SdI30 W02: *PRZEGLĄD WAŻNIEJSZYCH ROZKŁADÓW TYPU CIĄGŁEGO*

1. **Rozkład jednostajny i jego własności**
   Przykład 1
2. **Rozkład wykładniczy i jego własności**
   Przykład 2
   Przykład 3
3. **Rozkład gamma**
   Przykład 4
4. **Rozkład beta**
   Przykład 5
5. **Rozkłady ciągłe dostępne w Matlabie**
6. **Zestaw zadań W02**

1. Rozkład jednostajny i jego własności

Zm. l. $X: \Omega \xrightarrow{"na"} (a, b)$ ma ***rozkład jednostajny*** (*uniform distribution*) na przedziale $(a, b) \subset \mathbb{R}$, co oznaczamy $X \sim u(a, b)$, jeśli jej dystrybuanta wyraża się wzorem:

CDF: $F(x|a, b) = \frac{x-a}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) + \mathbf{1}_{(b,\infty)}(x)$,

stąd PDF: $f(x|a, b) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$,

Własności rozkładu jednostajnego

1. Jeżeli $X \sim u(a, b)$, to dla $k = 1,2, \dots$ $\mathbb{E}(X^k) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}$,

   stąd $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{D}^2 X = \frac{(b-a)^2}{12}$.
2. Jeżeli $X \sim u(0, 1)$ i $Y = (b - a)X + a$, to $Y \sim u(a, b)$.

Przykład 1. Wiadomo, że zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale (a, b) oraz że $\mathbb{E}X = 6$ i $\mathbb{D}X = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Z przedziału (a, b) losowane są dwie liczby.

Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna z nich będzie większa od 8.

Rozwiązanie. Niech X oznacza wylosowaną liczbę. Do wyznaczenia parametrów a i b korzystamy z własności rozkładu jednostajnego

$$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2} = 6 \text{ oraz } \mathbb{D}^2X = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{16}{3}$$

stąd

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ -a + b = 8 \end{cases} \Longrightarrow b = 10, a = 2, \text{ czyli } X \sim u(2; 10),$$

czyli

$$\mathrm{P}(X > 8) = 1 - F_u(x|2, 10) = 1 - \frac{8-2}{10-2} = \frac{1}{4}.$$

Niech X_1, X_2 oznaczają wylosowane liczby

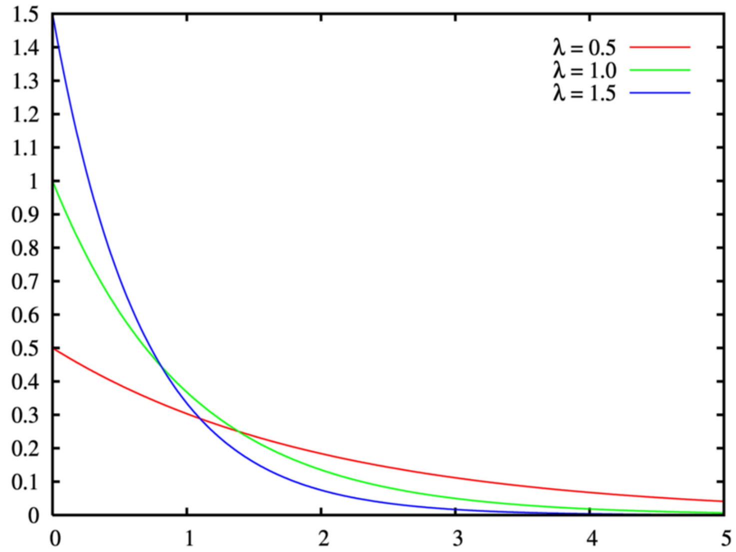
$$\mathrm{P}(X_1 > 8 \vee X_2 > 8) = \frac{7}{16}$$

Rozkład $u(0, 1)$ nazywamy standardowym rozkładem jednostajnym. Rozkład ten jest szczególnym przypadkiem rozkładu beta.

2. Rozkład wykładniczy i jego własności

Zm. l. X ma ***rozkład wykładniczy*** (*exponential distribution*) z parametrem $\lambda > 0$, co oznaczamy $X \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$, jeżeli jej gęstość prawd. wyraża się wzorem:

$$\text{PDF: } f_{\mathrm{Exp}}\,(x|\lambda) = \lambda \exp\,(-\lambda x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$$



Rys. 1. Krzywe gęstości rozkładów wykładniczych.

Poprzez podstawienie $\mu = \frac{1}{\lambda}$ dokonujemy zmiany parametru zgodnej z MATLABEM.

Zastosowanie w teorii niezawodności

Przyjmuje się często, że czas bezawaryjnej pracy T badanego elementu (tzw. czas życia elementu) jest zm. l. o rozkładzie wykładniczym, wówczas $\mathrm{P}(T > t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0$ nazywamy ***niezawodnością elementu***, zaś λ – ***intensywnością awarii***.

Własności:

Jeżeli $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, to

1. $\mathbb{E}X = 1/\lambda$, $\mathbb{E}(X^2) = 2/\lambda^2$, $\mathbb{D}^2 X = 1/\lambda^2$.

2. $\mathrm{P}(X > x + x_0 | X > x_0) = \mathrm{P}(X > x)$ – brak pamięci.

Dowód. Niech $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, wówczas

$$\text{CDF:}\ \ F_{\mathrm{Exp}}(x|\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla}\ \ x \geq 0 \\ 0 & \text{dla}\ \ x < 0 \end{cases}$$

oraz $\mathrm{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$, stąd z def. prawd. warunkowego

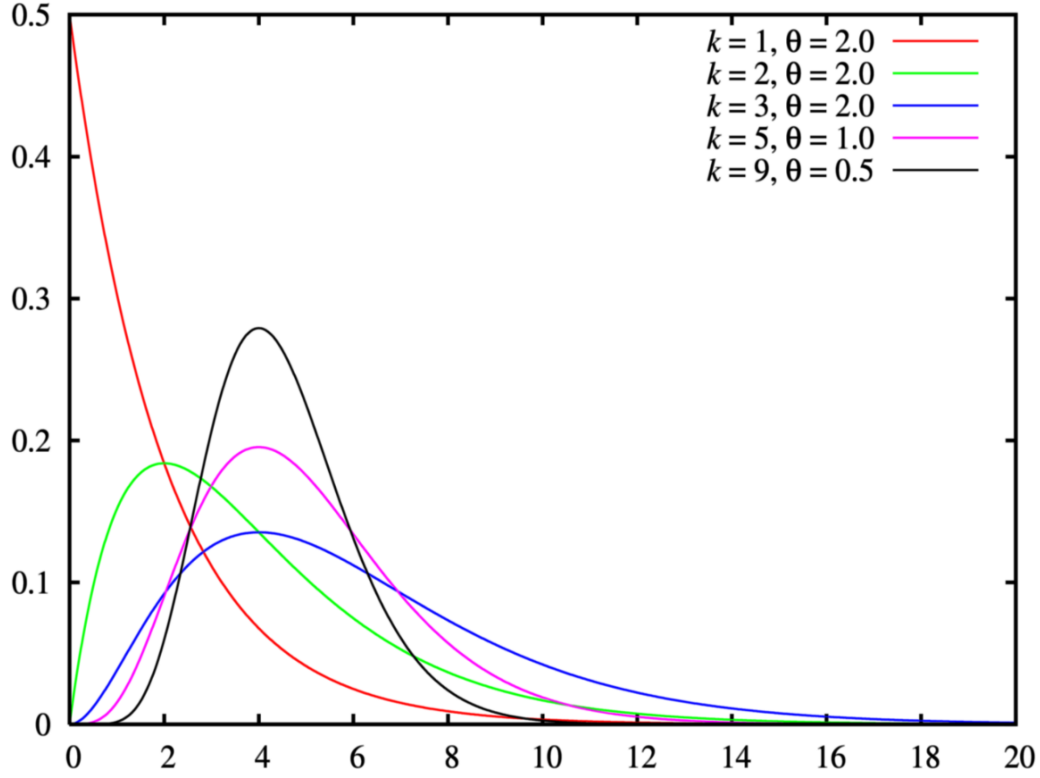
$$\mathrm{P}(X > x + x_0 | X > x_0) = \frac{\mathrm{P}(X > x + x_0 \wedge\ X > x_0)}{\mathrm{P}(X > x_0)}$$

$$= \frac{\mathrm{P}(X > x + x_0)}{\mathrm{P}(X > x_0)} = \frac{e^{-\lambda(x+x_0)}}{e^{-\lambda x_0}}$$

$$= e^{-\lambda x} = \mathrm{P}(X > x)$$

3. Suma k niezależnych zm. losowych o rozkładzie wykładniczym ma rozkład Erlanga o gęstości:

$$f_{\mathrm{Erl}}(x|k,\lambda) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} \exp\left(-\lambda x\right) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$



Rys. 2. Krzywe gęstości rozkładów Erlanga dla parametru skali $\theta = 1/\lambda$.

Rozkład Erlanga jest szczególnym przypadkiem rozkładu gamma, którego gęstość prawdopodobieństwa w parametryzacji MATLABA ($a, b > 0$) jest określona wzorem:

$$f_{\text{gamma}}(x|a,b) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} \exp\left(-\frac{x}{b}\right) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

gdzie Γ jest funkcją specjalną gamma Eulera.

Funkcja gamma rozszerza pojęcie silni na zbiór liczb rzeczywistych i zespolonych. Gdy część rzeczywista liczby zespolonej z jest dodatnia, to całka Eulera

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

jest zbieżna bezwzględnie.

Dla liczb naturalnych $\Gamma(n+1) = n!$

Przykład 2 (Bobrowski s. 247**).** Urządzenie z jednym nieobciążonym elementem rezerwowym podlegającym wykładniczemu prawu niezawodności o intensywności λ, pracuje do chwili uszkodzenia się elementu rezerwowego. Czas pracy urządzenia do uszkodzenia ma więc rozkład Erlanga o parametrach $k = 2$ i λ, a jego gęstość prawdopodobieństwa ma postać

$$f_{\mathrm{Erl}}(x|k = 2, \lambda) = \lambda^2 x \exp\left(-\lambda x\right) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

Zatem dystrybuanta

$$F_{\mathrm{Erl}}(x|k = 2, \lambda) = \lambda^2 \int_0^x s \exp(-\lambda s)\, ds = 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}$$

a funkcja niezawodności

$$R_{\mathrm{Erl}}(x|k = 2, \lambda) = (1 + \lambda x)e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

Przykład 3. Wiadomo, że $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ oraz $x_{0,1} = 1000$.

a) Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{D}X$, $\mathrm{P}(X > 5000)$, $x_{0,9}$.

b) Z populacji, w której modelem badanej cechy jest zmienna losowa X wylosowano 10 elementów. Wyznaczyć rozkład ich sumy, wartość oczekiwaną i wariancję sumy.

a) Parametr λ wyznaczamy z równania: $F_{\mathrm{EXP}}\left(x_p|\lambda\right) = p$

$$F_{\mathrm{EXP}}(x|\lambda) = 1 - e^{-\lambda x_p} = p \Rightarrow F_{\mathrm{EXP}}^{-1}(p|\lambda) = x_p$$
$$= \frac{-\ln(1-p)}{\lambda}$$

Stąd

$$\lambda = \frac{-\ln(1-p)}{x_p} = \frac{-\ln 0{,}9}{1000} \approx 0{,}00010536$$

3. Rozkład gamma

Zm. l. X ma ***rozkład gamma*** (gamma distribution) z parametrem kształtu $\alpha > 0$ i odwróconym parametrem skali $\beta > 0$, co oznaczamy $X \sim \mathrm{gamma}(\alpha, \beta)$, jeżeli jej gęstość wyraża się wzorem (w parametryzacji Matlaba):

$$\text{PDF: } f_{\mathrm{gamma}}(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\beta} \ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

Jeżeli $X \sim \mathrm{gamma}(\alpha, \beta)$, to $\mathbb{E}X = \alpha\beta$, $\mathbb{D}^2 X = \alpha\beta^2$

Przykład 4. Trwałość X element mechanicznego ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\beta} \ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

4. **Rozkład beta i jego własności**

Rozkład beta jest związany z funkcją specjalną beta $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ zdefiniowaną na liczbach rzeczywistych dodatnich jako:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \quad \text{dla } \alpha,\beta > 0$$

Funkcję beta można przedstawić za pomocą funkcji gamma:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Zm. l. X ma rozkład beta I-szego rodzaju o parametrach $\alpha,\beta > 0$, zapis $X\sim\mathrm{beta}(\alpha,\beta)$, jeśli jej gęstość jest postaci:

$$f_{\mathrm{beta}}(x|\alpha,\beta) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

Własności. Jeżeli $X \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$, to

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\mathbb{D}^2X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Przykład 5. Niech X oznacza stopień napełnienia zbiornika paliwa w losowej chwili. Funkcja pdf ma postać:

$$f(x) = Ax^8(1 - x)\mathbf{1}_{(0;\,1)}(x)$$

a) Wyznaczyć stałą A (odp.: 90).
b) Obliczyć wartość oczekiwaną.
c) Obliczyć odchylenie standardowe.

5.Rozkłady ciągłe dostępne w Matlabie

Continuous Distributions - MATLAB & Simulink - MathWorks Switzerland

betacdf	Beta cumulative distribution function
betapdf	Beta probability density function
betainv	Beta inverse cumulative distribution function
betalike	Beta negative log-likelihood
betastat	Beta mean and variance
betafit	Beta parameter estimates
betarnd	Beta random numbers

6. Zestaw zadań W02

1. Dokonać przeglądu dostępnych rozkładów typu ciągłego w Matlabie, $\mathcal{R}$, Octave, Excelu lub innych programach.
2. Czas X (w tygodniach) zdatności myszki komputerowej ma rozkład gamma z wartością oczekiwaną 144 i odchyleniem standardowym $\sqrt{864}$.

a) Obliczyć $\mathrm{P}(X > 144)$,

b) Obliczyć kwartyle czasu zdatności myszki,

c) Sporządzić krzywą gęstości i wykres dystrybuanty czasu zdatności myszli komputerowej.

d) Jaki procent myszek utraci zdatność w okresie gwarancyjnym trwającym 2 lata?

e) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba myszek spośród 100 sprzedanych, które utracą zdatność w okresie gwarancyjnym?

3. **Przykład 2.21** (K.A.). Sporządzić wykresy gęstości oraz dystrybuant rozkładów beta $\mathrm{B}(2;4)$, $\mathrm{B}(2;2)$, $\mathrm{B}(3;3)$, $\mathrm{B}(2{,}5;3{,}5)$.

4. **Przykład 2.22** (K.A.).
5. **Przykład 2.23** (K.A).
6. **Przykład 2.24** (K.A).
7. **Przykład 2.25** (K.A).
8. **Przykład 2.26** (K.A).
9. **Przykład 2.27 (**K.A**)**.