Laboratoria zestaw 4

Krystian Baran 145000

30 marca 2021

Zadanie 4

Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z populacji, w której cecha X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \frac{x}{8}\mathbf{1}_{(0,4)}(x)$$

a) Wyznaczyć dystrybuantę i gęstość statystyk
$Y = max\{X_1, \dots, X_n\}$, $Z = min\{X_1, \dots, X_n\}$.

b) Obliczyć prawd. zdarzeń $Y < 3$, $X > 1$.

c) Obliczyć wartości oczekiwane i wariancje Y i Z.

a)

Załóżmy że $X_1, \dots, X_n$ są niezależne. Jeżeli maksymalna z wybranych liczb musi być mniejsza od pewnej liczby, to każda inna od maksymalnej też musi być od niej mniejsza. Wtedy dystrybuantę F_Y można wyznaczyć następująco:

$$F_Y(t) = P(Y \leqslant t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant t) = P(X_i \leqslant t)^n$$

Dla $t \in (0, 4)$:

$$\begin{aligned} P(X_i \leqslant t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{x}{8}\mathbf{1}_{(0,4)}(x)dx \\ &= \int_{0}^{t} \frac{x}{8}dx = \frac{x^2}{16}\Big|_0^t \\ &= \frac{t^2}{16} \end{aligned}$$

Zatem dystrybuanta przyjmuje następujący rozkład:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & ,t \leqslant 0 \\ \left(\frac{t^2}{16}\right)^n & ,0 < t < 4 \\ 1 & ,t \geqslant 4 \end{cases}$$

Korzystając z wiedzy, że funkcja gęstości to pochodna dystrybuanty, można ją wyznaczyć:

$$f_Y(x) = \frac{F_Y(x)}{dx}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & ,x \leqslant 0 \\ n\left(\frac{x^2}{16}\right)^{n-1}\frac{x}{8} & ,0 < x < 4 \\ 0 & ,x \geqslant 4 \end{cases}$$

Dla Z natomiast, jeżeli minimalna liczba musi być większa od danej liczby, to każda inna od minimalnej też musi być od niej większa. Zatem można wyznaczyć dystrybuantę:

$$F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = 1 - P(Z > t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) = 1 - (1 - P(X_i \leqslant t))^n$$

Więc, korzystając z poprzedniej wyliczonej całki, dystrybuanta przyjmuje następujący rozkład:

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & , t \leqslant 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{t^2}{16}\right)^n & , 0 < t < 4 \\ 1 & , t \geqslant 4 \end{cases}$$

Funkcja gęstości będzie miała natomiast taki rozkład:

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 0 \\ n\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)^{n-1} \frac{x}{8} & , 0 < x < 4 \\ 0 & , x \geqslant 4 \end{cases}$$

b)

Ponieważ wyliczona została już dystrybuanta dla Y i dla Z, to można łatwo obliczyć szukane prawdopodobieństwa:

$$P(Y < 3) = F_Y(3) = \left(\frac{9}{16}\right)^n$$

Jeżeli $n \to \infty$ to $P(Y < 3) \to 0$ oznacza to, że wartość maksymalna całkowita jest większa od 3

$$\begin{aligned} P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - F_Z(1) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{16}\right)^n\right) \\ = \left(\frac{15}{16}\right)^n \end{aligned}$$

Jeżeli $n \to \infty$ to $P(Z > 1) \to 0$ oznacza to, że wartość minimalna całkowita jest mniejsza od 1.

c)

Zaczniemy od obliczenia wartości oczekiwanej Y.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= \int_{\mathbb{R}} n \cdot x \Big(\frac{x^2}{16}\Big)^{n-1} \frac{x}{8} \mathbf{1}_{(0,4)}(x) dx \\
&= \int_0^4 n \cdot x \Big(\frac{x^2}{16}\Big)^{n-1} \frac{x}{8} dx \\
&= \frac{n}{16^{n-1} 8} \int_0^4 x^{2n} dx \\
&= \frac{n}{16^{n-1} 8} \Big[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^4 \\
&= \frac{n \cdot 4^{2n+1}}{4^{2n-2} \cdot 8(2n+1)} = \frac{8n}{2n+1}
\end{aligned}
$$

Jeżeli $n \to \infty$, to $\mathbb{E}Y \to 4$, zatem wartość maksymalna dąży do granicy przedziału.
Następnie obliczymy wariancję Y.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \int_{\mathbb{R}} n \cdot x^2 \Big(\frac{x^2}{16}\Big)^{n-1} \frac{x}{8} \mathbf{1}_{(0,4)}(x) dx \\
&= \int_0^4 n \cdot x^2 \Big(\frac{x^2}{16}\Big)^{n-1} \frac{x}{8} dx
\end{aligned}
$$

	D	I
$+$	x^2	$n \cdot \left(\frac{x^2}{16}\right)^{n-1} \frac{x}{8}$
$-$	$2x$	$\left(\frac{x^2}{16}\right)^{n}$

$$
\begin{aligned}
&= x^2 \Big(\frac{x^2}{16}\Big)^n - \int_0^4 2x \Big(\frac{x^2}{16}\Big)^n dx \\
&= \Big[x^2 \Big(\frac{x^2}{16}\Big)^n - \frac{16}{n+1} \Big(\frac{x^2}{16}\Big)^{n+1} \Big|_0^4 \\
&= 16 \Big(\frac{16}{16}\Big)^n - \frac{16}{n+1} \Big(\frac{16}{16}\Big)^{n+1} \\
&= \frac{16(n+1) - 16}{n+1} = \frac{16}{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}Y^2 = \frac{16}{n+1} - \frac{64n^2}{(2n+1)^2}
$$

Obliczymy teraz wartość oczekiwaną Z.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}Z &= \int_{\mathbb{R}} n \cdot x \Big(1 - \frac{x^2}{16}\Big)^{n-1} \frac{x}{8} \mathbf{1}_{(0,4)}(x) dx \\
&= \int_0^4 n \cdot x \Big(1 - \frac{x^2}{16}\Big)^{n-1} \frac{x}{8} dx
\end{aligned}
$$

Jest to trudna do obliczenia całka, zatem, na podstawie wartości oczekiwanej jak poprzednio, wnioskujemy że wartość oczekiwana $\mathbb{E}Z$ będzie dążyć do 0 dla n dążącego do nieskończoności.
Ponieważ nie obliczyliśmy wartość oczekiwanej nie możemy obliczyć wariancję.