

마코프전환 멀티프랙탈(Markov Switching Multifractal) 모형을 이용한 KOSPI200 수익률의 장기변동성 예측성과 비교*

이 상 현 (한양대학교)

김 명 직 (한양대학교)**

< 요약 >

금융시계열 변동성에 관하여 잘 알려진 특징은 변동성군집현상, 장기기억성, 국면전환, 그리고 특이치의 존재 등이다. 작은 수의 파라미터를 사용함에도 불구하고 이러한 특징들을 동시에 잘 설명하는 것으로 알려진 마코프전환 멀티프랙탈(Markov Switching Multifractal: MSM) 변동성 모형을 이용하여 우리나라 KOSPI200 지수의 변동성을 추정하고 다기간 예측성결과를 비교 분석하였다. 표본기간은 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지이며 비교 모형으로는 벤치마크 모형으로 많이 사용되고 있는 GARCH 모형과 국면전환 GARCH 모형을 사용하였다. 실증분석 결과 내표본 모형 적합도와 사후표본 예측성과 측면에서 모두 MSM 모형이 비교대상 모형에 비해 전반적인 우위를 보였으며 익일변동성 예측뿐만 아니라 주간 및 월간으로 예측 기간을 증가시킬수록 이러한 경향이 더욱 강한 것으로 나타났다.

MSM 모형의 부산물로 KOSPI200 지수 수익률의 변동성을 각각의 변동성 요소의 듀레이션의 크기에 따라 단기 및 중·장기 변동성 부분으로 분해할 수 있는데 2008년 글로벌 금융위기와 2011년 유럽 재정위기 기간의 경우 변동성의 속성이 크게 다르다는 것을 확인하였다. 글로벌 금융위기의 경우 단기 및 중기빈도의 변동성뿐만 아니라 저빈도의 장기변동성 또한 높아져 한국주식 시장을 높은 변동성 국면으로 전환시켰던 것으로 나타났지만 유럽 재정위기 기간에서는 단기와 중기빈도 변동성은 높아진 반면 저빈도의 변동성 국면전환은 발생하지 않아 한국 주식시장에 대한 영향은 비록 컸으나 상대적으로 일시적이었던 것으로 나타났다.

핵심 단어 : 변동성 예측, 마코프전환 멀티프랙탈 모형, 국면전환 GARCH 모형, Mincer-Zarnowitz 회귀분석, Diebold-Mariano 검정

JEL 분류기호: C13, C53, G1

* 저자들은 두 분의 익명의 증권학회지 심사위원, KB천안연수원에서 개최된 2015년 재무관련공동 학술대회에서 귀중한 토론을 해 주신 오갑진 교수와 세미나 참석자들에게 감사 드린다. 그리고 남아 있는 오류는 모두 저자들의 책임이다.

** 연락담당 저자. 주소: 서울특별시 성동구 왕십리로 222 한양대학교 경제금융대학, 04763;
E-mail: mjkim@hanyang.ac.kr; Tel: 02-2220-1034; Fax: 02-2293-1787.

투고일 2015-08-12; 수정일 2016-01-05; 게재확정일 2016-02-22

1. 서론

미래의 변동성을 예측하는 것은 재무금융 의사결정에 있어서 매우 중요한 역할을 수행한다. 예측변동성은 옵션이론가격 산출이나 자산배분, 위험관리 등에서 핵심 파라미터로 사용될 뿐만 아니라 향후의 경기국면이나 금융위기에 대한 선행지표로 간주되기도 한다. 글로벌 금융위기를 겪으면서 미국의 VIX(한국의 경우 VKOSPI)가 공포지수로 불리며 금융시장 관계자들의 주요 모니터링 지표로 자리매김한 것이 대표적인 사례이다.

변동성 예측에 있어서도 예측 시계가 중장기인가 또는 단기인가에 따라 다양한 계량적 방법론이 제시되었다. 이를 크게 보면 Engle(1982)의 선구적 연구 이후 제시된 다양한 GARCH-류 변동성 모형, Shephard(1994)의 연구와 같은 확률변동성 모형(stochastic volatility model), 장기기억성(long memory)을 기술하는 Baillie et al.(1996)의 FIGARCH 모형, 그리고 Turner et al.(1989) 등이 제안한 마코프전환 변동성 모형(Markov switching volatility model) 등으로 나누어 볼 수 있다. 이들 방법론들을 확장한 하이브리드 변동성 모형도 많이 제시되고 있는데 Hamilton and Susmel(1994)의 마코프전환 ARCH 모형은 마코프전환 모형과 ARCH 모형을 결합한 것이고 Klaassen(2002)의 마코프전환 GARCH 모형은 마코프국면전환 모형과 GARCH 모형을 결합한 것이다. 또한 이들 모형은 특이치(outlier)를 기술하기 위해 다양한 분포적 가정을 도입하고 있다.

마코프전환 특성을 갖는 모형은 그 유용성에도 불구하고 실행 가능하기 위해서는 불가피하게 상태의 수를 제한해야 하며 상태의 수가 증가함에 따라 전이행렬(transition matrix)의 추정 모수의 개수 또한 급격히 증가할 뿐만 아니라 전이확률에 일정한 제약을 주어야 하는 상황에 처할 수도 있는 불편이 있다. 이에 대한 대안으로 Calvet and Fisher(2004)는 서로 다른 지속기간(duration) 또는 주기(frequency)를 갖는 변동성 요소들의 곱으로 변동성과정을 모형화하는 마코프전환 멀티프랙탈 모형(Markov switching multifractal(MSM) model)을 제안하였다. 본 연구에서는 MSM 모형이 우리나라 KOSPI200 수익률의 변동성을 잘 기술하는지에 대하여 실증 분석하고자 한다. 비교모형으로는 가장 단순한 형태의 GARCH 모형과 보다 복잡한 형태의 지속성을 모형화할 수 있는 국면전환 GARCH 모형을 선택하여 예측성과를 모형 적합도와 사후 예측성과 척도하에서 비교하고자 한다.

MSM 모형은 크게 보면 널리 알려진 Hamilton(1989)의 마코프국면전환 모형의 일종이며 베이지규칙을 사용하여 우도함수를 설정하고 이를 최우추정하는 과정이 서로 매우 유사하다. 이 모형이 기존의 표준 국면전환 모형과 다른 가장 큰 특징은 상태-공간의 범위를 획기적으로 확장시켰다는데 있다. 기존의 국면전환 모형의 경우 상태의 개수가 2인 경우가 주를 이루고 간혹 3-상태로 확장되기도 하지만 그 이상의 차원 확장은 매우 어려운 문제로 알려져 있다. 이에 반해 MSM 모형은 $2^{\bar{k}}$ 개의 국면을 단지 4개의 모수만 가지고 생성한다. 예를 들어 $\bar{k}=10$ 일 경우 $2^{10} \approx 1,000$ 의 국면이 만들어진다. 일반적인 국면전환 모형의 관점에서 보면 불가능한 결과이지만 MSM 모형은 국면간 주기 또는 지속기간을 단기에서 중·장기로

변화시켜가며 상태-공간을 확장하는 방법을 채택하고 있다. MSM 모형의 기본 아이디어는 서로 다른 지속성을 가지는 충격이 금융시장에 영향을 주기 때문에 분석 모형도 이와 같은 이질적인 지속성(heterogeneous duration)을 함께 고려하여 모형화해야 한다는 것이다. 예를 들어 지속성이 가장 긴 장기의 신용싸이클 충격은 저빈도의 장기 변동성에 영향을 더 주는 반면 시시각각 발생하는 뉴스나 매매 거래 행위로부터 발생하는 더 짧은 주기의 충격은 짧은 주기의 변동성에 영향을 준다고 볼 수 있으며 경기변동 충격의 경우도 그 주기에 맞는 변동성에 영향을 준다고 볼 수 있다는데 착안하고 있다.

무엇보다도 MSM 모형의 장점은 변동성에 대해 잘 알려진 실증적인 특성을 비교적 잘 설명한다는 것이다. 특히 장기기억성, 지속성, 국면전환, 간헐적인 이상치의 발생 등을 MSM 모형 틀 안에서는 단기 및 중·장기 변동성의 조합으로 설명할 수 있다. 반면 기존의 변동성 모형은 이와 같은 특징들을 주로 개별적으로 설명한다는 점에서 한계가 있다. 이러한 한계가 발생하는 근본적인 이유는 위에 열거한 특성들을 하나의 변동성 모형에 모두 반영하는 것이 매우 복잡하고 어려우며 무엇보다도 차원의 저주에 의해 추정할 모수의 개수가 급격히 늘어나 추정 작업이 불안정해지거나 불가능하기 때문이다. 우리나라 KOSPI200 수익률의 변동성도 위에서 언급한 특징을 모두 나타내고 있음은 잘 알려진 사실이다. 따라서 본 연구에서는 MSM 모형이 KOSPI200 수익률의 변동성을 잘 기술하는지 분석하고자 하며 예측성과 측면에서 기존 변동성 모형에 비해 개선된 결과를 나타내는지, 특히 장기시계의 변동성 예측관점에서 확인하고자 한다. 실증분석에서는 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지의 일별 KOSPI200 수익률 자료를 사용하여 MSM 모형을 비교 모형인 GARCH 모형 및 국면전환 GARCH 모형과 함께 추정하고 4개의 장단기 예측시계(1, 5, 10, 22 거래일)를 대상으로 사후표본 예측성결과를 비교하였다. 주요 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 전체 표본을 이용한 모형 적합도의 경우 MSM 모형이 비교 모형(GARCH, 국면전환 GARCH)보다 높은 적합도를 보였다. 대수우도함수값, AIC와 SBC 정보기준값을 산출하여 비교한 결과 MSM 모형이 비교 모형들에 비해 모형 설명력이 가장 높은 것으로 나타났다.

둘째, 사후 예측성과 측면에서도 MSM 모형이 비교 모형에 비해 우월한 것으로 나타났다. 특히 이러한 경향은 장기로 갈수록 두드러졌다. 또한 예측 회귀식 분석 결과 MSM 모형의 변동성 예측치는 모든 예측기간에 대하여 불편추정량인 것으로 나타났다. 이에 반해 GARCH나 국면전환 모형은 일부 예측기간에 대하여서만 그러하였다. 손실함수 비교와 Diebold-Marino(1995) 검정 결과에서도 단기를 제외하고 중장기로 갈수록 MSM 모형의 예측성결과가 가장 높은 것으로 나타났다.

셋째, 표본기간 중 KOSPI200 변동성은 단기와 중·장기 세 개의 변동성 요소로 대부분 설명할 수 있었으며 조건부 사후 평활화 확률을 이용하여 KOSPI200 변동성의 단기 및 중장기 변동성을 산출한 결과 2008년 글로벌 금융위기와 2011년 유럽 재정위기의 속성이 서로 다르다는 것을 확인할 수 있었다. 전자의 경우 단기 및 중장기 변동성이 모두 높은

국면에 있었지만 후자의 경우 단기와 중기 변동성은 높았지만 장기 변동성은 낮은 수준에 머물러 유럽재정위기가 국내 주식시장에 미친 영향은 상대적으로 일시적이었음을 시사하고 있다. 그리고 최근에 시장에서 관측되고 있는 저변동성 현상과 궤를 같이하여 2012년 이후부터는 모든 주기의 변동성이 낮은 수준에 있는 것으로 추정되었다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장은 선행 연구를 간단히 요약하고 제 3장은 MSM 변동성 모형을 설명하고 추정방법을 논의한다. 제 4장은 비교 모형인 GARCH 모형과 국면 전환 GARCH 모형을 간략히 정리한다. 제 5장과 제 6장은 실증분석을 다루고 있는데 제 5장은 전체 표본을 이용한 모형 적합도를, 제 6장은 사후 예측성결과를 비교한다. 제 7장은 연구 결과를 요약하고 결론 및 시사점을 제시한다.

2. 선행 연구

Engle(1982)의 ARCH 모형과 Bollerslev(1986)의 GARCH 모형이 제시된 이후 두터운 꼬리(fat-tail) 분포 또는 변동성군집현상 등의 특징을 갖는 금융시계열을 조건부 분산 관점에서 모형화하는 많은 시도가 있었다. 다양한 GARCH 계열의 모형들은 초기 GARCH 모형이 포착하지 못하는 부분을 개선해나가는 방식으로 확장되었는데 이 때의 초점은 변동성의 비대칭성, 변동성 국면의 존재, 점프의 존재, 그리고 장기기억성 등에 맞추어 졌다. 이 중 MSM 모형과 관련성이 높은 국면의 존재 및 장기기억성과 관련된 내용을 위주로 해외와 국내의 연구를 살펴보도록 한다.

변동성의 장기기억 속성은 Ding et al.(1993)에 의해 변동성 모형이 설명해야 할 특징으로 제시되었고 이후 Granger and Joyeux(1980)의 ARFIMA 모형의 철학을 계승한 Baillie et al.(1996)의 FIGARCH 모형으로 구체화 되었다. 단기기억 모형인 GARCH 모형을 개선한 FIGARCH 모형의 경우 장기기억성에 초점을 맞춘 모형이지만 역으로 단기적인 변동을 나타내는데 한계가 있다는 단점이 있다.

반면 국면전환 변동성 모형의 경우 국면의 존재를 도입함으로써 모형 적합도와 사후 예측 성과가 높아지는 성과를 거두었다. 초기 Turner et al.(1989) 모형에서 진화하여 Gray(1996)는 경로종속성 문제를 해결한 국면전환 GARCH 모형을 제안하였고 Klaassen(2002)은 Gray (1996) 모형의 단점을 개선하여 다기간 예측이 용이하도록 확장하였다. Marcucci(2005)는 적합도와 다기간 예측성과 그리고 Value-at-Risk 측면에서 국면전환 GARCH 모형을 다양한 GARCH 계열 모형과 비교 분석하여 국면전환 GARCH 모형이 비교 모형에 비해 개선된 결과를 가져옴을 보여주었다. 그러나 Ryden et al.(1998)은 국면전환 GARCH 모형도 국면의 존재를 상정함으로써 변동성의 구조적인 변화를 설명할 수는 있지만 지수적으로(exponential decay) 빠르게 감소하는 자기상관을 가진다고 지적하였다. 즉 상관관계가 느리게 감소하는(hyperbolic decay) 장기기억 속성을 설명하지 못한다는 단점이 있다고 주장하였다.

이와 같은 개별 모형이 가지는 문제점을 해결하기 위한 방법으로 Calvet and Fisher (2004)는 MSM 변동성 모형을 제안하였다. 이 모형에서는 단기 및 중·장기 구성요소들을 이용하여 변동성을 모형화하며 변동성 구성요소를 식별하는 기준은 지속기간 또는 주기이다. MSM 모형에서 다루는 변동성은 멀티프랙탈 특성을 가지는데, 이 용어는 Mandelbrot (1977, 1982)의 프랙탈(fractal) 이론에서 확장된 개념이다. 프랙탈이란 자기유사성(self-similarity)과 순환성(recursiveness)으로 인하여 프랙탈차원이라고 부르는 정수가 아닌 차원을 가지는 구조를 의미한다. 이러한 특징으로부터 어떤 패턴의 일부분을 전체 패턴의 축소판으로 나타낼 수 있다. 그러나 하나의 프랙탈 즉 단일프랙탈¹⁾ 차원만으로는 나타내기 어려운 구조가 존재하며 이 경우 단일 프랙탈이 아닌 프랙탈차원의 스펙트럼으로 나타낼 수 있다. 이를 멀티프랙탈이라고 한다. Calvet and Fisher(2004)는 다른 주기를 가지지만 동일한 분포를 가지는 변동성 구성요소들의 조합으로 변동성 과정을 모형화하였고 국면전환과 더불어 두터운 꼬리분포, 장기기억성과 같은 멀티프랙탈적 특징을 동시에 잘 설명할 수 있음을 보여주었다.²⁾ 특히 MSM 모형은 이론적으로 간결하면서도 실증적으로 우월한 모형적합도와 예측성과를 보여주는 것으로 알려져 있다. 이를 뒷받침하는 주요 해외 연구들은 주가변동성(Lux and Kaizoji, 2007; Lux, 2008; Chuang et al., 2013; Lux and Morales-Arias, 2013; Nasr et al., 2014), 환율변동성(Calvet and Fisher, 2004), 유가변동성(Lux et al., 2015; Wang et al., 2016), 탄소배출권가격 변동성(Segnon et al., 2015) 등의 다양한 자산가격을 대상으로 분석한 결과 MSM 모형이 사후 예측성과 측면에서 기존 변동성 모형에 비해 전반적으로 우월하다는 실증분석 결과를 보고하고 있다. 이러한 배경 하에서 MSM 방법론은 비단 변동성 모형뿐만 아니라 인접 분야로 그 응용이 점점 확대되고 있다. 변동성의 동조화 현상(Calvet and Fisher, 2006), 포트폴리오 성과평가(Liu and Lux, 2007), 자산가격결정 모형(Calvet and Fisher, 2007), 옵션가치평가(Calvet et al., 2015), 이자율 기간구조 추정(Calvet et al., 2013), 동행 및 위기지표(Idier, 2011), 조건부 상관관계(Idier, 2009), 고빈도 거래 듀레이션 모형(Chen et al., 2013; Filip et al., 2014) 등이 대표적인 예에 해당한다.

국내에서도 다양한 모형을 이용하여 우리나라 금융시장의 변동성의 특징을 분석하고 예측 성과를 비교하는 다수의 연구가 있었다. 우선 다양한 모형간 비교를 시도한 연구로써 류두진 (2012), 정희수, 최병욱(2012)은 다양한 GARCH 계열 모형의 예측 성과를 비교하였고 그 결과 주로 GARCH 계열 모형으로 추정한 변동성의 예측력이 높은 것으로 보고하였다. 최영수,

1) 단일 프랙탈차원의 대표적인 예로써 Cantor 집합(0.631 차원), Sierpinski 사각형(1.893 차원)등이 있다.

2) MSM 모형에 대한 관심은 Fama(1970)의 효율적 시장가설(efficient market hypothesis: EMH)에 대비되는 프랙탈 시장 가설(fractal market hypothesis: FMH) 측면에서도 이해할 수 있다. 시장에서 빈번히 관찰되는 변동성의 속성(장기기억성, 두터운 꼬리분포, 점프현상 등)은 EMH의 가정에 위배되는 현상들이며 FMH는 EMH와 같은 기존의 재무이론이 설명하기 어려운 금융시계열의 특징을 설명하려는 시도 중 하나로 볼 수 있다(Peters, 1994; 엄철준 외 3인, 2007).

이현정(2010)은 다양한 변동성 측정방법에 따른 예측력 비교를 통해 변동성 지수(VKOSPI)의 예측력이 우수하다고 하였다.

변동성 국면전환을 명시적으로 고려한 연구로 장국현, 이진(1997)은 국면전환 ARCH (SWARCH) 모형이 우리나라 주식수익 시장의 변동성의 이분산성과 국면전환을 잘 설명한다고 하였다. 황성원, 류혁선(2011)은 국면전환 GARCH 모형을 이용하여 KOSPI200 변동성을 분석하였고 국면의 존재를 고려하는 것이 KOSPI200 변동성을 설명하는데 적합하고 예측성파도 우수하다고 하였다. 김지혜, 장국현(2015)은 점프 위험에 초점을 맞춘 점프-확산(Jump-Diffusion) GARCH 모형을 이용하여 KOSPI200 변동성을 분석한 결과 점프 위험을 고려하여 한국 주식시장의 변동성을 추정하는 것이 필요하다고 하였다.

장기기억성과 관련한 연구로 이일균(2001)은 KOSPI 수익률이 장기기억과정을 따른다고 하였다. 장경천, 김현석(2002)은 허스트(Hurst) 지수를 이용한 카오스 검정 결과 KOSPI 수익률에 비선형 장기 의존성이 존재하는 편익된 확률보행과정을 따른다고 하였다. 오갑진 외 2인(2004)은 DFA(detrended fluctuation analysis) 방법을 적용하여 KOSPI를 분석하였다. 그 결과 1995년부터 2002년까지 전 구간에서 장기기억성이 발견되었으나 IMF 위기 이전과 이후로 표본 자료의 기간을 구분하여 살펴본 결과 기간에 따라 서로 다르게 나타났다. 이후 엄철준 외 3인(2007)은 자료의 종류를 크게 확장하여 주요 국제 주식 시장 지수와 KOSPI 구성종목의 장기기억속성을 분석하였다. 그 결과 수익률 차원에서는 의미 있는 장기기억속성을 관찰할 수 없지만, 변동성 차원에서는 의미 있는 장기기억속성이 존재하고, 이러한 장기기억속성은 변동성군집 효과에 상당부분 기인한다고 하였다. 이와 달리 Kang and Yoon(2007)은 KOSPI와 KOSDAQ 수익률과 변동성 시계열에 장기기억성이 있으며 ARFIMA-FIGARCH 모형으로 잘 설명된다고 하였다. 또한 Kang and Yoon(2008)은 고빈도 일중 KOSPI200 수익률에 장기기억성이 존재하며 이러한 특징은 구조변화에 따른 결과가 아니라 자료 생성과정에서 나타난 고유의 특성이라고 하였다. 그리고 박재곤, 이필상(2009)은 FIGARCH 류의 모형이 단기 기억 변동성 모형(GARCH)에 비해 더 우월한 예측성파를 보여주었고 이러한 결과는 예측기간이 길어질수록 더욱 강화된다고 하였다.

변동성의 주기와 관련하여 최근 김상환(2015)은 이질적 자기회귀 모형(heterogeneous autoregressive model)과 Component GARCH 모형을 사용하여 KOSPI200 변동성을 추정하고 예측 성파를 비교하였다. 이와 더불어 모형의 추정 주기와 실현변동성 대용치의 선택과 관련한 실무적으로 매우 중요한 주제를 다루었다. 연구 결과 모형을 매일 재추정해야 할 필요는 없으며 실현변동성의 대용치를 일중수익률이 아니라 일별 수익률의 제곱으로 사용하여도 결과에 큰 차이는 없었다고 하였다.

국내 연구 결과를 종합해 볼 때 KOSPI200 수익률의 변동성에는 국면의 전환, 장기기억성, 극단치 등이 존재하는 특징이 있다는 것을 확인할 수 있다. 따라서 해외시장에서 간결한 모형 설정임에도 불구하고 이러한 특징을 동시에 비교적 잘 설명한다고 알려진 MSM 모형을 이용하여 우리나라 KOSPI200 수익률의 변동성과정을 추정하고 이의 적합도와 예측성파를

비교 분석하는 것뿐만 아니라 단기 및 중·장기 변동성의 특징을 이해하는 것은 의미 있는 작업으로 판단된다.

3. 방법론

Calvet and Fisher(2004)가 제안한 MSM 모형에서는 $2^{\bar{k}}$ 개의 국면을 단지 4개의 모수만 가지고 생성한다. 서론에서 언급한 것처럼 예를 들어 $\bar{k}=10$ 일 경우 $2^{10} \approx 1,000$ 의 국면이 만들어진다. 일반적인 국면전환 모형의 관점에서 보면 불가능한 결과이지만 MSM 모형은 국면간 주기 또는 지속기간을 단기에서 중장기로 변화시켜가며 상태공간을 확장하는 방법을 채택하고 있다. 이 때 서로 다른 지속기간을 가지는 국면은 총 \bar{k} 개의 변동성구성요소들의 조합으로 결정된다. 여기에서 k -번째 변동성 구성요소는 k -번째로 주기가 긴 것으로 가정한다($k=1, \dots, \bar{k}$). 즉 첫 번째 요소는 가장 긴 주기를 가지며 \bar{k} 번째 요소는 가장 짧은 주기를 가진다. 이와 같은 특징을 가지는 MSM 모형은 단기 및 중장기 변동성 구성요인 조합이 어떻게 움직이는가에 따라 매우 다양한 경우의 확률과정을 묘사할 수 있다. 즉 MSM 모형은 마코프 국면전환의 특성을 이용하여 단기부터 장기까지의 다양한 지속시간을 가지는 변동성 구성요소를 포함한다. 따라서 낮은 주기를 가지는 국면전환(long-run cycle), 중간 정도의 주기를 가지는 국면 전환(media-run cycle) 그리고 짧은 주기로 빈번히 발생하는 변동(short-term fluctuations) 그리고 간헐적으로 발생하는 이상치를 모두 고려한다는 특징이 있다.

기존 연구에서 살펴본 바와 같이 KOSPI200 변동성은 장기기억성을 나타낸다. 장기기억성은 보통 시차가 늘어날 때 자기공분산함수가 지속성을 가지며 쌍곡선 형태로(hyperbolic) 매우 느리게 감소하는 것으로 정의된다(Dacorogna et al., 1993; Ding et al., 1993; Baillie et al., 1996 참조). 이러한 특징을 모형화하려는 시도 중에 분수공적분(fractionally integrated) 조건부 변동성 모형(FIGARCH)이 있다. 이러한 류의 모형은 장기기억성을 명시적으로 고려하지만 MSM 모형에서와 같이 짧은 주기를 가지며 빈번하게 발생하는 변동이나 국면 전환과 같은 특성을 별도로 모형화하지는 않는다. 반면 Calvet and Fisher(2004)는 변동성과정이 이산적 MSM 과정을 따르는 경우 자기상관함수가 매우 느리게 감소하는 장기 기억성 현상을 잘 포착할 수 있음을 이론적으로 증명하였다. 아래에서는 MSM 모형의 설정과 추정방법을 간단히 설명하고자 한다.

3.1 Markov Switching Multifractal(MSM) 모형

Calvet and Fisher(2004)의 MSM 모형은 t -시점의 변동성을 서로 다른 국면전이확률 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\bar{k}}$ 를 갖는 \bar{k} 개의 변동성구성요소인 $M_{1t}, M_{2t}, \dots, M_{\bar{k}t}$ 의 곱으로 모형화하며 이때 \bar{k} 개의 변동성 구성요소는 전통적인 마코프 국면전환 모형 관점에서 보면 각각 상태변수에

해당하고 이 상태변수는 각각 2개의 값(국면)을 가진다. 즉, S_t 를 주가, $r_t \equiv (\ln S_t - \ln S_{t-1}) \times 100$ 를 연속복리수익률이라 할 때 수익률 r_t 를 식 (1)과 같이 모형화한다:

$$r_t = \sigma \sqrt{M_{1t} M_{2t} \cdots M_{\bar{k}t}} \xi_t \quad (1)$$

여기에서 σ 는 양의 값을 가지는 상수로 수익률 r_t 의 비조건부 표준편차로 해석할 수 있으며 확률 오차항 $\{\xi_t\}$ 는 *i.i.d.* 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 가정한다. 변동성 구성요소 M_{kt} 는 지속성을 가지며 비음(nonnegative)의 확률변수이고 $E(M_{kt})=1$ 을 만족하며 t -시점에서 $M_{1t}, M_{2t}, \dots, M_{\bar{k}t}$ 는 통계적으로 독립이라고 가정한다. 따라서 식 (1)은 $\sigma_t = \sigma(M_{1t} M_{2t} \cdots M_{\bar{k}t})^{1/2}$ 로 정의되는 확률 변동성 모형, 즉 $r_t = \sigma_t \xi_t$ 에서 시간가변 변동성이 곱셈구조(multiplicative structure)로 표현되는 특성을 가지고 있다. 편의상 식 (2)와 같이 변동성 구성요소를 가로로 쌓아 벡터 M_t 라고 하자.

$$M_t = (M_{1t}, M_{2t}, \dots, M_{\bar{k}t}) \quad (2)$$

임의의 $m = (m_1, m_2, \dots, m_{\bar{k}}) \in R^{\bar{k}}$ 에 대하여 $g(m)$ 이 m 들의 곱 $\prod_{i=1}^{\bar{k}} m_i$ 을 나타낸다고 하면 t -시점의 변동성은 $\sigma_t = \sigma[g(M_t)]^{1/2}$ 으로 간단히 표현할 수 있다. MSM 변동성의 특성은 결국 벡터 M_t 의 확률적인 동학에 의해 결정된다. 수익률 $r_t = \sigma[g(M_t)]^{1/2} \xi_t$ 는 관측되는 값이지만 변동성 구성요소 M_t 는 미관측 상태변수이다. 상태변수의 식별을 위해 M_t 는 1차 마코프과정을 따른다고 가정한다. 차후에 보는 것처럼 이러한 가정을 함으로써 $\{r_t\}$ 의 시물레이션과 베이저언 갱신(Bayesian updating)법을 이용한 파라미터의 최우추정이 용이하게 된다.

각각의 M_{kt} 는 고정된 분포 M 에서 추출되는 확률만 다를 뿐 동일한 확률과정을 따른다. 후에 시물레이션을 통해 확인할 수 있는 것처럼 동일한 확률과정임에도 불구하고 추출 확률이 상이함으로 인해 각각의 M_{kt} 는 서로 다른 주기(또는 시간 스케일)를 갖게 된다. $(t-1)$ -시점까지 변동성 상태벡터의 값이 주어졌다고 할 때 각각의 $k \in \{1, \dots, \bar{k}\}$ 에 대하여 γ_k 의 확률로 고정된 한계분포 M 에서 t -시점의 M_{kt} 가 새로 추출되고 $(1-\gamma_k)$ 의 확률로는 전기 값을 유지한다고 하자. 따라서 M_{kt} 의 동학은 식 (3)과 같이 요약할 수 있다.

$$M_{kt} = \begin{cases} \text{분포 } M \text{에서 추출} & : \text{확률 } \gamma_k \\ M_{k,t-1} & : \text{확률 } 1-\gamma_k \end{cases} \quad (3)$$

이때 전환이벤트들과 분포 M 에서 추출한 값들은 k 와 t 에 대해 독립이라고 가정한다. 전이

확률 $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\bar{k}})$ 는 식 (4)와 같이 설정한다.

$$\gamma_k = 1 - (1 - \gamma_1)^{(b^{k-1})} \quad (4)$$

단 $\gamma^1 \in (0, 1)$ 이고 $b \in (1, \infty)$ 이다. $1 - \gamma_k = (1 - \gamma_1)^{(b^{k-1})}$ 는 전기 값이 현재시점에도 동일하게 유지될 확률로써 이에 로그를 취한 값은 k 가 증가할수록 지수적으로 감소하게 된다. 각 변동성구성요소의 전이확률의 크기는 $\gamma_1 < \dots < \gamma_{\bar{k}} < 1 < b$ 이므로 $(\gamma_{\bar{k}}, b)$ 값을 선택하면 전이확률의 전체 집합을 결정할 수 있다. 이 때 양의 정수 \bar{k} 는 변동성 주기의 개수이며 이 값을 결정하는 것은 모형 선택의 문제로 볼 수 있다. 멀티프랙탈 구조는 한계분포에 $M \geq 0$ 과 $\mathbf{E}(M) = 1$ 와 같은 최소한의 제약만을 부여한다. 이러한 특징은 M 을 모수적 또는 비모수적으로 유연하게 설정할 수 있도록 허용하는데 Calvet and Fisher(2004)는 간단하게 M 을 동일한 확률로 m_0 또는 $2 - m_0$ 의 값을 가지는 이항분포로 설정하였다. 따라서 MSM 모형의 전체 파라미터 집합은 $\psi \equiv (m_0, \sigma, b, \gamma_{\bar{k}}) \in \mathbb{R}_+^4$ 로써 추정할 모수는 단지 4개뿐이다. 이 점이 MSM 모형의 커다란 장점이다. 즉 국면전환 모형임에도 불구하고 추정할 모수의 개수가 매우 적으며 상태공간의 차원이 커지더라도 추정할 모수의 개수는 더 이상 증가하지 않는다. 모수의 의미를 살펴보면 m_0 는 변동성 구성요소 분포의 특징을 나타내고 σ 는 수익률의 비조건부 변동성을 의미하며 b 와 $\gamma_{\bar{k}}$ 는 전이확률의 집합을 정의한다.

3.2 최우추정

식 (1)의 변동성 구성요소 M 이 각각 유한한 b_m 개의 값을 갖는다고 가정하자. 이 때 변동성 상태벡터 $M_t = (M_{1t}, M_{2t}, \dots, M_{\bar{k}t})$ 는 $d = b_m^{\bar{k}}$ 개의 경우의 수 값 $m^1, \dots, m^d \in \mathbb{R}_+^{\bar{k}}$ 을 갖게 된다. 고정된 한계분포 M 이 이항분포를 따를 경우 두 가지 값을 가지므로 변동성 상태벡터는 $d = 2^{\bar{k}}$ 개의 값을 갖게 된다. 마코프체인 M_t 의 동학은 전이확률 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ 로 설정하며 $a_{ij} = \Pr(M_{t+1} = m^j | M_t = m^i)$ 이다. 구체적으로 전이확률은 식 (5)와 같이 표현할 수 있다.

$$a_{ij} = \prod_{k=1}^{\bar{k}} \left[(1 - \gamma_k) 1_{\{m_k^i = m_k^j\}} + \gamma_k \Pr(M = m_k^j) \right], \quad (5)$$

여기에서 m_k^i 는 벡터 m^i 의 k 번째 요소를 나타내고 $1_{\{m_k^i = m_k^j\}}$ 는 $m_k^i = m_k^j$ 일 경우 1의 값을 가지고 그렇지 않을 경우 0의 값을 가지는 지시변수이다.

변동성 상태인 M_t 조건부로 수익률 r_t 는 식 (6)과 같은 가우시언 분포를 따른다.

마코프전환 멀티프랙탈(Markov Switching Multifractal) 모델을 이용한 KOSPI200 수익률의 장기변동성 예측성과 비교

$$f_{r_t}(r|M_t=m^i)=\phi\left(\frac{r}{\sigma g(m^i)^{1/2}}\right) \quad (6)$$

여기에서 $\phi(\cdot)$ 은 표준정규분포의 밀도함수를 나타낸다. M_t 는 계량학자들에게 직접적으로 관측되지 않으나 비관측 상태 m^1, \dots, m^d 에 대해 식 (7)과 같이 t -시점 정보 조건부 사후 확률을 계산할 수 있다.

$$\Pi_{t|t}^j = Pr(M_t = m^j | r_1, \dots, r_t), \quad j=1, \dots, d \quad (7)$$

이렇게 계산된 조건부 확률들을 $\Pi_{t|t} = (\Pi_{t|t}^1, \dots, \Pi_{t|t}^d) \in \mathbb{R}_+^d$ 와 같이 행벡터로 구성하고 $t=(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$ 인 행 벡터라고 하면 $\Pi_{t|t}, t'=1$ 을 만족하게 된다. 이 때 조건부 사후확률 벡터 $\Pi_{t|t}$ 는 예측과 갱신과정을 반복하여 산출한다. 베이지 정리에 의해 $\Pi_{t|t}$ 는 식 (8)과 같이 전기의 사후확률 $\Pi_{t-1|t-1}$ 과 이번 기에 관측하는 r_t 의 정보 $\omega(r_t)$ 를 사용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\Pi_{t|t} = \frac{\omega(r_t) \times (\Pi_{t-1|t-1} A)}{\left[\omega(r_t) \times (\Pi_{t-1|t-1} A) \right]_{t'}} \quad (8)$$

여기에서 연산기호 $x \times y$ 는 모든 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 에 대하여 $x \times y = x_1 y_1, \dots, x_d y_d$ 로 정의하는 Hadamard 곱을 나타내며 $\omega(r_t)$ 는 모든 상태에 대하여 변동성 상태 조건부 수익률의 밀도함수를 계산한 후 식 (9)와 같이 벡터로 나타낸 것이다.³⁾

$$\omega(x_t) = \left[\phi\left(r_t / \sigma g(m^1)^{1/2}\right), \dots, \phi\left(r_t / \sigma g(m^d)^{1/2}\right) \right] \quad (9)$$

실증분석에서 초기확률벡터 $\Pi_{0|0}$ 의 값으로 마코프 과정의 ergodic 분포를 사용한다. 변동성 구성요소들 $(M_{1,1}, \dots, M_{\bar{k},1})$ 은 독립이므로 $\Pi_{0|0}$ 의 원소는 모든 j 에 대하여 식 (10)을 만족한다.

$$\Pi_{0|0}^j = \prod_{k=1}^{\bar{k}} Pr(M = m_k^j) \quad (10)$$

MSM 모형은 닫힌 형태(closed-form)의 우도함수를 가지며 대수우도함수는 예측확률

3) 마코프 국면전환 모형에 대한 구체적인 설명과 추정 과정은 김명직, 장국현(2002)의 제 11장 또는 Hamilton(1989)을 참고하기 바란다.

을 이용하여 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ln L(r_1, \dots, r_T; \psi) = \sum_{t=1}^T \ln \left[\omega(r_t) \times (\Pi_{t-1|t-1} A) \right], \quad (11)$$

4. 비교 모형

MSM 모형과 적합도 및 사후 예측성과를 비교하기 위한 모형은 GARCH(1, 1) 모형과 국면전환 GARCH(1, 1) 모형이다.⁴⁾ GARCH 모형은 가장 표준적인 조건부 변동성 모형으로써 대부분의 변동성 비교모형의 기준 역할을 하고 있다. 국면전환 GARCH 모형의 경우 최근의 많은 연구에서 높은 적합도 및 예측성과를 나타낸 것으로 보고되고 있다(Klaassen, 2002; Marcucci, 2005; 황성원, 류혁선, 2011의 연구 참조). 본 연구의 목적은 변동성 과정의 차이에 따른 모형 적합도와 사후 예측성과를 비교하는 것이므로 평균과정은 세 가지 모형에 대하여 모두 동일하게 식 (12)와 같이 설정하였다.

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t (\equiv \varepsilon_t) \quad (12)$$

여기에서 σ_t 는 $t-1$ 시점에서의 r_t 의 조건부 변동성이며 $\{\varepsilon_t\}$ 는 *i.i.d.* 표준정규분포를 따르는 확률 오차항이다.

4.1 GARCH 모형

GARCH(1, 1) 모형은 식 (13)과 같은 분산과정을 따른다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (13)$$

4) 익명의 심사위원께서 지적한 바와 같이 FIGARCH 모형도 비교모형 중 하나가 될 수 있다. 왜냐 하면 장기기억성은 MSM 모형이 설명할 수 있는 주요 특징 중 하나이기 때문이다. 그러나 FI-GARCH 모형의 성과는 상대적으로 많이 알려져 있고 본 연구에서는 국면전환모형에서 상태의 수가 증가함에 따라 모형의 파라미터 수가 급증하는 차원의 저주 문제를 잘 다루는 MSM 모형의 특성에 좀 더 초점을 맞추어 이 부분에서 상대적으로 잘 알려진 국면전환 GARCH 모형의 경우를 비교하고자 하였다. 또한 FIGARCH 모형과의 예측성과를 비교하고 있는 일부 문헌들에서도, 예를 들어, Calvet and Fisher(2004), Lux and Kaizoji(2007), Lux and Morales-Arias(2013), Lux et al.(2015), Wang et al.(2016) 등의 연구는 FIGARCH 모형의 예측성과가 MSM 모형에 비해 높지 않은 것으로 보고하고 있다. 실제로 본 연구의 표본자료를 대상으로 FIGARCH(1, d , 1) 모형을 추정한 결과 대수우도함수 값은 -4865.94로써 GARCH 모형(-4871.96)보다는 높지만 국면전환 GARCH 모형(-4858.86)이나 MSM 모형(-4856.81)보다는 낮은 수치이다. 비록 내표본 적합도가 사후 예측성과를 항상 보장하는 것은 아니지만 FIGARCH 모형의 예측성과가 MSM 모형에 비해 높지 않다는 해외의 연구결과와 우리나라 자료를 이용하여 추정한 대수우도함수 값에 따른 모형간 순위를 고려했을 때 예측성과 비교의 필요성이 크게 높지 않아 지면 제약 상 FIGARCH 모형과의 예측성과 비교는 별도로 보고하지 않았다.

여기에서 $\alpha_0 > 0$ 이고 $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0$ 이며 $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ 이 되도록 함으로써 조건부 분산과정이 양(+)이 되도록 제약을 준다. $\frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$ 은 비조건부 분산을 나타내고 MSM 모형의 σ^2 에 해당한다. $\alpha_1 + \beta_1$ 는 조건부 분산과정의 지속성을 나타내며 1에 가까울수록 변동성과정은 스무드하게 된다.

4.2 국면전환 GARCH 모형

Klaassen(2002)이 제시한 국면전환 GARCH(1, 1) 모형의 분산과정은 식 (14)와 같다.

$$\sigma_t^{2(i)} = \alpha_0^{(i)} + \alpha_1^{(i)} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^{(i)} E_{t-1} \{ \sigma_{t-1}^{2(i)} | s_t \}, \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

여기에서 상첨자 i 는 국면의 종류를 나타낸다. 상첨자를 제외하면 식 (13)의 GARCH 모형과 파라미터의 의미가 같다. 상첨자 i 가 붙은 파라미터는 i 국면에 적용되는 GARCH 모형으로 이해하면 된다. 다만 전기의 조건부 변동성은 확률적으로 두 개의 국면으로부터 전이된 것이므로 국면종속의 성격을 가지게 된다.

Klaassen(2002)은 기존의 Gray(1996)가 제안한 국면전환 GARCH 모형의 단점을 개선하여 식 (14)에서 전기의 조건부 변동성의 조건부 기대값을 $E_{t-1} \{ \sigma_{t-1}^{2(i)} | s_t \}$ 으로 두고 식 (15)와 같이 나타내었는데, 이로써 추약과정에서의 가용 정보집합이 확장되고 특히 다기간 예측이 용이해지는 장점이 있다.

$$E_{t-1} \{ \sigma_{t-1}^{2(i)} | s_t \} = \tilde{p}_{ii,t-1} \sigma_{t-1}^{2(i)} - \tilde{p}_{ji,t-1} \sigma_{t-1}^{2(j)} \quad (15)$$

식 (15)의 조건부 기대값을 계산하기 위한 확률은 식 (16)을 이용하여 계산할 수 있다. 마코프특성에 의하면 $\Pr(s_{t+1} = i | s_t = j, \zeta_{t-1}) = \Pr(s_{t+1} = i | s_t = j) = p_{ji}$ 가 성립하는 것으로 알려져 있으므로

$$\text{므로 } \Pr(s_t = j | s_{t+1} = i, \zeta_{t-1}) = \frac{\Pr(s_t = j, s_{t+1} = i | \zeta_{t-1})}{\Pr(s_{t+1} = i | \zeta_{t-1})} = \frac{\Pr(s_{t+1} = i | s_t = j, \zeta_{t-1}) \Pr(s_t = j | \zeta_{t-1})}{\Pr(s_{t+1} = i | \zeta_{t-1})} = \frac{p_{ji} \Pr(s_t = j | \zeta_{t-1})}{\Pr(s_{t+1} = i | \zeta_{t-1})} \text{로}$$

다시 표현할 수 있다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\tilde{p}_{ji,t} = \Pr(s_t = j | s_{t+1} = i, \zeta_{t-1}) = \frac{p_{ji} \Pr(s_t = j | \zeta_{t-1})}{\Pr(s_{t+1} = i | \zeta_{t-1})} = \frac{p_{ji} p_{jt}}{p_{i,t+1}}, \quad i, j = 1, 2 \quad (16)$$

여기에서 $p_{ii} = \Pr(s_t = i | \zeta_{t-1})$, $i = 1, 2$ 는 사전 확률(ex-ante probability)을 의미한다. 국면 전환 GARCH 모형 역시 1-차 마코프 과정을 따르는 전이행렬(transition matrix) $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{22} \\ 1 - p_{11} & p_{22} \end{bmatrix}$ 에 의해 확률적인 동학이 결정된다. 이 때 전이행렬의 원소인

전이확률은 $\Pr(s_t = j | s_{t-1} = i) = p_{ij}$ 을 의미한다.⁵⁾

5. 실증분석

5.1 KOSPI200 수익률 자료

실증분석에 사용한 자료는 KOSPI200 지수의 일별 수익률이다. 표본기간은 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지이며 표본 개수는 2,978개이다. <표 1>은 KOSPI200 수익률의 기초통계량을 정리한 것이다.

<표 1> 기초통계량

표본기간은 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지이며 자료의 개수는 총 2978개이다. 일별 평균수익률은 3.75%이나 통계적으로는 비유의적이다(p-값: 0.16). 마지막 세 개의 열에 보고한 JB는 정규성 검정 통계량이고, LM(12)는 ARCH LM 통계량, $Q^2(12)$ 은 회귀식 잔차항의 제곱에 대한 Ljung-Box 통계량으로 이들의 귀무가설은 각각 다음과 같다:

JB: H_0 : 오차항이 정규분포한다(normally distributed errors).

LM(12): H_0 : ARCH 효과가 없다(no ARCH effects).

$Q^2(12)$: H_0 : 자기상관이 없다(no serial correlation).

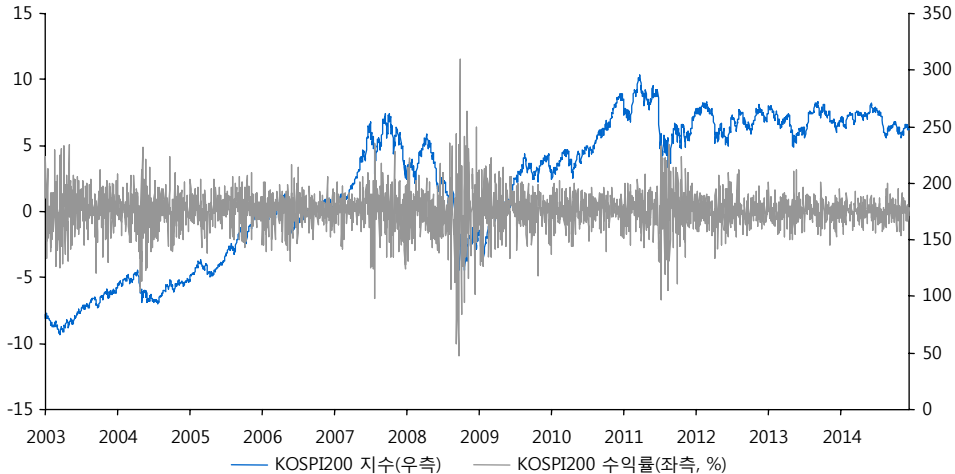
평균	표준편차	최대	최소	왜도	첨도	JB	LM(12)	$Q^2(12)$
0.0375	1.4491	11.5397	-10.9029	-0.3772	8.5460	3887.14 (0.000)	712.86 (0.000)	1909.20 (0.000)

<표 1>의 일별 KOSPI200 지수의 평균 수익률은 3.75%이나 통계적으로는 비유의적이다(p-값: 0.16). 따라서 차후 실현변동성을 계산할 때 평균 조정은 별도로 하지 않았다. 음(-)의 값을 갖는 왜도는 수익률 분포의 낮은 꼬리부분이 높은 꼬리부분보다 더 길다는 것을 의미한다. 첨도는 3보다 큰 값을 가지므로 GARCH-류 모형이나 확률변동성 모형 등 이분산성을 고려한 모형이 수익률 분포를 설명하기에 적합함을 시사한다. 마지막 세 열에 보고한 JB(Jarque-Berra) 통계량의 귀무가설은 오차항이 정규분포한다는 것이고, LM(12)는 수익률을 상수항에 대하여 회귀분석한 후 생성된 잔차항에 ARCH 효과가 존재하는가에 대한 라그랑지 승수(Lagrange multiplier) 검정통계량이다. $Q^2(12)$ 는 표준화된 잔차항 제곱에 자기상관이 없다는 귀무가설에 대한 Ljung-Box 검정통계량이다. 따라서 세 가지 통계량 즉 JB, LM(12), $Q^2(12)$ 이 모두 통계적으로 유의하므로 KOSPI200 수익률의 오차항은 정규분포하지 않으며 회귀식 잔차항에는 ARCH 효과가 존재하고 표준화된 잔차항 제곱에는 자기상관이 존재함을 알 수 있다. <그림 1>은 KOSPI200 지수와 수익률의 추이를 예시하고 있다.

5) 국면전환 GARCH 모형의 추정과 예측과 관련된 기술적으로 보다 구체적인 내용은 Klaassen (2002), Marcucci(2006), 황성원, 류혁선(2011) 등에서 자세히 설명하고 있으므로 참고하기 바란다.

〈그림 1〉 KOSPI200 지수와 수익률

표본기간은 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지이며 관측치의 개수는 총 2,978개이다. 상대적으로 주가지수의 하락폭이 컸던 2003년도 초반은 카드사태, 2008년 후반은 글로벌 금융위기, 그리고 2011년 중반은 유럽 재정위기 기간에 해당한다.



〈그림 1〉을 보면 KOSPI200 지수는 2003년 카드사태, 2008년 글로벌 금융위기, 2011년 중반의 유럽 재정위기 기간에 크게 하락하며 높은 변동성을 나타냈다. 그러나 2012년 이후로는 지수의 수준에 뚜렷한 추세가 보이지 않고 있는 반면 표본 하반기에는 과거에 비해 변동성이 매우 작아지고 횡보하는 국면을 보이고 있다. 〈그림 1〉의 수익률 추이를 통해서 변동성 집중현상(volatility clustering)을 시각적으로 잘 확인할 수 있으며 이를 좀더 자세히 살펴보기 위해 실현변동성을 계산하고 이를 VKOSPI 지수와 〈그림 2〉에 함께 제시하였다.

〈그림 2〉에서 22-거래일 실현변동성은 22거래일 동안의 수익률 제곱을 모두 더한 후 12를 곱한 다음 제곱근을 취하여 연율화한 값이다.⁶⁾ VKOSPI 지수는 옵션가격을 이용하여 계산한 30캘린다일(또는 22거래일)의 시장 컨센서스 변동성지수를 나타낸다. 표본기간 중 실현변동성과 VKOSPI 지수의 평균은 각각 21.3%와 23.39%이고 두 시계열 사이의 상관계수는 76.57%이다. 두 시계열의 예시기간이 미래(22거래일)로 일치시켰다는 점을 고려하면 높은 상관계수는 VKOSPI 변동성지수의 예측력이 상당함을 간접적으로 시사하고 있다. 실증분석에서는 전체 표본기간을 추정기간(in-sample)과 예측기간(out-of-sample)으로

6) 일별자료를 사용하여 이와 유사한 방법으로 실현변동성을 계산하고 예측성과를 비교한 연구는 Klaassen(2002), Calvet and Fisher(2004) 및 정희수, 최병욱(2012)의 연구 등을 참조하기 바란다. 실현변동성을 일별수익률의 제곱값 대신 일중 고빈도자료를 이용하여 산출하는 연구가 늘고 있다 (Andersen and Bollerslev, 1998). 그러나 최근 김상환(2015)의 연구에 의하면 우리나라 KOSPI200의 예측 성과를 비교 분석함에 있어서 어떤 실현변동성 자료를 사용하더라도 둘 사이에 큰 차이가 없는 것으로 보고하고 있다. 따라서 본 연구에서는 고빈도자료를 이용한 실현변동성을 사용한 실험은 별도로 수행하지 않았다.

구분한 후 세 가지 경쟁모형에 대하여 사후 예측성과를 비교하고자 한다. 이때 최초 추정 기간은 2003년 1월 2일부터 2010년 6월 18일까지이고(전체 표본의 약 60%에 해당) 사후 예측기간은 2010년 6월 21일부터 2014년 12월 30일까지이다. 이후 추정기간 관측치수를 동일하게 유지하며 월별 1회 재추정 후 사후 예측을 일별로 진행한다.

〈그림 2〉 KOSPI 200 수익률의 실현변동성

표본기간은 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지이며 자료의 개수는 총 2,978개이다. 22-거래일 실현변동성(진한 실선)은 22거래일의 수익률 제곱을 모두 더한 후 12를 곱한 다음 제곱근을 취하여 연율화한 값이다. VKOSPI 지수는 옵션가격을 이용하여 계산한 30칼렌다일(또는 22거래일)의 변동성 컨센서스지수를 나타낸다. 표본기간 중 실현변동성과 VKOSPI 지수의 평균은 각각 21.3%와 23.39%이며 두 시계열 사이의 상관계수는 76.57%이다.



5.2 최우추정 결과

〈표 2〉는 전체 표본을 사용하여 $MSM(\bar{k})$ 모형을 최우추정한 결과를 보고하고 있다. 〈표 2〉의 첫 번째 열은 순서대로 1부터 8까지의 최대 변동성 구성요소의 수(\bar{k})를 의미한다. $\bar{k} = 1$ 인 경우는 일반적인 2-상태 마코프 국면전환 모형과 비슷한 특성을 가진다. \bar{k} 가 증가할수록 국면의 수는 $2^{\bar{k}}$ 의 속도로 증가하지만 그림에도 불구하고 추정할 모수의 개수에는 변동이 없는 것이 MSM 모형의 간결성과 유연성 특성임은 앞에서 설명한 바와 같다. 이때 $\bar{k} = 1$ 인 경우 변동성 구성요소는 한 개이므로 변동성 구성요소 사이의 거리를 측정하는 모수(spacing parameter)인 b 는 1값으로 고정되어 모수 집합에서 제외된다. 따라서 $MSM(1)$ 모형은 $\bar{k} > 1$ 인 $MSM(\bar{k})$ 모형에 비해 추정할 모수 한 개가 줄어든다.

우선 이항 분포하는 변동성 구성요인의 두 값 중 높은 값을 나타내는 모수 추정치 \hat{m}_0 는 \bar{k} 가 커짐에 따라 작아지는 경향이 있다. 이는 변동성 구성요인의 개수가 증가함에 따라 개별 요인의 변동폭이 커지지 않더라도 충분히 변동성의 움직임을 설명할 수 있기 때문이다. 연율화하여 보고한 비조건부 변동성 추정치 $\hat{\sigma}_{ann}$ 는 \bar{k} 의 크기와 관련하여 특별한 패턴은

없는 것으로 보인다. 이는 \bar{k} 개의 변동성 구성요소가 서로 독립이며 각각의 기대값이 1인 것과 유관해 보인다. 전이확률 $\hat{\gamma}_{\bar{k}}$ 의 역수는 가장 짧은 주기를 가지는 변동성 구성요인의 지속기간의 의미하므로 이 값을 대략 $\hat{\gamma}_{\bar{k}}=0.03$ 라고 둘 경우 가장 짧은 주기를 가지는 변동성 요인은 평균적으로 대략 33일을 주기로 변동하고 있음을 알 수 있다. 변동성 구성요인 사이의 거리를 나타내는 모수(spacing parameter) 추정치 \hat{b} 는 \bar{k} 가 커짐에 따라 작아지는 경향을 보이고 있다. 이러한 경향이 나타나는 이유는 변동성 구성 요인의 개수가 적으면 변동성의 움직임을 설명하기 위해 구성요인들간의 거리가 길어야 하는 반면 구성요인의 개수가 많은 경우에는 구성요인간 거리가 작아지더라도 변동성의 움직임을 설명하는데 큰 문제가 없기 때문이다.

〈표 2〉 MSM 모형 최우추정 결과

표본기간은 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지이며 KOSPI200 지수 일별수익률을 대상으로 \bar{k} 를 1에서 8까지 변화시켜가며 추정한 MSM(\bar{k}) 변동성 모델을 최우추정한 결과이다. 괄호 안의 값은 점근적 표준오차(asymptotic standard error)를 나타낸다. $\hat{\sigma}_{ann}$ 는 식 (1)의 비조건부 표준편차로 연율화한 값이다. \hat{m}_0 는 이항변수인 변동성 구성요소 $M_{k,t}$ 가 가질 수 있는 두 가지 수 중 큰 값을 나타낸다. $\hat{\gamma}_{\bar{k}}$ 는 \bar{k} 번째 변동성 구성요소가 국면전환할 확률을 나타내며 \hat{b} 는 식 (4)에서 보는 것처럼 γ_k 의 값을 결정하는 모수이다. $\ln L$ 는 대수우도함수 값을 나타내며 $\bar{k}=6$ 에서 극대화되고 있다. *, **, ***는 각각 유의수준 10%, 5%, 1% 하에서 통계적으로 유의함을 나타낸다(양측검정의 경우).

\bar{k}	1	2	3	4	5	6	7	8
$\hat{\sigma}_{ann}$	27.725*** (0.926)	26.816*** (0.823)	33.906*** (1.303)	27.767*** (0.953)	28.033*** (1.370)	24.143*** (1.052)	27.483*** (1.928)	23.892*** (1.362)
\hat{m}_0	1.664*** (0.018)	1.542*** (0.017)	1.491*** (0.016)	1.484*** (0.018)	1.366*** (0.019)	1.362*** (0.020)	1.330*** (0.027)	1.324*** (0.031)
$\hat{\gamma}_{\bar{k}}$	0.017*** (0.006)	0.033*** (0.008)	0.027*** (0.007)	0.030*** (0.010)	0.020* (0.012)	0.018 (0.015)	0.018 (0.014)	0.018 (0.016)
\hat{b}	- -	7.21* (4.26)	4.45** (1.87)	3.88*** (1.50)	1.55*** (0.54)	1.39** (0.59)	1.31*** (0.42)	1.29*** (0.41)
$\ln L$	-4964.42	-4877.64	-4859.23	-4858.12	-4857.16	-4856.81	-4857.01	-4857.01

대수우도함수($\ln L$)는 $\bar{k}=1$ 부터 $\bar{k}=6$ 까지 증가시키는 동안 상승하다가 그 이후에는 약간 낮아지지만 거의 변동이 없고 $\bar{k}=6$ 에서 가장 높았다. $\bar{k}=1$ 인 경우를 제외하고 최적 모형을 선택할 경우 모든 차수의 \bar{k} 에 대하여 추정할 모수의 개수가 동일하므로 대수우도함수값, Akaike 정보기준(AIC), Schwartz Bayesian Criterion(SBC) 등의 전형적인 모형 선택기준을 적용하면 MSM(6) 모형을 최적 모형으로 판단할 수 있다. 그러나 추정된 MSM(\bar{k}) 모형 사이에는 포함관계가 성립하지 않으므로(non-nested) 모형 간 우도비가 통계적으로 유의한지를 검정할 필요가 있다. 따라서 절을 바꾸어 Calvet and Fisher(2004)가 제안한 Vuong

(1989) 검정방법을 보완적으로 검토하기로 한다.

5.3 모형선택절차

두 개의 모형 $MSM(\bar{k})$ 와 $MSM(\bar{k}') (\bar{k} \neq \bar{k}')$ 이 있다고 할 때 각각의 밀도함수를 f 와 g 라고 하자. 포함관계가 성립하지 않는 두 모형의 대수우도비 차이(log-likelihood difference)는 식 (17)과 같다.

$$\sqrt{T}(\ln L_T^f - \ln L_T^g) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \ln \frac{f(x_t | x_1, \dots, x_{t-1})}{g(x_t | x_1, \dots, x_{t-1})} \quad (17)$$

여기에서 귀무가설은 두 모형이 동일한 대수우도함수의 무조건부 기대값을 가진다는 것이다. Vuong(1989)은 관측치가 *i.i.d.*일 경우 $\ln L_T^f - \ln L_T^g$ 가 귀무가설 하에서 점근적으로 정규분포하고 이의 분산은 $\ln[f(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}) / g(x_t | x_1, \dots, x_{t-1})]$ 의 표본분산에 의해 일치성있게 추정된다고 하였다. 그러나 Calvet and Fisher(2004)는 대부분의 금융시계열 관측치 $\{x_t\}$ 는 *i.i.d.* 조건을 위배하므로 이분산과 자기상관을 고려한 HAC-adjusted Vuong 검정 방법을 사용할 필요가 있다고 하였고 Rivers and Vuong(2002)이 제시한 방법론을 간략화한 이분산 자기상관조정 Vuong 검정 방법을 사용할 것을 제안하였다.⁷⁾

〈표 3〉 최적 모형 선택

표에서 *t*-ratio와 *p*-value 각 열의 \bar{k} 에 해당하는 $MSM(\bar{k})$ 모형과 기준 모형인 $MSM(6)$ 모형간 대수우도함수값의 차이에 대한 검정통계량의 *t*-통계량과 *p*-값을 나타낸다. 상단의 경우 검정통계량 계산은 Vuong(1989)의 방법론을 사용하였고 하단의 경우 검정통계량 계산은 Calvet and Fisher(2004)에 의해 제시된 Newey and West(1987, 1994)에 따른 이분산과 자기상관을 고려한 Vuong 방법론 적용한 것이다. *p*-값이 낮으면 비교 모형이 기각되고 기준모형 $MSM(6)$ 모형이 채택됨을 의미한다.

\bar{k}	1	2	3	4	5	7	8
Vuong(1989) Test							
<i>t</i> -ratio	-5.890	-2.012	-0.387	-0.276	-0.184	-0.098	-0.118
<i>p</i> -value	(0.000)	(0.022)	(0.349)	(0.391)	(0.427)	(0.461)	(0.453)
HAC-adjusted Vuong Test							
<i>t</i> -ratio	-3.509	-1.433	-0.462	-0.296	-0.244	-0.124	-0.151
<i>p</i> -value	(0.000)	(0.076)	(0.322)	(0.384)	(0.404)	(0.451)	(0.440)

〈표 3〉은 Vuong(1989)과 HAC-adjusted Vuong 검정 방법을 사용한 모형선택 절차를 보여준다. 귀무가설은 $MSM(\bar{k})$ 모형과 기준모형인 $MSM(6)$ 모형의 적합도가 동일하다는 것이다. 기준 모형으로 $MSM(6)$ 을 선택한 이유는 앞에서 본 것처럼 $\bar{k} = 6$ 일 때 대수우도

7) HAC-adjusted Vuong 검정의 유도과정은 Calvet and Fisher(2004)의 A.2를 참고하면 된다.

함수값이 가장 높기 때문이다.

MSM(6) 모형의 대수우도함수 값이 가장 높기 때문에 두 가지 검정방법의 t -값은 모두 음(-)을 나타내고 있다. 상단의 Vuong(1989) 검정 결과는 $\bar{k} = 1, 2$ 인 경우 유의수준 5% 이하에서, 하단의 HAC-adjusted Vuong 검정 결과는 $\bar{k} = 1, 2$ 인 경우 유의수준 10% 이하에서 귀무가설이 기각되고 있다. 따라서 MSM(6) 모형이 $\bar{k} = 1, 2$ 인 모형에 비하여 통계적으로 유의하게 모형 적합도가 높다는 것을 의미한다. $\bar{k} \geq 3$ 인 경우 MSM(6)이 유의수준 5%나 10%에서 귀무가설을 기각할 수는 없다. 즉 모형 적합도 측면에서 $\bar{k} \geq 3$ 인 모형은 MSM(6) 모형과 통계적으로 유의한 차이를 보이지 않는다는 의미이다. $\bar{k} = 3$ 이후로 MSM 모형의 적합도가 큰 차이를 보이지 않는다는 것은 KOSPI200 지수 수익률의 변동성은 크게 장기, 중기, 단기의 변동성 구성요소로 분해할 수 있으며 세 가지 변동성 기간요인으로 KOSPI200 지수의 변동성의 움직임을 잘 설명할 수 있다는 것을 의미한다는 것을 나타낸다 (변동성 구성요소가 3개일 경우 국면(state 또는 regime)의 수는 3상태가 아니라 총 $2^3 = 8$ 상태임을 유의하기 바란다). 즉, 이는 KOSPI200 변동성 국면을 극단적인 2상태 즉, 높은 변동성 국면과 낮은 변동성 국면만 가지고 설명하는 것은 데이터 적합도 측면에서 한계가 있음을 의미한다. 그 이유는 $\bar{k} = 1$ 인 경우가 통상적인 2상태 국면전환 모형의 간략화 된 형태에 해당하기 때문이다. 따라서 이하 논의에서는 대수우도 함수값이 가장 높은 $\bar{k} = 6$ 인 경우를 적합도 및 예측성과 비교의 벤치마크 모형으로 하되 후술하는 것처럼 일부 결과해석에 있어서 편의상 $\bar{k} = 3$ 인 경우를 사용하고자 한다.

5.4 MSM 과정 시뮬레이션

MSM 과정을 따르는 수익률을 표본 추출한 후 이의 변동성과정을 탐색함으로써 MSM 모형의 특성을 가시적으로 확인해 볼 수 있다. <표 2>에 보고한 벤치마크 모형인 MSM(6) 모형의 모수 추정치를 이용하여 변동성 구성요인 $M_{1t}, M_{2t}, \dots, M_{\bar{k}t}$ 를 시뮬레이션하고 이를 이용하여 MSM 변동성 과정을 시뮬레이션한 결과를 <그림 3>에 제시하였다.

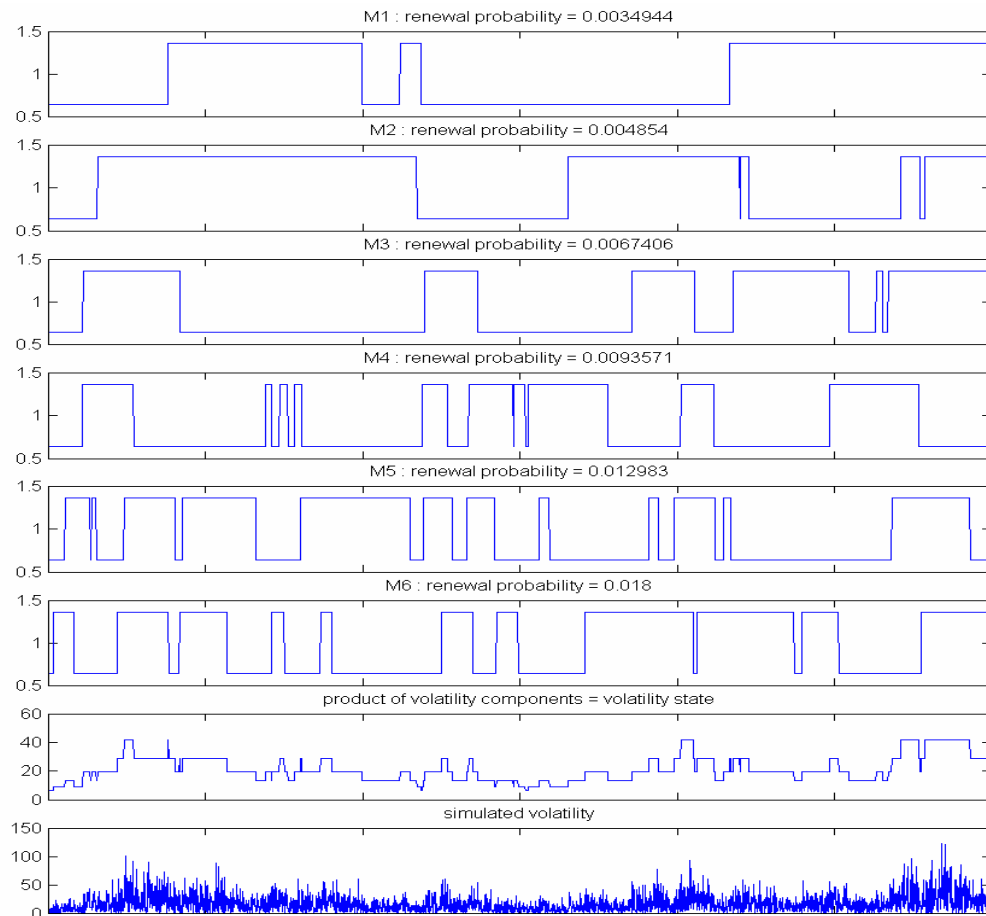
<그림 3>의 처음 6개 패널은 $k = 1$ 부터 6까지의 6개의 변동성 구성요인을 각각의 전환 확률(switching probability 또는 renewal probability) $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ 을 사용하여 시뮬레이션한 것이다. <그림 3>에서 예를 들어 γ_1 는 0.0035이며 γ_6 은 0.018이다. 7번째 패널은 6개의 변동성 구성요인을 이용하여 변동성 국면을 시뮬레이션한 것이며 식 (1)의 $\sigma_t = \sigma(M_{1t}, M_{2t}, \dots, M_{\bar{k}t})^{1/2}$ 에 해당한다. 8번째 패널은 시뮬레이션한 σ_t 에 확률 오차항 ξ_t 를 곱하여 수익률을 생성한 후 이를 변동성으로 환산한 것이다.

7번째 패널에 예시한 바와 같이 변동성 국면은 6개의 변동성 구성요인이 각각 이항분포하므로 총 $2^6 = 64$ 개이고, 변동성 구성요인이 대부분 높은 값을 가질 때 변동성은 높게 나타나며, 대부분 낮은 값을 가지면 낮은 변동성이 나타난다. 특히 구성요인들의 주기가

짧은 주기에서 긴 주기로 각각 다르기 때문에 어떤 구성요인이 어떤 국면에 있는가에 따라 다양한 변동성 국면이 생성됨을 확인할 수 있다. <그림 3>의 예시에서는 표본의 초반부와 후반부에 높은 변동성이 지속됨을 알 수 있다. <그림 4>는 KOSPI200 실현변동성과 시뮬레이션한 MSM 변동성, 그리고 KOSPI200 일별 수익률을 사용하여 계산한 자기상관함수를 제시하고 있다.

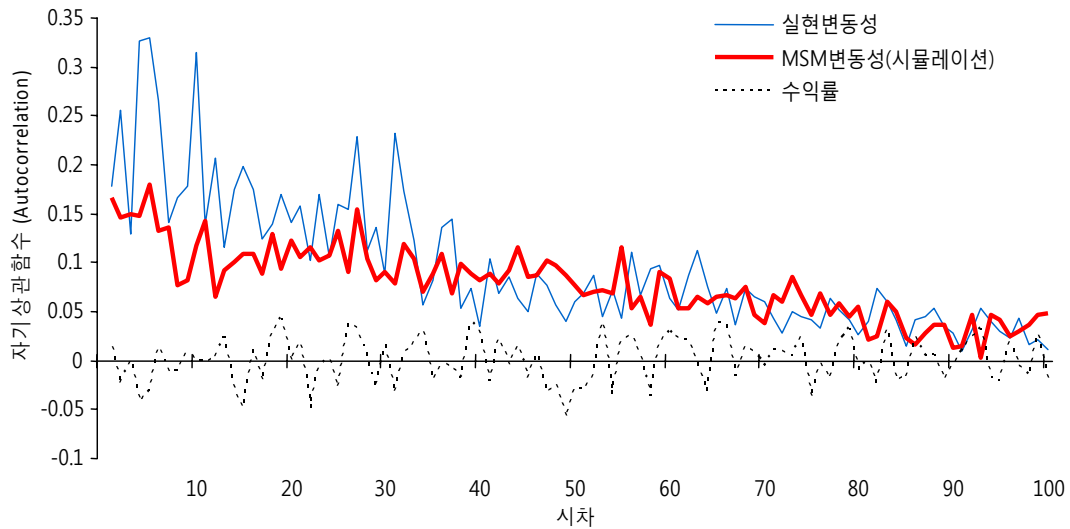
<그림 3> MSM변동성 구성요소와 변동성과정 시뮬레이션

표본기간을 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지로 두고 KOSPI200 지수 수익률을 대상으로 MSM(6) 모형을 추정한 후 모수 추정치를 이용하여 표본기간의 개수만큼 변동성과정을 시뮬레이션 하였다. M1부터 M6까지 처음 여섯 개 패널은 저빈도부터 고빈도까지 여섯 개의 변동성 구성요소를 나타내며 renewal probability는 $\hat{\gamma}_k$ 과 \hat{b} 을 이용하여 계산한 국면전환확률을 의미한다. 7번째 그림은 변동성 상태(regime), 즉 식 (1)에서 $\sigma_t = \sigma(M_{1t}M_{2t}\dots M_{6t})^{1/2}$ 에 해당한다. 8번째 패널은 시뮬레이션한 σ_t 에 표준정규분포하는 확률 오차항 ξ_t 을 추출하여 곱함으로써 수익률을 생성한 후 이를 변동성으로 환산한 것이다.



〈그림 4〉 자기상관함수

실현변동성 자료는 표본기간 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지의 KOSPI200 지수 일별 수익률을 제공한 뒤 이의 제곱근으로 계산하였다. MSM 변동성 자료는 〈그림 3〉에 예시한 MSM(6) 모형으로부터 시뮬레이션 한 자료이다. 그림은 일별 KOSPI200 수익률, 실현변동성, 시뮬레이션한 MSM(6) 변동성에 대하여 래그 100까지 자기상관함수를 계산하여 예시한 것이다. 변동성과정의 장기기억성은 그림과 같이 자기상관함수가 장기의 래그까지 매우 느리게 감소하는 현상(hyperbolic decline)을 의미한다. 점선으로 표현한 수익률의 자기상관함수에서 볼 수 있듯이 일별 수익률 자체의 상관관계는 미미하다.



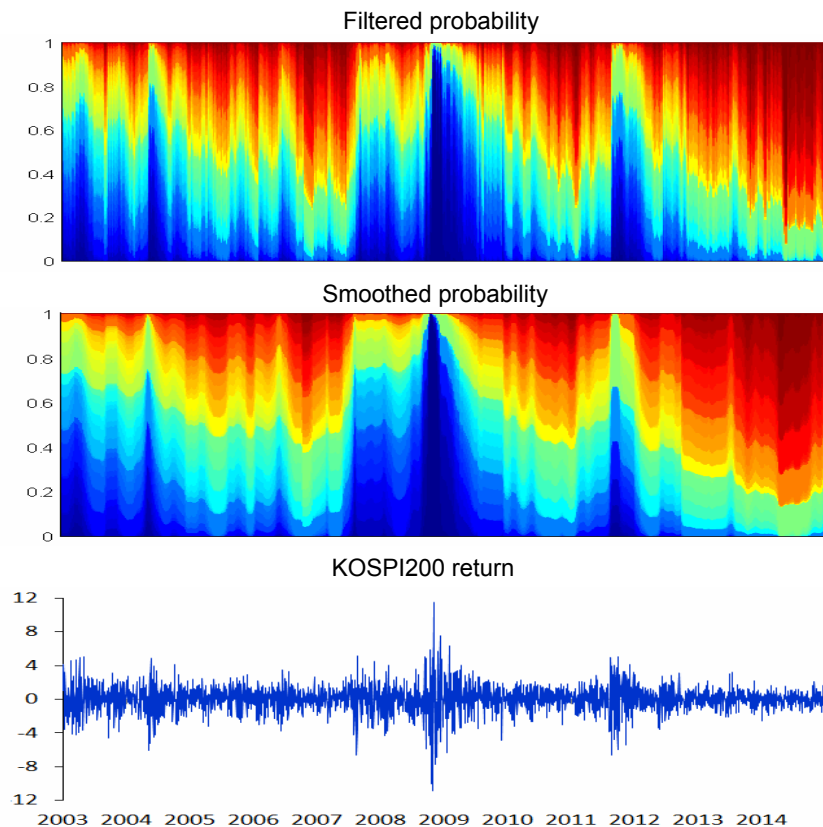
〈그림 4〉의 자기상관함수를 보면 수익률의 경우 모든 래그에서 유의적으로 계산되지 않는 반면 시뮬레이션한 MSM 변동성과정과 KOSPI200 수익률의 실현변동성의 자기상관함수는 매우 유사한 모습을 보이고 있음을 알 수 있다. 즉, 실현변동성의 자기상관함수는 매우 지속적이며 느린 속도로(hyperbolic) 감소하는 전형적인 장기기억성 패턴을 나타내고 있으며 시뮬레이션한 MSM 변동성과정의 자기상관함수도 매우 유사한 지속성을 보여 MSM 모형이 장기기억성 패턴을 기술하는데 적합한 모형임을 시사하고 있다.

5.5 변동성 국면 확률

〈그림 3〉의 7번째 패널에 예시한 바와 같이 MSM(6) 모형에서는 특정시점이 모두 총 $d = 64$ 개의 국면 중 하나에 속할 수 있다. 〈그림 5〉는 MSM(6) 모형을 구성하는 총 64개의 변동성 국면에 해당하는 사후 필터링확률(filtered probability)(식 (8)에 해당)과 평활화확률(smoothed probability)을 예시하고 있다. 두 확률의 차이점은 전자는 t -시점에서의 확률을 t -시점까지의 데이터를 이용하여 계산한 결과이고 후자는 전체 표본을 사용하여 계산하였다는 점이다.

〈그림 5〉 변동성 국면에 속할 확률: MSM(6) 모형의 경우

표본기간 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지를 대상으로 KOSPI200 지수 수익률을 사용하여 MSM(6) 모형을 추정한 후 총 $64 (= 2^6)$ 개 상태의 조건부 필터링 확률과 평활화 확률을 산출하였다. 첫 번째 그림과 두 번째 그림 각각에 대하여 하단부분에서 짙은 색 부분이 관측된다는 것은 (예를 들어 그림의 중간부분 또는 컬러로 보면 푸른색 부분)은 상대적으로 저빈도의 높은 변동성 상태를 나타내고 상단의 짙은 부분(예를 들어 그림의 후반부 또는 붉은색 부분)은 고빈도의 낮은 변동성 상태를 나타낸다. 중간에 연한 부분은 높은 변동성과 낮은 변동성 구성요인들이 조합된 결과를 보여준다. 각 시점에서 64개 상태의 조건부 필터링 확률 또는 평활화 확률의 합은 1이다.



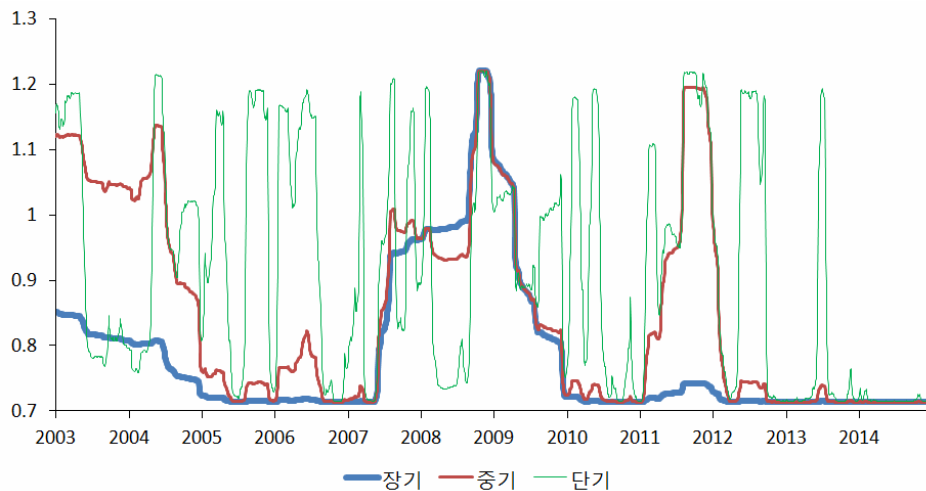
특정시점에서 보면 국면의 수가 너무 많기 때문에 모두 합해서 1이 되는 64개의 필터링 확률 또는 평활화확률을 각각의 색상으로 구분하기 쉽지는 않지만 대체적인 정보는 시점 별 변동도의 분포를 통해 파악할 수 있다. 〈그림 5〉의 필터링확률과 평활화확률을 나타낸 그림 각각에 대하여 하단의 짙은 색으로 보이는 부분은 높은 변동성 국면을 나타내고 상단의 짙은 색으로 보이는 부분은 낮은 변동성 국면을 나타낸다. 중간에 연한 색으로 보이는 부분은 높은 변동성과 낮은 변동성 구성요소들의 여러 가지 조합으로 나타낸 것을 의미한다. 수익률과 두 가지 확률을 건주어 살펴보면 2003년 카드사태 이후 2007년까지 변동성이 낮아지는 모습일 보여주다가 미국과 아시아의 금융위기 기간인 2007년부터 2009년은 매우

높은 변동성을 보여주고 있다. 2011년과 2012년의 유럽 재정위기기간을 제외하면 변동성은 2009년부터 2014년까지 낮아지는 추세를 보이고 있다. 특히 최근 2년여 기간은 높은 변동성을 가지 확률이 0에 가깝고 낮은 변동성을 가질 확률이 거의 80%에 다다른다. 따라서 최근의 저변동성 현상의 특성은 중, 저빈도 변동성 구성요소들이 낮은 변동성 국면을 유지하고 있는데 기인함을 알 수 있다.

64개의 변동성 상태를 함께 보는 것은 전반적인 변동성의 추세를 파악하는데 도움이 되지만 너무 많은 상태의 확률이 나타나기 때문에 명확한 해석이 어려울 가능성이 있다. 변동성 수준은 변동성 구성요소의 곱에 의해 결정되므로 <그림 5>와 같이 변동성 상태가 아닌 주기가 서로 다른 변동성 구성요소 자체를 확인함으로써 KOSPI200 수익률의 변동성을 분해해볼 수가 있다. 기준모형은 MSM(6) 모형이지만 앞에서 본 최우추정 결과에서 보듯이 MSM(3) 모형과 크게 유의하게 차이를 나타내지 않고 있다. 따라서 해석의 편의를 위해 MSM(3) 모형의 변동성 구성요소, 즉 $E_t(M_k)$, $k = 1, 2, 3$ 을 계산하여 <그림 6>에 제시하였다. 이 경우 변동성 구성요소가 단기 및 중·장기로 구분되어 해석하기 쉽다는 장점이 있다.

<그림 6> MSM(3) 모형의 변동성 구성요소

<표 2>의 MSM(3) 모형 추정결과를 이용하여 평활화 확률(full sample smoother)을 계산하고 이를 이용하여 3개의 변동성 구성요소, 즉 $E_t(M_k)$, $k = 1, 2, 3$ 을 계산한 결과이다. 굵은 실선은 국면전환 확률 γ_1 을 갖는 저빈도 변동성 구성요소로 국면지속기간이 가장 길며 가는 실선은 고빈도 구성요소로 국면전환확률 $\gamma_3 = 0.027$ 로서 국면지속 기간은 대략 37일이다.



<그림 6>은 KOSPI200 수익률의 변동성을 구성하는 3개의 단기 및 중·장기 변동성 구성요소를 평활화 확률(full-sample smoother)을 이용하여 계산한 결과이다. 우선 변동성 구성요소 중 장기(굵은 실선)와 중기 요소의 움직임이 <그림 5>의 변동성 국면의 전체적인 움직임과 비슷하다는 것을 알 수 있다. 즉, 변동성군집 현상이나 높은 변동성 국면 지속 추이는

주로 중·장기 요소에 의해 결정되며 단기(가는 실선) 요소는 일시적인 변동을 포착하는 것을 알 수 있다.

우리나라에 발생했던 주요 신용사건별로 변동성 구성요소의 비중이 달라짐을 알 수 있다. 우선 2003년 카드사태의 경우 중기 요소가 높은 국면에 있고 장기 요소는 상대적으로 낮은 수준에 있었다. 그러나 2008년 글로벌 금융위기의 경우 2007년 중반부터 중기와 장기 요소가 모두 높아지기 시작하여 2009년에 중·장기 요소가 모두 가장 높은 수준을 기록하였다. 이후 2009년 후반 정도가 되어야 위기확률이 중·장기 요소에서 모두 낮아졌다. 2011년 유럽 재정위기의 경우 단기와 중기 요소는 높은 수준에 있었지만 장기요소의 경우 낮은 수준을 나타내었다. 따라서 사후적으로 볼 때 2008년 글로벌 금융위기의 경우 실제로 위기가 발생하였고 위기국면 지속기간도 길었다. 반면 2011년 유럽재정위기의 경우 우리 시장의 변동성에 큰 영향을 주었지만 상대적으로 국면지속기간이 짧은 중기 및 단기 요소가 지배적이어서 글로벌 금융위기 수준까지의 실제 위기로 진행되지는 않은 것으로 해석할 수 있다.

<그림 6>의 전반부를 보면 우리나라의 경우 2011년 유럽재정위기 보다는 2003년 카드사태의 영향이 좀 더 컸고 지속적이었음을 알 수 있다. 유럽재정위기는 우리나라로의 전이 효과를 발생시킬 수는 있었지만 우리나라 경제에서 비롯된 문제는 아니었다. 그러나 카드사태의 경우 2000년 이후 미국의 닷컴버블 붕괴와 시기가 겹치면서 국내외적인 문제로 인해 중·장기 요소가 동시에 고변동성 국면으로 전환하면서 변동성이 높았던 것으로 보인다. 최근의 경우를 보면 2012년 이후 현재까지 중·장기 변동성 요소가 매우 낮은 수준에 머물고 있고 이 기간에는 단기 변동 또한 그리 빈번하지 않은 것으로 보인다. 따라서 최근의 2년여 기간은 변동성이 극히 낮은 저변동성 국면에 있는 것으로 파악된다.

5.6 모형 추정결과 비교

<표 4>는 전체 표본을 사용하여 GARCH(1, 1), 국면전환 GARCH(1, 1), 그리고 MSM(6) 모형을 추정한 결과를 비교하고 있다.

우선 세 모형의 연율화한 비조건부 변동성의 크기는 표본 자료의 변동성(약 23%)과 거의 유사한 값을 나타내고 있다. 특히 국면전환 GARCH(1, 1)의 연율화한 비조건부 변동성을 보면 낮은 국면(약 10%)과 높은 국면(약 40%) 사이에 표본 자료의 변동성이 위치하고 있다. GARCH(1, 1) 모형의 지속성은 높은 것으로 나타났고 국면전환 GARCH(1, 1) 모형의 경우에도 두 국면 모두 지속성이 높으나 높은 변동성 국면에서 더 지속적인 보인다.

대수우도함수값을 보면 MSM(6) 모형이 더 적은 수의 추정 모수를 가짐에도 불구하고 국면전환 GARCH(1, 1) 모형에 비하여 높은 값을 나타내고 있으며 추정 모수의 개수가 증가할수록 벌칙을 함께 고려하는 모형선택 기준인 AIC(Akaike Information Criteria)와 SBC(Schwarz Bayesian Criteria)를 예시도 MSM(6) 모형의 적합도가 더 높았다(이 두 정보기준은 작을수록 적합도가 높은 모형으로 해석함). 그럼에도 불구하고 세 모형의 변동성

〈표 4〉 모형 추정결과 비교

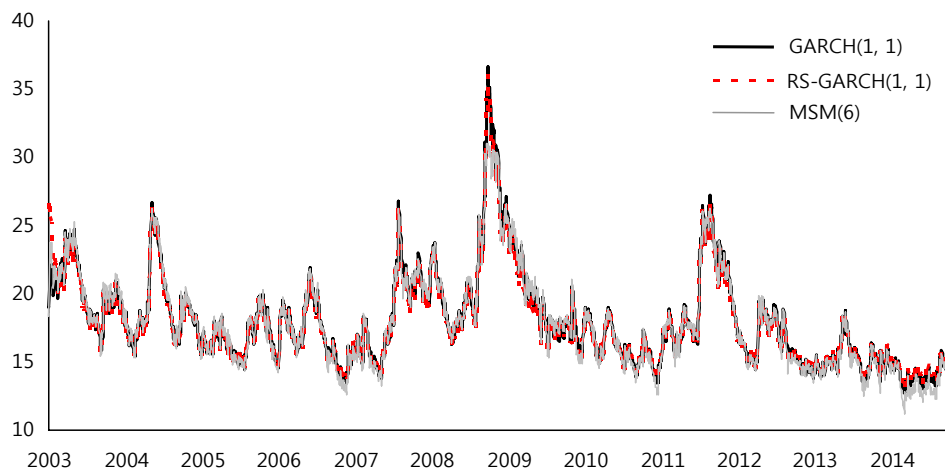
표본기간 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지를 대상으로 KOSPI200 지수 일별수익률에 대하여 세 가지 경쟁모형을 추정한 결과를 나타낸 것이다. GARCH 모형과 RS-GARCH 모형의 경우 α, β 파라미터는 본문의 식 (13)과 식 (14)의 GARCH 파라미터를 나타낸다. RS-GARCH 모형의 경우 국면이 1과 2이므로 이들 파라미터 하첨자에 1과 2로 구분하였고 GARCH 모형은 국면이 1 하나인 경우에 해당하므로 하첨자가 1인 경우에만 추정치를 보고하였다. RS-GARCH 모형에서 전이확률은 $p_{ji} = \Pr(S_{t+2} = i | S_t = j)$ 로 정의된다. $\hat{\sigma}_{ann}$ 는 식 (1)의 비조건부 표준편차로 연율화한 값이다. MSM(6)의 경우 추정할 파라미터이지만 나머지 모형의 경우 추정된 파라미터로부터 역산한 값이다. 즉, GARCH 모형의 경우 † 로 표시한 비조건부 연율화 표준편차는 MSM 모형에서 직접 추정한 값과 크기가 유사함을 알 수 있다. RS-GARCH 모형의 경우 † 는 국면 1인 경우의 비조건부 연율화 표준편차 값을 나타내며 ‡ 는 국면 2인 경우의 값을 나타내는데 대략 두 값의 평균이 MSM의 값과 유사함을 보이고 있다. \hat{m}_0 는 이항변수인 변동성 구성요소 $M_{k,t}$ 가 가질 수 있는 두 가지 수 중 큰 값을 나타낸다. $\hat{\gamma}_{\bar{k}}$ 는 \bar{k} 번째 변동성 구성요소가 국면전환할 확률을 나타내며 \hat{b} 는 식 (4)에서 보는 것처럼 γ_k 의 값을 결정하는 모수이다. $\ln L$ 는 대수우도함수 값을 나타낸다(기타 추정 파라미터의 기호는 본문의 식 (1), 식 (3), 식 (4), 식 (13), 식 (14) 참조). $AIC = 2k - 2\ln L$ 이고 $SBC = k\ln N - 2\ln L$ 로 정의되는 정보기준을 나타내며 작을수록 모형의 적합도가 높다. 여기서 k 는 추정할 모수의 개수이고 N 은 관측치수를 나타낸다. *, **, ***는 각각 유의수준 10%, 5%, 1% 하에서 통계적으로 유의함을 나타낸다(양측검정의 경우).

	GARCH(1, 1)	RS-GARCH(1, 1)	MSM(6)
$\alpha_{0,1}$	0.016*** (0.004)	0.060** (0.026)	
$\alpha_{1,1}$	0.068*** (0.007)	0.074*** (0.015)	
$\beta_{1,1}$	0.923*** (0.008)	0.916*** (0.016)	
$\alpha_{0,2}$		0.019** (0.008)	
$\alpha_{1,2}$		0.000 (0.000)	
$\beta_{1,2}$		0.957*** (0.009)	
p_{11}		0.973*** (0.017)	
p_{22}		0.975*** (0.010)	
σ_{ann}	22.122 [†]	39.655 [†] , 10.672 [‡]	24.143*** (1.052)
m_0			1.362*** (0.020)
$\gamma_{\bar{k}}$			0.018 (0.015)
b			1.390** (0.588)
$\ln L$	-4871.96	-4858.86	-4856.81
모수 개수(k)	3	8	4
AIC	9749.92	9733.72	9721.63
SBC	9767.92	9781.72	9745.63

추정치인 경우 글로벌 금융위기 기간을 제외하고 결과는 매우 유사해 보인다. 전체 표본기간 중 세 모형의 연율화한 조건부 변동성을 <그림 7>에 제시하였다. 최근 시점의 경우 MSM(6)의 추정치가 대체로 다른 모형에 비해 낮은 패턴을 보이고 있다.

<그림 7> 조건부 변동성 추정치

표본기간 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지를 대상으로 KOSPI200 지수 수익률에 대하여 세 가지 모형을 추정한 후 연율화한 조건부 변동성을 제시하였다. 전체 표본을 사용한 변동성 추정치의 경우 글로벌 금융위기 기간을 제외하고 세 모형의 결과는 매우 유사해 보이며 최근 시점의 경우 MSM(6)의 추정치가 대체로 다른 모형에 비해 낮은 편이다.



6. 모형간 사후(Out-of-Sample) 예측성과 비교

앞에서 간단히 설명한 바와 같이 사후 예측성과 비교를 위해서 모형을 월별로 재추정하였다. 이를 좀 더 자세히 설명하면 우선 2003년 1월 2일부터 2010년 6월 18일까지의 추정 기간에 포함된 1,854개의 표본을 고정한 후 모형을 추정한다(rolling scheme). 추정된 모수를 이용하여 4개의 예측기간에 해당하는 변동성을 일별로 22거래일 동안 예측한다. 22거래일이 지나면 최근의 1,854개 표본을 이용하여 모형을 재추정하고 앞의 예측과정을 반복한다. 이때 매 시점마다 모수를 재추정하지 않고 한 달에 한번씩 추정한다고 가정한 이유는 매 시점마다 모형을 새로 추정하는 경우 상당한 추정 시간이 소요되기 때문이다.⁸⁾ 또한 22일에 한 번씩 모형을 재추정하더라도 시장에 도달된 새로운 정보는 매 시점 바로 반영되며 단지 모수 추정치가 약간의 시차를 가지며 갱신될 뿐이다. 또한 김상환(2015)의 연구에 의하면 예측 모형을 매일 추정하든 일정 주기(1, 3, 6, 9, 12개월)마다 추정하든 예측성과

8) Klaassen(2002)도 추정 시간의 과다로 인하여 최초 표본에서 모수를 한 번 추정한 후 이 추정치를 이후의 모든 예측치를 계산하는데 사용하였다(fixed scheme).

결과에 큰 차이를 보이지 않는다고 하였다. 오히려 매일 추정하는 것보다 일정한 주기를 가지고 추정하는 경우가 더 높은 예측 성과를 가져오는 경우도 있음을 보고하고 있다.

6.1 예측 회귀식을 이용한 예측성과 비교

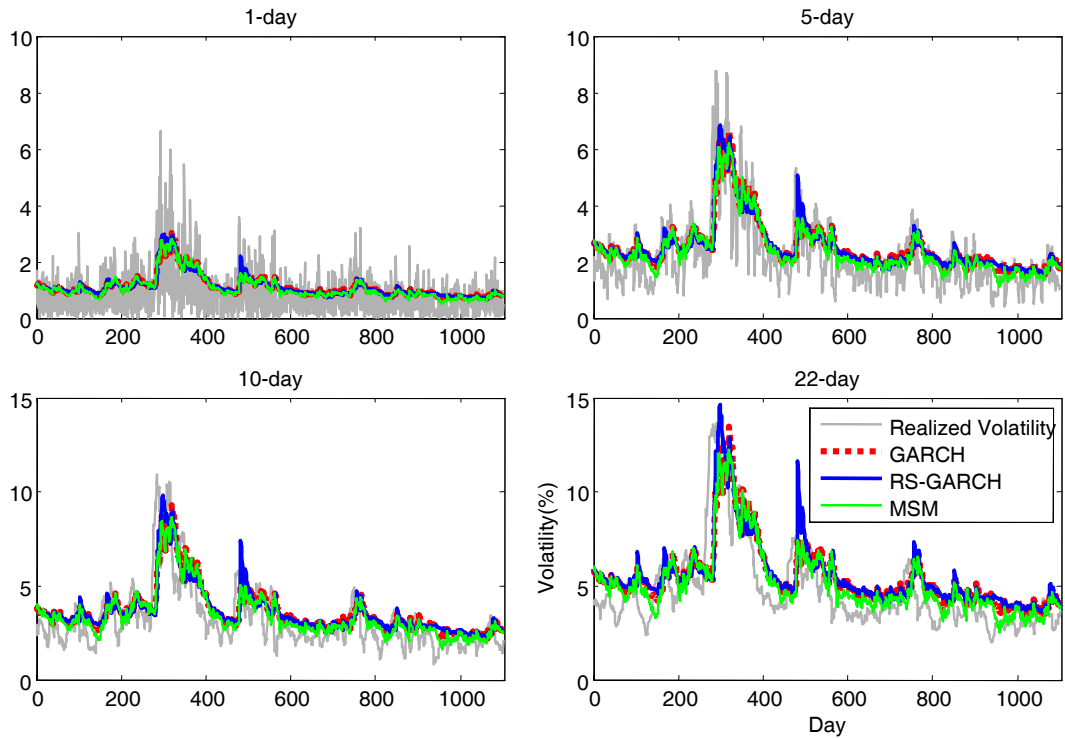
각각의 모형에 대하여 예측기간이 h 인 조건부 분산 예측치 $\hat{\sigma}_{t+h|t}^2$ 는 일별 조건부 분산 예측치 $\hat{\sigma}_{t+j|t}^2$ 를 이용하여 식 (18)과 같이 계산한다.

$$\hat{\sigma}_{t+h|t}^2 = \sum_{j=1}^h \hat{\sigma}_{t+j|t}^2 \quad (18)$$

<그림 8>은 사후 표본을 사용하여 4개의 예측기간(1, 5, 10, 22일)을 대상으로 변동성 예측치($\hat{\sigma}_{t+h|t}^2$)와 실현변동성을 비교한 결과를 제시하고 있다(이때 예측기간별 변동성의 크기를 제시하기 위해 기간별 변동성 예측치는 연율화하지 않음).

<그림 8> 실현변동성과 변동성 예측치 추이

GARCH(1, 1), 국면전환 GARCH(1, 1), MSM(6) 모형을 월 1회 추정한 뒤 일별로 4개의 예측기간에 해당하는 변동성 예측치를 산출하고 이를 실현변동성과 비교하였다. 이 때 첫 번째 추정기간은 2003년 1월 2일부터 2010년 6월 18일까지이고 이후 월별 재추정시에는 표본 개수를 동일하게 유지한다.



<그림 8>을 보면 예측기간이 길어질수록 예측성고가 높아짐을 알 수 있다. 그 이유는 예측 기간이 길어질수록 실현변동성에 포함된 잡음이 제거되기 때문이다. 그리고 장기 예측일 수록 실현변동성보다 변동성 예측치가 전반적으로 다소 높은 모습을 보여주고 있으나 경쟁 모형 중 MSM(6) 모형의 예측치가 실현변동성 수준에 좀더 가까운 모습을 보이고 있다.

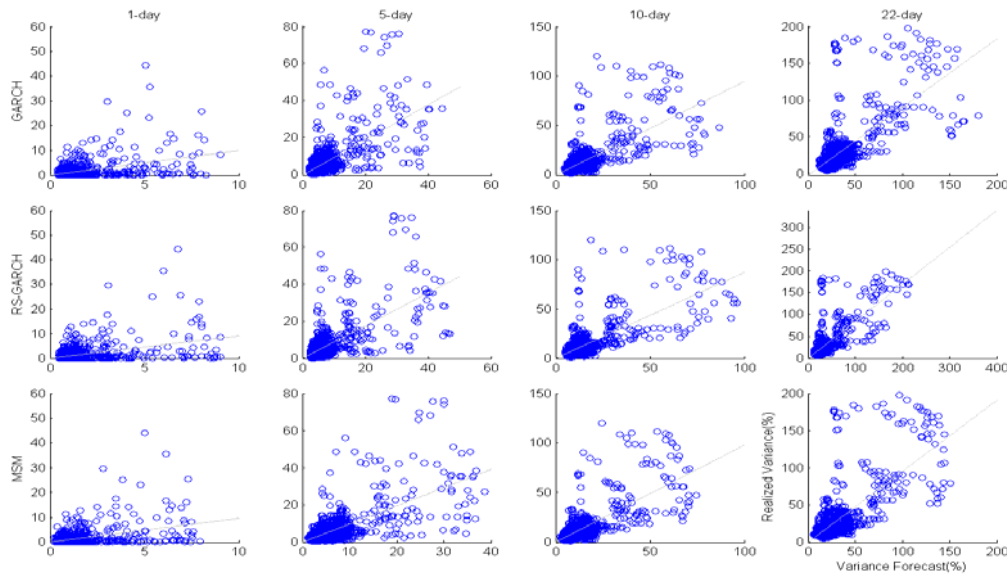
변동성 예측치가 실현 변동성의 불편추정량인지 여부를 확인하기 위하여 문헌에서 많이 사용되는 식 (19)와 같은 Mincer-Zarnowitz(MZ) 예측 회귀식을 사용하였다(Pagan and Schwert, 1990 참조).

$$\widehat{rv}_{t+h}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\sigma}_{t+h|t}^2 + u_t \quad (19)$$

단, rv_{t+h}^2 는 h 기간 실현변동성의 제곱(즉, 분산으로 수익률의 제곱에 해당), $\hat{\sigma}_{t+h|t}^2$ 는 h 기간 분산 예측치를 나타낸다. 변동성 예측치가 불편 예측치(unbiased forecast)일 경우 $\gamma_0=0$ 이고 $\gamma_1=1$ 이다. 따라서 F -검정을 이용하여 귀무가설($H_0: \gamma_0=0, \gamma_1=1$)의 기각 여부를 결정 한다. 또한 회귀식의 조정결정계수(\bar{R}^2)는 변동성 예측치가 실현 변동성의 움직임을 잘 설명 해주는 정도를 나타낸다. <그림 9>는 실현 변동성과 예측 변동성(모두 분산으로 표현함)의 산포도와 회귀선을 예시한 것이며 예측 회귀식을 이용하여 가설 검정한 결과는 <표 5>에 정리하였다.

<그림 9> 예측 회귀선과 산포도

예측기간(1, 5, 10, 22일)과 모형(GARCH, 국면전환 GARCH, MSM)별로 변동성 예측치와 실현변동성을 Mincer-Zarnowitz(MZ) 예측 회귀선과 함께 나타내었다. 단, MZ 예측 회귀식에 사용되는 변수는 표준편차가 아니라 분산의 형태를 가진다.



〈표 5〉 예측 회귀식 추정결과

Mincer-Zarnowitz(MZ) 예측 회귀식의 계수와 Wald 검정($\gamma_0=0$, $\gamma_1=1$) 통계량, 그리고 조정결정계수(\bar{R}^2)를 예측기간(1, 5, 10, 22일)과 각각의 모형(GARCH, 국면전환 GARCH, MSM) 별로 나타낸 것이다. 식 (19)에서 보는 것처럼 MZ 예측회귀식에서 종속변수는 실현변동성(의 제곱)이며 설명변수는 각 모형별 예측 기간별 분산예측치이다. 괄호 안은 점근적 표준오차를 나타내며 Newey and West (1987) 방법에 따라 이분산과 자기상관을 조정한 값이다.

	MZ 예측 회귀식 계수		Wald 검정: $\gamma_0=0, \gamma_1=1$		\bar{R}^2
	γ_0	γ_1	F-통계량	p-value	
1-Day					
GARCH(1, 1)	-0.110 (0.174)	0.991 (0.166)	2.204	0.111	0.171
RS-GARCH(1, 1)	-0.022 (0.182)	0.907 (0.165)	2.043	0.130	0.172
MSM(6)	-0.027 (0.142)	0.981 (0.150)	0.388	0.679	0.170
5-Day					
GARCH(1, 1)	-0.415 (0.910)	0.958 (0.167)	2.179	0.114	0.409
RS-GARCH(1, 1)	-0.110 (0.860)	0.890 (0.151)	2.700	0.068	0.441
MSM(6)	-0.222 (0.755)	0.987 (0.153)	0.543	0.581	0.437
10-Day					
GARCH(1, 1)	-0.981 (1.807)	0.955 (0.157)	2.631	0.072	0.488
RS-GARCH(1, 1)	-0.265 (1.439)	0.876 (0.119)	3.513	0.030	0.531
MSM(6)	-0.548 (1.451)	0.988 (0.141)	0.652	0.521	0.523
22-Day					
GARCH(1, 1)	-2.275 (4.030)	0.929 (0.143)	3.677	0.026	0.488
RS-GARCH(1, 1)	-0.969 (2.567)	0.849 (0.078)	6.739	0.001	0.550
MSM(6)	-0.856 (3.077)	0.962 (0.124)	0.747	0.474	0.517

〈표 5〉의 조정결정계수(\bar{R}^2)를 보면 1일 예측의 경우 세 모형 사이에 거의 차이가 없이 낮았다. 그러나 예측기간이 길어질수록 국면전환 GARCH, MSM, GARCH 모형의 순으로 설명력이 높았다. 특히 국면전환 GARCH 모형은 모든 예측기간에서 \bar{R}^2 가 가장 높았다. 예측 불편성과 관련된 F-검정 결과를 보면 1일과 5일의 예측의 경우 5% 유의수준에서

모든 모형의 예측치가 실현변동성의 불편추정치인 것으로 나타났다. 그러나 예측기간이 10일과 22일로 증가할수록 GARCH와 국면전환 GARCH 모형은 편의를 보이는 것으로 나타나 MSM 모형의 불편 예측성이 지배적인 것으로 나타났다. 이러한 결과는 기존 Calvet and Fisher(2004)의 실증분석 결과와 일치한다.

6.2 손실함수를 이용한 예측성과 비교

변동성의 사후 예측성결과를 비교하는 단 하나의 기준은 존재하지 않기 때문에 여러 가지 평가기준이 존재한다. 일반적으로 실측치와 예측치간의 거리(distance)에 대하여 손실함수를 설정하게 되는데 거리를 측정하는 방법은 어떤 측면을 강조하는가에 따라 여러 가지 척도가 존재한다. 본 연구에서는 Marcucci(2005)를 비롯한 여러 문헌에서 주로 사용하는 손실함수를 이용하여 종합적으로 모형간 예측성결과를 비교한다. 식 (20)부터 식 (26)까지의 7개의 손실함수는 각각 어떤 부분을 강조하는가에 따라 조금씩 차이가 있으며 작을수록 성과가 좋은 지표로 해석한다.

$$MSE_1 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\hat{rv}_{t+1} - \hat{\sigma}_{t+1|t} \right)^2 \quad (20)$$

$$MSE_2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\hat{rv}_{t+1}^2 - \hat{\sigma}_{t+1|t}^2 \right)^2 \quad (21)$$

$$QLIKE = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\log \hat{\sigma}_{t+1|t}^2 + \hat{rv}_{t+1}^2 \left(\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 \right)^{-1} \right) \quad (22)$$

$$R2LOG = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left[\log \left(\hat{rv}_{t+1}^2 \left(\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 \right)^{-1} \right) \right]^2 \quad (23)$$

$$MAD_1 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left| \hat{rv}_{t+1} - \hat{\sigma}_{t+1|t} \right| \quad (24)$$

$$MAD_2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left| \hat{rv}_{t+1}^2 - \hat{\sigma}_{t+1|t}^2 \right| \quad (25)$$

$$HMSE = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(\hat{rv}_{t+1}^2 \left(\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 \right)^{-1} \right)^2 \quad (26)$$

우선 MSE_1 과 MSE_2 는 일반적인 평균 제곱오차를 나타내며 거리의 제곱의 형식으로 나타나기 때문에 예측 오차가 클수록 큰 벌칙(penalty)를 받는다. 따라서 매우 큰 이상치에 의해 전체 성과가 영향 받을 위험이 있다. Bollerslev et al.(1994)이 제안한 $QLIKE$ 는 비대칭적인 손실함수이다. 이에 반해 MSE 는 대칭적이다. Patton(2011)은 실제변동성(true volatility)이 미관측변수일 때 $QLIKE$ 손실함수는 변동성 대용치(volatility proxy)의 잡음에 대하여 안정적

(robust)이라고 하였다. 또한 QLIKE는 실제변동성을 과대추정하는 경우보다 과소추정하는 경우에 더 많은 벌칙을 부여한다는 특징이 있다. *R2LOG*는 Pagan and Schwert(1990)가 제시한 손실함수로써 실현변동성에 로그를 취한다는 점을 제외하면 MSE와 동등하다. 이 손실함수는 변동성이 높을 때 발생하는 예측오차보다 변동성이 낮을 때 발생하는 예측오차에 더 많은 벌칙을 준다. MAD_1 와 MAD_2 은 MAD(mean absolute deviation)를 나타내는데 이상치가 존재하는 경우에도 강건성을 갖는 장점이 있다. *HMSE*는 Bollerslev and Ghysels(1996)이 제안한 이분산성을 조정한 평균 제곱오차를 나타낸다.

추가적으로 방향성 예측 능력을 알아보기 위하여 성공비율(success ratio: SR)과 방향성 정확도(directional accuracy: DA) 검정을 실시하였다. SR은 평균을 제거한 변동성 예측치 ($\hat{\sigma}_{t+j|t+j-1}^2$)의 변화와 역시 평균을 제거한 실현 변동성(\tilde{r}_{t+j}^2)의 변화가 같은 방향으로 움직이는 비율을 의미하며 식 (27)과 같이 계산한다.

$$SR = m^{-1} \sum_{j=1}^m I_{\left\{ \tilde{r}_{t+j}^2 \hat{\sigma}_{t+j|t+j-1}^2 \right\}} \quad (27)$$

여기에서 $I_{\{\cdot\}}$ 는 $\{\cdot\}$ 안의 값이 0보다 크면 1 그렇지 않으면 0인 지시함수이다. 즉 SR은 변동성 예측치의 방향이 실현변동성의 방향을 얼마나 잘 예측하는가를 나타낸다. 따라서 앞에서 다룬 7개의 손실함수와 달리 SR의 값이 클수록 방향성(또는 부호) 측면에서 볼 때 모형의 예측력이 높다고 할 수 있다.

DA 통계량은 SR을 변형하여 만든 검정 통계량으로 점근적으로 표준정규분포를 하며 식 (28)과 같이 산출한다.

$$DA = \frac{(SR - SRI)}{\sqrt{Var(SR) - Var(SRI)}} \quad (28)$$

여기에서 $SRI = P\hat{P} + (1-P)(1-\hat{P})$ 이고 P 는 $\tilde{r}_{t+j}^2 > 0$ 인 경우의 확률을, \hat{P} 는 $\hat{\sigma}_{t+j|t+j-1}^2 > 0$ 인 경우의 확률을 의미한다. SR 은 부호 예측이 올바르게 될 확률의 표본 추정치이다. SRI 는 예측치와 실측치는 독립이라는 귀무가설하에서 부호예측이 올바르게 될 확률을 의미한다. 따라서 DA 통계량이 기각되면 예측치와 실측치는 통계적으로 독립이 아니라는 의미이므로 SR과 마찬가지로 DA 역시 그 값이 클수록 방향성(또는 부호) 측면에서 모형의 예측력이 높다고 할 수 있다. <표 6>은 7가지 예측성과지표를 정리한 것이다.

<표 6>을 보면 1일 예측의 경우 특정 모형이 지배적인 결과를 나타내지는 않았다. 그러나 5일 이상으로 예측 기간이 길어질수록 MSM 모형의 손실함수가 전반적으로 낮은 값을 나타내고 있다. 따라서 단기를 제외한 예측기간에 대하여 MSM 모형이 GARCH나 국면전환 GARCH 모형보다 높은 예측성과를 보여주는 것으로 판단된다. 이러한 결과는 박재곤, 이필상

(2009)과 일치되는 것으로 보인다. 그러나 SR을 보면 국면전환 GARCH 모형이 두 모형에 비해 높은 값을 보여주고 있다. 따라서 방향성 측면에서 볼 때 국면전환 GARCH 모형이 GARCH나 MSM 모형보다는 더 높은 성과를 실현한 것으로 보인다.

〈표 6〉 사후(out-of-sample) 예측성과 지표

예측기간(1, 5, 10, 22일)과 모형(GARCH, 국면전환 GARCH, MSM)별 예측성과 지표를 나타낸 것이다. 지표들의 정의는 본문의 식 (20)~식 (28)을 참조하기 바람. * 표시는 성과가 좋은 모형을 나타냄.

	MSE ₁	MSE ₂	QLIKE	R2LOG	MAD ₁	MAD ₂	HMSE	SR	DA
1-Day									
GARCH	0.618	7.887*	0.991*	7.919	0.632	1.389	1.986*	0.704	7.264*
RS-GARCH	0.629	7.905	0.996	7.965	0.637	1.410	1.988	0.714*	7.257
MSM(6)	0.602*	7.891	0.991*	7.651*	0.617*	1.365*	2.462	0.693	6.986
5-Day									
GARCH	0.966	53.006	2.612	0.811	0.740	3.957	0.590*	0.803	16.195
RS-GARCH	0.965	51.032	2.616	0.820	0.743	3.959	0.624	0.804*	15.549
MSM(6)	0.894*	50.093*	2.598*	0.738*	0.706*	3.771*	0.607	0.799	16.226*
10-Day									
GARCH	1.400	145.840	3.321	0.498	0.889	6.850	0.460	0.831	18.852
RS-GARCH	1.383	138.306	3.325	0.503	0.903	6.918	0.488	0.842*	19.247
MSM(6)	1.256	133.691*	3.305*	0.435*	0.822*	6.370*	0.454*	0.832	19.415*
22-Day									
GARCH	2.801	595.544	4.149	0.395	1.284	14.554	0.466*	0.800	16.265
RS-GARCH	2.848	558.851	4.156	0.413	1.303	14.471	0.486	0.809*	16.294
MSM(6)	2.464*	542.723*	4.131*	0.329*	1.142*	13.184*	0.472	0.800	16.972*

손실함수를 이용한 예측 성과 비교가 통계적으로 유의한 것인지 확인하기 위하여 기준 모형(benchmark)을 MSM(6) 모형으로 두고 〈표 7〉과 같이 Diebold and Mariano(DM) 통계량을 산출하였다. Diebold and Mariano(1995)는 두 모형 사이에 예측력이 동일한가에 대한 검정 방법을 제시하였다. 이 방법의 귀무가설은 두 모형의 예측 정확도가 동일하다는 것이다. DM 통계량의 부호가 양(+)이면 기준 모형의 손실이 더 크다는 것을 의미하므로 비교모형이 우월함을 뜻하고 반대로 음(-)이면 기준 모형의 손실이 작다는 것을 의미한다. 괄호 안의 값은 p -value를 나타낸다. 〈표 7〉의 결과를 보면 〈표 6〉에서와 같이 1일을 제외한 예측기간에 대하여 간혹 예외는 있지만 전반적으로 MSM 모형이 비교모형보다 손실이 작다는 것을 확인시켜 주고 있다.

실증분석 결과를 요약하면 KOSPI200 일별 수익률의 경우 경쟁모형들의 적합도나 사후 예측력 면에서 MSM 모형의 성과가 GARCH 모형이나 국면전환 GARCH 모형에 비해 전반적으로 높은 것으로 나타났다. 이러한 결과는 경쟁모형들에 비해 MSM 모형이 저빈도 변동성

국면, 중·장기 빈도 변동성 국면, 그리고 특이치에 의한 영향 등을 간결한 수의 파라미터로 모형 할 수 있는 유연성과 신축성에 기인하는 것으로 판단되며 유사한 정형화된 사실을 보여주는 이자율이나 환율 등의 변동성 예측에서도 우월한 결과를 가져올 수 있을 것으로 기대된다.

〈표 7〉 Diebold-Mariano 검정-기준모형: MSM(6)

기준 모형(benchmark)을 MSM(6) 모형으로 두고 Diebold-Mariano(DM) 통계량을 산출하였다. 귀무가설은 기준모형과 비교모형(GARCH(1, 1), 국면전환 GARCH(1, 1) 모형)간 예측력이 동일하다(equal predictive accuracy)는 것이다. DM 통계량의 부호가 양(+)이면 기준 모형에서 손실이 더 크다는 것을 의미하고 반대로 음(-)의 부호이면 기준모형에서 손실이 작다는 것을 의미한다. 괄호 안의 값은 p -값을 나타낸다.

	MSE ₁	MSE ₂	QLIKE	R2LOG	MAD ₁	MAD ₂	HMSE
1-Day							
GARCH	-3.09 (0.00)	0.05 (0.96)	0.01 (0.99)	-7.97 (0.00)	-2.90 (0.00)	-5.25 (0.00)	3.59 (0.00)
RS-GARCH	-2.57 (0.01)	-0.07 (0.94)	-0.47 (0.64)	-5.77 (0.00)	-3.18 (0.00)	-4.63 (0.00)	2.53 (0.01)
5-Day							
GARCH	-4.11 (0.00)	-2.40 (0.02)	-2.03 (0.04)	-5.28 (0.00)	-4.28 (0.00)	-4.41 (0.00)	0.30 (0.76)
RS-GARCH	-1.87 (0.06)	-0.26 (0.79)	-1.75 (0.08)	-3.91 (0.00)	-2.17 (0.03)	-3.01 (0.00)	-0.19 (0.85)
10-Day							
GARCH	-3.73 (0.00)	-2.00 (0.05)	-2.68 (0.01)	-5.05 (0.00)	-4.61 (0.00)	-5.07 (0.00)	-0.16 (0.88)
RS-GARCH	-2.21 (0.03)	-0.46 (0.65)	-2.39 (0.02)	-4.00 (0.00)	-2.51 (0.01)	-3.85 (0.00)	-0.52 (0.60)
22-Day							
GARCH	-4.16 (0.00)	-1.97 (0.05)	-2.91 (0.00)	-5.27 (0.00)	-5.23 (0.00)	-5.89 (0.00)	0.21 (0.83)
RS-GARCH	-2.62 (0.01)	-0.35 (0.73)	-3.02 (0.00)	-4.93 (0.00)	-2.08 (0.04)	-3.82 (0.00)	-0.35 (0.73)

7. 결론

금융시계열 변동성과정의 지속성, 장기기억 속성 및 국면전환, 간헐적으로 관측되는 이상치 등과 같은 특징을 설명하기 위해 GARCH류 모형, FIGARCH 모형, 국면전환 모형, 국면전환 GARCH 모형, 점프-GARCH 모형 등 다양한 개별 모형 또는 이들의 결합모형이 제시되고 평가되어 왔다. 기존 경쟁모형들은 모형의 간결성이나 적합도 측면과 사후 예측성과 측면에서 상충관계를 보이는 것이 일반적이다. 그럼에도 불구하고 Calvet and Fisher(2004)의

선구적 연구에 의하면 서로 다른 지속기간 또는 주기를 갖는 변동성 구성요소들의 곱으로 변동성과정을 모형화하는 마코프전환 멀티프랙탈(MSM) 변동성 모형이 여러 변동성과정의 정형화된 사실(장기 기억 속성, 국면전환 및 이상치 등)을 잘 기술할 뿐만 아니라 모형의 간결성에도 불구하고 비교모형들에 비해 사후 예측 성과도 뛰어남을 보여주고 있다. 우리나라 자본시장의 대표지수 중 하나인 KOSPI200 지수의 일별 수익률 변동성의 경우에도 FIGARCH 모형 등 여러 모형이 변동성 예측 모형으로 적합한지에 대해 많은 실증분석이 이루어져 왔다. 그러나 MSM 모형을 적용하여 변동성 예측성과를 비교하고자 시도한 연구는 아직 상대적으로 미미한 편이다. 따라서 본 연구에서는 2003년 1월 2일부터 2014년 12월 30일까지의 KOSPI200 지수의 일별 수익률 사용하여 MSM 모형의 내표본 적합도와 사후 표본 예측성과를 기존 문헌이나 현업에서 상대적으로 비교기준 모형으로 많이 사용하고 있는 GARCH 모형 및 국면전환 GARCH 모형과 비교하였다.

실증분석 결과 변동성 구성요소의 개수가 6인($\bar{k} = 6$) MSM(6) 모형이 적합도와 예측성과 측면에서 비교 모형보다 우월한 결과를 보여주는 것으로 나타났다. 특히 MSM 모형은 변동성 구성요소의 개수와 관계없이 추정 모수의 개수가 4개로 동일함에도 불구하고 서로 다른 지속기간을 갖는 변동성 국면을 생성하는 유연한 모형이라는 장점이 있다. 따라서 단일모형 틀 안에서 금융시계열 변동성과정의 정형화된 사실을 잘 기술할 수 있는 반면 비교 모형인 GARCH류 모형이나 마코프 국면전환 모형, 또는 FIGARCH 모형 등은 이들 중 일부 특성을 더 강조해 모형화하는 차이가 있다.

KOSPI200 변동성 과정의 특성을 파악하기 위하여 MSM 모형의 부산물로 특정 국면에 속할 평활화확률과 변동성 구성요소 자체를 계산하였다. 각각 저빈도(국면지속기간이 가장 긴 경우), 중빈도 및 고빈도(국면지속기간이 가장 짧은 경우) 변동성을 결정하는 지표로 해석되는 세 개의 변동성 구성요소를 계산해 본 결과 2008년과 2011년에 발생한 국제적인 금융위기의 속성이 다름을 확인할 수 있었다. 2008년 글로벌 금융위기의 경우 단기와 중장기 변동성이 모두 높은 국면으로 전환하였지만 2011년 유럽 재정위기의 경우 단기 및 중기 변동성은 높은 수준에 있었지만 장기변동성의 경우 낮은 국면에 머물렀던 것으로 나타났다. 이와 같은 결과는 2008년과 2011년 위기가 한국 주식시장의 변동성에 미친 영향이 달랐다는 것을 보여주는 것으로 해석할 수 있다. 반면 표본의 초반인 2003년 카드사태는 저빈도 및 중빈도의 변동성 구성요소가 지배적이었으며 이들의 존속기간이 상대적으로 길기 때문에 높은 변동성 국면이 상당기간 지속되었음을 확인할 수 있었다.

본 연구 결과 특히 예측기간이 장기로 갈수록 개선된 예측 성과를 나타낸 점은 자산배분이나 보다 정교한 VaR 측정을 통한 시장위험관리, 그리고 파생상품을 이용한 헤지 의사결정과 같이 단기뿐만 아니라 중장기 변동성 예측이 중요한 분야에서 유용성이 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- 김명직, 장국현, 금융시계열분석, 제2판, 경문사, 2002.
- 김상환, “KOSPI200 변동성 예측성과: 주기적 모형 추정과 다기간 예측”, 재무관리연구, 제32권 제1호(2015), pp. 187-213.
- 김지혜, 장국현, “기업 변동성 추정 모형과 실증성과에 관한 연구”, 선물연구, 제23권 제1호(2015), pp. 73-97.
- 류두진, “변동성 예측모형의 실증성과에 관한 연구: 미국 시장을 중심으로”, 금융공학연구, 제11권 제3호(2012), pp. 59-82.
- 박재곤, 이필상, “장기기억 속성을 이용한 주가 변동성 예측에 관한 연구”, 금융연구, 제23권 제4호(2009), pp. 33-62.
- 엄철준, 오갑진, 김승환, 김태혁, “주식가격변화의 장기기억속성 존재 및 영향요인에 대한 실증연구”, 재무관리연구, 제24권 제3호(2007), pp. 63-89.
- 오갑진, 엄철준, 김승환, “한국주식시장의 장기기억상관성: DFA방법을 중심으로”, 금융공학연구, 제3권 제2호(2004), pp. 135-145.
- 이일균, “분수차분 장기기억과정과 증권의 가격 결정”, 재무관리연구, 제20권 제2호(2001), pp. 95-126.
- 장경천, 김현석, “주식수익률의 카오스적 특성에 관한 실증연구”, 증권학회지, 제30권 제1호(2002), pp. 99-130.
- 장국현, 이진, “우리나라 주가수익률의 이분산성과 국면전환에 관한 연구”, 증권금융연구, 제3권 제2호(1997), pp. 35-57.
- 정희수, 최병욱, “변동성 측정방법에 따른 KOSPI200 실현변동성 예측력 비교”, 상경연구, 제37권 제1호(2012), pp. 285-329.
- 최영수, 이현정, “변동성 측정방법에 따른 KOSPI200 지수의 변동성 예측 비교”, 한국통계학회논문집, 제17권 제2호(2010), pp. 293-308.
- 황성원, 류혁선, “국면전환 GARCH 모형을 이용한 변동성 구조 분석 및 예측에 관한 실증연구”, 한국증권학회지, 제40권 1호(2011), pp. 171-194.
- Andersen, T. G. and T. Bollerslev, 1998, Answering the Critics: Yes ARCH Models Do Provide Good Volatility Forecasts, *International Economic Review* 39, pp. 885-905.
- Baillie, R., T. Bollerslev, and H. O. Mikkelsen, 1996, Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 74, pp. 3-30.
- Bollerslev, T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, pp. 307-327.

- Bollerslev, T. and E. Ghysels, 1996, Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Business and Economic Statistics* 14, pp. 139-157.
- Bollerslev, T., R. F. Engle, and D. B. Nelson, 1994, ARCH Models, In *Handbook of Econometrics* 4, R. Engle and D. McFadden, eds., North Holland, pp. 2959-3038.
- Calvet L. E., M. Fearnley, A. J. Fisher, and M. Leippold, 2015, What is Beneath the Surface? Option Pricing with Multifrequency Latent States, *Journal of Econometrics* 187, pp. 498-511.
- Calvet, L. E. and A. J. Fisher, 2001, Forecasting Multifractal Volatility, *Journal of Econometrics* 105, pp. 27-58.
- Calvet, L. E. and A. J. Fisher, 2004, How to Forecast Long-run Volatility: Regime-switching and the Estimation of Multifractal Processes, *Journal of Financial Econometrics* 2, pp. 49-83.
- Calvet, L. E. and A. J. Fisher, 2007, Multifrequency News and Stock Returns, *Journal of Financial Economics* 86, pp. 178-212.
- Calvet, L. E., A. J. Fisher, and S. Thompson, 2006, Volatility Comovement: A Multifrequency Approach, *Journal of Econometrics* 31, pp. 179-215.
- Calvet, L. E., A. J. Fisher, and L. Wu, 2013, *Staying on Top of the Curve: A Cascade Model of Term Structure Dynamics*, Working paper.
- Chen, F., F. X. Diebold, and F. Schorfheide, 2013, A Markov-Switching Multifractal Inter-trade Duration Model, with Application to US Equities, *Journal of Econometrics* 177, pp. 320-342.
- Chuang, W., T.-C. Huang, and B.-H. Lin, 2013, Predicting Volatility Using the Markov-Switching Multifractal Model: Evidence from S&P 100 Index and Equity Options, *The North American Journal of Economics and Finance* 25, pp. 168-187.
- Dacorogna, M., U. Müller, R. Nagler, R. Olsen, and O. Pictet, 1993, A Geographical Model for the Daily and Weekly Seasonal Volatility in the Foreign Exchange Market, *Journal of International Money and Finance* 12, pp. 413-438.
- Diebold, F. X. and R. S. Mariano, 1995, Comparing Predictive Accuracy, *Journal of Business and Economic Statistics* 13 (3), pp. 253-263.
- Ding, Z., C. Granger, and R. Engle, 1993, A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model, *Journal of Empirical Finance* 1, pp. 83-106.
- Engle, R. F., 1982, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U. K. Inflation, *Econometrica* 50, pp. 987-1008.
- Fama, E. F., 1970, Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *Journal of Finance* 25, pp. 383-417.

- Filip, Ž., B. Jozef, and S. Nikhil, 2014, Modeling and Forecasting Persistent Financial Durations, *Econometric Reviews*, forthcoming.
- Gray, S. F., 1996, Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process, *Journal of Financial Economics* 42, pp. 27-62.
- Hamilton, J. D., 1989, A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica* 57, pp. 357-384.
- Hamilton, J. D. and R. Susmel, 1994, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime, *Journal of Econometrics* 64, pp. 307-333.
- Idier, J., 2009, (Re)correlation: A Markov Switching Multifractal Model with Time Varying Correlations, Mimeo, Banque de France.
- Idier, J., 2011, Long-term vs. Short-term Comovements in Stock Markets: The Use of Markov-switching Multifractal Models, *The European Journal of Finance* 17, pp. 27-48.
- Kang, S. H. and S.-M. Yoon, 2007, Long Memory Properties in Return and Volatility: Evidence from the Korean Stock Market, *Physica A* 385, pp. 591-600.
- Kang, S. H. and S.-M. Yoon, 2008, Long Memory Features in the High Frequency Data of the Korean Stock Market, *Physica A* 387, pp. 5189-5196.
- Klaassen, F., 2002, Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-switching GARCH, *Empirical Economics* 27, pp. 363-394.
- Liu, R. and T. Lux, 2007, Higher Dimensional Multifractal Processes: A GMM Approach, Working Paper, University of Kiel.
- Lux, T., 2008, The Markov-Switching Multifractal Model of Asset Returns: GMM Estimation and Linear Forecasting of Volatility, *Journal of Business and Economic Statistics* 26, pp. 194-210.
- Lux, T. and L. Morales-Arias, 2013, Relative Forecasting Performance of Volatility Models: Monte Carlo Evidence, *Quantitative Finance* 13 (9), pp. 1375-1394.
- Lux, T., M. Segnon, and R. Gupta, 2015, Modeling and Forecasting Crude Oil Price Volatility: Evidence from Historical and Recent Data, Working Paper, University of Kiel.
- Lux, T. and T. Kaizoji, 2007, Forecasting Volatility and Volume in the Tokyo Stock Market : Long Memory, Fractality and Regime Switching, *Journal of Economic Dynamics and Control* 31, pp. 1808-1843.
- Lamoureux, C. G. and W. D. Lastrapes, 1990, Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model, *Journal of Business and Economic Statistics* 8, pp. 225-234.

- Mandelbrot, B. B., 1977, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, San Francisco, W. H. Freeman and Co.
- Mandelbrot, B. B., 1982, *The Fractal Geometry of Nature*, New York, W. H. Freeman and Co.
- Marcucci, J., 2005, Forecasting Stock Market Volatility with Regime-switching GARCH Models, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* 9, pp. 1-53.
- Nasr, A. B., T. Lux, A. N. Ajmi, and R. Gupta, 2014, Forecasting the Volatility of the Dow Jones Islamic Stock Market Index: Long-Memory vs. Regime-Switching, Working Paper, University of Pretoria.
- Newey, W. and K. West, 1987, A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, *Econometrica* 55, pp. 703-708.
- Newey, W. and K. West, 1994, Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation, *Review of Economic Studies* 61, pp. 631-654.
- Pagan, A. R. and W. Schwert, 1990, Alternative Models for Conditional Stock Volatility, *Journal of Econometrics* 50, pp. 267-290.
- Patton, A., 2011, Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies, *Journal of Econometrics* 160, pp. 246-256.
- Peters, E., 1994, *Fractal Market Analysis—Applying Chaos Theory to Investment and Analysis*, New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Rivers, D. and Q. Vuong, 2002, Model Selection Tests for Nonlinear Dynamic Models, *Econometrics Journal* 5, pp. 1-39.
- Ryden, T., T. Terasvirta, and S. Asbrink, 1998, Stylized Facts of Daily Return Series and the Hidden Markov Model, *Journal of Applied Econometrics* 13, pp. 217-244.
- Segnon, M., T. Lux, and R. Gupta, 2015, *Modeling and Forecasting Carbon Dioxide Emission Allowance Spot Price Volatility: Multifractal vs. GARCH-type Volatility Models*, FinMap-Working Paper No. 46.
- Shephard, N., 1994, Partial Non-Gaussian State Space, *Biometrika* 81, pp. 115-131.
- Turner, C. M., R. Startz, and C. R. Nelson, 1989, A Markov Model of Heteroskedasticity, Risk, and Learning in the Stock Market, *Journal of Financial Economics* 25, pp. 3-22.
- Wang, Y., C. Wu, and L. Yang, 2016, Forecasting Crude Oil Market Volatility: A Markov Switching Multifractal Volatility Approach, *International Journal of Forecasting* 32, pp. 1-9.

Performance of Long-Term KOSPI200 Returns Volatility Forecast Using Markov Switching Multifractal Model

Sang-Heon Lee

Hanyang University

Myung-Jig Kim*

Hanyang University

Abstract

Volatility clustering, long memory, regime change, and the presence of outliers are well-known stylized facts of volatility of financial time series. This paper estimates the volatility model of KOSPI200 index returns using a Markov switching multifractal (MSM) model that is known to capture these characteristics with relatively small number of parameters and compares its multi-horizon forecasting performance with that of popular competing models such as a standard GARCH model and Markov switching GARCH model. Using the sample period covering from January 2, 2003 to December 30, 2014, this paper finds that the MSM model outperforms competing models in terms of both in-sample goodness of fit and out-of-sample forecasting performance. Particularly, the forecasting performance tends to become more prominent as the forecasting horizon increases.

As a byproduct the MSM model allows KOSPI200 return volatility to be decomposed into short-term and medium- to long-term volatility components. The examination of computed volatility components suggests that the nature and effect of volatilities due to the 2008 global financial crisis and 2011 European sovereign debt crisis are quite different: in addition to the increase in short- and medium-term volatilities, the low-frequency long-term volatility is also increased during the former crisis period resulting in Korean stock market shifting into the higher volatility state, whereas the shift in the volatility state is not observed during the latter crisis period implying that the effect of European debt crisis to Korean stock market was big, but only transitory.

Keywords: Volatility Forecasting; Markov Switching Multifractal Model;
Markov Switching GARCH Model; Mincer-Zarnowitz Regression;
Diebold-Mariano Test

JEL Classification: C13, C53, G1

* Corresponding Author. Address: College of Economics and Finance, Hanyang University, 222, Wangsimni-ro, Seongdong-gu, Seoul, Korea, 04763; E-mail: mjkim@hanyang.ac.kr; Tel: +82-2220-1034; Fax: +82-2293-1787.