SdI30 W05: *ROZKŁADY ZWIĄZANE Z ROZKŁADEM NORMALNYM*

1. Rozkład logarytmiczno-normalny
   - Przykład 1
2. Rozkład *t*-Studenta, jego własności i zastosowanie
   - Przykład 2
3. Rozkład chi-kwadrat, jego własności i zastosowanie
   - Przykład 3
   - Przykład 4
4. Rozkład *F*-Snedecora
   - Przykład 5
5. Eksperymenty symulacyjne
6. Zestaw zadań

1. Rozkład logarytmiczno-normalny

Rozkład logarytmiczno-normalny jest to rozkład zmiennej losowej, której logarytm ma rozkład normalny, tj. $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma)$, gdy $\ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Zmienna losowa o rozkładzie logarytmiczno-normalnym przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.

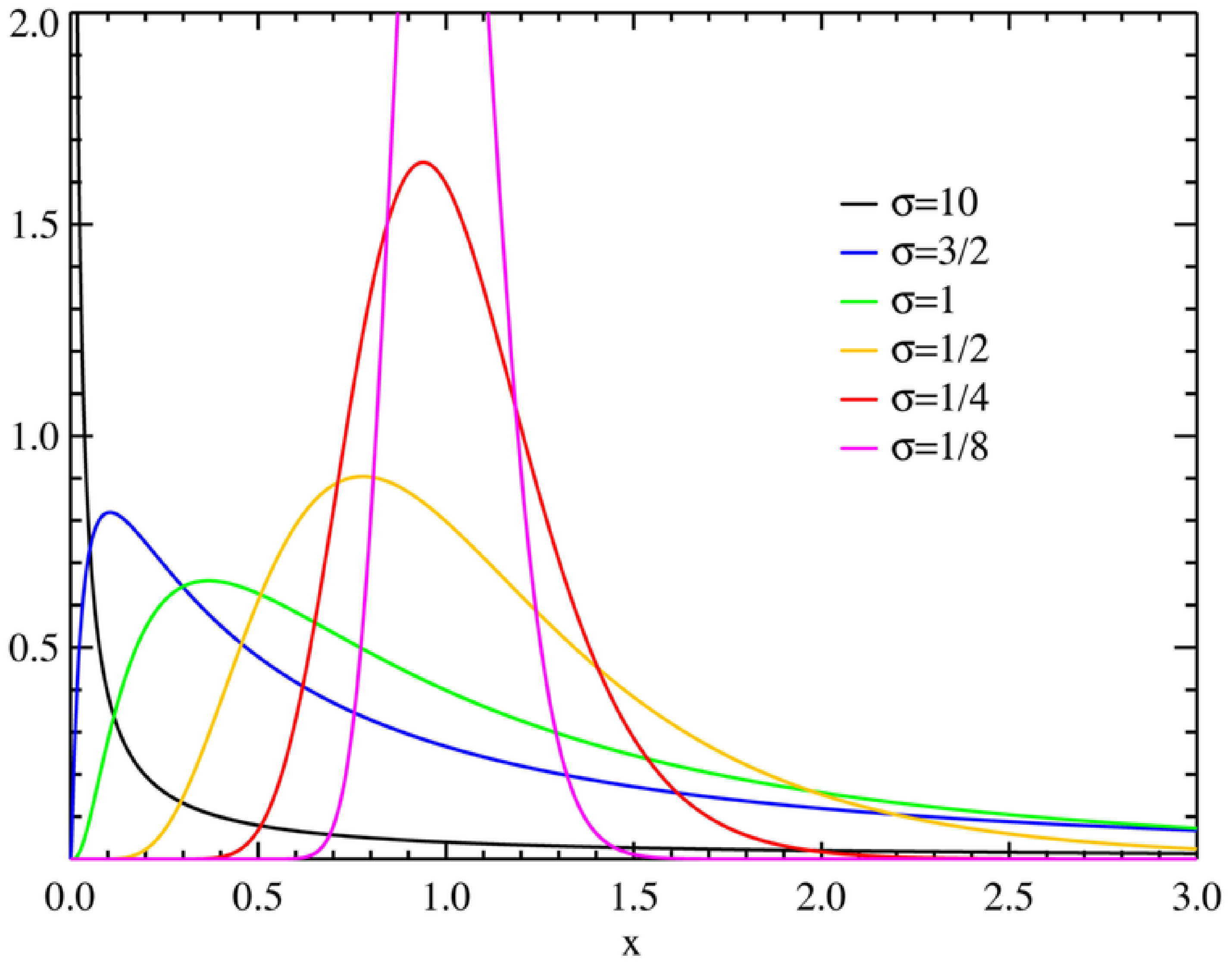
Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać:

$$F_{LN}(x; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$

a gęstość prawdopodobieństwa

$$f_{LN}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$



$\mu = 0$

Źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Rozk%C5%82ad_logarytmicznie_normalny

Między parametrami μ, σ rozkładu normalnego $\ln X$, a wartością oczekiwaną i wariancją rozkładu zmiennej losowej X zachodzi związek:

$$\mathbb{E}X = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2},$$
$$\mathbb{D}^2 X = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Ponadto

$$me(X) = e^{\mu}$$
$$mo(X) = e^{\mu - \sigma^2}$$
$$m_k = e^{k\mu + k^2\sigma^2/2}$$

Wyprowadzenie *k*-tego momentu zwykłego

Niech zmienna X ma rozkład logarytmiczno-normalny oraz $Y = \ln X$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X^k &= \int_0^\infty x^k f(x)\,dx = \int_0^\infty x^k \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \mathbb{E}(e^{kY}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ky} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{ky-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-2k\sigma^2 y+y^2-2\mu y+\mu^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2-2y\left(\mu+k\sigma^2\right)+\mu^2+\left(\mu+k\sigma^2\right)^2-\left(\mu+k\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}} dy
\end{aligned}
$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(y-(\mu+k\sigma^2)\right)^2}{2\sigma^2}+\frac{k(2\mu+k\sigma^2)}{2}} dy$$

$$= e^{\frac{k(2\mu+k\sigma^2)}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(y-(\mu+k\sigma^2)\right)^2}{2\sigma^2}} dy}_{=1}$$

Stąd

$$\mathbb{E}X^k = \exp\left(\frac{1}{2}k^2\sigma^2 + k\mu\right)$$

Zastosowanie jako model:

- czasu zdatności obiektów, których uszkodzenia są powodowane stopniowo powiększającymi się pęknięciami zmęczeniowymi,

- wielkości ziaren wtrąconych, widocznych w przełomie próbki metalu,
- wielkości opadów atmosferycznych,
- przepływu wody w rzece,
- plastycznej wytrzymałości prętów i wielu innych.

Zadanie 1 (2.29KA). Czas T dojazdu (w minutach) pracowników do zakładu pracy jest aproksymowany zmienną losową $T\sim\mathrm{LN}(30, 15)$. Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń, że czas dojazdu losowo wybranego pracownika nie przekroczy 1, 2, 3, 4 kwadransów. Jaki procent pracowników dojeżdża do pracy w ciągu drugiego kwadransa, a jaki w ciągu trzeciego?

Rozwiązanie:

$$\mathrm{P}(T < 15) = F_{LN}(15) = \Phi\left(\frac{\ln 15 - 30}{15}\right) = \Phi(-1{,}81946)$$
$$= 0{,}03442$$

Odp.: 48,423% pracowników dojeżdża do pracy w ciągu drugiego kwadransa.

26,98% pracowników dojeżdża do pracy w ciągu trzeciego kwadransa

Log-normal distribution		
Mean: 30		
Standard deviation: 15		
Area at or below 60	=	0.955767
Area at or below 45	=	0.86314
Area at or below 30	=	0.59336
Area at or below 15	=	0.109131

2. Rozkład *t-Studenta*, jego własności i zastosowanie

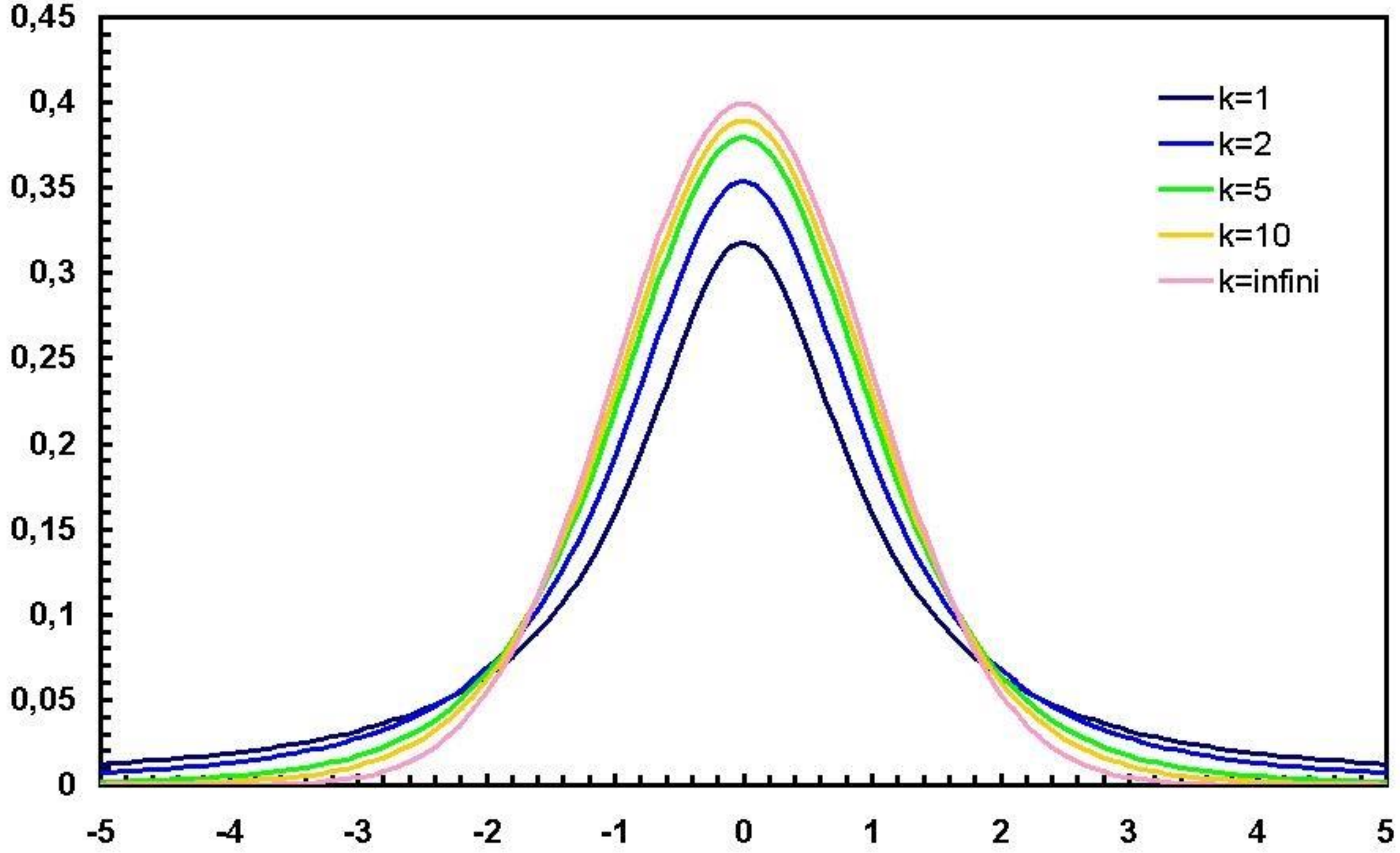
Rozkładem t-Studenta (ang. Student's t-distribution) z ν stopniami swobody, nazywamy rozkład zmiennej losowej T określonej następująco:

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y}}\sqrt{\nu},$$

gdzie $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz $Y \sim \mathrm{chis}(\nu)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Piszemy wówczas $T \sim t(\nu)$.

Funkcja gęstości ma postać:

$$f(t;\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(t)$$



Rys. 1. Krzywe gęstości rozkładu t-Studenta

Krzywa gęstości rozkładu t-Studenta jest bardziej płaska w „środku" i ma dłuższe „ogony" niż rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Dla $\nu > 30$ korzysta się z przybliżenia rozkładu $t(\nu)$ za pomocą rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$.

***Zastosowanie*:** W estymacji i weryfikacji hipotez dotyczących wartości oczekiwanej przy nieznanej wariancji.

Kwantyle rozkładu t-Studenta są stablicowane.

http://pl.wikisource.org/wiki/Tablica_rozk%C5%82adu_t-Studenta

Aby zastosować CTG musimy znać odchylenie standardowe lub wariancję badanej cechy X w populacji. Jeżeli charakterystyki te nie są znane, to w praktyce korzystamy z ich estymatorów wyznaczonych z próby oraz z twierdz. Gosseta.

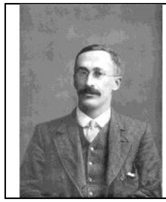
Twierdzenie Gosseta[1]**.** Jeżeli rozkład cechy X w populacji jest normalny o nieznanym odchyleniu standardowym, co zapisujemy $X \sim \mathcal{N}(\mu;\ \sigma = ?)$, to statystyka t określona wzorem:

$$t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_n - \mu}{S_n}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

ma rozkład ***rozkład*** $\boldsymbol{t}$***-Studenta*** o $\nu = n - 1$ stopniach swobody. Rozkład ten jest asymptotycznie normalny.

Zapis $X \sim t(\nu)$ oznacza, że zm. l. X ma rozkład t-Studenta o ν stopniach swobody.

Własności**:** Jeżeli $X \sim t(\nu)$, to $\mathbb{E}X = 0$ oraz $\mathbb{D}^2 X = \frac{\nu}{\nu - 2}$, $\nu > 2$.



[1] **William Sealy Gosset** (1876 – 1937), statystyk angielski. Publikował pod pseudonimem Student, stąd nazwa wprowadzonego przez niego - w roku 1908 - rozkładu.

Przykład 2. Zarząd firmy informuje, że rozkład płac pewnej dużej grupy pracowników tej firmy jest normalny z wartością przeciętną 4600[zł]. Spośród pracowników tej firmy wylosowano 25 osób. Obliczyć prawd., że średnia płaca wylosowanych pracowników będzie mniejsza od 4200[zł], jeśli:

a) wariancja płacy pracowników tej firmy jest znana i wynosi $14400[\text{zł}]^2$,

b) wariancja płacy wylosowanych pracowników jest znana i wynosi $19600[\text{zł}]^2$.

Wskazówka. Jeśli wariancja w populacji jest znana, to zastosować twierdz. o rozkładzie średniej arytmetycznej; a jeśli nie jest znana, to zastosować rozkład t-Studenta.

3. Rozkład chi-kwadrat, jego własności i zastosowanie

Rozkład chi-kwadrat jest ważny, ponieważ jest podstawą wielu procedur we wnioskowaniu statystycznym.

Udowodnimy najpierw

Lemat. Jeżeli $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, to zmienna losowa $Y = X^2$ ma gęstość prawdopodobieństwa

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Dowód lematu. W dowodzie lematu korzystamy z własności

$$\big(X \sim f_X(x)\big) \Rightarrow \left(f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})\right]\right)$$

Stąd, jeżeli $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$, to gęstość zmiennej losowej Y

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

W szczególności, jeżeli $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, to

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Jest to gęstość rozkładu gamma o parametrach $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$.

Twierdzenie. Jeżeli $X_1, X_2, \dots, X_n$ jest SRS z populacji o rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, to $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \text{gamma}\left(\alpha = \frac{n}{2}, \beta = 2\right)$

Dowód twierdzenia. Suma n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie gamma $\left(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2\right)$ ma rozkład gamma $\left(\alpha = \frac{n}{2}, \beta = 2\right)$, czyli

$$\text{PDF:}\quad f_{\text{gamma}}\left(y; \frac{n}{2}, 2\right) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$$

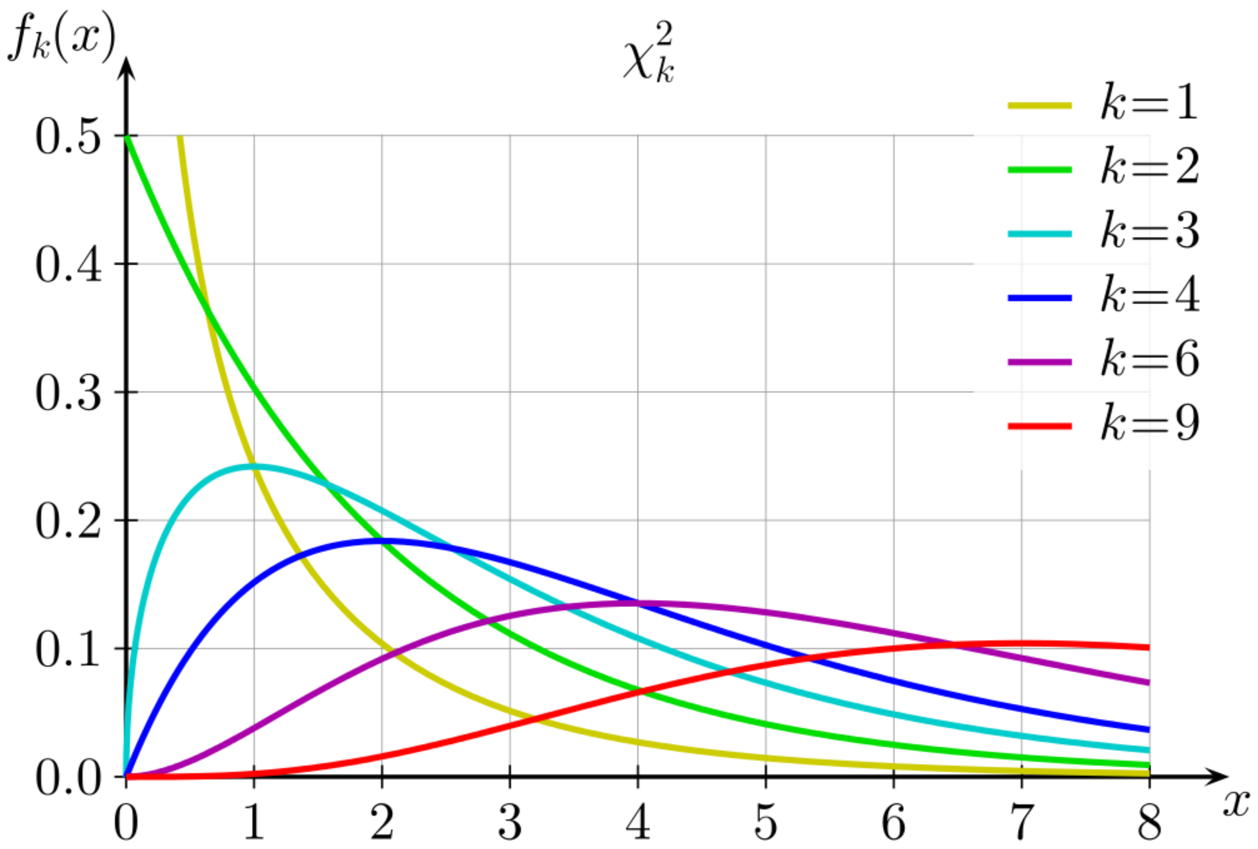
Wniosek. Rozkład chis(ν) jest szczególnym przypadkiem rozkładu gamma, mianowicie gamma$(\frac{\nu}{2}, 2)$.

Zapis $X{\sim}$chis(ν) oznacza, że zm. l. X ma rozkład chi-kwadrat o ν stopniach swobody (*degrees of freedom*).

Własności. Jeżeli $X{\sim}$chis(ν), to $\mathbb{E}X = \nu$, $\mathbb{D}^2X = 2\nu$,

$mo(X) = \nu - 2$ dla $\nu > 2$.

https://en.wikipedia.org/wiki/Chi-square_distribution



Rys. 2. Krzywe gęstości rozkładu chis(k)

Definicja. Rozkładem χ^2 o n stopniach swobody nazywamy rozkład zmiennej losowej, która jest sumą kwadratów n niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym.

Jeżeli $X_1, X_2, \dots, X_n$ jest SRS z populacji $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, to statystyka χ_n^2 określona wzorem:

$$\chi_n^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$$

ma rozkład zwany ***chi-kwadrat*** (*chi-squared distribution*) o $\nu = n - 1$ stopniach swobody.

Zastosowanie. Statystyka *chi-kwadrat* ma zastosowanie w estymacji i weryfikacji hipotez dotyczących wariancji oraz w testach niezależności i zgodności. Poza tym jest wykorzystywany do konstrukcji innych rozkładów, jak rozkład t-Studenta i F-Snedecora.

Jeżeli $n > 30$, to można zastosować przybliżenie

$$\sqrt{2(n-1)}S/\sigma \approx \mathcal{N}\left(\sqrt{2n-3}, 1\right)$$

<u>How You Can Create an Excel *Graph* of the *Chi-Square Distribution* ...</u>

Uwaga. Jeżeli cecha X w populacji generalnej ma rozkład normalny, to średnia arytmetyczna i wariancja z próby są niezależnymi zm. l. mimo, że pochodzą z tej samej próby.

Przykład 3. Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą pochodzącą z populacji, w której badana cecha ma rozkład $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Przyjmując, że statystyki $\bar{X}$ i S^2 są niezależnymi zm. l. (dowód pominięty) wykazać, że:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Dowód. Z twierdzenia o kombinacji liniowej niezależnych zm. l. o rozkładach normalnych wiadomo, że

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$$

stąd po standaryzacji

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Z twierdzenia o rozkładzie *chi-kwadrat*

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \text{chis}(n-1)$$

Z definicji rozkładu t-*Studenta* i informacji, że statystyki $\bar{X}$ i S^2 są niezależnymi zm. l., widać, że statystyka

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2/(n-1)}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

ma rozkład $t(n-1)$.

Przykład 4 (kontynuacja przykładu 1). Zarząd firmy FIA poinformował, że zróżnicowanie płac mierzone wariancją wynosi $14400[\text{PLN}]^2$.

a) (pre posteriori). Jakie jest prawd. zdarzenia, że obliczona z wylosowanej próby 25 pracowników wariancja empiryczna wyniesie ponad $25000[\mathrm{PLN}]^2$?
b) (a posteriori). Co wynika z faktu, że obliczona z wylosowanej próby wariancja empiryczna wyniosłaby ponad $25000[\mathrm{PLN}]^2$?

Rozwiązanie. a) Dokonujemy równoważnościowych przekształceń zdarzeń i otrzymujemy

$$(S_{25}^2 > 25000) \Leftrightarrow \left(\frac{24S_{25}^2}{14400} > \frac{24\cdot 25000}{14400}\right) \overset{\mathrm{def}\,\chi_n^2}{\Leftrightarrow} \left(\chi_{25}^2 > \frac{125}{3}\right).$$

Stąd $\mathrm{P}(S_{25}^2 > 25000) = \mathrm{P}\left(\chi_{25}^2 > \frac{125}{3}\right)$

$$\overset{\mathrm{EXCEL}}{=} \mathrm{ROZKŁ.CHI.PS}(125/3; 24) = 0{,}0140588$$

Alternatywnie można znaleźć rozwiązanie korzystając ze standaryzacji rozkładu chi-kwadrat, czyli jeżeli $n \geq 25$, to

$$\chi_n^2 \leq a \overset{\text{STD}}{\Leftrightarrow} Z \leq \frac{a-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}$$

$$\text{stąd P}\left(\chi_{25}^2 > \frac{125}{3}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{41{,}667-24}{\sqrt{48}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(2{,}55) \overset{\text{tablica}}{=} 0{,}005386$$

4. Rozkład F-Snedecora

Bardzo ważnym rozkładem we wnioskowaniu statystycznym jest rozkład F-Snedecora.

Definicja. Rozkładem F-Snedecora z (m, n) stopniami swobody nazywamy rozkład prawdopodobieństwa ilorazu

$$Z = \frac{\frac{1}{m}X}{\frac{1}{n}Y}$$

gdzie $X \sim \text{chis}(m)$ oraz $Y \sim \text{chis}(n)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Jeżeli zmienna losowa Z ma rozkład F-Snedecora z (m, n) stopniami swobody, to zapisujemy $Z \sim \text{F}(m, n)$.

Wartość oczekiwana

$$\mathbb{E}F = \frac{n}{n-2}$$

Funkcja gęstości tego rozkładu ma postać:

$$f_{\mathrm{F}}(x; m, n) = \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)},$$

dla $m, n > 0$, B jest funkcją beta.

Własności: Jeżeli $Z \sim \mathrm{F}(m, n)$

$$\mathbb{E}Z = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

$$\mathbb{D}^2 Z = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4$$

Rozkład ten jest wykorzystywany w analizie wariancji. Dystrybuanta ma postać:

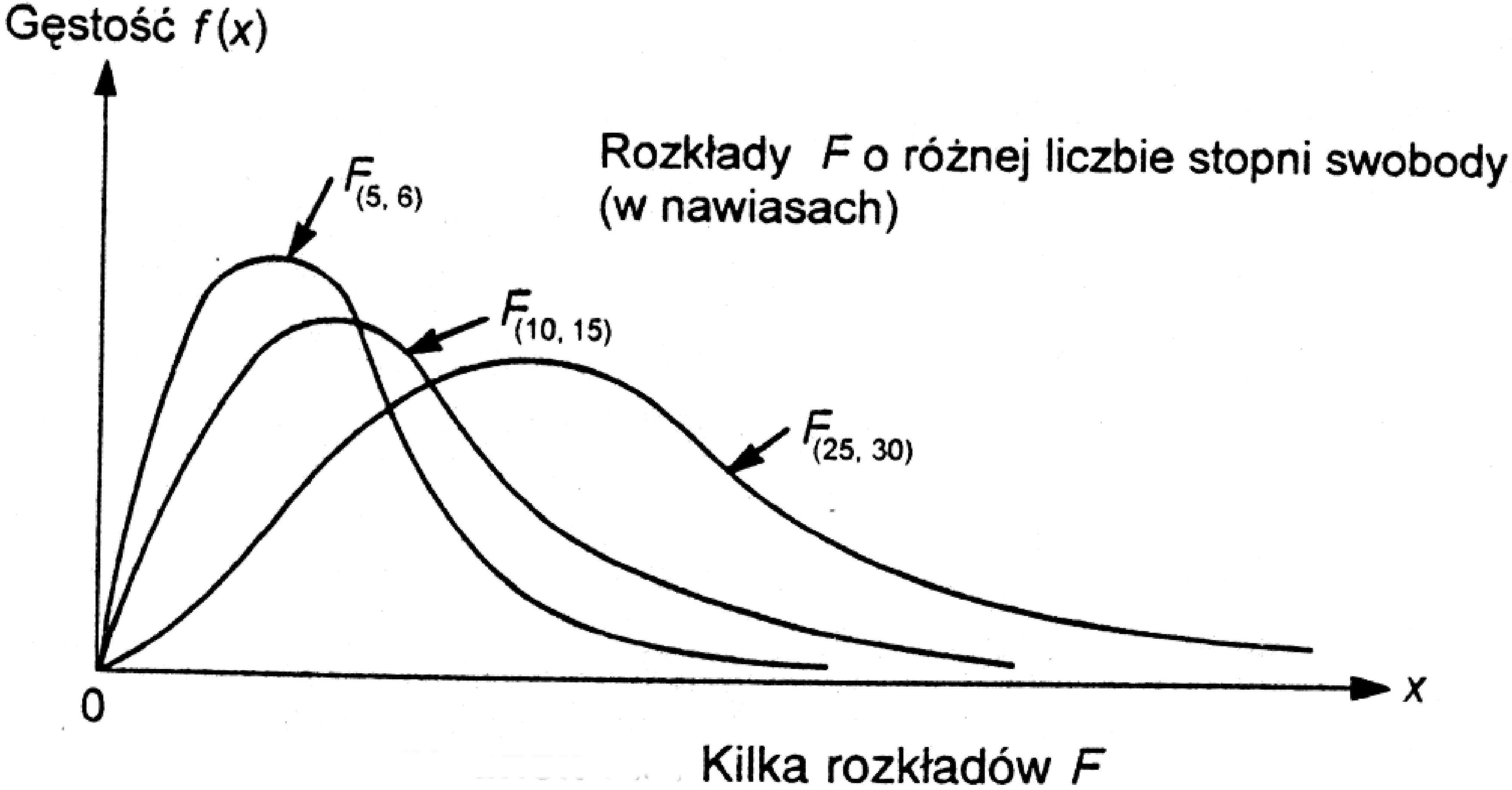
$$F_{\mathrm{F}}(x; m, n) = I_{\frac{mx}{mx+n}}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

gdzie I jest regulowaną niepełną funkcją beta (lub w skrócie regulowana funkcja beta).

Kwantyle rozkładu $\mathrm{F}(m, n)$ odczytujemy z tablic statystycznych lub wyznaczamy za pomocą programów komputerowych.

Własność. Jeżeli $F_{\mathrm{F}}^{-1}(p; m, n)$ jest kwantylem rzędu p zmiennej losowej o rozkładzie $\mathrm{F}(m, n)$, to

$$F_{\mathrm{F}}^{-1}(p; m, n) = \frac{1}{F_{\mathrm{F}}^{-1}(1 - p; n, m)}$$



Rys. 3. Krzywe gęstości rozkładu F(m, n).

Tab. Funkcje dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa w $\mathcal{R}$

Rozkład	CDF	PMF lub PDF	Kwantyl	Generator
bin(n, p)	pbinom	dbinom	qbinom	rbinom
Poisson(λ)	ppois	dpois	qpois	rpois
nbin	pnbinom	dnbinom	qnbinom	rnbinom
geometryczny	pgeom	dgeom	qgeom	rgeom
hiporgeometryczny	phyper	dhyper	qhyper	rhyper
wielomianowy		dmultinom		rmultinom
jednostajny	punif	dunif	qunif	runif
beta	pbeta	dbeta	qbeta	rbeta
exp	pexp	dexp	qexp	rexp
gamma	pgamma	dgamma	qgamma	rgamma
normalny	pnorm	dnorm	qnorm	rnorm
Log-norm	plnorm	dlnorm	qlnorm	rlnorm
Weibulla	pweibull	dweibull	qweibull	rweibull
chi-kwadrat	pchisq	dchisq	qchisq	rchisq
t	pt	dt	qt	rt
F	pf	df	qf	rf

Wiele innych, mniej popularnych, rozkładów można znaleźć w pakiecie SuppDists.

5. Eksperymenty symulacyjne

Drugą metodą uzyskiwania informacji o rozkładzie statystyki z próby losowej jest przeprowadzenie eksperymentu symulacyjnego. Ta metoda jest zwykle używana, gdy wyprowadzenie za pomocą reguł prawdopodobieństwa jest zbyt trudne lub skomplikowane do wykonania.

Taki eksperyment jest praktycznie zawsze wykonywany przy pomocy komputera.

Należy określić następujące cechy eksperymentu:

1. Statystyka będąca przedmiotem zainteresowania $(\bar{X}, S)$
2. Rozkład populacji
3. Wielkość próbki n
4. Liczba powtórzeń k

Następnie należy użyć odpowiedniego oprogramowania, aby uzyskać k różnych losowych próbek, każda o rozmiarze n, z danego rozkładu populacji.

Dla każdej próbki obliczamy wartość statystyki i dla otrzymanych k wartości konstruujemy histogram.

Ten histogram podaje przybliżony rozkład statystyki.

Im większa wartość k, tym lepsze będzie przybliżenie (rzeczywisty rozkład próbkowania osiągany jest przy $k \to \infty$). W praktyce $k = 500$ lub 1000 jest zwykle wystarczające, jeśli statystyka jest „dość prosta”.

W metodach symulacyjnego generowania liczb, według zadanego rozkładu, korzysta się z twierdzenia, które orzeka, że jeżeli X jest zmienną losową typy ciągłego o dystrybuancie F_X, to $Z = F_X(X) \sim u(0, 1)$. Twierdzenie to nazywa się **twier-**

dzeniem o odwracaniu dystrybuanty. Przykład zastosowania tej metody generowania liczb według zadanych rozkładów podany jest w KA Przykład 4.4.

6. Zestaw zadań W05

1. Opracować jeden z poniższych rozkładów.

1. Chi-Square Distribution
2. F Distribution
3. Gaussian Mixture Distribution
4. Inverse Gaussian Distribution
5. Lognormal Distribution
6. Noncentral Chi-Square Distribution

7. Noncentral F Distribution
8. Noncentral t Distribution
9. Student's t Distribution

Informacje ze strony:
http://www.mathworks.com/help/stats/continuous-distributions.html

Aby uzyskać więcej informacji na temat tych opcji, zapoznaj się z sekcją Working with Probability Distributions

2. Sformułować i rozwiązać zadanie z warunkowym rozkładem logarytmiczno-normalnym.

3. (KA 2.33). Sporządzić krzywe gęstości dla rozkładów t-*Studenta* $t(1)$, $t(5)$, $t(20)$. Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń ($X < -2$) i ($-1 < X < 0$) przyjmując, że zmienna losowa X ma podane rozkłady t-*Studenta*.

4. (KA 2.34). Sporządzić krzywe gęstości i wykresy dystrybuant zmiennych losowych o rozkładach *chi-kwadrat* z 5, 10 i 25 stopniami swobody. Czy można zauważyć jakąś prawidłowość, analizując kolejne wykresy? Wiedząc, że $X \sim \mathrm{CHIS}(25)$, wyznaczyć prawdopodobieństwa zdarzeń $(X < 15)$, $(X > 25)$, $(20 < X < 30)$.

5. (KA 2.35). Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $X > 1.8027$, wiedząc, że $X \sim F(5, 10)$.

6. Rozważmy eksperyment symulacyjny, w którym rozkład populacji istotnie różni się od rozkładu normalnego.

a) Czas zdatności pewnego typu elektronicznego sterownika ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną 5000 dni.

b) Czas oczekiwania na autobus ma rozkład jednostajny na przedziale $(0,\ 15)$ minut.

Wyznaczyć rozkład średniej arytmetycznej dla $n = 5, 10, 30$. Przeprowadzić eksperyment symulacyjny.

7. Korzystając z twierdzenia o odwracaniu dystrybuanty, wygenerować realizację 5-elementowej próby według rozkładu $BT(2,1)$.

8. Wygenerować 5-elementową próbę losową zgodnie z rozkładem o gęstości danej wzorem:

a) $f(x) = 2(x-1)\mathbb{I}_{(1;\,2)}(x)$,

b) $f(x) = 2\mathrm{x}\exp(-x^2)$

Wskazówka: a) $x = 1 + \sqrt{y}$, b) $x = \sqrt{-\ln(1-y)}$.