הרצאה 1   3.11.2011

עיבוד אותות ספרתי 2 - Digital Signal Processing II

מרצה: פרופ' שרון גנות.   בנין 1103 חדר 421.   טלפון: 03-5317618.
מייל: gannot@eng.biu.ac.il
מתרגל: עופר שוורץ.   מייל: oferico.sh@gmail.com

הרכב הציון: תרגילי בית: 5% (חובת הגשה של 80% מהגליונות)
תרגילי מטל"ב: 10% (2 תרגילים – חובה)
מבחן סופי: 85%

נושאי הקורס:

- **עיבוד רב-קצבי במערכות בזמן בדיד:** דצימציה ואינטרפולציה. מימוש יעיל של סינון ושינוי קצב. מימוש Poly-Phase. שינוי קצב דגימה ביחס רציונלי.
- **בנק מסננים**: מימוש QMF. התמרת פורייה כבנק מסננים באורך שרירותי. שילוב של שינוי קצב בבנק המסננים. יעילות חישובית.
- **התמרת פורייה לזמן קצר (STFT):** גישות Weighted Overlap and Add (WOLA) ו- Filter-bank sum (FBS). תנאים לשחזור מושלם (תנאי Portonoff). השקילות לבנק מסננים.
- **שיטות מהירות לחישוב התמרת פורייה הבדידה:** שיטת Cooley & Tukey. Prime Factor FFT. אלגוריתם Goertzel. Chirp Fourier Transform, Zoomed FFT (אופציה: אלגוריתם Winograd).
- **ייצוג באורך מילה סופי:** עיגול מכפלות, רעש כימות, מניעת גלישה, LIMIT CYCLE.

ספרות מומלצת:

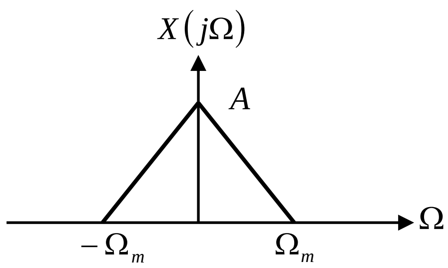
1. **P. P. Vaidyanathanm, “Multirate Systems and Filter Banks”, 1st Edition, Prentice Hall, 1992.**
2. **R. E. Crochiere and L.R. Rabiner, “Multirate Digital Signal Processing”, Prentice-Hall,1983 .**
3. B. Porat, “A Course in Digital Signal Processing”, Wiley & Sons, 1997.
4. A.V. Oppenheim and R.W. Schafer with J.R. Buck, “Discrete-Time Signal Processing”, Prentice-Hall, 2nd edition, 1999.
5. John G. Proakis, Charles Rader, Ling Fuyun, Charles M. Rader, Fuyun Ling, Marc Moonen, Ian K. Proudler, and Chrysostomos L. Nikias. *Algorithms for Statistical Signal Processing*. Prentice Hall;, London, U.K., 1st edition, 2002.
6. Richard E. Blahut, “Fast Algorithms for Digital Signal Processing”, Addison-Wesley, 1985.

משפט הדגימה (Sampling Theorem)

כאשר דוגמים אות רציף בזמן ומוגבל סרט: $x(t) \quad -\infty < t < \infty \quad \xleftrightarrow{FT} X(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| > \Omega_m$

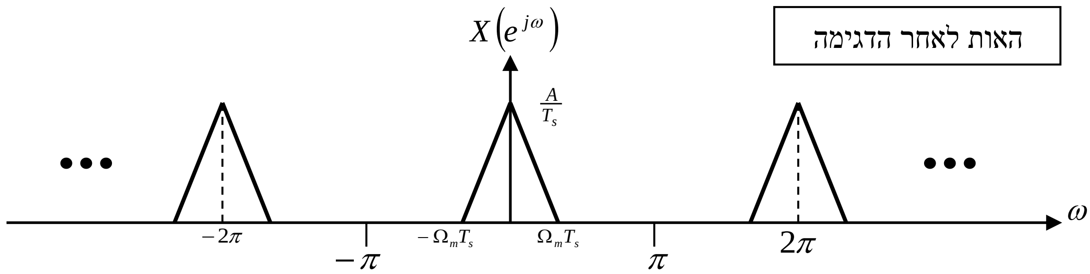
האות לאחר הדגימה, במישור הזמן: $x[n] = x(nT_s) \quad T_s = \frac{2\pi}{\Omega_s} \quad , \ -\infty < n < \infty$

בתדר: $X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T_s}\right)$



האות לפני הדגימה

האות לאחר הדגימה



שחזור אידיאלי ע"פ נוסחת שאנון: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{\sin[\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)]}{\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\mathrm{sinc}[\tfrac{1}{T_s}(t - nT_s)]$

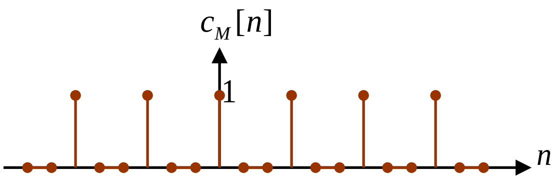
הורדת קצב – דצימציה

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \longrightarrow x_d[n]$$

האות בזמן, לאחר הורדת הקצב: $x_d[n] = x[nM] \quad -\infty < n < \infty \ ; \ M \in \mathbb{N}$

ננתח את התופעה במישור התדר, על ידי הגדרת 2 שלבים במישור הזמן:

שלב ראשון: הכפלת האות ברכבת הלמים: $(1) \quad x^{(M)}[n] = x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n - kM] = x[n]\cdot c_M[n]$



עבור $M = 3$:

שלב שני: הגדרת האות לאחר הדצימציה: $(2) \quad x_d[n] = x^{(M)}[nM] \quad ; \quad -\infty < n < \infty$

ננתח במישור z: $X^{(M)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{(M)}[n]\cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot c_M[n]\cdot z^{-n}$

האות $c_M[n]$ הוא אות מחזורי M ואינסופי, ולכן ניתן לבטא אותו כטור פורייה (מהטבלאות):

$$c_M[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kM]=\sum_{k=\langle M\rangle}c_k e^{jk\frac{2\pi}{M}n}\xrightarrow{DFS}c_k=\frac{1}{M}$$

$$c_M[n]=\sum_{k=0}^{M-1}c_k e^{jk\frac{2\pi}{M}n}=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}e^{jk\frac{2\pi}{M}n}=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}w_M^{k\cdot n}\qquad w_M=e^{j\frac{2\pi}{M}}$$

ולכן:

$$X^{(M)}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot\left(\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}w_M^{k\cdot n}\right)\cdot z^{-n}=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot\left(w_M^{-k}z\right)^{-n}\right)$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(w_M^{-k}z\right)$$

ולכן:

$$X^{(M)}(z=e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(e^{-j\frac{2\pi}{M}k}e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{M}k)})$$

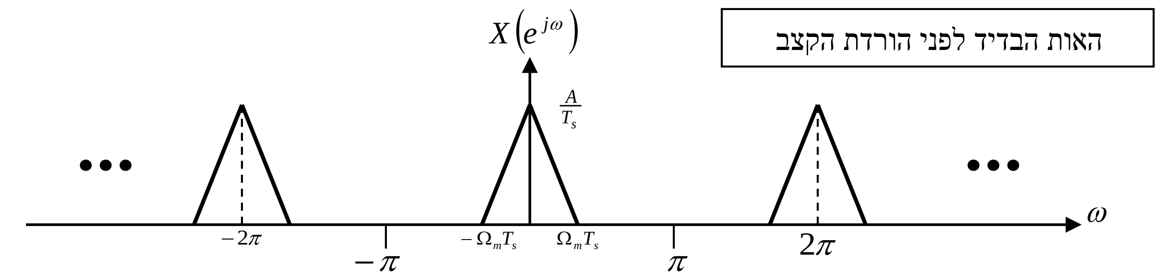
כעת ננתח את שלב (2) במישור התדר:

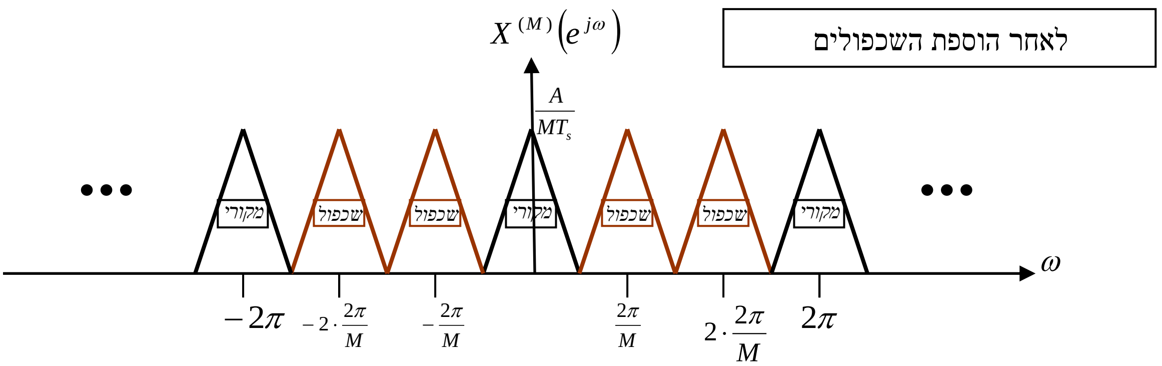
$$(2)\qquad x_d[n]=x^{(M)}[nM]\qquad;\qquad -\infty<n<\infty$$

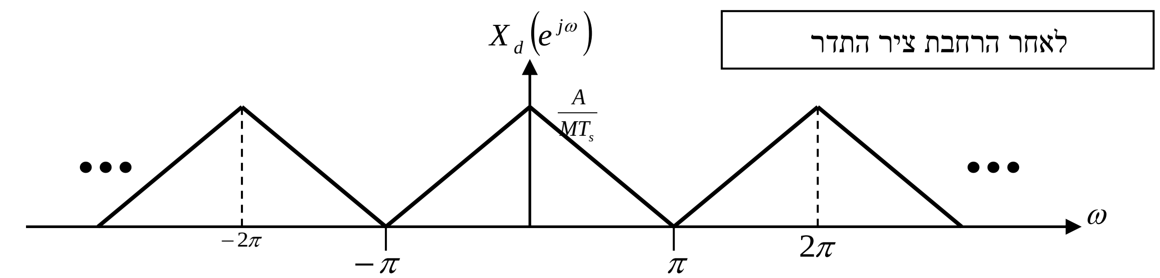
$$X_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{(M)}[nM]z^{-n}\underset{n'=nM}{=}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}x^{(M)}[n']z^{-\frac{n'}{M}}=\sum_{n'=-\infty}^{\infty}x^{(M)}[n'](z^{\frac{1}{M}})^{-n'}=X^{(M)}(z^{\frac{1}{M}})$$

$$X_d(e^{j\omega})=X^{(M)}(e^{j\omega\frac{1}{M}})=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(e^{j(\frac{\omega-2\pi k}{M})}\right)$$

המשמעות היא הרחבת ציר התדר פי M והוספת $M-1$ שכפולים. דוגמא, עבור $M=3$:







אנלוגיה בין דגימה ובין הורדת קצב:

	דגימה	הורדת קצב
האות הנדגם	$x(t)$ - אות בזמן רציף	$x[n]$ - אות בזמן בדיד
הגבלת סרט למניעת קיפול	$X(j\Omega)=0 \quad \lvert\Omega\rvert > \Omega_m$	$X(e^{j\omega})=0 \quad \omega_m < \lvert\Omega\rvert < \pi$
תנאי נייקוויסט	$\Omega_s \geq 2\Omega_m \quad T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_m}$	$\omega_m \leq \frac{\pi}{M}$
מרווח הזמן לפני הנרמול הכוונה למרווח בין כל שני דגימות שאנו רוצים	T_s	M
מרווח הזמן לאחר הנרמול	1	1
מרווח שכפול התדר לפני הנרמול	$\frac{2\pi}{T}$	$\frac{2\pi}{M}$
מרווח שכפול התדר לאחר הנרמול	2π	2π
הנרמול של ציר התדר	$\omega = \Omega T_s$	$\omega' = \omega M$

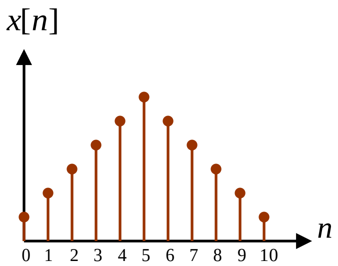
הרצאה 2   10.11.2011

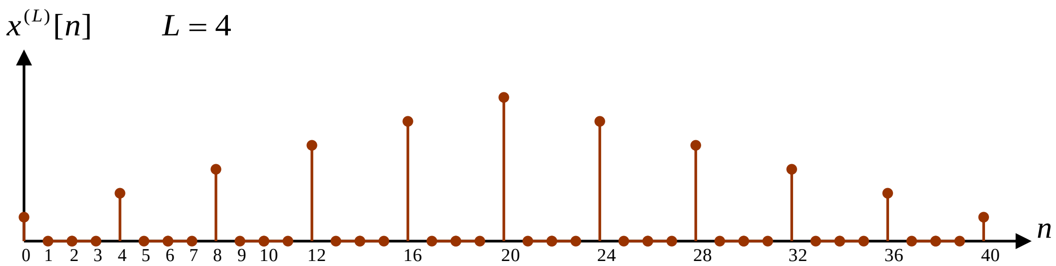
העלאת קצב

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \longrightarrow x^{(L)}[n]$$

האות בזמן, לאחר העלאת הקצב:
$$x^{(L)}[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{L}] & n=0,\pm L,\pm 2L,\dots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

המשמעות היא הרחבה של האות בציר הזמן על ידי הכנסת $L-1$ אפסי ביניים:



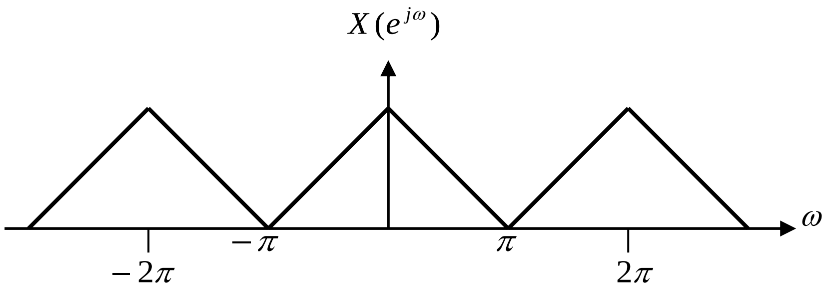


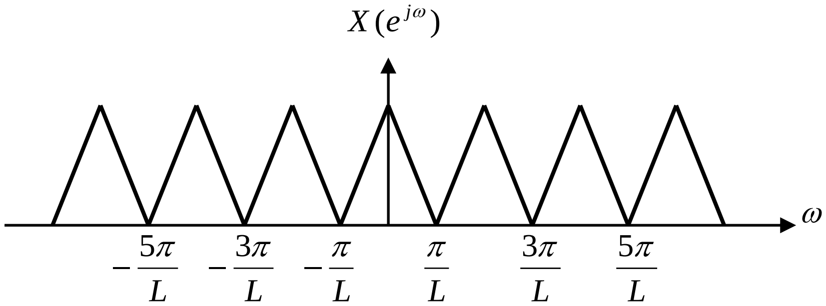
ננתח במישור Z את האות המורחב:

$$X^{(L)}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{(L)}[n]z^{-n} \underset{n=n'L}{=} \sum_{n'=-\infty}^{\infty}x^{(L)}[n'L]z^{-n'L} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty}x[n']z^{-n'L} = X\left(z^{L}\right)$$

$$X^{(L)}(e^{j\omega})=X\left(e^{j\omega L}\right)$$

כלומר: הרחבה במישור הזמן נותנת צמצום של ציר התדר פי L. דוגמא:





סינון - אינטרפולציה

לאחר העלאת הקצב יש לסנן את האות על ידי מסנן אינטרפולציה, כלומר: LPF אידיאלי בעל תדר קטעון $\frac{\pi}{L}$, והגבר L (על מנת לפצות על איבוד האנרגיה שנגרם כתוצאה מהדצימציה).

<u>הערה:</u> תדר הקטעון לא חייב להיות $\frac{\pi}{L}$, אלא $\frac{\text{רוחב הפס של האות}}{L}$. הבחירה בתדר הקטעון $\frac{\pi}{L}$ מתחשבת במקרה הגרוע ביותר שבו רוחב הסרט של האות הוא π, אך אם הרוחב קטן יותר הבחירה לעיל מבזבזת רוחב סרט.

$$x^{(L)}[n] \longrightarrow \boxed{LPF} \longrightarrow x_i[n]$$

$$\text{הגבר } L \quad \pm\tfrac{\pi}{L}$$

$$x^{(L)}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]$$

$$x_i[n] = x^{(L)}[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{(L)}[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[m-kL]\right]h[n-m]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-kL]$$

במקרה בו $h[n]$ הוא LPF אידיאלי נקבל:

$$H_{LPF}\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} L & |\omega| \le \frac{\pi}{L} \\ 0 & \frac{\pi}{L} < |\omega| \le \pi \end{cases} \xrightarrow{DTFT^{-1}} h_{LPF}[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{L}n\right)}{\frac{\pi}{L}n} = \sin c\left(\frac{n}{L}\right)$$

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{\sin\left[\frac{\pi}{L}(n-kL)\right]}{\frac{\pi}{L}(n-kL)}$$

ניתן לראות שזהו גרעין אינטרפולציה בדיד. במציאות משתמשים במסננים מעשיים כגון:

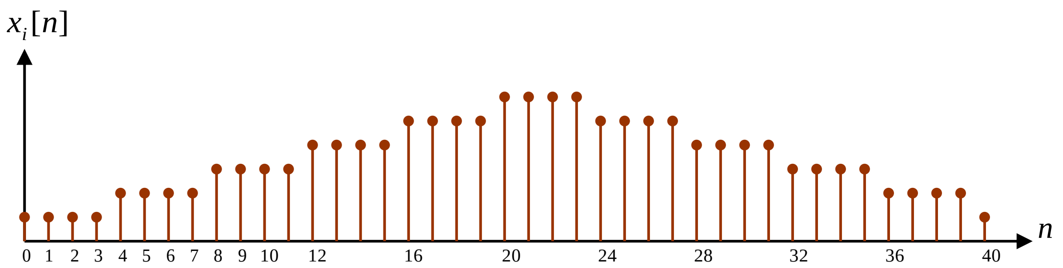
מסנן ZOH: זהו חלון מלבני בזמן. קונבולוציה עם מלבן זה, משמעותה הלבשת החלון על כל דגימה, כלומר: המשכת ערך הדגימה עד הדגימה הבאה:

$$h_{ZOH}[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$H_{ZOH}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{ZOH}[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{L-1} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-(L-1)}$$

$$x_i[n] = x^{(L)}[n] * h_{ZOH}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_{ZOH}[n-kL]$$

$$= \ldots + x[-1]h_{ZOH}[n+L] + x[0]h_{ZOH}[n] + x[1]h_{ZOH}[n-L] + \ldots$$



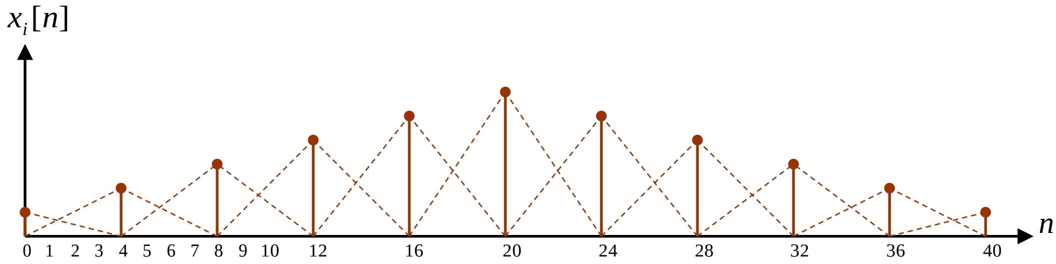
מסנן FOH: לכל דגימה מעבירים משולש עד הדגימה הבאה, כך שקדקוד המשולש נמצא על הדגימה, ערך הדגימות החסרות יהיה חיבור התרומה של כל משולש:

$$h_{FOH}[n]=\begin{cases}1-\frac{|n|}{L} & |n|\le L\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$H_{FOH}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_{FOH}[n]z^{-n}=\sum_{n=-L}^{L}(1-\tfrac{|n|}{L})z^{-n}$$

$$x_i[n]=x^{(L)}[n]*h_{FOH}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h_{FOH}[n-kL]$$

$$=\ldots+x[-1]h_{FOH}[n+L]+x[0]h_{FOH}[n]+x[1]h_{FOH}[n-L]+\ldots$$

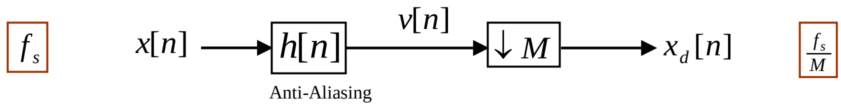


נשים לב שלאחר האינטרפולציה רוחב הסרט של האות קטן ל- $\frac{\pi}{L}$, המשמעות היא שהמעבר מדגימה לדגימה הוא כעת חלק יותר (הוספנו $L-1$ דגימות באמצע). משתמשים באינטרפולציה כאשר רוצים להראות את האות ברזולוציה טובה יותר (כלומר שתדר הדגימה יהיה גדול מתדר נייקוויסט)

אנלוגיה בין אינטרפולציה לשחזור:

	שחזור לזמן רציף	**אינטרפולציה**
סוג המסנן	מסנן בזמן רציף	מסנן בזמן בדיד
הגבר המסנן	T_s	L
תדר הקטעון	$\frac{\pi}{T_s}$	$\frac{\pi}{L}$
מרווח דגימות (שאינן 0) לפני הסינון	T_s	L

מימוש יעיל של מסנן Anti-aliasing ודצימציה



האות $x[n]$ הוא אינסופי, ואילו המסנן $h[n]$ הוא מסנן LPF ספרתי עם תדר קטעון $\frac{\pi}{M}$. המסנן נצרך על מנת שלאחר הדצימציה לא יהיו לנו דריכות ונוכל לשחזר את האות על ידי העלאת קצב ואינטרפולציה.
הבעיה במימוש הזה היא שהוא לא יעיל.
נניח כי המסנן $h[n]$ הוא מסנן FIR (סופי) בעל אורך N וסיבתי, כלומר: $h[n] \neq 0 \quad \forall 0 \le n \le N-1$

אזי נקבל כי מוצא המסנן הוא:
$$v[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$

כלומר: על מנת לקבל דגימה אחת של המוצא $v[n]$ נדרשות N פעולות כפל ו-$N-1$ פעולות חיבור.

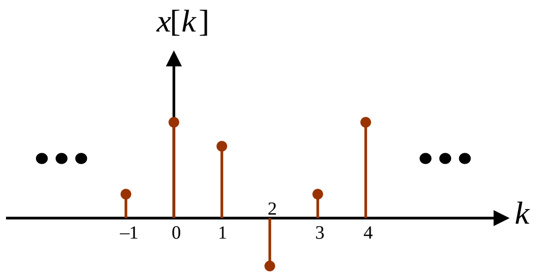
הפעולה הבאה היא הורדת קצב, כלומר: $x_d[n] = v[Mn]$

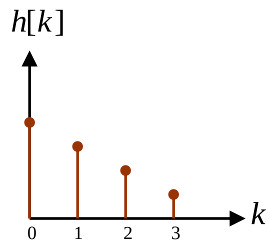
למעשה אנו זורקים $M-1$ דגימות שלפני כן חישבנו לחינם. עלינו למצוא דרך להוציא רק את הדגימות שאותם לא נזרוק, אין טעם להוציא דגימות שאותם נזרוק אח"כ.

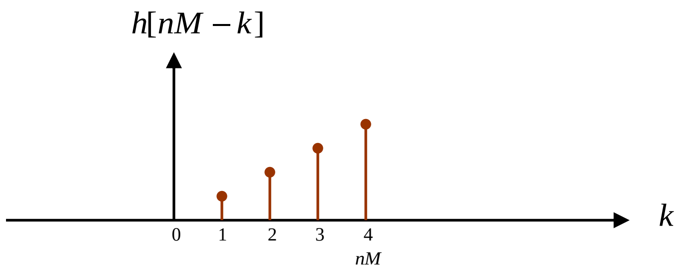
<u>הסבר אנליטי:</u>
$$v[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] \underset{k'=n-k}{=} \sum_{k'=n}^{n-(N-1)} x[k']h[n-k'] = \sum_{k'=n-(N-1)}^{k'=n} x[k']h[n-k']$$

$$x_d[n] = v[Mn] = \sum_{k=Mn-(N-1)}^{k=Mn} x[k]h[Mn-k]$$

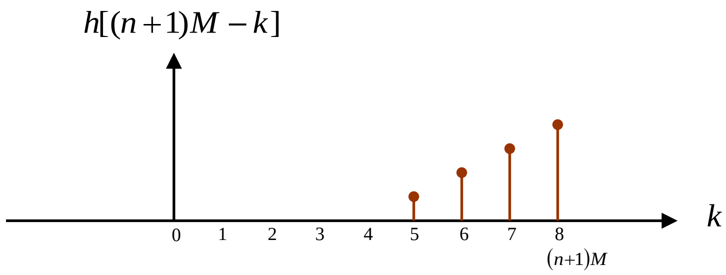
המשמעות היא שאפשר לממש את המסנן + הורדת הקצב על ידי הזזת המסנן בכפולות של M כך שהדגימות שיצאו אלו רק הדגימות שאותם אנו רוצים לשמור.
נסביר את התוצאה על ידי דוגמא. נניח כי גודל המסנן הוא $N=4$, ו-$M=2$, נקבל:







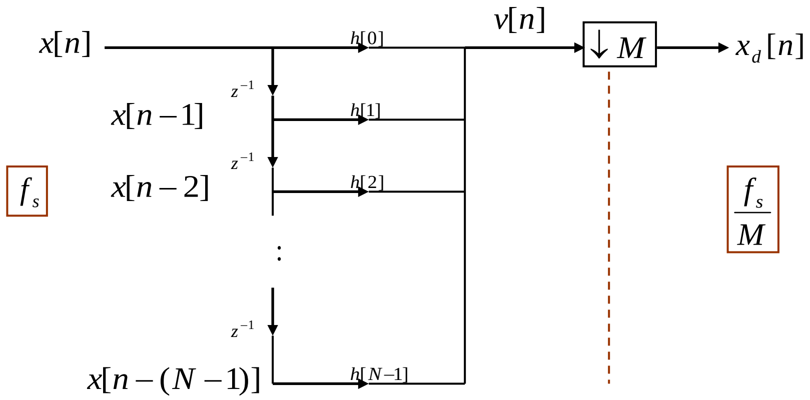
$\longrightarrow x_d[n]$



$\longrightarrow x_d[n+1]$

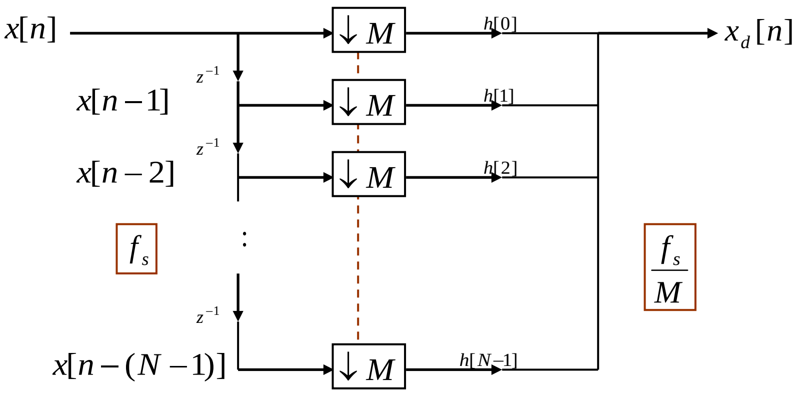
על מנת לקבל את הדגימה $x_d[n]$ עלינו לבצע 4 הכפלות ו-3 חיבורים. נשים לב שלצורך החישוב אנו זקוקים לכל הדגימות של $x[n]$, אלא שכל פעם אנו משתמשים רק בדגימות שיתנו לנו את הדגימה הרצויה. למעשה אנו יוצרים מספר קטן פי M של דגימות. אמנם הדגימות של $x[n]$ נכנסות למערכת בקצב f_s, אלא שנשים שעון (Counter) שיספור עד M, ויבצע את פעולות ההכפלה והחיבור כל M פולסים של שעון, כך שדגימות המוצא יצאו בקצב של f_s/M.

<u>הסבר טופולוגי:</u> תרשים מימוש פעולת הסינון + הדצימציה בשיטה הלא-יעילה:



נשים לב כי הפעולות האריתמטיות מתבצעות בקצב המהיר f_s, ומתקבלות דגימות $v[n]$ שמיד נזרקות על ידי פעולת הורדת הקצב.

מימוש המסנן באופן היעיל:



בענף העליון נכנסות הדגימות: $x[0], x[M], x[2M], \ldots$

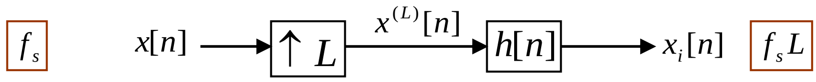
בענף השני נכנסות הדגימות: $x[1], x[M+1], x[2M+1], \ldots$

בענף התחתון נכנסות הדגימות: $x[M-1], x[2M-1], x[3M-1], \ldots$

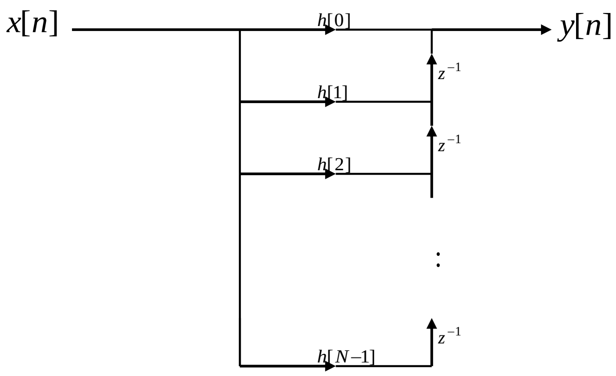
כאן הפעולות האריתמטיות מתבצעות בקצב הנמוך: f_s/M

17.11.2011   הרצאה 3

<u>מימוש יעיל של העלאת קצב + אינטרפולציה</u>



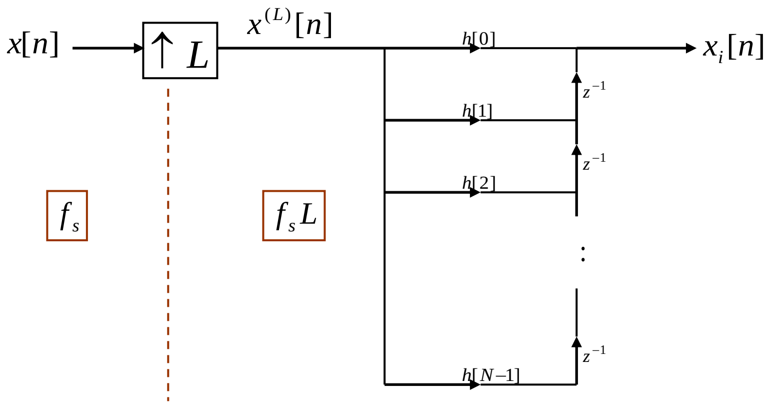
נשים לב שגם כאן פעולת הסינון מתבצעת בקצב המהיר. נזכור שהורדת קצב והעלאת קצב אינם פעולות הקבועות בזמן (Time-Invariant) משום שכל פעם אנו לוקחים דגימות אחרות.
על מנת לממש את פעולת העלאת הקצב + הסינון באופן יעיל, נשתמש בעובדה שלאחר העלאת הקצב יש $L-1$ אפסים בין כל 2 דגימות. הכפלה ב-0 היא בזבוז חומרה, לכן נממש זאת בצורה אחרת.
לצורך כך נראה מימוש אחר של מסנן FIR באורך N:



מוצא המסנן יהיה: $y[n]=x[n]h[0]+x[n-1]h[1]+x[n-2]h[2]+\ldots+x[n-(N-1)]h[N-1]$

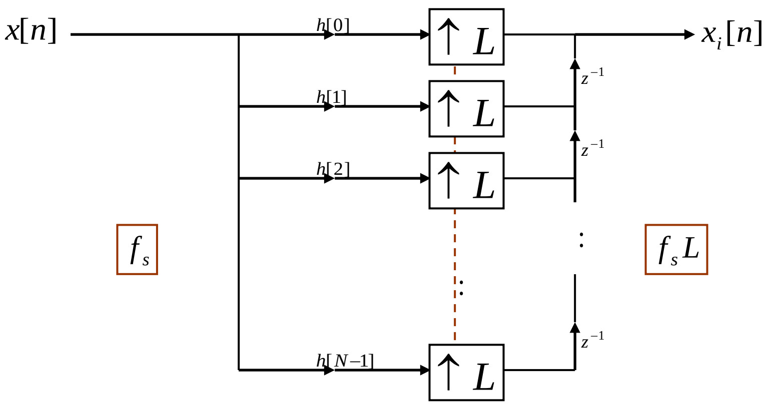
$$=\sum_{k=0}^{N-1}h[k]x[n-k]=x[n]*h[n]$$

מימוש ישיר ולא יעיל של העלאת קצב וסינון:



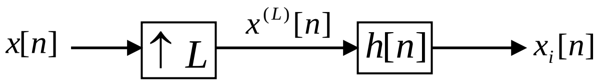
המימוש הישיר לא יעיל משום שפעולת הסינון מתבצעת בקצב הגבוה, כלומר: ההכפלות מתבצעות בקצב f_sL. יש כאן בזבוז משום שב-$x^{(L)}[n]$ יש הרבה אפסים ופעולת כפל ב-0 היא בזבוז חומרה. לסיכום: במימוש הישיר יש $N\cdot(Lf_s)$ פעולות כפל ליחידת זמן.

מימוש יעיל של העלאת קצב + סינון:



במימוש זה פעולות הכפל מתבצעות בקצב האיטי, כלומר: ישנם $N \cdot f_s$ פעולות כפל ליחידת זמן, ופעולות החיבור מתבצעות בקצב המהיר, אלא שבגלל שפעולת הסכום מתבצעת פעם ב-L דגימות כי רק אז יש דגימה שונה מ-0 , לכן מספר פעולות החיבור המשמעותיות הוא $\frac{N}{L}$, כיון שפעולות אלו מתבצעות בקצב המהיר Lf_s, לכן קצב הפעולות המשמעותיות הוא: $\frac{N}{L} \cdot Lf_s = N \cdot f_s$.

<u>הסבר אנליטי:</u>



$$x^{(L)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{L}] & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \end{cases}$$

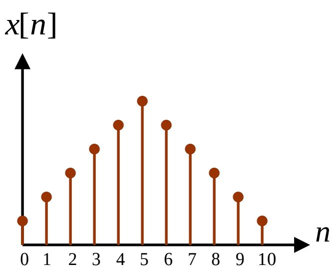
$$x_i[n] = x^{(L)}[n] * h[n] = \sum_k x^{(L)}[k]h[n-k]$$

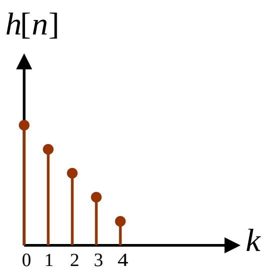
נבצע חילוף משתנה: $k = rL$. אנו משאירים רק את הדגימות $k = rL$, כי אנו יודעים שאלו הדגימות השונות מ-0. את כל שאר הדגימות אנו זורקים, אבל אנו יודעים שהם שווה 0, ולכן תוצאת הסכימה נשארת אותו הדבר.

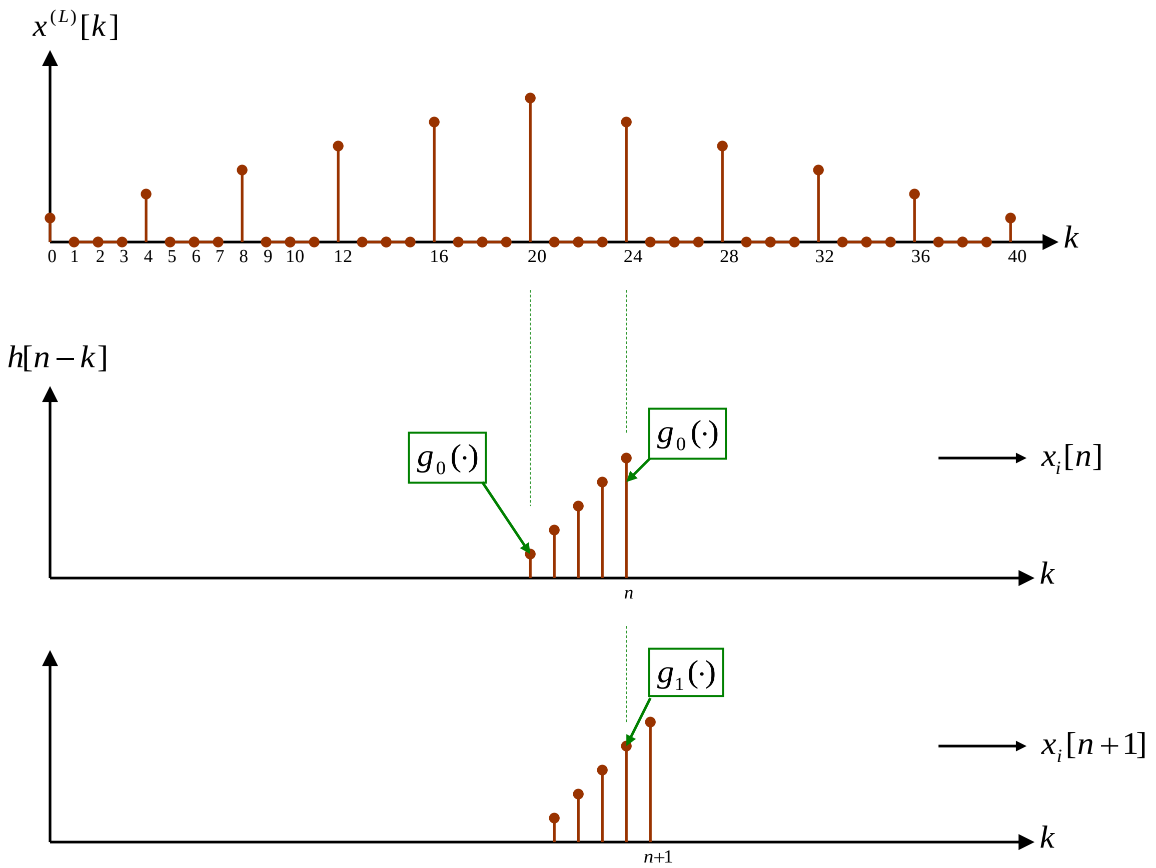
$$= \sum_r x^{(L)}[rL]h[n-rL] = \sum_r x[r]h[n-rL]$$

כלומר: כדי ליצור דגימה ספציפית של $x_i[n]$ לא צריך את כל הדגימות של המסנן, אלא משתמשים רק בחלק מדגימות המסנן.

דוגמא: עבור $N = 5 \ , \ L = 4$







ביצוע הקונבולוציה נעשה על ידי הכפלה וסיכום. כדי ליצור את הדגימה $x_i[n]$ נסמן את המקדמים שבשימוש (שלא נכפלים ב-0) בירוק.

נשים לב שאנו משתמשים בכל פעם בדגימות אחרות של המסנן על מנת ליצור דגימה של $x_i[n]$.

נגדיר את חלקי המסנן שבו אנו משתמשים: $g_r[n]=h[nL+r]$

$g_0[n]=h[nL]$

$g_1[n]=h[nL+1]$

:

$g_L[n]=h[nL+L]=h[(n+1)L]=h[nL]=g_0[n]$

בסה"כ משתמשים בכל מקדמי המסנן, אלא שכדי ליצור דגימה במוצא צריך בערך $\frac{N}{L}$ דגימות של המסנן.

הדגימות במוצא נעשות בקצב של $L\cdot f_s$, אבל כיון שכדי ליצור כל דגימה צריך רק $\frac{N}{L}$ פעולות כפל, נקבל כי סה"כ הפעולות:

$$\frac{N}{L}\cdot(L\cdot f_s)=N\cdot f_s$$

<u>הסבר אנליטי נוסף:</u> $x_i[n]=\sum_r x[r]h[n-rL]$

נבצע חילוף משתנה מ- r ל- j: $r=\lfloor\frac{n}{L}\rfloor-j$

עבור $n=0,1,\dots,L-1$ נקבל: $\lfloor\frac{n}{L}\rfloor=0$, ולכן: $r=-j$

עבור $n=L,L+1,\dots,2L-1$ נקבל: $\lfloor\frac{n}{L}\rfloor=1$, ולכן: $r=1-j$

נקבל: $x_i[n]=\sum_j x[\lfloor\frac{n}{L}\rfloor-j]h[n-L\lfloor\frac{n}{L}\rfloor+Lj]$

נשים לב כי: $n-L\lfloor \frac{n}{L}\rfloor = n(\mathrm{mod})\,L = n\oplus L$

עבור $n=0,1,\ldots,L-1$ נקבל: $\lfloor \frac{n}{L}\rfloor=0$, ולכן: $n-L\lfloor\frac{n}{L}\rfloor = n$

עבור $n=L,L+1,\ldots,2L-1$ נקבל: $\lfloor\frac{n}{L}\rfloor=1$, ולכן: $n-L\lfloor\frac{n}{L}\rfloor=n-L$

כלומר: אנו מקבלים בכל פעם את השארית מהחלוקה $\frac{n}{L}$.

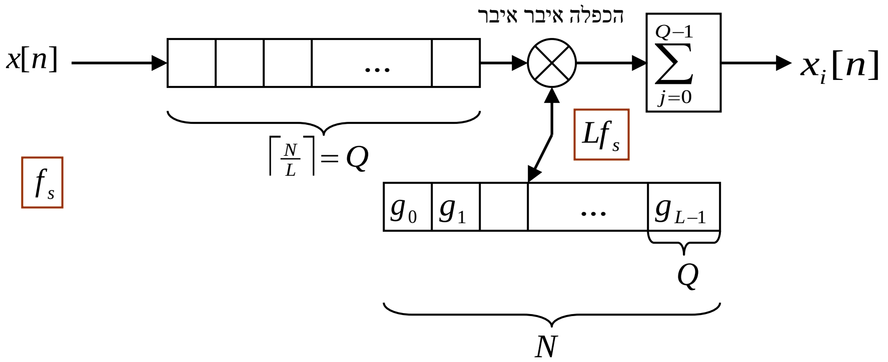
ולכן:
$$x_i[n]=\sum_j x[\lfloor\tfrac{n}{L}\rfloor - j]h[Lj+n\oplus L]$$

נגדיר: $g_n[j]=h[jL+n\oplus L]$, ונקבל:
$$x_i[n]=\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{N}{L}\rfloor-1} g_n[j]x[\lfloor\tfrac{n}{L}\rfloor - j]$$

<u>הערות:</u>

- אם $\frac{N}{L}$ אינו מספר שלם, יש לרפד באפסים את המסנן כך שזה יהיה מספר שלם.
- אורך המסנן $g_n[j]$ קצר (בערך) פי L
- עבור כל דגימת מוצא $x_i[n]$ משתמשים בתת מסנן אחר של $h[n]$
- סה"כ קיימים L תתי מסננים.

קיבלנו כי על מנת לקבל דגימה אחת של $x_i[n]$ עלינו לממש פעולת קונבולוציה של $g_n[\cdot]$ עם $x[\lfloor\frac{n}{L}\rfloor]$.
נממש זאת על ידי ציור:



לחוצץ (Shift-Register) שאליו נכניס את הדגימות של $x[n]$ יש $\frac{N}{L}$ מקומות. לדוגמא: אם $L=10$, $N=98$ אזי: $Q=\lceil\frac{N}{L}\rceil=100$. בחוצץ נשמרים הערכים שאותם יש להכפיל במסנן $g_r(\cdot)$ על מנת לקבל דגימה במוצא.

כיון שבכל פעם יש להכפיל במסנן $g_r(\cdot)$ אחר עלינו לממש בורר ומפסק שיחבר אותנו עם המסנן המתאים.

נשים לב שמבחינת המוצא L פעמים תכולת החוצץ זהה, ורק הבורר משתמש ב- $g_r(\cdot)$ שונה על מנת ליצור דגימה חדשה. רק פעם ב- L פעמים נכנסת דגימה חדשה של $x[n]$ ותכולת החוצץ משתנה.

לסיכום:, על מנת ליצור דגימה במוצא צריך:
$$Q\cdot(L\cdot f_s)=\tfrac{N}{L}\cdot(L\cdot f_s)=N\cdot f_s$$

מסנני Poly-Phase

נדון במסננים שהגדרנו, ונגדיר אותם באופן אחר: $p_r[n] = h[nL + r] \qquad r = 0,1,..., L-1$

$P_r[n]$ הוא הזזה של מסנן האינטרפולציה $h[n]$ ב- r ודצימציה שלו פי L, לפיכך:

$$h[n] \xrightarrow{DTFT} H\left(e^{j\omega}\right)$$

$$h[n+r] \xrightarrow{DTFT} e^{j\omega r} H\left(e^{j\omega}\right)$$

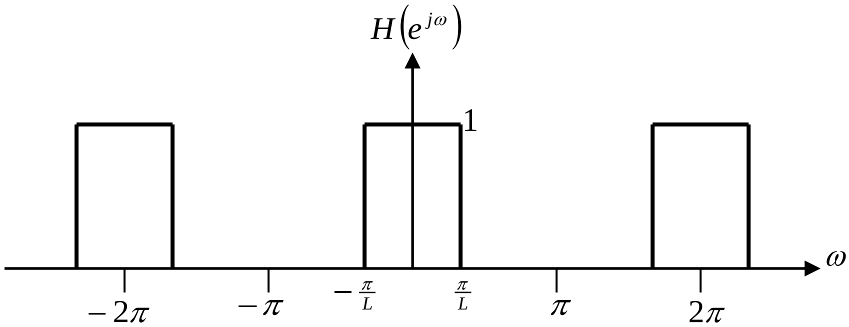
$$h[nL] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} H\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{L}}\right)$$

$$p_r[n] \xrightarrow{DTFT} P_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} e^{j\frac{\omega-2\pi k}{L}r} H\left(e^{j\frac{\omega-2\pi k}{L}}\right)$$

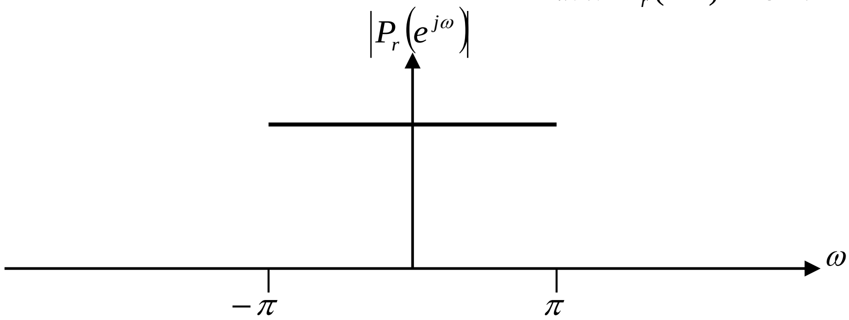
ומוצא המסנן הוא:

$$x_i[n] = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N}{L} \rfloor - 1} p_n[j] x[\lfloor \tfrac{n}{L} \rfloor - j]$$

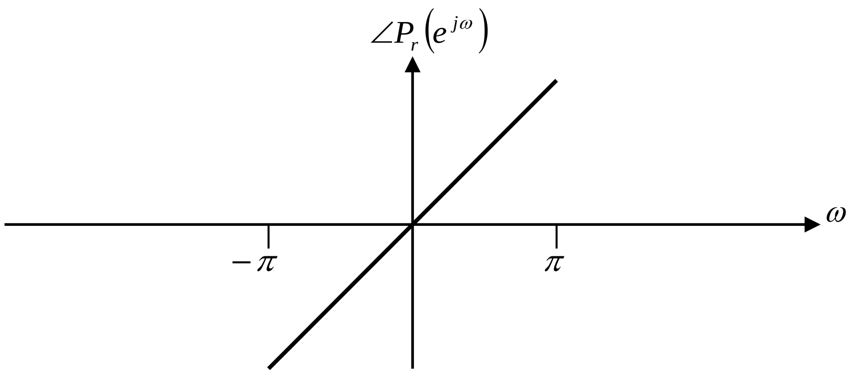
ראינו שמסנן אינטרפולציה אידיאלי הוא LPF עם תדר קטעון $\frac{\pi}{L}$. דוגמא עבור $L=3$:



הערך המוחלט של מסנני $P_r(e^{j\omega})$ יהיה:



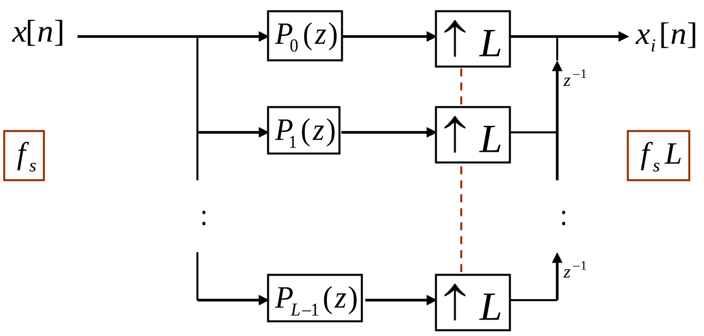
כלומר: כל המסננים יהיו $All-Pass$ בעלי ערך מוחלט קבוע לכל התדרים, אבל הפאזה שלהם תהיה שונה:



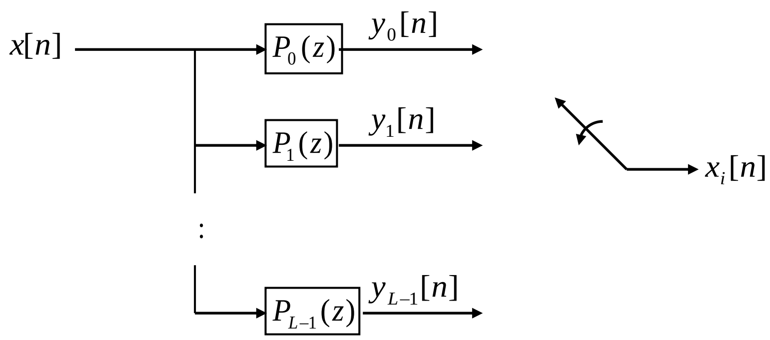
שיפוע הפאזה של מסנן Poly-phase מסדר r הוא: $\frac{r}{L}$.
לכאורה יש כאן סתירה שהרי על מנת שהמסנן יהיה בעל פאזה ליניארית רציפה עלינו לדרוש שהשיפוע $\frac{r}{L}$ יהיה שלם או שלם וחצי. אלא במקרה שלנו המסנן $h[n]$ הוא מסנן LPF אידיאלי, כלומר: sinc אינסופי בזמן.
אם נגדיר מסנן סופי בזמן על ידי הכפלה בחלון, נקבל גליות בתדר, מה שיגרום לכך ש- $\left|P_r(e^{j\omega})\right|$ לא יהיה בדיוק All-Pass, ובקצוות של $\angle P_r(e^{j\omega})$ נקבל שיפוע שונה מבשאר המקומות.
הרכבת המסנן $h[n]$ מתוך המסננים $p_r[n]$ נבצע על ידי ריווח באפסים של $p_r[n]$ והזזה, כך שנקבל:

$$H(z)=\sum_{r=0}^{L-1} p_r(z^L)z^{-r}$$

z^{-r} - מבצע הזזה בזמן ב- r למסנן.
$p_r(z^L)$ - מבצע ריווח בזמן פי L.
מימוש של פעולת העלאת הקצב + האינטרפולציה בעזרת מסנני Poly-Phase:

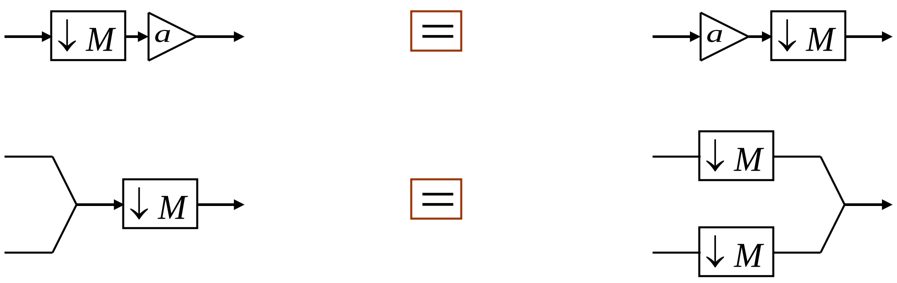


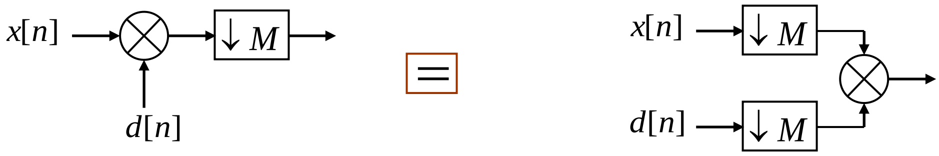
בצורה יותר סכמטית ניתן לראות זאת בעזרת הדיאגרמה הבאה:



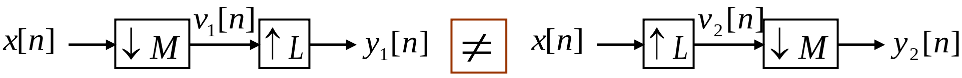
למעשה מתבצעת לאחר המעבר במסננים $P_r(z)$ פעולת שזירה של המקדמים, כלומר: המפסק בוחר בכל פעם את הדגימה השונה מ-0 ומוציא אותה החוצה.

<u>חילופיות של רכיבים</u>





נוכיח כי החלפה של מעלה קצב ומוריד קצב נותנת מוצא שקול אם ורק אם L, M זרים, כלומר: אין להם גורמי חילוק משותפים, והמחלק המשותף הגדול ביותר שלהם הוא 1. לדוגמא: 2,3.

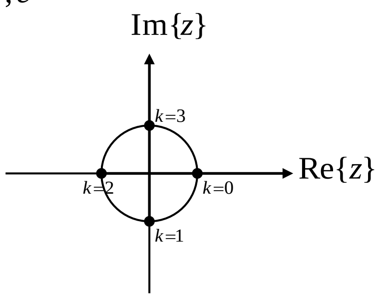


הוכחה:

$$V_1(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(z^{\frac{1}{M}}w_M^{-k}) \qquad Y_1(z)=V_1(z^L)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(z^{\frac{L}{M}}w_M^{-k})$$

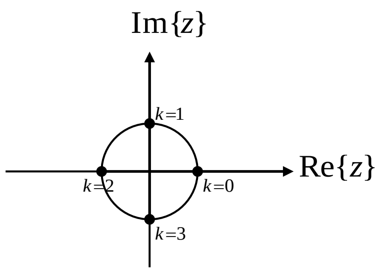
$$V_2(z)=x(z^L) \qquad Y_2(z)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}V_2(z^{\frac{1}{M}}w_M^{-k})=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(z^{\frac{L}{M}}w_M^{-kL})$$

דוגמא: עבור $M=4$ נקבל: $w_M^{-k}=e^{-j\frac{2\pi}{M}k}=1,e^{-j\frac{\pi}{2}},e^{-j\pi},e^{-j\frac{3\pi}{2}}$

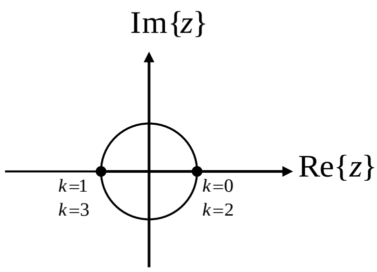


כעת נבדוק עבור 2 מקרים:

$$L=3: \quad w_M^{-kL}=e^{-j\frac{2\pi}{M}kL}=1,e^{-j\frac{3\pi}{2}},e^{-j3\pi},e^{-j\frac{9\pi}{2}}$$



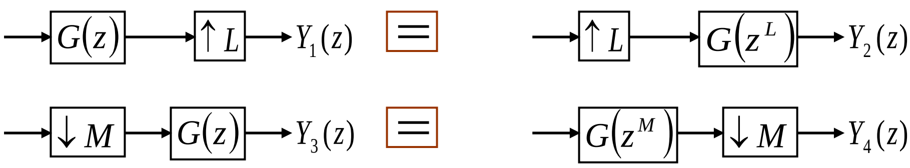
$$L=2: \quad w_M^{-kL}=e^{-j\frac{2\pi}{M}kL}=1,e^{-j\pi},1,e^{-j3\pi}$$



קיבלנו שאם M, L זרים אזי נקבל את אותן הנקודות (אמנם בסדר שונה, אבל בגלל הסכימה נקבל אותה תוצאה), ואם M, L אינם זרים נאבד חלק מהנקודות.

<u>**זהויות אצילות – Noble-Identities**</u>

עבור מערכת $G(z)$ רציונלית (מנה של 2 פולינומים) נקבל:



הוכחה עבור העלאת קצב:

$$Y_2(z)=\left[X(z)\right]\uparrow L\cdot G(z^L)=X(z^L)G(z^L)=\left[X(z)G(z)\right]\uparrow L=Y_1(z)$$

הוכחה עבור הורדת קצב:

$$Y_4(z)=\left[X(z)G(z^M)\right]\downarrow M=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(z^{\frac{1}{M}}w_M^{-k}\right)G\left((z^{\frac{1}{M}}w_M^{-k})^M\right)$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X\left(z^{\frac{1}{M}}w_M^{-k}\right)\cdot G(z)=\left[X(z)\right]\downarrow M\cdot G(z)=Y_3(z)$$

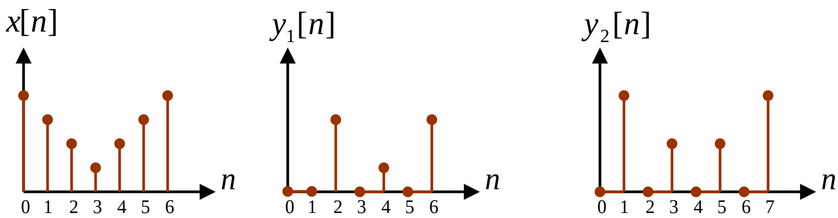
נראה דוגמא עבור מערכת $G(z)$ שאינה רציונלית הזהות אינה מתקיימת:

$$x[n]\rightarrow\boxed{z^{-1}}\rightarrow\boxed{\downarrow 2}\rightarrow\boxed{\uparrow 2}\rightarrow y_1[n]$$

על פי הזהות נקבל: $\rightarrow\boxed{\downarrow 2}\rightarrow\boxed{z^{-\frac{1}{2}}}\rightarrow\boxed{\uparrow 2}\rightarrow$

על פי הזהות נקבל: $x[n]\rightarrow\boxed{\downarrow 2}\rightarrow\boxed{\uparrow 2}\rightarrow\boxed{z^{-1}}\rightarrow y_2[n]$

עבור $x[n]$ הבא נקבל:



ניתן לראות שהאותות המתקבלים שונים. למעשה ב-$y_1[n]$ מקבלים את הדגימות האי-זוגיות של $x[n]$ מוזזות ועם אפסים באמצע, וב-$y_2[n]$ מקבלים את הדגימות הזוגיות של $x[n]$, מוזזות ועם אפסים באמצע.

אי-השיוויון מתקבל משום שהמערכת z^{-1} אינה רציונלית לאורך כל תחום השינויים.

שימוש בזהויות אצילות עבור דצימציה

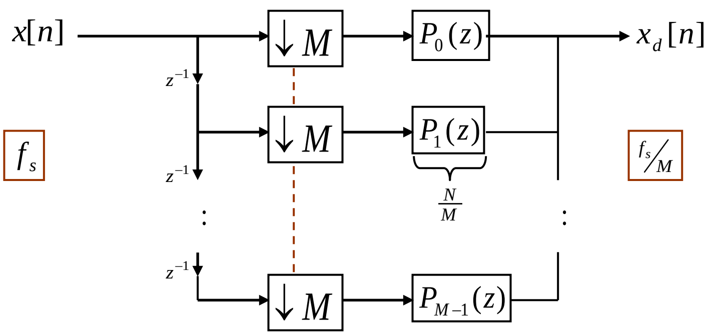
$$\boxed{f_s}\qquad x[n]\rightarrow\underset{\text{Anti-Aliasing}}{\boxed{H(z)}}\rightarrow\boxed{\downarrow M}\rightarrow x_d[n]\qquad\boxed{f_s/M}$$

נקבל עבור מסנן $h[n]$ באורך N:

$$H(z)=\sum_{r=0}^{M-1}p_r(z^M)z^{-r}$$

$$X_d(z)=\left[x(z)H(z)\right]\downarrow M=\left[x(z)\cdot\sum_{r=0}^{M-1}p_r(z^M)z^{-r}\right]\downarrow M$$

$$=\sum_{r=0}^{M-1}\left[p_r(z^M)z^{-r}x(z)\right]\downarrow M=\sum_{r=0}^{M-1}\left[z^{-r}x(z)\right]\downarrow M\cdot p_r(z)$$

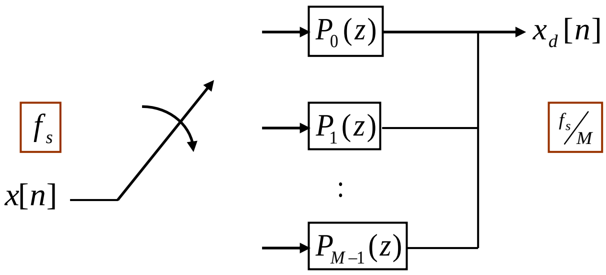


הדיאגרמה לעיל היא מימוש Poly-Phase של פעולת הסינון + הדצימציה. מספר הפעולות הכולל:

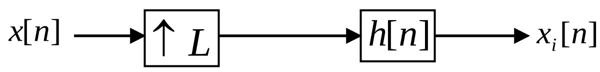
$$\frac{f_s}{M}\cdot M\cdot\frac{N}{M}=\frac{N}{M}f_s$$

$\frac{f_s}{M}$ - קצב המוצא. M - מס' הענפים. $\frac{N}{M}$ - מספר הפעולות בכל ענף (אורך מסנן $P_r(z)$)

ניתן לבנות מערכת שקולה במקום קו ההשהייה ומוריד הקצב:



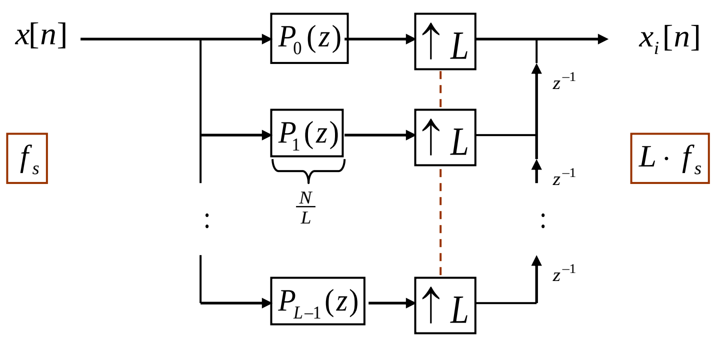
שימוש בזהויות אצילות עבור אינטרפולציה



נקבל עבור מסנן $h[n]$ באורך N: $$H(z)=\sum_{r=0}^{L-1}p_r(z^L)z^{-r}$$

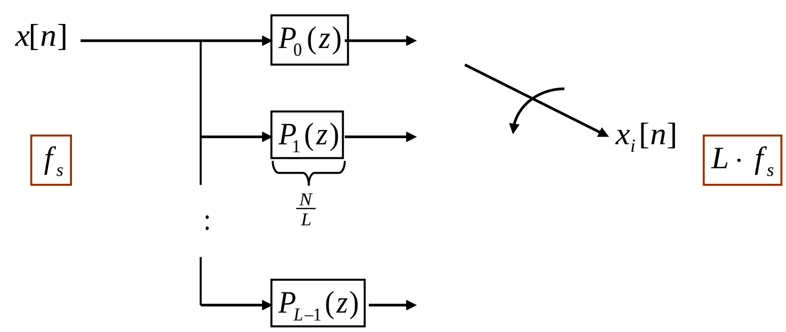
$$x_i[n]=[X(z)]\uparrow L\cdot H(z)=[X(z)]\uparrow L\cdot\sum_{r=0}^{L-1}p_r(z^L)z^{-r}=\sum_{r=0}^{L-1}[X(z)]\uparrow L\cdot p_r(z^L)z^{-r}$$

$$=\sum_{r=0}^{L-1}[X(z)p_r(z)]\uparrow L\cdot z^{-r}$$



למעשה לא מתבצעת כאן פעולת סכימה כי לאחר העלאת קצב פי L והזזה, נקבל בכל ענף דגימה שונה מ-0 רק פעם ב-L דגימות, וכיון שיש כאן הזזה בזמן כל דגימה תצא החוצה בתור שלה, לפיכך יש כאן פעולת שזירה.

נשים לב שאת פעולת הכפל אנו מבצעים בקצב הנמוך. למעשה אנו פורסים את המסנן $h[n]$ ל-L וקטורים. ניתן גם כאן לבנות מערכת שקולה שתממש את פעולת השזירה:

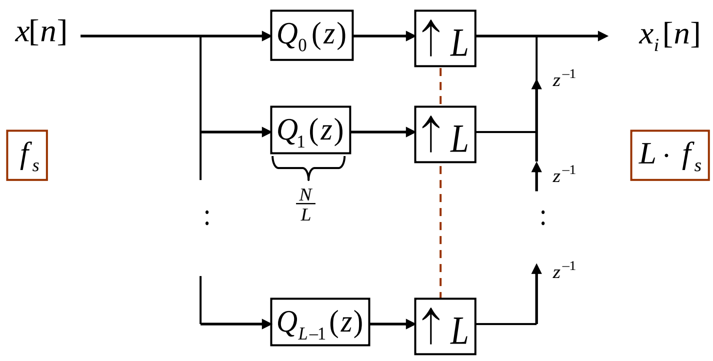


הערה: במקרים רבים נרצה להפוך את כיוון המתג (כלומר: את כיוון קו ההשהייה) על ידי הגדרת מסנני Poly-Phase מסוג II:

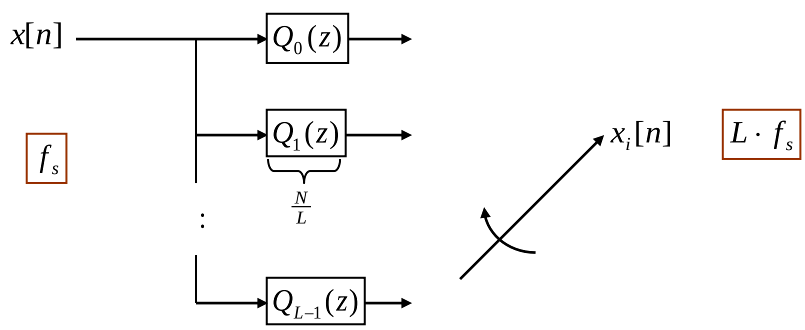
$$Q_r(z) = P_{L-1-r}(z)$$

$$H(z) = \sum_{r=0}^{L-1} z^{-(L-1-r)} Q_r(z^L)$$

והמימוש יראה באופן הבא:



והמערכת השקולה:



1.12.2011 הרצאה 5

פירוק Poly-phase של מסנני IIR

נראה כיצד לממש מסנני IIR על ידי הגדרת מסנני Poly-Phase, כזכור בשבוע שעבר הגדרנו:

$$p_r[n] = h[nL + r] \qquad r = 0,1,..., L-1$$

$$H(z) = \sum_{r=0}^{L-1} p_r(z^L)z^{-r}$$

דוגמא: נמצא מסנני Poly-Phase מסדר $L = 2$ של המסנן:

$$h[n] = \alpha^n u[n] \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

זוהי מערכת אינסופית, דועכת בזמן, ויציבה עבור $|\alpha| < 1$. על מנת למצוא פירוק Poly-Phase של המערכת עלינו להעביר את $H(z)$ לצורה הבאה:

$$H(z) = \sum_{r=0}^{L-1} P_r(z^L)z^{-r} = \sum_{r=0}^{1} P_r(z^2)z^{-r} = P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)$$

נגדיר: $x \equiv \alpha z^{-1}$, וניעזר בזהות:

$$1 - x = \frac{1-x^2}{1+x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{1-x^2}$$

ולכן נקבל:

$$H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1+\alpha z^{-1}}{1-\alpha^2 z^{-2}} = \frac{1}{1-\alpha^2 z^{-2}} + z^{-1}\frac{\alpha}{1-\alpha^2 z^{-2}}$$

לפיכך:

$$P_0(z^2) = \frac{1}{1-\alpha^2 z^{-2}} \qquad , \qquad P_1(z^2) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2 z^{-2}}$$

$$P_0(z) = \frac{1}{1-\alpha^2 z^{-1}} \qquad , \qquad P_1(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2 z^{-1}}$$

במישור הזמן:

$$p_0[n] = h[2n] = \alpha^{2n}u[2n] = \alpha^{2n}u[n]$$

$$p_1[n] = h[2n+1] = \alpha^{2n+1}u[2n+1] = \alpha^{2n+1}u[n]$$

מימוש המסנן $H(z)$ נעשה באמצעות משוב:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

$$Y(z)\cdot[1-\alpha z^{-1}] = X(z) \xleftrightarrow{Z^{-1}} y[n] - \alpha\cdot y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] = \alpha\cdot y[n-1] + x[n]$$

בהינתן תנאי התחלה של $y[-1]$. האינסופיות של המסנן מתבטאת בדגימת המוצא $y[n-1]$.

כלומר: זוהי מערכת רקורסיבית, בעלת אלמנט זיכרון אחד.

מספר הפעולות לחישוב דגימת מוצא:

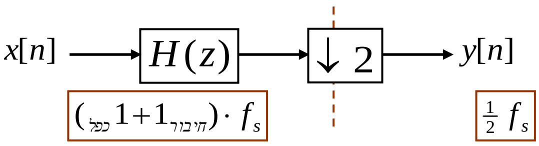
- הכפלה ב- α
- חיבור של $\alpha\cdot y[n-1]$ עם $x[n]$

באופן כללי, הצורה הכללית של מערכת IIR היא:

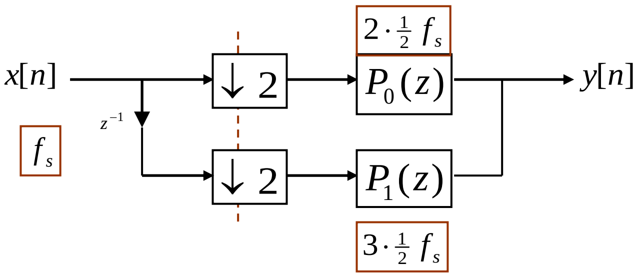
$$y[n] = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{q} \beta_k x[n-k]$$

מספר אלמנטי הזיכרון הוא $\max\{p,q\}$.

מימוש המערכת באופן ישיר:



מימוש המערכת בעזרת Poly-Phase:



עבור מסנן $P_0(z)$ נקבל:

$$P_0(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\alpha^2z^{-1}}$$

$$y[n]=\alpha^2y[n-1]+x[n]$$

- הכפלה ב-α^2 (ניתן להגדיר $\beta=\alpha^2$ כך שנבצע רק פעם אחת הכפלה $\alpha\cdot\alpha$, ואין צורך להכפיל בכל חישוב מחדש אלא רק פעם אחת)
- חיבור של $\alpha^2\cdot y[n-1]$ עם $x[n]$

עבור מסנן $P_1(z)$ נקבל:

$$P_1(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\alpha}{1-\alpha^2z^{-1}}$$

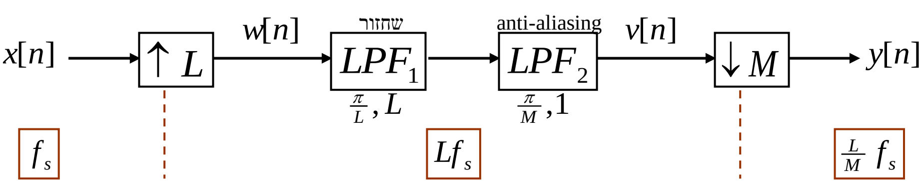
$$y[n]=\alpha^2y[n-1]+\alpha\cdot x[n]$$

- 2 הכפלות: הכפלה של $y[n-1]$ ב-α^2, והכפלה של $x[n]$ ב- α
- חיבור של $\alpha^2\cdot y[n-1]$ עם $\alpha\cdot x[n]$

ניתן לראות שמימוש Poly-Phase לא מקטין את קצב הפעולות במערכת באופן ניכר (ולעיתים אף מגדיל אותו), זאת משום שמסנני ה-Poly-Phase הם IIR (אינסופיים) בעצמם ולכן אין כאן חיסכון אמיתי. למרות זאת בהרבה יישומים אין ברירה אלא להשתמש במימוש Poly-Phase מסיבות מערכתיות.

<u>מימוש יעיל של שינוי קצב דגימה ביחס רציונלי</u>

נרצה לממש מערכת שמשנה את קצב הדגימה פי $\frac{L}{M}$ (עבור L,M זרים):



כך שיתקיים: $y[n]=x(\frac{M}{L}nT_s)$, כאשר T_s הוא מחזור הדגימה של האות $x[n]$.

עבור L,M שאינם זרים - נצמצם את השבר עד למינימום ואז נשתמש במערכת.

עבור $L=kM$ או $M=kL$ לא נצטרך מערכת כזאת מסובכת, או שנצמצם את השבר אלא פשוט נשנה את קצב הדגימה פי $\frac{L}{M}$ (דצימציה או אינטרפולציה).

נשים לב שניתן לאחד את שני המסננים למסנן אחד, כאשר תדר הקטעון שלו יהיה המינימלי מבין $\frac{\pi}{L}$ ו- $\frac{\pi}{M}$, וההגבר שלו יהיה L, כלומר:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} L & |\omega| \le \min\{\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

הבעיה במימוש זה היא שהמסנן פועל בקצב $L \cdot f_s$ שהוא הקצב הכי גבוה במערכת.

בעזרת מימוש יעיל של מסנני FIR (כפי שלמדנו) ניתן להעביר את המסנן השקול לאחד הצדדים כך שנוכל לחסוך פי $\max\{L, M\}$.

כעת נראה כיצד נראה מימוש Poly-Phase של המערכת. נפתח:

בעמ' 11 (בהסבר האנליטי) ראינו כי לאחר מסנן השחזור: $v[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]h[n - rL]$

לאחר הורדת הקצב: $y[n] = v[nM] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]h[nM - rL]$

נבצע חילוף משתנה ($r \to m$): $r = \lfloor \frac{M}{L} n \rfloor - m$

עבור $n = 0,1,..., \frac{L}{M} - 1$ נקבל: $\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = 0$, ולכן: $r = -m$

עבור $n = \frac{L}{M}, \frac{L}{M} + 1,..., \frac{2L}{M} - 1$ נקבל: $\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = 1$, ולכן: $r = 1 - m$

נקבל: $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor - m]h[nM - L\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor + mL]$

עבור $n = 0,1,..., \frac{L}{M} - 1$ נקבל: $\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = 0$, ולכן: $nM - L\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = nM$

עבור $n = \frac{L}{M}, \frac{L}{M} + 1,..., \frac{2L}{M} - 1$ נקבל: $\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = 1$, ולכן: $nM - L\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = nM - L$

עבור $n = \frac{2L}{M}, \frac{2L}{M} + 1,..., \frac{3L}{M} - 1$ נקבל: $\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = 2$, ולכן: $nM - L\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = nM - 2L$

כלומר: $nM - L\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor = nM(\text{mod})\, L = nM \oplus L$

אנו מקבלים את השארית מהחלוקה $\frac{nM}{L}$. לפיכך: $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor - m]h[mL + nM \oplus L]$

נגדיר את מסנני ה-Poly-Phase על ידי: $p_{nM \oplus L}[m] = h[mL + nM \oplus L]$

לדוגמא: עבור $L = 2$, $M = 3$ נקבל: $p_{3n \oplus 2}[m] = h[2m + 3n \oplus 2]$

בסה"כ (בגלל פעולת ה-mod) יש L מסננים. לסיכום נקבל: $y[n] = \sum_{m=0}^{Q-1} p_{nM \oplus L}[m] \cdot x[\lfloor \frac{M}{L} n \rfloor - m]$

לדוגמא: עבור $L = 2$, $M = 3$ נקבל: $y[n] = \sum_{m=0}^{Q-1} p_{3n \oplus 2}[m] \cdot x[\lfloor \frac{3}{2} n \rfloor - m]$

כאשר אם למסנן $h[n]$ יש N מקדמים (יש להניח כי $N >> \max\{L, M\}$ על מנת שנקבל מסנן יעיל), אזי כל מסנן Poly-Phase הוא בעל $Q = \lceil \frac{N}{L} \rceil$ מקדמים.

בסה"כ, מספר הפעולות ליח' זמן יהיה Q מכפלות בקצב $f_s \frac{L}{M}$ כלומר:

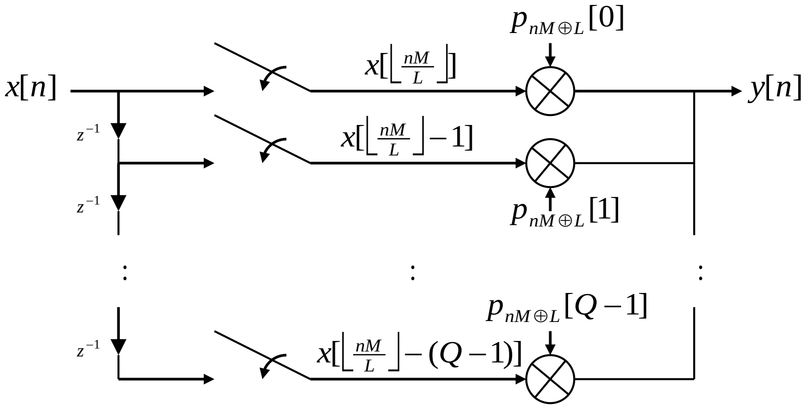
$$Q \cdot f_s \frac{L}{M} = \frac{N}{L} \cdot f_s \frac{L}{M} = \frac{N}{M} \cdot f_s$$

אם היינו מבצעים את פעולת הסינון בקצב המקורי היינו מקבלים:

$$N \cdot Lf_s$$

כלומר: על ידי מימוש Poly-phase חסכנו פי $L \cdot M$ פעולות.

תרשים מלבנים של מימוש Poly-Phase:



נשים לב כי הקצב שהדגימות נכנסות לחוצץ השמאלי הוא f_s ואילו הקצב שהדגימות נכנסות לחוצץ הימני הוא שונה.

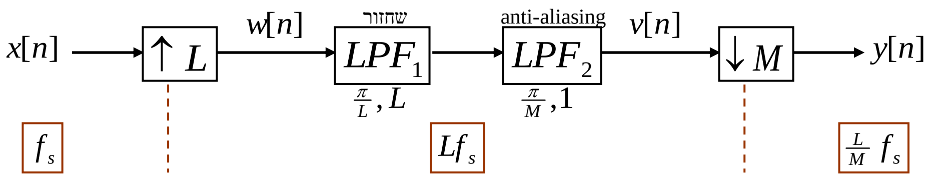
לדוגמא, עבור $M = 1$ נקבל כי רק פעם ב- L מחזורי שעון משתנה הערך $x[\lfloor \frac{nM}{L} \rfloor]$, וכן הערכים בשאר הענפים. לכן נממש מתג שיתחבר לחוצץ השמאלי לפי הקצב הדרוש.

נשים לב שמסנני ה-Poly-Phase משתנים לפי n, כלומר: עבור כל דגימה יש להכפיל במסננים אחרים.

הרצאה 6   8.12.2011

<u>שינוי קצב דגימה ביחס רציונלי</u>

בשבוע שעבר ראינו כיצד לממש שינוי קצב דגימה ביחס רציונלי, כלומר את המערכת:



כך שיתקיים: $y[n]=x(\frac{M}{L}nT_s)$

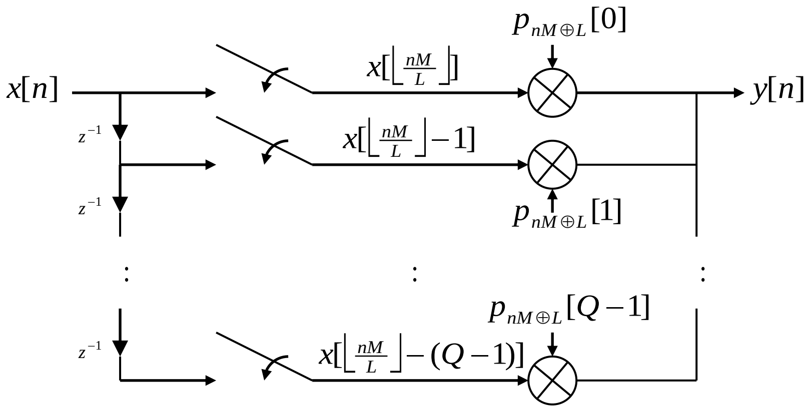
קיבלנו: $v[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]h[n-rL]$

$$y[n]=v[nM]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]h[nM-rL]$$

מימוש Poly-Phase של המערכת: $P_{nM\oplus L}[m]=h[mL+nM\oplus L]$

$$y[n]=\sum_{m=0}^{Q-1}p_{nM\oplus L}[m]\cdot x[\lfloor\tfrac{M}{L}n\rfloor-m]\qquad Q=\lceil\tfrac{N}{L}\rceil$$

כלומר: עבור כל רגע n יש קונבולוציה בין מסנן Poly-Phase ובין האות:



אורך החוצץ של האות הוא Q, כאורך מסנן ה-Poly-Phase.

<u>מקרים פרטיים:</u>

- עבור $M=1$ מקבלים רק העלאת קצב: $y[n]=\sum_{m=0}^{Q-1}p_{n\oplus L}[m]\cdot x[\lfloor\tfrac{n}{L}\rfloor-m]$

נשים לב ש-$x[\lfloor\frac{n}{L}\rfloor-m]$ זהה עבור $n=0,1,\ldots,L-1$, כלומר: במשך L ערכים תכולת החוצץ זהה.

- עבור $L=1$, נקבל: $Q=N$, כלומר: אורך ה-Poly-Phase הוא כאורך המסנן, למעשה אין כאן פירוק Poly-Phase אלא מעבר ישיר במסנן:

$$y[n]=\sum_{m=0}^{N-1}p_{nM\oplus 1}[m]\cdot x[\lfloor nM\rfloor-m]$$

נשים לב כי: $nM\oplus 1=0$ (כי שארית חלוקה של כל מספר ב-1 היא 0).

נשים לב כי: $\lfloor nM\rfloor=nM$ - הוא תמיד מספר שלם.

למעשה קיבלנו את אחת מנוסחאות הדצימציה.

- עבור $L=3\,,\,M=2$:

אינדקס המוצא - n	$\lfloor \frac{2}{3}n \rfloor$	מספר ה-Poly-Pahse - $2n\oplus 3$
0	0	0
1	0	2
2	1	1
3	2	0
4	2	2
5	3	1

נשים לב שכיון ש- $L>M$ אזי אנחנו "נתקעים" חלקית עם תכולת החוצץ (העמודה האמצעית) כי למעשה אנחנו מעלים קצב, עושים קצת יותר אינטרפולציה מאשר דצימציה.
כמו"כ נשים לב שסדר ה-Poly-Phase הוא לא כפי הסדר אלא 0,2,1.

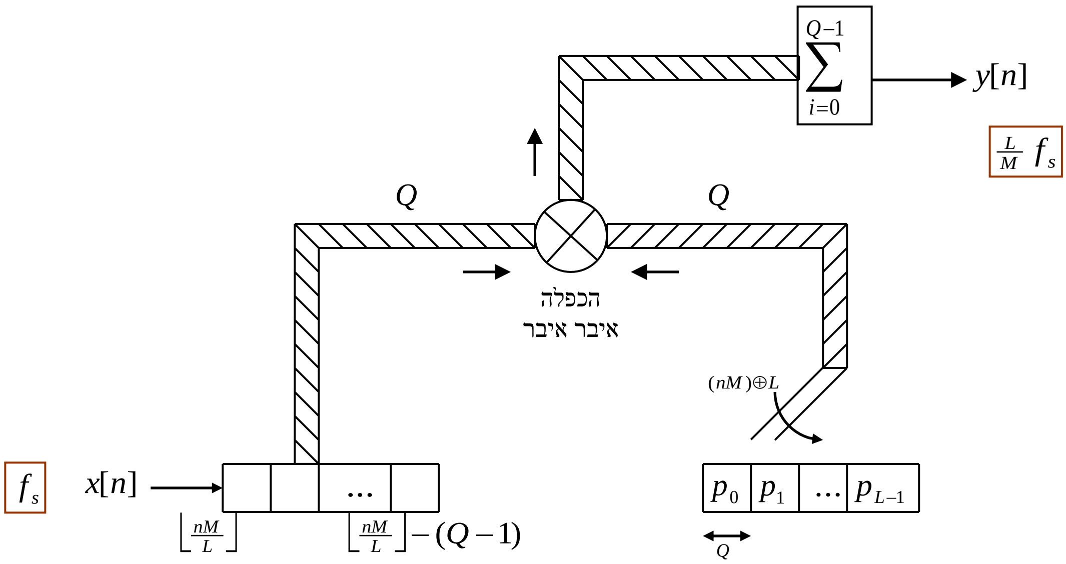
- עבור $L=2\,,\,M=3$:

אינדקס המוצא - n	$\lfloor \frac{3}{2}n \rfloor$	מספר ה-Poly-Pahse - $3n\oplus 2$
0	0	0
1	1	1
2	3	0
3	4	1
4	6	0
5	7	1

$$y[n]=\sum_{m=0}^{Q-1} p_{nM\oplus L}[m]\cdot x[\lfloor \tfrac{M}{L}n \rfloor - m] \qquad Q=\tfrac{N}{L}$$

נשים לב שכיון ש- $L<M$ אנחנו לעיתים מבצעים דילוג ולעיתים לא, כי כעת אנחנו עושים יותר דצימציה מאשר אינטרפולציה.

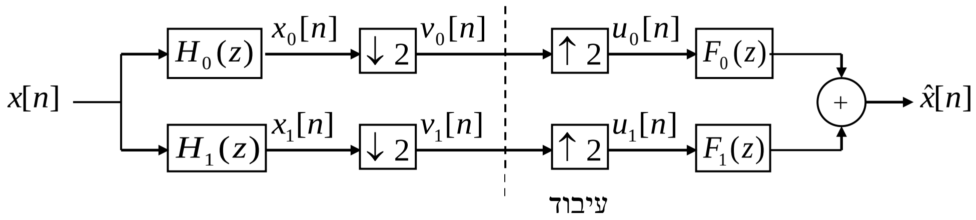
דיאגרמת מימוש נוספת של שינוי קצב דגימה ביחס רציונלי:



ראינו כי קצב החישוב הוא: $\frac{N}{M} f_s = Q\cdot\frac{L}{M}\cdot f_s$ ליחידת זמן.

<u>בנק מסננים</u>

נתחיל במקרה פרטי. בנק מסננים עם 2 ערוצים:



הרבה פעמים אנו רוצים להפעיל על האות כמה מסננים, לדוגמא: בשוויין (Eequalizer) לוקחים פסי תדר ספציפיים וכל אחד מהם מקבל הגבר אחר. לכן יש לפצל את האות לכמה ערוצים, שבכל אחד מהם יש חלק אחר של התדרים של האות, לעבד אותו, ולשחזר חזרה את האות בשלמותו. בנק מסננים מאפשר את העיבוד במערכת אחת, במקביל.

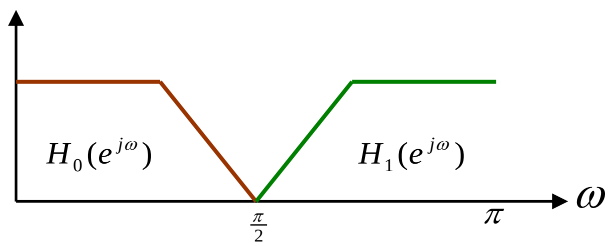
נניח כי $H_0(z)$ הוא מסנן LPF שאחראי על חיתוך החצי הנמוך של התדרים של $x[n]$, ואילו $H_1(z)$ הוא מסנן HPF שאחראי על חיתוך החצי הגבוה של התדרים של $x[n]$.

פיצלנו את האות לשני ערוצים. כעת נרצה למתוח את האות בציר התדר (על מנת שכל חצי יתפוס את כל תחום התדרים), כלומר: בכל ערוץ נוריד קצב פי 2. אנחנו עומדים בתנאי נייקוויסט לשחזור, משום שרוחב הסרט של האותות $x_i[n]$ קטן ל- $\frac{\pi}{2}$ לאחר הסינון כי המסננים חתכו אותו.

כעת מתבצעת בדר"כ פעולת העיבוד. בשלב זה נניח כי לא מתבצעת פעולת עיבוד, לפיכך לאחר העלאת הקצב פי 2 ומעבר במסנני השחזור $F_0(z), F_1(z)$ נדרוש: $\hat{x}[n] = x[n]$.

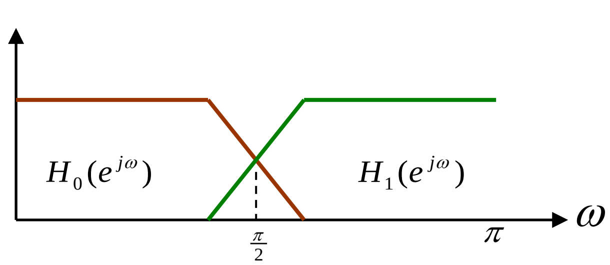
כיצד אמורים להיראות מסנני האנליזה (פירוק תדרי)?

אפשרות א: ללא חפיפה בין המסננים:



אפשרות זו לא טובה משום שאנו מאבדים חלק מפס התדרים, כך שלא נוכל לשחזר את האות.

אפשרות ב: עם חפיפה בין המסננים:



הבעיה באפשרות זו היא הדריכה של שני המסננים אחד על השני, כך שבכל ערוץ נקבל חלק מפס התדרים של הערוץ השני. כמו"כ לאחר הורדת הקצב פי 2, נקבל קיפול (Aliasing) משום שרוחב הסרט של האות בכל ערוץ לאחר המעבר במסנן גדול מ- $\frac{\pi}{2}$.

כעת ננתח אנליטית:

$$X_k(z) = X(z)H_k(z) \qquad k = 0,1$$

בהרצאה 1 ראינו כי לאחר הורדת קצב פי M מקבלים:

$$v_k[n] = x_k[nM]$$

$$V_k(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X_k(w_M^{-k} z^{\frac{1}{M}}) \qquad w_M = e^{j\frac{2\pi}{M}}$$

לכן עבור $M=2$ נקבל:

$$V_k(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} X_k(w_2^{-k} z^{\frac{1}{M}}) = \frac{1}{2}[X_k(z^{\frac{1}{2}}) + X_k(-z^{\frac{1}{2}})]$$

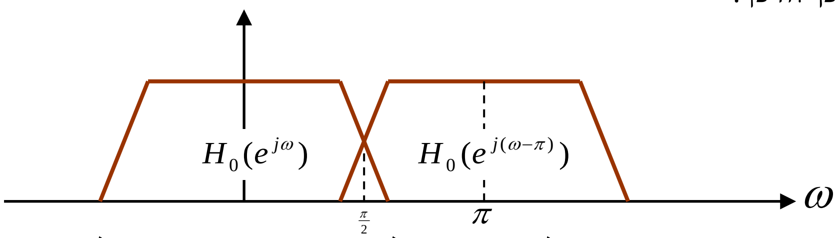
לאחר העלאת הקצב פי $M=2$ נקבל:

$$U_k(z) = V_k(z^2) = \tfrac{1}{2}[X_k(z) + X_k(-z)] = \tfrac{1}{2}[X(z)H_k(z) + X(-z)H_k(-z)]$$

נשים לב כי:

$$H_k(-z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H_k(-e^{j\omega}) = H_k(e^{-j\pi}e^{j\omega}) = H_k(e^{j(\omega-\pi)})$$

כלומר: $H_k(-z)$ הוא הזזה של $H_k(z)$ ב- π. המשמעות היא שאם $H_0(z)$ הוא LPF, אזי $H_0(-z)$ הוא HPF, וכן להיפך.



כלומר: בעקבות הורדת הקצב אנו מקבלים איבר קיפול, שמכניס בערוץ תדרים שלא אמורים להיות בו.
לאחר המעבר במסנני השחזור והחיבור בין 2 הענפים נקבל:

$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= U_0(z)F_0(z) + U_1(z)F_1(z)\\ &= \tfrac{1}{2}[X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z)]F_0(z) + \tfrac{1}{2}[X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z)]F_1(z)\\ &= \tfrac{1}{2}[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]X(z) + \tfrac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]X(-z)\end{aligned}$$

או ברישום מטריצי:

$$2\hat{X}(z) = \begin{bmatrix} X(z) & X(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \end{bmatrix}$$

נגדיר את איבר העיוות: $T(z) = \tfrac{1}{2}[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]$

נגדיר את איבר הקיפול: $A(z) = \tfrac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]$

למעשה אנו שולטים על 4 המסננים: $F_1(z)$, $F_0(z)$, $H_1(z)$, $H_0(z)$. אך עלינו לצמצם את חופש הבחירה.

על מנת לשחזר את האות בשלמותו נדרוש כי:

- איבר הקיפול יתאפס, כלומר: $A(z) = \tfrac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)] = 0$
- איבר העיוות יכלול רק הגבר והשהייה, כך שהאות לא יתעוות:

$$T(z) = \tfrac{1}{2}[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)] = c \cdot z^{-n_0}$$

על מנת לקיים את הדרישה עבור איבר הקיפול, ניתן לבחור:

$$\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$$

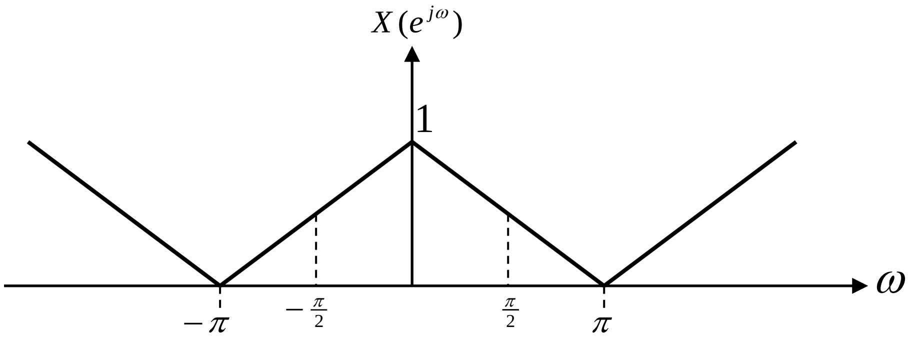
כך שיתקיים:

$$\begin{aligned}A(z) &= \tfrac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]\\ &= \tfrac{1}{2}[H_0(-z)H_1(-z) - H_1(-z)H_0(-z)] = 0\end{aligned}$$

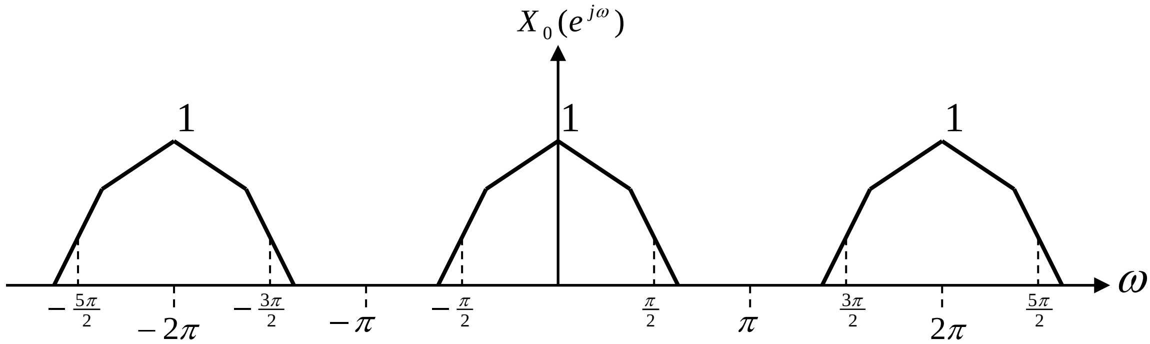
נשים לב כי אם בחרנו את $H_0(z)$ להיות LPF, אזי $F_1(z)$ הוא HPF, וכן אם $H_1(z)$ הוא HPF, אזי $F_0(z)$ הוא LPF.

המחשה גרפית

נניח כי $x[n]$ הוא אות המתקבל מדגימה בדיוק בתדר נייקוויסט (ולכן תופס את כל התדרים):

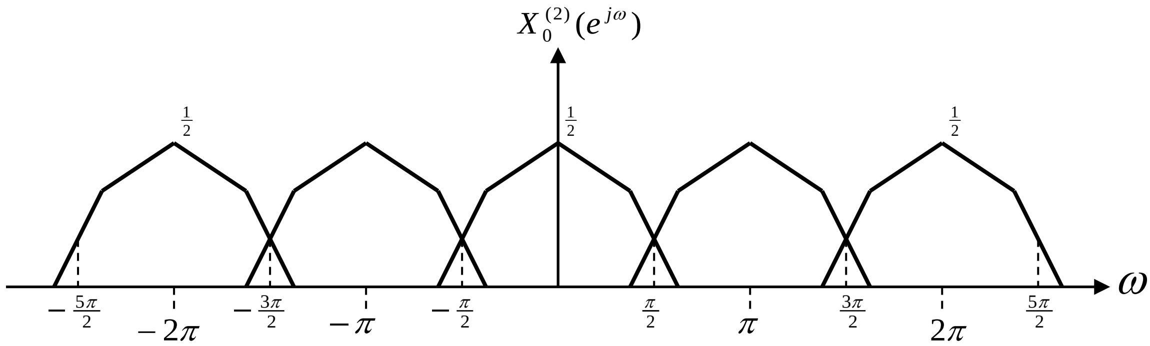


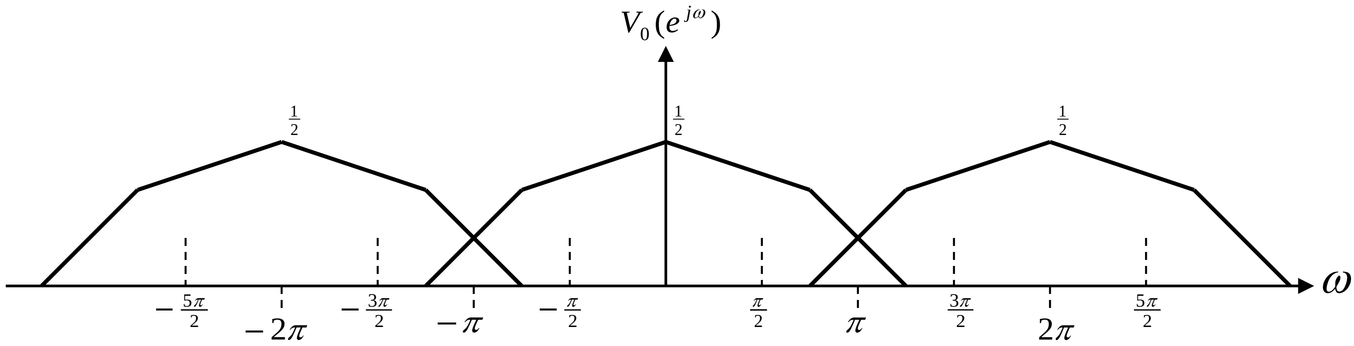
בענף העליון, נקבל אחרי המעבר ב-LPF:



הנקודה $\frac{\pi}{2}$ נמצאת באמצע הירידה ל-0.

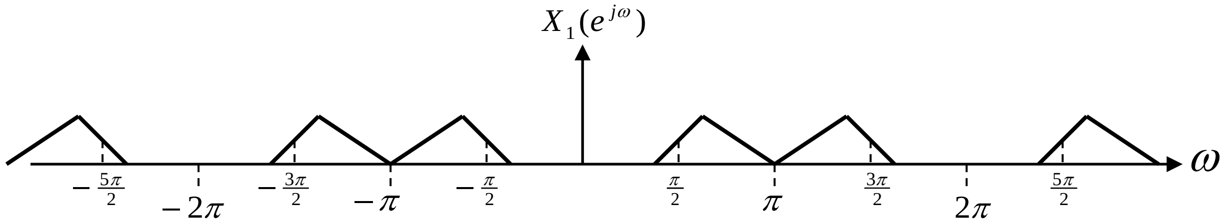
כעת נבצע הורדת קצב ב-2 בענף העליון ב-2 שלבים:



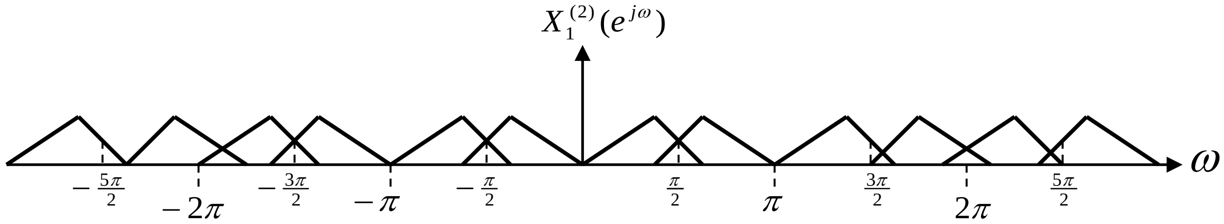


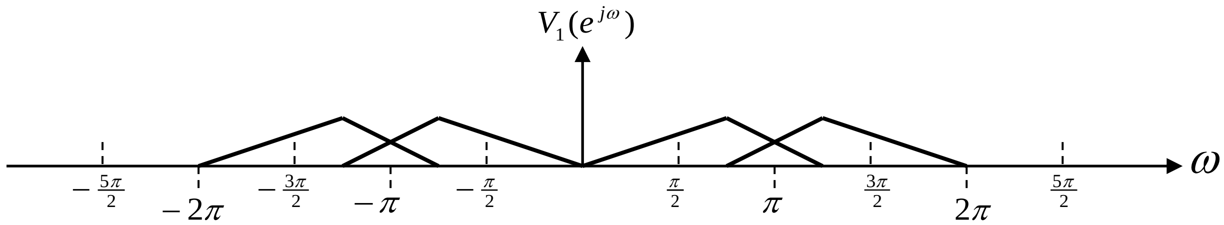
כיון שלא ביצענו עיבוד נקבל לאחר העלאת הקצב: $U_0(e^{j\omega}) = X_0^{(2)}(e^{j\omega})$

בענף התחתון נקבל לאחר המעבר ב-HPF:



נבצע הורדת קצב פי 2 בשני שלבים:





לאחר העלאת הקצב פי 2 נקבל: $U_1(e^{j\omega}) = X_1^{(2)}(e^{j\omega})$

נשים לב שקיבלנו ב-2 הענפים איבר קיפול (המשולשים הקטנים). אלא שכעת צריך לסכם את 2 הענפים ולהיפטר מהמשולשים הקטנים. כלומר: בכל ענף יש קיפול, אבל הקיפול מתבטל רק לאחר סיכום 2 הענפים, בעזרת בחירת מסנני $F_1(z)$, $F_0(z)$ מתאימים.

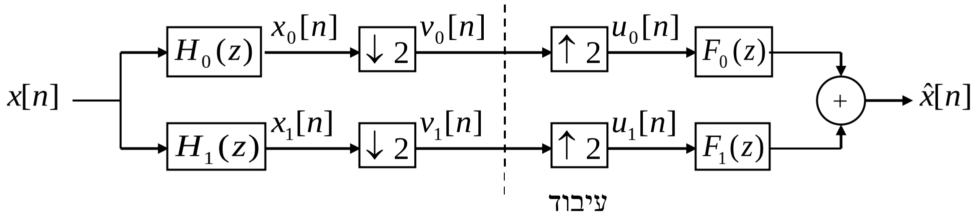
ראינו שאם נבחר:

$$\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$$

נקבל כי איבר הקיפול מתאפס.

בנק מסננים - המשך

בשיעור שעבר התחלנו עם המקרה הד-ערוצי:



קיבלנו כי אות המוצא מתקבל על ידי:

$$\hat{X}(z) = \tfrac{1}{2}[H_0(z)F_0(z)+H_1(z)F_1(z)]X(z) + \tfrac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z)+H_1(-z)F_1(z)]X(-z)$$

הגדרנו את איבר הקיפול:

$$A(z) = \tfrac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z)+H_1(-z)F_1(z)]$$

ראינו לדוגמא כי הבחירה של המסננים:

$$\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$$

מבטיחה איפוס של איבר הקיפול $A(z)$.

הגדרנו את איבר העיוות:

$$T(z) = \tfrac{1}{2}H_0(z)F_0(z)+H_1(z)F_1(z)$$

אנחנו רוצים שחזור מושלם, עד כדי הגבר והשהייה, כלומר נדרוש:

$$T(z) = c\cdot z^{-n_0}$$

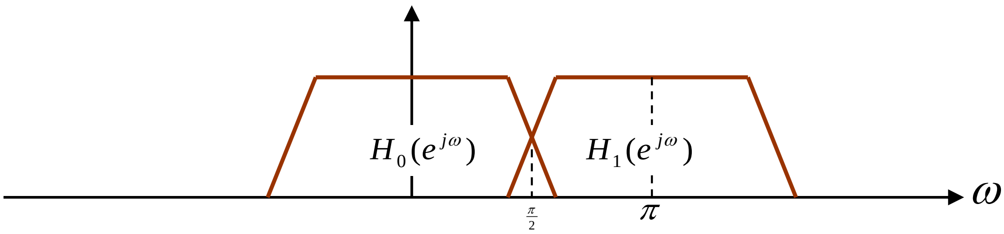
- אם $H_0(z)$ הוא LPF אזי $F_1(z)$ הוא HPF.
- בחרנו לצמצם את דרגות החופש לבחירת $H_0(z)$ ו-$H_1(z)$ (כי $F_0(z)$ ו-$F_1(z)$ נקבעים על ידי הזהות הנ"ל, ומאפסים את איבר הקיפול).

נצמצם עוד יותר את חופש הבחירה ונקבע כי:

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(-e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\pi)})$$

כלומר: המסנן $H_1(z)$ הוא הזזה בתדר ב-π של המסנן $H_0(z)$. על מנת שזה יתקיים ציר הסימטריה של שני המסננים הוא $\omega = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$.



לבנק מסננים המקיימים סימטריה זו בין כל שני מסננים סמוכים, נקרא:

$$QMF = Quadrature\ Mirror\ Filters$$

במקרה זה נקבל:

$$\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) = H_0(z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) = -H_1(z) \end{cases}$$

- אם $H_1(z)$ הוא HPF, אזי גם $F_1(z)$ הוא HPF
- אם $H_0(z)$ הוא LPF, אזי גם $F_0(z)$ הוא LPF

נציב את הזהויות בביטוי שקיבלנו עבור $T(z)$:

$$T(z) = \tfrac{1}{2}[H_0(z)F_0(z)+H_1(z)F_1(z)] = \tfrac{1}{2}[H_0^2(z)-H_1^2(z)] = \tfrac{1}{2}[H_0^2(z)-H_0^2(-z)]$$

כעת נראה האם ניתן לקבל מתוך ביטוי זה השהייה והכפלה בקבוע.

הצגת Poly-Phase למסנני QMF

נרצה להציג את פעולת הסינון והורדת הקצב פי 2 בעזרת מסנני Poly-Phase מסדר 2. ראינו כי באופן כללי מסנני ה-Poly-Phase מוגדרים ע"י:

$$H(z)=\sum_{r=0}^{M-1}P_r(z^M)z^{-r}$$

לכן עבור $M=2$ נקבל:

$$H_0(z)=\sum_{r=0}^{1}P_r(z^2)z^{-r} = P_0(z^2)+z^{-1}P_1(z^2)$$

$$H_1(z)=H_0(-z)=P_0(z^2)-z^{-1}P_1(z^2)$$

בכתיב מטריצי:

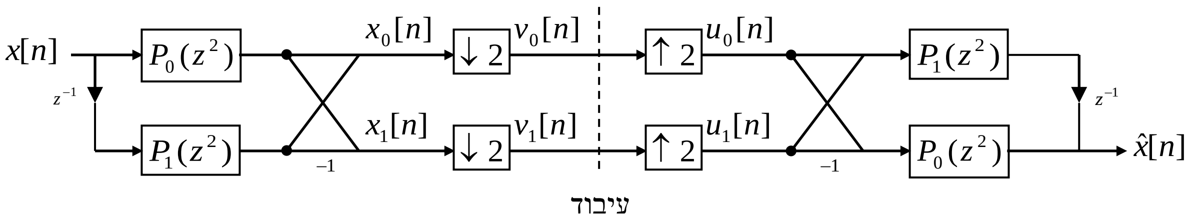
$$\begin{bmatrix}H_0(z)\\H_1(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_0(z^2)\\z^{-1}\cdot P_1(z^2)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}F_0(z)\\F_1(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_0(z)\\-H_1(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^{-1}P_1(z^2)\\P_0(z^2)\end{bmatrix}$$

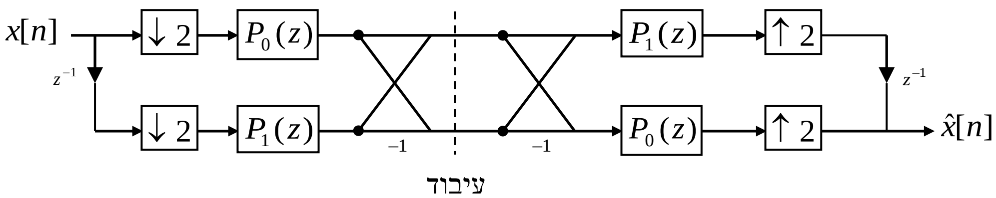
$$\begin{bmatrix}X_0(z)\\X_1(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_0(z)\\H_1(z)\end{bmatrix}X(z)$$

$$\hat{X}(z)=\begin{bmatrix}F_0(z) & F_1(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_0(z)\\U_1(z)\end{bmatrix}$$

נצייר את המערכת בעזרת מימוש ה-Poly-Phase:



שני הפרפרים מממשים את ההכפלה במטריצה שהגדרנו. על ידי ליניאריות וזהויות אצילות נקבל:



נשים לב שבאמצע יש לנו שתי מטריצות צמודות. אם לא מתקיים עיבוד, אזי אפשר להכפיל את שתי המטריצות ולקבל:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

כלומר: הגבר של 2 בשני הערוצים. נציב את התוצאה ונקבל את העיוות $T(z)$ כתלות במסנני ה-Poly-Phase:

$$T(z)=\tfrac{1}{2}[H_0^2(z)-H_0^2(-z)]=\tfrac{1}{2}\{[P_0(z^2)+z^{-1}P_1(z^2)]^2-[P_0(z^2)-z^{-1}P_1(z^2)]^2\}$$

$$= \tfrac{1}{2}[P_0^2(z^2) + 2z^{-1}P_0(z^2)P_1(z^2) + z^{-2}P_1^2(z^2) - P_0^2(z^2) + 2z^{-1}P_0(z^2)P_1(z^2) - z^{-2}P_1^2(z^2)]$$
$$= 2z^{-1}P_0(z^2)P_1(z^2)$$

כיון שאנו רוצים לקבל רק מסנני FIR (בעלי פאזה ליניארית וסופיים) ולא מסנני IIR (שיש בהם עיוות בגלל הפאזה הלא-ליניארית) אזי הפתרון האפשרי היחידי הוא:

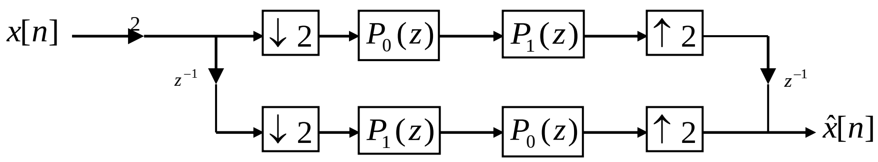
$$P_0(z^2) = c_0 z^{-n_0'} \qquad P_1(z^2) = c_1 z^{-n_1'}$$

ואז נקבל:

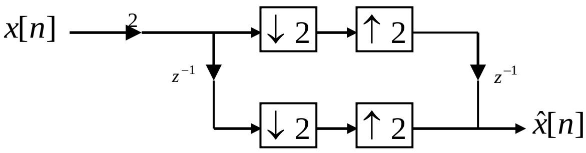
$$T(z) = 2c_0c_1 z^{-(1+n_0'+n_1')}$$
$$H_0(z) = c_0 z^{-2n_0'} + c_1 z^{-(2n_0'+1)}$$
$$H_1(z) = c_0 z^{-2n_0'} - c_1 z^{-(2n_0'+1)}$$

זהו פתרון לא טוב מספיק כי למסננים $H_0(z)$, $H_1(z)$ יש רק 2 מקדמים, כלומר: הדרך היחידה למנוע עיוות היא בחירה של המסננים הנ"ל, אבל הם לא מספיק טובים בשביל לממש LPF ו-HPF.

נצייר את המערכת השקולה (לאחר הכפלת המטריצות, בהנחה שאין עיבוד):



אם נבחר: $P_0(z)P_1(z) = 1$ נקבל את המערכת:



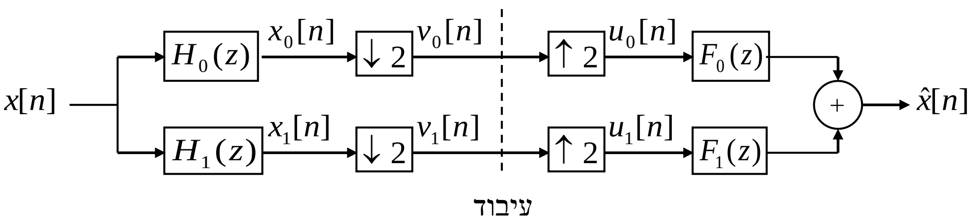
כלומר:

$$\hat{X}(z) = 2z^{-1}X(z) \xleftrightarrow{Z^{-1}} \hat{x}[n] = 2x[n-1]$$

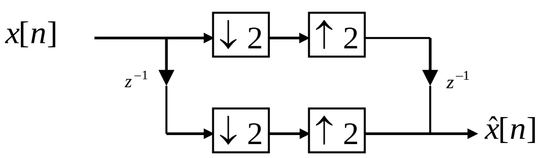
דוגמא פשוטה. נבחר את המסננים:

$$H_0(z) = 1 \qquad H_1(z) = z^{-1}$$
$$F_0(z) = z^{-1} \qquad F_1(z) = 1$$

אם נחזור למערכת המקורית:



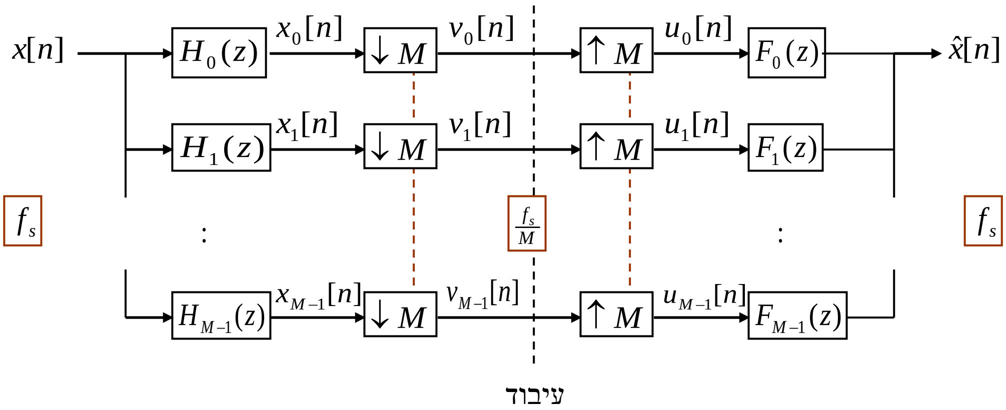
ונציב את הערכים של המסננים שקבענו, נקבל:



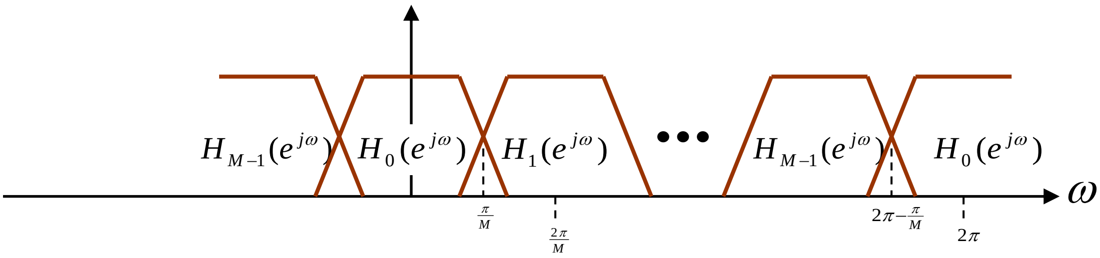
כלומר:

$$\hat{X}(z) = z^{-1}X(z) \xleftrightarrow{Z^{-1}} \hat{x}[n] = x[n-1]$$

בנק מסננים רב ערוצי



נצייר את המסננים במישור התדר:



כך שנקבל:
$$H_k(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-k\frac{2\pi}{M})}) \qquad k=0,1,\ldots,M-1$$
$$H_k(z) = H_0(w_M^{-k}\cdot z)$$

$H_0(e^{j\omega})$ הוא מסנן אב-טיפוס (Prototype) של שאר המסננים. נשים לב ששאר המסננים הם בעלי מקדמים מרוכבים. למרות שכאן ציר הסימטריה הוא $\frac{\pi}{M}$, נוהגים "להשאיל" את השם QMF גם לבנק מסננים מהצורה הנ"ל.

נרשום את $H_0(z)$ בעזרת מסנני ה-Poly-phase:
$$H_0(z) = \sum_{r=0}^{M-1} P_r(z^M)z^{-r}$$

$$H_k(z) = H_0(w_M^{-k}\cdot z) = \sum_{r=0}^{M-1} P_r(w_M^{-Mk}\cdot z^M)w_M^{kr}\cdot z^{-r}$$

ניעזר בזהות: $w_M^{-Mk} = e^{-j\frac{2\pi}{M}Mk} = 1$, ונקבל:
$$= \sum_{r=0}^{M-1} w_M^{kr}\cdot P_r(z^M)\cdot z^{-r}$$

לפיכך:
$$X_k(z) = X(z)H_k(z) = \sum_{r=0}^{M-1} w_M^{kr}\cdot X(z)P_r(z^M)\cdot z^{-r}$$

נגדיר: $S_r(z) = z^{-r}P_r(z^M)X(z)$, ונקבל:
$$X_k(z) = X(z)H_k(z) = \sum_{r=0}^{M-1} S_r(z)w_M^{kr}$$

ניתן להתמיר את האות למישור הזמן (על ידי התמרת פורייה צמודה):
$$x_k[n] = \sum_{r=0}^{M-1} s_r[n]w_M^{kr}$$

ההתמרה במקרה הזה היא בין האינדקסים $0\le r\le M-1$ של האותות $s_r[n]$ לאינדקסים $0\le k\le M-1$ של האותות $x_k[n]$, ולא בין זמן ותדר!

ניזכר בהגדרת DFT:
$$X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[n]w_N^{-kn}$$

לפיכך (בהנחה שהמקדמים של $x[n]$ ממשיים): $X^*[k]=\sum_{k=0}^{N-1} x[n]w_N^{kn}$

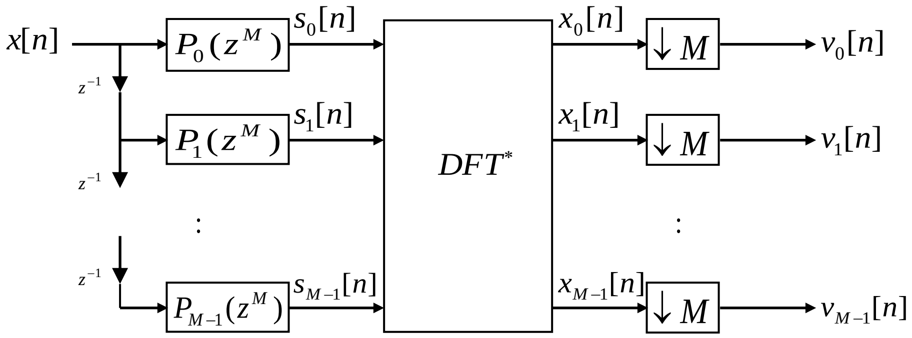
פעולת DFT, משמעותה המתמטית היא ערבול של המקדמים של $x[n]$ עם המשקלות w_N^{kn}. לפיכך, ניתן לתאר את קבלת $X_k(z)$ על ידי פעולת DFT^* לאותות $S_r(z)$ עם המשקלות w_M^{kr}. נשים לב שאין כאן DFT לאורך ציר הזמן, כלומר: מעבר מאינדקס זמן לאינדקס תדר, אלא יש כאן פעולת ערבול על M האותות ב- M הענפים. הכניסה היא פונקציה של z והמוצא הוא פונקציה של z. למעשה אנו מקבלים וקטור כניסה באורך M, מבצעים הכפלה במטריצת ה- DFT^* ומוציאים וקטור מוצא באורך M.

לסיכום:

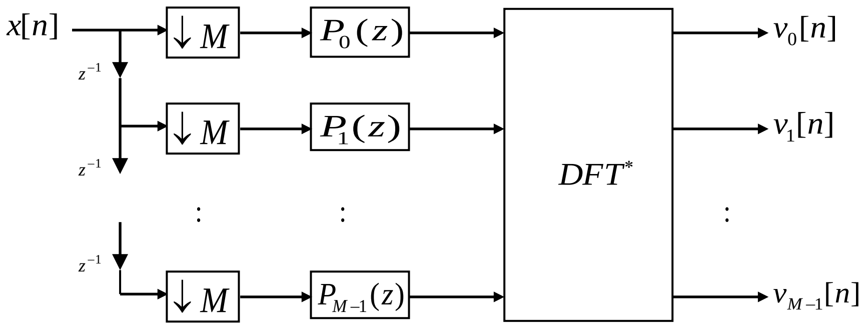
$$X_k(z)=DFT^*\{S_r(z)\}=\sum_{r=0}^{M-1} S_r(z)w_M^{kr}$$

$$x_k[n]=DFT^*\{s_r[n]\}=\sum_{r=0}^{M-1} s_r[n]w_M^{kr}$$

נצייר את המערכת:



על ידי שימוש בליניאריות ובזהויות אצילות, נוכל להעביר את הורדת הקצב צמוד לקו ההשהיות:



ניתן דוגמא מספרית שתעיד על עומס החישובים במימוש הישיר ובמימוש poly-phase.

עבור $M=32$, $N=50$ (סדר המסנן, כלומר 51 מקדמים), נקבל כי על מנת לקבל דגימה אחת של

- במימוש הישיר: $(N+1)\cdot M\cdot f_s=1{,}632\cdot f_s$
- במימוש Poly-Phase עם DFT:

קצב החישוב החדש הוא: $f_{s,new}=\frac{f_s}{M}=\frac{f_s}{32}$

ולכן בשלב הראשון נקבל: $(N+1)f_{s,new}$, כי 51 מקדמי המסנן מפוזרים ב-Poly-Phase.

בשלב חישוב ה-DFT נקבל $M\cdot\log_2 M\cdot f_{s,new}=160$

ולכן קצב החישוב הכולל הוא: $(51+160)f_{s,new}=6.6f_s$

קיבלנו חיסכון פי 247.

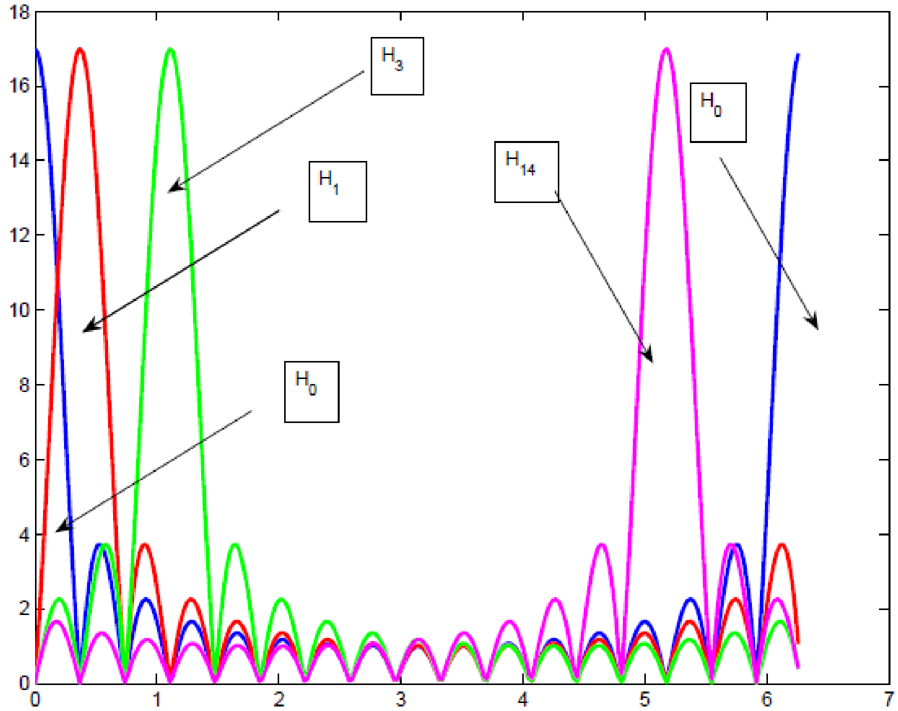
מקרה פרטי: נניח כי כל מסנני ה-Poly-phase מקיימים: $P_0(z)=P_1(z)=...=P_{M-1}(z)=1$

נקבל: $$H_0(z)=\sum_{r=0}^{M-1}P_r(z^M)z^{-r}=1+z^{-1}+...+z^{-(M-1)}=\sum_{r=0}^{M-1}z^{-r}=\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$$

$$H_0(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega M}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\omega\frac{M}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}\cdot\frac{e^{j\omega\frac{M}{2}}-e^{-j\omega\frac{M}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}=e^{-j\omega\frac{M-1}{2}}\frac{\sin(\omega\frac{M}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

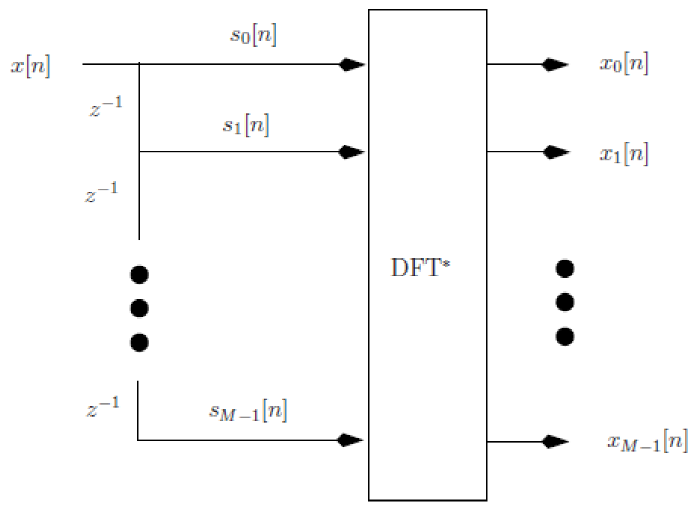
כלומר: $$h_0[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le M-1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

נקבל כי מסנני ה-QMF הם חלונות מלבניים בזמן, שהם גרעין דיריכלה בתדר. איור של המסננים עבור $M=17$:



נקבל: $$S_r(z)=z^{-r}X(z)\xleftrightarrow{Z^{-1}}s_r[n]=x[n-r]$$

$$x_k[n]=DFT^*\{s_r[n]\}=\sum_{r=0}^{M-1}s_r[n]w_M^{kr}$$



המשוואה נכונה עבור כל n, ובפרט ברגע $n+M-1$:

$$x_k[n+M-1]=\sum_{r=0}^{M-1}s_r[n+M-1]w_M^{kr}=\sum_{r=0}^{M-1}x[n+M-1-r]w_M^{kr}$$

נבצע חילוף משתנה: $j=M-1-r$, ונקבל:

$$=\sum_{j=0}^{M-1}x[n+j]w_M^{k(M-1-j)}=w_M^{-k}\sum_{j=0}^{M-1}x[n+j]w_M^{-kj}$$

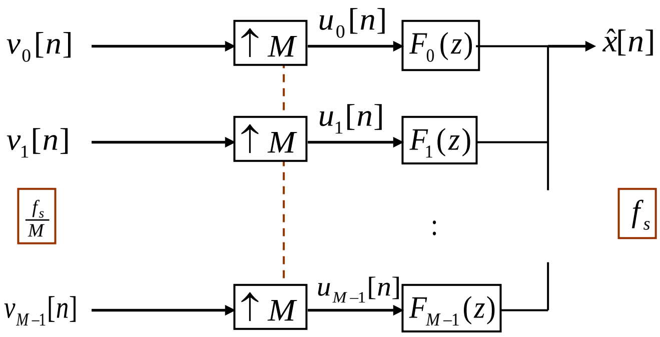
$$=w_M^{-k}DFT_M\left\{x[n+j]\right\}$$

נשים לב שכאן קיבלנו DFT במובן הקלאסי: התמרה מאינדקס j לאינדקס k. נשים לב שעבור כל n מבצעים DFT למקטע: $x[n],x[n+1],\dots,x[n+M-1]$, ומכפילים את התוצאה באקספוננט: w_M^{-k}.
כלומר: בכל רגע n אנו מקבלים את ההרכב התדרי של האות.
פעולה זו מכונה התמרת פורייה לזמן קצר (Short Time Fourier Transporm).
נזכור כי פעולה זו היא מימוש יעיל של בנק מסננים המורכב מחלונות בזמן (דריכלה בתדר), מסננים אלו אינם טובים כי יש ביניהם חפיפה (ראה ציור לעיל) וההנחתה שלהם מוגבלת ל-(-13.5_{dB}). לכאורה היה ניתן להסיק מכאן כי פעולת ה-DFT לאות אינה מבצעת ניתוח ספקטרלי טוב!
אלא יש להבין מה ביצענו:
סדרת הכניסה $x[n]$ מזינה חוצץ באורך M. פעולת ה-DFT מבוצעת על החוצץ. כלומר: הדבר שקול להכפלה של $x[n]$ בחלון מלבני באורך M, הכפלה זו יוצרת קונבולוציה בתדר עם התמרת החלון (שהוא דיריכלה) ויוצרת את בנק המסננים. נשים לב שבכל רגע n אנו מקבלים התמרה חדשה. החוצץ עבור רגע n שונה רק בדגימה אחת מהחוצץ עבור רגע $n+1$, כלומר: ישנה יתירות מסויימת בחישוב (אם נניח שהאות אינו משתנה בצורה מהירה כל כך).
פעולת ההתמרה על החוצץ מגדירה את התמרת פורייה לזמן קצר (STFT) של האות המוכפל בחלון. חשיבותה מתבטאת ביישומים בהם מבצעים אנליזה ספקטרלית לאותות שההרכב התדרי שלהם משתנה כל הזמן, כמו אותות דיבור ומוסיקה. אלו אותות שאינם סטציונרים, ובהם אין משמעות לחישוב התמרת פורייה עבור זמן ארוך, אלא לחלוקה למקטעים קטנים וחישוב של התמרת פורייה בכל מקטע.
הגישה שהצגנו מוגבלת לחלונות שאורכם כאורך הרזולוציה הנדרשת בתדר - $\frac{2\pi}{M}$.
ניתן לשפר את בנק המסננים על ידי שימוש בחלונות טובים יותר מבחינת ההנחתה, כמו חלונות Hamming, אך עדיין נשאר עם מסננים מוגבלים מאוד.
אם נרצה להשתמש במסננים ארוכים יותר מ- M אך עדיין להשאיר את רזולוציית התדר $\frac{2\pi}{M}$, עלינו להשתמש בתכונת הקיפול של ה-DFT: דגימה בתדר של ה-DTFT היא DFT של קיפול בזמן של אות הכניסה, כלומר: אם נתון: $y[n]=x[n]w[n]\quad n=0,1,\dots,N-1$
אזי אם נרצה לחשב את ה-DTFT של $y[n]$ ולקבל M נקודות תדר, כאשר $M<N$, נקבל:

$$Y[k]=Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{M}}=\sum_{n=0}^{M-1}\left[\sum_{r=0}^{\frac{N}{M}-1}y[n+rM]\right]w_M^{-nk}$$

כלומר, האיבר: $\sum_{r=0}^{\frac{N}{M}-1}y[n+rM]$ הוא קיפול מחזורי של $y[n]$. נשים לב שלא ניתן לשחזר את $x[n]$ לאחר הקיפול, אלא במקרה שהקיפול אינו הורס את האות. במקרים רבים, אין זה חיסרון וניתן להשתמש בדגימות אלה. יש להשגיח כי אורך החלון N אינו ארוך מידי אלא מתאים לאורך הסטציונריות של אות הכניסה. אחרת, הקיפול יערבב דגימות בעלי הרכב תדרי שונה כך שלא נקבל הרכב תדרי של האות.
על ידי דגימה של ה-DTFT ברזולוציה נמוכה יותר אנו נקבל פחות חפיפה בין המסננים השונים.

נצייר את מערכת הסינתזה:



המסננים $F_k(z)$ הם מסנני QMF והם מוגדרים ע"י:

$$F_k(z) = w_M^k F_0(w_M^{-k} z)$$

נפרק את $F_0(z)$ ל-Poly-Phase מסדר II, על פי:

$$Q_r(z) = P_{M-1-r}(z)$$

$$F_0(z) = \sum_{r=0}^{M-1} z^{-(M-1-r)} Q_r(z^M)$$

לפי זה, הביטוי ל-$F_k(z)$ הוא:

$$F_k(z) = w_M^k F_0(w_M^{-k} z) = w_M^k \sum_{r=0}^{M-1} w_M^{k(M-1-r)} z^{-(M-1-r)} Q_r(w_M^{-kM} z^M)$$

$$= \sum_{r=0}^{M-1} w_M^{-kr} z^{-(M-1-r)} Q_r(z^M)$$

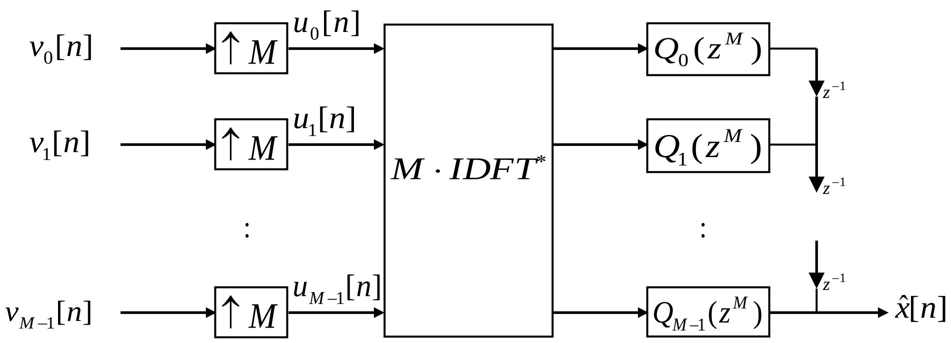
האות המשוחזר יהיה:

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} U_k(z) F_k(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{M-1} w_M^{-kr} z^{-(M-1-r)} Q_r(z^M) U_k(z)$$

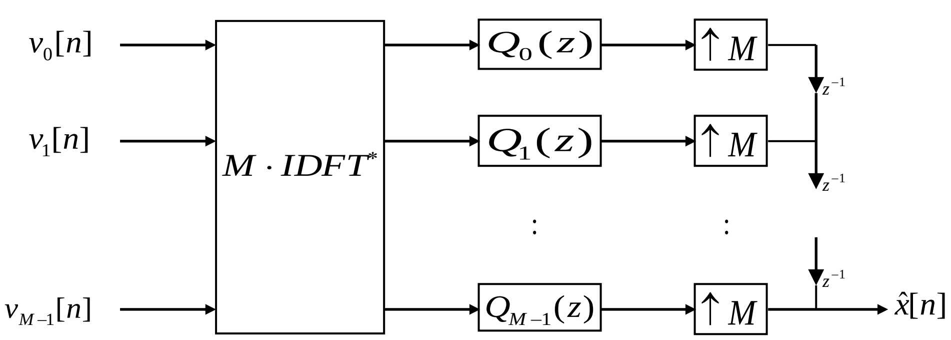
$$= \sum_{r=0}^{M-1} \left(\sum_{k=0}^{M-1} w_M^{-kr} U_k(z) \right) Q_r(z^M) z^{-(M-1-r)}$$

$$= \sum_{r=0}^{M-1} \left(M \cdot IDFT_M^* \{U_k(z)\} \right) \cdot Q_r(z^M) z^{-(M-1-r)}$$

מימוש של מערכת הסינתזה באמצעות פירוק Poly-Phase ו-DFT:

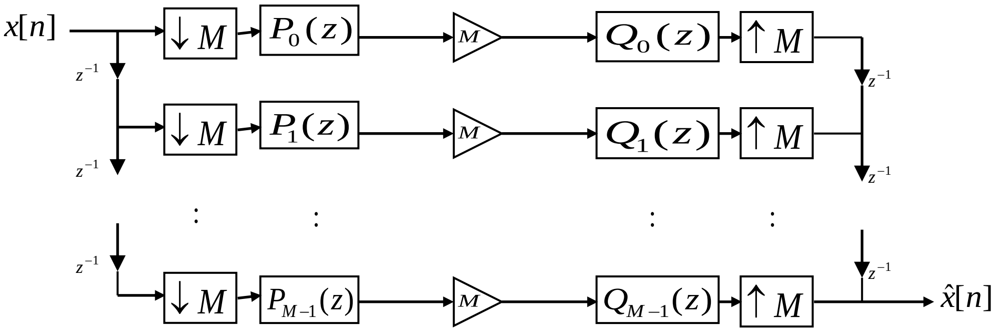


ה-DFT משמש לפעולת הערבוב בין הערוצים. היעילות מתקבלת על ידי המימוש היעיל של IDFT. על ידי שימוש בליניאריות ובזהויות אצילות נקבל:



שחזור מושלם:

אם אין עיבוד בערוצים נקבל כי מכפלת המטריצות של ה- DFT^* ושל ה- $M \cdot IDFT^*$ נותנת הגבר M בכל ענף, ולכן המערכת השקולה:



התנאי לשחזור מושלם יהיה שהמסננים יבטלו אחד את השני, כלומר:

$$P_i(z)Q_i(z)=1 \quad \forall i=0,1,...,M-1$$

אם נניח כי $H_i(z)$ הוא באורך k_0M, אזי $P_i(z)$ הוא באורך k_0, כלומר: $Q_i(z)$ הוא מסנן IIR מסדר k_0. אמרנו בעבר שלא נשתמש במסנני IIR במימוש זה (כי הפאזה לא ליניארית והמימוש אינו יעיל), לכן נדרוש $P_i(z)$ באורך 1, כלומר: האורך של $H_i(z)$ הוא M. כבר ראינו שקשה לעשות שחזור מושלם על ידי מסננים באורך M.

29.12.2011 הרצאה 9

התמרת פורייה לזמן קצר (Short Time Fourier Transporm)

<u>הגדרה:</u> התמרת פורייה לזמן קצר מוגדרת על ידי:

$$X_{STFT}(e^{j\omega},n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]w[n-m]e^{-j\omega n}$$

$x[n]$ - הוא אות אינסופי בזמן בדיד.

$w[n]$ - היא פונקציית חלון כלשהי (הנקראת **חלון אנליזה ,** לאו דווקא חלון מלבני) בעלת אורך L_h .

המשמעות של ההתמרה היא שבכל פעם לוקחים חלק מהאות (שנוצר על ידי ההכפלה בחלון) ומבצעים לו DTFT. n היא נקודה שמאפיינת את החלון, היא לאו דווקא באמצע החלון. ככל שנקדם את m, נקבל חלק חדש של האות. באופן פשוט מקדמים את m ב-1, ולמעשה מקבלים חפיפה מלאה בין חלקי האות, למעט דגימה אחת.

ככל שהחלון גדול יותר - מקבלים רזולוציה טובה יותר של האות, משום שההתמרה של החלון קרובה יותר להלם (עבור חלון אינסופי אנו מקבלים למעשה את התמרת ה-DTFT הרגילה של האות). ככל שהחלון יותר קטן הרזולוציה נמוכה יותר, אבל ייתכן שנזהה פיקים של האות לאורך ציר הזמן.

$w[n]$ - חלון ארוך = רזולוציית תדר טובה

- חלון קצר = רזולוציית זמן יותר טובה.

<u>לדוגמא:</u> עבור אות $x[n]=\cos(\omega_0 n)$ נעדיף חלון ארוך שיזהה את המחזוריות של ה-cos ויתן לנו את הפיק בתדר כמה שיותר טוב. אם ניקח חלון קטן מידי, לא נוכל לזהות שמדובר ב-cos אלא עלולים לחשוב שמדובר באות קבוע!

עבור אות שיש לו פיקים בזמן, אם ניקח חלון גדול מידי לא נזהה את הפיק והוא לא ישפיע על ההרכב התדרי של האות, אבל אם ניקח חלון קטן, נשים לב לשינוי בתדר.

בדר"כ לא נעבוד עם התמרת ה-DTFT הרציפה, אלא ניקח דגימות שלה במרווחים של $\frac{2\pi}{M}k$, ונקבל התמרת DFT עבור כל חלק של האות שמוכפל בחלון אנליזה $w[n]$:

$$\boxed{X_{STFT}[n,k]=X_{STFT}(e^{j\omega},n)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{M}k}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]w[n-m]e^{-j\frac{2\pi}{M}km}\qquad k=0,1,...,M-1}$$

נזכור כי דגימה בתדר היא קיפול בזמן, כלומר: מתייחסים לאות בזמן כאילו הוא היה מחזורי. בגלל שאנו רוצים אות סופי בתדר, אנו משלמים בזה שהאות שאנו חוזרים אליו מהתדר אינו יכול להיות סופי אלא מקופל.

אם נניח כי האות אינו משתנה כל כך מהר, אזי לא צריך לבצע אנליזה לאות כל דגימה אחת אלא ניתן לראות את ההרכב התדרי שלו מידי כמה דגימות, כלומר: נבצע דגימה נוספת של $X_{STFT}[n,k]$ פי R :

$$X[nR,k]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]w[nR-m]e^{-j\frac{2\pi}{M}km}=DFT_M\{x[m]w[nR-m]\}$$

ייצוג STFT באמצעות בנק מסננים

נחזור לחלון הקופץ בדגימה אחת, וניתן ל-STFT פירוש כבנק מסננים:

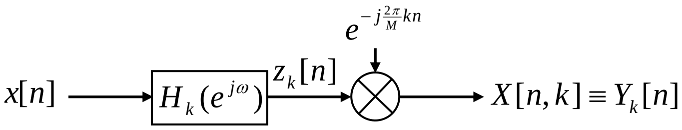
$$y_k[n] = X_{STFT}[n,k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[n-m]e^{-j\frac{2\pi}{M}km} = e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]w[n-m]e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-m)}$$

$$= e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \cdot x[n] * (w[n]e^{j\frac{2\pi}{M}kn}) = e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \cdot x[n] * h_k[n] = e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} z_k[n]$$

$$h_k[n] = w[n]e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \xleftrightarrow{DTFT} H_k(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{M}k)})$$

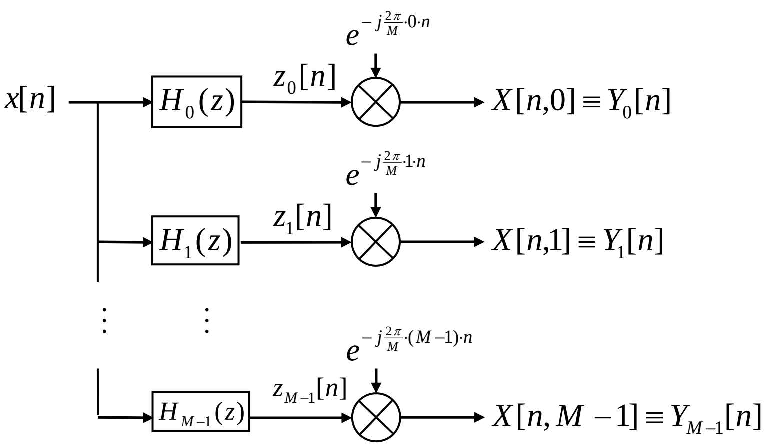
$$z_k[n] = x[n] * h_k[n] = x[n] * (w[n]e^{j\frac{2\pi}{M}kn})$$

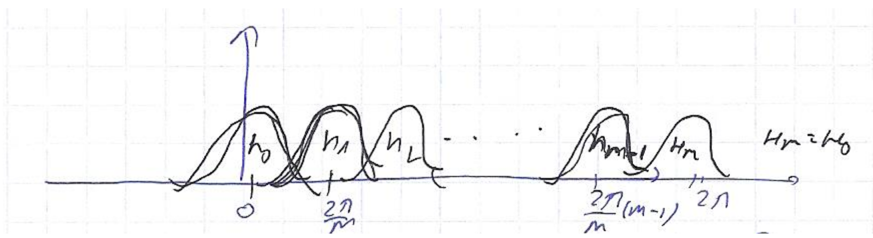
איור של הענף ה- k במערכת לקבלת $y_k[n]$:



נסמן את התגובה להלם של המסנן המתקבל מהחלון $w[n]$ כ- $h_0[n]$: $h_0[n] = w[n]e^{j\frac{2\pi}{M}\cdot 0\cdot n} = w[n]$

לכן, ניתן לקבל את התמרת ה-STFT על ידי שימוש בבנק מסננים:





המסננים $H_k(e^{j\omega})$ הם מסנני QMF משום שהם מקיימים: $H_k(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{M}k)})$, כלומר: עבור כל k מקבלים הזזה ב- $\frac{2\pi}{M}k$ של חלון אב הטיפוס (proto-type window) $w[n] = h_0[n]$. אנו יודעים שניתן לממש את בנק המסננים באמצעות poly-phase בצורה יעילה

אם המסננים $h_k[n]$ הם חלונות ריבועיים - המשמעות היא שאנו חותכים בכל פעם את האות ומבצעים DFT על החלק שחתכנו.

נשים לב שאנו מקבלים את דגימות המוצא על ידי הכפלה של האות $z_k[n]$ באקספוננט. נמצא דרך יעילה לקבל את $z_k[n]$:

$$z_k[n] = x[n] * (e^{j\frac{2\pi}{M}kn}h[n]) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]e^{j\frac{2\pi}{M}km} \underset{m\leftrightarrow -m}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]h[-m]e^{-j\frac{2\pi}{M}km}$$

נחליף משתנה: $m = rM + \ell$, כאשר: $-m = -rM - \ell, \quad n+m = n+rM+\ell$

$\ell = 0,1,\ldots,M-1$ - אינדקס בתוך המסגרת. לכל מסגרת יש M דגימות.

$r = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ - אינדקס המסגרת עצמה. האות אינסופי, לכן יש אינסוף מסגרות.

נקבל:

$$z_k[n] = \sum_{\ell=0}^{M-1} \overbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rM+\ell]h[-rM-\ell]}^{s_\ell[n]} e^{-j\frac{2\pi}{M}k(rM+\ell)} = \sum_{\ell=0}^{M-1} s_\ell[n] e^{-j\frac{2\pi}{M}k\ell}$$

$$= DFT\{s_\ell[n]\Big|_{l=0}^{M-1}\} \qquad k = 0,1,..M-1$$

$$s_\ell[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rM+\ell]h[-rM-\ell]$$

כלומר: ניתן לקבל את האות $z_k[n]$ על ידי מעבר של הדגימות $s_\ell[n]$ בבלוק DFT. ה-DFT הוא מ-ℓ ל-k ולא מציר הזמן לציר התדר.

הרצאה 10 12.1.2012

המשך STFT - מערכת האנליזה

בשיעור שעבר הגדרנו את התמרת ה-STFT בזמן בדיד עבור:

$x[n]$ - אות אינסופי ולא מחזורי.

$h[n]$ - חלון אנליזה באורך L_h.

ראינו כי ניתן לממש את ה-STFT על ידי הכפלה של האות $z_k[n]$ באקספוננט:

$$X_{STFT}[n,k] = Y_k[n] = e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} z_k[n]$$

$$h_k[n] = h_0[n]e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \xleftrightarrow{DTFT} H_k(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{M}k)})$$

$$z_k[n] = x[n]*h_k[n] = x[n]*(h_0[n]e^{j\frac{2\pi}{M}kn})$$

על ידי חילוף משתנה, הגענו לביטוי עבור $z_k[n]$:

$$z_k[n] = \sum_{\ell=0}^{M-1} s_\ell[n]e^{-j\frac{2\pi}{M}k\ell} = DFT\{s_\ell[n]\Big|_{l=0}^{M-1}\}$$

$$s_\ell[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rM+\ell]h[-rM-\ell] \qquad \ell = 0,1,\dots M-1$$

כך שההתמרה $y_k[n]$ מתקבלת על ידי:

$$Y_k[n] = e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}DFT\{s_\ell[n]\Big|_{l=0}^{M-1}\} \qquad k = 0,1,\dots M-1$$

<u>נסכם את שלבי האנליזה של STFT:</u>

<u>שלב א:</u> עבור כל אינדקס n מכפילים את האות $x[n+m]$ בחלון $h[-m]$ - הכפלה איבר איבר.

$x[n] \longrightarrow$

$x[n-(L_h-1)]$	$\cdots$	$x[n-1]$	$x[n]$
$h[L_h-1]$	$\cdots$	$h[1]$	$h[0]$

נשים לב שעלינו להפוך את החלון. האות $x[n+m]$ נכנס דגימה אחרי דגימה. מקבלים חוצץ באורך L_h.

<u>שלב ב:</u> נניח כי $L_h > M$ וכפולה שלמה שלו (אחרת יש להוסיף אפסים). על מנת לחשב את $s_\ell[n]$ עלינו לקפל את החוצץ על עצמו $\frac{L_h}{M}$ פעמים (המספרים כאן מציינים אינדקסים):

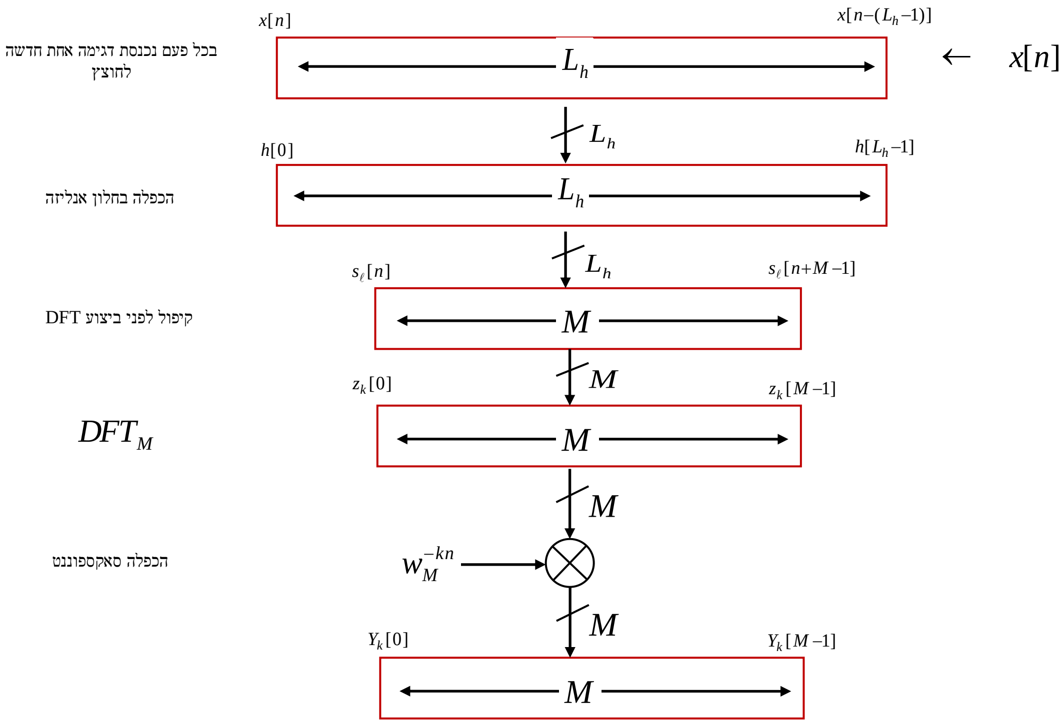
$$s_\ell[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+(rM+\ell)]h[-(rM+\ell)] \qquad \ell = 0,1,\dots M-1$$

	$M-1$	$\cdots$	1	0	
+	$2M-1$	$\cdots$	$M+1$	M	+
		$\vdots$			
+	L_h-1	$\cdots$	$(\frac{L_h}{M}-1)M+1$	$(\frac{L_h}{M}-1)M$	+
=					
	$s_\ell[M-1]$	$\cdots$	$s_\ell[1]$	$s_\ell[0]$	

<u>שלב ג:</u> נבצע DFT באורך M לדגימות ה-$s_\ell[n]$ שקיבלנו מהקיפול, לקבלת $z_k[n]$.

<u>שלב ד:</u> נכפיל את הדגימות באקספוננט: $e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}$, כלומר: נבצע הזזה לפס בסיס.

נמחיש את תהליך האנליזה על ידי איור בלוקים:



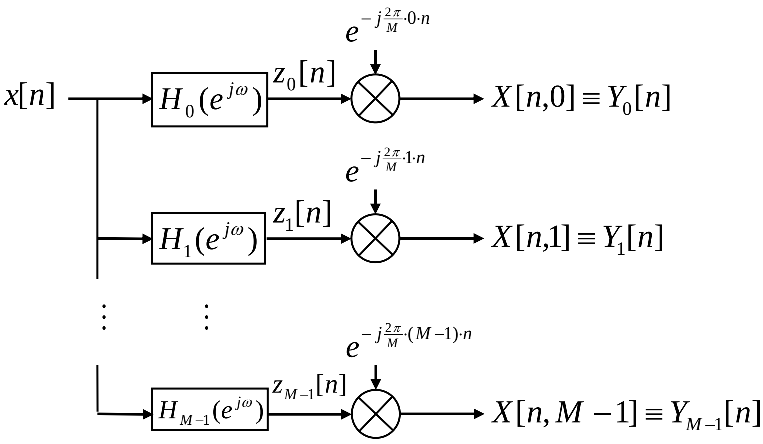
<u>STFT - אנליזה עם דצימציה</u>

באיור להלן אנחנו מעדכנים את חוצץ הכניסה כל דגימה. אבל במקרים שבהם האות אינו משתנה כל כך מהר אין צורך לעדכן את חוצץ הכניסה כל דגימה אלא פעם ב- R דגימות אנו מכניסים לחוצץ R דגימות חדשות. הקפצה כזאת שקולה לדצימציה ב- R של אות הכניסה ($R < L_h$, אחרת לא יהיה חפיפה כלל ונאבד דגימות).

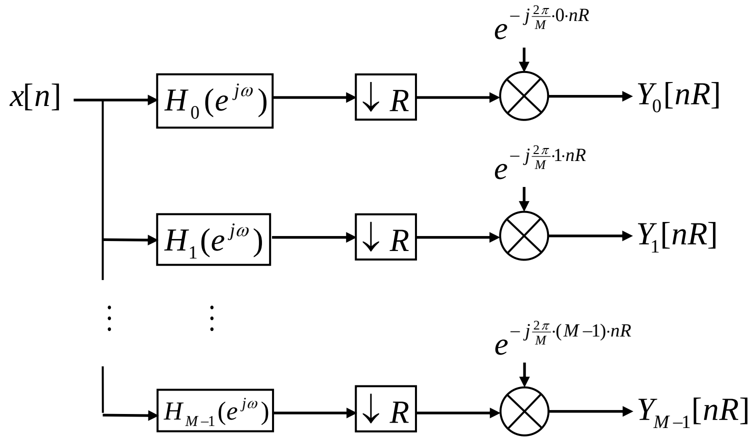
נראה כיצד מימוש של ה-STFT באופן זה יותר יעיל בהשוואה למימוש בנק המסננים. הסיבות לכך הן:

- במערכת זו ה-DFT מתבצע בקצב הנמוך.
- פקטור הדצימציה R, אינו חייב להיות M (הרזולוציה בתדר), אלא יכול להיות קטן ממנו, ובאופן זה ליצור מסננים יותר יעילים (להבדיל מבנק המסננים שבו פקטור הדצימציה היה קבוע ל- M).
- אפשר לקבוע את גודל החוצץ כרצוננו, וגם את גודל הדצימציה (בבנק המסננים כל הפרמטרים הנ"ל היו קבועים ל- M).

נדגים את היעילות של המערכת דרך המימוש של STFT על ידי בנק מסננים:



האותות $Y_k[n]$ מוגבלי סרט $\pm\frac{\pi}{M}$, משום ש-$H_k(e^{j\omega})=W(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{M}k)})$, לכן ניתן לבצע למוצא דצימציה בפקטור: $1\le R\le M$.
עבור $R=1$ - אין דצימציה כלל, אלא החוצץ מתעדכן בכל דגימה חדשה.
עבור $R=M$ - דצימציה קריטית, מימוש של המערכת במקרה הזה ראינו בהרצאות הקודמות.



הדריכות של המסננים הסמוכים בעייתיות, ומאלצות מסננים פשוטים בלבד על מנת לקבל שחזור מושלם. אנחנו יודעים לממש בצורה יעילה רק עבור $R=M$, אבל עבור R כללי אנחנו לא יודעים.

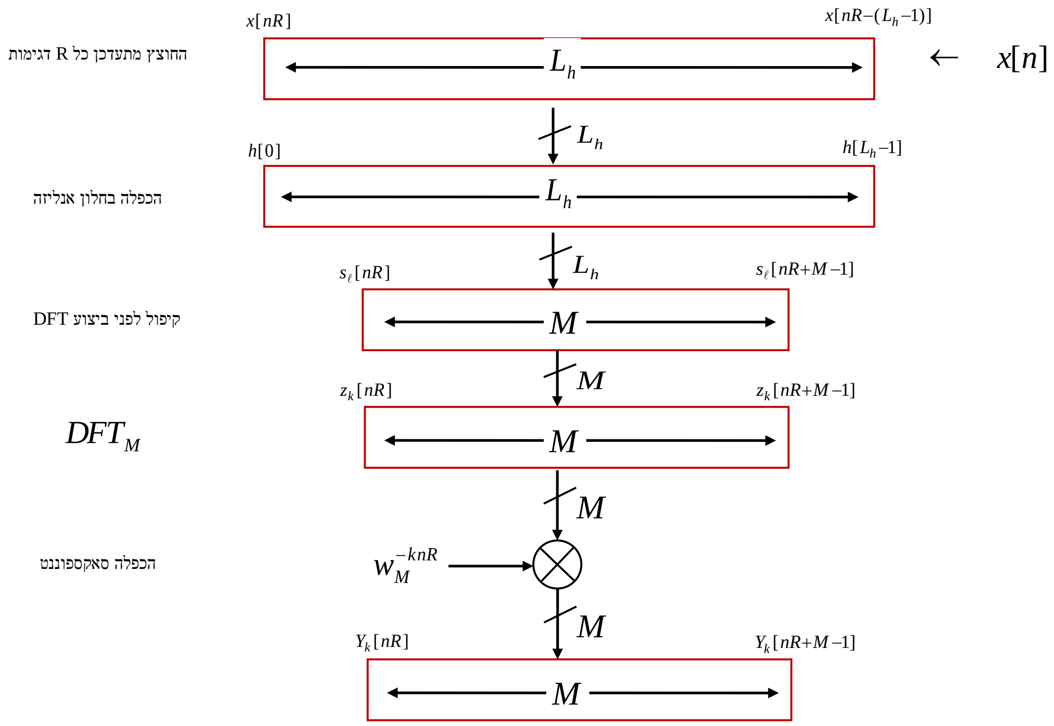
$$Y_k[n]=w_M^{-nk}DFT\{s_\ell[n]\Big|_{l=0}^{M-1}\}\qquad k=0,1,..M-1\quad;\quad w_M^{-kn}=e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}$$

$$Y_k[nR]=w_M^{-nRk}DFT\{s_\ell[nR]\Big|_{l=0}^{M-1}\}$$

$$s_\ell[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n+rM+\ell]h[-rM-\ell]\qquad\qquad \ell=0,1,..M-1$$

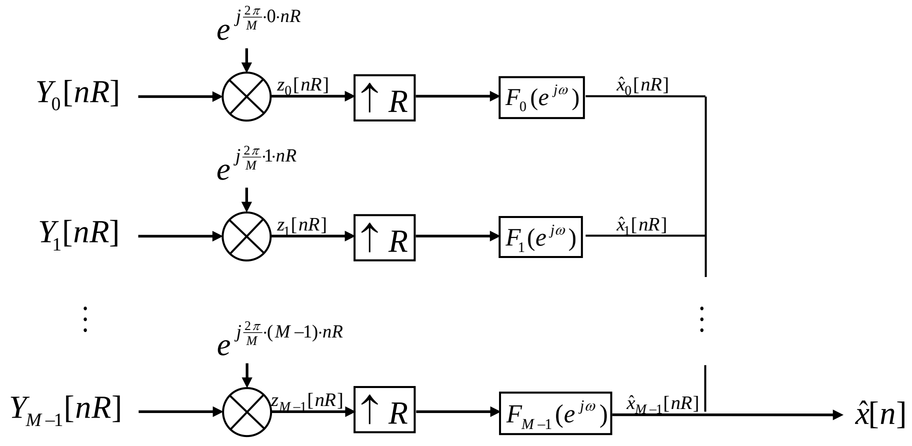
$$s_\ell[nR]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[nR+rM+\ell]h[-rM-\ell]$$

המשמעות של הורדת קצב ב-R היא עדכון החוצץ כל R דגימות, כלומר: הכנסת R דגימות חדשות לחוצץ והפעלת המערכת. ניתן לראות כי ה-DFT וההכפלה באקספוננט מתבצעים בקצב הנמוך במערכת!



שחזור - סינתזה

נתחיל משחזור של המערכת בתצורת בנק המסננים:



<u>נסכם את שלבי הסינתזה של STFT:</u>

<u>שלב א:</u> הכפלה באקספוננט על מנת לקזז את האקספוננט מהאנליזה ולקבל חזרה את $z_k[nR]$

<u>שלב ב:</u> העלאת קצב ב- R

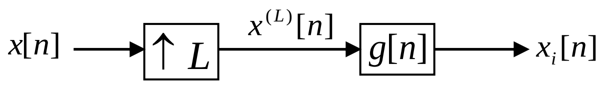
<u>שלב ג:</u> מעבר במסנני הסינתזה $F_k(e^{j\omega})$ וחיבור הענפים לקבלת $\hat{x}[n]$.

כעת נראה את המימוש היעיל למערכת הסינתזה:

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\hat{x}_k[n]$$

$$\hat{x}_k[n]=\left\{z_k[nR]\right\}_{\uparrow R} * f_k[n]$$

תזכורת:



$$x^{(L)}[n]=\begin{cases} x[\frac{n}{L}] & n=0,\pm L,\pm 2L,\ldots \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$x_i[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x^{(L)}[k]g[n-k]\underset{k=rL}{=}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]g[n-rL]$$

ולכן נקבל:

$$\hat{x}_k[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}z_k[rR]f_k[n-rR]$$

מכיון שמסנני האנליזה הם מתצורת QMF, אזי גם מסנני הסינתזה יהיו כאלו:

$$f_k[n]=f[n]w_M^{nk}$$

$$\hat{x}_k[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}z_k[rR]f[n-rR]w_M^{(n-rR)k}$$

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\hat{x}_k[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty}z_k[rR]f[n-rR]w_M^{(n-rR)k}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rR]\overbrace{\sum_{k=0}^{M-1}z_k[rR]w_M^{(n-rR)k}}^{M\cdot IDFT\{z_k[rR]\}(n-rR)}$$

$$=M\cdot\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rR]s_{(n-rR)}[rR]$$

האות $s_{(n-rR)}[rR]$ מתקבל על ידי התמרת IDFT של האות $z_k[rR]$. ה-IDFT נותן רק M נקודות, ואילו אנחנו צריכים להכפיל את חוצץ מוצא ה-IDFT בחלון $f[\ell]$, שאורכו $L_f>M$.

נשתמש בעובדה שהתמרת ה-IDFT היא מחזורית M (האינדקס של IDFT נקבע על ידי החזקה $w_M^{(n-rR)k}$ ולא על ידי האות), וכך נקבל את הדגימות החסרות לנו.

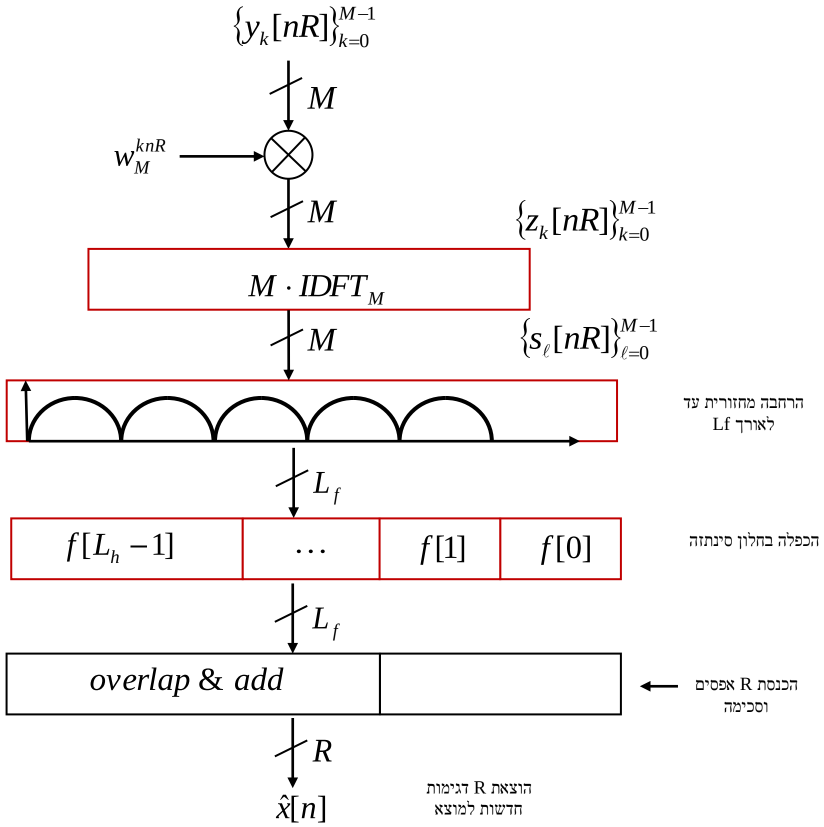
נתבונן עבור $n=\ell+r_0R$: $\ell = n - r_0R$

$$\hat{x}[\ell + r_0R] = M \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} f[\ell + r_0R - rR]s_{(\ell+r_0R-rR)}[rR]$$

נניח מערכת סיבתית (לא מתחשבים בדגימות עתידיות מעבר ל- r_0), נקבל:

$$= M \cdot \sum_{r=-\infty}^{r_0-1} f[\ell + r_0R - rR]s_{(\ell+r_0R-rR)}[rR] + M \cdot f[\ell]s_\ell[r_0R]$$

כדי לקבל את המוצא $\hat{x}[n]$ ברגע r_0 צריך לעשות הרחבה מחזורית של מוצא ה-IDFT עד לאורך החלון L_f (שוב נניח ש- L_f הוא כפולה שלמה של M), ולסכום אותו עם חוצץ המוצא. פעולה זו נקראת overlap and add:



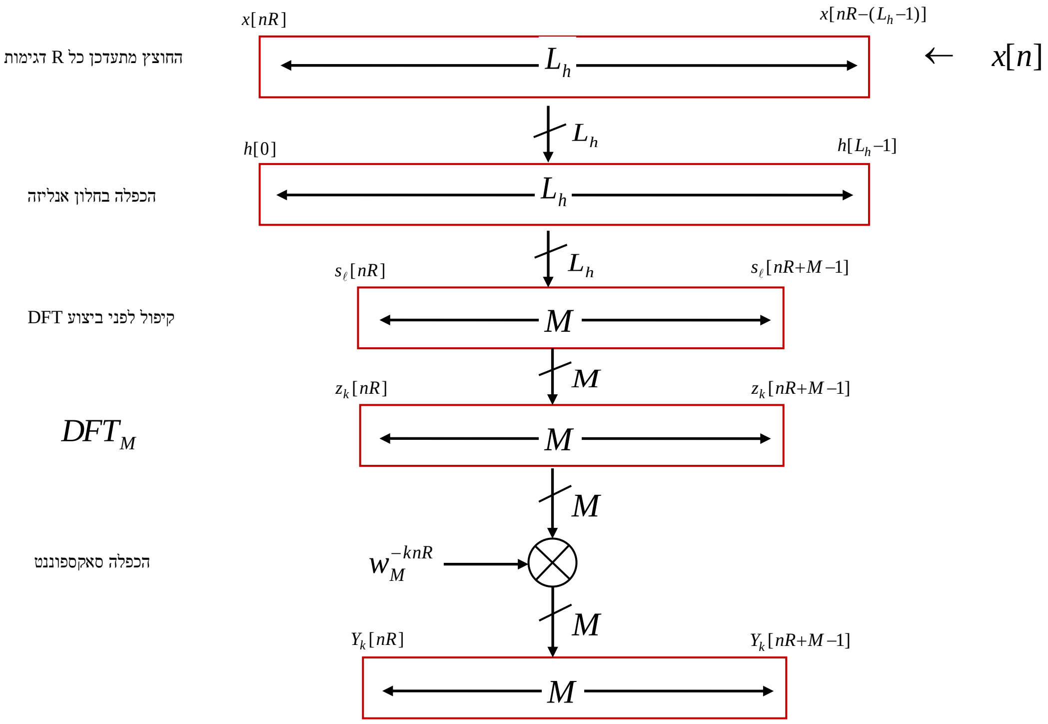
לחוצץ האחרון מכניסים R אפסים (כך שיצאו החוצה R דגימות חדשות של המוצא), ומחברים את L_f הדגימות החדשות שקיבלנו עם מה שיש בחוצץ (R אפסים + $L_f - R$ דגימות קודמות). R האפסים אינם משפיעים על הסכום, אלא הם רק מזיזים את המוצא כך שיוצאים R דגימות חדשות.

כידוע, L_f, L_h אינם מושפעים מ- M כך שאם נרצה תנאי לשחזור מושלם נוכל ליצור מסננים טובים יותר מאלו שקיבלנו בבנק מסננים.

19.1.2012 הרצאה 11

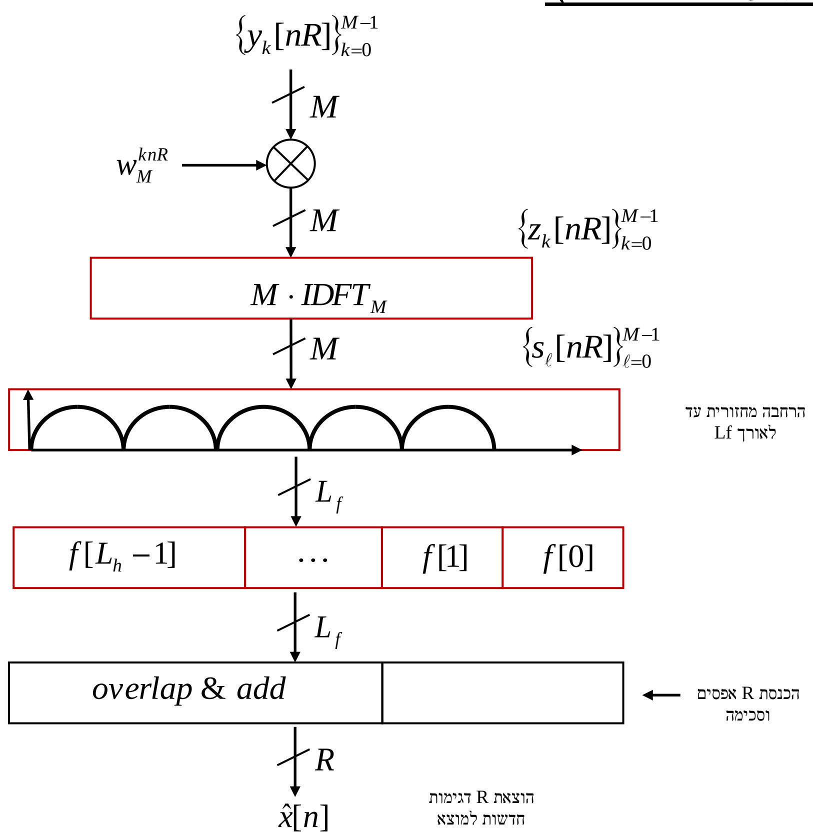
STFT - חזרה

אנליזה כולל דצימציה:



R - קובע את קצב עדכון החוצץ עליו עושים את כל הפעולות. היתרון במערכת הוא שאנו יכולים לבחור כל R שנרצה, בניגוד לבנק מסננים, שם הכרחנו $R=M$.

סינתזה (ללא עיבוד בפסי התדר):



תנאים לשחזור מושלם

נרצה שהדגימות שיצאו החוצה יהיו שווים לדגימות שנכנסו, כלומר: $\hat{x}[n]=x[n]$

בשבוע שעבר ראינו כי: $\hat{x}[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\hat{x}_k[n]$

$$\hat{x}_k[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}z_k[rR]f[n-rR]e^{j\frac{2\pi}{M}(n-rR)k}$$

$$z_k[n]=x[n]*(e^{j\frac{2\pi}{M}kn}h[n])=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-m]e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-m)}$$

$$z_k[rR]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[rR-m]e^{j\frac{2\pi}{M}k(rR-m)}$$

$$\hat{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[m]f[n-rR]h[rR-m]\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-m)}$$

קיבלנו קשר בין הכניסה למוצא כתלות בחלונות האנליזה והסינתזה. נשתמש בזהות:

$$\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-m)}=\frac{1-e^{j2\pi(n-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)}}=\begin{cases}M & n-m=pM\\ 0 & o.w\end{cases}=M\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta[n-m-pM]$$

כלומר: מקבלים M עבור כל כפולה של M, אחרת - מקבלים 0. לפיכך, ניתן להציב בביטוי ל-$\hat{x}[n]$ רק את הנקודות השונות מ-0, כלומר נציב: $m=n-pM$, ונקבל:

$$\hat{x}[n]=M\sum_{p=-\infty}^{\infty}x[n-pM]\underbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rR]h[rR-n+pM]}_{I}$$

כעת נשים לב כי על מנת לקבל ערך יחיד של $x[n]$ ללא קיפולים, עלינו לדרוש כי הביטוי I יהיה דלתא לכל n, ומכאן נקבל את תנאי Portonoff:

$$\boxed{\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rR]h[rR-n+pM]=\delta[p]\qquad\forall n}$$

כך שנקבל: $\hat{x}[n]=M\sum_{p=-\infty}^{\infty}x[n-pM]\delta[p]=M\cdot x[n]$

אם החלונות $h[n],\ f[n]$ סיבתיים - נקבל השהייה במוצא (אך זה לא פוגע בתנאי השחזור)

מקרים פרטיים:

- $\underline{R=1}$: (אין שינוי קצב במערכת). נקבל את התנאי:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-r]h[r-n+pM]=\delta[p]\qquad\forall n$$

נציע שחזור מושלם על ידי הבחירה: $f[n]=M\cdot\delta[n]$

כך שנקבל: $f_k[n]=f[n]e^{j\frac{2\pi}{M}kn}=M\cdot\delta[n]e^{j\frac{2\pi}{M}kn}=M\cdot\delta[n]$

המשמעות של הבחירה של $f_k[n]$ (בתצורת בנק מסננים) היא שאנו מבצעים IDFT אבל אח"כ אנחנו מכפילים בחלון שיש בו רק דגימה אחת! למעשה אנו לוקחים רק את הדגימה הראשונה של ה-IDFT.

תזכורת: $IDFT\{Y[k]\}=y[n]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}Y[k]e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$

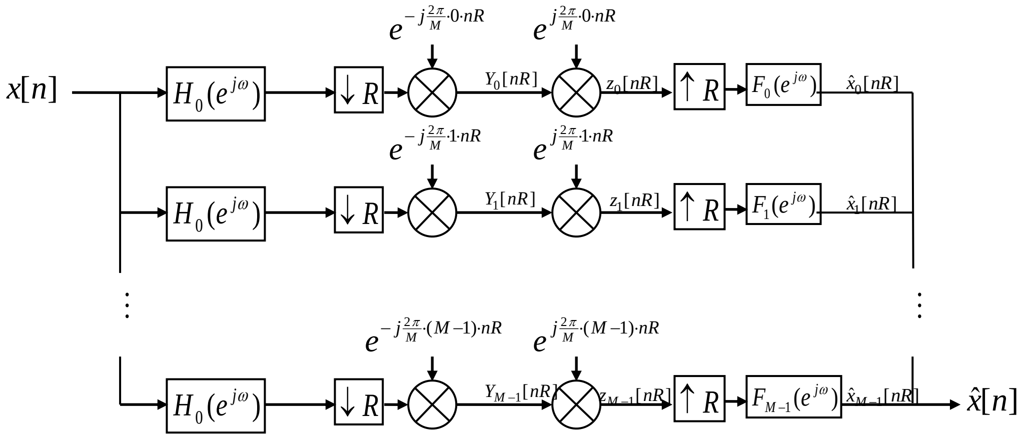
$$IDFT\{Y[k]\}\cdot M\cdot\delta[n]=\sum_{k=0}^{M-1}Y[k]e^{j\frac{2\pi}{M}kn}\delta[n]=\sum_{k=0}^{M-1}Y[k]$$

כלומר: במקום לעשות IDFT ולקחת רק את הדגימה הראשונה, ניתן (באופן שקול) לסכום את כל הדגימות שנכנסות לחוצץ ה-IDFT.

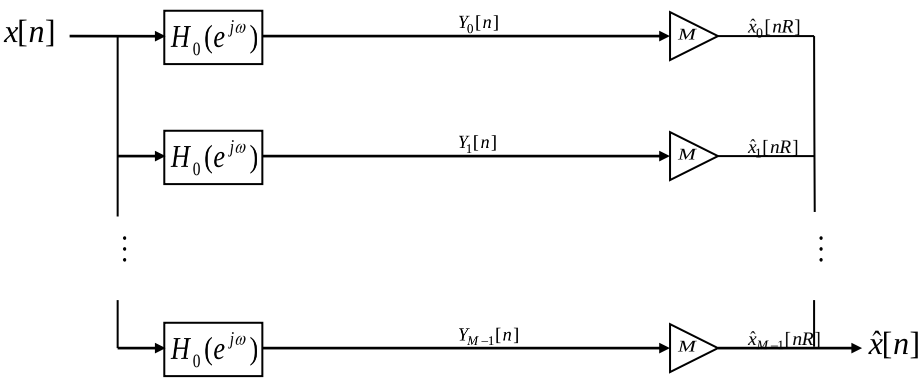
$$\sum_{k=0}^{M-1}z_k[nR]$$

שחזור באופן זה נקרא: FBS (Filter Bank Sum).

נצייר את מערכת האנליזה והסינתזה (ללא עיבוד בפסי התדר) בתצורת בנק מסננים:



כיון ש-$R=1$, $f_k[n]=M\cdot\delta[n]$ האקספוננטים מבטלים אחד את השני, והמערכת מתנוונת לצורה:



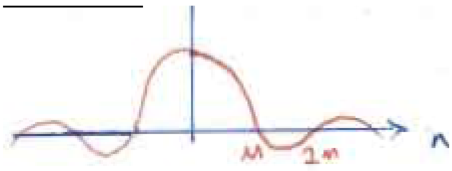
ניתן לראות מהציור כי על מנת לקבל שחזור מושלם (עד כדי הגבר M) נדרוש: $\sum_{k=0}^{M-1}H_k(z)=1$

נבדוק אנליטית ע"פ תנאי portonoff בהצבה של $R=1$, $f_k[n]=M\cdot\delta[n]$:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}M\cdot\delta[n-r]\cdot h[r-n+pM]=M\cdot h[pM]=\delta[p]\qquad\forall n$$

$$h[n]=\begin{cases}\frac{1}{M} & n=pM,\ p=0\\ 0 & n=pM,\ p\neq 0\\ don't\ care & n\neq pM\end{cases}$$

מסנן לדוגמא שעונה על הדרישות הוא:
$$h[n]=\frac{\sin(\frac{\pi}{M}n)}{\pi n}=\begin{cases}\frac{1}{M} & n=pM,\ p=0\\ 0 & n=pM,\ p\neq 0\\ something & n\neq pM\end{cases}$$



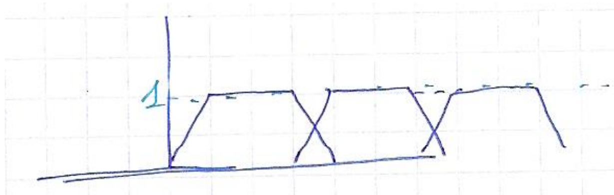
אין דרישה על L_h - האורך של $h[n]$, ולכן בתדר נוכל לקבל LPF טוב (ולכן $h_k[n]$ יהיו BPF טובים).
ננסה להבין טוב יותר את תפקיד המסננים $h_k[n]$:

$$f_k[n]=M\cdot\delta[n]$$
$$h_k[n]=h[n]\cdot e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

התנאי שראינו מהציור לשחזור מושלם הוא:
$$\sum_{k=0}^{M-1}H_k(z)=1\xleftrightarrow{DTFT^{-1}}\sum_{k=0}^{M-1}h_k[n]=\delta[n]$$
$$\sum_{k=0}^{M-1}h_k[n]=h[n]\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}kn}=h[n]\cdot\frac{1-e^{j2\pi n}}{1-e^{j\frac{2\pi}{M}n}}=h[n]\cdot M\cdot\delta[n\bmod M]$$

נציב את $h[n]$ שקיבלנו מתנאי portonoff:
$$=\begin{cases}\frac{1}{M}\cdot M\cdot 1=1 & n=pM,\ p=0\\ h[pM]\cdot M\cdot 1=0 & n=pM,\ p\neq 0\\ h[n]\cdot M\cdot 0=0 & n\neq pM\end{cases}=\delta[n]$$

קיבלנו זהות בין תנאי portonoff ובין התנאי שראינו מהציור. משמעות התנאי היא שסכום המסננים בכל נקודה בתדר הוא 1:



- $\underline{R=M}$ (כלומר: דצימציה קריטית):

מתנאי portonoff נקבל:
$$\tilde{g}[n,p]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rM]h[(r+p)M-n]=\delta[p]\qquad\forall n$$

נוכיח כי $\tilde{g}[n,p]$ היא פונקציה מחזורית M:
$$\begin{aligned}\tilde{g}[n+M,p]&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n+M-rM]h[(r+p)M-n-M]\\&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-(r-1)M]h[(r+p-1)M-n]\\&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rM]h[(r+p)M-n]=\tilde{g}[n,p]\end{aligned}$$

לפיכך מספיק להתייחס ל- M ערכים רצופים של n, כלומר: $n=<M>$.

א. נדון במקרה פרטי בו $h[n]$ הוא באורך M, למשל עבור M אי-זוגי:

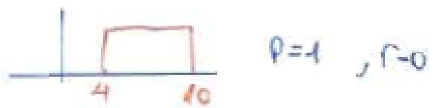
$$h[n]=0 \qquad n \notin [-\tfrac{M-1}{2},\tfrac{M-1}{2}]$$

לדוגמא עבור $M=7$:

תנאי portonoff במישור הזמן - משמעותו מניעת הקיפולים.

עבור $p\neq 0$ נקבל על פי תנאי portonoff:
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rM]h[(r+p)M-n]=0$$

עבור $M=7, p=1, r=0$ נקבל:
$$h[(r+p)M-n]=h[7-n]$$



כלומר על מנת למנוע קיפול בזמן עבור $p\neq 0$, נדרוש:
$$L_f \le M = L_h$$

עבור $p=0$ נקבל על פי תנאי portonoff:
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rM]h[(rM-n]=1$$

עבור $p=0, r=0$ נקבל:
$$f[n]h[-n]=1 \quad \forall n$$

עבור $r\neq 0$ לא תהיה חפיפה ולכן נקבל סכימה של אפסים. לפיכך:

$$f[n]=\frac{1}{h[-n]} \qquad \forall n$$

לסיכום: על מנת שסכום המכפלות $f[n-rM]h[(r+p)M-n]$ יהיה 0 חייבים לדרוש שהאורך של $f[n]$ יהיה ג"כ M.

המערכת הזאת עובדת, אבל כבר ראינו שיש לה בעיות, כגון: הגבלה על גודל החוצצים, וגם גודל הקפיצה הוא קטן מידי, כלומר: עדכון החוצץ איטי מידי.

תנאי Portonoff - המשך

- $\underline{R=1}$ (אין שינוי קצב במערכת):

בחרנו: $f_k[n]=M\cdot\delta[n]$

קיבלנו כי מערכת הסינתזה בנויה מסכימה של כל פסי התדר (FBS). קיבלנו כי התנאי לשחזור מושלם:

$$\sum_{k=0}^{M-1}H_k(z)=1$$

- $\underline{R=M}$ (דצימציה קריטית):

א. עבור $L_h=M$, דרשנו: $L_f=M$.

ב. כעת נעבור למקרה הכללי, עבור L_h ו- L_f כלליים. מתנאי Portonoff נקבל:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rM]h[(r+p)M-n]=\delta[p]\qquad\forall n$$

חילוף משתנה: $r\leftrightarrow -r$:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n+rM]h[(p-r)M-n]=\delta[p]\qquad\forall n$$

נגדיר את מסנני ה-Poly-Phase:

$$\tilde{f}_n[p]\equiv f[pM+n]$$
$$\tilde{h}_n[p]\equiv h[pM-n]$$

נשים לב שאלו שני סוגים שונים של Poly-Phase! נקבל:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\tilde{f}_n[r]\tilde{h}_n[p-r]=\tilde{f}_n[p]*\tilde{h}_n[p]=\delta[p]\qquad\forall n$$

כלומר: במישור התדר:

$$\tilde{F}_n(z)\cdot\tilde{H}_n(z)=1$$

זהו בדיוק התנאי שדרשנו לשחזור מושלם כאשר דנו בבנק מסננים (כי המערכת עבור דצימציה קריטית מזדהה עם מערכת בנק המסננים).

- $\underline{R<M}$

א. עבור $L_h=M$, נקבל $L_f=M$ משיקולים זהים למקרה הקודם. ההבדל הוא שהציור יזוז ב- R ולא ב- M. התנאי של גודל החלונות מבטיח קיום תנאי Portonoff עבור $p\neq 0$.

עבור $p=0$ נדרוש מניעת עיוות:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rR]h[rR-n]=1\qquad\forall n$$

נציע פתרון:

$$f[n]=\frac{h[n]}{\sum_{r'=-\infty}^{\infty}h[n-r'R]h[r'R-n]}$$

כאשר $h[n]=0$ גם $f[n]=0$, שניהם באותו אורך.

נציב ונקבל:

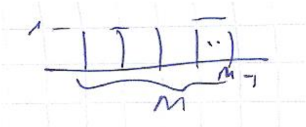
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[rR-n]\frac{h[n-rR]}{\sum_{r'=-\infty}^{\infty}h[n-rR-r'R]h[r'R+rR-n]}$$

נציב $r''=r+r'$ ונקבל:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\frac{h[n-rR]h[rR-n]}{\sum_{r''=-\infty}^{\infty}h[n-r''R]h[r''R-n]}\right]=\frac{\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[n-rR]h[rR-n]}{\sum_{r''=-\infty}^{\infty}h[n-r''R]h[r''R-n]}=1$$

זה מתקיים כי הסכום במכנה תלוי רק ב- r'' ולכן הביטויים זהים.

פתרון נוסף: $f[n]=1 \quad \forall 0 \le n \le M-1$



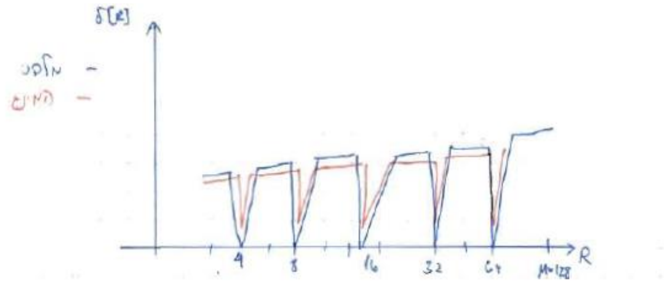
נקבל: $\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[rR-n]=1 \quad \forall n$

נגדיר: $\tilde{h}[n] \equiv \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[rR-n]=1$

בעצם החלון $f[n]$ לא עושה כלום, כי עבור $p=0$ אנחנו נופלים בדיוק על אותם נקודות של $h[n]$ ואז זזים ביחד R כל פעם, ולכן בעצם מסנן האנליזה שלנו אדיש ל-$f[n]$ שבחרנו.

נגדיר קריטריון שגיאה: $\delta[R]=\left[\sum_{n=0}^{M-1}(\tilde{h}[n]-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

השגיאה תלויה בצורת החלון $h[n]$ ובגודל החפיפה R. עבור: $f[n]=1$, $M=128$:



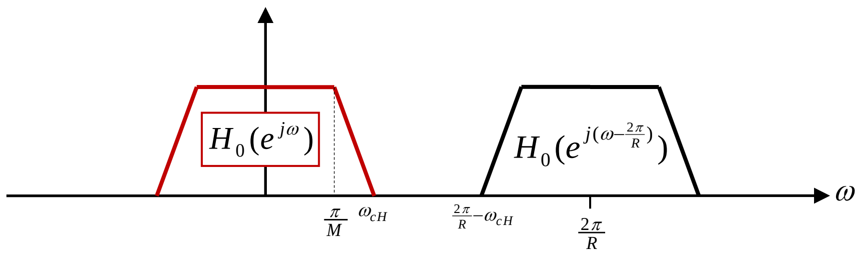
יש שרטוט בספר: Multirate digital signal processing / Ronald E. Crochiere, Lawrence R. Rabiner (p. 340)

- $\underline{R>M}$:
  עבור מקרה זה - נקבל קיפולים בתדר, ואז לא נוכל לקבל שחזור מושלם. לא נדון במקרה זה.

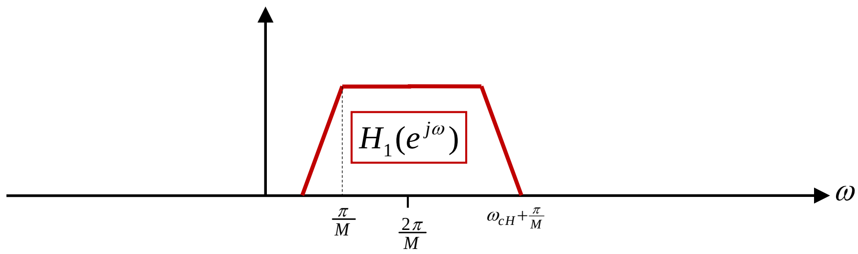
<u>סיכום הדרישות לשחזור מושלם מהיבטי זמן ותדר</u>

<u>דרישות בתדר:</u>

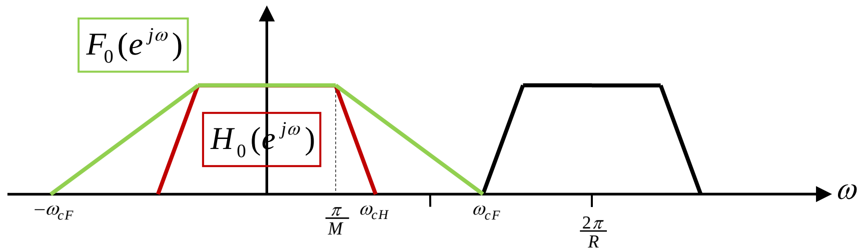
נתבונן בתצורת בנק מסננים עבור $H_0(e^{j\omega})$. נניח כי מורידים קצב פי $R<M$. אזי מתווספים שכפולים כל $\frac{2\pi}{R}$:



המסנן $H_1(e^{j\omega})=H_0(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{M})})$ יראה באופן הבא:



על מנת שלא נקבל שכפולים, צריך שהמסנן $F_0(e^{j\omega})$ יבטל את השכפולים:



נשים לב שאם $H_0(e^{j\omega})$ צר מאוד, אזי $F_0(e^{j\omega})$ יכול להיות רחב. לכן עלינו לדרוש:

- על מנת שלא נקבל חורים בתדר נדרוש: $w_{cH} \geq \frac{\pi}{M}$, כך תהיה חפיפה בין המסננים H_0 ו- H_1
- כמו"כ מתנאי נייקוויסט נדרוש: $w_{cH} \leq \frac{\pi}{R}$. לפיכך הדרישות עבור w_{ch} הן:

$$\boxed{\frac{\pi}{M} \leq w_{cH} \leq \frac{\pi}{R}}$$

- על מנת שהמסנן $F_0(e^{j\omega})$ יסנן את השכפולים נדרוש: $w_{cF} \leq \frac{2\pi}{R} - w_{cH}$

$$\boxed{w_{cH} + w_{cF} \leq \frac{2\pi}{R}}$$

בדר"כ נבחר: $w_{ch} + w_{cf} = \frac{2\pi}{R}$.

<u>מקרים פרטיים:</u>

- <u>$R = 1$</u>:

נדרוש: $\frac{\pi}{M} \leq w_{cH} \leq \pi$, ומהתנאי $w_{cH} + w_{cF} \leq 2\pi$, נקבל גם כי $w_{cf} \leq \pi$, כלומר: המסנן $F_0(e^{j\omega})$ יכול להיות מסנן $All-Pass$ (כפי שראינו לעיל, מערכת FBS)

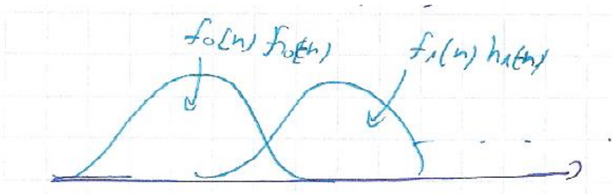
- <u>$R = M$</u>:

נדרוש: $w_{cH} = w_{cf} = \frac{\pi}{M}$, כלומר: המסנן $F_0(e^{j\omega})$ נופל בדיוק על המסנן $H_0(e^{j\omega})$ (כפי שראינו לעיל)

<u>דרישות בזמן:</u>

מתנאי Portonoff נקבל: $$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-n-pM] = \delta[p] \qquad \forall n$$

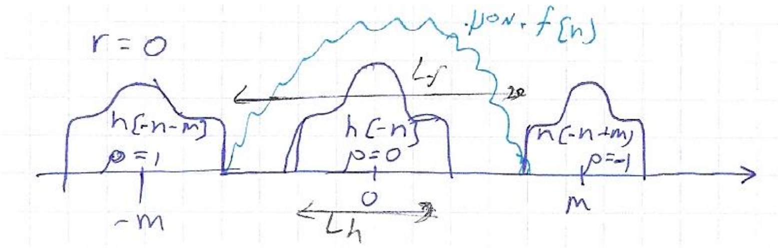
עבור $p = 0$: $$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \underbrace{f[n-rR]}_{f_r[n]}\underbrace{h[rR-n]}_{h_r[n]} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_r[n]h_r[n] = 1$$



המשמעות היא שטיחות בזמן (מניעת עיוות).

עבור $p \neq 0$: $\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-n-pM]=0$

נצייר עבור $r=0$:



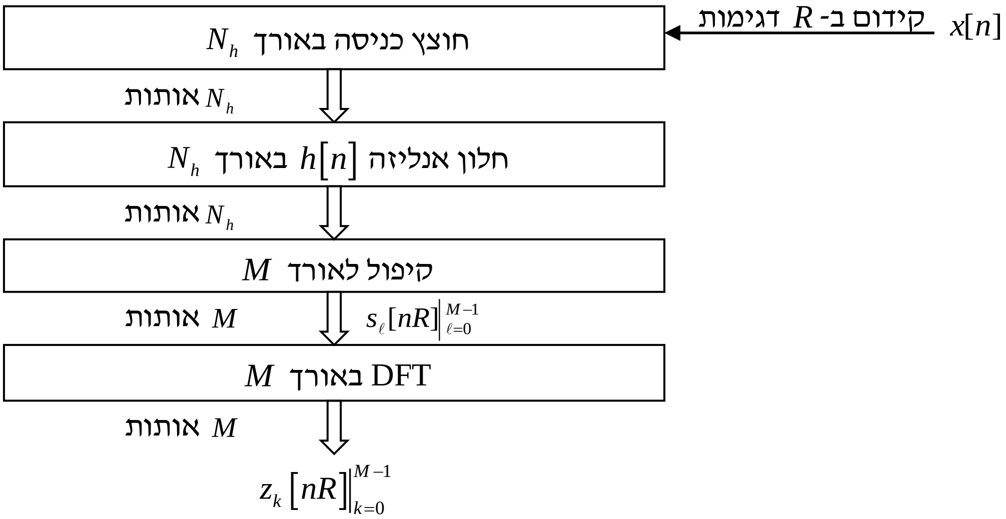
על מנת שהסכום יתאפס נדרוש שהמסנן $f[n]$ יאפס את כל השכפולים בזמן, חוץ מהשכפול המתקבל עבור $p=0$. כלומר התנאי על אורך המסנן L_f הוא: $L_f \le M - \frac{1}{2} L_h$

$$\boxed{L_f + L_h \le 2M}$$

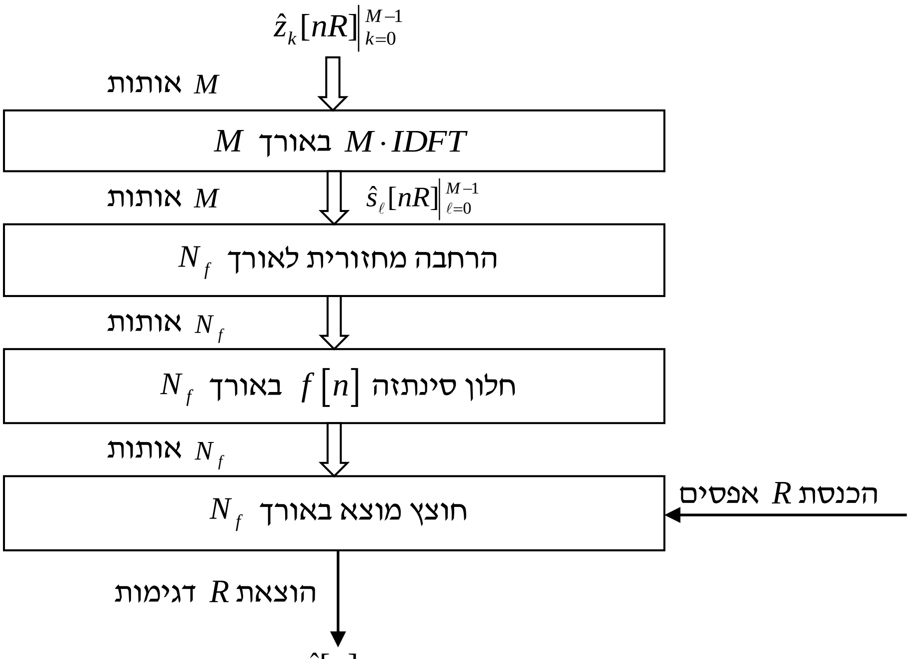
עבור $r \neq 0$ המסננים $h[rR-n-pM]$ האחרים מתרחקים עוד יותר מהמסנן האמצעי, ולכן אם קיימנו את התנאי עבור $r=0$, בודאי שקיימנו אותו עבור $r \neq 0$.

פתרון מבחן תשס"ט - מועד א - שאלה 2

🡸 נתונה מערכת לביצוע התמרת פורייה לזמן-קצר (STFT) כמודגם **באיור 1**:



נתונה מערכת שחזור (ISTFT), כמודגם **באיור 2**:

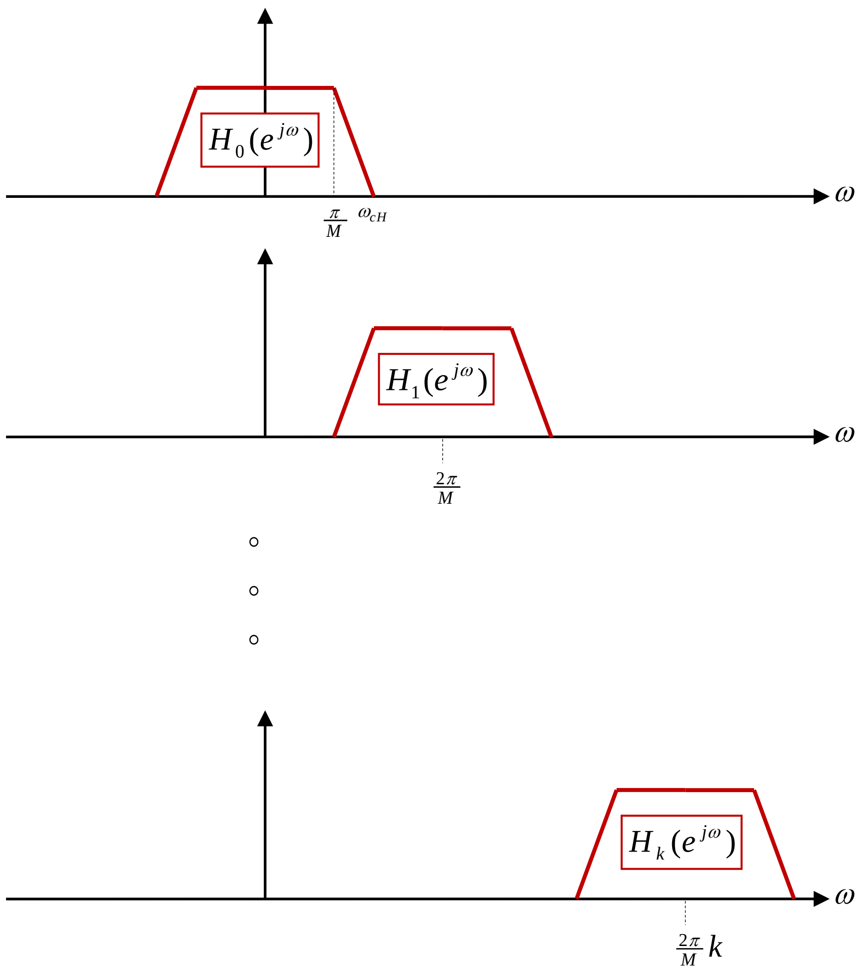


<u>הערות:</u>

- במערכת האנליזה המוצעת אין מבצעים הזזה של פסי התדר לפס בסיס ובמערכת הסינתזה אין מבצעים, לפיכך, אפנון.
- נתון $R < M$.
- לחלון האנליזה $h[n]$ תגובת תדר $H\left(e^{j\omega}\right)$ בעלת תדר קטעון $\omega_{cH} > \frac{\pi}{M}$. משמע, פסי התדר של ה-STFT חופפים. ניתן להניח שתגובת התדר מתאפסת עבור $\omega_{cH} < \omega < \pi$.
- נסמן את פונקצית התמסורת של כ"א ממסנני האנליזה:

$$H_k(z) = H(z \cdot e^{-j\frac{23\pi}{M}k}) \quad 0 \le k \le M-1$$

- תגובת התדר של המסננים בפסי התדר השונים מופיעה **באיור 3**.



- לחלון הסינתזה $f[n]$ תגובת תדר $F(e^{j\omega})$ בעלת תדר קטעון ω_{cF}. ניתן להניח שתגובת התדר מתאפסת עבור: $\omega_{cF} < \omega < \pi$.
- נסמן את פונקצית התמסורת של כ"א ממסנני הסינתזה:

$$F_k(z) = F(ze^{-j\frac{2\pi}{M}k}) \quad 0 \le k \le M-1$$

- נסמן לשם הקיצור: $v_k[n] \equiv z_k[nR] \qquad 0 \le k \le M-1$

$$u_k[n] \equiv \hat{z}_k[nR] \qquad 0 \le k \le M-1$$

- נתון, בנוסף, כי אין עיבוד בפסי התדר, משמע: $u_k[n] \equiv v_k[n] \qquad 0 \le k \le M-1$

<u>הדרכה:</u> זכרו כי ל- STFT רישום שקול כבנק מסננים.

א. **(5 נק')** רשמו את $V_k(z)$ כתלות ב-$X(z)$ ו- $H_k(z)$ עבור: $0 \le k \le M-1$.

פתרון:

$$V_k(z) = \{X(z)H_k(z)\}_{\downarrow R} = \frac{1}{R}\sum_{r=0}^{R-1} X(z^{\frac{1}{R}}e^{-j\frac{2\pi}{R}r})H_k(z^{\frac{1}{R}}e^{-j\frac{2\pi}{R}r})$$

ב. **(5 נק')** רשמו את האות המשוחזר $\hat{X}(z)$ כתלות ב-$U_k(z)$ ו-$F_k(z)$ עבור: $0 \le k \le M-1$

פתרון:

המוצא של בנק המסננים:

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \{U_k(z)\}_{\uparrow R} F_k(z) = \sum_{k=0}^{M-1} U_k(z^R) F_k(z)$$

ג. **(10 נק')** רשמו את האות המשוחזר $\hat{X}(z)$ כתלות ב-$X(z)$, $H_k(z)$ ו-$F_k(z)$ ובטאו אותו באופן הבא:

$$\hat{X}(z) = X(z)T(z) + \sum_{r=1}^{R-1} A_r(z) X(ze^{-j\frac{2\pi}{R}})$$

רשמו מפורשות את $T(z)$ ואת $1 \le r \le R$; $A_r(z)$.

פתרון:

כיון שאין עיבוד בפסי התדר, מתקיים: $U_k(z) = V_k(z)$. נציב ונקבל:

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} V_k(z^R) F_k(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{R} \sum_{r=0}^{R-1} X(ze^{-j\frac{2\pi}{R}r}) H_k(ze^{-j\frac{2\pi}{R}r}) F_k(z)$$

$$= \left[\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)F_k(z)\right] X(z) + \sum_{r=1}^{R-1}\left[\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1} H_k(ze^{-j\frac{2\pi}{R}r})F_k(z)\right] X(ze^{-j\frac{2\pi}{R}r})$$

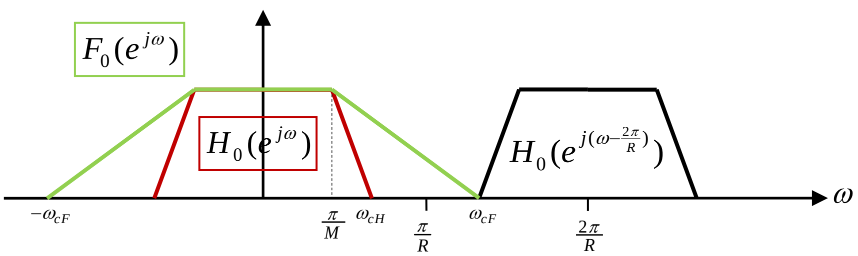
$$= T(z)X(z) + \sum_{r=1}^{R-1} A_r(z) X(ze^{-j\frac{2\pi}{R}})$$

הפרדנו בין האיברים שמכילים את $X(z)$ (הגדרנו את מקדם העיוות כ-$T(z)$) ובין האיברים שמכילים הסחות בתדר של $X(z)$ (איברים המוכפלים באקספוננט). למקדם שלהם קראנו $A_r(z)$.

ד. **(5 נק')** רשמו תנאי על ω_{cH} למניעת קיפול **בכל אחד** מהערוצים $0 \le k \le M-1$ $v_k[n]$

פתרון:

נצייר עבור $k=0$, אך הציור נכון לכל k (הזזה של הציור הנוכחי):



- על מנת שלא נקבל חורים בתדר נדרוש: $w_{cH} \ge \frac{\pi}{M}$, כך תהיה חפיפה בין המסננים H_0 ו-H_1
- כמו"כ מתנאי נייקוויסט, כיון שיש דצימציה פי R נדרוש: $w_{cH} \le \frac{\pi}{R}$. לפיכך הדרישות עבור w_{ch} הן:

$$\boxed{\frac{\pi}{M} \le w_{cH} \le \frac{\pi}{R}}$$

ה. **(5 נק')** הוכיחו כי התנאי $w_{cH}+w_{cF}\le\frac{2\pi}{R}$ יבטיח את ביטולם של אברי הקיפול במוצא, משמע:

$$\sum_{r=1}^{R-1}A_r(z)X(ze^{-j\frac{2\pi}{R}})=0$$

הדרכה: כדאי להעזר באיור של ההרכב התדרי של הערוץ $k=0$ ואז להרחיב עבור כל k.

פתרון:

ע"פ הציור, על מנת שהמסנן $F_0(e^{j\omega})$ יסנן את השכפולים נדרש: $w_{cF}\le\frac{2\pi}{R}-w_{cH}$

$$\boxed{w_{cH}+w_{cF}\le\frac{2\pi}{R}}$$

ו. **(5 נק')** אם אברי הקיפול בוטלו, כנדרש בסעיף ה' לעיל, מהו התנאי לשחזור מושלם $T(z)=c$ (c סקלר שרירותי)? רשמו תנאי זה מפורשות כתלות ב- $H(z),\ F(z)$.

פתרון:

על מנת למנוע עיוות נדרש:

$$T(z)=\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1}H_k(z)F_k(z)=\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1}H(ze^{-j\frac{2\pi}{M}k})F(ze^{-j\frac{2\pi}{M}k})=c$$

ז. **(5 נק')** נתון $R=1$. האם נוצר במקרה זה קיפול בפסי התדר? האם נוצר קיפול במוצא? הראו שבמקרה זה תצורת FBS מקיימת את תנאי השחזור המושלם שבסעיף ו'.

פתרון:

עבור $R=1$ (FBS) השכפולים מתרחקים ל- 2π, כלומר: אין שכפולים בפסי התדר. לכן $F_k(z)=1$ יכולים להיות מסנני All-Pass. נקבל לפי זה את התנאי למניעת עיוות:

$$T(z)=\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1}H_k(z)=c$$

🡸 נחזור ל- $1\le R\le M$ כללי:

ח. **(10 נק')** הגדירו: $E(z)=H(z)F(z)\xleftrightarrow{z}e[n]=h[n]*f[n]$

הוכיחו כי התנאי:

$$e[n]=\begin{cases}R & n=0\\ 0 & n=\pm M,\pm 2M,\pm 3M,\dots\\ don't\ care & o.w\end{cases}$$

יחד עם התנאי לביטול הקיפול שבסעיף ה' מבטיחים שחזור מושלם.

פתרון:

עבור R כללי מגדירים: $E(z)=H(z)F(z)\xleftrightarrow{z}e[n]=h[n]*f[n]$

$$T(z)=\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1}H(ze^{-j\frac{2\pi}{M}k})F(ze^{-j\frac{2\pi}{M}k})=\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1}E(ze^{-j\frac{2\pi}{M}k})=c$$

על ידי התמרת Z הפוכה לשני האגפים נקבל:

$$t[n]=c\cdot\delta[n]=\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1}e[n]e^{-j\frac{2\pi}{M}kn}=\frac{e[n]}{R}\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta[n-pM]$$

$$e[n]=\begin{cases}\frac{1}{R}e[n] & n=pM\ ,\ p=0 & \leftarrow \text{מנרמל}\\ 0 & n=pM\ ,\ p\neq 0 & \leftarrow \text{מאפס הלמים}\\ don't\ care & n\neq pM & \leftarrow \text{מאופס על ידי רכבת ההלמים}\end{cases}$$

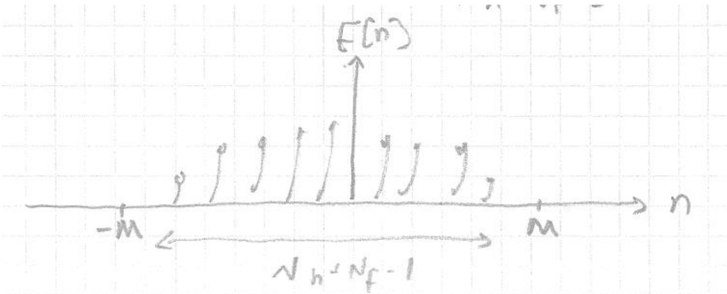
ט. **(10 נק')** נתון כי חלונות האנליזה והסינתזה ממורכזים סביב $n=0$ וכי אורכם N_h ו- N_f, בהתאמה. הוכיחו כי התנאי בסעיף ח' מתקיים, **ללא תלות בצורת החלונות**, אם מתקיימים התנאים:

$$1)\quad N_h+N_f\leq 2M$$

$$2)\quad \sum_k h[k]f[-k]=R$$

פתרון:

אורכו של $e[n]=h[n]*f[n]$ הוא: N_h+N_f+1. כלומר:



נדרוש שהוא לא יגיע ל- M או $(-M)$, כך שרק $e[0]$ ישפיע (תנאי זה ראינו בשיעור שעבר כתנאי למניעת קיפול בזמן). כלומר נדרוש:

$$N_h+N_f+1<2M$$

$$\Downarrow$$

$$N_h+N_f\leq 2M$$

כמו"כ, יש רק לדאוג להגבר ב- $e[0]$ להבטחת שחזור מושלם:

$$e[n]=h[n]*f[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]f[n-k]$$

$$e[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]f[-k]=R$$

נשים לב כי תנאי למניעת קיפול בזמן מספיק כדי להבטיח חוסר עיוות בתדר.

ננסה לשפוך אור על הקשרים שקיבלנו. מוצא המערכת שקיבלנו (מהתבוננות במערכת כבנק מסננים):

$$\hat{X}(z)=\left[\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1}H_k(z)F_k(z)\right]X(z)+\sum_{r=1}^{R-1}\left[\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{M-1}H_k(ze^{-j\frac{2\pi}{R}r})F_k(z)\right]X(ze^{-j\frac{2\pi}{R}r})$$

קשר זה הינו קשר דואלי לקשר שקיבלנו בכיתה בתחום הזמן, שממנו נגזר תנאי Portonoff:

$$\hat{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[m]f[n-rR]h[rR-m]\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-m)}$$

הן בכיתה, והן בשאלה שלפנינו פיתחנו תנאים לשחזור מושלם. ראינו בכיתה כי קיימים מקרים פרטיים רבים לתנאי Portonoff שכל אחד מהם נותן שחזור מושלם (או כמעט מושלם). לפיכך ניתן לראות את השאלה כפיתוח תנאי פרטי נוסף לשחזור מושלם. התנאים שקיבלנו הם:

$$(1) \quad \omega_{cH} + \omega_{cF} \le \tfrac{2\pi}{R}$$

$$(2) \quad T(z) = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) F_k(z) = const$$

תנאים אלה אינם מגדירים שום תנאי על אורך התגובה להלם של המסננים (כפי שאנו אכן יודעים מתצורת שחזור FBS, שבה $f_k[n]$ הוא הלם, אך $h_k[n]$ יכול להיות אינסופי.

למרות שאין תנאים על אורך החלונות בזמן, משמע, ייתכן קיפול בזמן במעבר מחוצץ הכניסה לאותות $s_\ell[nR]$ - עדיין המערכת הכוללת משחזרת שחזור מושלם, אם מתקיימים התנאים בסעיפים ה-ו.

נשים לב כי התנאי בסעיף ד מחמיר ומפאשר מניעת קיפול בתדר בכל אחד מפסי התדר, אך עדיין אינו אומר דבר על קיפול בזמן.

בסעיף ט' ראינו כי אם מתקיים התנאי למניעת קיפול בזמן במוצא המערכת:

$$N_h + N_f \le 2M$$

אזי מתקיים תנאי חוסר העיוות שבסעיף ו'. לכן צמד התנאים:

$$(1) \quad \omega_{cH} + \omega_{cF} \le \tfrac{2\pi}{R}$$

$$(2) \quad N_h + N_f \le 2M$$

מספיק כדי להבטיח שחזור מושלם במערכת הכוללת.

<u>מבחן תשס"ט - מועד ב:</u>

- $N_h \le M$, כלומר: אין קיפול במסגרות $s_\ell[nR]$
- $N_h + N_f \le M$ - מניעת קיפול בזמן במוצא (Portonoff)
- מניעת עיוות בזמן (שטיחות, נגזר מתנאי Portonoff):

$$\sum_{k=0}^{M-1} f[n-rR]h[rR-n] = 1$$

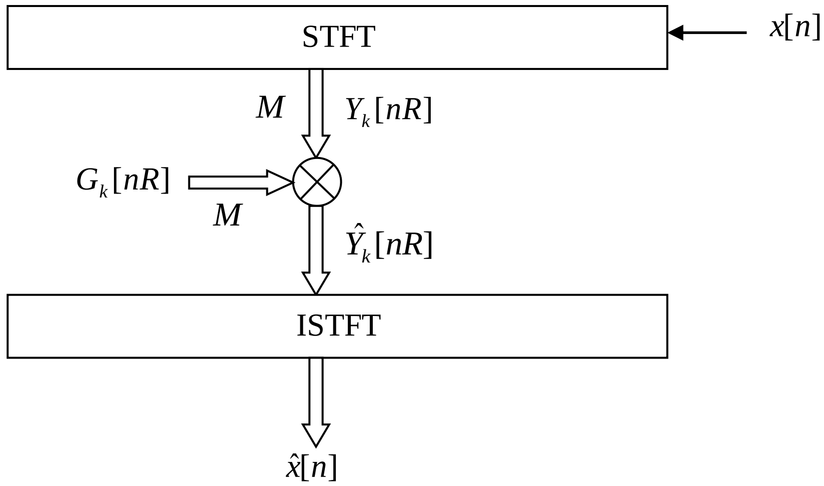
- שטיחות בזמן מתקיימת אם:

$$\omega_{cH} + \omega_{cF} \le \tfrac{2\pi}{R}$$

שזה תנאי למניעת קיפול בתדר.

הרצאה 14 2.2.2012

<u>מודיפיקציה בתדר</u>



המטרה היא לבדוק מהי ההשפעה של השינוי בפסי התדר, המתבטא על ידי הכפלה איבר איבר של $Y_k[nR]$ ב- $G_k[nR]$. נתמקד בשאלות הבאות:

- האם המודיפיקציה בתדר מתבטאת כפעולה של סינון (קונבולוציה ליניארית), כלומר:

$$\hat{x}[n]\overset{?}{=}\tilde{g}[n]*x[n-D]$$

- אם כן, מהו הקשר בין $\tilde{g}[n]$ ל- $g[n]$ (התמרת ISTFT ההופכית של $G_k[nR]$)?
- האם תנאי שחזור מושלם עדיין תקף במקרה זה?

<u>תזכורת - שיטת Overlap & Add:</u>

נתון אות אינסופי $x[n]$ ותגובה להלם סופית $h[n]$ באורך N_h. ברצוננו לממש קונבולוציה ליניארית של שני האותות.

נחלק את האות למקטעים, כך שכל מקטע באורך N. נסמן את המקטע ה- m כ: $x_m[n]$

$$x_m[n]=\begin{cases}x[n+Nm] & 0\le n\le N-1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

אם נחבר את כל המקטעים נקבל את האות המקורי: $x[n]=\sum_{m=0}^{\infty}x_m[n-Nm]$

תוצאת הקונבולוציה בין האותות תהיה:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]h[n-r]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x_m[r-Nm]h[n-r]=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_m[r-Nm]h[n-r]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}y_m[n-mN]$$

כאשר: $y_m[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_m[r]h[n-r]=x_m[n]*h[n]$

תוצאת הקונבולוציה מתקבלת על ידי חיתוך האות האינסופי למקטעים באורך N, ביצוע קונבולוציה ליניארית לכל קטע, וסכימה של התוצאות שמתקבלות. היתרון כאן הוא שהאותות $x_m[n],h[n]$ הם

סופיים, ולכן ביצוע הקונבולוציה אפשרי (על ידי ריפוד באפסים של שני האותות וביצוע קונבולוציה ציקלית בעזרת DFT). אורך הקונבולוציה הליניארית לקטע אחד יהיה: $N_f = N + N_h - 1$.

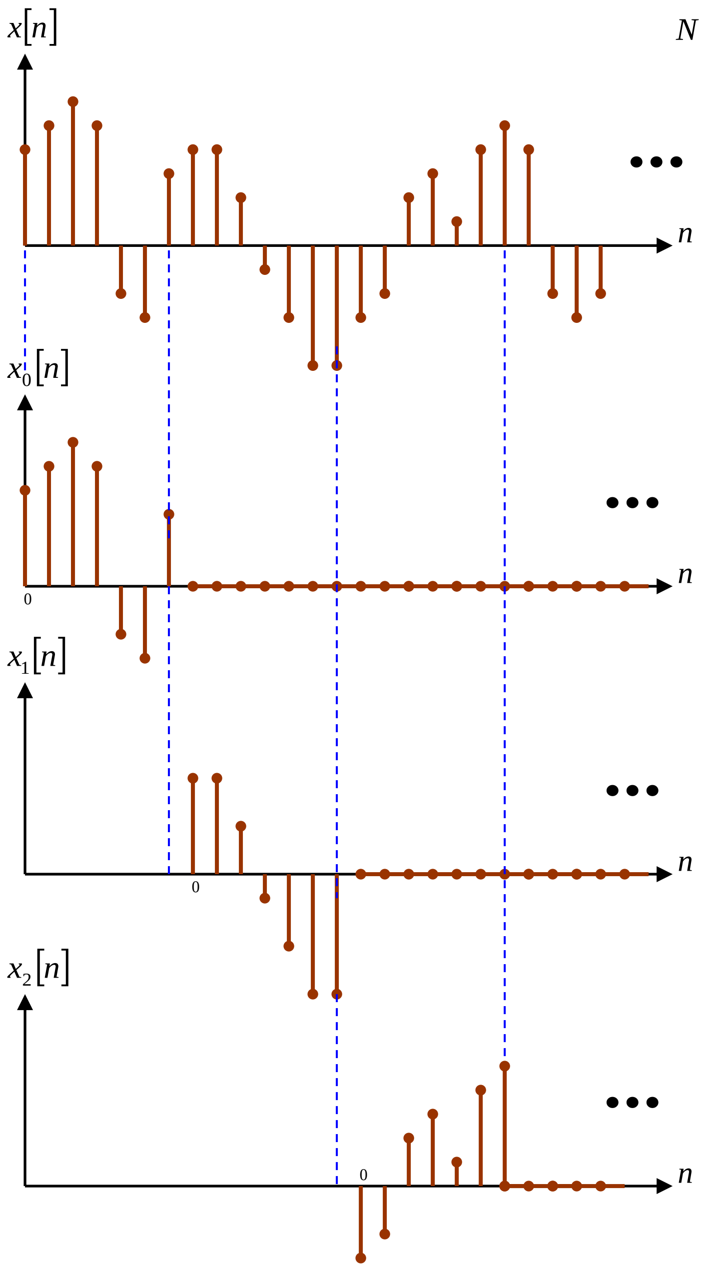
- יש לשרשר את הקטעים $y_m[n-mN]$, נשים לב כי תהיה חפיפה ב-$N_h - 1$ הדגימות האחרונות, ולכן במקרה שיש חפיפה נסכום את שתי הקטעים החופפים.
- ההשהייה של המערכת היא מקסימום של אורך ה-DFT: $N + N_h - 1$.
- המוצא $y[n]$ יתקבל באופן הבא:

$$y[n] = \begin{cases} y_0[n] & n = 0,1,\ldots,N-1 \\ y_0[n] + y_1[n-N] & n = N, N+1,\ldots,N+(N_h-1)-1 \\ y_1[n-N] & n = N+N_h,\ldots,2N-1 \\ y_1[n-N] + y_2[n-2N] & n = 2N,\ldots,2N+(N_h-1)-1 \\ y_2[n-2N] & n = 2N+(N_h-1),\ldots,3N-1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

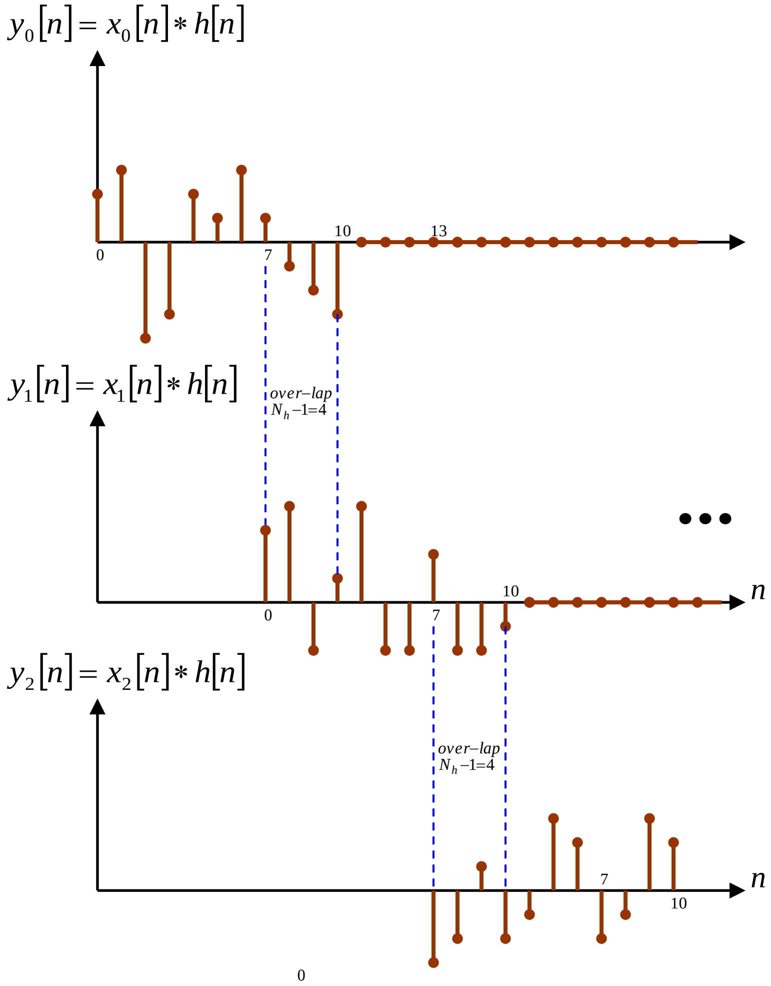
<u>דוגמא:</u> בדוגמא זו: $N_h = 5$, $N = 7$

האות האינסופי:

נחלק לקטעים באורך $N = 7$:



כעת עלינו לחשב את הקונבולוציה הליניארית של $x_m[n]*h[n]$ כפי שראינו לעיל:



כדי לקבל את הדגימה הראשונה אנו צריכים $N=7$ דגימות מהאות. נעשה קונבולוציה שלהם עם המסנן ונקבל $N+N_h-1=11$ דגימות ולסכום אותם. לכן ההשהייה היא של $N_f=N+N_h-1=11$ שזה אורך ה-DFT של האות המרופד באפסים.

כעת, נשים לב כי שיטת Overlap & Add היא בעצם מקרה מיוחד של STFT:

- חלון האנליזה הוא חלון המלבני באורך N, בעזרתו אנו מחלקים את האות $x[n]$ למקטעים באורך N.
- מכיון שאין חפיפה בין החלקים של האות, מתקיים: $R=N$, כלומר: מעדכנים את החוצץ כל R דגימות.
- מבצעים DFT באורך $N_f=N+N_h-1$ (על ידי ריפוד באפסים)
- מבצעים מודיפיקציה של N_f פסי התדר ע"י הכפלה ב- $G_k=DFT_M\{g[n]\}$
- חלון הסינתזה הוא ג"כ חלון מלבני, באורך $N_f=N+N_h-1$
- ישנה חפיפה של בין חוצצי המוצא של N_h-1 דגימות.

<u>תזכורת - שיטת Overlap & Save:</u>

בשיטה זו נחלק מראש את המקטעים לאורך של $N_f = N + N_h - 1$, אלא שנעשה ביניהם חפיפה של $N_h - 1$ איברים. כעת נבצע קונבולוציה ציקלית באמצעות קונבולוציה ליניארית עם דריכות - חלק מהדגימות יצאו לנו טוב ולא יושפעו מהדריכות. נשתמש בזה באופן הבא:

$$y_c[n] = x[n] \overset{L}{\otimes} h[n] = \sum_{m=0}^{L-1} x[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^{N_h} x[m]h[n-m] + \sum_{m=N_h+1}^{L-1} x[m]h[n-m]$$

עבור $m = N_h + 1, \ldots, L-1$, $n \ge N_h$ מתקיים: $h[n-m] = 0$ (הסכום השני מתאפס), ולכן:

$$y_c[n] = \sum_{m=0}^{N_h} x[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = y[n]$$

כלומר: קיבלנו עבור $n \ge N_h$ כי הקונבולוציה הליניארית זהה לקונבולוציה הציקלית, ובלבד שנתעלם מ-$N_h - 1$ הדגימות הראשונות.

לפיכך נחלק את $x[n]$ את למקטעים באורך N_f עם חפיפה באורך $N_h - 1$, ונעשה קונבולוציה ציקלית עם התגובה להלם $h[n]$, לאחר מכן נזרוק את $N_h - 1$ הדגימות הראשונות שנקבל. באופן זה ההשהייה תעלה ל-L. [במטל"ב - רצוי לאתחל שם לאפסים כדי שנוכל לחסר אותם]

נשים לב כי Overlap & Save הוא בעצם מקרה מיוחד של STFT:

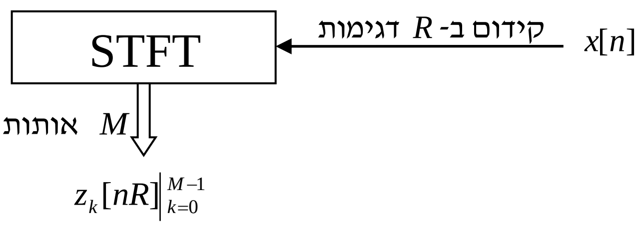
- חלון האנליזה הוא חלון מלבני באורך N_f.
- ישנה חפיפה של $R = N_f - (N_h - 1)$ בין חוצצי הכניסה. בכל פעם R איברים חדשים נכנסים.
- מבצעים DFT באורך N_f (ללא ריפוד באפסים)
- מבצעים מודיפיקציה של פסי התדר ע"י הכפלה ב-$G_k = DFT_M\{g[n]\}$
- חלון הסינתזה הוא חלון מלבני באורך N_f, והוא מאפס את $N_h - 1$ הדגימות הראשונות.

<u>מתוך מבחן תשס"ח - מועד א - שאלה 2:</u>

מבצעים **אנליזת** STFT לאות $x[n]\ ;\ -\infty < n < \infty$ ומקבלים M אותות $z_k[nR]\ ;\ 0 \le k \le M-1$

כנלמד בכיתה. L_h הוא אורך חלון האנליזה **הסימטרי** $h[n]$ ו-M הוא אורך ה-DFT.

מערכת האנליזה נתונה באיור:



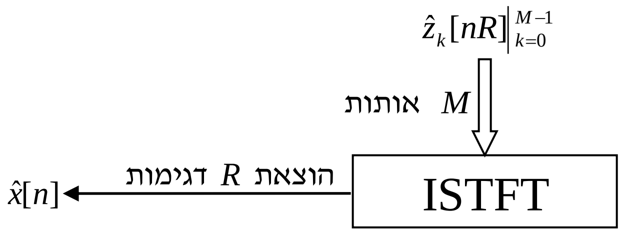
הערה: שימו לב, שבשאלה, כמו במקרים רבים במציאות, אנו מוותרים על ההעברה של כל פס תדר לפס-בסיס, משמע **אין** מכפילים ב-$e^{-j\frac{2\pi}{M}knR}$.

כל אחד מהאותות $z_k[nR]\ ;\ 0 \le k \le M-1$ **מוכפל** ע"י מקדם מרוכב כדלקמן:

$$\hat{z}_k[nR] = G_k \cdot z_k[nR]\ ;\ 0 \le k \le M-1$$

האותות המעובדים $\hat{z}_k[nR]\ ;\ 0 \le k \le M-1$ עוברים עתה **סינתזת** ISTFT לקבלת אות המוצא $\hat{x}[n]\ ;\ -\infty < n < \infty$, כנלמד בכיתה. L_f הוא אורך חלון הסינתזה $f[n]$ ו-M הוא גם אורך ה-IDFT.

מערכת הסינתזה נתונה באיור:



א. **(12 נק')** הוכיחו כי אות המוצא נתון ע"י:

$$\hat{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[m]f[n-rR]h[rR-m]\sum_{k=0}^{M-1}G_k\cdot e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-m)}$$

הדרכה: אין צורך לשוב ולפתח תוצאות שפותחו בכיתה.

<u>פתרון:</u>

נרשום את $\hat{x}[n]$ כפונקציה של נתוני הבעיה ואות הכניסה $x[n]$:

$$z_k[rR]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[rR-m]e^{j\frac{2\pi}{M}(rR-m)k}$$

$$\hat{z}_k[rR]=G_k\cdot z_k[rR]$$

$$\hat{x}_k[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{z}_k[rR]f[n-rR]e^{j\frac{2\pi}{M}(n-rR)k}$$

$$\hat{x}[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\hat{x}_k[n]=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty}G_k\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[rR-m]e^{j\frac{2\pi}{M}(rR-m)k}\,f[n-rR]e^{j\frac{2\pi}{M}(n-rR)k}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[m]f[n-rR]h[rR-m]\sum_{k=0}^{M-1}G_k\cdot e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k}$$

ב. **(12 נק')** נתון $0\le k\le M-1\ \ ;\ \ G_k=e^{-j\frac{2\pi}{M}kD}$. רשמו משואה שעל חלון האנליזה $h[n]$ וחלון הסינתזה $f[n]$ לקיים יחדיו, כדי שיובטח:

$$\hat{x}[n]=M\cdot x[n-D]$$

פתרון:

נתחיל במודיפיקציה פשוטה: $G_k=e^{-j\frac{2\pi}{M}kD}\ \ ;\ \ 0\le k\le M-1$

בעצם העיבוד הוא בסה"כ השהייה בזמן D. נציב בתוצאות סעיף א':

$$\hat{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[m]f[n-rR]h[rR-m]\sum_{k=0}^{M-1}G_k\cdot e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[m]f[n-rR]h[rR-m]\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m-D)k}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[m]f[n-rR]h[rR-m]\cdot M\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta[n-m-D-pM]$$

בגלל פונקציית הדלתא ישאר מהסכום על m האיבר: $m=n-d-pM$, ולכן נקבל:

$$=M\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty}x[n-D-pM]\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rR]h[rR-(n-D-pM)]$$

נדרוש לכל n:
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-(n-D-pM)]=\delta[p]$$

ונקבל כנדרש:
$$\hat{x}[n]=M\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[n-D-pM]\cdot\delta[p]=M\cdot x[n-D]$$

נתון מעתה, כי המקדמים $0\le k\le M-1\ \ ;\ \ G_k$ הם התמרת DFT של מסנן בעל תגובה להלם סופית $0\le \ell\le L_g-1\ \ ;\ \ g[\ell]$. כמו כן נתון כי אורך המסנן **קטן או שווה** לאורך ה-DFT: $L_g\le M$ (זאת על מנת לא לקבל דריכות במסנן בגלל הקיפולים של $\tilde{g}[\ell]$. כזכור IDFT מגדיר סדרה מחזורית. נגדיר לכן:
$$\tilde{g}[\ell]=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} G_k e^{j\frac{2\pi}{M}k\ell}=\sum_{p=-\infty}^{\infty} g[\ell-pM]$$
הרחבה מחזורית של המסנן $g[\ell]$.

ג. **(12 נק')** הוכיחו כי אות המוצא מקיים:
$$\hat{x}[n]=M\cdot\sum_{s=0}^{L_g-1} g[s]\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[n-s-pM]\cdot\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-n+s+pM]$$
הדרכה: השתמשו בחילוף משתנה הסכימה $-\infty<m<\infty$ במשתנה הסכימה $-\infty<s<\infty$ עפ"י הנוסחה: $s=n-m-pM$, ובסופיות התגובה להלם של המסנן.

פתרון:

בנוסחת השחזור הופיע האיבר:
$$\sum_{k=0}^{M-1} G_k\cdot e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k}=M\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty} g[n-m-pM]$$
נציב זאת בביטוי ל-$\hat{x}[n]$ ונבצע חילוף משתנה:
$$s=n-m-pM$$
$$\hat{x}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[m]f[n-rR]h[rR-m]\cdot M\cdot\sum_{p=-\infty}^{\infty} g[n-m-pM]$$
$$=M\cdot\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[n-s-pM]f[n-rR]h[rR-(n-s-pM)]g[s]$$
נשתמש בעובדה ש-$g[s]$ הוא מסנן FIR באורך L_g, ונקבל:
$$=M\cdot\sum_{s=0}^{L_g-1} g[s]\sum_{p=-\infty}^{\infty} x[n-s-pM]\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-(n-s-pM)]$$

נדרש כי אות המוצא $\hat{x}[n]$ יהווה סינון LTI של אות הכניסה ע"י המסנן בעל התגובה הסופית להלם $0\le\ell\le L_g-1\ \ ;\ \ g[\ell]$ (עד כדי הכפלה בקבוע). מפורשות נדרש:
$$\hat{x}[n]=M\cdot\sum_{s=0}^{L_g-1} g[s]x[n-s]$$

ד. **(10 נק')** הוכיחו כי התנאי:
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-n+s+pM]=\delta[p]\ ,\ \forall n\ \ and\ \ 0\le s\le L_g-1$$
מבטיח שאות המוצא הוא אכן הסינון הנדרש של אות הכניסה.

פתרון:

נבחר:
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-n+s+pM]=\delta[p]\ ,\ \forall n\ \ and\ \ 0\le s\le L_g-1$$

זהו תנאי Portonoff המורחב, שמבטיח שלא יהיו קיפולים בזמן.

ונקבל:
$$\hat{x}[n]=M\cdot\sum_{s=0}^{L_g-1}g[s]\sum_{p=-\infty}^{\infty}x[n-s-pM]\cdot\delta[p]=M\cdot\sum_{s=0}^{L_g-1}g[s]x[n-s]$$

כלומר: תחת תנאי Portonoff אנו מקבלים כי מוצא המערכת הוא קונבולוציה בין אות הכניסה $x[n]$ ובין המסנן $g[n]$.

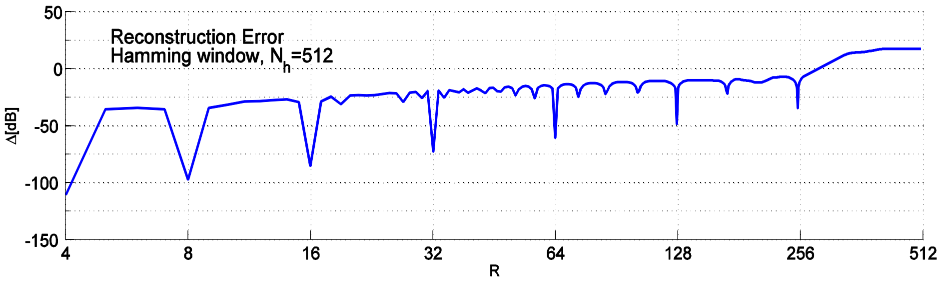
ה. **(14 נק')** נתון כי:

- חלון האנליזה הוא חלון Hamming בעל אורך $L_h=512$.
- חלון הסינתזה הוא חלון מלבני בעל אורך L_f (שיש למצוא בשאלה)
- אורך ה-DFT מקיים $M=L_f$
- אורך המסנן $L_g=11$

נגדיר, כפי שעשינו בכיתה, את **שגיאת הקרוב הריבועית** של שיטת ה- weighted overlap & add עבור חלון סינתזה מלבני:

$$\Delta[dB]=10\cdot\log_{10}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(1-\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[rR-i]\right)^2\right)$$

הגרף להלן מתאר את התלות של $\Delta[dB]$ בגורם הורדת הקצב R:



1) מצא L_f **הקטן ביותר** שמבטיח את קיום התנאי בסעיף ד' עבור $p\neq 0$; $-\infty<p<\infty$:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rR]h[rR-n+s+pM]=0\ ,\ \forall n\ \ and\ \ 0\le s\le L_g-1$$

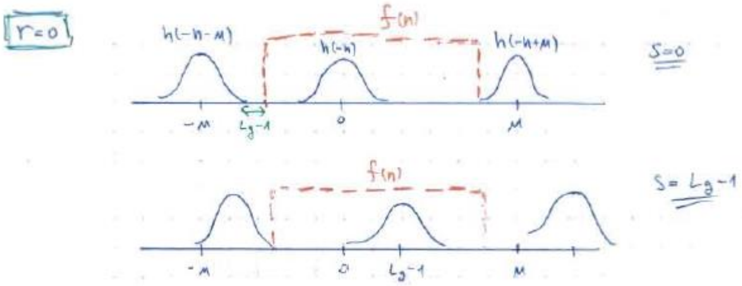
פתרון:

נתבונן בביטוי מתנאי Portonoff המורחב:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}f[n-rR]h[rR-n+s+pM]=\delta[p]\ ,\ \forall n\ \ and\ \ 0\le s\le L_g-1$$

(1) הביטוי בתנאי Portonoff המורחב צריך להתאפס עבור $p\neq 0$ ועבור כל בחירה של n ו- s, ולהיות שווה 1 עבור $p=0$.

נבדוק את התמונה עבור $r=0$ ועבור שני מקרים: $s=0$ ו- $s=L_g-1$. אם נבטיח את איפוס השכפולים במקרה הזה, אזי נבטיח איפוס של השכפולים בכל איברי הסכום על פני r.



תפקיד חלון הסינתזה הוא לחתוך שכפול אחד, עבור כל ה- s האפשריים. (נשים לב כי $f[n]$ לא זז עם s), לפיכך נקבל את התנאי:

$$L_h + L_f + L_g - 1 \le 2M$$

נתון: $L_f = M$, ולכן:

$$L_h + L_f + L_g - 1 \le 2L_f$$

$$L_f \ge L_h + L_g - 1 = 512 + 11 - 1 = 522$$

לכן $L_f = 522$ **הוא גודל חלון הסינתזה הקטן ביותר** שמבטיח את קיום התנאי.

2) מצאו בעזרת הגרף לעיל את R **הגדול ביותר** שמבטיח ששגיאת הקרוב הריבועית תקיים $\Delta[dB] \le -40_{dB}$.

הסבירו מדוע בחירה זו מבטיחה שהתנאי בסעיף ד' מתקיים בקרוב עבור $p=0$, משמע:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-n+s] \approx 1 \ , \ \forall n \ \ and \ \ 0 \le s \le L_g - 1$$

פתרון:

(2) ע"פ הגרף הפעם הראשונה בה $\Delta[dB] \le -40_{dB}$ מתקבלת ב-$R=128$. זהו ה-R הגדול ביותר המקיים את התנאי.

3) הסיקו מ-(1) ו-(2) כי אכן מתקיים:

$$\hat{x}[n] \approx M \cdot \sum_{s=0}^{L_g-1} g[s]x[n-s]$$

פתרון:

(3) מתוך הבחירה בסעיף (1) נקבל:

$$\forall p \ne 0: \quad \sum_{r=-\infty}^{\infty} f[n-rR]h[rR-n+s+pM] = 0$$

מתוך הבחירה בסעיף (2), ומהנתון כי חלון הסינתזה הוא חלון שחזור מלבני, נקבל:

$$p=0: \quad \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[rR-n+s] \underset{i=n-s}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[rR-i] \approx 1$$

נשים לב כי פיתחנו בשאלה זו גרסה ל-Overlap&Add המאפשרת חלונות אנליזה טובים (Hamming) וחפיפה בין המקטעים (משמע, תגובת התדר משתנה במהירות גבוהה יותר).
אורך ה-DFT הוא אורך חלון הסינתזה, בדיוק כמו ב-Overlap&Add המקורי. גם העובדה שחלון הסינתזה ארוך יותר מחלון האנליזה מתיישבת עם הארכת חלון האנליזה ב-$L_g - 1$ כתוצאה מפעולת הקונבולוציה הליניארית.
כיון שנאלצנו לבחור $L_h = 512$ כדי לאפשר חישוב נוח של החפיפה $R = 128 = \frac{1}{4}L_h$ קיבלנו DFT באורך $L_h + L_g - 1 = 522$ עבורו אין לנו מימוש יעיל. זו אחת הסיבות שבגינה במימושים מקובלים של

ה-STFT מזניחים כליל את השפעת המסנן ובוחרים $L_h + L_h = M$, כך מאפשרים מימוש יעיל יותר של ה-DFT.

<u>עיבוד משתנה בזמן בפסי התדר</u>

נדון במקרה בו העיבוד בפסי התדר משתנה בזמן:

$$\hat{z}_k[rR] = G_k[r] z_k[rR] \qquad\qquad 0 \le k \le M-1 \quad \forall r$$

כאן בכל מקטע אנו מבצעים עיבוד שונה. נקבל כי מוצא ה-STFT הוא:

$$z_k[rR] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] h[rR-m] e^{j\frac{2\pi}{M}(rR-m)k}$$

$$\hat{x}_k[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{z}_k[rR] f[n-rR] e^{j\frac{2\pi}{M}(n-rR)k}$$

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}_k[n] = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} G_k[r] \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] h[rR-m] e^{j\frac{2\pi}{M}(rR-m)k} f[n-rR] e^{j\frac{2\pi}{M}(n-rR)k}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[m] f[n-rR] h[rR-m] \sum_{k=0}^{M-1} G_k[r] \cdot e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k}$$

$$= M \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[m] f[n-rR] h[rR-m] \sum_{p=-\infty}^{\infty} g_r[n-m-pM]$$

נבצע חילוף משתנה: $s = n-m-pM$, נשתמש באורך הסופי של $g_r[s]$, ונקבל:

$$\hat{x}[n] = M \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{L_g-1} x[n-s-pM] \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r[s] f[n-rR] h[rR-(n-s-pM)]$$

$$g_r[s] = 0 \quad \forall r \ , \ s = 0,\dots,L_g-1$$

תחת תנאים זהים לתנאים שפותחו עבור עיבוד קבוע בזמן, יוותר רק האיבר $p=0$, זאת כיון שההכפלה ב-$g_r[s]$ אינה משנה את אורך החלונות. לכן גם כאן נקבל כתנאי למניעת קיפול:

$$L_f + L_h + L_g - 1 \le 2M$$

תנאי Portonoff המורחב:

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r[s] f[n-rR] h[rR-(n-s-pM)] = \tilde{g}_n[s] \cdot \delta[p]$$

עבור $p=0$:

$$\tilde{g}_n[s] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r[s] f[n-rR] h[rR-n+s]$$

ואז נקבל:

$$\hat{x}[n] = M \cdot \sum_{s=0}^{L_g-1} \tilde{g}_n[s] x[n-s]$$

קיבלנו כי המוצא הוא סינון ליניארי משתנה בזמן. מקדמי המסנן תלויים באינדקס הזמן n .

מה הקשר בין $\tilde{g}_n[s]$ ל- $g_r[s]$? נפתח:

$$\tilde{g}_n[s] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r[s] f[n-rR] h[rR-n+s]$$

נסמן: $w_s[n] = f[n] \cdot h[s-n]$ ונקבל:

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_r[s] w_s[n-rR]$$

כזכור, מימוש יעיל של העלאת קצב ואינטרפולציה:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\uparrow L} \xrightarrow{x^{(L)}[n]} \boxed{h[n]} \longrightarrow x_i[n]$$

$$x_i[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] h[n-rL]$$

משמע, $\tilde{g}_n[s]$ הוא העלאת קצב פי R וסינון של מקדמי המסנן ע"י מסנן אינטרפולציה $w_s[n]$ עבור כל מקדם s.

$w_s[n]$ הוא מסנן אינטרפולציה שמעביר את האות $g_r[s]$ המשתנה בקצב הנמוך לאות $\tilde{g}_n[s]$ המשתנה בקצב המהיר יותר. כך קיבלנו סינון ברזולוציה גבוהה יותר, כלומר: במקום שינוי של כל הדגימות - שינוי של כל דגימה.

לכן $w_s[n]$ צריך להיות LPF בעל תדר קטעון $\frac{\pi}{R}$. אם השינויים איטיים יותר ניתן להסתפק בחלון רחב יותר.

עדיף גם לבחור בחלון סינתזה חלק יותר כדי לאפשר מעבר חלק בין המקטעים ולמנוע סינון של כל מקטע במסנן שונה מהותית.

אם $g_r[s] = g[s]$, משמע חזרנו למסנן קבוע בזמן, אזי העלאת קצב שלו תשאיר ג"כ מסנן קבוע בזמן ונחזור לתוצאה הקודמת.