

埃拉托斯特尼筛法 及改进 (C++ 语言)

杜瑞庆 夏方林 唐山师范学院计算机系

Sieve Method to Search for Prime numbers and Improvement (C Programming Language)
Du Ruiqing, Xia Falin

摘要

埃拉托斯特尼筛法是求不超过自然数 $N(N>1)$ 的所有质数的一种方法。本文利用循环语句的特点以及素数的性质,对程序进行改进,以减少程序循环次数和时间,提高程序的质量。

关键词

筛法;素数;循环

Abstract

Eratosthenes sieve method is a method to search for all prime numbers less than natural number $N(N>1)$. In C programming language, we can use characteristics of loop and characters of prime numbers to improve the sieve method, then running the program will induce loop numbers enormously and save time, so that the quality of sieve method is improved.

Key words

Sieve Method, Prime number, Loop

1. 前言

素数,又称质数,是指大于1的整数,除了1和它本身之外不能被其他的正整数所整除。例如2,3,5,7等。

大约在公元前300年,欧几里得证明了素数有无穷多个,素数在正整数中的分布非常不规则,至今人们没有找到可以表示全体素数的有用公式。但是我们可以从一定的整数范围中找到所有的素数。埃拉托斯特尼筛法是其中一种方法,它是一种简单的不超过自然数 $N(N>1)$ 的所有质数的算法。比如:给定一个整数100,埃拉托斯特尼筛法可以找出小于100的所有素数。

2. 埃拉托斯特尼筛法及描述

2.1 埃拉托斯特尼筛法思想

埃拉托斯特尼是一位古希腊数学家,他在寻找整数 N 以内的素数时,采用了一种与众不同的方法:先将 $2-N$ 的各数写在纸上:

在2的上面画一个圆圈,然后划去2的其他倍数;第一个既未画圈又没有划去的数是3,将它画圈,再划去3的其他倍数;现在既未画圈又没有划去的第一个数是5,将它画圈,并划去5的其他倍数……依此类推,一直到所有小于或等于 N 的各数都画了圈或划去为止。这时,画了圈的以及未划去的那些数正好就是小于 N 的素数。

这里,我们把 N 取50来举例说明埃拉托斯特尼筛法思想:

1) 首先将2到50写出,如下图1所示:

2) 在2上面画一个圆圈,然后划去2的其它倍数(以底纹表示),这时划去的是除了2以外的其它偶数;

3) 从2往后一个数一个数地去找,找到第一个没有被划去的数3,将它画圈,再划去3的其它倍数(以斜线划

去),这一次我们划去的数有9、15、21、27、33、39、45;

4) 再从3往后一个数一个数地去找,找到第一个没有被划去的数5,将它画圈,再划去5的倍数(以交叉斜线划去),这一次我们划去的数有25、35;

5) 再从5往后一个数一个数地去找,找到第一个没有被划去的数7,将它画圈,再划去7的倍数(以多条横线划去),这一次我们划去的数是49;

6) 再往后继续找,可以找到9、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47,将它们分别画圈,并划去它们的倍数(可以看到,已经没有这样的数了);

7) 这时,小于或者等于50的各数都画上了圈或者被划去,被画圈的就是素数了。

2.2 埃拉托斯特尼筛法描述

这里,采用C语言编程来实现埃拉托斯特尼筛法的算法,该算法的具体实现说明如下:

1) 先定义一个数组 a ,每一个元素的下标对应一个整数,它的值表示这

	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	⑬	14	15	16	⑰	18	⑲	20
21	22	⑳	24	25	26	27	28	㉑	30
⑳	32	33	34	35	36	㉓	38	39	40
㉕	42	㉗	44	45	46	㉙	48	49	50

图1 埃拉托斯特尼筛法示意图

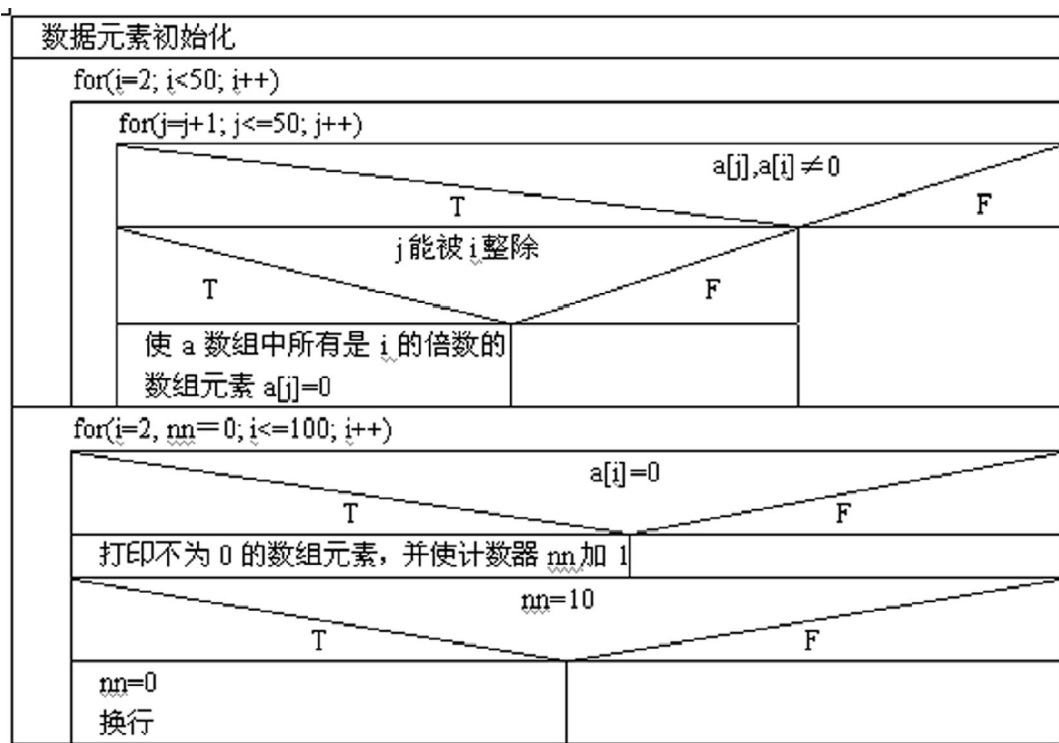


图2 筛法的N-S图

个整数是否为素数，值为1表示是素数，值为0表示不是素数；例如： $a[5]=1$ ，表示整数5是素数；

2) 先假定所有的数都是素数，即从 $a[2]$ 到 $a[50]$ 的值都设为1，可以用一个循环来完成；

3) 选定第一个整数2，从它对应的数组元素 $a[2]$ 的下一个元素 $a[3]$ 开始判断是否能被2整除，如果可以，将它的值设为0，如果不可以，什么都不做，继续向后判断，一直判断到 $a[50]$ 为止；

4) 再继续向后判断，一直判断到49为止；

5) 最后再从输出 $a[2]$ 到 $a[50]$ 中值为1的下标值，即小于50的所有的素数。

该算法用N-S图描述出来如图2所示。

程序的主要部分如下：

```

for(i=2; i<50; i++)
    for(j=i+1; j<=50; j++)
        if(a[i]!=0 && a[j]
            if(j
                % i==0)
                    a[j]=0;
  
```

3. 筛法改进及编程

本文主要从三个方面对埃拉托斯特尼筛法进行了改进，首先利用“大于2的质数都是奇数”这一知识，首先筛选能够被2除的数，然后从3开始筛选时， i 和 j 的值每次循环加2，就不用再考虑偶数了，这样循环的次数可以减少到原程序的四分之一左右；其次每次筛除某个质数（例如 m ）的倍数时，因为乘数小于该质数的积（ $2 \times m, 3 \times m, \dots, (m-1) \times m$ ）都已经被作为小于该质数的积被筛除了，因此倍数应该从该质数的平方（ m^2 ）开始，如：筛除5的倍数，10已经作为2的倍数被筛除了，15已经作为3的倍数被筛除了，应该从25开始，这样循环的次数又可以减少一些；最后因为改进二中的原因，当筛除完某个质数（例如 m ）的倍数的时候，我们可以肯定从2到这个质数的平方（ m^2 ）之

间已经没有可以被任何大于1且小于或者等于 m 的数整除的数了，也就是保证了这个区间 $[2, m^2]$ 中剩下的数都为素数，所以 i 的最大值取到 \sqrt{N} 取整就可以了，若 N 取50，则 i 从3取到7即可（从图1中我们可以看到这个情况，其实这个改进与改进二的效果是一样的，这两个改进取其中之一即可）。

在下面的表1中，我们对改进前后的循环次数进行了比较。

从表中可以看出，通过改进，程序的循环次数大大减少，程序的运行时间大大缩短。

通过改进，要求找出2到 N 的所有素数的C语言程序为：

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
void main(void)
  
```

下转第156页

表1 程序循环次数的比较

程序 N 的值	原程序	改进一	改进二	改进三
100	4,851	1,274	218	218
1000	498,501	125,249	5,778	5,778
10000	49,985,001	12,502,499	171,698	171,698

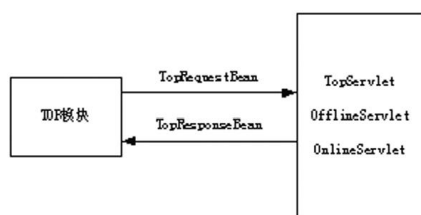


图 6 网络拓扑结构工作原理图

拓扑结构发现程序分为服务器端和客户端。服务器端主要是负责启动发现程序，将发现数据写入数据库。客户端主要是负责从数据库中读取发现的结果，并显示出来。

为了得到被管设备所在网段下的主机的 IP 地址，MAC 地址，需要在给定的发现时间间隔内，解析用户的配置文件，从 config.xml 文件中取出部署的主机的信息，以便在发现结果中做标志，从 netconfig.xml 文件中取出发现的策略；根据发现策略，对网段进行发现，并将发现结果存入数据库中。

对网络上主机的发现的原理是网管主机对网络发现的主机发 ICMP-echo request 包，如果主机存活，主机会利用自己的 TCP/IP 协议栈，组 ICMP-echo 包，发向网管主机，当响应包被接收后，判断接收到的包是否是 ICMP-echo-reply 包，是否是网管主机发出的 ICMP-echo request 的响应包，把满足条件的主机的 IP 记录下来，再组 ARP 包，请求该主机的 MAC 地址，最后解析接收到的 ARP 响应包中的该主机的 MAC 地址，记录下来，并写入数据库，当用户调用时，从相应的数据库中读出数据。

4 结束语

网络管理是一个综合性的工作，以上介绍的基于 web 的网管系统在实际应用中能使网络管理员在浏览器上以直观、简单的界面监测被管设备的总体运行情况，并且达到了理想的效果。

参考文献

- [1] 郭军. 网络管理. 北京: 北京邮电大学出版社. 2001.
- [2] 杨小平. Java 项目案例导航. 北京: 科学出版社. 2003

[3] 周育辉, 公共无线局域网安全体系及应用研究 - 网络管理技术研究. 东南大学硕士学位论文, 2005

[4] 周俊生. 一个 IP 网络拓扑自动发现系统的设计与实现. 计算机工程. 2002, 12: 150-152

作者简介

何健雄 (1968-), 男, 硕士, 中学一级教师, 研究方向: 信号处理

◀ 上接第 153 页

```

{
    unsigned int a[65001], n;
    unsigned int i, j;
    unsigned long mm=0;
    int nn; // 计数器, 用来计算
    一共有多少个素数, 并且用来进行换
    行控制
    printf(" 请输入一个整数 n:
    (2-65000)\n");
    scanf("%d", &n);
    for(i=2; i<=n; i++) //
    假设每个数都是素数
        a[i]=1;
    for(j=3; j<=n; j++) // 首先筛
    除大于 2 的偶数
    {
        mm++;
        if(j%2 == 0)
            a[j]=0;
    }
    for(i=3; i<sqrt(n); i=i+2) //
    根据条件, 判断是否是素数, 如果
    不是, 令 a[i] 的值为 0
    {
        for(j=i*i; j<=n; j=j+2)
        {
            mm++;
            if((a[j]!=0)
            && (a[j]!=0))
                if(j
                % i == 0)
                    a
                    [j]=0;
        }
    }
    printf("2 到 %u 之间的素数有:
    \n", n);
    for(i=2, nn=0; i<=n; i++)

```

// 输出素数

```

{
    if(a[i] == 1)
    {
        nn++;
        if(nn%10 == 0)
            printf("\n"); // 每行输出 10 个素
            数
        printf("%7d", i);
    }
    printf("\n");
    printf(" 一共有 %d 个素数。
    \n", nn);
    printf(" 主要的循环次数为:
    %u\n", mm);
}

```

注释:

- 1 欧几里德: 古希腊数学家。生卒年不详, 约活动于公元前 300 年前后。以其所著的《几何原本》(简称《原本》) 闻名于世。
- 2 埃拉托斯特尼: Eratosthenes, 公元前 276 年出生于昔勒尼, 即现利比亚的夏哈特; 公元前 194 年逝世于托勒密王朝的亚历山大港, 希腊数学家、地理学家、天文学家。他的贡献主要是设计出经纬度系统, 计算出地球的直径。
- 3 N-S 图: N-S 图是编程过程中常用的一种分析工具, N-S 图是由两个人合作完成的, 他们就是 Ike Nassi 和 Ben Schneideman.

参考文献

- [1] 钱能. C++ 程序设计[M]. 清华大学出版社, 2001. 22-25, 60-70
- [2] 吕凤翥. C++ 语言基础教程[M]. 清华大学出版社, 2004. 77-85
- [3] Brian W. Kernighan, Dennis M. Ritchie. The C Programming language[M] (影印版). 清华大学出版社, 1997. 60-67

作者简介

杜瑞庆, 男, 1974.9-, 河北省赞皇县人, 汉族, 唐山师范学院计算机系, 讲师, 工学硕士, 现主要从事计算机程序语言的教学与科研工作。
夏方林, 男, 1972.7-, 汉族, 唐山师范学院计算机系, 讲师, 硕士研究生, 现主要从事微型计算机监控及应用、计算机应用教学与研究工作。