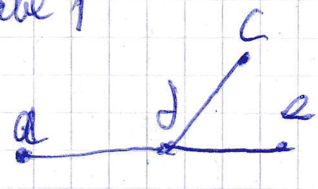
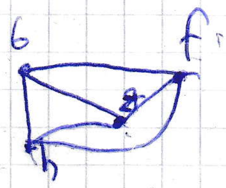
MA 6

Aufgabe 1

b)





a)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 2

Betrachten wir jeden ~~Kante~~ Weg mit maximaler Länge im Baum. Da der Baum zwei Knoten hat und verbunden ist, muss dieser Weg existieren. Beide ~~Knoten~~ Endknoten dieses Weges haben einen Grad im Baum. Ihre einzigen Nachbarn sind die Knoten, die vor ihnen auf dem Weg liegen.

- Endpunkte dürfen keine anderen Nachbarn auf dem Weg haben, da dadurch eine Schleife entstehen würde, was in einem Baum nicht möglich ist
- Endpunkte können keine anderen Nachbarn außerhalb des Weges haben, da wir dann einen solchen Nachbarn verwenden könnten, um den Pfad zu erweitern. Dies ist jedoch nicht möglich, da der Weg bereits eine maximale Länge hat.

Aufgabe 3

$A \cdot A^{-1} = I$, wobei I - Einheitsmatrix,

Also in unserem Fall $A^2 = I$ muss gelten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot1 \\ 0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - passt}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+0\cdot0 & -1\cdot0+0\cdot(-1) \\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot0 & 0\cdot0+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - passt}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc}\cdot\sqrt{1-bc} + bc & b\sqrt{1-bc} - b\sqrt{1-bc} \\ c\sqrt{1-bc} - c\sqrt{1-bc} & cb + \sqrt{1-bc}\cdot\sqrt{1-bc} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |1-bc|+bc & 0 \\ 0 & cb+|1-bc| \end{pmatrix} =$$

Uns wurde es gesagt, dass $bc \leq 1$, deswegen $|1-bc| = 1-bc$

$$= \begin{pmatrix} 1-\cancel{bc}+\cancel{bc} & 0 \\ 0 & \cancel{cb}+1-\cancel{bc} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - QED}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ \cancel{\&}c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix} \cancel{\cdot} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} \cdot \sqrt{1-bc} + cb & \cancel{b \cdot \sqrt{1-bc}} - b\sqrt{1-bc} + b\sqrt{1-bc} \\ -c\sqrt{1-bc} + c\sqrt{1-bc} & cb + \sqrt{1-bc} \cdot \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$$

Dann wird die Aufgabe auf die vorherige reduziert.

Aufgabe 3 Bonus

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ - selbst invers.

Also $A^2 = I$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ cb+d^2=1 \end{cases}$$

Wenn entweder $b=0$ oder $c=0$ haben wir den Fall $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$ wobei $a^2=1$, $d^2=1$

Also den Fall $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir haben schon gezeigt dass diese Matrix selbst inverses ist. PS. Auch für Fall $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Jetzt Fall dass $b \neq 0$ und $c \neq 0$,

$$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ a+d=0 \\ cb+d^2=1 \end{cases} \Rightarrow a=-d \Rightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{1-bc} \\ d = \mp\sqrt{1-bc} \end{cases}$$

Wenn wir aus $cb+d^2=1$; $d=\pm\sqrt{1-bc}$, dann $a=\mp\sqrt{1-bc}$ was genau das ist:

Also $\begin{cases} a = \pm\sqrt{1-bc} \\ d = \mp\sqrt{1-bc} \end{cases}$ gilt wenn $b, c \neq 0$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Also: $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$ - Q.E.D

Sodass $a, d \in \mathbb{R}$, muss $1-bc \geq 0$

Aufgabe 4

J ist singulär, wenn Rang(J) $\neq 3$

Auch, sind die Zeilen (Spalten) von J linear abhängig, so gilt $\det(J) = 0$, Also Wenn $\det(J) = 0$, dann $\text{Rang}(J) \neq 3$

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{pmatrix} = J$$

$$\det(J) = a\begin{vmatrix} a & 4 \\ a & a \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} a & 4 \\ a & a \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} =$$

$$= a(a^2 - 4a) - 2(a^2 - 4a) + 3(a^2 - a^2) =$$

$$= a(a^2 - 4a) - 2(a^2 - 4a) = (a^2 - 4a)(a - 2) = a(a-4)(a-2)$$

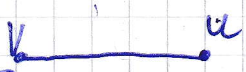
$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 4 \\ a = 2 \end{array}\right.$$

– Antwort: Wenn $a = 0$ oder $a = 2$, $a = 4$ ist J singulär.

Aufgabe 5

a) 1) Reflexivität

$\forall v : \exists v \sim v$. Also es gibt eie Kantenfolge (das v), die zu sich selbst führt. Zeigen wir das:



Also v geht zu u und zurück => ∃ Kantenfolge: $v \sim v$. Diese Eigenschaft gilt für komplexere Graphen

2) Symmetrie. $\forall v, w : \exists v \sim w \land \exists w \sim v$

Weil die ungerichteten Graphen sind bidirektional gilt es

3) Transitivität $\forall v, w, u$ Falls $\exists (v,w) \land (w,u) \rightarrow \exists (v,u)$

Wir sprechen über Kantenfolgen, nicht über direkte Verbindung. Natürlich $v \sim u$ weil es durch w geht

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation

b) Die Äquivalenzklasse enthält alle Elemente des Diagramms, die einen Weg zu diesem Element haben.

Für Beispiel 1: $[a] = \{a, d, c, e\} = [d] = [c] = [e]$

$[b] = [f] = [g] = [h] = \{b, f, g, h\}$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$ Aufgabe 6

a) $\det(A - \lambda I)$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & b & 0 \\ c & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & e-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & e-\lambda \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & e-\lambda \end{vmatrix} = \lambda[\lambda(e-\lambda) - b[c(e-\lambda)]] =$$

$$= \lambda^2(e-\lambda) - bc(e-\lambda) = (\lambda^2 - bc)(e-\lambda)$$

Eigenwerte: $(\lambda^2 - bc)(e-\lambda) = 0$

$$\begin{cases} \lambda^2 - bc = 0 \quad \lambda^2 = bc;\ \lambda = \pm\sqrt{bc} \\ e - \lambda = 0;\ \Rightarrow \lambda = e \end{cases}$$

b) Sei $b = 9$, $e = 1909$, $c = -1$, dann Eigenwerte:

$$\begin{cases} \lambda = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \\ \lambda = 1909 \end{cases}$$

c) E hatt komplexe Eigenwerte wenn:

1) e ist komplex
2) entweder b oder c < 0, aber nicht gleichzeitig

Wenn nur 1 ist erfüllt, hat E nur ein Eigenwert. Wenn nur 2 ist erfüllt, hat E genau 2 Eigenwert. Wenn sowohl 1 als auch 2 erfüllt hat E 3 Eigenwerte

d) $\left[\begin{array}{l}\lambda = \pm\sqrt{bc} \\ \lambda = e\end{array}\right.$; $b = 16$
; $c = -1$
$e = 1909$

$\left[\begin{array}{l}\lambda = \pm 4i \\ e = 1909\end{array}\right.$

$(A - \lambda_i I) v_i = 0$

zum $\lambda = -4i$

$$\begin{pmatrix} 4i & 16 & 0 \\ -1 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 1909+4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4i & 16 & 0 \\ -1 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 1909+4i \end{pmatrix} \cdot i = \begin{pmatrix} -4 & 16i & 0 \\ -1 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 1909+4i \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{4}(I) \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 16i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1909+4i \end{pmatrix} : 4 = \begin{pmatrix} -1 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1909+4i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{4x} - x_1 + 4i\, x_2 = 0 \\ \cancel{x_2} (1909+4i) x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4i\, x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

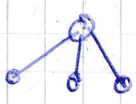
Also für Eigenwert $-4i$ gibt es un endlich viel Eigenvektoren. $v = \begin{pmatrix} 4i\, x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

~~[illegible]~~

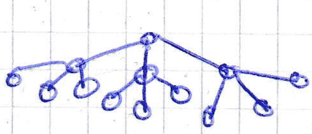
Aufgabe 7

a

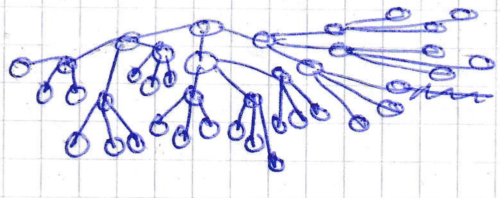
Kleinste Fall $h=2$:



Dann $h=3$

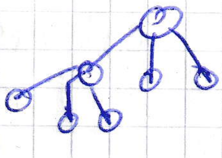


$h=4$



und so weiter

Fälle wie



passen uns nicht

weil in diesem Fall würden wir Pfaden von Wurzel zu Blättern haben, die nicht gleiche Länge haben

Also Anzahl von Blättern steigt exponenziell auf.

Für $h=2$ haben wir 3 Blättern, bei $h=3$, 9, bei $h=4$, 27 und so weiter also 3^k. Jetzt müssen wir Zusammenhang zwischen k und h bestimmen.

$k \geq 1$
$k \in \mathbb{Z}$

Es ist ganz einfach: $k=h-1$.