Aufgabe 2-1

a) $a \odot b = a$

$\cancel{a}(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$

$a \odot c$ ‖ a

‖

a

Stimmt

b) $x * y * z = 1$ $e = 1$ - neutrales element

$y * z * x = 1$

$x * y * z = y * z * x \mid \cdot x^{-1}$ - G2

$1 * y * z = \cancel{x * y} * y * z * 1$ - stimmt aus G1

Aufgabe 2-2

1) $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, +)$

G1 Sei a - ein Element der Paare, dann
$a+0 = 0+a = a$ - stimmt, weil $\{0\}$ ist auch ein Element

G2 ~~[illegible]~~
$a+(-a) = (-a)+a = 0$ - stimmt

G3 Sei auch b und c ~~ei~~ Elemente der Paare
$(a+b)+c = a+(b+c)$ - stimmt

$\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, +)$ - eine Gruppe

2) $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$,

G1 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ - stimmt ; 1 - neutrales Element
G2 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ - stimmt
G3 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ - stimmt

$(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ - eine Gruppe

c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \otimes)$ mit $a \otimes b = a/b$

G1 $a/e = e/a$ – gibt's kein einzelnes neutrales Element

$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \otimes)$ – keine Gruppe

d) $(\mathbb{Z}, \oplus)$ mit $a \oplus b = a+b+1$

G1 $a+e+1 = e+a+1 = a$; $e = -1$.

G2 $\cancel{a+b=e}$

$a + (-(a+1)) = -(a+1)+a$

$-1 = -1$ – stimmt

G3 $\cancel{a+(b+c) = (a+b)+c}$ – gh

$a+(b+c+1)+1 = (a+b+1)+c+1$ – stimmt

$(\mathbb{Z}, \oplus)$ mit $a \oplus b = a+b+1$ – eine Gruppe

Aufgabe 2-~~1~~3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3x + 2$

$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (2y, x+1)$

a) Injektivität

$x \mapsto x^2 - 3x + 2$

Sei $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1) = x_1^2 + 3x_1 + 2$

$f(x_2) = x_2^2 + 3x_2 + 2$

$x_1^2 + 3x_1 + 2 = x_2^2 + 3x_2 + 2 \mid -2$

$x_1^2 + 3x_1 = x_2^2 + 3x_2$ - also nicht injektiv

auch weil $f(0) = f(3)$

b) Surjektivität

$y = x^2 - 3x + 2$

$y = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}(4x^2 - 12x + 9) - \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}(2x-3)^2 - \frac{1}{4}$

$y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(2x-3)^2$

$4y + 1 = (2x-3)^2$ nicht surjektiv

$x = \frac{\pm\sqrt{4y+1} + 3}{2}$ $\Rightarrow$ Es gibt ein y, den keinem x aus Urbild entspricht: z.B. -4; -5; -1000 und so weiter.

a) nicht injektiv,
nicht surjektiv $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ nicht bijektiv

b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2y, x+1)$

1) Sei: $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, dann $f(y_1) = f(y_2)$, $f(x_1) = f(x_2)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 1 = x_2 + 1 \quad |-1 \\ x_1 = x_2 \\ 2y_1 = 2y_2 \quad |:2 \\ y_1 = y_2 \end{array}\right\} \underline{\text{injektiv}}$$

2) $y = x+1$; $x = y-1$ Es gibt kein y dem kein x aus Urbild entspricht.

$x = 2y$; $y = \frac{1}{2}x$: Auch für x. $\Rightarrow$ ~~Abb~~ Abbildung $\underline{\text{-surjektiv}}$

Abbildung: injektiv, surjektiv $\Rightarrow$ $\underline{\text{bijektiv}}$

Umkehrabbildung

~~R~~ $f(x,y) \to (y-1, \frac{1}{2}x)$

Aufgabe 2-4

$A \{1, 2, 3, 4\}$

a) $R_1 \{\}$

$R_2 \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2), (2,1), (4,4)\}$

R_1: Reflexiv: nein, weil es gibt keine Paare $\forall x \in R_1 (x,x)$

Trotzdem sind Eigenschaften Symmetrie, Anti-Symmetrie

Transistivität passend, denn es gibt keine

Paare, um die $\forall x,y \in M$ mit $R(x,y)$ gilt $R(y,x)$ -

$\forall x,y,z \in M$ mit $R(x,y), R(y,z)$ gilt $R(x,z)$

$\forall x,y \in M$ mit $R(x,y), R(y,x)$ gilt $x=y$

zu verletzen.

R_2: Reflexiv - ja aus $\{1, 2, 3, 4\}$

gibt $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$

Symmetrisch - ja, weil für jedes Paar (a,b) gilt (b,a)

$(1,2) \to (2,1)$, $(2,3) \to (3,2)$.

Antisymmetrisch: nein, ~~weil~~ denn es gibt $(1,2), (2,1)$: $2 \neq 1$

Transistiv: nein, denn es gibt keine solche Eigenschaft

für (a,b) und (b,c) gilt (a,c) z.B. $(1,2)$ $(2,3)$ gibt kein $(1,3)$

für

b) R_2^* muss reflexiv, symmetrisch und transitiv sein

passt — passt nicht

deswegen müssen wir R2 erweitern

$R_2 \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2), (2,1), (4,4)\} \cup$

$\cup \{(1,3)\}$ – nicht transitiv wegen eine neue Paare (1,3)

((3,2) und (2,1) → (3,1)

(1,2) und (2,3) → (1,3)

fügen wir das auch zu

$\Rightarrow R_2^* \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2), (2,1), (4,4), (3,1), (1,3)\}$

Aufgabe 2-5

R – Äquivalenzrelation, dann gibt's folgende Eigenschaften

1) Reflexivität: es gib x in $[x]$, also $[x]$ enthält x

2) Symmetrie: x in der Äquivalenzklasse von y liegt, also $[x]=[y]$

3) Transitivität: x in der Äquivalenzklasse von z liegt, also $[x]=[z]$

2) x und y liegen in der gleichen Äquivalenzklassen

3) x und z liegen in gleichen Äquivalenzklassen

Insgesamt 1), 2) und 3) führen dazu, dass die Element, die in Beziehung zueinander stehen, in gleiche Äq.-Klassen liegen, auf die nicht in Beziehung stehen – in ~~andere~~ verschiedenen

Beweis:

Fall 1: $[x]=[y]$ – passt aus 2)

Fall 2: wenn x und y nich in gleichen Äq.-Klassen liegen (weil es Fall 2 ist), dann $[x]\cap[y]=\emptyset$, weil Elemente, die nich in gleichen Äq.-Klassen sind keine gemeinsamen Elemente in ihren Äquivalenzklassen haben

Aufgabe 2-~~5~~6

~~$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$~~ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Induktionsanfang:

Sei $n=1$; $\frac{1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1$

$k^2 = 1^2 = 1$ – wahr

Induktionsannahme: Nehmen wir an: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Linke Seite:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1+4+9+16+\ldots+n^2+(n+1)^2$$

$$- \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4+9+16+\ldots+n^2$$

$$(n+1)^2$$

Rechte Seite:

$$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} - \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{\cancel{6}n^2+12n+6}{\cancel{6}} = (n^2+2n+1) = (n+1)^2$$

Linke Seite = Rechte Seite

Induktionsschritt = wahr

$\Rightarrow$ die Aussage ist wahr

Aufgabe 2-7

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar

Induktionsanfang

$n=0$: $0+1+8=9$ - wahr

$n=1$: $1+8+27=36$ - wahr

Induktionsannahme: Wir nehmen an $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ durch 9 teilbar

Induktionsschritt: $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 =$

$= (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n^3 + \cancel{27}^{\,9} n^2 + 27n + 27) =$

$$= \underbrace{\underbrace{(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)}_{\text{durch 9 teilbar aus Induktionsannahme}} + \underbrace{(9n^2 + 27n + 27)}_{\substack{9(n^2+3n+3) \\ \text{auch durch 9 teilbar}}}}$$

$\Downarrow$

$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar.