</sup>시키게 되었다.

주가연계증권의 가치평가 모형관련 국내연구로는 구본일, 지현준, 엄영호(2007)와 박준영, 현종석(2009)의 연구가 있다. 구본일 등(2007)은 2003년 3월부터 2005년 12월까지 국내에서 발행된 모든 주가연계예금에 대한 실제 발행가격과 이론가격과의 괴리율을 계산하고 논문자료에 근거하여 주가연계예금 발행가격의 특성을 분석하였다. 박준영 & 현종석(2009)은 조기상환구조 주가연계증권을 동적으로 복제할 때 발생하는 기대 헤지 비용과 헤지 오차 위험(분산)의 상쇄효과(trade-off)를 기초자산 매매에 따른 거래비용을 고려하여 분석하였다. 분석결과로는 거래비용 수준이 헤지 성과에 민감한 영향을 미친다고 보고하고 있다. 한편 윤선중(2012)은 효율적인 헤지를 수행할 수 없었던 복잡한 주가연계 구조화 상품에 대하여 상품 판매량과 연동된 금융상품의 총 델타를 규제하는 구조화 가이드라인을 제시하였다.

본 논문에서는 시장의 대표적인 ELS상품인 스텝다운형 ELS를 중심으로 상품의 구조 및 내재된 옵션들의 특징을 구성 옵션에 따라 분해하여 서술하였다. 해당상품의 위험성은 급락위험(shortfall risk)으로 기초자산의 가격 움직임에 따라 순간적인 상품가치의 급락이 발생할 수 있으며 또한 헤지 포트폴리오의 가치급락도 발생할 수 있다. 상품에 내재된 특이옵션 구조와 상품 헤지 과정에서 시장에 미치는 영향이 결합되어 급락이 발생한다. 특히 녹-인에 의한 급락이 발생하면 이에 따른 상품 헤지 과정에서 기초자산인 현물시장에 블랙홀(black hole)과 같은 다량의 매도로 현물시장에 많은 영향을 미친다. 이런 문제를 해결하는 방법으로 Schulmerich and Trautmann (2003)가 제안한 이산모형에서 국소기대 급락-헤지(local expected shortfall-hedging) 방법론을 ELS 헤지 전략에 참조하였다. 즉, 발행자의 헤지 운용을 위한 최적의 헤지 운용방식을 급락위험 관리의 입장에서 제안하고 가상 검증상품에 적용하여 유용성을 실증분석으로 보여 준다. 아울러 스텝다운형 구조화 상품이 시장에 미치는 단점을 순화할 수 있는 소극적 해결방안으로 상품구조의 변

<sup>5</sup> ELW시장은 LP(Liquidity Provider)가 발행회사로부터 발행물량 전부를 인수한 후 유통시장에서 다수의 투자자와 거래하는 LP(1인) 대 다수인 구조로 개별주식 ELW가 높은 가격으로 유통시장에서 매도될 가능성이 높다. 따라서 ELS의 가격을 정할 때 중요한 요인인 변동성을 역사적 변동성 대신에 ELW가격으로부터 산출한 높은 내재변동성을 사용하였다. 하지만 2011년 3월 검찰에 의해 12개 증권사가 기소된 후, ELW시장이 급격히 축소되었고 이로 인해서 개별주식에 대한 변동성은 내재변동성 대신에 역사적 변동성을 사용하게 되었다. 아울러 대표적인 TARC ELS 상품의 특성, 즉, 개별주식 가격이 오르면(내리면) 주식을 매도(매수)하는 헤지 전략으로 변동성이 급격히 하락하는 현상이 나타나게 되었다.

경을 통해서 제시하고 있다. 마지막으로 감독당국 입장에서 투자자들의 합리적인 투자대안으로 ELS 구조화 파생상품이 자리매김할 수 있도록 기존 발행구조를 순화된 상품으로 유도할 수 있는 적절한 방안을 제안하여 본다.

## II. ELS의 상품구조 이해 및 헤지 전략

### 1. Two Asset Reverse Convertible (TARC) ELS 상품구조의 이해

대표적인 TARC(Two Asset Reverse Convertible) ELS는 기초자산이 두 개이고 성과가 좋지 않는 기초자산에 의존하는 조건부 청구권을 갖는 구조이다. 전환사채(convertible bond)는 투자자가 원하는 경우 특정기간 내에 보유하고 있는 채권을 미리 정해진 수량의 주식으로 전환할 수 있는 권리(conversion provision)가 부여된 채권이다. 반면에 TARC는 상환기간이 자동조기상환 혹은 만기상환으로 구분되는데, 조기상환의 경우에 투자자가 상환시점을 선택하는 것이 아니라 두 개의 기초자산이 일정조건을 만족하면 투자자에게 자동으로 조기 상환된다. 만기에는 두 개의 기초자산의 과거경로에 따라서 미리 정해진 원금과 쿠폰을 받거나 만기에 기초자산의 가격하락폭에 비례하여 투자원금의 손실이 발생하는 구조를 갖는다. 즉, 기초자산이 상승하였을 때 전환권리를 행사하는 전환사채와는 달리 가격이 하락하였을 때 채권의 성격이 강제로 주식의 가치로 전환되어 투자자는 원금손실을 입을 수 있다.

<표 1> 대표적인 TARC인 조기상환형 스텝다운 ELS의 수익구조

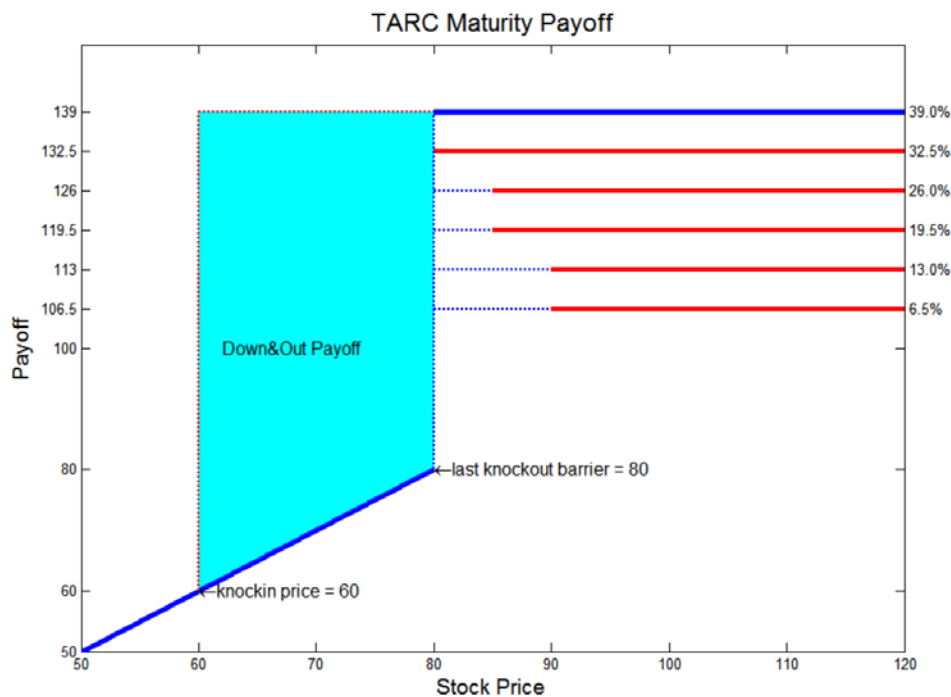
구분	내용	투자수익률
자동 조기상환	① 1차(6개월), 2차(12개월) 자동조기상환 평가일에 두 기초자산의 자동조기상환평가 가격이 모두 최초기준가격의 90%이상인 경우 ② 3차(18개월), 4차(24개월) 자동조기상환 평가일에 두 기초자산의 자동조기상환평가 가격이 모두 최초기준가격의 85%이상인 경우 ③ 5차(30개월) 자동조기상환 평가일에 두 기초자산의 자동조기상환평가 가격이 모두 최초기준가격의 80%이상인 경우	연 13.0%
만기상환	④ 두 기초자산의 만기평가가격이 모두 최초기준가격의 80% 이상인 경우	연 13.0% (만기시 39.0%)
	⑤ 투자기간 중 최초기준가격의 60%미만으로 하락한 기초자산이 없고, 두 기초자산 중 어느 한 기초자산이라도 만기평가 가격이 최초기준가격의 80%미만인 경우	만기시 39.0%
	⑥ 투자기간 중 최초기준가격의 60%미만으로 하락한 기초자	-20% ~ -100%

	산이 있고, 두 기초자산 중 어느 한 기초자산이라도 만기평가 가격이 최초기준가격의 80%미만인 경우 → 원금손실	(손실률=하락폭이 큰 기초자산의 하락률)
--	---	---------------------------

\*평가가격은 평가 일의 종가기준임

우리나라의 원금비보장형 ELS 중 대표적인 상품은 <표 1>과 <그림 1>에서와 같이 “2 stock 조기상환형 스텝다운(AutoCall Step Down) ELS”이다. 두 개의 기초자산인, 예를 들어 삼성전자와 포스코 중 최초기준가격대비 더 낮은 기초자산가격이 상환조건을 달성하는지에 따라 손익이 결정되므로 결국 2개의 기초자산이 모두 상환조건을 충족해야 수익상환이 되는 구조이다. 따라서 손익구조에 영향을 크게 미치는 1) 만기·조기상환 일정과 2) 최초기준가격, 조기상환평가가격, 및 만기평가가격이 명확하게 지정된다.

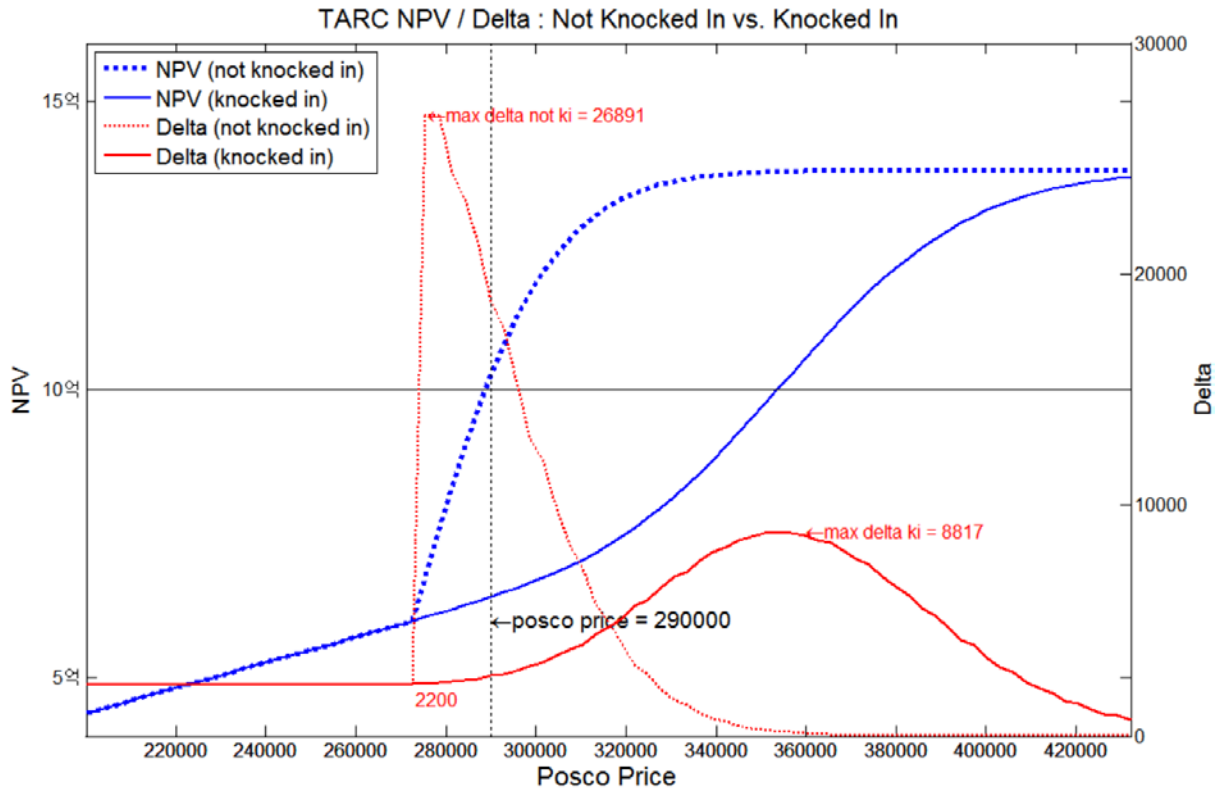
<그림 1> 대표적인 TARC인 조기상환형 스텝다운 ELS의 수익함수 그래프



구체적으로 조기상환형 스텝다운 ELS의 수익구조는 자동조기상환조건과 만기상환조건으로 분류된다. ①~③은 조기상환조건으로 90%이상 달성여부에 따라 1차(6개월 후)와 2차(12개월 후) 조기상환조건이 정해지고, 85%이상 달성여부에 따라 3차(18개월 후)와 4차(24개월 후) 조기상환조건이 정해지고, 80%이상 달성여부에 따라 5차(30개월 후) 조기상환조건이 결정된다. ④~⑥은 만기상환조건으로 ④는 정상적인 만기상환조건(80%이상) 달성여부에 따라 결정되는 경우로 직전 조기상환조건(5차)와 동일한 수준이다. ⑤는 **더미 수익상환**인 경우로 ①~④와 같은 조기 및 만기상환조건을 만족하지 못했더라도 투자기간 중에 녹-인(KI; Knock-In)조건(60%미만)을 터치한 적이 없으면 만기수익률로 누적쿠폰 39%를 수익상환 시켜주는 것이다. 또한, ⑥은 **손실상환**인 경우로

①~④와 같은 조기 및 만기상환조건을 만족하지 못하였고 투자기간 중에 녹-인(KI; Knock-In)조건(60%미만)을 터치한 적이 있으면 하락폭이 큰 기초자산의 하락률 만큼 손실상환 시켜주는 것이다.

<그림 2> 대표적인 TARC의 가격대별 NPV 및 델타 : Not Knocked-In vs. Knocked In



\* 기초자산이 삼성전자와 포스코인 스텝다운형 ELS, 원금 10억, 쿠폰 13%, 발행시 포스코(삼성전자) 주가 455,000원(891,000원), 포스코(삼성전자) KI가격은 273,000원(534,600원), 만기일은 2014년 5월 22일이고 2014년 2월 21일 포스코(삼성전자) 주가는 29만원(133만원), 250일 역사적 변동성은 15.9%(24%)이고 만기 3개월임. 평가가격은 평가 일의 종가기준임.

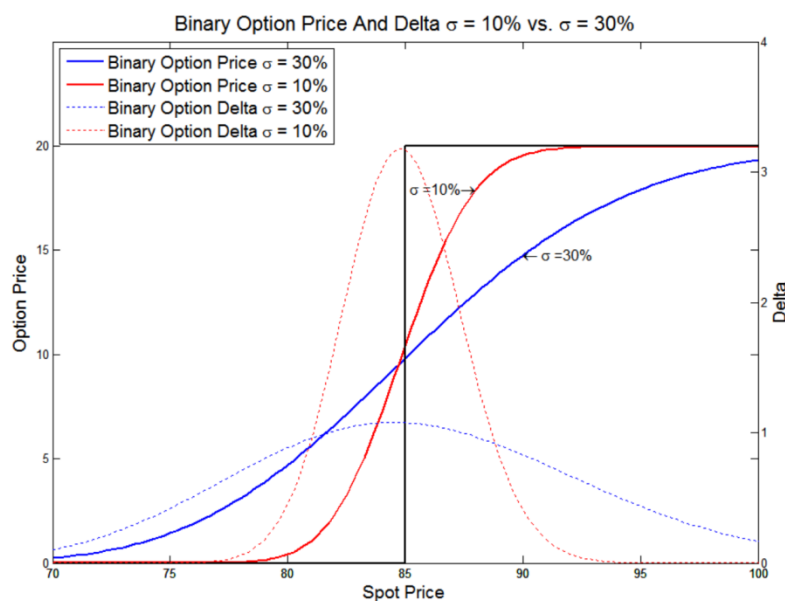
“2 stock 조기상환형 스텝다운 ELS”를 특징을 구체적으로 파악하기 위하여 다음과 같은 상품을 고려하자. 기초자산이 삼성전자와 포스코인 ELS로 발행원금 10억, 연지급 쿠폰 13%, 발행 시점에서의 포스코(삼성전자) 주가는 455,000원(891,000원)이고 포스코(삼성전자) KI가격은 발행시점 가격의 60%로 273,000원(534,600원), 만기일은 2014년 5월 22일이다. 2014년 2월 21일 포스코(삼성전자) 주가는 29만원(133만원), NPV를 계산하기 위한 250일 역사적 변동성은 15.9%(24%)이고 만기는 3개월이다. 최초기준가격 대비 삼성전자 주가는 133만원으로 녹-인에 영향을 미치지 않으므로 더 낮은 기초자산인 포스코 주가의 KI가격 27.3만원 부근에서 녹-인 발생여부가 ELS의 NPV에 미치는 영향을 포스코 주가 별로 <그림 2>에서 나타내었다. 포스코 최초기준가격 455,000원 대비 70%수준인 320,000원까지는 ELS가격 변화가 거의 변화가 없으나 이후 KI가격 수준인 60%까지는 NPV가 급격히 감소함을 알 수 있다. 아울러 KI가격을 터치하면 더미상환가치인 DO옵션이

소멸되고 녹-인 이전 가격곡선에서 녹-인 이후 가격곡선으로 전환<sup>6</sup>되어 가격곡선의 볼록한 정도가 완화된다는 점이다. 이로 인해 발행자의 헤지 측면에서 녹-인 이전과 이후로 매수 헤지 물량을 급격히 줄여야 하는 상황으로 변한다.

녹-인 효과가 헤지에 미치는 영향을 빨간색 델타 곡선을 통해서 살펴보면 보유해야 할 포스코 주식수는 녹-인 이전 가격에서는 최대 26,891개에서 녹-인 이후 가격에서는 2,200개로 축소된다. 즉, 녹-인 이전에는 최대 발행원금 10억원(NPV 6.76억원) 대비  $27.3\text{만} \times 26,891 / 10\text{억} = 7.34(10.82)$  배수의 매수 헤지 금액에서 녹-인 이후에는  $0.6(0.89)$ 배수의 매수 헤지 금액으로 매우 급격하게 전환됨을 알 수 있다. 발행자의 위험관리 측면에서 레버리지(leverage)가 매우 높을 뿐 아니라 녹-인 전후로 헤지 수량의 급격한 변화로 상품운용에 있어 고위험 및 고난도의 헤지 기술이 요하는 상품임을 알 수 있다. 또한 녹-인 가격보다 높은 가격대에서는 지속적으로 헤지 물량이 늘어나는 영역이다. 즉 감마매수(long Gamma) 전략으로 수익을 창출하여야 하는 구간으로 녹-인 가격에 도달하기 전까지는 주가의 하락을 방지하는 면이 있으나 주가의 자연스런 움직임(기준 변동성에 따른 가격 움직임의 정도)을 방해하는 요소로 작용하여 시장의 변동성을 심각하게 감소시키는 역할을 한다. 이 부분에 대한 구체적인 언급은 감마매수 전략에서 상세하게 언급할 예정이다.

발행자 관점에서 조기상환형 스텝다운 ELS와 같은 TARC 구조를 마지막 조기상환일 시구간에서 살펴보면 ELS 만기일이 만기인 바닐라 풋옵션을 매수하고 녹-인을 터치할 경우 소멸되는 DO옵션을 매도하고 ELS 만기일이 만기인 디지털 콜옵션을 매도한 합성포지션<sup>7</sup>으로 구성된다. 마지막 만기일 구간이 아닌 이전 구간에서는 녹-아웃을 터치하면 자동 조기상환이 이뤄져서 남아 있는 디지털 콜옵션, DO옵션 및 녹-인 풋옵션이 모두 소멸된다.

<그림 3> 디지털 콜옵션의 변동성에 따른 가격변화 추이



<sup>6</sup> <그림2>에서 파란색 점선에서 파란색 실선으로 가격곡선이 바뀐다.

<sup>7</sup> 실제 시장에 개별적으로 거래되는 옵션이 아닌 ELS자체에 내재된 옵션이다.

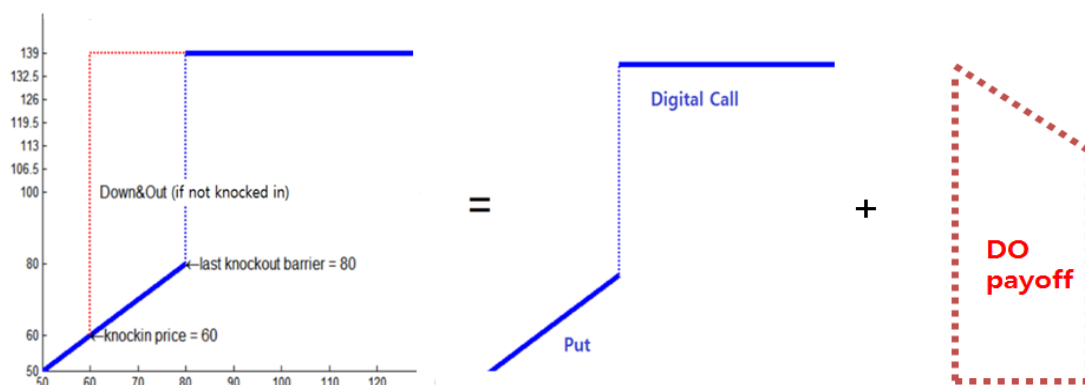
변동성의 변화에 따른 ELS가격변화 관계를 살펴보면, 첫째, 풋옵션의 매수부분은 변동성이 상승(하락)함에 따라 부채의 감소(증가)가 발생한다, 둘째, 디지털 콜옵션 매수부분은 기초자산의 가격이 상한 가격수준보다 클 경우에는 변동성이 상승(하락)하면 외가격에 진입할 확률이 높아(작아)져서 옵션가격이 하락(상승)하여 투자자에게 지불할 부채가 감소(증가)하게 된다. 즉, 조기상환형 스텝다운 ELS는 변동성이 감소하면 발행자가 손실을 입는 구조이다. <그림 3>은 승수 20, 행사가격 85, 잔존만기 1개월인 디지털 콜옵션이 변동성이 10% 및 30%일 때 기초자산 가격변화에 따른 옵션가격을 비교한 것이다. 기초자산 가격이 행사가격 이상에서 변동성이 낮을수록 행사가격 아래로 하락할 확률이 적어져서 옵션가격이 더 올라감을 알 수 있다. 아울러 조기상환이 되지 않으면 조기상환 가격수준인 상환 배리어가 선형적으로 감소하는 반면에 디지털 콜옵션의 승수 혹은 상환쿠폰은 선형적으로 증가한다.

## 2. Two Asset Reverse Convertible (TARC) ELS의 헤지 전략

### 2.1. 조기상환형 스텝다운 ELS의 녹-인 효과 및 급락위험 분석

먼저 스텝다운 ELS의 수익함수를 통하여 녹-인 효과를 분석해보자. 논의를 간략하게 하기 위하여 조기상환이 발생하지 않았고 만기상환만 남은 경우를 가정하자. 초기 기초자산가격 및 원금을 100으로 가정하고 3년간 조기상환이 되지 않아 누적된 39% 쿠폰을 ELS 만기일에 지급한다고 가정하자.

<그림 4> 스텝다운(Step Down) ELS 수익함수의 분해 : Put + Digital Call + DO



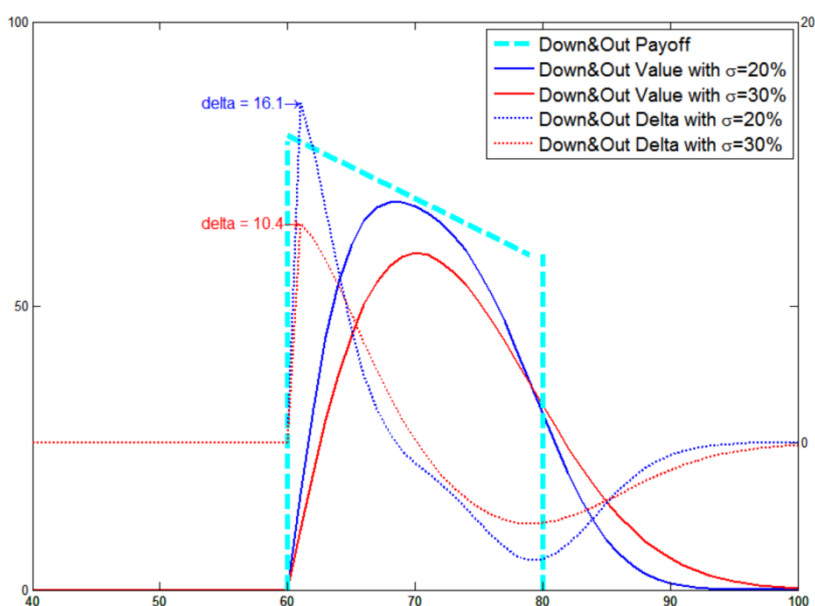
<그림 4>의 파란색 실선은 녹-인이 발생한 이후에 발행자가 투자자에게 지급하는 행사가격 80의 디지털 콜옵션과 행사가격 80의 바닐라 풋옵션 매수에 따른 수익함수이고 빨간색의 사다리꼴은 투자자가 녹-인 이전에 받을 수익이 녹-인 이후에 사라지는 수익함수이다. 즉, 그림에서 Down & Out(DO)으로 표시된 사다리꼴 수익이 녹-인 발생여부에 따른 소멸여부가 결정되는 부분이다. DO옵션은 녹-인이 되지 않을 경우 영역 [60,80]사이에서 한시적으로 존재하는 옵션이며 사다리꼴의 왼쪽 높이는 원금 + 누적쿠폰 - 녹-인가격으로  $79 = 100 + 39 - 60$ 이고 오른쪽 높이는 원금 + 누적쿠폰 - 마지막 상환 배리어 가격으로  $59 = 100 + 39 - 80$ 이다.

<그림 5>는 DO옵션의 수익함수(하늘색의 대쉬(-)선), 가격(빨간색 및 푸른색의 실선) 및 델타헤지 수량(빨간색 및 푸른색의 점선)을 나타낸 것이다. 잔존만기 1개월 전에 변동성이 30%(20%)인 경우



에는 녹-인 시점에서 최대 10.4(16.1) 배의 레버리지 헤지 비율이 0으로 변함을 알 수 있고 영역 [70, 90]에서는 헤지 물량이 음(-)으로 변함을 알 수 있다. 즉 변동성이 감소함에 따라 수익함수 영역인 [60, 80]에서는 KI가격을 터치할 확률이 작아져서 옵션가치가 커지며 이로 인해 녹-인 근처로 갈수록 낮은 변동성에서 보다 큰 델타 값을 갖는다. 특히 기초자산 가격이 녹-인 근처로 지속적으로 하락하는 경우에 변동성이 감소하면 델타가 매우 크게 증가함을 알 수 있다. 반면에 콜옵션 행사가격인 80보다 큰 가격영역에서는 변동성이 커지면 KI가격인 60을 터치할 가능성이 적어서 DO옵션 가치도 증가함을 알 수 있다.

<그림 5> DO옵션의 변동성에 따른 가격 및 델타의 변화 : 20% vs. 30% 변동성



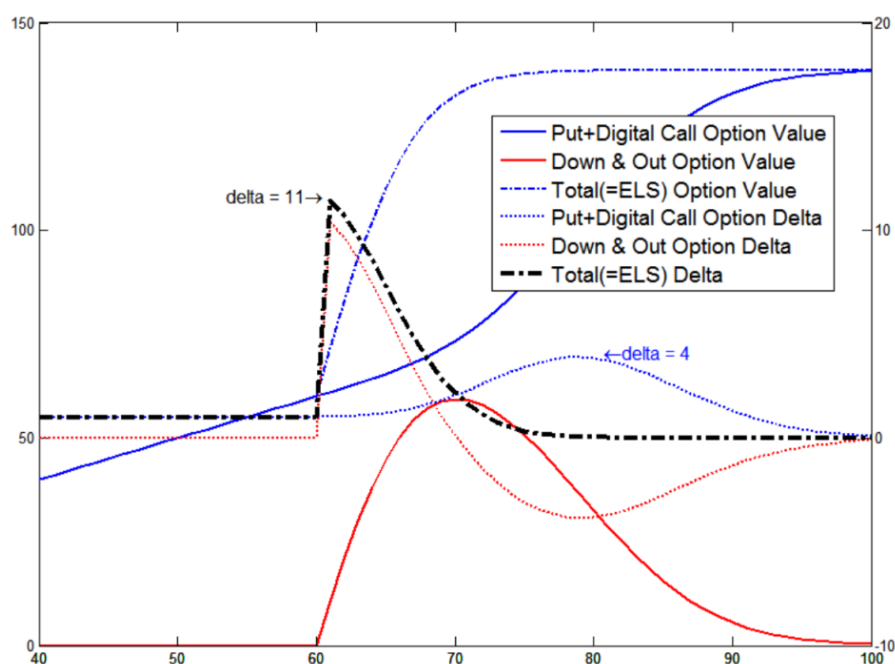
\* 잔존만기 1개월 전에 변동성이 20%(30%)인 경우에 기초자산 가격대별 DO옵션 가격 및 델타

<그림 6>은 잔존만기 1개월 전에 변동성 30%를 가정한 스텝다운 ELS의 NPV를 왼쪽 축으로 델타 수량을 오른쪽 축으로 나타낸 그림이다. 스텝다운 ELS를 풋옵션과 디지털 콜옵션으로 합성한 부분과 DO옵션으로 분해하여 개별 옵션의 특성을 파악하였다. <그림 5>와 <그림 6>의 주어진 델타수량으로 부터 녹-인이 발생하기 전에는 스텝다운 ELS의 델타수량이 11로  $95\% (= \frac{10.4}{11})$ 의 헤지 수량이 DO옵션에서 발생됨을 알 수 있고 녹-인 이후에 DO옵션이 소멸된 이후에 누적쿠폰 상환가격인 80에서는 디지털 콜옵션의 델타는 4임을 알 수 있다. 즉, 녹-인가격 전후로 매우 급격한 델타수량이 변함을 알 수 있다. 이런 녹-인 효과를 극단적으로 살펴보기 위하여 잔존만기가 1일인 경우를 가정하여 델타수량을 구하면 11(4)는 38(18)로 변함을 알 수 있다. 즉, ELS의 만기 전일 및 배리어 근처에서 발행자의 헤지 포지션이 매우 불안정함을 알 수 있다.

따라서 기초자산 가격이 녹-인 가격 또는 상환일 근처에서 상환가격(녹-아웃) 근처에 위치할 경우 델타수량의 급격한 변동이 발생하며 이 영역에서 해당 델타를 따라 헤지를 할 경우 기초자산가격의 약간의 변동에도 헤지 수익이 크게 영향을 받게 된다. 즉, 녹-인 가격에서 발생하는 DO옵션의 소멸과 녹-아웃 가격에서 발생하는 디지털 옵션은 쿠폰이 누적되어 상환금액이 커질 경우 레버리지가 10배가 넘는 급격한 델타의 변화를 유발시킨다. 이런 결과는 스텝다운 ELS 헤지 운용시의 가장 중요한 리스크

요인이며 동시에 시장의 유동성 교란 측면에서도 큰 문제점을 발생시킬 수 있다. 녹-인을 터치한 후 다시 현물가격이 회복이 되어도 ELS의 NPV는 녹-인을 터치하기 전 상태로 회복되지 않는다. 이는 NPV의 급락에 해당하며 단위 헤지 기간 중 발생할 수 있는 급락 위험<sup>8</sup>이다. 아울러 녹-인을 터치한 시점에 보유 델타수량의 급락이 일어나서 헤지 용도로 보유한 현물의 대량매도로 시장의 유동성 급락을 촉발시킬 수 있다. 즉 녹-인이 일어남과 동시에 가격급락, 헤지 물량 급락, 유동성 고갈 등 3가지 유형의 급락 사건이 동시에 발생하게 된다.

<그림 6> 스텝다운 ELS NPV 및 델타의 분해 : Put + Digital Call + Down & Out



\* 잔존만기 1개월 전에 변동성이 30%인 경우에 기초자산 가격대별 풋 + 디지털 콜 옵션, DO옵션, ELS 가격 및 델타

운용위험 측면에서 보면 위험중립 BS<sup>9</sup>(Black & Scholes) 평가모델에서 산출되는 델타를 이용하여 기초자산만을 이용한 순수 델타 헤지를 할 경우 실제 시장의 움직임에 의한 변동성 괴리<sup>10</sup> 및 유동성 축소에 의하여 순간적으로 큰 손실을 입을 수 있는 급락위험(shortfall risk)이 존재한다. 개별종목 변동성 헤지를 위한 옵션이 시장에 존재하지 않거나 원하는 시점 및 행사가격대에 존재하지 않는 경우 급락위험에 직접 노출될 수 밖에 없으며 이를 감안한 헤지 전략 및 모델 개발을 하여야 한다.

불완전 시장에 대한 헤지 이론은 Follmer & Schweizer (1989)에서 국소적 리스크 최소화 방법론을 제시하면서 발전되었다. 그들은 한 단위 기간 헤지 오차의 제곱 최소화를 통한 순차적 회귀분석

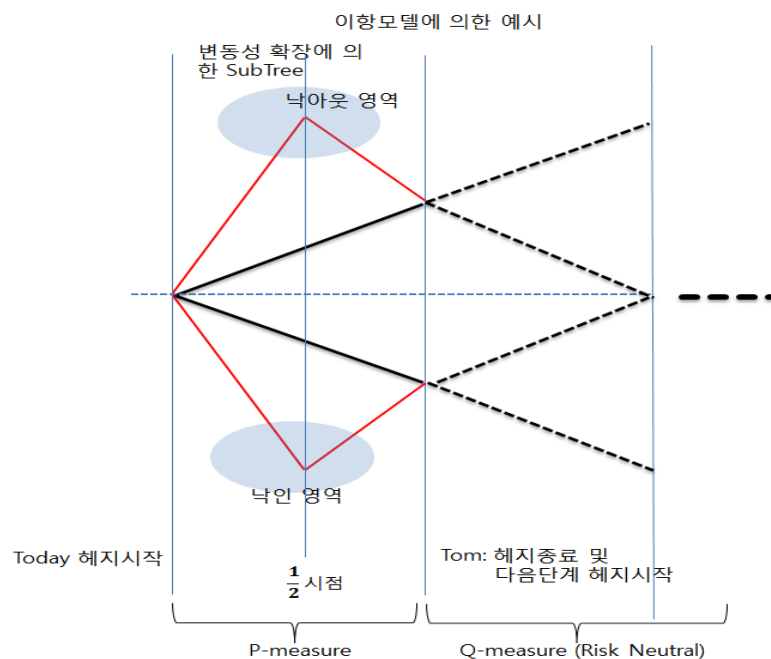
<sup>8</sup> 이산시간 헤지를 가정하므로 단위 헤지 기간 중에는 연속적 헤지가 불가능하다. 이론가격의 형태가 녹-인 점을 기준으로 전과 후가 다른 모양이 되므로 이산 헤지를 가정한 경우에는 연속 모형을 가정하여 구한 BS 이론가격은 고평가 되어있다고 볼 수 있다.

<sup>9</sup> ELS와 같은 특이옵션을 유럽형 옵션으로 분해할 수 있고 이들 각각을 시장 내재변동성을 사용하여 재결합한 가치를 위험중립 이론가격으로 지칭하지만 여기서는 편의상 내규로 정한 일별평가의 기준을 지칭한다.

<sup>10</sup> 일중 현물가격 변동폭이 위험중립모델에서 산출된 변동성에 비해 매우 큰 경우가 많다.

(sequential regression) 헤지가 BS모형을 포함하는 일반적인 헤지 방법론이 될 수 있음을 보였으며 이후 Cerny and Kallsen(2009)은 국소적 방법론을 대역적인(global) 방법론으로 확장하였다. 또한 Schulmerich and Trautmann(2003)는 국소적 급락위험 최소화 헤지가 불완전 시장에 대한 유용한 헤지 방법이 될 수 있음을 보였다. 본 논문에서는 Schulmerich and Trautmann(2003)의 방법에 기반한 급락 위험 최소화 헤지 방법론을 조기상환 스텝다운형 ELS 상품에 수정 보완하여 적용시키고자 한다.

옵션가치평가는 시장의 충분한 유동성 및 위험중립을 가정한 상황에서 연속시간 헤지를 통하여 이루어지나 현실적으로 세가지 조건이 모두 충족되지 않는다. 특히 기초자산의 일중 가격움직임 및 변동폭은 위험중립 가정하에서 계산된 가격 변동과는 큰 차이를 보인다. 특히 헤지 시점과 시점 사이에 실제 발생 가능한 녹-인 및 쿠폰상환 확률은 위험중립 가치평가모델에서 산출된 이론적인 값과 괴리를 크게 보일 수 있으며 헤지 시점 사이에 발생할 수 있는 배리어 터치로 인하여 촉발되는 급락위험을 과소평가하게 된다. 이런 점을 해결하는 방안으로 헤지 시점 사이에는 현물의 실제 움직임이 반영된 기초자산가격의 실증분포(empirical distribution) 또는 헤지 변동성의 확대를 통하여 실제 급락위험을 고려하여 다음 기 도달 전(편의상 1/2 기로 가정)의 헤지 수량에 적용하는 것이 위험중립 모델과 실제 위험 사이의 괴리를 줄일 수 있는 대안으로 고려할 수 있다. 이제 헤지 기간을 현재시점(헤지 시점)과 다음날 또는 헤지 재설정 시점까지의 기간으로 정의하자. 일중 발생 가능한 위험의 실제 크기를 고려하지 않은 위험중립 모형은 녹-인 또는 녹-아웃을 벗어난 일반적인 가격대와 헤지 기간 이후의 선도옵션가치에 적용되며 헤지 기간 설정내의 녹-인 또는 녹-아웃 (인접)영역에서는 확장된 헤지 모델을 사용한다.



윗 그림의 이항모형을 이용하여 구체적으로 살펴보면, 헤지 시작시점에 다음날(또는 헤지 기간 동안) 발생 가능한 위험을 감안하여 실제확률 P-측도(physical measure)하에 가격의 변동성이 확장되었다가 헤지 종료시점에서는 Q-측도하의 위험중립 변동성으로 회귀한 것을 가정하자. 이산 헤지 모형에서는 위험요소인 배리어 터치여부가 헤지 종료 순간에서만 확인되므로 뒤이은 순차적 헤지를 위해서는

항상 급락위험이 고려된 헤지 수량이 유지되어야 한다. 일별 평가에 이용되는 위험중립 BS모형과의 차이점은 설정된 헤지 기간 (1일~일주일)내의 순간 급락위험을 측정하여 헤지 수량계산에만 적용되며 다음 헤지 시점 노드의 옵션가격은 동일한 차익거래불가 BS모형을 사용하므로 옵션가격은 BS모형과 동일하다.

수정된 모형은 유럽형 옵션 가치평가에서는 만기일 전까지 차이가 없으나 경로의존형 옵션(path-dependent option)의 평가시점 및 유럽형 옵션 가치평가의 만기 직전에는 BS모형과는 차이를 보일 것이다.

## 2.2. ELS의 운용수익 분석 : 감마수익

감마매수(Long Gamma)상태란 옵션가격이 기초자산가격 움직임에 대하여 위로 볼록한 모양을 하고 있는 경우<sup>11</sup>이며 <그림 7>에서 파란색 실선은 옵션의 가격곡선이고 기초자산가격이 70인 점에서 접선이 옵션발행자가 델타 헤지를 수행함에 따른 옵션복제손익을 의미한다. 옵션의 가격곡선이 위로 볼록한 모양이므로 기초자산가격이 어느 방향으로 움직이건 항상 옵션가격이 델타 헤지 손익보다 아래에 있게 되므로 변동성 변화가 없다면 헤지 종료시의 옵션가격이 원래 예상한 가격곡선을 따르므로 헤지 운용자는 이익을 본다. 예를 들어, <그림 7>의 오른쪽 그림은 기초자산가격이 70에서 75로 변할 때, 델타 헤지 포지션 가치는 143.42로 변하고 옵션가격은 137.8로 변하면 두 가격의 차이인 5.66을 감마 이익(Gamma profit)이라 한다. 따라서 볼록한 정도인 감마가 크거나 기초자산가격이 크게 움직일수록 감마수익이 더 크게 된다. 옵션이 감마매수 상태에서 옵션평가 변동성의 변화가 크지 않으면 짧은 헤지 기간 사이의 옵션가격 변화도 작다. 따라서 기초자산을 델타 수량만큼 보유하는 일반적인 헤지 운용에서 감마이익이 발생하며 이 부분이 시간이 지남에 따라 옵션가격변화인 시간가치 손실분보다 크면 평가 이익이 발생한다.

감마매도(Short Gamma)상태란 옵션가격이 기초자산가격 움직임에 대하여 아래로 볼록한 모양을 하고 있는 경우이며 발행자 입장에서 옵션매도로 인하여 시간가치는 양(+)의 값이 되지만 기초자산가격이 상승하면 현재의 헤지 물량 대비 더 매수하고 하락하면 헤지 물량을 줄여야 하므로 운용측면에서 좋지 않은 영향을 주게 된다. 즉, 주가가 평균 회귀한다고 가정하면 감마매도 구간에서는 가격이 오르면 매수하고 내리면 매도하는 헤지 전략을 따르므로 지속적으로 손실이 발생한다.

스텝다운형 ELS에서는 내재된 디지털 콜 매도 및 DO옵션 매도로 인하여 발생하게 되는데 구체적으로

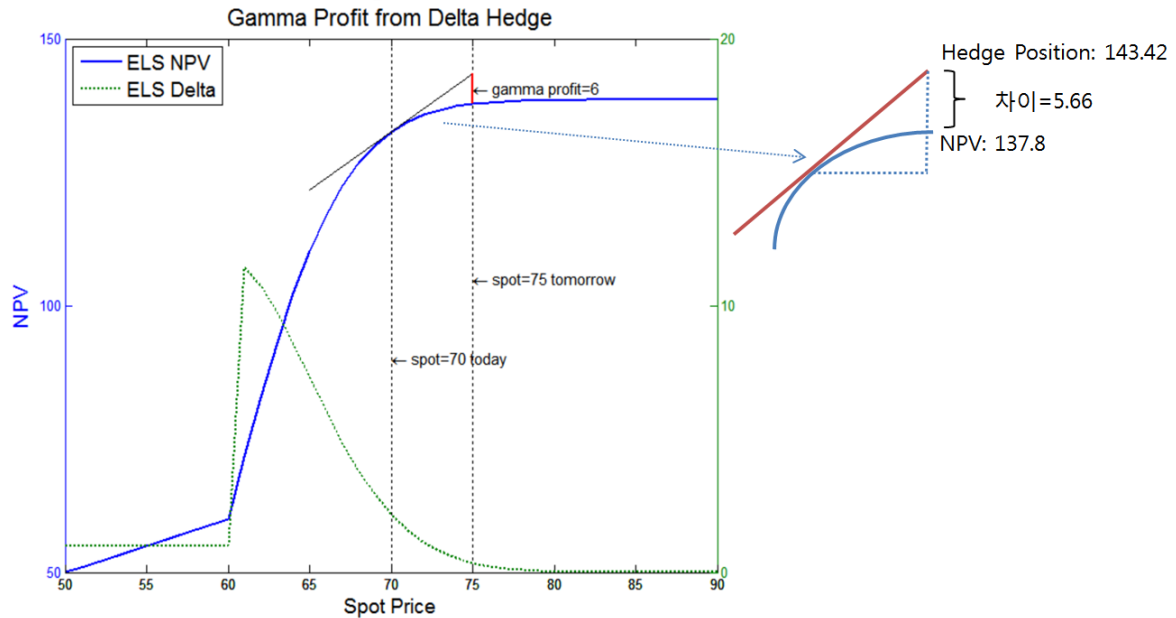
- 1) 녹-아웃 배리어를 하회하는 근접영역
- 2) 녹-인 시점(한 점에 응축된 감마매도)

쿠폰이 누적된 상태에서 녹-아웃 배리어 도달하기 전 구간에서 발생하는 1)번째 Case의 감마매도 상태는 상대적으로 운용하기 매우 힘들며 손실 발생의 가능성이 크다. 반면 2)번째 Case인 녹-인을 터치하여 발생하는 한 점 감마매도상태는 DO옵션의 소멸에 따른 현상이며 감마매수상태에서 급락위험을 감안하여 미리 대응을 하면 녹-인이 발생하는 시점에서의 대량매도에 따른 손실을 최소화 시킬 뿐만

<sup>11</sup> 옵션발행자는 옵션을 매도한 상태이므로 현물 움직임에 대해서 아래로 볼록한 가격함수를 갖는다.

아니라 수익확보의 기회가 될 수 있다.

<그림 7> 감마매수(Long Gamma) 및 감마수익



ELS의 운용수익의 원천이 감마수익 및 초기 이연 이익임을 이론적으로 살펴보자. 기초자산가격  $S$ , 변동성  $\sigma$ , 무위험 이자율  $r$ , 평가시점  $t$ , 만기시점  $T$  인 옵션의 가격을  $V(S, t, \sigma) = V(S, t, \sigma, T)$ 라 하자. Carr(2005), Henrard(2003)등의 연구에서 위험중립 가격모형 가정하에서 옵션을 매입하였을 경우 동적 헤지에 따른 성과는 헤지를 위한 변동성의 선택에 따라 다음과 같이 나타난다. 사용되는 변동성들은 만기시점 및 현물의 가격수준에 상관 없이 모두 같다고 가정하자. 헤지 변동성  $\sigma_h$ , 실제 실현된 변동성을  $\sigma$ , 내재변동성을  $\sigma_i$ 라 할 때

$$\text{Total PL(Buyer)} = V(S, t_0, \sigma_h) - V(S, t_0, \sigma_i) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} (\sigma^2 - \sigma_h^2) S^2 \Gamma_h dt$$

$V(S, t, \sigma_i)$ 는 내재변동성을 사용한 일일 정산(marking to market) 평가가격

$V(S, t, \sigma_h)$ 는 헤지 변동성을 사용한 옵션의 가격,  $\Gamma_h$ 는  $\sigma_h$ 를 사용하여 산출된 감마

위의 식을 ELS 발행 및 헤지의 입장에서 보면 부호가 반대로 되어

$$\text{Total PL(Seller)} = V(S, t_0, \sigma_i) - V(S, t_0, \sigma_h) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} (\sigma^2 - \sigma_h^2) S^2 \cdot (-\Gamma_h) dt$$

앞에서 언급된 스텝다운 ELS의 감마매수는 투자자 입장에서 본 옵션가치  $V(\cdot)$ 가 감마매도의 형태 즉 현물가격  $S$ 에 대한 이차 미분이 음수일 경우를 의미한다. 즉 매도자 입장에서의 감마는  $-\Gamma_h \triangleq \Gamma_h^{seller}$ 이므로 위의 식은 다음과 같이 분해됨을 알 수 있다.

(1) 초기 시장가격과 헤지 가격과의 차이:  $V(S, t_0, \sigma_i) - V(S, t_0, \sigma_h)$

(2) 감마 거래에 따른 이익:  $\frac{1}{2} \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} (\sigma^2 - \sigma_h^2) S^2 \cdot \Gamma_h^{seller} dt$

즉  $\Gamma_h^{seller} > 0$  일 경우 실현 변동성  $\sigma$  대비 낮은 헤지 변동성  $\sigma_h$ 을 사용하여 저가매수 고가매도(Buy Low Sell High) 감마거래전략이 운용 수익의 원천임을 알 수 있다. 여기서  $\sigma_h$ 의 수준은 적절한 초기확보 이익을 위하여 일일 정산 변동성인  $\sigma_i$ 보다 높으면서<sup>12</sup> 상품의 만기 종료 후 알 수 있는 미지의 값인 실현 변동성  $\sigma$  보다 낮아야 한다. 이상은 실재를 단순화 시킨 만기시점 및 현물의 가격레벨에 상관없이 평평한 변동성을 가정하고 실현 변동성을 알고 있다는 결과론적인 가정하에 성립하는 이론적인 연구결과다. 따라서 실제 운용시 그대로 따르는 것을 의미하지 않는다.

참고로 운용시의 이연 손익은 일일 정산 평가에 의한 평가가격과 고객에게 판매한 가격과의 차이이며 판매가격을 편의상 원금(Nominal)과 같다고 두자. 내재변동성을 이용하여 평가 받을 경우 이연 손익은  $Nominal - V(S, t_0, \sigma_i)$ 로 주어진다.

### 2.3. 기대 급락 헤지(Expected Shortfall Hedging)전략

2.1절에서 스텝다운형 ELS의 특징과 내재된 옵션의 구조 그리고 급락위험을 고찰하였으며 2.2절에서는 발행자 입장에서 헤지 운용의 주수익이 감마매수상태를 이용한 감마수익임을 알아보았다. 살펴본 바와 같이 급락위험은 주가가 하락하면 더 매입하고 상승하면 매도하는 감마매수상태에 의한 운용(long gamma trading)의 양 극단에서 발생한다. 여기서 감마매수상태영역의 양 끝점은 녹-인 점 및 녹-아웃에 약간 덜 미친 점이 될 것이다. 그러나 주가가 녹-인 가격 이하로 하락할 때 발생하는 내재된 DO옵션의 소멸과 녹-아웃가격 가까이 진입할 때 나타나는 디지털 콜 옵션의 가치상승은 발행자에게 급락위험을 주게 되어 양 끝점 가까이에서 감마매수상태에 의한 운용을 실행할 경우 수익보다는 손실 위험이 더 크게 된다. 따라서 손실발생이 최소화되는 점은 감마매수상태 양 끝점 보다 더 내부에 존재하게 된다. BS모형을 이용하여 구한 델타와 급락위험을 감안하여 새로운 헤지 모형에서 구한 델타<sup>13</sup>는 차이가 존재하지만 주관적인 측면이 있다. 본 논문에서는 급락위험이 내포된 상태의 이산 헤지를 위하여 Schulmerich and Trautmann (2003) 및 Cvitanic and Karatzas (1998)등의 연구에서 제안된 기대 급락 헤지(Expected Shortfall Hedge) 기반으로 구성한 두 가지의 헤지 전략을 제시하고 실증 분석을 하였다.

이를 위하여 먼저 BS모형에 의한 선도 옵션가치에서 얻어지는 감마수익을 정의하고 여기에 기반한 기대급락위험을 주관적 확률 P하에서 산출하는 방법론을 설명한다. 이 값을 최소로 하는 감마수익함수의 델타 D를 찾는 것이 헤지 전략 1이 제안하는 방법론이다. 헤지 전략 2는 급락사건이 일어날 때 발생하는 델타의 크기조절 위험에 중점을 두고 만든 직관적인 방법론이다.

<sup>12</sup> 스텝다운 ELS는 초기 발행시 내재된 풋옵션 매수 및 디지털 콜옵션 매도에 의하여 변동성이 낮을수록 가격이 올라가므로 수익확보를 위하여 헤지 변동성 조건  $\sigma_i < \sigma_h$ 를 만족하여야 한다.

<sup>13</sup> 불완전시장에서 주관적 확률 P를 사용하므로 개별 운용 주체에 따라 차별화 될 수 있다.

- 감마수익의 정의

헤지 시점 주가를  $S_0$ , 헤지 평가(증가) 주가를  $S_1$ , 각각의 평가금액을  $N_0$ ,  $N_1$  그리고  $S_0$  에서의 델타를  $D_0$  라 할 때 감마수익은  $G(S_1) = D_0 \cdot (S_1 - S_0) - N_1 + N_0$  로 정의한다. 손실을 발생하는 상황인 감마수익의 음수부분을  $G^-(S) = G(S)$  if  $G(S) < 0$ ,  $0$  if  $G(S) \geq 0$  로 정의하자. 감마수익  $G(S_1)$ 는 기초자산의 가격  $S_1$ 에 따른 확정적인(deterministic)<sup>14</sup> 함수이며 주가에 따른 감마수익의 그래프는 <그림 8>과 같다. 녹-인 점인 273,000원에서 감마수익의 변곡점이 발생함을 알 수 있다. 기대급락위험을 계산하기 위하여 <그림 8>에서 현재가격이 29만원이라는 가정아래 주관적 주가 분포를 보여주고 있다.

1. 기초자산이 다수인 문제(multi asset problem)

기초자산이 두 개인 경우도 나머지 기초자산을 현재가로 고정한 1차원 모형으로 접근하며 계산의 편의 및 짧은 헤지 기간 가정에 의하여 적절한 선택<sup>15</sup>이 될 수 있다. 같은 이유로 스텝다운형 ELS의 포트폴리오를 분석하는 경우 분석대상인 특정 기초자산  $S$ 에 대하여 쌍(pair)이 된 나머지 주식들의 움직임은 고정시킨다. 나머지 주식들의 움직임에 따라 NPV 및 델타가 영향을 받으나 다른 주가들을 고정시킨 상태에서 각각의 기초자산에 대하여 같은 식의 분석을 실행하여 독립적으로 위험을 파악하는 방식을 선택한다.

2. 최적 델타 정지점(optimal delta stop point)<sup>16</sup>

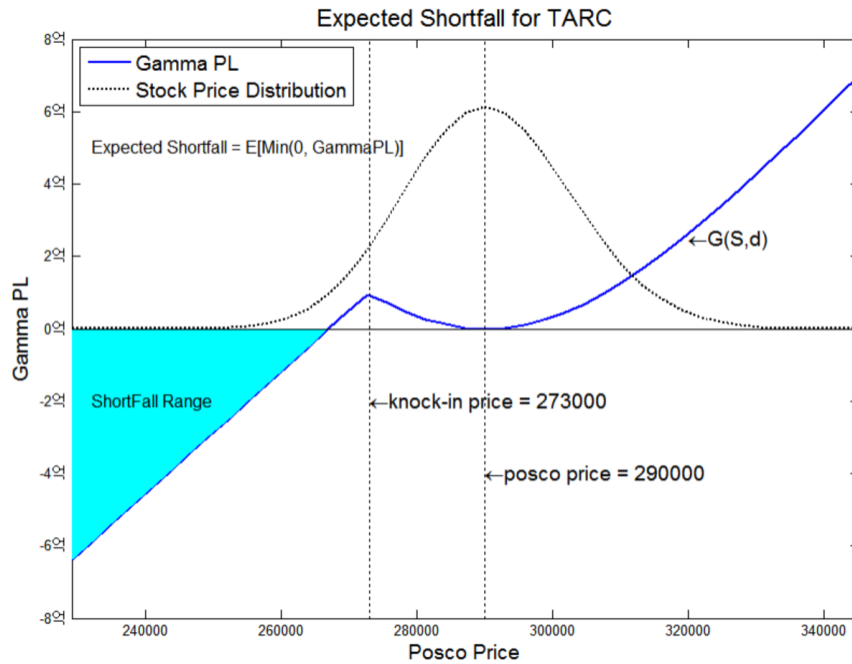
녹-인 영역 근방에서 감마수익의 변곡점이 위치함에 따라 수익이 감소할 뿐 아니라 DO옵션의 소멸가능성으로 유동성을 무시한 큰 규모의 델타수량 축소 위험이 발생할 수 있다. 이때 녹-인을 터치하고 유동성의 부족으로 현물 가격이 더 큰 폭으로 빠지면 위험중립 BS모형에 의한 기준 델타를 유지하고 있었을 경우 큰 손실을 입을 가능성이 크다. 즉 해당 영역에서 운용위험 관리는 감마수익 대비 위험의 크기에 초점을 맞출 필요가 있으며 녹-인에 의하여 손익이 급변하는 급락 위험이 존재한다. 본 논문에서는 기대급락위험 최소화 기법을 사용하여 녹-인이 예상되는 영역에서 KI가격 터치에 따른 즉각적인 매도가 불가능한 위험에 따른 최대 손실을 정의하였으며 감마수익대비 최대 손실 비율의 최소화를 제안한다.

<sup>14</sup> 한 단위 헤지 기간의 평가변동성은 고정되어 있으며 주가  $S_1$ 에 따른 선도이론가격  $N_1$ 은 헤지 종료시점의 가격이다.  $G(S_1) = E[D_0 \cdot (S_1 - S_0) - N_1 + N_0 | F_1 = S_1]$ ,  $F_1$ 은 단위 헤지종료시점 1에서 정보집합

<sup>15</sup> 실증분석 결과 ELS 포트폴리오의 기초자산 별 델타의 그래프 모양은 연관된 다른 기초자산의 가격이 크게 변동하지 않을 경우 상당한 기간 동안 크게 변하지 않음을 알 수 있다.

<sup>16</sup> 최대손실을 최소화 조건을 만족시키는 델타는 BS모형에 의한 델타곡선 상의 한 점에서 더 이상 수량을 늘리지 말고 정지하여야 한다.

<그림 8> 스텝다운 ELS의 감마수익 및 기대급락위험



### 3. 기대급락위험(Expected Shortfall Risk)

먼저 0과 1사이의 신뢰수준 변수  $\alpha = 1 - p$ 를 설정하고 손실함수  $L(S)$ 를 감마수익  $G(S)$ 의 음수부인  $G^-(S)$ 로 설정하자. 전통적인 의미의 VaR(Value at Risk)는  $\alpha$ -분위수 값  $l$ , 구체적으로 다음과 같이 정의된다<sup>17</sup>.

$$VaR_{\alpha}(L) = \inf\{l : \Pr[L > l] \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l : \Pr[L < l] \geq \alpha\}$$

그러나 정적인 의미의 VaR 측정은 하나의 분위수 값만 고려하므로 감마손익의 동적인 움직임에 따른 손실, 특히 녹-인 후 현물가격이 지속적으로 하락하여 매도 불가능 상태에 빠진 상황에서 발생하는 위험을 검출하지 못한다. 또한 이 위험은 장중에 제어하기 힘든 상황이 올 수도 있으므로 한계상황인 VaR값 이후 발생하는 지속적 손실부분을 염두에 두어야 한다. 따라서 녹-인 발생시의 위험인 기대급락위험, 즉  $\alpha$ -분위수 값을 연속적으로 고려하는 조건부 VaR(Conditional Value at Risk)로 측정하는 것이 더 합리적이다. 이를 수식으로 표현하면 신뢰수준  $\alpha = 1 - p$ 인 조건부 기대급락위험은 다음과 같이 정의된다.

$$ES_p = -E[L | L \leq -VaR(p)] = -\frac{1}{p} \int_{-\infty}^{-VaR(p)} x f_l(x) dx ,$$

$f_l(x)$ 는 손실의 확률밀도함수,

$L = L(S) = G^-(S)$ : 주어진 주가  $S$  에서 손실(Loss given stock price  $S$ ),

$G^-(S)$ 는 감마수익  $G(S)$ 의 음수부(negative part)

<sup>17</sup> Rockafellar and Uryasev (2002)



손실함수  $L(S)$ 는 주가의 분포에 의존하며 위험중립 BS모형에서 계산된 분포는 단위 헤지 기간중의 가격변화를 반영하지 못한다. 특히 시장의 수요와 공급이 ELS헤지 수요 및 녹-인시의 매도 물량에 의하여 변화가 심한 경우 급락위험의 발생가능성이 크며 해당시점의 상황을 잘 반영할 수 있는 경험분포를 이용하거나 일종의 변동폭을 강하게 반영하는 최근 변동성 또는 EWMA(Exponentially Weighted Moving Average) 변동성 등을 사용하여 급락위험이 고려된 헤지 수량을 계산하여야 한다. 이를 주관적 측도  $P$ 하의 계산이라 두자. 단위 헤지 종료시점 평가는 위험중립 평가에 의존하므로 가격함수  $N_1$ 을 사용하며 손익의 측정을 위한 기준가격인 현재시점 평가가격  $N_0$  역시 위험중립 모델로 계산된 값이다.

위에서 정의한 감마손익  $G(S_1) = D_0 \cdot (S_1 - S_0) - N_1 + N_0$ 를  $S = S_1$  및 델타  $D$ 의 함수로 바꾸어 사용하면 감마손익은 주가와 델타를 변수로 갖는 다음과 같은 함수로 정의된다.

감마손익함수 :  $G(S, D) = D \cdot (S - S_0) - N(S) + N(S_0)$ ,  $S_0$ 는 헤지 시점의 기초자산 가격

#### 4. 최적화 문제

Schulmerich and Trautmann(2003)는 기대 급락을 주관적(physical)측도  $P$  하에서  $E_P[(V_T(H) - N_T)^-]$ 로 정의하고 기대 급락 헤지를 기대급락을 최소화 하는 문제로 정의하였다. 여기서  $V_T(H)$ 는 헤지 전략  $H$ 를 옵션가격함수  $V_T(\cdot)$ 에 적용시킨 결과를 의미한다. 전역적인 방식으로  $E_P[(V_T(H) - N_T)^-]$ 을 계산할 때 요구되는 시간을 줄이기 위하여 해당논문에서는 만기시점까지 시간스텝을 세분화하여 각 스텝마다 순차적 최적화<sup>18</sup> 과정을 진행하는 국소적 방식을 제안하였다. 그러나 시간스텝이 증대할수록 계산 분량이 늘어나는 문제를 갖고 있다. 또한 스텝다운 ELS와 같이 녹-인 및 녹-아웃에 의한 확실한 급락위험이 있는 상품인 경우에는 이런 상황을 가정하지 않고 일반적인 상황을 가정하여 이론적만으로 전개되었으므로 급락 상황에 따른 헤지 성과의 검출이 불확실하다.

본 논문에서는 순차적 최적화 대신 한 단위 헤지 기간을 가정하고 헤지 전략  $H$ 를 기초자산의 델타  $D$ 를 이용한 헤지 전략으로만 한정하여 진행하였다. 한 단위 헤지 기간후의 평가가 위험중립 측도  $Q$ 에 의하여 평가될 경우 손익은 감마손익으로 정의된  $G(S_1)$ 이며 헤지 기간 중 발생할 수 있는 기대 급락의 가치는 주관적 측도  $P$ 에서  $E_P[G^-(S, D)|S_0]$ 이다. 즉 해당상품이 가지는 녹-인 및 녹-아웃 영역에 존재하는 급락위험을 급락영역의 진입 조건 설정과 한 단위 헤지 기간을 통한 최적화를 통하여 접근하였다. 따라서 본 논문의 접근 방식은 원래의 논문이 안고 있는 불완전 시장하의 옵션 평가 모델설정의 어려움과 계산의 복잡성 그리고 구체적인 방법론이 제시되어 있지 않은 상황을 실무적으로 간소하게 해결한 방법이다.

---

<sup>18</sup>  $t$ 시점 정보집합을  $F_t$ 라 둘 때  $t+1$ 시점 값  $E_P[(V_{t+1}(H) - N_{t+1})^-|F_t]$ 을 계산하고 여기서 나오는 분기결과에 따라 정보집합  $F_{t+1}$ 이 결정되면 다시  $E_P[(V_{t+2}(H) - N_{t+2})^-|F_{t+1}]$ 을 계산하는 방식이다.

기대급락위험 최소화 헤지 전략[**헤지 전략 1**]은 다음의 최적화 문제로 주어지며 진다.

최소화조건 :  $E_P[G^-(S, D)|S_0]$ <sup>19</sup>

제약조건 :  $\frac{D \cdot S_0}{NPV_0} \leq ML$ <sup>20</sup> 또는  $D_{bs}(1 - \alpha) \leq D \leq D_{bs}(1 + \alpha)$

P 측도는 주가수준, 녹-인, 녹-아웃의 위치 및 실증분포를 감안하여 적합하게 선택한다. 제약조건 중 BS모형 델타대비 최대허용 한도( $\alpha\%$ )를 제한하는 방식은 실무에서 많이 사용되고 있으나 급락 위험 상황에서  $\alpha$ 가 크게 감소 또는 증가될 수 있으므로 모든 상황에서 상수로 고정하여 사용하는 것은 적절하지 않다.

<그림 9>의 왼쪽 그림을 보면 주가가 녹-인이 안된 상태에서 이 가격보다 큰 근처에 위치할 경우 감마수익인  $G(S, D)$ 의 형태는 델타에 따라 조금 단조 증가하는 직선의 모양임에 반해 급락 위험인  $E_P[G^-(S, D)|S_0]$ 은 꼭지점이 있고 크게 변하는 2차 곡선의 형태임을 알 수 있다. 기대급락 위험 최소화 델타수량은 음수인 급락위험 값이 최소가 되는 변곡점에서 찾을 수 있으며 BS모형기반 델타 수량 대비  $33.9\% = 10,576/31,205$ 로 많은 차이가 존재함을 알 수 있다. 즉 급락위험을 대비하여 BS델타수량에 비교하여 델타수량을 현저히 감소하여 손실위험을 최소화 시키라는 것이다. 즉 리스크를 관리하는 부서와 운용수익을 고려하는 부서간의 합리적인 의견 조정이 필요한 부분이다. 반면에 <그림 9>의 오른쪽을 보면 녹-아웃 근처에서는 영역에서  $G(S, D)$ 의 형태가 델타에 따라 조금 단조 감소한 데 반해 급락위험은 2차 곡선과 같이 많이 변함에도 불구하고 기대 급락위험 최소화 델타수량은 BS모형기반 델타 수량의  $106.7\% = 1,830/1,716$ 로 차이가 크지 않음을 알 수 있다. 기초자산 가격상승에 따른 물량확보를 미리 대응하라는 신호로 운용사의 ELS운용 가이드라인이 제시하는 괴리율 10% 이내로 리스크 관리부서와 운용부서간의 인내할 괴리수준이다.

두 개의 기초자산 중에서 하락폭이 큰 기초자산가격이 KI가격보다 약간 높을 경우에는 헤지 델타를 산출할 때, 녹-인 확률을 고려한 최적<sup>21</sup> 헤지 전략[**헤지전략 2**]은 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$D = \begin{cases} (1 - p_{ki}) \cdot D_{bs} + p_{ki} \cdot D_{ki}, & \text{where } KIBarrier < S_0 < KIBarrier + \alpha_1 \cdot S_0 \\ (1 + p_{ko}) \cdot D_{bs}, & \text{where } |S_0 - KOBarrier| < \alpha_2 \cdot S_0 \\ D_{bs}, & \text{o.w} \end{cases}$$

$p_{ki}$ : 현재 시점의 녹-인 확률

$p_{ko}$ : 현재 시점의 녹-아웃 확률

<sup>19</sup> 본 논문에서는 계산 복잡도를 고려하여 한 단위 헤지 기간 최적화만 적용하였으며 위험중립 측도로 계산된 한 단위 헤지 기간 뒤의 선도옵션가격  $N(S)$  및 델타를 통한 헤지 전략  $D$ 를 사용하였다.

<sup>20</sup> 헤지 과정에서 허용되는 최대 레버리지(Maximum Leverage) 수준을 의미한다.

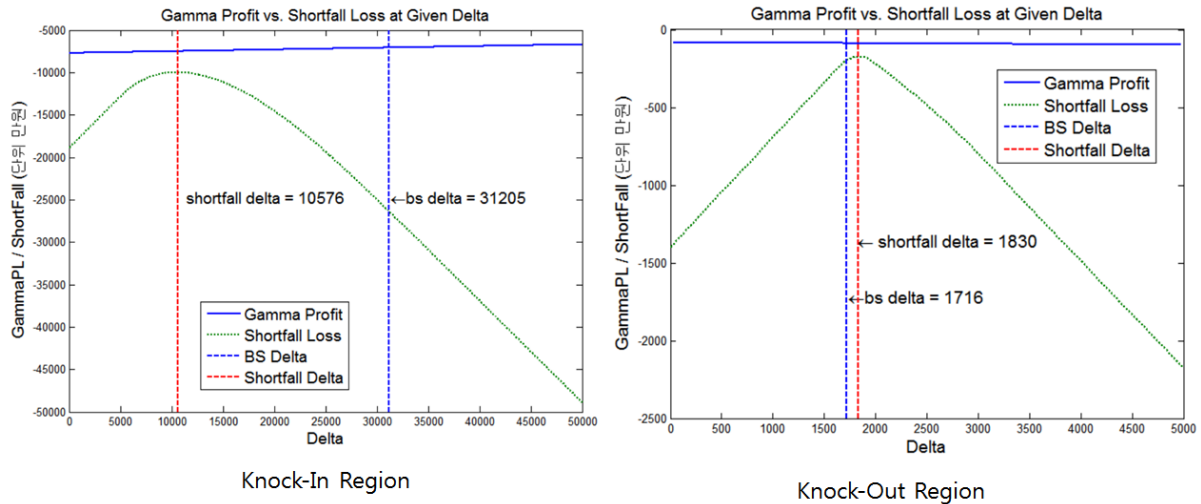
<sup>21</sup>  $D_{bs}$ 와  $D_{ki}$ 는 녹-인 전과 후를 가정한 위험중립 선도 BS델타이다. P측도하의 이항모형을 가정하면 녹-인될 확률  $p_{ki}$ 와 그렇지 않은 경우 확률  $1 - p_{ki}$ 로 나누어 진다.

$D_{bs}$ : 한 단위 헤지 기간 후의 BS 델타

$D_{kt}$ : 한 단위 헤지 기간 후의 녹-인 터치를 가정한 BS 델타

$\alpha_1, \alpha_2$ : 적절한 제어 상수, 근접한 정도를 감안하여 선택함.

<그림 9> 델타에 따른 감마수익 및 급락손실 변화



\* 예시 상품의 2014-3-3일(왼쪽) 및 2011-11-9일(오른쪽)의 헤지 전략 1에 의한 급락 헤지 델타 및 BS-델타의 비교 및 이에 따른 감마수익과 급락손실 그래프

### III. 실증 분석

#### 3.1 검증상품의 가상운용

<그림 10>은 <표 1>과 <그림 1>에 주어진 가상상품 "2 stock 조기상환형 스텝다운 ELS"에 대한 발행일(2011년 5월 27일)부터 만기(2014년 5월 22일)까지의 NPV추이 및 각 헤지 전략(scheme)에 따른 성과를 나타내었다. 헤지 전략의 조건에 추가로 가상 운용에 필요한 가정은 아래와 같다.

- 1) 종가만을 사용한 운용을 가정
- 2) 변동성은 250일 역사적 변동성 사용
- 3) 주관적 확률측도 P을 헤지 전략에 반영된 급락조건은 아래와 같다.  
 녹-아웃에 의한 급락 반영 조건:  $|(Knock-Out Barrier - 현재주가)/현재주가| < 5\%$   
 녹-인에 의한 급락 반영 조건:  $0\% < (Knock-In Barrier - 현재주가)/현재주가 < 8\%$   
 조건에 부합할 경우 기초자산의 실증분포를 감안한 변동성 조정
- 4) 분석에서는 거래비용과 초기손익은 포함하지 않았다.

<표 2>는 급락위험을 반영한 헤지 전략의 유효성이 대표적으로 나타나는 녹-인 발생일 전

후의 일자 별 델타수량을 각 헤지 전략별로 나타낸 것이다. 2014년 3월 4일 종가에 KI가격은 273,000원을 터치하여 녹-인이 발생하였다. 비교대상인 BS모형에 의한 녹-인 직전의 델타는 11<sup>22</sup> 배의 레버리지가 요구되나 급락위험 최소화를 통한 헤지전략 1의 델타는 3.7배의 레버리지, 녹-인 확률여부에 따른 헤지 수량을 조정한 전략 2의 델타는 2.2배의 레버리지를 갖는다. 아울러 헤지전략 1과 2는 KI가격에 도달하기 이전부터 급락위험을 최소화하기 위해서 헤지 수량을 과도하게 매수하지 않고 녹-인 이후를 준비하는 헤지 형태를 보인다.

<그림 10>의 왼쪽 축은 포스코 주가변화 추이를 오른쪽 축에는 발행자 입장에서 누적시간가치 손실액과 기초자산인 주식매매에 따른 거래비용을 고려하지 않고 각각의 헤지 전략에 따른 헤지 손익을 나타낸다. 그림에서 P-Measure Region는 BS모형과는 차별적으로 급락위험을 고려한 영역으로 녹-아웃 역과 녹-인 영역으로 구분된다. 발행 후 1년이 경과하면 누적된 시간가치 손실 부분이 운용으로부터 얻은 헤지 이익을 상회함에 따라서 헤지 수익이 음(-)의 값으로 전환됨을 알 수 있다.

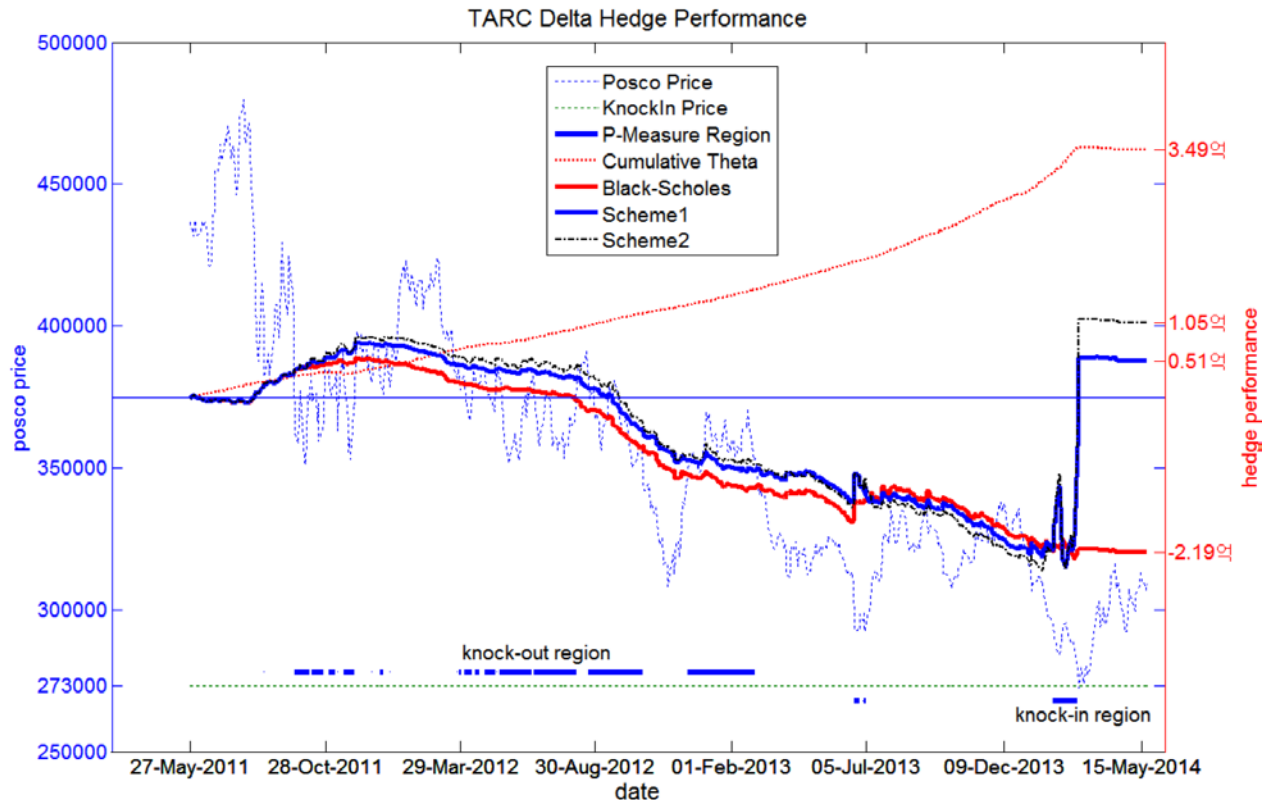
각각 헤지 운용전략에 따른 수익의 추이를 살펴보면, 다른 전략에 비해서 원래 BS모형에 의한 손익의 변동은 연속성을 띄고 있다<sup>23</sup>. 급락위험을 감안한 두 헤지 전략은 ELS 가치의 급락이 발생할 확률이 높은 녹-인 영역에서 보유 주식을 최소화시켜 큰 폭의 헤지 수익 확보효과를 보이며 녹-아웃 영역에서 현물의 보유를 늘려 기존 모형 대비 수익의 향상이 뚜렷이 보인다. 구체적으로 <그림 10>에서 급락위험을 고려하기 위하여 P-측도를 사용하여 녹-인 가격대인 273,000원을 기준으로 붉은 파란색 실선으로 녹-아웃 전략 실행구간 및 녹-인 전략 실행구간으로 구분 지어 나타내었다. 각 전략의 실행구간에서 기존 위험중립 BS모형기반 헤지 전략 대비 뚜렷한 성과가 있음을 보여주고 있다. 특히 녹-인 영역에서 급락위험 요인 효과가 매우 뚜렷함을 확인할 수 있다.

기준 주가가 조기상환일 근처에 조기상환이 가능한 녹-아웃 영역에 위치할 경우 녹-아웃에 대한 급락위험을 최소화시키는 효과는 녹-아웃 진입 전 기준 BS모형 델타 대비 증가로 나타나며 이에 따른 좋은 성과는 2011년 11월 초부터 2012년 8월까지 헤지 성과에서 알 수 있다. 특히 녹-아웃 진입영역에서 수익상환이 일어났을 경우에 따른 급락 손실을 방지하고 수익을 극대화하기 위하여 조기상환 평가 일에 가까울 경우 실무에서 흔히 사용하는 녹-아웃 배리어를 하회하는 가격대에서 원래의 디지털 수익구조를 콜옵션 매도와 비슷한 모양을 갖는 수익구조로의 변경(일명 Ramp Payoff)을 통하여 그 효과를 극대화 할 수 있다.

#### <그림 10> 헤지 전략에 따른 헤지 손익 및 누적 시간가치 손실

<sup>22</sup> 헤지금액(278,500 X 31,205)을 NPV (788,224,991)로 나눈 수량으로 11배가 된다.

<sup>23</sup> 이론적으로 Jump Condition으로 설명이 된다. Wilmott Chap9. p161 참조



\* 왼쪽 축은 포스코 주가추이를 오른쪽 축은 누적시간가치 손실액과 주식매매에 따른 거래비용을 고려하지 않고 각각의 헤지 전략에 따른 헤지 손익을 나타낸다. 그림에서 P-Measure Region는 BS모형과는 차별적으로 급락위험을 고려한 영역으로 녹-아웃 역과 녹-인 영역으로 구분된다. 빨간색 굵은 실선은 BS모형, 파란색 굵은 실선은 헤지 전략 1, 검정색 --선은 헤지 전략 2의 헤지 수익을 나타낸다.

<표 2> 녹-인 근처 일별 헤지 전략별 델타 수량 및 시간가치

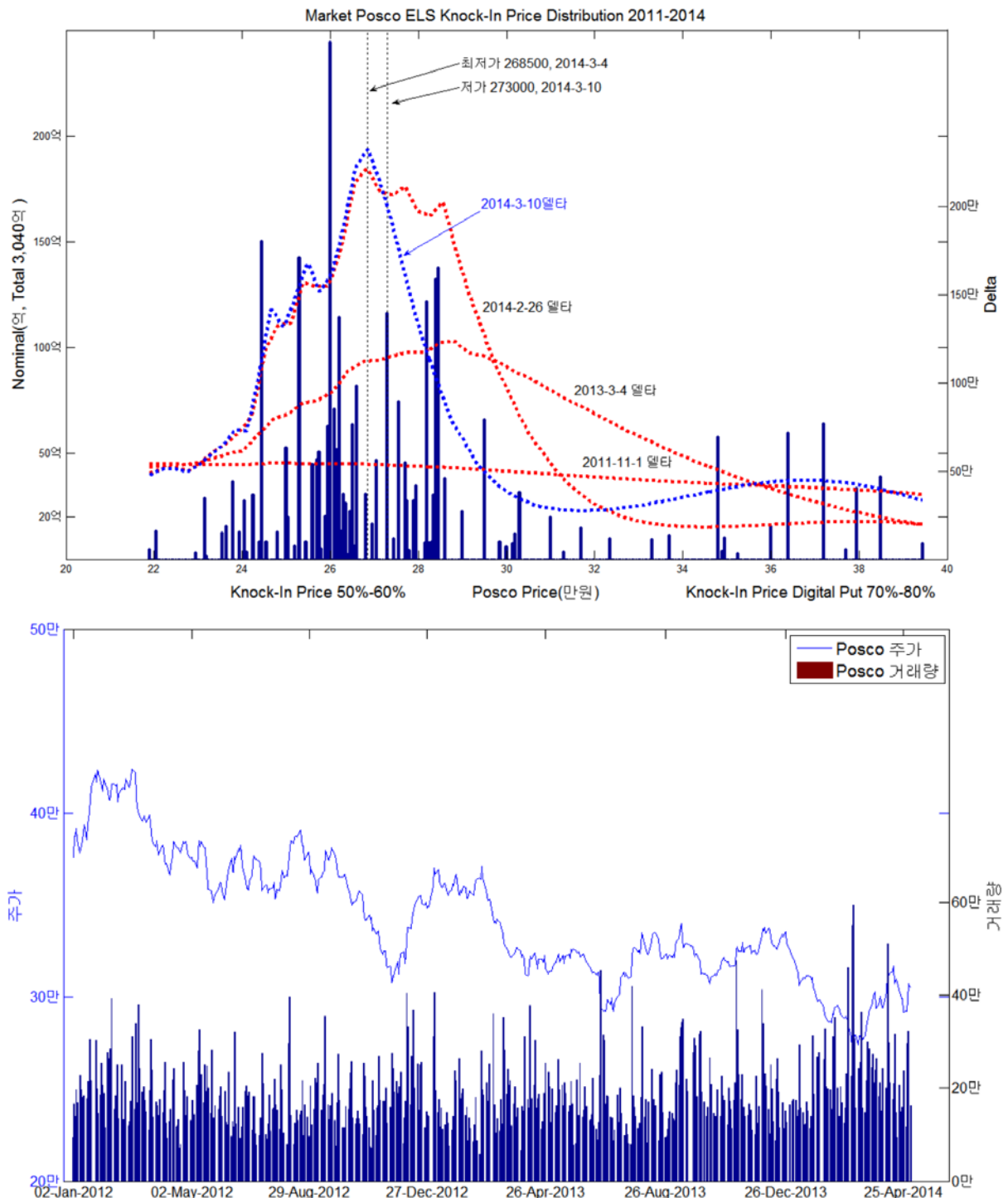
DATE	NPV	THETA	POSCO	SEC	Black-Scholes	Scheme1	Scheme2
2014-02-26	1,039,914,671	2,093,188	288,500	1,335,000	21,701	10,990	9,580
2014-02-27	1,010,208,344	2,056,575	287,000	1,341,000	22,932	11,012	9,336
2014-02-28	938,285,532	1,811,826	284,000	1,349,000	25,781	11,415	8,654
2014-03-03	788,224,991	1,137,248	278,500	1,325,000	31,205	10,576	6,229
2014-03-04	598,970,020	- 5,437	272,500	1,315,000	2,211	2,215	2,211
2014-03-05	607,828,011	- 10,002	276,500	1,330,000	2,222	2227	2,222
2014-03-06	614,465,466	- 12,891	279,500	1,326,000	2,226	2230	2,226
2014-03-07	614,450,993	- 12,114	279,500	1,339,000	2,224	2228	2,224
2014-03-10	602,251,064	- 4,594	274,000	1,320,000	2,207	2,209	2,207

### 3.2 실증분석 : 포스코 연계 ELS발행이 현물시장에 미치는 영향

주식연계 ELS발행이 현물주식시장에 미치는 영향을 살펴보기 위해서 포스코 주가 연계 ELS 발행을 보면 2011년 3월부터 시작하여 2011년 11월 말까지 누적으로 액면금액이 약 3,040억 원 인 ELS가 발행이 되었다. 먼저 <그림 11> 상(上)의 막대그래프는 녹-인 가격대의 발행물량의 크기를 왼쪽 축에 나타낸다. 많은 발행물량이 24만원에서 29만원사이에 집중되어 있음을 알 수 있

다. 시간경과에 따른 시장 BS 델타수량의 추이는 2011-11-1일, 2013-3-4일, 2014-2-26일(2014-3-10일)자의 가격대별 델타를 굵은 빨간(파란) 점선으로 수량을 오른 축에 나타내었다. <그림 11> 하(下) 그림은 포스코의 주가와 거래량을 날짜 별로 표시한 그림으로 2011년부터 2014년 동안의 최저가인 268,500원에서 거래량이 가장 큼을 알 수 있다.

<그림 11> 포스코 연계 ELS 발행 녹-인정보, 가격대별 델타 수량, 및 일별 거래량과 주가



<표 3>은 ELS 발행에 의하여 시장에 노출되는 당시 주가대비 델타수량과 한 호가인 500원당 요구 델타, 그리고 10000원당 요구 델타이다. 요구델타가 크고 주가의 움직임이 클 경우 시장의 거래 촉발 요인으로 작용한다고 생각할 수 있다.

**<표 3> 특정일 별 BS모형 기반 시장 총 델타수량 및 한호가(1만원당) 요구델타수량**

일자	주가	시장델타	한 호가 델타	1만원당 델타
2011-11-1	381000	40만	900	1만9천개
2013-3-4	343000	100만개	5500	12만개
2014-2-26	288500	175만개	48000	72만6천개
2014-3-10	274000	191만개	43000	87만6천개

2013년 3월 까지 포스코 주가의 지속적인 하락으로 대부분의 발행물량 조기상환이 지연되면서 상환될 쿠폰의 크기도 커지면서 레버리지도 늘어나서 시장 요구 델타는 100만개 수준으로 증가한다. 2013년 3월 4일의 주가 레벨 34만원에서 요구 델타 수량은 상대적으로 양호해 보이지만 주가 일간 변동폭 4,000<sup>24</sup>원 대비 5만개의 델타수요를 촉발시킨다. 포스코의 일 평균 거래량 20만개 수준에서 2X5만=10만개의 거래가 순수 델타 헤지에 의하여 촉발될 수 있음을 보여준다. 또한 감마매수상태 운용이 적용되는 시점으로 가격이 오르면 매도하고 내리면 매수하게 되어 주가의 변동성을 감소시키는 역할을 하였음을 유추할 수 있다. 2014년 2월말 및 3월초의 상황은 더욱 심화되어 한 호가당 델타는 4만개 이상이며 평균 가격움직임 폭을 8호가인 4,000원으로 가정 시 30만개의 수량이 델타 헤지에 의하여 촉발 될 수 있다.

이상에서 보듯이 한 종목에 집중된 과도한 레버리지는 주가의 움직임에 다음과 같은 영향을 순차적으로 미쳤다고 할 수 있다. 먼저 발행 이후 주가가 하락하는 추세에서 2013년 4월 이후에는 감마매수 운용에 의한 매수 및 매도가 빈번하여 주가 움직임의 변동폭이 적은 기간이 2013년 12월 말까지 지속되다가 주가하락을 유발하는 어닝쇼크(earning shock)가 발표되었다. 이로 인해 주가급락시 가까이 포진되어있는 ELS의 녹-인 점들의 분포에 의하여 델타수량이 급증하게 되는데 녹-인점이 밀집되어있는 공급이 더 우세한 지역이므로 지속적인 주가의 하락을 촉발시키게 된다. 그 후 앞선 가격대의 녹-인 이후 이 부분의 델타 수요가 크게 감소 되면서 그 동안 잠재적 매도를 유발시켰던 델타수량 그래프의 높고 편평한 영역이 아래로 빠지게 된다(2014-3-10일 델타 참조). 이 후 감마매도구간과 감마매수구간이 팽팽히 맞서는 즉 수요와 공급이 절충을 이루는 뾰족한 변곡점을 찾을 수 있다. 상기의 예는 변곡점인 268,500원에서 가격의 하락이 멈춘 재미있는 예를 보여준다.

위험중립 BS모형에 의한 델타 헤지는 만기에 가까울 경우 녹-인 및 녹-아웃 영역에서 과도한 레버리지의 증가를 보이며 원금과 누적된 쿠폰이 클 경우 손익의 심한 변동으로 이어져 헤지 운용 리스크관리의 문제점을 발생시킨다. 또한 시장에 미치는 부정적 요인으로 녹-인 후의 과도한

<sup>24</sup> 기간 중 일중 움직임이 비교적 강한 일간 가격차이의 평균

매도물량의 증가를 가져온다. 주된 요인은 앞서 언급한 바와 같이 녹-인 영역의 DO옵션의 소멸과 녹-아웃 영역의 디지털(binary) 옵션에 의한 높은 쿠폰의 상환부담이다.

이런 두 문제를 해결하기 위해서 헤지 운용자가 사용하는 직관적인 방법은 1) 녹-인 발생 전 과도한 레버리지를 줄이는 것이고, 2) 녹-아웃의 배리어 도달 전 가능한 빨리 옵션의 가치를 델타 헤지를 통하여 확보하는 것이다. 본 논문에서는 두 부분에 모두 내재되어 있는 이벤트 후의 급락 위험을 파악하고 이를 감안한 효율적인 헤지 모형을 제안하였다. 이를 통하여 기존 모형인 위험 중립 BS모형에 의한 델타 헤지와 비교하여 예상되는 손실을 최소화 시키고 성과가 좋음을 증가를 이용한 가상운용의 예를 들어 보았다.

시장의 상황을 반영한 실제 가격의 움직임 모형을 위하여 사용하는 주관적인  $P$  확률 측도를 현재 헤지 구간에만 적용시켜 평가를 위한 위험중립 가격과 급락헤지를 위한 가격간의 차이를 최소화 시켰으며 주관적인  $P$  확률을 적용하는 방법은 여러 가지가 있겠으나 여기서는 최근의 일별 또는 한 단위 헤지 기간 가격 변동폭을 커버하는 변동성 확장방식으로 접근하였다.



## IV. 정책 제안 및 결론

ELS는 채권보다 수익률이 높고 주식보다 위험이 낮은 중위험·중수익 상품으로 투자자의 요구에 맞춰 다양한 투자수단을 제공하고 있다. 글로벌 금융위기 이후에 저금리 기조가 지속되면서 기초자산을 두 개 이상으로 한 조기상환형 스텝다운 ELS가 자본시장에서 빠르게 성장해오고 있다. 은행예금보다 고수익을 보장해주기 때문에 나타난 현상임에도 불구하고 투자자 및 금융감독당국은 상품에 내재된 위험을 간과하는 경향이 있다. 이에 투자자 보호차원뿐만 아니라 발행자의 원활한 헤지 운용을 위해서 다음과 같은 정책제안 및 상품구조 변경에 대한 의견을 제시하고자 한다.

첫째, 녹-인 집중현상을 예방하기 위해서 같은 기초자산 주식기반 ELS 발행금액을 해당주식 현물의 평상시 유동물량과 ELS상품의 총 최대 델타량을 고려하여 결정하여야 한다. 상품에 내재된 KI이 갖는 특성은 뜨거운 물이 끓는 점 근처에서 갑자기 비등하는 현상과 같이 기초자산가격이 KI가격이상까지 하락하는 경우에는 운용자의 헤지 포지션은 기초자산을 지속적으로 매우 빠르게 매수해야 하는 데, KI가격을 터치한 이후에는 이미 매수한 대부분의 물량을 매도<sup>25</sup>해야 하는 어려움이 있다. 윤선중(2012)이 언급했듯이 만약 같은 기초자산 주식을 기반으로 하는 조기상환형 스텝다운 ELS가 비슷한 시기에 판매량과 연동된 금융상품의 총 델타량 규제없이 대량으로 발행되었을 경우에는 하나의 상품이 KI가격을 터치하면 순간적인 대량매도로 흡수할 유동성이 확보되지 않아서 다른 유사상품도 연달아 녹-인하는 현상이 발생한다.

둘째, 금융감독기관 및 운용사의 위험관리 규정 개정이 필요하다. 녹-인 영역 혹은 녹-아웃 영역과 같이 레버리지가 커지는 핀 리스크(pin risk) 구간에서는 연속 헤지가 가능하다는 전제하에 구한 BS 델타를 이용한 한도규제가 완화되어야 한다. 본 논문에서 살펴보았듯이 급락위험을 고려하면 녹-인 영역에서는 BS 델타보다 상당히 많은 매수수량을 줄여야 하고 녹-아웃<sup>26</sup> 영역에서는 BS 델타보다 어느 정도 초과한 수량을 허용하여야 한다.

셋째, 발행자측면에서 디지털 콜옵션 및 DO옵션 매도와 바닐라 풋옵션 매수로 이뤄진 조기상환형 스텝다운 ELS상품은 KI가격 근처에서 발생하는 운용자의 헤지 운용위험과 투자자의 손실 위험을 줄이기 위해서 바닐라 풋옵션 매수를 디지털 풋옵션 매수로 합성포지션을 변경하는 것을 제안한다. 디지털 풋 내재 스텝다운형은 녹-인 이후 현물가격의 하락에 연동되어 ELS의 수익이 감소하는 현상을 방지하는 구조로 손실을 KI가격 수준에서 고정시킬 수 있다. 녹-인 풋 대신 녹-인 디지털 풋을 투자자가 매도한 형태로 변동성이 큰 주식형에 적합할 수 있다.

---

<sup>25</sup> 이와 같이 개별주식 가격이 내리면 주식을 매수하는 헤지 전략으로 주가하락을 방지하나 유사한 상품의 비슷한 시기 대량 판매로 KI가격 근처에 도달하는 경우에는 시장의 작은 충격에도 하나의 상품이 KI가격을 터치하면 유사한 다른 상품에도 영향을 미쳐 도미노현상이 생긴다.

<sup>26</sup> 만기일 근처의 녹-아웃 영역에 근접한 영역에서는 녹-인 영역과 같이 상당히 많은 헤지 수량이 요구될 수 있다. 단, 녹-인 영역과는 달리 과도한 보유로 인한 손실위험은 클 수 있다.

넷째, 쿠폰지급 방식을 월지급식으로 변경한다. 월 쿠폰지급 스텝다운형은 투자자에게 조기상환일에 또는 만기에 한번 지급되거나 없어지는 쿠폰을 현물가격(평가 수익률)이 매월 특정일 정해진 배리어를 넘을 경우 월 쿠폰의 형태로 지급되는 구조이다. 발행자에게는 수익 상환시 한번에 발생하는 과다한 쿠폰지급 부담을 줄이는 효과가 있고 이에 따라서 시장에 미치는 헤지 물량이 상대적으로 줄어든다. 아울러 나중에 손실 상환될 경우라도 현재 월 쿠폰 배리어보다 높은 평가수익률이면 월 쿠폰이 지급되기 때문에 동일한 쿠폰일 경우에는 월 쿠폰지급 방식이 그렇지 않은 경우보다 ELS가격이 높다.

다섯째, ELS의 만기를 줄여준다. 투자기간이 긴 경우에는 디지털 콜옵션의 자동조기상환조건이 충족되지 않으면 지급할 이표가 쌓인 상황에서 기초자산가격이 KI가격을 터치하면 1) 투자자는 손실금액이 증가하고, 2) 운용사는 투자자에게 지급할 부채를 기초자산 매수전략으로 복제하므로 급격한 매수수량 변화로 헤지 운용에 어려움이 있다. ELS의 만기가 짧은 경우에는 투자위험과 운용위험이 감소하는 장점이 있는 반면에 투자자에게 지급할 이표가 감소하여 상품성이 떨어지는 단점이 있다

## 참 고 문 헌

- 구본일, 엄영호, 지현준, "주가연계예금 가치평가모형에 대한 실증연구", 「채무연구」, 20, 1, 2007, 155-186.
- 박준영, 현종석, "거래비용을 고려하여 주가연계증권을 헤지할 때 발생하는 비용과 위험의 상쇄효과에 대한 시뮬레이션 연구", 「선물연구」, 17, 2, 2009, 1-47.
- 윤선중, "투자자 보호를 위한 구조화상품의 규제방안에 대한 연구", 「채무연구」, 25, 4, 2012, 521-557.
- Bertsimas, D., and Laupreteb, G. J., Samarov, A., "Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications", Journal of Economic Dynamics & Control 28, 1353-1381, (2004)
- Carr, P, "FAQs in option pricing theory," working paper 1999
- Cerny, A., and Kallsen, J., "Hedging by Sequential Regressions Revisited", Mathematical Finance, Vol. 19, No. 4, 591-617, (2009)
- Cvitanic, J., and Karatzas, I., "On dynamic measures of Risk", working paper (1998)
- Follmer, H., and Leukert, P., "Efficient hedging: Cost versus shortfall risk", Finance Stochastics. 4, 117-146 (2000)
- Follmer, H., and Schweizer, M., "Hedging by Sequential Regression" Astin Bulletin Vol 19, S, (1989)
- Henrard, M., "Parameter risk in the Black and Scholes model." working paper (2001)
- Rockafellar, R. T., and Uryasev, S., "Conditional value-at-risk for general loss distributions", Journal of Banking & Finance, 26, 2002, 1443-1471.
- Schulmerich, M., and Trautmann, S., "Local Expected Shortfall-Hedging in Discrete Time" European Finance Review 7: 75-102, (2003)