MA4

Aufgabe 4-1

$f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 4x^2 + x \mid 2x^2 + 1$

$\mid 2x^2 - 3x - 3$

$- (4x^4 + 2x^2)$

$-6x^3 - 6x^2 + x$

$- (-6x^3 - 3x)$

$-6x^2 + \cancel{[illegible]}\, 4x$

$- (-6x^2 - 3)$

$4x + 3$

Also: ganzer Teil $2x^2 - 3x - 3$, Bruchteil $4x+3$

$f(x) : 2x^2+1 = 2x^2 - 3x - 3 + \frac{4x+3}{2x^2+1}$

Aufgabe 4-2

M, K - Unterräume von V

$M+K = \{ w \mid w = u+v,\ u \in M,\ v \in K \}$

Zu Beweisen: $M+K$ - ein Unterraum von V

V1 $w \in M+K$ - aus Definition

V2 $\lambda w \in M+K$; K_1 - ein Körper; $\lambda \in K_1$

Skalar aus K_1

$\lambda(u+v) \in M+K$

$\lambda u + v \in M+K$

gilt weil M und K haben Verknüpfungen von V bzw mit Skalaren aus K, da M und K - Unterräume sind.

d.h. $M+K$ ist auch ein Unterraum von V

Q.E.D.

Aufgabe 4-3

Um eine Basis für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ zu finden, können wir die Standartbasisvektoren wählen.

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; B = \{b_1, b_2\}$

Für den Vektorraum $\mathbb{C}$ können wir eine Basis aus den Einheitsvektoren $i = (1,0), j = (0,1), B' = \{i, j\}$ für $\mathbb{C}$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xi + yj$

Isomorphismus

1) Eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen ist schon ein Homomorphismus:

Vektorraum enthält eine kommutative Gruppe

$\varphi(a \circ_G b) = \varphi(a) \circ_H \varphi(b)$

Also: $V_1(a, +)$ und $V_2(b, +)$

$V_1 \mapsto V_2$: $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

~~Haben wir~~: Sei $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$f_1(v_1 + v_2) = f\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$;

$f(v) = xi + yj$. d.h $f(v_1 + v_2) = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j$

Auch $f(v_1) + f(v_2) = x_1 i + y_1 j + x_2 i + y_2 j = i(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

$= f(v_1 + v_2)$ – also f ist ein Homomorphismus

Jetzt zu zeigen: Bijektivität

1) $f_1(v_1) = f(v_2)$ dann $v_1 = v_2$

$\Downarrow$

$x_1 i + y_1 j = x_2 i + y_2 j \Rightarrow x_1 = x_2 ; y_1 = y_2$ – Injektivität

2) Surjektivität:

Für jedes $u = ai + bj$ in $\mathbb{C}$ gibt es ein $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ mit $f(v) = u$

Q.E.D.

Aufgabe 4-4

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

a) B2 - lineare Unabhängigkeit

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \mid \cdot 2 \\ 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$4\lambda_2 + 8\lambda_3 - 4\lambda_2 - 6\lambda_3$

$4\lambda_3 = 0; \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2, \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow u, v, w$ - linear unahängig

B1 Da $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt $\operatorname{Span}(u, v, w) \subseteq \mathbb{R}^3$. Sei $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} k_1 = \lambda_1 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3 \\ k_2 = 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \quad ; \lambda_2 = \frac{k_2}{2} - 2\lambda_3 \\ k_3 = 4\lambda_2 + 6\lambda_3 \quad ; \lambda_3 = \frac{k_3}{6} - \frac{4}{6}\lambda_2; \lambda_3 = \frac{k_3}{6} - 4\left(\frac{k_2}{2} - 2\lambda_3\right) \end{cases}$$

$\lambda_3 = \frac{k_3}{6} - 2k_2 + 8\lambda_3$; $\lambda_2 = \frac{k_2}{2} - 2\left(-\frac{7k_3}{6} + 14k_2\right)$

$-7\lambda_3 = \frac{k_3}{6} - 2k_2$; $\lambda_2 = \frac{k_2}{2} + \frac{14k_3}{6} + 14k_2$; $\lambda_2 = \frac{29k_2}{2} + \frac{14k_3}{6}$

$\lambda_3 = -\frac{7k_3}{6} + 14k_2$, $\lambda_1 = k_1 + \lambda_2 + \frac{3}{2}\lambda_3$; $\lambda_1 = k_1 + \frac{29k_2}{2} + \frac{14k_3}{6} + \frac{3}{2}\left(-\frac{7k_3}{6} + 14k_2\right)$

$\lambda_1 = k_1 + \frac{29k_2}{2} + \frac{\cancel{14}k_3}{2} - \frac{7k_3}{4} + 21k_2$;

$\lambda_1 = k_1 + \frac{71k_2}{2} + \frac{7k_3}{4}$;

Also: $k \in \operatorname{Span}(u, v, w) \Rightarrow \mathbb{R}^2 \in \operatorname{Span}(v, u, w)$ $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq \operatorname{Span}(u, v, w) \Rightarrow \operatorname{Span}(u, v, w) = \mathbb{R}^2$

d.h. u, v, w bildet ein Basis

b) $x = \begin{pmatrix} a \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a = \lambda_1 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3 \\ 6 = 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \quad | \cdot 2 \\ 4 = 4\lambda_2 + 6\lambda_3 \end{cases}$$

$$26 - 4 = 4\lambda_2 + 8\lambda_3 - 4\lambda_2 - 6\lambda_3$$

$$26 - 4 = 2\lambda_3$$

$$6 = \lambda_3 + 2;$$

Also: Antwort $a = \lambda_1 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3$

$6 = \lambda_3 + 2;$

c) $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 - \lambda_2 - \frac{3}{2}\lambda_3 \\ 6 = 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \quad | \cdot 2 \\ 4 = 4\lambda_2 + 6\lambda_3 \quad - \end{cases}$$

$12 - 4 = 4\lambda_2 + 8\lambda_3 - 4\lambda_2 - 6\lambda_3$

$8 = 2\lambda_3$

$4 = \lambda_3$

$6 = 2\lambda_2 + 4 \cdot \cancel{8}\,4$; $\cancel{6 = 2\lambda_2 + 32}$; $\cancel{-26 = 2\lambda_2}$

$6 = 2\lambda_2 + 16$; $\lambda_2 = -5$;

$3 = \lambda_1 + 5 - \frac{3}{2} \cdot 4$; $3 = \lambda_1 + 5 - 6$;

$3 = \lambda_1 - 1$; $\lambda_1 = 4$;

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4-5 $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_i \in \mathbb{R}^3$ - linear unabhängig

a) ist $\{2v_1, 2v_2, 2v_3\}$ - linear unabhängig

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

hat nur eine mögliche Wurzel $\lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3$,

Im Fall von $2v_1, 2v_2, 2v_3$ werden die Vektoren verdoppelt.

b) $\lambda_1 1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 3 v_3 = 0$

Nur im Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ => linear unabhängig

c) Passt nur wenn $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

wenn $a = b = c = 0$ - sind v_1, v_2, v_3 trivialerweise linear abhängig, da die alle Vektoren alle den Nullvektor enthalten

Aufgabe 4-6

$f\cancel{\varphi}: X \to Y$ - eine lineare Abbildung.

f - injektiv

Zu Beweisen: Bild einer linear unabhängigen Teilmenge $A =$
$= \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ von X auch linear unabhängig.

Beweis durch Widerspruch:

Sei $f(A) = \{f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)\}$ - linear abhängig $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) = 0$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ nicht gleich 0

$\Rightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = 0$

$\Rightarrow$ da f injektiv ist muss $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$

Aber das ist ein Widerspruch, da $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind und somit die einzige lineare Kombination, die 0 ergibt, die triviale Kombination $(\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0)$

Aufgabe 4-7

Zu Beweisen mittels Induktion: $n = 5a + 2b$; $n \geq 4$, $\in \mathbb{N}$ $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$. Zuerst Beweisen wir das für alle geraden n

Induktionsanfang:

$$\underset{n}{4} = 5 \cdot \underset{a}{0} + 2 \cdot \underset{b}{2}$$

Induktionsannahme: $n = 5a + 2b$

Induktionsschritt:

$n+1 = 5q + 2k$;

Also jetzt beweisen wir für alle ungerade n.

Induktionsanfang: ~~n+1~~

$$\underset{n}{4} + 1 = 5 \cdot \underset{q}{1} + 2 \cdot \underset{k}{0} \qquad q, k \in \mathbb{N}$$

Induktionsannahme: nehmen wir an $n+1 \overset{+1}{=} 5a + 2b$; $a, b \in \mathbb{N}$

$n+2$ - gerade. Alle gerade Zahlen können mittels $2b$ dargestellt werden. $\Rightarrow n+1 = 5q + 2b$ - wahr $\Rightarrow n = 5q + 2b$; auch wahr. Q.E.D.