Zadania z wykładu 9

Krystian Baran 145000

10 maja 2021

Spis treści

1 Zadanie 4

Dział kontroli technicznej uzyskał czasy r1 i r2 palenia się dwu rodzajów świateł ostrzegawczych (w sekundach):

$$r1 = \{15,3; 19,4; 21,5; 17,4; 16,8; 16,6; 20,3; 21,3; 22,5; 23,4; 19,7; 21,0\}$$

,

$$r2 = \{24,7; 16,5; 15,8; 10,2; 13,5; 15,9; 15,7; 14,0; 12,1; 17,4; 15,6; 15,8\}$$

. Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$, zweryfikować hipotezy:

a) przeciętne czasy palenia się świateł ostrzegawczych dla obydwu rodzajów różnią się,

b) przeciętny czas palenia się świateł ostrzegawczych pierwszego rodzaju jest dłuższy o 5 sekund niż dla drugie-go rodzaju.

c) wariancje czasów palenia się świateł różnią się.

Obliczymy średnią i wariancję dla obu czasów zgodnie ze wzorami:

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$S_n^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Otrzymano następujące wartości:

	$\overline{X}_{12}$	S_{12}^2
r1	19.6	6.547273
r2	15.6	12.31091

1.1 a)

Podana w treści hipoteza jest hipotezą alternatywną. Zatem, stosując podstawy statystyki wyznaczymy hipotezę zerową:

H_0	$m_{r1} - m_{r2} = 0$
H_1	$m_{r1} - m_{r2} \neq 0$

Załóżmy że $r1$ i $r2$ mają rozkład normalny z nieznanymi parametrami. Wtedy możemy zastosować statystykę Cochrana-Coxa:

$$t = \frac{(\overline{X}_{r1} - \overline{X}_{r2}) - m_0}{\sqrt{\frac{S_{r1}^2}{n_{r1}} + \frac{S_{r2}^2}{n_{r2}}}} \sim t(v)$$

Gdzie v wyznaczany jest następujący wzorem:

$$v = \frac{\left(\frac{S_{r1}^2}{n_{r1}} + \frac{S_{r2}^2}{n_{r2}}\right)^2}{\frac{1}{n_{r1}-1}\left(\frac{S_{r1}^2}{n_{r1}}\right)^2 + \frac{1}{n_{r2}-1}\left(\frac{S_{r2}^2}{n_{r2}}\right)^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{6.547273}{12} + \frac{12.31091}{12}\right)^2}{\frac{1}{11}\left(\frac{6.547273}{12}\right)^2 + \frac{1}{11}\left(\frac{12.31091}{12}\right)^2}$$
$$\approx 23.44327246$$

Obliczymy wartość t_0 podstawiając znane wartości:

$$t_0 = \frac{19.6 - 15.6}{\sqrt{\frac{6.547273}{12} + \frac{12.31091}{12}}} \approx 3.190808$$

Wyznaczymy teraz przedziały ufności dla podanego $\alpha = 0.05$:

$$t_{\frac{\alpha}{2};23.44327246} \overset{R}{=} qt(0.25, 23.44327246) \approx -0.685099$$

$$t_{1-\frac{\alpha}{2};23.44327246} \overset{R}{=} qt(0.75, 23.44327246) \approx 0.685099$$
$$R = (-\infty, -0.685099) \cup (0.685099, \infty)$$

Wartość t_0 należy do przedziału krytycznego, zatem odrzucamy hipotezę zerową i wnioskujemy że przeciętne czasy palenia żarówek różnią się.

1.2 b)

Wyznaczymy hipotezy dla tego podpunktu:

H_0	$m_{r1} - m_{r2} \leqslant 5$
H_1	$m_{r1} - m_{r2} > 5$

Rozkład statystyki jest taki sam, ale zmienia się wartość t_0:

$$t_0 = \frac{19.6 - 15.6 - 5}{\sqrt{\frac{6.547273}{12} + \frac{12.31091}{12}}} \approx 0.797702$$

Obliczymy *p-value* dla tego rozkładu:

$$\text{p-value} \overset{R}{=} pt(0.797702, 23.44327246) \approx 0.7834752$$

Jest to wartość znacznie większa od podanego α, zatem nie mamy podstawy aby odrzucić hipotezę zerową.

1.3 c)

Hipoteza że wariancje różnią się jest hipotezą alternatywną, zatem wyznaczymy hipotezę zerową:

H_0	$\sigma_{r1} = \sigma_{r2}$
H_1	$\sigma_{r1} \neq \sigma_{r2}$

Aby zbadać hipotezę zastosujemy statystykę F-Snedecora wyznaczona następująco:

$$F = \frac{max\{S_{r1}^2, S_{r2}^2\}}{min\{S_{r1}^2, S_{r2}^2\}} = \frac{12.31091}{6.547273} \approx 1.880311 = F_0$$

Ponieważ liczebności obu prób są równe, statystyka ta ma rozkład statystyki $\sim F(11, 11)$.
Możemy teraz wyznaczyć przedział krytyczny:

$$F_{1-\frac{\alpha}{2};11;11} \stackrel{R}{=} qf(0.75, 11, 11) \approx 1.518216$$

$$R = (1.518216, \infty)$$

Wartość F_0 znajduję się w tym przedziale, zatem odrzucamy hipotezę zerową i wnioskujemy że wariancję czasów spalania się żarówek są sobie różne.

2 Zadanie 9

Wygenerować próby o liczebnościach 80 i 60 według rozkładów N(900;50) i N(1000;60) i na ich podstawie przeprowadzić test, że wartości oczekiwane różnią się o 50.

Przyjmijmy $\alpha = 0.05$. Podaną hipotezę można przedstawić następująco wraz z hipotezą zerową:

H_0	$m_1 - m_2 = 50$
H_1	$m_1 - m_2 \neq 50$

Gdzie m_1 jest nieznaną wartością oczekiwaną z próby $N(900; 50)$ a m_2 jest nieznaną wartością oczekiwaną z próby $N(1000; 60)$. Tabele wygenerowanej próby znajdują się na końcu pliku.
Wariancję i średnią z wygenerowanej próby obliczono w R za pomocą funkcji *mean()* dla średniej, i *var()* dla wariancji nie obciążonej. Utrzymano następujące wyniki:

	N1	N2
$\overline{X}$	899.4644	978.8235
S^2	2094.456	3204.845

Zakładając znane są wariancję z populacji możemy zastosować następującą statystykę:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{899.4644 - 978.8235 - 50}{\sqrt{\frac{50}{80} + \frac{60}{60}}} \approx -101.477627 = Z_0$$

Wyznaczymy teraz przedział krytyczny wiedząc że statystyka ta ma w przybliżeniu rozkład statystyki $N(0, 1)$:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \stackrel{R}{=} qnorm(0.25, 0, 1) \approx -0.6744898$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \stackrel{R}{=} qnorm(0.75, 0, 1) \approx 0.6744898$$

$$R = (-\infty, -0.6744898) \cup (0.6744898, \infty)$$

Wyznaczona wartość Z_0 znajduję się w obszarze krytycznym, zatem odrzucamy hipotezę zerową i wnioskujemy że wartości oczekiwane różnią się o 50.

3 Dane

Lp	N1
1	837.71
2	1014
3	903.5
4	927.4
5	822.95
6	896.64
7	887.16
8	885.61
9	819.63
10	793.28
11	871.83
12	932.02
13	894.1
14	872.22
15	934.94
16	943.1
17	902.11
18	815.1
19	920.56
20	860.9
21	830.93
22	926.59
23	937.53
24	900.73
25	934.26
26	799.76
27	878.97
28	939.1
29	897.3
30	899
31	922.75
32	742.5
33	961.97
34	897.39
35	915.18
36	846.9
37	943.2
38	888.99
39	931
40	899.54
41	957.55
42	956.11
43	956.54
44	906.14
45	888.97
46	919.11
47	809.89
48	901.7
49	927.8
50	846.31
51	887.97
52	877.64
53	903.52
54	859.87
55	901.88
56	873.51
57	854.52
58	887.07
59	898.03
60	868.11
61	929.89
62	961.89
63	901.24
64	856.2
65	943.55
66	897.22
67	977.59
68	884.56
69	913.55
70	933.02
71	920.08
72	944.09
73	960.17
74	929.28
75	920.1
76	933.35
77	927.47
78	905.34
79	896.03
80	911.94

Lp	N2
1	1009.3
2	921.27
3	989.81
4	988.38
5	1068.31
6	943.57
7	1037.98
8	1063.53
9	923.83
10	962.06
11	1012.57
12	1110.48
13	991.84
14	959.25
15	904.62
16	921.11
17	949.67
18	913.92
19	1001.19
20	958.45
21	1074.65
22	1027.91
23	971.89
24	1059.78
25	994.2
26	986.01
27	940.05
28	916.34
29	961.72
30	945.86
31	959.87
32	938.51
33	860.71
34	849.43
35	1057.9
36	1031.3
37	901.43
38	1005.31
39	975.97
40	984
41	966.68
42	999.01
43	1019.56
44	1050.89
45	878.05
46	969.09
47	1022.94
48	960.51
49	929.41
50	960.81
51	1024.3
52	1039.01
53	915.8
54	1067.31
55	979.72
56	992.32
57	1061.34
58	914.67
59	928.15
60	975.86