Aufgabe 3-1 MA3

a) $v_1(1,1,-1,0)$ $v_2=(0,-1,1,-2)$ $v_3=(3,1,-1,-4)$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}\lambda_2+\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-4\end{pmatrix}\lambda_3$$

$$\begin{cases}1=0\lambda_2+3\lambda_3 \\ 1=-1\lambda_2+1\lambda_3 \\ -1=1\lambda_2+(-1)\lambda_3 \\ 0=-2\lambda_2-4\lambda_3\end{cases} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3} \begin{cases}1=-\lambda_2+\frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_2=-\frac{2}{3}- \\ -1=\lambda_2-\frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_2=-\frac{2}{3}\text{-wahr} \\ 0=-\lambda_2-4\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_2=-\frac{2}{3}\text{-wahr}\end{cases}$$

~~Pro~~ Probe:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-4\end{pmatrix}$$ -wahr; d.h $v_1 v_2 v_3$ -sind linear abhängig

b) $v_1(1,1,-1,0)$ $v_2=(0,-1,1,-2)$ $v_3=(3,-1,-1,-4)$

$$\begin{cases}1=3\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3=\frac{1}{3} \\ 1=-\lambda_2-\lambda_3;\ 1=-\lambda_2-\frac{1}{3};\ \lambda_2=-\frac{4}{3} \\ -1=\lambda_2-\lambda_3;\ -1=-\frac{4}{3}-\frac{1}{3};\text{-wiederspruch} \\ 0=-2\lambda_2-4\lambda_3\end{cases}$$

d.h. sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig

Aufgabe 3-2

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ \cancel{4} \, 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ -3 = t\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ 4 = 2\lambda_2 + 6\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \; (\cdot 2) \\ 4 = 2\lambda_2 + 6\lambda_3 \; (\cdot 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 6\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ 12 = 6\lambda_2 + 18\lambda_3 \end{cases} (-) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 12 = \cancel{6\lambda_2} + 8\lambda_3 - \cancel{6\lambda_2} - 18\lambda_3$$

$$-10 = -10\lambda_3 ; \; \lambda_3 = 1$$

$$2 = 6\lambda_2 + 8$$

$$-6 = 6\lambda_2 ; \; \lambda_2 = -1$$

$$-3 = t(-1) + 6$$

$t = 3 + 6 = 9$; Antwort: $t = 9$; für $t = 9$ sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig

Aufgabe 3-3

$(V,+)$ - eine kommutative Gruppe

K - Körper

$\cdot$ - Verknüpfung über $K \times V \to V$

Sei v, w - Elemente von V, also Vektoren und λ, μ - Skalaren, dann gilt:

V1

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v$$

V2 $1 \cdot v = v$

V3 $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$

V4 $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

Aufgabe 3-4

$F = \{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ $\cdot$ ~~für~~ $(f \oplus g)(a) := f(a) + g(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad (f \odot g)(a) := f(a) \cdot g(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$

Zu finden: $(F, \oplus, \odot)$ ein Ring?

Notiz: Ich bin dumm und müde, deswegen sei $x = a$

R1 $(F, \oplus)$ - eine kommutative Gruppe

G1 Sei $h(a) = a - a^{=0}$, dann

$f(a) + h(a) = h(a) + f(a) = f(a)$

$h(a)$ – neutrales element

G2 $-f(x)$ – inverse

$-f(x) + f(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = h(a)$ - wahr

G3 $f(x) + (g(x) + q(x)) = (f(x) + g(x)) + q(x)$ – wahr

G4 $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ – stimmt

R2 $f(x) \cdot (g(x) \cdot q(x)) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot q(x)$ – wahr

R3 $f(x) \cdot (g(x) + q(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot q(x)$ – wahr

Bonus: R4 $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$ – wahr

d.h. $(F, \oplus, \odot)$ – ein kommutativer Ring

Aufgabe 3-5

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$

1) Lineare Abbildung?

LA1 zu zeigen: $f(u+v) = f(u) + f(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$

Seien $u, v \in \mathbb{R}^2$ mit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$f(u+v) = f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2+v_2 \\ u_1+v_1+u_2+v_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1+u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix} = f(u) + f(v)$ - lineare Abbildung

~~Injektiv~~?

LA2 zu zeigen: $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda u) = f\left(\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda u_2 \\ \lambda u_1 + \lambda u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1+u_2 \end{pmatrix} = \lambda(f(u))$

d.h. ist f - eine lineare Abbildung

2) Injektiv?

Seien $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ und gelte $f(u) = f(v)$. Dann folgt

$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_1+u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix}$

$u_2 = v_2$

$u_1 + u_2 = v_1 + v_2$; $u_1 + \cancel{v_2} = v_1 + \cancel{v_2}$; $u_1 = v_1$

Also $u_2 = v_2$; $u_1 = v_1 \Rightarrow u = v \Rightarrow f$ ist injektiv

3) Surjektiv?

Der Codomain besteht aus geordneten Paaren (V_1, V_2), wobei $V_1, V_2 \in \mathbb{R}$

Die Funktion ordnet den Werten v_2 und $v_1 + v_2$ die Eingabe (v_1, v_2) zu. Wir zu zeigen: $f(v_1, v_2) = (V_1, V_2)$ für beliebige V_1, V_2

$v_2 = V_1$

$v_1 + v_2 = V_2$

$v_1 + V_1 = V_2$

$v_1 = V_2 - V_1$. Also das Urbild schaut so $(V_2 - V_1, V_1)$ aus.

Da wir beliebige Elemente im Codomain Urbilder im Definitionsbereich finden können, ist die Funktion f surjektiv

4) Bijektiv - ja, weil es injektiv und surjektiv ist.

6) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

a) linear Abbildung?

i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

Seien $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_1+v_1)(u_2+v_2) \\ u_1+v_1+u_2+v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1u_2 + u_1v_2 + v_1u_2 + v_1v_2 \\ u_1+v_1+u_2+v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1u_2 \\ u_1+u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1v_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1v_2 + u_2v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= f(u) + f(v) + \begin{pmatrix} u_1v_2 + u_2v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(u) = \begin{pmatrix} u_1u_2 \\ u_1+u_2 \end{pmatrix} \quad f(v) = \begin{pmatrix} v_1v_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix}}$$

d.h. - nicht lineare Abbildung

b) Injektiv:

nicht injektiv, weil $\begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}$ hat 2 Urbilder: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) Surjektiv:

~~nicht, weil hier z.b. (...) gibt es kein Urbild in~~

Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^2$, sodass $f(x) = u$

Dafür muss $u_2 = 1$, weil es ist nur eine Möglichkeit 1 in Codomain zu bekommen

$f\begin{pmatrix} u_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1+1 \end{pmatrix}$, was nicht u ist, weil $u_2 = 1 \neq u_1+1$

d.h. f - nicht surjektiv

d) Nicht bijektiv, weil nicht injektiv oder/und nicht surjektiv

Aufgabe 3-6

{A B C}
{A C B}

{B A C}
{B C A}

{C A B}
{C B A}

$P_k = kP_{k-1}$

rekursive Definition

Die Menge aller Permutationen gegebener k Elemente wird in Gruppen eingeteilt, in denen jeweils das gleiche Element an erster Stelle steht. Die Anzahl solcher Gruppen entspricht k-1 Anzahl aller Elemente. In Permutationen, die in derselben Gruppe enthalten sind, können die verbleibenden k-1 Elemente in beliebig. Reihenfolge an aufeinander folgenden k-1 Stellen platziert werden. Daher beträgt die Anzahl der Permutationen in jeder Gruppe P_{k-1}.

Beweis:

Zu Beweisen $P_k = k!$

Induktionsanfang: $k=1$; $P_k = 1 = 1!$.

Induktionsannahme: Nehmen wir an $P_k = k!$

Induktionsschritt: $P_{k+1} = (k+1)! = (k+1)k!$, was aus $P_k = kP_{k-1}$, also $P_{k+1} = (k+1)P_k$ – wahr ist.

Aufgabe 3-7

$(a+bi)(x+yi)=1$

$(x+yi) = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+\cancel{abi}-\cancel{abi}+b^2} =$

$= \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2};$

x muss $\frac{a}{a^2+b^2}$ sein, da $\frac{a}{a^2+b^2}$ nur die reele Teil ist.

bzw $-\frac{bi}{a^2+b^2} = yi$; $y = -\frac{b}{a^2+b^2}$, da $-\frac{bi}{a^2+b^2}$ nur die komplexe Einheit enthält.

Antwort: $x = \frac{a}{a^2+b^2}$; $y = -\frac{b}{a^2+b^2}$; $x+yi = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$