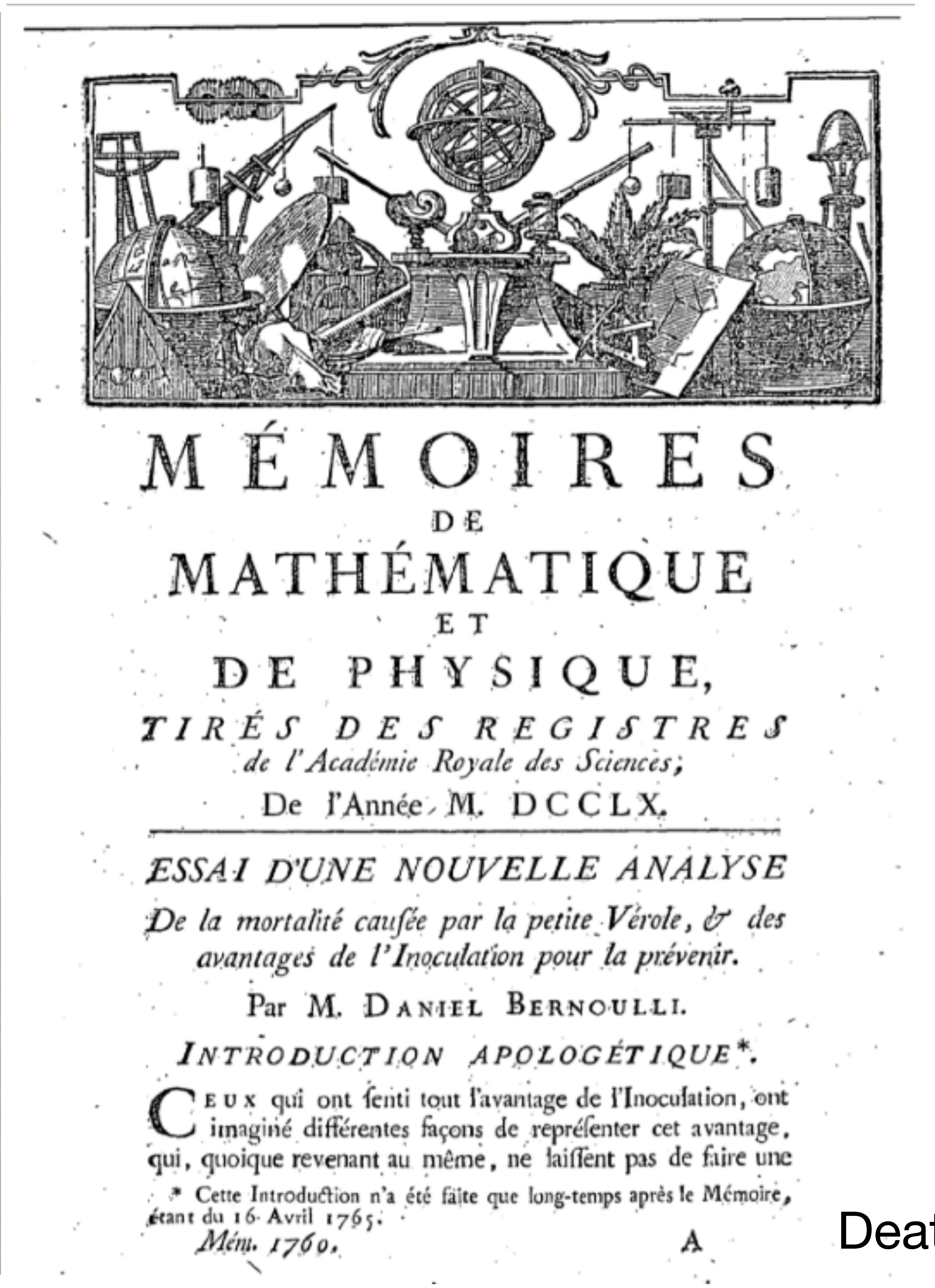
Where did infectious disease models come from?



MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,
TIRÉS DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences;
De l'Année M. DCCLX.

ESSAI D'UNE NOUVELLE ANALYSE
De la mortalité causée par la petite Vérole, & des avantages de l'Inoculation pour la prévenir.

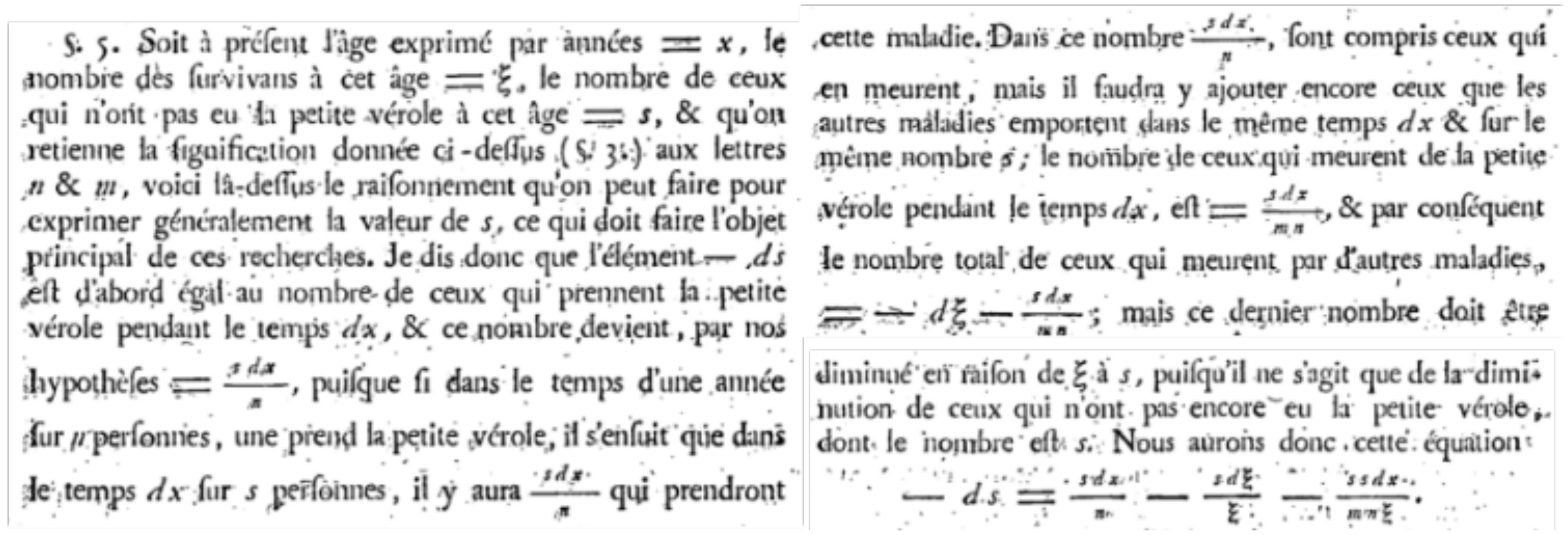
Par M. DANIEL BERNOULLI.

INTRODUCTION APOLOGÉTIQUE.*

CEUX qui ont senti tout l'avantage de l'Inoculation, ont imaginé différentes façons de représenter cet avantage, qui, quoique revenant au même, ne laissent pas de faire une

* Cette Introduction n'a été faite que long-temps après le Mémoire, étant du 16 Avril 1765.

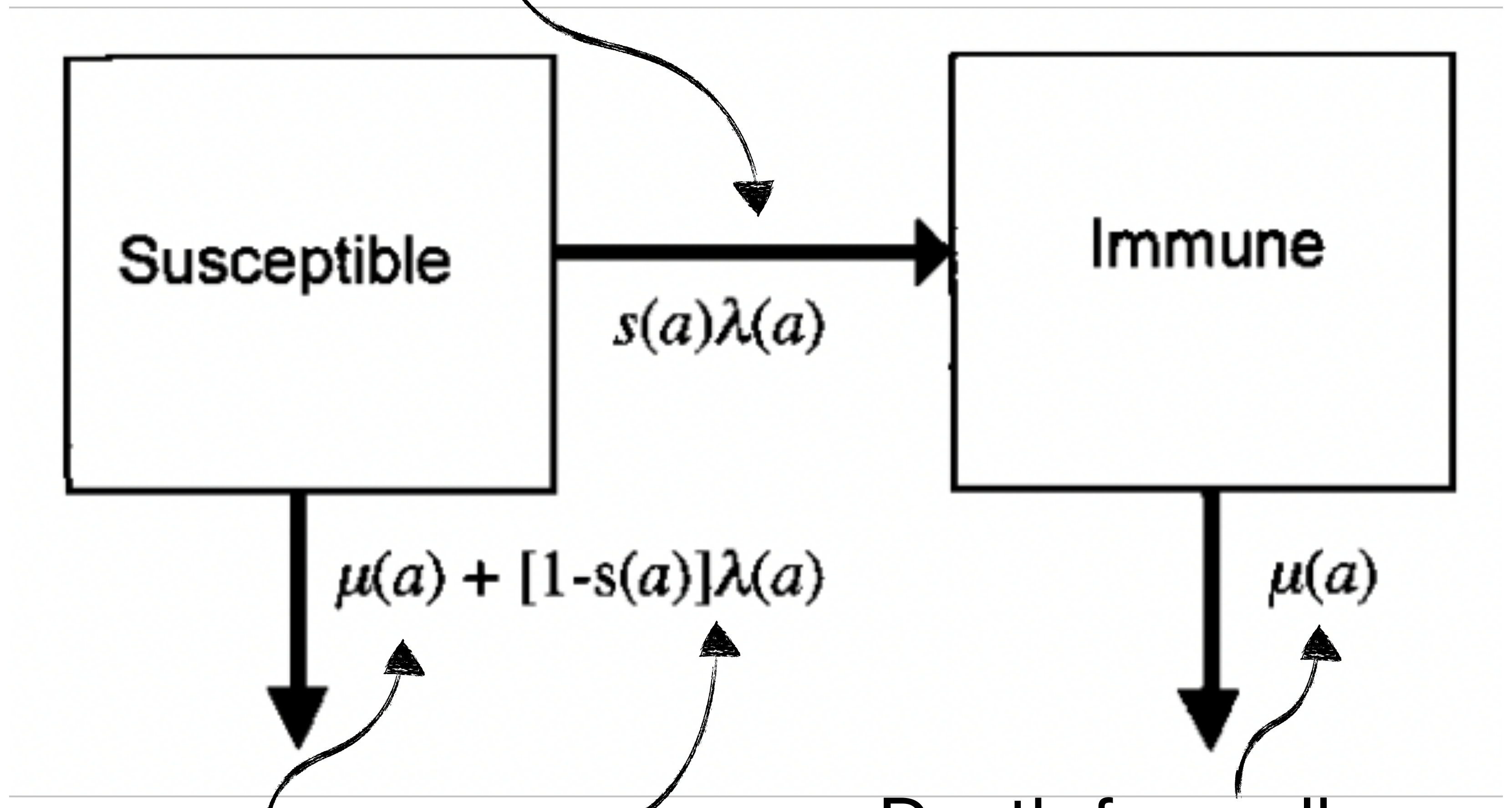
Mém. 1760. A



§. 5. Soit à présent l'âge exprimé par années $= x$, le nombre des survivans à cet âge $= \xi$, le nombre de ceux qui n'ont pas eu la petite vérole à cet âge $= s$, & qu'on retienne la signification donnée ci-dessus (§. 3.) aux lettres n & m, voici là-dessus le raisonnement qu'on peut faire pour exprimer généralement la valeur de s, ce qui doit faire l'objet principal de ces recherches. Je dis donc que l'élément $-ds$ est d'abord égal au nombre de ceux qui prennent la petite vérole pendant le temps dx, & ce nombre devient, par nos hypothèses $= \frac{s\,dx}{n}$, puisque si dans le temps d'une année sur n personnes, une prend la petite vérole, il s'ensuit que dans le temps dx sur s personnes, il y aura $\frac{s\,dx}{n}$ qui prendront cette maladie. Dans ce nombre $\frac{s\,dx}{n}$, sont compris ceux qui en meurent, mais il faudra y ajouter encore ceux que les autres maladies emportent dans le même temps dx & sur le même nombre s; le nombre de ceux qui meurent de la petite vérole pendant le temps dx, est $= \frac{s\,dx}{mn}$, & par conséquent le nombre total de ceux qui meurent par d'autres maladies, $= -d\xi - \frac{s\,dx}{mn}$; mais ce dernier nombre doit être diminué en raison de ξ à s, puisqu'il ne s'agit que de la diminution de ceux qui n'ont pas encore eu la petite vérole, dont le nombre est s. Nous aurons donc cette équation

$$-ds = \frac{s\,dx}{n} - \frac{s\,d\xi}{\xi} - \frac{ss\,dx}{mn\xi}.$$

Infection (λ) with survival (s)



Death from all causes (μ)

Death from all causes (μ)

Infection (λ) leading to death (1-s)

How big is the surviving population (u + w) if we eliminate smallpox (λ = 0)?

Dietz and Heesterbeek, 2002

Where did infectious disease models come from?

II.

The problem before us is as follows. Suppose that we have a population of living things numbering P individuals, of whom a number Z are affected by *something* (such as a disease), and the remainder A are not so affected; suppose that a proportion $h \, . \, dt$ of the non-affected become affected in every element of time dt, and that, conversely, a proportion $r \, . \, dt$ of the affected become unaffected, that is, revert in every element of time to the non-affected group; and, lastly, suppose that both the groups, the affected and the non-affected, are subject also to possibly different birth-rates, death-rates, and immigration and emigration rates in an element of time; then what will be the number of affected individuals, of new cases, and of the total population living at any time t?

For the solution of this and the subsidiary problems I have ventured to suggest the name "Theory of Happenings." It covers many cases which occur not only in pathometry but in the analysis of questions connected with statistics, demography, public health, the theory of evolution, and even commerce, politics, and statesmanship. The name *pathometry* (*pathos*, a happening) was previously suggested by myself in antithesis to *nosometry* (*nosos*, a disease) for the quantitative study of parasitic invasions in the individual.

III.

(i) Let ndt, mdt, idt, edt denote respectively the nativity, mortality, immigration, and emigration rates of the non-affected part of the population in the element of time dt; and $\mathrm{N}dt$, $\mathrm{M}dt$, $\mathrm{I}dt$, $\mathrm{E}dt$ denote the similar rates among the affected part. Then, as argued in my previous writings and as will be easily seen, the problem before us may be put in the form of the following system of differential equations:—

$$d\mathrm{P} = (n-m+i-e)dt \, . \, \mathrm{A} + (\mathrm{N}-\mathrm{M}+\mathrm{I}-\mathrm{E})dt \, . \, \mathrm{Z}, \qquad (1)$$

$$d\mathrm{A} = (n-m+i-e-h)dt \, . \, \mathrm{A} + (\mathrm{N}+r)dt \, . \, \mathrm{Z}, \qquad (2)$$

$$d\mathrm{Z} = hdt \, . \, \mathrm{A} + (-\mathrm{M}+\mathrm{I}-\mathrm{E}-r)dt \, . \, \mathrm{Z}. \qquad (3)$$

Ross, 1915