~~1~~ MA 5

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot(-4)-4\cdot4 & -4\cdot(-4)-4\cdot4 \\ 4\cdot(-4)+4\cdot4 & 4\cdot(-4)+4\cdot4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -4\cdot4 - 4\cdot(-4) = -16+16 = 0$$

$$1 \leq \operatorname{rang}(A) \leq 2$$

$\exists M_1 \neq 0$ z.B -4 $\qquad$ M – Minor

$M_2 = \det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 1$

Aufgabe 2

$$\begin{cases} 6r - 2s + 2t + 4w = 16 \\ 12r - 8s + 6t + 10w = 26 \\ 3r - 13s + 9t + 3w = -19 \\ -6r + 4s + 1t - 18w = -34 \end{cases}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ w \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 26 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & -19 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -34 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\,\mathrm{I} \\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & -27 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3\,\mathrm{II} \\ +\frac{1}{2}\,\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -2\,\mathrm{III} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$

$w = 1$
$t = -2$
$s = 1$
$r = 3$

c) 1) Daraus: Da es 4 Spalten oder Zeilen ungleich 0 gibt, ist $\mathrm{Rang}(A) = 4$;

$\boxed{\text{Lösungsraum} = n - \mathrm{Rang}\,A = 4 - 4 = 0 \text{ im } K^{n \times n}}$

$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$ Auch $\mathrm{Rang}(A, b) = 4$, weil es 4 Spalten/Zeilen ungleich 0 gibt

Aufgabe 3

a) $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) - I \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) - I$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad x_2 = -2x_1 \; ; \; x_2 = -4x_3$

$2x_1 = -x_2 = 4x_3 \; ; \quad x_1 = -\frac{1}{2} x_2 \; ; \; x_3 = -\frac{1}{4} x_2$

$h\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}, \; h\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \dots$ also $\mathrm{Ker}(h) = \{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$

falls $x_2 = -4$ $\qquad$ falls $x_2 = -8$

b) $\dim(\mathrm{Lös}(A,0)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{Rang}(A)$

$n = 3$; $\mathrm{Rang}(A) = 2$; $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$ also eine Gerade

Sorry: $A = H$;

Aufgabe 4

Polynom Grad 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{matrix}(1,6)\\(2,3)\\(3,2)\end{matrix}\right\} \in f(x) \Rightarrow \begin{cases} a\cdot 1 + b\cdot 1 + c = 6 \\ a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 3 \\ a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a^2 + 3b + c = 2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -4\mathrm{I} \\ -9\mathrm{I} \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -3 & -21 \\ 0 & -6 & -8 & -52 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -3\mathrm{II} \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -3 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow c = 11;\ b = -6;\ a = 1$$

Antwort: $f(x) = x^2 - 6b + 11$

Aufgabe 5-5

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 10\\ 2 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 16\\ -1 & \frac{1}{2} & -4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -4 & 8\\ -4 & 8 & -12\end{pmatrix}$$

a) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1+3x_3\\ 2x_1-4x_2+8x_3\\ -4x_1+8x_2-12x_3\end{pmatrix}$

b) $A: x_1+x_2=e_1;\quad 4x_1+\cancel{1}10x_2=e_2;\quad 2x_1+4x_2=e_3$

$B: 4x_1-2x_2+16x_3=f_1;\quad \cancel{-4x}\ -x_1+\frac{1}{2}x_2-4x_3=f_2$

$e=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$ $\dim(e)=3$; $f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$; $\dim(f)=2$

c) $A:\begin{pmatrix}1 & 7\\ 1 & 10\\ 2 & -4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -\mathrm{I}\\ -2\mathrm{I}\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 0 & -18\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +6\mathrm{II}\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(A)=2$

$B:\begin{pmatrix}4 & -2 & 16\\ -1 & \frac{1}{2} & -4\end{pmatrix}\begin{matrix}:4\\ \cdot(-1)\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 4\\ 1 & \frac{1}{2} & -4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -\mathrm{I}\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 4\\ 0 & 1 & -8\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(B)=2$

$C:\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -4 & 8\\ -4 & 8 & -12\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -2\mathrm{I}\\ +4\mathrm{I}\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & 8 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ +2\mathrm{II}\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(C)=3$

Aufgabe 6

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) :2 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +4\mathrm{I} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) :3 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\mathrm{II} \\ \\ -4\mathrm{II} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{III} \\ -2\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2{,}5 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -\frac{4}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

b) Aus Folie 62:

$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$

Falls $\det(A) = 0$, dann $\det(A^{-1}) = \frac{1}{0}$, was eine Indeterminiertheit ist.

Aufgabe 7

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 2t & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \leq \text{Rang}(J) \leq 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 2t & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{-2I}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2t & 4-2t \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{+II}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 2t & 4-2t \\ 0 & 1+2t & 6-2t \end{pmatrix}$$

Sei Rang$(J)=1$, dann mussen $2t=0$, $4-2t=0$, $1+2t=0$, $6-2t=0$ gleich zeitig gelten, was unmöglich ist, weil z.b $2t=0$, $1+2t=0$ $\Rightarrow 1=0$ was ein widerspruch ist

Sei Rang$(J)=2$, dann mussen etweder:

$2t=0$, $1+2t=0$ ↑ unmöglich

oder $t=0$, $4-2t=0$, $6-2t=0$ $\Downarrow$ $4=6$ ↑ widerspruch

oder $2t=0$, $4-2t=0$ $\Downarrow$ $4=0$ ↑ widerspruch

oder $1+2t=0$, $6-2t=0$ $\Downarrow$ $-2t=1$, $6+1=0$ ↑ widerspruch

also ist Rang$(J)=2$ - unmöglich. Dann ist Rang(J) unabhängig von t und muss immer 3 sein.