SdI30 W09: *TESTY PARAMETRYCZNE DLA DWÓCH I KILKU POPULACJI*

1. **Testy istotności dla dwóch wariancji**

   Przykład 1

2. **Testy istotności dla kilku wariancji**

   Przykład 2

3. **Statystyki porównania dwóch wartości oczekiwa-nych**

   Przykład 3

4. **Testy porównania dwóch wskaźników struktury**

   Przykład 4

5. **Zestaw zadań**

1. Testy istotności dla dwóch wariancji

Często w badaniach musimy dokonać porównania dwóch lub więcej populacji ze względu na rozrzut możliwych wartości. W przypadku dwóch populacji test ilorazu wariancji $\frac{\mathbb{D}^2 X}{\mathbb{D}^2 Y} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ badanej cechy w populacjach X i Y jest przeprowadzany na podstawie dwóch niezależnych prób $X_1, \dots, X_n$ i $Y_1, \dots, Y_m$ o liczebnościach n i m.

Hipoteza zerowa jest postaci

$$\mathrm{H}_0 \colon \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = k$$

gdzie $k > 0$.

Rozważamy przypadek statystyk testowych dla ilorazu wariancji, gdy $k = 1$.

Przy założeniu normalności badanej cechy w dwóch populacjach $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1 = ?)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2 = ?)$,

- w przypadku sprawdzania hipotezy $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_0^2$ stosujemy statystykę:

$$\chi^2 = \frac{(n_1+n_2-2)S^2}{\sigma_0^2} \sim \mathrm{chis}(n_1 + n_2 - 2)$$

- w przypadku sprawdzania hipotezy $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ stosujemy:

$$F = \frac{\max\{S_1^2, S_2^2\}}{\min\{S_1^2, S_2^2\}} \sim F(n_l - 1, n_m - 1),$$

n_l, n_m są liczebnościami prób z licznika i mianownika służącymi do ustalenia parametrów (stopni swobody) rozkładu F.

Przykład 1 (KA 6.13). Analiza danych dotyczących samochodów wskazuje, że samochody europejskie bardziej zaspokajają potrzeby klientów niż samochody japońskie. Przyjmując za kryterium zaspokajania potrzeb klientów salonów samochodowych jedynie przyspieszenie samochodu, rozstrzygnąć ten problem na podstawie danych zawartych w pliku *CARDATA*.

Rozwiązanie. Większy wybór samochodów o różnych przyspieszeniach bardziej zaspokaja potrzeby klientów.

Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi oznaczającymi przyspieszenia samochodów europejskich i japońskich.

Dane dotyczące samochodów europejskich oraz japońskich pobrane z pliku CARDATA przypisane odpowiednio do zmiennych *Seur* oraz *Sjap* są następujące:

$$Seur = \{21.5\ 15.9\ 13.6\ 15.7\ 15.8\ 14.9\ 14\ 20.1\ 24.8\ 14.7\ 14.7\ 15.8\ 21.7\ 23.7\ 19.9\ 21.8\ 17.3\ 15.3\ 15.1\ 14.2\ 15.8\ 20.4\ 15.4\ 19.6\ 15.3\ 24.6\}$$

$$Sjap = \{19.4\ 18.6\ 16.4\ 14.2\ 14.7\ 14.8\ 14.9\ 16.6\ 15.2\ 19.2\ 18.8\ 16.4\ 15.5\ 17.5\ 15\ 15.2\ 17.9\ 19.2\ 13.8\ 18\ 11.4\ 12.5\ 17\ 16.9\ 16.1\ 17.8\ 19.4\ 17.3\ 16\ 14.4\ 16.8\ 14.8\ 18.3\ 12.6\ 13.8\ 18.2\ 17.6\ 14.5\ 14.5\ 16.9\ 15\ 15.7\ 16.2\ 13.9\}$$

Sprawdzeniu jest poddana hipoteza $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$, że wariancja przyspieszenia samochodów europejskich jest większa niż samochodów japońskich.

Jest to hipoteza alternatywna, więc uzupełniamy ją hipotezą zerową, że wariancje są równe, tj.

$$H_0\colon \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

Przy prawostronnej hipotezie alternatywnej zbiorem krytycznym testu jest przedział

$$R_\alpha = [F_{1-\alpha;n_1-1;n_2-1};\ \infty)$$

Ponieważ obliczona istotność testu

$$p\ value = 0{,}000385 < 0{,}05 = \alpha,$$

więc są podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej na rzecz hipotezy alternatywnej.

Na podstawie danych stwierdzamy, że samochody europejskie bardziej zaspokajają gusta klientów, biorących pod uwagę jedynie przyspieszenie samochodu. ♦

W przypadku dwustronnej hipotezy alternatywnej zbiorem krytycznym jest przedział

$$R_\alpha = [F_{1-\frac{\alpha}{2};n_l-1;n_m-1};\ \infty)$$

Założenie o równości wariancji (ang. homoscedasticity) jest wymagane przy wielu analizach statystycznych, jak np. test t, analiza wariancji, regresja.

Przedstawiony test F dla hipotezy obustronnej zwany jest testem Hartleya. Test F jest bardzo nieodporny na odstępstwa od normalności rozkładu.

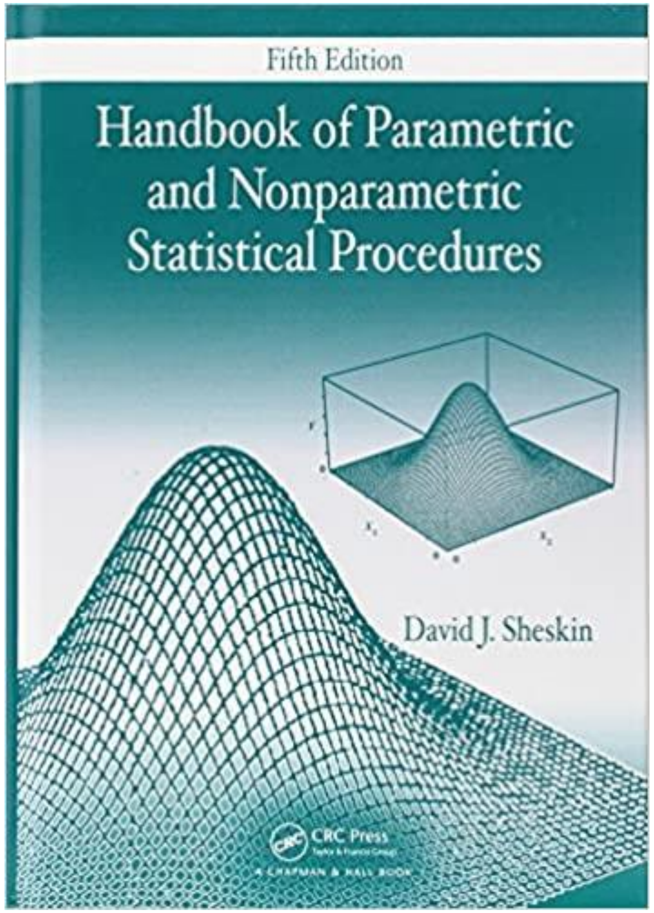
Najczęściej w przypadku niespełnienia tego założenia stosuje się ***test Levene'a***. Jest to wersja testu F, gdzie zamiast oryginalnych prób bierze się $|X_i - \bar{X}|$.

Idea testu sprowadza się zatem do porównania odchyleń przeciętnych zamiast wariancji. Jeśli w teście Levene'a będziemy używać mediany zamiast średniej, uzyskamy ***test Browna-Forsythe'a***, który jest odporny na obserwacje odstające i odstępstwa od normalności rozkładu.

Ogólnie zaleca się używanie mediany w przypadku rozkładów silnie asymetrycznych, a średniej arytmetycznej dla rozkładów symetrycznych o normalnych „ogonach". Jeśli nie mamy żadnych przypuszczeń co do rozkładu badanych danych, używamy mediany jako najbardziej odpornej miary.

Więcej na temat wymienionych i innych testów w książce:

Sheskin D.J. (2007), *Handbook of Parametric and Nonparametric Statistical Procedures*, Chapman & Hall.



2. Testy istotności dla kilku wariancji

W tym przypadku najczęściej używany jest **test Bartletta**.

Test ten dotyczy k populacji normalnych $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$, dla których chcemy sprawdzić hipotezę o równości wariancji we wszystkich podpopulacjach.

Hipoteza zerowa jest następująca:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$$

Hipoteza alternatywna $H_1: \sigma_i^2 \neq \sigma^2$ dla co najmniej jednego i jest zaprzeczeniem hipotezy zerowej.

Test ten nazywany jest również testem jednorodności wielu wariancji. Test ten oparty jest na statystyce, która ma asymptotyczny rozkład χ^2. Zbieżność do rozkładu χ^2 jest przy tym bardzo szybka. Można go zatem stosować nawet dla bardzo małych prób (w praktyce $n_i \geq 6$).

$\mathbf{X}_i = \left(X_{i1}, \dots, X_{in_i}\right), i = 1, \dots k$, są k niezależnymi próbami z rozkładów $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$

Statystyka testowa:

$$M = \frac{1}{C}\left[(N-k)\ln S^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln S_i^2\right]$$

gdzie

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i\,,\ C = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{N-k}\right),$$

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2, \bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij},$$

$$S^2 = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\,S_i^2$$

W przypadku, gdy hipoteza H_0 jest prawdziwa, statystyka M ma asymptotyczny (przy $n_1 \to \infty, \dots, n_k \to \infty$) rozkład chis$(k-1)$.

Obszar krytyczny: $R_\alpha = (\chi^2_{1-\alpha;k-1};\ \infty)$

Test Bartleta ma zastosowanie przede wszystkim w analizie wariancji. Test ten nie jest testem odpornym na odchylenia od rozkładu normalnego.

W przypadku, gdy $n_i = n = const$ można do sprawdzenia hipotezy H_0 zastosować test Cochrana lub test Hartleya.

Test Cochrana. Test do weryfikowania hipotezy o równości wariancji dla $k \geq 2$ populacji o rozkładach normalnych.

$$H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 = \sigma^2$$

$$H_1\colon \sigma_{\max}^2 \neq \sigma^2, \text{ gdzie } \sigma_{\max}^2 = \max\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2\}$$

Statystyka testowa:

$$G = \frac{\max\{S_1^2, \dots, S_k^2\}}{\sum_{i=1}^{k} S_i^2}$$

gdzie S_i^2 oznacza wariancję z próby $\mathbf{X}_i$.

Zbiorem krytycznym tego testu jest przedział

$$R_\alpha = [G_{1-\alpha;k,n};\ \infty)$$

gdzie $G_{1-\alpha;k,n}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu statystyki G przy danych k i n.

Kwantyle te można odczytać z tabl. 10 Krysicki część II.

T a b l i c a 10. Kwantyle $G(p, k, v)$ rzędu p statystyki G Cochrana

$p=0{,}99$

k	v													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	,9933	,9423	,8831	,8335	,7933	,7606	,7335	,7107	,6912	,6743	,6059	,5153	,4230	,3333
4	,9679	,8643	,7814	,7212	,6761	,6410	,6129	,5897	,5702	,5536	,4884	,4057	,3251	,2500
5	,9279	,7885	,6957	,6329	,5875	,5531	,5259	,5037	,4854	,4697	,4094	,3351	,2644	,2000
6	0,8828	0,7218	0,6258	0,5635	0,5195	0,4866	0,4608	0,4401	0,4229	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	,8376	,6644	,5685	,5080	,4659	,4347	,4105	,3911	,3751	,3616	,3105	,2494	,1929	,1429
8	,7945	,6152	,5209	,4627	,4226	,3932	,3704	,3522	,3373	,3248	,2779	,2214	,1700	,1250
9	,7544	,5727	,4810	,4251	,3870	,3592	,3378	,3207	,3067	,2950	,2514	,1992	,1521	,1111
10	,7175	,5358	,4469	,3984	,3572	,3308	,3106	,2945	,2813	,2704	,2297	,1811	,1376	,1000
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680	0,2535	0,2419	0,2320	0,1916	0,1535	0,1157	0,0833
15	,5747	,4069	,3317	,2882	,2593	,2386	,2228	,2104	,2002	,1918	,1612	,1251	,0934	,0667
20	,4799	,3297	,2654	,2288	,2048	,1877	,1748	,1646	,1567	,1501	,1248	,0960	,0709	,0500
24	,4247	,2871	,2295	,1970	,1759	,1608	,1495	,1406	,1338	,1283	,1060	,0810	,0595	,0417
30	,3632	,2412	,1913	,1635	,1454	,1327	,1232	,1157	,1100	,1054	,0867	,0658	,0480	,0333
40	0,2940	0,1915	0,1508	0,1281	0,1135	0,1033	0,0957	0,0898	0,0853	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	,2151	,1371	,1069	,0902	,0976	,0722	,0668	,0625	,0594	,0567	,0461	,0344	,0245	,0167
120	,1225	,0759	,0585	,0489	,0429	,0387	,0357	,0334	,0316	,0302	,0242	,0178	,0125	,0083
∞	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000

$p=0{,}95$

k	v													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	,9669	,8709	,7977	,7457	,7071	,6771	,6530	,6333	,6167	,6025	,5466	,4748	,4031	,3333
4	,9065	,7679	,6841	,6287	,5985	,5598	,5365	,5175	,5017	,4884	,4366	,3720	,3093	,2500
5	,8412	,6838	,5938	,5440	,5063	,4783	,4564	,4387	,4241	,4118	,3645	,3066	,2513	,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	,7271	,5612	,4800	,4307	,3974	,3726	,3535	,3384	,3259	,3154	,2756	,2278	,1833	,1429
8	,6798	,5157	,4377	,3910	,3595	,3362	,3185	,3043	,2926	,2829	,2462	,2022	,1616	,1250
9	,6385	,4775	,4027	,3584	,3286	,3067	,2901	,2768	,2659	,2568	,2226	,1820	,1446	,1111
10	,6020	,4450	,3733	,3311	,3029	,2823	,2666	,2541	,2439	,2353	,2032	,1655	,1308	,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	,4709	,3346	,2758	,2419	,2195	,2034	,1911	,1815	,1736	,1671	,1429	,1144	,0889	,0667
20	,3894	,2705	,2205	,1921	,1735	,1602	,1501	,1422	,1357	,1303	,1108	,0879	,0675	,0500
24	,3434	,2354	,1907	,1656	,1493	,1374	,1286	,1216	,1160	,1113	,0942	,0743	,0567	,0417
30	,2929	,1980	,1593	,1377	,1237	,1137	,1061	,1002	,0958	,0921	,0771	,0604	,0457	,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	,1737	,1131	,0895	,0765	,0682	,0623	,0583	,0552	,0520	,0497	,0411	,0316	,0234	,0167
120	,0998	,0632	,0495	,0419	,0371	,0337	,0312	,0292	,0279	,0266	,0218	,0165	,0120	,0083
∞	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000	,0000

Tablica 10 pochodzi z [33]

Test Hartleya. Podobnie jak testy Bartletta i Cochrana jest testem jednorodności wielu wariancji.

Hipoteza $H_1: \sigma_i^2 \neq \sigma^2$ dla co najmniej jednego i.

Statystyka testowa:

$$H = \frac{\max\{S_1^2, \dots, S_k^2\}}{\min\{S_1^2, \dots, S_k^2\}}$$

gdzie S_i^2 oznacza wariancję z próby $\mathbf{X}_i$.

Zbiorem krytycznym tego testu jest przedział:

$$R_\alpha = [H_{1-\alpha;k;n}, \infty)$$

gdzie $H_{1-\alpha;k,n}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ rozkładu statystyki H przy danych k i n.

Kwantyle te można odczytać z tabl. 11 Krysicki część II.

T a b l i c a 11. Kwantyle $H(p, k, v)$ rzędu p statystyki H Hartleya

$p = 0{,}95$

v	k = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39,0	87,5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15,4	27,8	39,2	50,7	62,0	72,9	83,5	93,9	140	114	124
4	9,60	15,5	20,6	25,2	29,5	33,6	37,5	41,1	44,6	48,6	51,4
5	7,15	10,8	13,7	16,3	18,7	20,8	22,9	24,7	26,5	28,2	29,9
6	5,82	8,38	10,4	12,1	13,7	15,0	16,3	17,5	18,6	19,7	20,7
7	4,99	6,94	8,44	9,70	10,8	11,8	12,7	13,5	14,3	15,1	15,8
8	4,43	6,00	7,18	8,12	9,03	9,78	10,5	11,1	11,7	12,2	12,7
9	4,03	5,34	6,31	7,11	7,80	8,41	8,95	9,45	9,91	10,3	10,7
10	3,72	4,85	5,67	6,34	6,92	7,42	7,87	8,28	8,66	9,01	9,34
12	3,28	4,16	4,79	5,30	5,72	6,09	6,42	6,72	7,00	7,25	7,48
15	2,86	3,54	4,01	4,37	4,68	4,95	5,19	5,40	5,59	5,77	5,93
20	2,46	2,95	3,29	3,54	3,76	3,94	4,10	4,24	4,37	4,49	4,59
30	2,07	2,40	2,61	2,78	2,91	3,02	3,12	3,21	3,29	3,36	3,39
60	1,67	1,85	1,96	2,04	2,11	2,17	2,22	2,26	2,30	2,33	2,36
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

$p = 0{,}99$

v	k = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	199	448	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813	3204	3605
3	47,5	85	120	151	184	216	249	281	310	337	361
4	23,2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14,9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11,1	15,5	19,1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8,89	12,1	14,5	16,5	18,4	20	22	23	24	26	27
8	7,50	9,9	11,7	13,2	14,5	15,8	16,9	17,9	18,9	19,8	21
9	6,54	8,5	9,9	11,1	12,1	13,1	13,9	14,7	15,3	16,0	16,6
10	5,85	7,4	8,6	9,6	10,4	11,1	11,8	12,4	12,9	13,4	13,9
12	4,91	6,1	6,9	7,6	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,2	10,6
15	4,07	4,9	5,5	6,0	6,4	6,7	7,1	7,3	7,5	7,8	8,0
20	3,32	3,8	4,3	4,6	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9
30	2,63	3,0	3,3	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
60	1,96	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
∞	1,00	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Tablica 11 pochodzi z [33]

Przykład 2 (KRY.II.102). W celu stwierdzenia czy wariancje ocen uzyskanych na egzaminie z pewnego przedmiotu przez studentów trzech wydziałów pierwszego roku pewnej uczelni są jednakowe, dla losowo wybranej z każdego wydziału grupy 30 studentów obliczono wariancje ocen, otrzymując:

$$s_1^{*2} = 1{,}4,\ s_2^{*2} = 0{,}9,\ s_3^{*2} = 1{,}1$$

Zakładając, że rozkłady ocen są normalne, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezę o równości wariancji ocen dla wszystkich studentów pierwszego roku tych trzech wydziałów.

Rozwiązanie. Podane oceny wariancji są obciążone.
Należy przeliczyć je na nieobciążone

$$s_1^2 = 1{,}448, s_2^2 = 0{,}931, s_3^2 = 1{,}138$$

Następnie obliczamy wartość statystyki Bartletta

$$M = \frac{1,426}{c}$$

oraz odczytujemy wartość kwantyla

$$\chi^2_{0,95;2} = 5,991$$

Ponieważ $1,426 \notin R_{0,05}$, więc tym bardziej $\frac{1,426}{c} \notin R_{0,05}$ – wobec $c > 1$ – więc nie ma powodu do odrzucenia weryfikowanej hipotezy na przyjętym poziomie istotności.

Ponieważ liczności prób są równe, więc można zastosować także test Cochrana oraz test Hartleya.

Dla testu Cochrana otrzymujemy

$$G_{obl} = \frac{s^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{3} s_i^2} = 0,412$$

Z tablicy 10 kwantyli rozkładu G otrzymujemy $G_{0,95;3;30} = 0{,}497$, więc brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej na poziomie $\alpha = 0{,}05$.

Dla testu Hartleya otrzymujemy wartość statystyki

$$H_{obl} = \frac{s_{\max}^2}{s_{\min}^2} = 1{,}556$$

a z tabeli 11 kwantyli rozkładu H odczytujemy $H_{0,95;3;30} = 2{,}40$, więc również brak podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy na przyjętym poziomie istotności.

3. Testy dla różnicy wartości oczekiwanych

Testy dla różnicy wartości oczekiwanych dwóch populacji są szczególnie często stosowane w praktyce.

Przyczyną jest to, że parametrem jest wartość oczekiwana oraz to, że testy te dotyczą klasycznego konfliktu "starego z nowym": porównuje się nową metodę technologiczną, nową konstrukcję maszyny itp. z ich poprzednimi wersjami.

Rozważamy dwie niezależne populacje, w których modelami badanej cechy są zm. l. X i Y, przy czym:

$$X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1), Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2).$$

Hipotezę zerową dla nieznanej różnicy $m_1 - m_2$ możemy zapisać na jeden z trzech sposobów:

$$H_0: \begin{cases} m_1 - m_2 = m_0 \\ m_1 - m_2 \leq m_0 \\ m_1 - m_2 \geq m_0 \end{cases}$$

gdzie m_0 jest wielkością stałą.

Hipoteza alternatywna H_1 jako przeciwstawna do hipotezy zerowej przyjmuje jedną z następujących postaci:

$$H_1: \begin{cases} m_1 - m_2 \neq m_0 \\ m_1 - m_2 > m_0 \\ m_1 - m_2 < m_0 \end{cases}$$

Można przy tym wyróżnić sytuacje modelowe, zależne od posiadanych informacji o populacjach: albo są dane wartości odchyleń standardowych σ_1 i σ_2, albo wartości σ_1 i σ_2 nie są znane, lecz dopuszczalne jest założenie $\sigma_1 = \sigma_2$, albo wreszcie wartości σ_1 i σ_2 są całkowicie nieznane.

Wybór właściwego testu równości średnich w populacjach winien być poprzedzony testem równości wariancji.

Hipotezę o równości wariancji weryfikuje się, stosując statystykę F, której rezultatem jest oczywiście alternatywa: odrzucenie lub brak podstaw do odrzucenia hipotezy o równości wariancji.

Każdy z wariantów tej alternatywy prowadzi do innego testu istotności różnic między średnimi dwóch populacji.

W celu sprawdzenia hipotezy zerowej z badanych populacji pobieramy niezależne próby proste

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ oraz } \boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$$

Niech $\overline{\boldsymbol{X}}$, $\overline{\boldsymbol{Y}}$, S_1 i S_2 będą statystykami z tych prób.

Do konstrukcji przedziałów ufności oraz testów statystycznych dotyczących porównania wartości oczekiwanych lub wariancji badanej cechy typu ciągłego mają zastosowanie następujące statystyki:

- jeżeli znamy wariancje i sprawdzamy, czy $\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$, to

$$Z = \frac{(\bar{\boldsymbol{X}} - \bar{\boldsymbol{Y}}) - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

jeżeli $\sigma_1^2 = k\sigma_2^2 =$? ale k jest znane, to

$$t = \frac{(\bar{\boldsymbol{X}} - \bar{\boldsymbol{Y}}) - m_0}{\sqrt{S_{pl}^2\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim t(n + m - 2),$$

gdzie wariancja połączona $S_{pl}^2 = \frac{\left((n-1)S_1^2/k\right)+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$

W szczególności dla $k = 1$ otrzymujemy $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 =$?

oraz

$$t = \frac{(\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}}) - m_0}{\sqrt{S_{pl}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \sim t(n+m-2),$$

gdzie wariancja połączona $S_{pl}^2 = \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}$.

Jeżeli $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 =$? stosujemy statystykę Cochrana – Coxa

$$t = \frac{(\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}}) - m_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}+\frac{S_2^2}{m}}} \sim t(v)$$

gdzie stopnie swobody v obliczamy ze wzoru pod tabl. 5 cd.

Tablica 5. Testy porównania wartości oczekiwanych wskaźników struktury i wariancji w dwóch populacjach

Lp.	H_0:	H_1:	Założenia	Statystyka	Rozkład statystyki	Obszar krytyczny R_α
1	$\begin{cases} m_1 - m_2 = m_0 \\ m_1 - m_2 \leq m_0 \\ m_1 - m_2 \geq m_0 \end{cases}$	$\begin{cases} m_1 - m_2 \neq m_0 \\ m_1 - m_2 > m_0 \\ m_1 - m_2 < m_0 \end{cases}$	$X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ σ_1, σ_2 znane	$\dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\begin{cases} (-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \\ (z_{1-\alpha}, \infty) \\ (-\infty, z_\alpha) \end{cases}$
2	$\begin{cases} m_1 - m_2 = m_0 \\ m_1 - m_2 \leq m_0 \\ m_1 - m_2 \geq m_0 \end{cases}$	$\begin{cases} m_1 - m_2 \neq m_0 \\ m_1 - m_2 > m_0 \\ m_1 - m_2 < m_0 \end{cases}$	$X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 nieznane ale równe,	$\dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - m_0}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \frac{n_1 + n}{n_1 n_2}}}$	$t(n_1 + n_2 - 2)$	$\begin{cases} (-\infty, t_{\frac{\alpha}{2}; n_1+n_2-2}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2}; n_1+n_2-2}, \infty) \\ (t_{1-\alpha; n_1+n_2-2}, \infty) \\ (-\infty, t_{\alpha; n_1+n_2-2}) \end{cases}$
3	$\begin{cases} m_1 - m_2 = m_0 \\ m_1 - m_2 \leq m_0 \\ m_1 - m_2 \geq m_0 \end{cases}$	$\begin{cases} m_1 - m_2 \neq m_0 \\ m_1 - m_2 > m_0 \\ m_1 - m_2 < m_0 \end{cases}$	$X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 nieznane oraz różne	(Cochrana – Coxa) $\dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - m_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	$t(\nu)$	$\begin{cases} (-\infty, t_{\frac{\alpha}{2}; \nu}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2}; \nu}, \infty) \\ (t_{1-\alpha; \nu}, \infty) \\ (-\infty, t_{\alpha; \nu}) \end{cases}$
4	$\begin{cases} m_1 - m_2 = m_0 \\ m_1 - m_2 \leq m_0 \\ m_1 - m_2 \geq m_0 \end{cases}$	$\begin{cases} m_1 - m_2 \neq m_0 \\ m_1 - m_2 > m_0 \\ m_1 - m_2 < m_0 \end{cases}$	$X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 nieznane, $n_1 = n_2 = n$ X_1, X_2 sparowa-ne	$\dfrac{\overline{X_1 - X_2} - m_0}{\frac{S_{\overline{X_1 - X_2}}}{\sqrt{n}}}$	$t(n-1)$	$\begin{cases} (-\infty, t_{\frac{\alpha}{2}; n-1}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}, \infty) \\ (t_{1-\alpha; n-1}, \infty) \\ (-\infty, t_{\alpha; n-1}) \end{cases}$
5	$\begin{cases} m_1 - m_2 = m_0 \\ m_1 - m_2 \leq m_0 \\ m_1 - m_2 \geq m_0 \end{cases}$	$\begin{cases} m_1 - m_2 \neq m_0 \\ m_1 - m_2 > m_0 \\ m_1 - m_2 < m_0 \end{cases}$	X_1~dowolny, X_2~dowolny, $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	$\dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - m_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$	asymp. $\mathcal{N}(0,1)$	$\begin{cases} (-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \\ (z_{1-\alpha}, \infty) \\ (-\infty, z_\alpha) \end{cases}$

Tablica 5 cd. Testy porównania wartości oczekiwanych wskaźników struktury i wariancji w dwóch populacjach X_1, X_2

6	$\begin{cases}\sigma_1^2 = \sigma_2^2\\ \sigma_1^2 \le \sigma_2^2\\ \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2\end{cases}$	$\begin{cases}\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2\\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2\\ \sigma_1^2 < \sigma_2^2\end{cases}$	$X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ n_1, n_2 dowolne	$F = \frac{\max\{S_1^2, S_2^2\}}{\min\{S_1^2, S_2^2\}}$	$F(n_l - 1, n_m - 1)$ gdzie n_l, n_m liczebności licznika i mianownika	$\begin{cases}(F_{1-\frac{\alpha}{2}; n_l-1; n_m-1}, \infty)\\ (F_{1-\alpha; n_l-1; n_m-1}, \infty)\\ (F_{1-\alpha; n_m-1; n_l-1}, \infty)\end{cases}$
7	Dla $k = 1, 2$ $X_k \sim B(p_k)$, $\bar{P}_k = \frac{1}{n_k} K_i$, $K_i = \sum_{i=1}^{n_k} X_{k,i}$ $\bar{p}_k \mp 3 \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}_k(1-\bar{p}_k)}{n_k}} \subset (0, 1)$	$p_1 - p_2 = d_0$	$\begin{cases}p_1 - p_2 \ne d_0\\ p_1 - p_2 > d_0\\ p_1 - p_2 < d_0\end{cases}$	Jeśli $d_0 = 0$, to $Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ $\bar{P} = \frac{1}{n_1 + n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i} + \sum_{i=1}^{n_2} X_{2,i}\right)$ Jeśli $d_0 \ne 0$, to $Z = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1} + \frac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}}}$	asympt. $\mathcal{N}(0, 1)$	$\begin{cases}(-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)\\ (z_{1-\alpha}, \infty)\\ (-\infty, z_\alpha)\end{cases}$
8	Dla $k = 1, 2$ $X_k \sim B(p_k)$, $\bar{P}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_{k,i}$ n_1, n_2 zbyt małe, by zastosować 7.	$p_1 - p_2 = 0$	$\begin{cases}p_1 \ne p_2\\ p_1 > p_2\\ p_1 < p_2\end{cases}$	$Z = 2\left(\arcsin\sqrt{\bar{P}_1} - \arcsin\sqrt{\bar{P}_2}\right) \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$	$\approx \mathcal{N}(0, 1)$	$\begin{cases}(-\infty, z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)\\ (z_{1-\alpha}, \infty)\\ (-\infty, z_\alpha)\end{cases}$

Oznaczenia: X_1, X_2 – modele badanej cechy w dwóch populacjach, $X_{k,1}, X_{k,2}, \dots, X_{k,n_k}$ – n_k-elementowe niezależne proste próby losowe, $k = 1, 2$ – numer populacji lub próby, m_k – wartość oczekiwana k-tej populacji, $\bar{X}_k$ – średnia arytmetyczna dla k-tej próby, $\overline{X_1 - X_2}$ – średnia arytmetyczna z różnic dla prób powiązanych, σ_k – odch. std. dla k-tej populacji, S_k – odch. std. k-tej próby (statystyka nieobciążona), $S_{\overline{X_1 - X_2}}$ – odch. std. dla różnic prób powiązanych, p_k – wskaźnik struktury dla k-tej populacji, K_k – liczba elementów wyróżnionych w k-tej próbie, $\bar{P}_k = \frac{K_k}{n_k}$ – frakcja wyróżnionych elementów k-tej próbie, α – poziom istotności testu, z_α – kwantyl rzędu α standardowego rozkładu normalnego, $t_{\alpha,\nu}$ – kwantyl rzędu α rozkładu t-Studenta z ν stopniami swobody, $\chi^2_{\alpha,\nu}$ – kwantyl rzędu α rozkładu chi-kwadrat z ν stopniami swobody, $F_{\alpha;n_1;n_2}$ – kwantyl rzędu α rozkładu F z n_1 i n_2 stopniami swobody.

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2+\frac{1}{n_2-1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Przykład 3 (KA 6.10). Aby zmniejszyć kaloryczność chleba technolog żywności opracował nowy proces dojrzewania ciasta do wypieku bochenków chleba.
Dla losowych prób bochenków z obydwu procesów dojrzewania, nowego i starego, zbadano kaloryczność wypieczonych bochenków chleba.

Obliczone z prób ***x*** i ***y*** statystyki opisowe są następujące:

$$n = 50, \bar{x} = 1255, s_1 = 215, m = 30, \bar{y} = 1330, s_2 = 238$$

Czy wyniki przeprowadzonych badań pozwalają uznać hipotezę, że wartość oczekiwana kaloryczności chleba uległa zmniejszeniu, po wprowadzeniu nowego procesu dojrzewania? Ile wynosi istotność przeprowadzonego testu?

Rozwiązanie. Aby odpowiedzieć na postawione pytania zostanie przeprowadzony test porównania wartości oczekiwanych kaloryczności m_1 i m_2 bochenków przygotowanych nową i starą technologią.

Technolog spodziewa się, że zastosowanie nowej technologii wypieku chleba zmniejszy jego kaloryczność, tzn. $m_1 - m_2 < 0$. Przypuszczenie to jest hipotezą alternatywną.

Testowana hipoteza zerowa

$$H_0\colon m_1 - m_2 = 0$$

będzie odrzucona, jeżeli tylko różnica średnich arytmetycznych z prób $\bar{x} - \bar{y}$ przyjmie dużą ujemną wartość.

Zakładamy, że próby bochenków chleba zostały pobrane niezależnie z populacji X i Y o nieznanych rozkładach.

Liczebności prób spełniają założenia $n = 50 \geq 30$ oraz $m = 30 \geq 30$.
Weryfikowana jest hipoteza zerowa przeciw hipotezie

$$H_1 \colon m_1 - m_2 < 0$$

Do podjęcia decyzji jest zastosowana statystyka testowa

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - m_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim t(\nu)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$t_0 \approx -1{,}41$$

Stopnie swobody dla testu $\nu = 56{,}4$.

Statystyka testowa ma rozkład t -*Studenta* z $\nu = 56{,}4$ stopniami swobody. Obliczona istotność testu

$$p\ value = F_{t(56,4)}(-1{,}41) \approx 0{,}082$$

Graniczny rozkład statystyki t-*Studenta* jest normalny, więc przybliżoną wartość $p\ value$ można również obliczyć, korzystając ze statystyki $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Otrzymamy wówczas

$$p\ value = \Phi(-1{,}41) \approx 0{,}079$$

Dla obydwu statystyk t i Z $p\ value$ są większe od przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$, więc brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Stąd wniosek, że nie ma wystarczających przesłanek do stwierdzenia, że nowa technologia istotnie obniżyła kaloryczność pieczonego chleba. ♦

Rozważmy teraz następujący eksperyment.

Przed wykonaniem określonego zabiegu na n-elementowej próbie, dokonujemy pomiarów $X_1, \ldots, X_n$ pewnej cechy X tych elementów.

Następnie po dokonanym zabiegu mierzymy tę samą cechę otrzymując, w tej samej kolejności elementów wyniki $Y_1, \ldots, Y_n$.

Celem eksperymentu jest sprawdzenie istotności różnicy wartości oczekiwanych przed i po zabiegu.

W tym celu sprawdzamy hipotezę zerową

$$\mathrm{H}_0\colon m_X - m_Y = 0$$

określającą równość wartości oczekiwanych badanej cechy populacji przed i po zabiegu i korzystamy z

Model 4 z Tabl. 5. Jeżeli (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$ jest próbą powiązaną (*mathed pairs*) z populacji (X, Y) oraz różnica $D = X - Y$ ma rozkład $\mathcal{N}(m_D = ?;\ \sigma_D = ?)$, to do sprawdzenia hipotezy $\mathrm{H}_0\colon m_D = d_0$ stosujemy statystykę:

$$t = \frac{\overline{\mathbf{D}}_n - d_0}{S_D}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

Przykład 3 (KA 6.11). Zmierzono ciśnienie tętnicze (w *mm Hg*) wśród losowo wybranej grupy pacjentów, chorujących na pewną chorobę, przed i po podaniu tego samego leku wszystkim badanym. Otrzymane wyniki są zapisane w tabl. 6.4. Zbadać, na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, czy podany lek obniża ciśnienie tętnicze pacjentów.

Nr pacjenta	Przed podaniem leku (X)	Po podaniu leku (Y)	Różnica $D = X–Y$
1	210	180	30
2	180	160	20
3	260	220	40
4	270	260	10
5	190	200	–10
6	250	230	20
7	180	180	0

Rozwiązanie. Sprawdzana jest hipoteza zerowa

$$\mathrm{H}_0\colon m_X - m_Y = 0$$

dotycząca porównania dwóch wartości oczekiwanych dla powiązanych par obserwacji.

Hipoteza alternatywna jest prawostronna

$$\mathrm{H}_1\colon m_X - m_Y > 0$$

Obliczamy wartość statystyki

$$t_o = \frac{\bar{\mathrm{d}}_n - d_0}{s_D}\sqrt{n} =$$

Obliczamy $p\ value$

$$p\ value = 1 - F_{t(6)}(t_o) = 0{,}0331651$$

Obliczona istotność $p\ value = 0{,}0331651 < 0{,}05$, więc hipotezę zerową o równości ciśnień przed i po podaniu leku należy – na przyjętym poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ – należy odrzucić, czyli wyniki badań przemawiają za tym, że podanie leku istotnie zmniejsza ciśnienie tętnicze u pacjentów. ♦

4. Test porównania dwóch wskaźników struktury

Rozważamy dwie niezależne populacje, w których modelami badanej cechy jakościowej są zm. l. X i Y, przy czym

$$X \sim B(p_1), Y \sim B(p_2)$$

Z populacji tych pobieramy duże niezależne próby proste o licznościach odpowiednio n_1 i n_2 (często > 100),

$$\boldsymbol{X} = \left(X_1, X_2, \dots, X_{n_1}\right) \text{ oraz } \boldsymbol{Y} = \left(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}\right).$$

Liczby elementów wyróżnionych w tych próbach oznaczamy odpowiednio T_1 i T_2, tj.

$$T_1 = \sum X_i, T_2 = \sum Y_i$$

stąd empiryczne wskaźniki struktury

$$\bar{P}_1 = T_1/n_1, \bar{P}_2 = T_2/n_2$$

Do sprawdzenia hipotezy $p_1 - p_2 = p_0$ (dla danej wartości p_0) dla dużych prób stosujemy statystykę

$$Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - p_0}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}} \underset{n_1, n_2 \to \infty}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

gdzie

$$\bar{p} = \frac{T_1 + T_2}{n_1 + n_2},\ n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

Przybliżenie rozkładem normalnym stosujemy, gdy dla $i = 1, 2$ spełnione są nierówności:

$$0 < n_i p_i \pm 3\sqrt{n_i p_i (1 - p_i)} < n_i$$

Gdy liczebności prób nie są wystarczająco duże, korzysta się ze statystyki

$$Z = \left(2\arcsin\sqrt{\bar{P}_1} - 2\arcsin\sqrt{\bar{P}_2}\right)\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma w przybliżeniu rozkład $\mathcal{N}(0; 1)$.

Przykład 4 (KA 6.15). Na $n_1 = 1200$ kobiet oraz $n_2 = 900$ mężczyzn, wylosowanych niezależnie spośród dorosłych mieszkańców dużego miasta, 400 kobiet i 220 mężczyzn zna co najmniej jeden język obcy. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że w badanym mieście, frakcja osób znających co najmniej jeden język obcy jest dla kobiet większa niż dla mężczyzn (patrz przykład KA 5.16).

Rozwiązanie. Niech p_1 oraz p_2 oznaczają nieznane wskaźniki znajomości co najmniej jednego języka obcego w badanym mieście, odpowiednio dla kobiet i mężczyzn.

Weryfikowana jest hipoteza zerowa, że badane wskaźniki są równe, czyli

$$H_0 \colon p_1 - p_2 = 0$$

przeciw hipotezie alternatywnej

$$H_1 \colon p_1 - p_2 > 0$$

że dla kobiet wskaźnik znajomości co najmniej jednego języka obcego jest większy niż dla mężczyzn.

Do sprawdzenia hipotezy zerowej jest wykorzystana statystyka

$$Z = \frac{\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{n_1 + n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{i=1}^{n_2} Y_i\right)$$

Z danych zadania wiadomo, że

$$n_1 = 1200, n_2 = 900, \bar{p}_1 = \frac{1}{3}, \bar{p}_2 = \frac{22}{90}, \bar{p} = \frac{620}{2100}.$$

Stąd

$$Z_0 = \frac{\frac{1}{3} - \frac{22}{90}}{\sqrt{\frac{620}{2100} \cdot \frac{1480}{2100}\left(\frac{1}{1200} + \frac{1}{900}\right)}} \approx 4{,}42$$

Decyzja statystyczna

Istotność

$$\alpha_0 \approx 1 - F_{\mathcal{N}(0;1)}(4{,}42) = 4{,}95779E - 6 < 0{,}01,$$

więc w badanym mieście wskaźnik osób znających co najmniej jeden język obcy jest istotnie większy dla kobiet niż dla mężczyzn. ♦

5. Zestaw zadań W09

1. (TG 6.32) Zbadano wzrost 13 mężczyzn oraz 12 kobiet w pewnym ośrodku sportowym. Dane:

M: 171, 176, 179, 189, 176, 182, 173, 179, 184, 186, 189, 167, 177,

K: 161, 162, 163, 162, 166, 164, 168, 165, 168, 157, 161, 172.

Zakładając, że w obu populacjach rozkład wzrostu jest normalny, czy można powiedzieć, że mężczyźni charakteryzują się większą zmiennością wzrostu? Przyjąć poziom istotności 0,1. Odp.: Wariancja wzrostu mężczyzn jest istotnie większa niż kobiet.

2. Spośród absolwentów pewnej uczelni wylosowano 15 osób z jednego wydziału oraz 12 osób z drugiego wydziału i obliczono średnią ocen ze studiów dla każdego absolwenta. Otrzymano następujące wyniki dla pierwszego wydziału: 3.71, 4.28, 2.95, 3.20, 3.38, 4.05, 4.07, 4.98, 3.20, 3.43, 3.09, 4.50, 3.12, 3.68, 3.90,

dla drugiego wydziału: 3.10, 3.38, 4.06, 3.60, 3.81, 4.50, 4.00, 3.25, 4.11, 4.85, 2.80, 4.00.

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować następujące hipotezy:

a) wariancje średnich ocen dla obydwu wydziałów są równe,

b) różnica wartości oczekiwanych ocen uzyskiwanych przez studentów obydwu wydziałów wynosi 0.

3. Badano opony samochodowe typu 11.00-20/14PR/ produkowane przez dwóch producentów, które zostały wycofane z eksploatacji. Spośród zbadanych 1582 opon producenta A, 1250 opon wycofano z powodu zużycia bieżnika, a spośród 589 zbadanych opon producenta B, wycofano z powodu tego defektu 421 sztuk. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ zweryfikować hipotezę, że frakcje opon wycofanych z eksploatacji na skutek zużycia się bieżnika są jednakowe dla obydwu producentów.

4. Dział kontroli technicznej uzyskał czasy *r1* i *r2* palenia się dwu rodzajów świateł ostrzegawczych (w sekundach):
r1 = {15,3; 19,4; 21,5; 17,4; 16,8; 16,6; 20,3; 21,3; 22,5; 23,4; 19,7; 21,0},
r2 = {24,7; 16,5; 15,8; 10,2; 13,5; 15,9; 15,7; 14,0; 12,1; 17,4; 15,6; 15,8}.
Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, zweryfikować hipotezy:

a) przeciętne czasy palenia się świateł ostrzegawczych dla obydwu rodzajów różnią się,

b) przeciętny czas palenia się świateł ostrzegawczych pierwszego rodzaju jest dłuższy o 5 sekund niż dla drugiego rodzaju.
c) wariancje czasów palenia się świateł różnią się.

5. Na podstawie danych zawartych w pliku CARDATA postawić i zweryfikować hipotezy dotyczące:
a) wartości oczekiwanych oraz wariancji zużycia paliwa na 100 *km* dla populacji wszystkich samochodów oraz populacji samochodów europejskich, amerykańskich i japońskich.
b) Różnic wartości oczekiwanych zużycia paliwa na 100 *km* samochodów europejskich, amerykańskich i japońskich.
c) Ilorazów wariancji zużycia paliwa samochodów europejskich, amerykańskich i japońskich.

d) Wskaźnika oraz różnic wskaźników samochodów europejskich, amerykańskich i japońskich, które zużywają więcej paliwa niż estymowana średnia światowa plus 1,5 estymowanego odchylenia standardowego.

6. W badaniu granicy plastyczności pewnego gatunku stali otrzymano następujące wyniki dla 15 kawałków tej stali (wyniki w kG/cm^2): 3520, 3680, 3640, 3840, 3500, 3610, 3720, 3640, 3600, 3650, 3750, 3590, 3600, 3550, 3700. Natomiast po dodatkowym procesie uszlachetniającym, mającym zwiększyć wytrzymałość tej stali, otrzymano dla tych samych próbek odpowiednio następujące wyniki badania granicy plastyczności: 3580, 3700, 3680, 3800, 3550, 3700, 3730, 3720, 3670, 3710, 3810, 3660, 3700, 3640, 3670.

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ sprawdzić, czy granica plastyczności stali po dodatkowym procesie uszlachetniającym zwiększyła się.

7. Zmierzono czasy (w godzinach) usuwania awarii dla dwóch brygad remontowych. Dla pierwszej otrzymano czasy: 12, 13, 18, 25, 42, 19, 22, 35 a dla drugiej brygady: 23, 30, 27, 17, 21, 33, 31.

Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezy:

a) przeciętne czasy usuwania awarii dla obydwu brygad są równe,

b) wariancje czasów usuwania awarii dla obydwu brygad są równe.

8. W dwu przedsiębiorstwach budowlanych sporządzono według tego samego przepisu próbki betonu. W przedsiębiorstwie A otrzymano następujące wyniki badania wytrzymałości na ściskanie tego betonu (w kG/cm2): 190, 206, 206, 210, 212, 189, 198, 205, 216, 190, 199, 200, 175, 224, 219, 205, 200, 213, 180, 176, 196, 204, 219, 196, 208, 212, natomiast w przedsiębiorstwie B otrzymano: 202, 209, 186, 195, 225, 240, 215, 174, 195, 201, 193, 217, 201, 188, 181, 203, 229, 233, 185, 195, 211, 231, 217, 229, 225, 229, 220, 217, 209, 194. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ zweryfikować hipotezy:

a) przeciętne wytrzymałości betonu w obydwu przedsiębiorstwach są równe,
b) odchylenia standardowe wytrzymałości betonu w obydwu przedsiębiorstwach są równe.

9. Wygenerować próby o liczebnościach 80 i 60 według rozkładów N(900;50) i N(1000;60) i na ich podstawie przeprowadzić test, że wartości oczekiwane różnią się o 50.

10. Paired-Sample *t*-Test at a Different Significance Level

Load the sample data. Create vectors containing the first and second columns of the data matrix to represent students' grades on two exams.

```
load examgrades;
x = grades(:,1);
y = grades(:,2);
```

Test the null hypothesis that the pairwise difference between data vectors x and y has a mean equal to zero at the 1% significance level.

```
[h,p] = ttest(x,y,'Alpha',0.01)
```

h = 0
p = 0.9805

The returned value of h = 0 indicates that ttest does not reject the null hypothesis at the 1% significance level.