31) $f(x) = x + e^x - 2$; $x_0 = 0$

$0 = x + e^x - 2$; $x = 2 - e^x = g(x)$

$g([0,1]) = [2-e^1, 2-e^0] = [\cancel{\ldots}$ $-0{,}7182 ; 1]$ - außer $[0,$ passt

$k(x) = \ln(2-x)$

$k([0,1]) = [\ln(1), \ln(2)] \subseteq [0,1]$ - stimmt

Jetzt überprüfen wir $|k'(x^*)| < 1$

$k'(x) = -\frac{1}{2-x}$

Für $x \in [0,1]$, $|k'(0)| = \frac{1}{2}$; $|k'(1)| = 1$; $\frac{1}{2} < 1$ - stimmt

$x_1 = k(x_0) = \ln(2-0) = \ln(2) \approx 0{,}693$

$x_2 = k(x_1) = \ln(2-0{,}693) \approx 0{,}267$

$x_3 = k(x_2) = \ln(2-0{,}267) \approx 0{,}549$

$x_4 \approx 0{,}372$

$x_5 \approx 0{,}487$

$x_6 \approx 0{,}414$

https://www.desmos.com/calculator/wxl9k4idri

$x_7 \approx 0{,}461$

$x_8 \approx 0{,}431$

$x_9 \approx 0{,}45$

$x_{10} \approx 0{,}438$

$x_{11} \approx 0{,}446$

$x_{12} \approx 0{,}441$

$x_{13} \approx 0{,}444$

$x_{14} \approx 0{,}442$

$x_{15} \approx 0{,}443$

32) $f(x) = x + e^x - 2$; $x_0 = 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

https://www.desmos.com/calculator/ubbqvty06k

$f'(x) = 1 + e^x$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{0+1-2}{1+1} = 0,5$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{0,5 + e^{0,5} - 2}{1 + e^{0,5}} \approx 0,443852$$

$x_3 \approx 0,442855$

$x_4 \approx 0,442854$

$x_5 \approx 0,442854$

33) $f(x) = x + e^x - 2$; $a = 0$; $b = 1$

https://www.desmos.com/calculator/vq0gknepmn

1. $m = \frac{0+1}{2}$; $m = 0,5$

$f(0,5) = 0,5 + e^{0,5} - 2 = 0,14872$

$f(a) \cdot f(c) = f(0) \cdot f(0,5) = (-1)(0,14872) < 0$, also lasses $b = m$

2. $[a,b] = [0, 0.5]$

$m = 0,25$

$f(0,25) \approx -0,46597$

$f(a) \cdot f(c) = (-1)(-0,46597) > 0$, also lasses $a = m$

3. $[a;b] = [0,25, 0.5]$

$m = 0,375$

$f(0,375) \approx -0,17$

$f(a) f(c) \approx (-0,46597)(-0,17) > 0$, lasses $a = m$

4. Und so weiter bis mit tolerance z.B. $10^{-6} = f(m$

bekommen. Also nach 20 iterationen: $[a,b] = [0,442849,$

34) a) $g_1(x) = y + x - x^2$; $f(x) = x^2 - y = 0$

$|g_1'(x)| < 1$;

$g_1'(x) = 1 - 2x$

$$\boxed{\begin{aligned} &g_1(x) = x \\ &y + x - x^2 = x \\ &y - x^2 = 0 \\ &x = \pm\sqrt{y} \; ; \end{aligned}}$$

$x = \sqrt{3}$

$g_1'(\sqrt{3}) = 1 - 2\sqrt{3} \approx -2{,}464$

$|g_1'(\sqrt{3})| > 1$ - konvergiert nicht auch bei $-\sqrt{3}$

б) $g_2'(x) = 1 + \frac{2x}{y}$

$x = \sqrt{3}$; $y = 3$

$|g_2'(\sqrt{3})| = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} > 0$ - konvergiert nicht

$|g_2'(-\sqrt{3})| = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < 0$ - konvergiert

https://www.desmos.com/calculator/8sktbxpcvj

35) $f(x) = x^2 - 2 = 0$

a) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =$

$f'(x) = 2x$

$x_1 = 1 - \frac{-1}{2} = 1{,}5$

б) $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

$x_2 = 2 - 2 \cdot \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{4}{3}$

36) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; $f(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^2$; $f'(x) = 4x^3 - \frac{14}{3}x$

https://www.desmos.com/calculator/fso9xguqox

$x_1 = 1 - \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} = 1 - 2 = -1$

$x_2 = -1 - \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = -1 + 2 = 1$ - -1 und 1 springen hin und her, was Divergenz bedeutet

37) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 - x_2^2 = 0 \end{cases}$; $F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$

$J(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$

$x^{(k+1)} = x^{k} - J(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})$ oder $J(x^{(k)}) \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)})$, wobei

$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$. Lösen die System um $\Delta x^{(k)}$ zu finden, und dann: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1^2 + 0^2 - 1 \\ 1^2 - 0^2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

$J(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2(1) & 2(0) \\ 2(1) & -2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ – ist singulär. Starten wir mit anderen Punkt

---

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1+1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$J(x^{(0)}) \Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Delta x_1 = -\frac{1}{4}; \Delta x_2 = -\frac{1}{4}$

$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

$F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,5^2 + 0,5^2 - 1 \\ 0,5^2 - 0,5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J(x^{(0)}) = \begin{matrix} 2(0,5) & 2(0,5) \\ 2(0,5) & -2(0,5) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$J(x^{(0)}) \Delta x^{(0)} = -F(x^{(0)})$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Delta x_1 = 0,25$ $\Delta x_2 = 0,25$

$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,75 \end{pmatrix}$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

$F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$J(x^{(0)}) = \begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\Delta x_1 = -0,2$
$\Delta x_2 = -0,2$

$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 0,25 \end{pmatrix}$

37) a) $\frac{x^3-x}{x^2+1} = \min$

$$\left(\frac{x^3-x}{x^2+1}\right)' = \frac{(3x^2-1)(x^2+1)-(x^3-x)2x}{(x^2+1)^2} = 0$$

$x^4+4x^2-1=0 \mid +x$

$x^4+4x^2-1+x=x$

b) $(x_1 \ x_2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} - (0,1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \min$

$2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-x_2=\min$

$\frac{\partial}{\partial x_1} = 4x_1+2x_2=0 \mid +x_1$

$5x_1+2x_2=x_1$

$\frac{\partial}{\partial x_2} = 4x_2+2x_1-1=0 \mid +x_2$

$5x_2+2x_1-1=x_2$