SdI30 W08: *TESTY PARAMETRYCZNE DLA JEDNEJ POPULACJI*

1. **Hipoteza statystyczna**
2. **Podział hipotez statystycznych**
3. **Procedura weryfikacji hipotezy**
4. **Obliczanie błędów decyzyjnych**
   Przykład 1, 2, 3, 4
5. **Testy dla wartości oczekiwanej**
   Przykład 5
6. **Test dla wariancji**
   Przykład 6
7. **Test dla wskaźnika struktury**
   Przykład 7

Przykład 8

8. **Dostępne testy w MatLabie**
9. **Zestaw zadań W08**

Klasyczna teoria *J. Neymana* i *E. Pearsona* dotyczy *testów istotności* (test of significance). Metody dostosowane do norm PN-ISO 3494, PN-ISO 3534.

1. Hipoteza statystyczna (Statistical hypothesis)

Przypuszczenie dotyczące rozkładu badanych cech w populacji – postaci funkcyjnej lub wartości parametrów rozkładu.

<u>Przykłady hipotez statystycznych:</u>

- trwałość akumulatora ma rozkład $\mathcal{N}(70; 5)$ [*m-cy*],
- zawartości szkodliwych związków w spalinach samochodów z katalizatorami i bez katalizatorów istotnie różnią się,
- wynik egzaminu zależy od czasu przygotowywania się studenta.

Na podstawie wiedzy o populacji i badanych cechach formułujemy ***zbiór hipotez dopuszczalnych*** **Θ**, czyli zbiór rozkładów, które mogą charakteryzować badane cechy w populacji.

Hipotezą statystyczną nazywamy podzbiór H zbioru Θ.

2. Podział hipotez statystycznych:

A. Ze względu na metody:

- **parametryczne** (parametric hypothesis) – hipotezy dotyczące nieznanych wartości parametrów,
- **nieparametryczne** – hipotezy dotyczące postaci funkcyjnej rozkładu, losowości próby, niezależności badanych cech, i in.

B. Ze względu na liczebność podzbioru H zbioru Θ:

- **proste** (simple hypothesis) – hipotezy, które jednoznacznie określają rozkład danej populacji, odpowiadające im podzbiory H zbioru Θ zawierają dokładnie jeden element (jeden rozkład),
- **złożone** (composite hypothesis) – hipotezy, które nie określają w pełni rozkładu populacji. Podzbiory *H* zbioru Θ zawierają więcej niż jeden element (rodzina rozkładów).

C. Ze względu na liczbę populacji:

dotyczące jednej, dwóch lub wielu populacji.

D. Ze względu na liczbę badanych cech:

dotyczące jednej, dwóch lub wielu cech.

Stwierdzenie: *wzrost X pewnej populacji ludzi jest określony rozkładem normalnym o parametrach* $\mathbb{E}X = 1{,}75[m]$ i $\mathbb{D}X = 10[cm]$ jest prostą hipotezą parametryczną, ponieważ określa wartość parametrów rozkładu i jednoznacznie definiuje rozkład.

Stwierdzenie „*wzrost badanej populacji jest określony rozkładem normalnym*" jest hipotezą nieparametryczną – nie dotyczy wartości parametrów rozkładu i złożoną – określa rodzinę rozkładów.

Testem statystycznym nazywamy parę (U_n, R).

3. Procedura weryfikacji hipotezy

Weryfikacją hipotezy (hypothesis testing) nazywamy sprawdzanie przypuszczeń o rozkładzie badanej cechy lub cech w populacji, sformułowanych bez zbadania jej całości.

Procedurą weryfikacji hipotezy nazywamy sformalizowane postępowanie badawcze, przebiegające w kilku krokach, przeprowadzone na podstawie prób losowych pobranych z populacji.

<u>Krok 1:</u> Sformułowanie hipotez: zerowej i alternatywnej

Hipoteza zerowa $\boldsymbol{H_0}$ (*null hypothesis*) – hipoteza poddana procedurze weryfikacyjnej. Przykładowo porównując parametry θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$, (na przykład wartości oczekiwane lub wskaźniki struktury badanej cechy w dwóch populacjach), hipotezę zerową możemy zapisać na jeden z trzech sposobów:

$$H_0: \begin{cases} \theta_1 - \theta_2 = \theta_0 \\ \theta_1 - \theta_2 \leq \theta_0 \\ \theta_1 - \theta_2 \geq \theta_0 \end{cases}$$

gdzie θ_0 jest wielkością stałą.

Hipoteza alternatywna **H₁** (*alternative hypothesis*) – hipoteza przeciwstawna do hipotezy zerowej.

Dotyczy ona przypuszczenia, które zostanie przyjęte w przypadku odrzucenia hipotezy zerowej.

Przy porównywaniu parametrów θ_1, θ_2 możemy ją zapisać na jeden z trzech sposobów, w zależności od hipotezy zerowej:

$$H_1: \begin{cases} \theta_1 - \theta_2 \neq \theta_0 \\ \theta_1 - \theta_2 > \theta_0 \\ \theta_1 - \theta_2 < \theta_0 \end{cases}$$

Np. założeniu symetryczności monety odpowiada prosta hipoteza zerowa $\mathrm{H}_0\colon p = 1/2$, natomiast hipoteza o braku symetryczności $\mathrm{H}_1\colon p \neq 1/2$ jest dwustronną hipotezą złożoną.

<u>Krok 2:</u> Określenie poziomu istotności α

Poziom istotności (*significance level*) testu jest to arbitralnie przyjęte prawd. α, które jest górną granicą popełnienia błędu I rodzaju (*error of first kind*), który polega na odrzuceniu hipotezy H_0 wtedy, gdy jest ona prawdziwa. Ponieważ chcemy, aby ryzyko popełnienia błędu α było jak najmniejsze, więc z praktycznych aspektów przyjmujemy, że $\alpha \leq 0{,}1$ (domyślnie $\alpha = 0{,}05$).

Nieodrzucenie fałszywej hipotezy H_0 nazywamy błędem II rodzaju. Prawd. popełnienia tego błędu oznaczamy β.

Prawd. $(1 - \beta)$ nazywamy **mocą testu**.

Krok 3: **Ustalenie liczebności próby.**

Krok 4: **Wybór statystyki testowej i obliczenia z próby**

Na podstawie informacji i założeń o rozkładzie populacji, parametrach i liczności próby konstruujemy lub wybieramy spośród znanych statystyk taką statystykę $U = h(\mathbf{X})$, której rozkład prawd. (dokładny lub asymptotyczny) jest całkowicie znany (np. normalny, t-Studenta, $chi - kwadrat$), przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0. Statystykę U zastosowaną do sprawdzenia hipotezy H_0 nazywamy **statystyką testową** lub jej **testem**.

Krok 5: **Wyznaczenie obszaru krytycznego**

Obszar krytyczny (critical region) – podzbiór R_α zbioru wartości statystyki testowej U, dla których hipotezę H_0 odrzucamy.

Obszar R_α spełnia warunek: $\mathrm{P}(U \in R_\alpha|\mathrm{H}_0) \leq \alpha$.

Obszar ten znajduje się zawsze na krańcach rozkładu statystyki U i zależy od poziomu istotności α, natomiast jego położenie zależy od postaci hipotezy H_1.

Wartości graniczne obszaru krytycznego nazywamy ***wartościami krytycznymi***. Przy danym α wartości krytyczne wyznaczamy za pomocą tablic, tak aby spełniona była relacja zależna od sposobu sformułowania hipotezy H_1:

- gdy H_1 typu $\neq$, to obszar krytyczny jest dwustronny

$$R_\alpha = \{u \in \mathbb{R}: u < u_{\alpha/2} \vee u > u_{1-\alpha/2}\},$$

- gdy H_1 typu $>$, to obszar krytyczny jest prawostronny

$$R_\alpha = \{u \in \mathbb{R}: u > u_{1-\alpha}\},$$

- gdy H_1 typu <, to obszar krytyczny jest lewostronny

$$R_\alpha = \{u \in \mathbb{R}: u < u_\alpha\},$$

gdzie u_p jest kwantylem rzędu p rozkładu statystyki U.

Krok 6: Podjęcie decyzji

Sprawdzamy, czy obliczona z próby wartość statystyki u_0 należy do obszaru krytycznego R_α.

Reguła decyzyjna:

- jeśli $u_0 \in R_\alpha$, to na przyjętym poziomie istotności α ***odrzucamy hipotezę*** H_0 jako mało prawd., na rzecz hipotezy H_1,
- jeśli $u_0 \notin R_\alpha$, to stwierdzamy ***brak podstaw do odrzucenia hipotezy*** H_0 (jako bardzo prawd.). Nieodrzucenie hipotezy zerowej nie oznacza, że jest ona prawdziwa.

4. Obliczanie błędów decyzyjnych

Przy przyjętych oznaczeniach błędy można zdefiniować w następujący sposób:

$$\alpha = \mathrm{P}(U_n \in R|\mathrm{H}_0),$$

$$\beta = \mathrm{P}(U_n \notin R|\mathrm{H}_1) = 1 - \mathrm{P}(U_n \in R|\mathrm{H}_1).$$

Test, w którym bierzemy pod uwagę jedynie prawdopodobieństwo α popełnienia błędu pierwszego rodzaju nazywamy **testem istotności**, a samo α **poziomem istotności**.

Mocą testu nazywamy prawdopodobieństwo $1 - \beta$ odrzucenia hipotezy fałszywej, tj.

$$1 - \beta = \mathrm{P}(U_n \in R|H_1)$$

Weryfikacja hipotez

Hipoteza zerowa	Decyzja	
	przyjąć H_0	odrzucić H_0
Hipoteza zerowa prawdziwa	decyzja prawidłowa	błąd I rodzaju
Hipoteza zerowa fałszywa	błąd II rodzaju	decyzja prawidłowa

Chcemy zawsze uzyskać test, który utrzymuje niski poziom prawdopodobieństwa błędu I rodzaju, ale równocześnie maksymalizuje moc testu, czyli minimalizuje prawdopodobieństwo błędu II rodzaju. Wybieramy więc taka wartość graniczną, aby właśnie w tym miejscu osiągany był poziom istotności, co gwarantuje nam największą moc tego testu.

Przykład 1 (KA Przykład 6.3**)**. Producent mikrokomputerów jest przekonany, że więcej niż 20% klientów kupujących jego komputery zakupi jednocześnie oprogramowanie systemowe. Aby zweryfikować to przekonanie zapytano 10 potencjalnych nabywców komputerów, czy są zainteresowani zakupem oprogramowania. Wśród zapytanych czterech odpowiedziało, że wraz z komputerem zamierza kupić również oprogramowanie.

Czy przeprowadzona ankieta pozwala utrzymać przekonanie producenta?

Rozwiązanie. Niech p będzie prawdziwym wskaźnikiem tych wszystkich klientów, którzy zamierzają zakupić komputer wraz z oprogramowaniem. Należy zbadać hipotezę, czy $p > 0{,}2$.

Hipoteza ta jest hipotezą alternatywną.

Jako hipotezę zerową przyjmujemy hipotezę orzekającą, że $p = 0{,}2$ lub zgodnie z normami statystycznymi $p \leq 0{,}2$.

Ustalone hipotezy zapisujemy następująco:

$$\mathrm{H}_0\colon p \leq 0{,}2$$
$$\mathrm{H}_1\colon p > 0{,}2$$

Modelem probabilistycznym liczby potencjalnych klientów, którzy zakupią komputer wraz z oprogramowaniem systemowym, w próbie złożonej z n klientów, jest zmienna losowa X o rozkładzie $\mathrm{bin}(n, p)$.

Zmienna losowa X stanowi statystykę testową pozwalającą odrzucić hipotezę zerową, jeśli tylko przyjmie dużą wartość.

Duże wartości X przemawiają za alternatywną hipotezą.

Pojawia się tu pytanie: *Jak duże wartości statystyki testowej X powinny być zaliczone do obszaru krytycznego*?

Jako obszar krytyczny można przyjąć zbiór

$$R = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Wówczas, jeżeli tylko zostanie zaobserwowana wartość statystyki testowej $x \in R$, trzeba będzie odrzucić hipotezę zerową, na rzecz hipotezy alternatywnej, orzekającej słuszność przekonania producenta mikrokomputerów. ♦

Przykład 2 (KA 6.4.**)** Jakie jest prawdopodobieństwo, że przeprowadzając test w przykładzie 6.3, będzie podjęta fałszywa decyzja, tzn. będzie odrzucona hipoteza zerowa, która w rzeczywistości jest prawdziwa?

Rozwiązanie. Problem sprowadza się do obliczenia prawdopodobieństwa α, tj. błędu I rodzaju.

Z założenia $X\sim\mathrm{bin}(10; 0{,}2)$, więc prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju

$$\alpha = \mathrm{P}(X \geq 4) = 1 - F_{\mathrm{bin}(10;0{,}2)}(3) = 1 - 0{,}879 = 0{,}121$$

Prawdopodobieństwo, że test doprowadzi do wniosku, że $p > 0{,}2$, jeśli w rzeczywistości tak nie jest, wynosi $0{,}121$. ♦

Przykład 3 (KA 6.5**)**. Niech teraz wskaźnik klientów (nawiązanie do przykładu 6.3), którzy zakupią komputer wraz z oprogramowaniem wynosi $p = 0{,}6$.

Jakie jest prawdopodobieństwo popełnienia błędu β, że test przeprowadzony dla 10 klientów nie doprowadzi do odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej?

Rozwiązanie. Z założenia $X_1 \sim \text{bin}(10; 0{,}6)$. Hipoteza zerowa nie zostanie odrzucona, gdy realizacja statystyki testowej X_1 nie należy do obszaru krytycznego, tj. dla $X_1 < 4$.
Stąd

$$\beta = \mathrm{P}(X_1 \leq 3) = F_{\text{bin}(10;0,6)}(3) = 0{,}055$$

czyli prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju, czyli nieodrzucenia hipotezy fałszywej, wynosi $0{,}055$. ♦

Przykład 4 (KA 6.6**).** Znaleźć moc testu, jeśli wiadomo, że wskaźnik klientów (nawiązanie do przykładu 6.3), którzy zakupią komputer wraz z oprogramowaniem wynosi $p = 0,3$.

Rozwiązanie. Z założenia statystyka testowa $X \sim \mathrm{bin}(10; 0,3)$. Stąd można obliczyć moc testu $1 - \beta$

$$\begin{aligned} 1 - \beta = 1 - \Pr(X \leq 3) &= 1 - F_{\mathrm{bin}(10;0,3)}(3) \\ &= 1 - 0,650 = 0,350 \end{aligned}$$

czyli moc testu wynosi 0,350. ♦

W praktyce należy dążyć do jednoczesnej minimalizacji prawdopodobieństw obu rodzajów błędów. Zadanie tego typu na ogół nie ma rozwiązania przy ustalonej liczebności próby, gdyż zmniejszanie prawdopodobieństwa błędu jednego rodzaju, powoduje wzrost prawdopodobieństwa błędu drugiego rodzaju.

Dlatego najczęściej jest wybierane arbitralnie jakieś małe prawdopodobieństwo α błędu pierwszego rodzaju i rozwiązywane zadanie:

$$\beta = \mathrm{P}(U(X_1, \dots, X_n) \in R' | \theta_2) = \min$$

przy warunku

$$\mathrm{P}(U(X_1, \dots, X_n) \in R | \theta_1) \leq \alpha$$

Maksymalizacja mocy $1 - \beta$ testu jest zatem równoważna minimalizacji prawdopodobieństwa β błędu drugiego rodzaju.

Test, który przy ustalonym α minimalizuje prawdopodobieństwo błędu β nazywa się *testem najmocniejszym* (most powerful test), dla prostej hipotezy zerowej względem prostej hipotezy alternatywnej. Jeśli test jest najmocniejszy względem złożonej hipotezy alternatywnej, to jest nazywany testem *jednostajnie najmocniejszym* (uniformly most powerful test).

W dalszej części rozważania ograniczone są do klasycznej teorii weryfikacji hipotez statystycznych *J. Neymana* i *E. Pearsona*, dotyczącej tzw. *testów istotności* (test of significance).

5. Testy dla wartości oczekiwanej

Zm. l. X jest modelem badanej cechy w populacji.

Hipoteza H_0 dotyczy przypuszczenia co do nieznanej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X = m$ i ma jedną z postaci:

$$\mathrm{H}_0 : \begin{cases} m = m_0, \\ m \leq m_0 \\ m \geq m_0 \end{cases}$$

Decyzję statystyczną podejmujemy na podstawie prostej próby losowej (simple random sample SRS) $X_1, X_2, \dots, X_n$ pobranej z populacji X.

Test dobiera się na podstawie spełnianych założeń.

Test 1. Jeżeli $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ i znane jest odchylenie standardowe, to do sprawdzenia hipotezy H_0 stosowana jest statystyka

$$Z = \frac{\bar{\boldsymbol{X}} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Przy założeniu prawdziwości H_0, na mocy tw. o rozkładzie średniej arytmetycznej $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Z tablicy kwantyli rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$ wyznaczamy stosownie do H_1 obszar krytyczny, obliczamy wartość statystyki i na przyjętym poziomie istotności α podejmujemy decyzję dotyczącą H_0.

Test 2. $X \sim \mathcal{N}(m = ?, \sigma = ?)$ – obydwa parametry są nieznane. Do sprawdzenia hipotezy H_0 stosujemy statystykę t-Studenta

$$t = \frac{\bar{\mathbf{X}}_n - m_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

Jeżeli hipoteza $\mathrm{H}_0 \colon m = m_0$ jest prawdziwa, to na mocy tw. o rozkładzie średniej arytmetycznej, przy nieznanej wariancji σ^2 wiemy, że $t \sim t(n-1)$.

Korzystając z kwantyli rozkładu t-Studenta, wyznaczamy obszar R_α stosownie do hipotezy H_1 i danego α.

Obliczamy wartość t_0 statystyki i podejmujemy decyzję dotyczącą hipotezy H_0.

Test 3. $X\sim$dowolny$(m=?\,,\sigma=?\,)$. Do sprawdzenia hipotezy $\mathrm{H}_0\colon \mathbb{E}X = m_0$ przy dużej próbie stosujemy asymptot. statystykę

$$Z=\frac{\overline{\mathbf{X}}_n-m_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0, na mocy CTG, statystyka ta ma graniczny rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Stosowana jest więc dla dostatecznie dużej próby $(n \geq 30)$.

Testy te zebrane są w Tablicy 4.

Tablica 4. Testy istotności dla wartości oczekiwanej, wariancji i wskaźnika struktury badanej cechy w jednej populacji X

lp.	H_0:	H_1:	Założenia	Statystyka	Rozkład statystyki	R_α – przedziały odrzuceń H_0
1	$\begin{cases} m = m_0 \\ m \leq m_0 \\ m \geq m_0 \end{cases}$	$\begin{cases} m \neq m_0 \\ m > m_0 \\ m < m_0 \end{cases}$	$X \sim \mathcal{N}(m = ?; \sigma)$, parametr σ znany, n dowolne	$Z = \dfrac{\bar{X}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$\mathcal{N}(0; 1)$	$\begin{cases} (-\infty;\ z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty) \\ (z_{1-\alpha}; \infty) \\ (-\infty;\ z_\alpha) \end{cases}$
2	$\begin{cases} m = m_0 \\ m \leq m_0 \\ m \geq m_0 \end{cases}$	$\begin{cases} m \neq m_0 \\ m > m_0 \\ m < m_0 \end{cases}$	$X \sim \mathcal{N}(m = ?; \sigma = ?)$, parametry nieznane, n dowolne	$t = \dfrac{\bar{X}_n - m_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$	$t -$ Studenta z $n - 1$ st. swobody	$\begin{cases} (-\infty;\ t_{\frac{\alpha}{2};n-1}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; \infty) \\ (t_{1-\alpha;n-1}; \infty) \\ (-\infty;\ t_{\alpha;n-1}) \end{cases}$
3	$\begin{cases} m = m_0 \\ m \leq m_0 \\ m \geq m_0 \end{cases}$	$\begin{cases} m \neq m_0 \\ m > m_0 \\ m < m_0 \end{cases}$	$X \sim ?(m = ?; \sigma = ?)$, parametry nieznane, $n > 30$	$Z = \dfrac{\bar{X}_n - m_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$	$\approx \mathcal{N}(0; 1)$	$\begin{cases} (-\infty;\ z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty) \\ (z_{1-\alpha}; \infty) \\ (-\infty;\ z_\alpha) \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \end{cases}$	$\begin{cases} \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$	$X \sim \mathcal{N}(m = ?; \sigma = ?)$, parametry nieznane, n dowolne	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2}$	chi-kwadrat z $n - 1$ st. swobody	$\begin{cases} (0;\ \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) \cup (\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}; \infty) \\ (\chi^2_{1-\alpha;n-1}; \infty) \\ (0; \chi^2_{\alpha;n-1}) \end{cases}$
5	$\begin{cases} p = p_0 \\ p \leq p_0 \\ p \geq p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} p \neq p_0 \\ p > p_0 \\ p < p_0 \end{cases}$	$X \sim B(p = ?)$, parametr p nieznany, $0 < p_0 \mp 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < 1$	$Z = \dfrac{\bar{P}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$\approx \mathcal{N}(0; 1)$	$\begin{cases} (-\infty;\ z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty) \\ (z_{1-\alpha}; \infty) \\ (-\infty;\ z_\alpha) \end{cases}$

Oznaczenia: X − model badanej cechy w populacji, $X_1, X_2, \dots, X_n$ – prosta próba losowa, n – liczebność próby, m – wartość oczekiwana (średnia populacji), $\bar{X}_n$ – średnia arytmetyczna, σ – odchylenie standardowe populacji, S_n – odchylenie standardowe z próby (statystyka nieobciążona), p – wskaźnik struktury populacji, $\bar{P}_n$ frakcja wyróżnionych elementów w próbie, α – poziom istotności testu, z_α – kwantyl rzędu α standardowego rozkładu normalnego, $t_{\alpha;\nu}$ – kwantyl rzędu α rozkładu t-Studenta z ν stopniami swobody, $\chi^2_{\alpha;\nu}$ – kwantyl rzędu α rozkładu chi-kwadrat z ν stopniami swobody.

Druga zasada podejmowania decyzji statystycznych opiera się na wyznaczonej mierze akceptacji hipotezy zerowej, zwanej zaobserwowanym poziomem istotności (observed significance level) lub p-wartośc (p-value). Jest to najmniejszy poziom istotności, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej.

Im mniejsza jest p-wartość, tym silniejsze przekonanie o fałszywości hipotezy zerowej.

Dla testów jednostronnych kryteria decyzyjne są następujące:

–jeżeli $p < \alpha$, to hipotezę H_0 odrzucamy na rzecz H_1,

–jeżeli $p \geq \alpha$, to stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia H_0.

Zasady obliczania wartości p dla testów jednostronnych podane są w tabeli

Hipoteza H_1	$p =$
$\theta > \theta_0$	$1 - F_U(u_0)$
$\theta < \theta_0$	$F_U(u_0)$

gdzie $F_U(u_0)$ jest wartością dystrybuanty statystyki testowej U dla obliczonej jej wartości u_0.

Przykład 5 (KA Przykład 6.8) W celu zbadania oczekiwanego przebiegu samochodów określonej marki do generalnego remontu silnika pobrano próbę losową o liczebności $n = 26$.

Obliczone z próby średnia arytmetyczna oraz odchylenie standardowe przebiegu wynoszą: $\bar{x} = 142$ tys. km, $s = 18$ tys. km. Przy założeniu, że przebieg samochodu do remontu jest zmienną losową $X \sim \mathcal{N}(m = ?, \sigma = ?)$ z nieznanymi parametrami, zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ hipotezę producenta

$$\mathrm{H}_0: m \geq 150 \text{ tys. km}$$

przeciw hipotezie alternatywnej zakładu serwisowego

$$\mathrm{H}_1: m < 150 \text{ tys. km}$$

Rozwiązanie. Ponieważ przebieg samochodu do remontu silnika ma z założenia rozkład normalny o nieznanych parametrach, więc do sprawdzenia hipotezy zerowej jest przyjęta statystyka

$$t = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

Obliczona z próby wartość statystyki wynosi $t_0 = –2.22$.

Przeprowadzany jest test typu $<$, więc istotność testu

$$p\ value = F_{t(25)}(-2{,}22) = 0{,}0177737$$

Ponieważ $p\ value \approx 0{,}018 < 0{,}05 = \alpha$, więc na przyjętym poziomie istotności są podstawy do odrzucenia hipotezy producenta, na rzecz hipotezy zakładu serwisowego.

Przy wielokrotnym stosowaniu opisanego testu, częstość popełniania błędu pierwszego rodzaju będzie rzędu 0,05. ♦

6. Testy dla wariancji

Test dla wariancji badanej w populacji cechy X wymaga, aby w przypadku małej próby ($n < 30$) populacja miała rozkład zbliżony do normalnego.

Na podstawie SRS sprawdzamy hipotezę zerową dla wariancji badanej cechy X w jednej z następujących postaci:

$$\mathrm{H}_0\colon \begin{cases} \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \end{cases}$$

(lub dla odchylenia standardowego $\mathrm{H}_0\colon \sigma = \sigma_0$).

Wobec odpowiadającej jej jednej z hipotez alternatywnych

$$H_1: \begin{cases} \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \\ \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

Test 1. Jeśli badana cecha X w populacji generalnej ma rozkład normalny z nieznanymi parametrami, co zapisujemy

$$X \sim \mathcal{N}(m = ?, \sigma = ?),$$

to statystyka

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{\boldsymbol{X}})^2$$

obliczona z próby n-elementowej przy prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład chis$(n-1)$.

Stosownie do hipotezy alternatywnej ustalamy obszar krytyczny R_α i podejmujemy decyzję.

Test 2. Badana cecha ma dowolny rozkład o nieznanej wartości oczekiwanej i nieznanej wariancji (niezerowej i skończonej). Zakłada się, że liczebność próby $n \geq 30$.
Do weryfikacji hipotezy używa się statystyki:

$$Z = \frac{S_n^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2}\sqrt{\frac{n}{2}}$$

która dla dużych n ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Kwantyl $\chi^2_{\alpha,n-1}$ rzędu α rozkładu chi-kwadrat dla $n-1$ stopni swobody odczytujemy z tablic lub obliczamy za pomocą programu komputerowego i ustalamy obszar krytyczny R_α.

Alternatywnie podejmujemy decyzję na podstawie $p\ value$.

Przykład 6. (KA Przykład 6.12). Producent przyrządów pomiarowych twierdzi, że produkowana przez niego pewna klasa przyrządów pomiarowych charakteryzuje się błędem losowym X (cm), którego wariancja wynosi $\sigma^2 = 0{,}06$.

W celu oszacowania dokładności pomiarów wykonywanych przyrządami tej klasy, dokonano 8 pomiarów tej samej wielkości i otrzymano następujące wyniki (w cm):

18,17, 18,21, 18,05, 18,14, 18,19, 18,22, 18,06, 18,08.

Zbadać na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, czy są podstawy do odrzucenia hipotezy producenta.

Rozwiązanie. Badaną cechą jest dokładność pomiarowa przyrządu danej klasy. Miarą dokładności jest wariancja populacji. Sprawdzona zostanie hipoteza zerowa będąca stwierdzeniem producenta

$$\mathrm{H}_0\colon \sigma_X^2 = 0{,}06$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$\mathrm{H}_1\colon \sigma_X^2 > 0{,}06$$

Statystyką testową jest

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \mathrm{CHIS}(n-1)$$

Statystyka ta, przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, ma rozkład *chi-kwadrat* z n–1 = 7 stopniami swobody.

Uwzględniając typ hipotezy alternatywnej obliczamy $p\ value$

$$p\ value = 1 - F_{\mathrm{CHIS}(n-1)}(\chi_0^2) = 0{,}999257$$

Ponieważ $p\ value > 0{,}05$, więc nie ma podstaw do odrzucenia twierdzenia producenta o dokładności pomiarowej produkowanych przyrządów. ♦

7. Test dla wskaźnika struktury

Jeśli cecha w populacji generalnej ma rozkład $B(p)$ z nieznanym parametrem p, to do sprawdzenia hipotezy $\mathrm{H}_0\colon p = p_0$ przeciw jednej z hipotez alternatywnych stosujemy statystykę

$$Z = \frac{\bar{P}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

która ma rozkład asymptotycznie normalny $\mathcal{N}(0, 1)$.

Test do sprawdzenia hipotezy zerowej jest oparty na wskaźniku struktury z próby $\bar{P}_n = \frac{K_n}{n}$, gdzie K_n jest liczbą elementów wyróżnionych w próbie o liczebności n.

W praktyce statystykę tę możemy stosować tylko dla prób spełniających warunek:

$$0 < p_0 \mp 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < 1$$

UWAGA. W przypadku jednostronnych alternatywnych hipotez parametrycznych H_1 typu > lub < jako hipotezę H_0 przyjmujemy zgodnie z normami hipotezę złożoną typu ≤ lub ≥.

Przykład 7. W pewnym przedsiębiorstwie wylosowano niezależnie 200 pracowników, dla których rozkład liczby przepracowanych nadgodzin w ciągu roku przedstawiono za pomocą szeregu rozdzielczego.

Dane umowne o przepracowanych nadgodzinach

Liczba nadgodzin	Liczba pracowników
0 – 33	76
34 – 66	23
67 – 99	16

100 – 132	15
133 – 165	19
166 – 198	13
199 – 231	14
232 – 264	5
265 – 297	5
298 – 330	5
331 – 363	3
364 i więcej	6

Zweryfikować hipotezy, że odsetek pracowników o liczbie nadgodzin 232 lub więcej był

a) równy 10%,
b) większy od 10%.

Rozwiązanie: W obydwu przypadkach stosujemy ten sam test

5	$\begin{cases} p = p_0 \\ p \leq p_0 \\ p \geq p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} p \neq p_0 \\ p > p_0 \\ p < p_0 \end{cases}$	$X \sim B(p)$, parametr p nieznany, $0 < p_0 \mp 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < 1$	$Z = \frac{\bar{P}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$\approx \mathcal{N}(0;1)$	$\begin{cases} (-\infty;\ z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty) \\ (z_{1-\alpha}; \infty) \\ (-\infty;\ z_\alpha) \end{cases}$

Postępowanie weryfikacyjne przedstawione jest w sposób równoległy.

	a)	b)
H_0:	$p = 10\% = 0{,}1 = p_0$	$p \leq 0{,}1$
H_1:	$p \neq 0{,}1$	$p > 0{,}1$
$\alpha =$	0,05	0,05

statystyka	$Z = \frac{\bar{P}_n - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

Opracowanie próby i sprawdzenie założenia	$n = 200, m = 24, \hat{p} = \bar{p} = \frac{m}{n} = \frac{24}{200} = 0{,}12$ $0 < p_0 \mp 3\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < 1, \quad 3\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\frac{9}{10}}{200}} \approx 3 \cdot 0{,}0212 = 0{,}0636$ i nierówności $0 < 0{,}1 \mp 0{,}0636 < 1$ są spełnione.	
Obliczanie wartości z_0	$z_0 = \frac{0{,}12-0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{200}}} = 0{,}9428$	
$R_\alpha =$	$(-\infty;\ z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$ $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{0,975} \overset{\text{TAB}}{=} -1{,}96$	$(z_{1-\alpha}; \infty)$ $z_{1-\alpha} = z_{0,9} \overset{\text{TAB}}{=} 1{,}2816$

$p =$	$p \approx \mathrm{P}(Z > 0{,}9428)$ $= 1 - \Phi(0{,}9428) \overset{\text{EXCEL}}{=} 1 - \mathrm{ROZKŁ.NORMALNY.S}(0{,}9428; 1)$ $= 1 - 0{,}827108 = 0{,}172892$

Decyzja	W obydwu przypadkach obliczona wartość statystyki nie należy do wyznaczonych przedziałów krytycznych, więc w obydwu przypadkach nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

W przypadku, gdy liczebność próby jest mała stosujemy przekształcenie

$$2\arcsin\sqrt{\bar{P}_n} = \varphi$$

Gdy $0 < K_n < n$, to zmienna przekształcona φ, przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, ma w przybliżeniu rozkład normalny

$$\varphi \sim \approx \mathcal{N}\left(2\arcsin\sqrt{p_0}\,;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Jako statystykę testową przyjmuje się wówczas standaryzowaną statystykę φ, tj. funkcję

$$Z = \left(2 \arcsin \sqrt{\bar{p}_n} - 2 \arcsin \sqrt{\bar{p}_0}\right)\sqrt{n}$$

która ma w przybliżeniu standaryzowany rozkład normalny.

Przykład 8 (KA Przykład 6.14). W celu stwierdzenia, czy dana moneta jest symetryczna, wykonano 20 rzutów tą monetą, otrzymując 12 orłów. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ sprawdzić hipotezę, że moneta jest symetryczna $\mathrm{H}_0\colon p = \frac{1}{2}$, wobec hipotezy alternatywnej $H_1\colon p > \frac{1}{2}$, gdzie p oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w jednym rzucie.

Rozwiązanie. Do obliczenia przybliżonej istotności można zastosować obydwa testy. Wyniki obliczeń przeprowadzonych pod interpreterem *EXEC* podano w ramce.

```
:1 – NORMAL(2 * ((ASIN SQRT(12/20)) – (ASIN SQRT 0.5)) * SQRT 20)
0.183926
: 1 – NORMAL(0.1/SQRT(0.5 * 0.5/20))
0.185546
```

Dla obydwu przypadków obliczone istotności ($p\ value$) są większe od 0,05, czyli obydwa testy nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy o symetryczności badanej monety na przyjętym poziomie istotności. ♦

Uwaga. Tablice kwantyli rozkładu $chi - kwadrat$ sporządzane są zwykle od 1 do 30 stopni swobody.

Jeżeli nie możemy skorzystać z komputerowego obliczenia, to korzystamy z aproksymacji

$$(*) \qquad \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underset{n \to \infty}{\sim} \mathcal{N}\left(n-1, \sqrt{2(n-1)}\right),$$

a po standaryzacji statystyki $(*)$ otrzymujemy nową statystykę

$$(**) \quad Z = \frac{\chi^2 - (n-1)}{\sqrt{2(n-1)}},$$

która dla dużych n ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

8. Dostępne testy w Matlabie

Function	Description
ansaribradley	Ansari-Bradley test. Tests if two independent samples come from the same distribution, against the alternative that they come from distributions that have the same median and shape but different variances.
barttest	Bartlett's test. Tests if the variances of the data values along each principal component are equal, against the alternative that the variances are not all equal.
chi2gof	Chi-square goodness-of-fit test. Tests if a sample comes from a specified distribution, against the alternative that it does not come from that distribution.
dwtest	Durbin-Watson test. Tests if the residuals from a linear regression are uncorrelated, against the alternative that there is autocorrelation among them.
friedman	Friedman's test. Tests if the column effects in a two-way layout are all the same, against the alternative that the column effects are not all the same.
jbtest	Jarque-Bera test. Tests if a sample comes from a normal distribution with unknown mean and variance, against the alternative that it does not come from a normal distribution.
kruskalwallis	Kruskal-Wallis test. Tests if multiple samples are all drawn from the same populations (or equivalently, from different populations with the same distribution), against the alternative that they are not all drawn from the same population.

Function	Description
kstest	One-sample Kolmogorov-Smirnov test. Tests if a sample comes from a continuous distribution with specified parameters, against the alternative that it does not come from that distribution.
kstest2	Two-sample Kolmogorov-Smirnov test. Tests if two samples come from the same continuous distribution, against the alternative that they do not come from the same distribution.
lillietest	Lilliefors test. Tests if a sample comes from a distribution in the normal family, against the alternative that it does not come from a normal distribution.
linhyptest	Linear hypothesis test. Tests if `H*b = c` for parameter estimates `b` with estimated covariance `H` and specified `c`, against the alternative that `H*b ≠ c`.
ranksum	Wilcoxon rank sum test. Tests if two independent samples come from identical continuous distributions with equal medians, against the alternative that they do not have equal medians.
runstest	Runs test. Tests if a sequence of values comes in random order, against the alternative that the ordering is not random.
signrank	One-sample or paired-sample Wilcoxon signed rank test. Tests if a sample comes from a continuous distribution symmetric about a specified median, against the alternative that it does not have that median.
signtest	One-sample or paired-sample sign test. Tests if a sample comes from an arbitrary con-

Function	Description
	tinuous distribution with a specified median, against the alternative that it does not have that median.
`ttest`	One-sample or paired-sample *t*-test. Tests if a sample comes from a normal distribution with unknown variance and a specified mean, against the alternative that it does not have that mean.
`ttest2`	Two-sample *t*-test. Tests if two independent samples come from normal distributions with unknown but equal (or, optionally, unequal) variances and the same mean, against the alternative that the means are unequal.
`vartest`	One-sample chi-square variance test. Tests if a sample comes from a normal distribution with specified variance, against the alternative that it comes from a normal distribution with a different variance.
`vartest2`	Two-sample *F*-test for equal variances. Tests if two independent samples come from normal distributions with the same variance, against the alternative that they come from normal distributions with different variances.
`vartestn`	Bartlett multiple-sample test for equal variances. Tests if multiple samples come from normal distributions with the same variance, against the alternative that they come from normal distributions with different variances.
`ztest`	One-sample *z*-test. Tests if a sample comes from a normal distribution with known variance and specified mean, against the alternative that it does not have that mean.

9. Zestaw zadań W08

1. Zapoznać się z metodą wyznaczania liczebności próbki przy testowaniu hipotez oraz sformułować i rozwiązać zadanie z ustalaniem liczebności. Link do pomocnego wykładu

http://www.youtube.com/watch?v=qoQy_2neB_w&feature=relmfu

2. Dokonać przeglądu testów w dostępnym oprogramowaniu na wzór wybranych testów w **MatLabie**

http://www.mathworks.com/help/stats/ttest.html

ttest – one-sample and paired-sample *t*-test

h = ttest(x,m) returns a test decision for the null hypothesis that the data in x comes from a normal distribution with mean m and unknown variance. The alternative hypothesis is that the mean is not m.

h = ttest(x,m,Name,Value) returns a test decision for the one-sample *t*-test with additional options specified by one or more name-value pair arguments. For example, you can change the significance level or conduct a one-sided test.

[h,p] = ttest(___) also returns the *p*-value, p, of the test, using any of the input arguments from the previous syntax groups.

[h,p,ci,stats] = ttest(___) also returns the confidence interval ci for the mean of x, or of x – y for the paired *t*-test, and the structure stats containing information about the test statistic.

Przykład. One-Sided Hypothesis Test

Load the sample data. Create a vector containing the first column of the students' exam grades data.

load examgrades;

x = grades(:,1);

Test the null hypothesis that the data comes from a population with mean equal to 65, against the alternative that the mean is greater than 65.

```
h = ttest(x,65,'Tail','right')
h = 1
```

The returned value of h = 1 indicates that ttest rejects the null hypothesis at the 5% significance level, in favor of the alternate hypothesis that the data comes from a population with a mean greater than 65.

3. Wytwórnia cukierków paczkuje w torebki po około 200 sztuk mieszankę złożoną z dwóch rodzajów cukierków, przy czym paczkowane są dwa typy mieszanek. Mieszanka typu A zawiera 40% cukierków pierwszego rodzaju i 60% drugiego rodzaju, natomiast mieszanka typu B zawiera jednakowe liczby cukierków obydwu rodzajów. Do weryfikacji hipotezy $\mathrm{H}_0\colon p = 40\%$, że mieszanka jest typu A, wobec hipotezy alternatywnej $\mathrm{H}_1\colon p = 50\%$, zaproponowano następującą procedurę: jeśli wśród 5 cukierków wylosowanych z torebki znajdą się więcej niż 3 cukierki pierwszego rodzaju, to odrzuca się hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej. W przeciwnym przypadku przyjmuje się hipotezę zerową. Przy tak określonej procedurze testowej, znaleźć prawdopodobieństwa błędów obydwu rodzajów oraz moc testu. Odp.: $\alpha \approx 0{,}084$, $\beta \approx 0{,}815$.

4. Pascal jest językiem programowania wysokiego poziomu, stosowanym często do oprogramowywania mikrokomputerów. W celu zbadania wskaźnika p zmiennych pascalowych typu tablicowego został przeprowadzony eksperyment. Dwadzieścia zmiennych zostało losowo wybranych ze zbioru programów pascalowych i liczba X zmiennych typu tablicowego została odnotowana. Celem poznawczym jest zweryfikowanie hipotezy, czy pascal jest językiem o większej wydolności (tj. ma większy udział zmiennych typu tablicowego) niż algol, dla którego, jak pokazało doświadczenie, jedynie 20% zmiennych jest typu tablicowego.

a) Skonstruować test statystyczny do zweryfikowania postawionej hipotezy.

b) Znaleźć α dla zbioru odrzuceń $X \geq 8$.

c) Znaleźć α dla zbioru odrzuceń $X \geq 5$.

d) Znaleźć β dla zbioru odrzuceń $X \geq 8$, jeżeli $p = 0{,}5$ (doświadczenie pokazuje, że około połowa zmiennych w programach pascalowskich jest typu tablicowego).

e) Znaleźć β dla zbioru odrzuceń $X \geq 5$, jeżeli $p = 0{,}5$.

f) Który ze zbiorów odrzuceń $X \geq 8$ czy $X \geq 5$ jest bardziej pożądany, jeżeli minimalizowany jest:

A) błąd I rodzaju?

B) błąd II rodzaju?

g) Znaleźć jednostronny zbiór odrzuceń postaci $X \geq a$, tak aby poziom ufności był w przybliżeniu równy $\alpha = 0{,}01$

h) Dla zbioru odrzuceń wyznaczonego w poprzednim punkcie znaleźć moc testu, jeżeli $p = 0{,}4$.

i) Dla zbioru odrzuceń wyznaczonego w punkcie g) znaleźć moc testu, jeżeli $p = 0{,}7$.

Odp. b) 0.032, c) 0.370, d) 0.132, e) 0.006, f) A) $X \geq 8$; B) $X \geq 5$, g) $X \geq 9$, h) 0,596, i) 0,005.

5. Pośrednik w handlu nieruchomościami chce oszacować przeciętną wartość kawalerki w pewnej dzielnicy. W losowej próbie

16 kawalerek średnia wyniosła 120 000 PLN. Odchylenie standardowe wartości kawalerek

a) jest znane pośrednikowi i wynosi 5500PLN;

b) nie jest znane pośrednikowi i obliczone z próby odchylenie standardowe wynosi 5500PLN,

c) wygenerować 16 elementową próbę według rozkładu $\mathcal{N}(120000; 5500)$, a następnie na poziomach istotności $\alpha_1 = 0{,}05$ i $\alpha_2 = 0{,}01$ zweryfikować hipotezy:

- przeciętna wartość kawalerki w rozważanej dzielnicy nie uległa zmianie od ubiegłego roku i wynosi 110000 PLN;
- przeciętna wartość kawalerki w rozważanej dzielnicy spadła poniżej 110000 PLN.

6. Producent pewnego typu opon informuje, że ich trwałość mierzona przebiegiem w [km] ma rozkład

i) $\mathcal{N}(50000; 5000)$[km],

ii) $\mathcal{N}(50000; ?)$[km],

iii) $?(50000; ?)$[km].

Na podstawie rejestrów przebiegów w wariancie a) stu, a w wariancie b) dziesięciu opon wylosowanych do badań trwałości otrzymano średni przebieg 48000[km] i empiryczne odchylenie standardowe 8000[km].

	Zbudować schemat wyboru testów, aby sprawdzić, czy w każdym z rozważanych przypadków wyniki przeczą informacji producenta.

7. Zbadano czułość 80 telewizorów i uzyskano

$$\bar{x} = 348[mV] \text{ i } s = 107[mV].$$

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę, że odchylenie standardowe czułości jest większe od nominalnej wartości wynoszącej $100[mV]$.

8. (TG 6.30 s. 236). Pomiary prędkości samochodów osobowych na pewnym odcinku autostrady dały wyniki pokazane w tabeli danych. Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$, hipotezę, że odchylenie standardowe jest większe od 10 km/h.

Tabela danych.

Prędkość	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
Liczba samochodów	7	30	40	69	48	6

9) W losowej próbie 12 bateryjek z nowej serii wprowadzanej na rynek zbadano czasy ich zdatności i otrzymano średnią arytmetyczną 34,2 godziny. Na poziomach istotności $\alpha_1 = 0{,}05$ i $\alpha_2 = 0{,}01$ zweryfikować hipotezy:

a) przeciętny czas zdatności bateryjek z badanej serii wynosi 36 godzin;

b) przeciętny czas zdatności bateryjek z badanej serii wynosi ponad 36 godzin;

w przypadku gdy:

i) odchylenie standardowe długości życia bateryjek w populacji wynosi 5,9 godziny;

ii) odchylenie standardowe długości życia bateryjek w próbie wynosi 5,9 godziny.

c) wygenerować 12 elementową próbę według rozkładu

$\mathcal{N}(34{,}2; 5{,}9)$ i na jej podstawie zweryfikować hipotezy a) i b).

1. Wzrost losowo wybranej osoby z pewnej populacji ma rozkład normalny o nieznanych parametrach. Pobrano próbę losową o liczności $n = 26$ i po obliczeniu przedziału ufności na poziomie 0,9 otrzymano następujący wynik: $(162; 178)$(cm). Wygenerować próbę złożoną z 26 pomiarów według rozkładu $\mathcal{N}(\overline{\boldsymbol{x}}, s_{26})$ i na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezy

a) średni wzrost ludzi z badanej populacji jest większy od 178 cm.

b) odchylenie standardowe wzrostu ludzi z badanej populacji jest mniejsze od 24 cm.

11. Linia lotnicza chce oszacować frakcję Polaków, którzy będą korzystać z nowo otwartego połączenia między Poznaniem a Londynem. Wybrano losową próbę 347 pasażerów korzystających z tego połączenia, z których 201 okazało się Polakami. Na poziomach istotności $\alpha_1 = 0{,}1$ i $\alpha_2 = 0{,}01$ zweryfikować hipotezy:

a) frakcja Polaków wśród pasażerów korzystających z nowo otwartego połączenia wynosi 60%;

b) frakcja Polaków wśród pasażerów korzystających z nowo otwartego połączenia wynosi ponad 60%.

12. Czas obsługi w okienku bankowym nie powinien mieć dużej wariancji, gdyż w przeciwnym przypadku kolejki mają tendencję do rozrastania się. Bank regularnie sprawdza czas obsługi w okienkach, by oceniać jego wariancję. Obserwacja 22 czasów obsługi losowo wybranych klientów dała wariancję równą 8 minut^2. Na poziomach istotności $\alpha_1 = 0{,}05$ i $\alpha_2 = 0{,}01$ zweryfikować hipotezy:

a) wariancja czasu obsługi w okienku bankowym wynosi 15minut;

b) wariancja czasu obsługi w okienku bankowym wynosi ponad 15 minut.

13. Czuły przyrząd pomiarowy powinien mieć niewielką wariancję błędów pomiaru. W próbie 41 błędów pomiaru stwierdzono wariancję 102 [j.m.]^2. Na poziomie istotności $\alpha_1 = 0{,}05$ i $\alpha_2 = 0{,}01$ zweryfikować hipotezy:

a) wariancja błędów pomiaru wynosi 120 [j.m.]^2;

b) wariancja błędów pomiaru wynosi poniżej 120 [j.m.]^2.

14. Z partii kondensatorów wybrano losowo 12 kondensatorów i zmierzono ich pojemności, otrzymując wyniki (w *pF*): 4,45, 4,40, 4,42, 4,38, 4,44, 4,36, 4,40, 4,39, 4,45, 4,35, 4,40, 4,35. Kondensator nie spełnia wymagań, gdy jego pojemność jest mniejsza od 4,39 *pF*. Wygenerować 100 elementową próbę według rozkładu $\mathcal{N}(\bar{x}_{12}, s_{12})$ a następnie na poziomach istotności $\alpha_1 = 0{,}05$ i $\alpha_2 = 0{,}01$ zweryfikować hipotezy:

a) oczekiwana pojemność kondensatora pochodzącego z danej partii wynosi 4,39;

b) oczekiwana pojemność kondensatora pochodzącego z danej partii wynosi ponad 4,39;

c) wskaźnik kondensatorów, które nie spełniają wymagań technicznych wynosi 10%;

d) Wariancja pojemności kondensatorów wynosi $0{,}9s^2$.

15. Wylosowano do próby 100 zakładów usługowych i otrzymano następujący rozkład wydatków na reklamę:

Kwartalne wydatki	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20]
Liczba zakładów	10	20	40	30

Na poziomach istotności $\alpha_1 = 0{,}05$ i $\alpha_2 = 0{,}01$ sprawdzić hipotezy:

a) przeciętne kwartalne wydatki na reklamę (w tys. PLN) wynoszą 10000PLN;

b) przeciętne kwartalne wydatki na reklamę (w tys. PLN) wynoszą ponad 10000PLN;

c) odchylenie standardowe wydatków na reklamę wynosi 4000 PLN

16. Dla wylosowanej próby studentów otrzymano następujący rozkład tygodniowego czasu nauki (w godz.):

Czas nauki	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)	[10, 12)
Liczba studentów	10	28	42	30	15	7

Na poziomach istotności $\alpha_1 = 0{,}1$ i $\alpha_2 = 0{,}01$ sprawdzić hipotezy:

a) średni czas poświęcony tygodniowo na naukę dla badanej populacji studentów wynosi 6 godz.

b) średni czas poświęcony tygodniowo na naukę dla badanej populacji studentów wynosi poniżej 6 godz.;

c) wariancja tego czasu wynosi 4 godz.^{2};

d) wariancja tego czasu wynosi ponad 4 godz.^{2}.

17. Dyrekcja supermarketu zamierza ustalić przeciętny czas (w min.) spędzany przez klientów w ich sklepie.

W tym celu wylosowano próbę

czas w min	2 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 22	22 - 30
liczba klientów	21	58	43	15	7

Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezy:

a) przeciętny czas przebywania klientów w sklepie wynosi ponad 14 minut.

b) Odchylenie standardowe czasu przebywania klientów w sklepie wynosi mniej niż 3 minuty.

18. W pewnym teście psychologicznym przeprowadzonym na wylosowanych 50 dzieciach otrzymano następujący rozkład wyników liczby zapamiętanych przez dzieci elementów:

Liczba elementów	[15, 20]	(20, 25]	(25, 30]	(30, 35]	(35, 40]	(40, 45]	(45, 50]
Liczba dzieci	6	8	12	10	7	4	3

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ sprawdzić hipotezy:

a) średnia liczba zapamiętanych przez dzieci elementów w teście wynosi 35;
b) średnia liczba zapamiętanych przez dzieci elementów w teście jest mniejsza od 35;
c) wariancja liczby zapamiętanych przez dzieci elementów w teście wynosi 25.