Metody Numeryczne - Lista 2

Janusz Szwabiński

Uwaga!

- Zadania do rozwiązania bez użycia komputera oznaczone zostały symbolem $\triangleleft$.
- Pozostałe zadania powinny zostać rozwiązane przy pomocy własnej implementacji metody eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego oraz dla porównania - przy pomocy funkcji w bibliotece `scipy`.

1. $\triangleleft$ Na podstawie wyznaczników poniższych macierzy określ, czy są one osobliwe, źle uwarunkowane czy też dobrze uwarunkowane.

   (a)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2,11 & -0,80 & 1,72 \\ -1,84 & 3,03 & 1,29 \\ -1,57 & 5,25 & 4,30 \end{pmatrix},$$

   (c)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   (d)
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & -18 & 13 \end{pmatrix}.$$

2. $\triangleleft$ Oblicz $\mathbf{A}$ i $\det \mathbf{A}$, jeżeli dany jest rozkład LU macierzy $\mathbf{A}$:

   (a)
   $$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $\triangleleft$ Korzystając z rozkładu LU macierzy $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 11/13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 13/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 32/13 \end{pmatrix}$$

rozwiąż układ równań $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ z wektorem wyrazów wolnych $\vec{b}^{\mathrm{T}} = [1\ {-1}\ 2]$.

4. Rozwiąż układ równań $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Wyznacz współczynniki wielomianu

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$

który przechodzi przez punkty $(0,-1)$, $(1,1)$, $(3,3)$, $(5,2)$ i $(6,-2)$.

6. Rozwiąż układ równań $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3,50 & 2,77 & -0,76 & 1,80 \\ -1,80 & 2,68 & 3,44 & -0,09 \\ 0,27 & 5,07 & 6,90 & 1,61 \\ 1,71 & 5,45 & 2,68 & 1,71 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7,31 \\ 4,23 \\ 13,85 \\ 11,55 \end{pmatrix}.$$

Oblicz $\det \mathbf{A}$ i $\mathbf{A}\vec{x}$. Co powiesz o dokładności rozwiązania?

7. Rozwiąż układ równań

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & 3 & 10 & -3 & 3 & 3 & -4 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 3 & -12 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -15 & -1 & 1 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 12 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 3 & -4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -5 \\ 3 \\ -25 \\ -26 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

8. Znajdź macierz odwrotną do macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Zwróć uwagę na kształt macierzy $\mathbf{A}^{-1}$. Czy jest trójdiagonalna?

9. Znajdź macierz odwrotną do macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 15 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 11 & 1 & -2 & 18 & 7 \end{pmatrix}.$$

Co powiesz o jakości tego rozwiązania?