Аппроксимация функций

Мы хотим заменить $f(x) \to \varphi(x, \overline{a})$. То есть на такую, которая наиболее близка к исходной.

Определение 1. Близость функций определяется нормой:

$$|| \ f(x) - \varphi(x, \overline{a}) \ ||$$

Самая простая аппроксимация - это интерполяция.

Определение 2. $f(x)$ - исходная функция, а $\varphi(x, \overline{a})$ - аппроксимирующая функция.

$$f(x) \to \varphi(x, \overline{a}), \overline{a} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

С помощью интерполяции можно получить значение между двумя точками x_i. Проходит аппроксимирующая функция через узлы.

Интерполяция бывает Лагранжевой или Эрмитовой.

Определение 3. Эрмитова интерполяция - это использование 1-й, 2-й, 3-й и так далее производные для учета наклона аппроксимирующей функции в узле. В итоге получаем более точную функцию.

Определение 4. Сплайн - это многочлен, который непрерывен вместе со своими 1-ми и 2-ми производные на всей области аппроксимации.

Заметка. Если узлы неточны (например, $y \pm \delta x$), то строим методом наименьшим квадратам (наилучшее среднее квадратичное приближение).

1.1 Линейная интерполяция

Определение 5. Обобщенный полином:

$$\varphi(x, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

Задача интерполяции состоит в том, чтобы так подобрать параметры, чтобы функция совпадала $\varphi(x, \overline{a}) = y_i, i = \overline{0, n} \to \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$

Наиболее часто используют полином с целыми степенями:

$$\varphi(x, \overline{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^n \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i, i = \overline{0, n} \to \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Примем это является линейной системой. Решим ее:

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_1^2 + a_3 x_i^3 + \dots + a_n x_i^n = y_i$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \dots x_0^n \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

1.1.1 Интерполяционный полином Ньютона.

Определение 6. Введем понятие разделенных разностей:

$$y(x_0, x_1) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$
$$y(x_0, x_1, x_2) = \frac{y(x_0, x_1) - y(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$
$$\vdots$$
$$y(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{y(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - y(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_0 - x_n}$$

Отсюда получаем:

$$\Phi_n(x) = y_0 + (x - x_0)y(x_0, x_1) + (x_0 - x_1)(x - x_1)y(x_0, x_1, x_2) + \ldots + (x - x_0)\ldots \\ \ldots(x - x_{n-1})y(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

В общем виде получается так:

$$y_0 + \sum_{k=0}^{n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})y(x_0, x_1, \dots, x_k)$$

Пример.

x	y(x)	y(x$_i$)	y(x$_i, x_j, x_k$)	y(x$_i, x_j, x_j, x_l$)	y(x$_i, \dots, x_m$)
0	1				
		-0.304			
0.25	0.924		-1.128		
		-0.868		0.363	
0.5	0.707		-0.856		0.149
		-1.296		0.512	
0.75	0.383		-0.472		
		-1.532			
1	0				

Найти $x = 0.6$, 4-я степень полинома. Она требует 5 узлов. Берем только самые верхние числа (Это и есть разделенные разности!!!). Получаем:

$$\Phi_n(x) = 1 - 0.304(x - 0) - 1.128(x - 0)(x - 0.25) + 0.363(x - 0)(x - 0.25)(x - 0.5) + \\ + 0.149(x - 0)(x - 0.25)(x - 0.5)(x - 0.75)$$

Отсюда $\Phi_4(0.6) \approx 0.589$ (точный результат 0.588)

Заметка. *Желательно, чтобы узлы находились симметрично относительно выбора (то есть три узла больше x и меньше x). В нашем примере 3 узла меньше x и 2 узла больше x (x = 0.6)*

Кратко подведем итоги полинома Ньютона:

1) Выбор конфигурации зависит от выбранного x и степени полинома (кол-во узлов равно степень полинома + 1.)

2) Степени больше 5-7 обычно не применяются из-за сильных неточностей.

Что нужно сделать:

- Построить конфигурацию
- таблицу разделенных разностей
- Построить полином Ньютона

Замечания об обратной интерполяции. Пусть даны числа:

x	y
0	5
1	3.2
2	-2.8
3	-4

Для обратной интерполяции поменяем местами столбцы x и y:

y	x
5	0
3.2	1
-2.8	2
-4	3

Строим для него полином Ньютона и ищем для него x = 0. Это и есть корень. Важно, чтобы обратная таблица функции должна быть упорядочена (сложность алгоритма будет меньше! Например, возрастающая последовательность).

1.1.2 Полином Эрмита

Определение 7. Полином Эрмита:

$$H_n(x) = \Phi_n(x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{x_m, x_m, \ldots, x_m}_{n_m})$$

А также $x_0, x_1, \ldots, x_m$ повторяются по $n_0, n_1, \ldots, n_m$ раз соответственно. Причем

$$\sum_{k=0}^{m} n_k = n + 1.$$

Пример. Пусть нужно построить по 2-м значениям функции и 2-м ее производным:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_3(x) &= \\
\Phi_3(x, x_0, x_0, x_1, x_1) &= \\
&= y_0 + (x - x_0)y(x_0, x_0) + (x - x_0)(x - x_0)y(x_0, x_0, x_1) + \\
&\quad + (x - x_0)^2(x - x_1)y(x_0, x_0, x_1, x_1)
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$y(x_0, x_0) = \left.\frac{y_0 - y_k}{x_0 - x_k}\right|_{k \to 0} = y_0'$$

И так далее.

Тогда:

$$y(x_0, x_0, x_1) = \frac{\overbrace{y(x_0, x_0)}^{y'_0} - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{y'_0 - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1}$$

Общая формула производной:

$$\Phi(\underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{m}) = \frac{y^{(m-1)}(x_0)}{(m-1)!}$$

Пример.

$$\Phi(x_0, x_0, x_0) = \frac{y''_0}{2!}$$

1.1.3 Сплайны

Остановимся на кубическом сплайне (3-я степень).

Определение 8. (Кубический) Сплайн - полином третьей степени, непрерывный на заданном интервале аргумента вместе со своими первыми и вторыми производными.

Построение сплайна. Нужно N интервалов. Зададим на i-м интервале полином третьей степени:

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \tag{1.1}$$

Прошу заметить, что в каждом интервале a, b, c, d - различные коэффициенты. То есть их нужно определить для каждого i-го интервала. Если N интервалов, то всего коэффициентов 4N.

Сначала по всей таблице находим коэффициенты, а потом их используем исходя из x.

Получим из

$$x_i - x_{i-1} = h_i$$

Систему уравнений

$$\varphi(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \quad i = \overline{1, N} \tag{1.2}$$

$$\varphi(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \quad i = \overline{1, N} \tag{1.3}$$

Заметим, что на стыке интервалов производные равны, отчего мы можем решить систему.

Из (1) получаем уравнения (4):

$$\varphi'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})$$
$$\varphi''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})(4)$$

Получаем такое

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \tag{1.4}$$

и такое

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \tag{1.5}$$

$$\varphi_{i+1}(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2$$

Недостающие два уравнения (на границах интервала от x_0 до x_N) представляют из себя

$$\varphi''(x_0) = 0, \quad \varphi''(x_N) = 0 \text{ - Естественные краевые условия}$$

Отсюда получаются моментально два условия:

$$c_1 = 0 \tag{1.6}$$

$$C_N + 3d_N h_N = 0 \tag{1.7}$$

Для решения задачи удобно решать ее так: свести эту систему к системе уравнений с одной переменной (c_i).

Пример. Из уравнения (5) находится d_i. d_i подставляется в (3). И из полученного уравнения выражается b_i. Далее найденный b_i и d_i подставляется в (4). Получается уравнение относительно c_i, c_{i-1}, c_{i+1}

Сделав переименование индексов, получим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}\right) \\ c_{N+1} = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $i = \overline{2, N}$

Решается она методом прогонки (тк получаем трехдиагональную матрицу!)

Метод прогонки. Запишем СУ с трехдиагональной матрицей в каноническом виде

$$A_i u_{i-1} - B_i u_i + D_i u_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{2, N}$$

A_i - Это h_{i-1}; $B_i = -2(h_{i-1} + h_i)$. А F_i - это $3(\frac{\dots}{\dots})$. И $c = u$

Решение ищется в виде

$$u_i = \xi_{i+1} u_{i+1} + \eta_{i+1} \tag{1.8}$$

ξ, η - прогоночные переменные. Отсюда

$$u_{i-1} = \xi_i u_i + \eta_i$$

Подставим в СУ

$$A_i \xi_i u_i + A_i \eta_i - B_i u_i + D_i u_{i+1} = -F_i$$

Выразим u_i:

$$u_i = \frac{D_i}{B_i - A_i \xi_i} u_{i+1} + \frac{F_i + A_i \eta_i}{B_i - A_i \xi_i} \tag{1.9}$$

Отсюда находим прогоночные коэффициенты:

$$\xi_{i+1} = \frac{D_i}{B_i - A_i \xi_i}, \quad \eta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \eta_i}{B_i - A_i \xi_i} \tag{1.10}$$

Для начала прогона из граничных условий:

$$u_1 = 0$$
$$u_1 = \xi_2 u_2 + \eta_2 = 0 \implies \xi_2 = 0, \eta_2 = 0$$

Она состоит из двух этапов (прогонка):

- По (10) ищем ξ, η
- Определение u_i, то есть c_i, по (8) от $i = N$ до $i = 1$

Также известно, что $C_{N+1} = 0$

После того, как все коэффициенты c_i найдены, остальные коэффициенты находятся по формулам:

$$\begin{aligned}
&a_i = y_{i-1}, \quad i = \overline{1, N} \\
&d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \\
&d_N = -\frac{c_N}{3h_N} \\
&b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{3}h_i(c_{i+1} + 2c_i), \quad i = \overline{1, N-1} \\
&b_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{2}{3}h_N C_N
\end{aligned}$$

1.2 Нелинейная интерполяция (Выравнивающие переменные)

Если график "крутой" , то можно его перевернуть и превратить в линию. Идея состоит в том, что мы делаем новые переменные, выравнивающие график в линию, проводим в них интерполяцию (на практически линии) и конвертируем обратно!

Пример 1.

$$y = ax^n$$
$$\ln(y) = \ln(a) + n\ln(x)$$
$$\ln(y) = \eta, \quad \ln(x) = \xi$$
$$\eta = b + n\xi$$
$$y = e^\eta$$

Пример 2.

$$y = ae^{cx}$$
$$\ln(y) = \ln(a) + cx$$
$$\eta = \ln(y), \quad \xi \equiv x$$
$$\eta = b + cx$$

Пример 3.

$$y = \frac{a}{c + bx}$$

$$\dots$$