linear algebra

Zixun Xiong

March 2023

目录

1 guassian elimination

1.1 number of solutions

1.2 Theorem

homogeneous linear system

if number of equations is smaller than number of variable, then there exists nonzero solutions

2 Determinant

2.1 number of solutions

homogeneous linear system

for $AX = 0$, if $|A| = 0$, then there exists nonzero solutions
if$|A| \neq 0$, then there is only a zero solution

Nonhomogeneous linear equations

for $AX = b$, if $|A| = 0$, then exists a unique solution
if$|A| \neq 0$, we can't be sure(none or infinite)

3 linear space

3.1 rank

Definition

The column rank of A is the dimension of the column space of A, while the row rank of A is the dimension of the row space of A.

proposition 3

$\alpha_{1,2}, \cdot, \alpha_s$ linear independent $\iff rank(\alpha_1, \cdot, \alpha_s) = s$

pf:

$\alpha_{1,2}, \cdot, \alpha_s$ linear independent $\iff$ $\alpha_{1,2}, \cdot, \alpha_s$ is maximal linearly independent subset of $\alpha_{1,2}, \cdot, \alpha_s$ $\iff$ $rank(\alpha_1, \cdot, \alpha_s) = s)$

Proposition 4

if vector set (I) can be linearly expressed by (II), then $rank(I) \leq rank(II)$

Proposition 5

equivalence (I) and (II), then $rank(I) = rank(II)$

3.2 线性空间的基

3.2.1 定义一: 基

我们将空集定义为线性无关

定义 1

设 V 是数域 K 上的线性空间
V 的一个子集 S 如果满足下列条件:
1. S 是线性无关的
2. V 中任意一个向量可以由 S 中的有限个向量线性表出
则称 S 是 V 的一个基

定理 1

数域上任意一个线性空间都有一个基

pf: 见下册 P157-p158

3.2.2 定义二: 有限维无限维

定义 2

若 V 有一个基是有限子集, 则 V 为有限维的
若 V 有一个基是无限子集, 称 V 为无限维的

定理 2

若 V 是有限维的，则 V 任意两个基所含向量个数相等

证:(反证法) 假设 V 有两个基$\alpha_1, ..., \alpha_n$ 和 S；假设 S 的数目大于前者，则 S 中可以取 n+1 个元素，则 S 中的 $\beta_1, \cdot, \beta_{n+1}$ 可以由 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 线性表出。且 n+1>n, 则根据第四节的引理 1，我们得到 S 线性相关，矛盾（S 为基，线性无关）！（得证）

引理 1

若 V 是无限维的，则 V 的任意一个基都是无限子集

反证法，假设 V 有一个基是有限子集，则由定理 2 的证明知道，V 任意一个基是有限维的，与无限维定义矛盾，得证!

3.2.3 定义四: 维数

定义四

V 的一个基所含的向量个数
若 V 是无限维的，记为 $dimV = \infty$
$\{0\}$ 的维数是 0

命题 1

若 $dimV = n$, 则 V 中任意 n+1 个向量都线性相关

3.2.4 定义五：坐标

定义五：坐标

由定义四, 取基为 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$，则 V 中任意一个向量均可以由 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 表出

$\alpha = a_1\alpha_1 + \cdot + a_n\alpha_n$, 且表达方式唯一 (第三节命题一)

则称呼

$$y = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \\ a_n \end{vmatrix}$$

为 α 在基 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 下的坐标

例子: 几何空间中，三条不共线的向量是一个基，从而几何空间中，从而几何空间是三维的 (由基的定义和维数的定义可以推出)

命题三：找基

设 $dimV = n$, 若向量组 V 中任意一个向量可以由于 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 表出，则 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 为 V 的基

证: 设 V 的基为 $\beta_1, \cdot, \beta_n$, 则由题, 他们可以由 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 线性表出，则

$$n = rank(\beta_1, \cdot, \beta_n) <= rank(\alpha_1, \cdot, \alpha_n) <= n$$

则，$rank(\alpha_1, \cdot, \alpha_n) = n$

命题四: 扩充成基

任何线性无关的向量都可以扩充成基

(显然的)

命题四: 子空间维数

假设 S 为 V 的子空间, 则有 $dimS \leq dimV$; 若 $dimS = dimV$, 则有 V=S

证: 因为 $dimS = dimV = n$ 设 S 的基为 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$, 则 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 也是 V 的基 ($\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 属于 V, 是 V 中 n 个线性无关的量) 则 V 中任意向量可以由于 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 表出, 则 V 属于 S, 又因为 S 属于 V, 则 S=V

补充 (证明 dimV=n,n 个 V 中线性无关的向量为 V 的基): V 中 n 个无关向量 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$, 任取 $\beta \in V$, 则 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ β 相关 ($dimV = n$, 则 n+1 个向量线性相关, 证: 任取 $\gamma_1, \cdot, \gamma_{n+1}$, 可以由基数 $\delta_1, \cdot, \delta_n$ 线性表出, 则 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 线性相关 (n>n+1)), 则 β 可以由 $\alpha_1, \cdot, \alpha_n$ 线性表出