Statystyka dla inżynierów
KOLOKWIUM nr 1 (w formie zdalnej)
Zestaw A – 20 punktów

Część I – 15 punktów

Modelem czasu zdatności T (w godz.) pewnych elementów jest nieujemna zmienna losowa o gęstości:

$$f_T(t) = At\exp(-0{,}0000005t^2)\,\mathbb{I}_{[0,\infty)}(t)$$

a) Rozpoznać rozkład oraz ustalić wartość stałej A oraz parametry tego rozkładu.
b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i drugi moment zwykły.
c) Wyznaczyć odchylenie standardowe i współczynnik zmienności.
d) Wyznaczyć dominantę czasu zdatności.
e) Wyznaczyć współczynnik skośności czasu zdatności.
f) Wyznaczyć dystrybuantę czasu zdatności T.
g) Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń: $T > 500$, $|T - \mathbb{E}T| < \mathbb{D}T$.
h) Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń: $T > 1500$, $(T > 1500|T > 1000)$.
i) Wyznaczyć funkcję kwantylową czasu zdatności T.
j) Wyznaczyć kwartyle oraz kwantyle rzędu 0,1 i 0,9.
k) Sporządzić krzywą gęstości i zaznaczyć na wykresie kwartyle, dominantę i wartość oczekiwaną.
l) Obliczyć dla jakiej wartości stałej a zachodzi równość $\mathrm{P}\big(a < T < t_{0,95}\big) = 0{,}90$.
m) Przyjmując, że elementy są wycofywane z eksploatacji po uszkodzeniu lub przepracowaniu 2500 godzin obliczyć prawdopodobieństwo najbardziej prawdopodobnej liczby elementów sprawnych wśród 50 wycofanych z eksploatacji.
n) Przyjmując, że elementy po przepracowaniu 500 godzin poddawane są kontroli sprawności, obliczyć prawdopodobieństwo, że trzeci niesprawny element nie znajdzie się wśród pierwszych 100 sprawdzanych.
o) Ustalić najbardziej prawdopodobną liczbę sprawdzanych elementów do natrafienia na trzeci uszkodzony. Ile to prawdopodobieństwo wynosi?

Część II – 5 punktów

p) Modelem czasu zdatności X (w godz.) pewnych elementów jest dwuparametrowa rodzina rozkładów określona przez dystrybuantę

$$F(x;k,\lambda) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Dla $x = x_1$ dystrybuanta przyjmuje wartość p_1 a dla $x = x_2 > x_1$ wartość $p_2 > p_1$, czyli

$$F(x_1;k,\lambda) = p_1,\ F(x_2;k,\lambda) = p_2$$

Wyznaczyć parametry k,λ rozważanej rodziny rozkładów czasu zdatności elementów jako funkcji zmiennych x_1, x_2, p_1, p_2. Przyjąć pewne wartości tych zmiennych, obliczyć parametry i sporządzić krzywą gęstości.

q) Czas zdatności X elementów ma rozkład z punktu p), a wartość oczekiwana spełnia warunek $0 < a \le \mathbb{E}X \le b < \infty$. Oszacować parametr λ dla $k = 1, 2, 3, 4, 5$ oraz sporządzić krzywe gęstości i wykresy dystrybuant dla otrzymanych oszacowań.
r) Tym razem oprócz warunku $0 < a \le \mathbb{E}X \le b < \infty$ dodatkowo narzucony jest warunek na wariancję $\mathbb{D}^2T \le c < \infty$. Czy przy tych warunkach można oszacować obydwa parametry czasu zdatności? Rozważyć szczególny przypadek.

KA 07.04.2021