$(0,1);(1,2);(3,3)$

21) a) $\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx b \ ; \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A^T A x = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix} ; \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} & 0 & 1 \end{array}\right) II : \sqrt{\frac{14}{3}} = \left(\begin{array}{cc|cc} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{14}{3}}} \end{array}\right) + -\frac{4}{\sqrt{3}} I =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \sqrt{3} & 0 & 1 & -\frac{2\sqrt{14}}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{14}{3}}} \end{array}\right) : \sqrt{3} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2\sqrt{14}}{7\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{14}{3}}} \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{42}}{21} \\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{14} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{42}}{21} & \frac{\sqrt{42}}{14} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{42}}{21} \\ 0 & \frac{\sqrt{42}}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{42}}{21} & \frac{\sqrt{42}}{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

22) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\left(I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\0\end{pmatrix}$; $Ha = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha e_1$

$H\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\\0\end{pmatrix}$; $v = a - \alpha e_1$

$\alpha = \pm\|a\|_2$

Mit +: $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2} = 2$

$v = a - \alpha e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

23) Am Ende: $A = QR$ $\quad A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\end{pmatrix}$

R - obere Dreieckmatrix

Q - ortogonal

a) $R = \begin{pmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\\0&0&0\end{pmatrix}$ Die Hausholder Transformation ergibt eine Spalte mit Nullen: $\boxed{\text{3-mal}}$

b) Aus dem letzten Beispiel: $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ODER!!! $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, denn wir können $\|a\|_2$ mit + oder − Vorzeichen nehmen.

24) a) Mit Givens Rotation kann man einzelne Nullstellen in Matrizen erzeugen. Also in unserem Fall: $\begin{pmatrix}a&b&c\\0&d&e\\0&0&f\\0&0&0\end{pmatrix}$

6 Nullen = 6 Givens Rotations

c) Aus dem Beispiel 22): $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ODER $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\end{pmatrix}$; $r = \sqrt{a_1 + a_2} = \sqrt{2}$,

$G = \begin{pmatrix}c&s&0&0\\-s&c&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$; $c = \frac{a_1}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $s = \frac{a_2}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $G = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\ \dots\end{pmatrix}$

25) $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\|a\| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}$

$$u = a - \|a\| e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{29} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{29} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v = \frac{u}{\|u\|}; \quad \|u\| = \sqrt{(2-\sqrt{29})^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{58 - 4\sqrt{29}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{58-4\sqrt{29}}} \cdot \begin{pmatrix} 2-\sqrt{29} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{29}}{\|u\|} \\ \frac{3}{\|u\|} \\ \frac{4}{\|u\|} \end{pmatrix}$$

$$M = I - 2vv^T =$$

$$2vv^T = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{29}}{\|u\|} \\ \frac{3}{\|u\|} \\ \frac{4}{\|u\|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{29}}{\|u\|} & \frac{3}{\|u\|} & \frac{4}{\|u\|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{29}} & -\frac{3}{2\sqrt{29}} & -\frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{29}} & \frac{261+18\sqrt{29}}{1450} & \frac{174+12\sqrt{29}}{725} \\ -\frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{174+12\sqrt{29}}{725} & \frac{232+16\sqrt{29}}{725} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1-2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{29}}\right) & \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} & 1 - \frac{18}{58-4\sqrt{29}} & -\frac{12}{29-2\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} & -\frac{12}{29-2\sqrt{29}} & 1 - \frac{16}{29-2\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$c = \frac{3}{5}; \; s = \frac{4}{5}$

26) a) Die Maßstabter Transformationsmatrix M ist symmetrisch und orthogonal, also Eigenwerte sind 1 oder −1
Für jeden Vektor u, der orthogonal zu v ist (d.h., $v^T u = 0$), gilt $Mu = u$, was bedeutet, dass u ein Eigenvektor mit dem Eigenwert +1 ist.
Für den Vektor v ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert −
Alle Vektoren u, die orthogonal zu v sind (also $v^T u = 0$), si
Eigenvektoren zum Eigenwert +1

b) $G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ $c^2 + s^2 = 1$; $c^2 - 1 = -s^2$

$\begin{vmatrix} c-\lambda & s \\ -s & c-\lambda \end{vmatrix} = (c-\lambda)^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + c^2 + s^2 =$

$= \lambda^2 - 2c\lambda + 1$; Lösen wir für λ

$\lambda = \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 4}}{2} = \frac{2c \pm 2\sqrt{c^2-1}}{2} = c \pm \sqrt{c^2-1} =$

$= c \pm \sqrt{-s^2} = c \pm si$

Also Eigenvektoren: $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}$

1) $\begin{pmatrix} c-(c+is) & s \\ -s & c-(c+is) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -is & s \\ -s & -is \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} c-(c-is) & s \\ -s & c-(c-is) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} is & s \\ -s & is \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

27) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$A = V \Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{195}} & -\frac{3}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{7}{\sqrt{195}} & 2\sqrt{\frac{2}{13}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{5}{39}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

a) $\sqrt{30}$, 2

b) $A^+ = V \Sigma^+ U^T$; Für Σ^+ die Σ transponiert wird und σ_i mit $\frac{1}{\sigma_i}$ gesetzt wird

$$A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{195}} & \frac{7}{\sqrt{195}} & -\sqrt{\frac{5}{39}} \\ -\frac{3}{\sqrt{26}} & 2\sqrt{\frac{2}{13}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{19}{60} & -\frac{11}{30} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

c) $Ax = b$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$x = A^+ b = \begin{pmatrix} \frac{19}{60} & -\frac{11}{30} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{60} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

28) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0{,}1 & -0{,}5 \\ 0{,}2 & 3 & 0{,}5 \\ -0{,}4 & 0{,}1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0{,}1 & -0{,}5 \\ 0{,}2 & 3-\lambda & 0{,}5 \\ -0{,}4 & 0{,}1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 29{,}17 - 30{,}73 + 10\lambda^2 - \lambda^3$

a) O_1 - center $= 2$; radius $= 0{,}1 + 0{,}5 = 0{,}6$

O_2 - center $= 3$; radius $= 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$

O_3 - center $= 5$; radius $= 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$

wir lösen die Gleichung:

$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 30,73\lambda - 29,17 = 0$; $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Berechnen wir:

$$Q = \frac{a^2 - 3b}{9} = \frac{100 - 92,19}{9} = \frac{781}{900}$$

$$R = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54} = \frac{-2000 + 2765,7 - 787,59}{54} =$$

$$= \frac{-21,89}{54} = -\frac{2189}{5400}$$

$$S = \left(\frac{781}{900}\right)^3 - \left(\frac{2189}{5400}\right)^2 = \frac{3301727}{6750000} > 0$$

Falls $S > 0$: haben wir 3 reele λ:

$$\phi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)$$

$$\frac{R}{\sqrt{Q^3}} = \frac{-\frac{2189}{5400}}{\sqrt{\left(\frac{781}{900}\right)^3}} = -\frac{995\sqrt{781}}{55451}$$

$$\phi = \frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{995\sqrt{781}}{55451}\right) \approx 0,6987$$

$\lambda_1 = -2\sqrt{Q}\cos(\phi) - \frac{a}{3} =$ $\qquad \cos(\phi) \approx 0,7656821$

$\approx -2\sqrt{\frac{781}{900}} \cdot 0,7656821 + \frac{10}{3} \approx$ $\qquad \cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) \approx 0,1742$

$\qquad \cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) \approx -0,93988521$

$\approx 1,9068$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{a}{3} \approx$$

$$\approx -2\sqrt{\frac{781}{900}} \cdot 0,1742 + \frac{10}{3} \approx 3,008777$$

$$\lambda_3 = -2\sqrt{Q}\cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{a}{3} \approx$$

$$\approx -2\sqrt{\frac{781}{900}}(-0,93988521) + \frac{10}{3} \approx$$

$\approx 5,084425$