1-3 指數與常用對數

國中就學過指數律和科學記號，在這裡我們要做一些規定，把指數符號拓展出去，然後再介紹常用對數的符號，可用來幫助我們解決指數大小的難題。因版本的不同，後面幾個範例可依各校教科書內容斟酌刪減。

國中複習銜接

國一上	指數律	已知 m、n 為正整數，利用乘方介紹指數符號 a^n，得到指數律： (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (3) $(a^m)^n = a^{mn}$ (4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (5) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

1 $a=(-\frac{5}{3})^2$，$b=(-\frac{5}{3})^3$，$c=(-\frac{5}{3})^4$，$d=(-\frac{5}{3})^5$，則 a、b、c、d 的大小順序為何？ (C)

(A) $a>b>c>d$ (B) $a<b<c<d$ (C) $c>a>b>d$ (D) $c>a>d>b$ 　樟樹實創

解 $a>0$，$b<0$，$c>0$，$d<0$

$a=\frac{25}{9}$，$c=\frac{25}{9}\times\frac{25}{9}$ $\therefore c>a$；$b=-\frac{125}{27}$，$d=-\frac{125}{27}\times\frac{25}{9}$ $\therefore b>d$，則 $c>a>0>b>d$

練習 1 設 $5^{3x}=3$，則 $5^{9x-2}=$ $\frac{27}{25}$ 。 解 $5^{9x-2}=\frac{5^{9x}}{5^2}=\frac{(5^{3x})^3}{25}=\frac{3^3}{25}=\frac{27}{25}$ 　陽明國中

練習 2 計算 $\frac{(2^{30})^2-(2^{26})^2}{(2^{28})^2-(2^{24})^2}=$ 16 。 解 所求 $=\frac{2^{60}-2^{52}}{2^{56}-2^{48}}=\frac{2^{52}(2^8-1)}{2^{48}(2^8-1)}=\frac{2^{52}}{2^{48}}=2^4=16$ 　景美國中

國一上	科學記號	即 $a\times10^n$ 且 $1\le a<10$，n 為正整數，如 $386123\approx3.9\times10^5$ 為有效數字 2 位的科學記號，最高位數字為 3，5 次方代表該數字有 6 位整數

2 請計算 $4\times10^2\times1.64\times10^{-7}-41.2\times10^{-6}=$ 2.44×10^{-5} 。（以科學記號表示）

解 原式 $=6.56\times10^{-5}-4.12\times10^{-5}=(6.56-4.12)\times10^{-5}=2.44\times10^{-5}$ 　崇林國中

練習 3 若 $A=4.2\times10^{-8}$、$B=2.1\times10^{-6}$，下列何者正確？ (D)

(A) $AB>\frac{A}{B}>\frac{B}{A}$ (B) $\frac{A}{B}>\frac{B}{A}>AB$ (C) $\frac{B}{A}>AB>\frac{A}{B}$ (D) $\frac{B}{A}>\frac{A}{B}>AB$ 　光明國中

解 $AB=4.2\times10^{-8}\times2.1\times10^{-6}=8.82\times10^{-14}$

$\frac{A}{B}=\frac{4.2\times10^{-8}}{2.1\times10^{-6}}=2\times10^{-2}=0.02$，$\frac{B}{A}=\frac{1}{2\times10^{-2}}=\frac{10^2}{2}=50$ $\therefore \frac{B}{A}>\frac{A}{B}>AB$

練習 4 下列敘述何者正確？ (D)

(A) 2×10^{15} 有 15 位數

(B) 10^{-15} 化為小數時，小數點後有 15 個 0

(C) $\frac{1}{250}$ 可用科學符號表示為 2.5×10^{-3}

(D) 999000000 可用科學記號表示成 9.99×10^8 　龍津國中

解 (A)由 $2\times10^3=2000$ 為四位數，知 2×10^{15} 有 16 位數

(B)由 $10^{-3}=0.001$，知 10^{-15} 在小數點後有 14 個 0

(C) $\frac{1}{250}=\frac{4}{1000}=0.004=4\times10^{-3}$

範例研習特區

1 指數符號的拓展與指數律

1. **正整數次方**：a 為實數，n 為正整數，國中時我們將 n 個 a 的連乘積簡寫成 a^n，即 $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{ 個}}=a^n$，稱為指數符號，$a$ 為 a^n 的「底數」，n 為 a^n 的「次數」。

2. **零次方**：若 $a\neq 0$，規定 $a^0=1$。因 0^0 規定為 0 或 1 均不妥當，所以 0^0 為無意義。

3. **負整數次方**：若 $a\neq 0$，n 為正整數，規定 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$。例 $(-2)^{-1}=\dfrac{1}{-2}$，$(\dfrac{2}{3})^{-4}=\dfrac{81}{16}$。

4. **正高次根號**：如二次根號的定義方式，若 a、$b>0$，n 為自然數且 $n\geq 2$ 滿足 $a^n=b$，則稱 a 為 b 的正 n 次根號，簡稱為 n 次根號 b，記為 $a=\sqrt[n]{b}$。

   例 $\sqrt[4]{81}=3$，$\sqrt[5]{32}=2$，$2<\sqrt[6]{200}<3$。

   注意 4 的正二次根號（即開根號）為 2，而 4 的平方根（即二次方根）為 ± 2。

5. **有理數次方**：利用正高次根號來定義有理數次方，如下：

   若 $a>0$，m、n 為正整數且 $n\geq 2$，規定 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$，$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$。

   例 $3^{0.5}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$27^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{27^2}}=\dfrac{1}{(\sqrt[3]{27})^2}=\dfrac{1}{9}$。

6. **無理數次方**：$a>0$，利用無窮數列所靠近的數來定義無理數次方，例 $3^{\sqrt{2}}$ 與 2^{π}。

   (1) $\sqrt{2}=1.4142\cdots$，數列 $3^{1.4}$、$3^{1.41}$、$3^{1.414}$、$3^{1.4142}$、…所靠近的數定義為 $3^{\sqrt{2}}$。

   (2) $\pi=3.14159\cdots$，數列 $2^{3.1}$、$2^{3.14}$、$2^{3.141}$、$2^{3.1415}$、$2^{3.14159}$、…所靠近的數定義為 2^{π}。

   注意 當次數為整數時，底數可為負；當次數為分數或無理數時，底數必須為正才有意義，如 $(-8)^{\frac{1}{3}}$、$(-2)^{\sqrt{3}}$ 均為無意義的符號，$(-3)^2$ 不可寫成 $(-3)^{\frac{4}{2}}$。

7. **指數律**：指數符號經過拓展後，皆能滿足指數律，如 a、$b>0$，x、y 為實數，則：

   (1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$　(2) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$　(3) $(a^x)^y=a^{xy}$

   (4) $(ab)^x=a^x\cdot b^x$　(5) $(\dfrac{a}{b})^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

   (6) 若 $a^x=b^y$，則次數可移項得 $a=b^{\frac{y}{x}}$。（等式兩邊同取 $\dfrac{1}{x}$ 次方）

8. **指數的大小關係**

   (1) $a>0$，$a\neq 1$，x、y 為實數，若 $a^x=a^y$，則 $x=y$。

   (2) $a>1$ 時，則 $x>y \iff a^x>a^y$，即次數愈大值愈大。例 $2^{\pi}>2^3>2^{\sqrt{2}}$。

   (3) $0<a<1$ 時，則 $x>y \iff a^x<a^y$，即次數愈大值愈小。例 $(\dfrac{1}{2})^5<(\dfrac{1}{2})^4<(\dfrac{1}{2})^3$。

範例 1 拓展指數符號

指數符號的定義，請同學牢牢記住。

1. 方程式 $x^5 = 678$ 恰有一個正實根，將此正實根分別用根式及指數符號表示為 $x =$ $\underline{\sqrt[5]{678}}$ $= \underline{678^{\frac{1}{5}}}$，可估計此正實根介於整數 n 與 $n+1$ 之間，求 $n =$ $\underline{3}$。

解

$x = \sqrt[5]{678} = 678^{\frac{1}{5}}$

由 $3^5 = 243$ 及 $4^5 = 1024$，知 $3^5 < 678 < 4^5$

得 $3 < 678^{\frac{1}{5}} < 4$，故 $n = 3$

2. 化簡下列各指數式為最簡分數：

(1) $2^{-3} = \underline{\frac{1}{8}}$　(2) $16^{\frac{1}{2}} = \underline{4}$　(3) $8^{-\frac{1}{3}} = \underline{\frac{1}{2}}$　(4) $(\frac{27}{8})^{-\frac{2}{3}} = \underline{\frac{4}{9}}$。

解

(1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

(2) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

(3) $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

(4) $(\frac{27}{8})^{-\frac{2}{3}} = (\frac{8}{27})^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{\frac{8}{27}})^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$

3. 請算出下列各指數式的次數：

(1) $3^{\square} = \frac{1}{9}$　(2) $64^{\square} = 2$　(3) $27^{\square} = 9$　(4) $(\frac{81}{16})^{\square} = \frac{8}{27}$。

解

(1) $3^{-2} = \frac{1}{9}$，$\square = -2$

(2) $64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$，$\square = \frac{1}{6}$

(3) $\because \sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow (\sqrt[3]{27})^2 = 27^{\frac{2}{3}} = 9$，$\square = \frac{2}{3}$

(4) $\because \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} \Rightarrow (\sqrt[4]{\frac{81}{16}})^3 = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$，再取倒數得 $(\frac{81}{16})^{-\frac{3}{4}} = \frac{8}{27}$，$\square = -\frac{3}{4}$

4. 已知 $2^{0.2360} \approx 1.1777$、$2^{0.2361} \approx 1.1778$、$\sqrt{5} = 2.23606\cdots$，則 $2^{\sqrt{5}} \approx \underline{4.711}$。（估計近似值到小數點後第三位）

解

$2^{\sqrt{5}} = 2^{2.23606\cdots} = 2^2 \times 2^{0.23606\cdots}$，因 $2^{0.2360} < 2^{0.23606\cdots} < 2^{0.2361}$

同乘 4 得 $4 \times 1.1777 < 2^{2.23606\cdots} < 4 \times 1.1778$

即 $4.7108 < 2^{\sqrt{5}} < 4.7112$　$\therefore 2^{\sqrt{5}} \approx 4.711$

動手試試

請用手機輸入 2 $\boxed{x^y}$ 2.2361 看看，得到的數字是 $\underline{4.711217703\cdots}$

類題 1 方程式 $x^3=257$ 的正實根以根式及指數式來表示為 $x=$ $\underline{\sqrt[3]{257}}$ $=$ $\underline{257^{\frac{1}{3}}}$，此正實根介於整數 n 與 $n+1$ 之間，請問 $n=$ $\underline{6}$。

解 $x=\sqrt[3]{257}=257^{\frac{1}{3}}$

由 $6^3=216$ 及 $7^3=343$ 知 $6<\sqrt[3]{257}<7$　$\therefore n=6$

類題 2 化簡求值：

(1) $3^{-2}=\underline{\frac{1}{9}}$　　(2) $64^{\frac{1}{3}}=\underline{4}$

(3) $(\frac{16}{81})^{\frac{1}{4}}=\underline{\frac{2}{3}}$　　(4) $(\frac{243}{32})^{-\frac{3}{5}}=\underline{\frac{8}{27}}$。

解 (1) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$　(2) $64^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{64}=4$

(3) $(\frac{16}{81})^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{3}$　(4) $(\frac{243}{32})^{-\frac{3}{5}}=(\frac{32}{243})^{\frac{3}{5}}=(\sqrt[5]{\frac{32}{243}})^3=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

類題 3 請算出指數的次數：

(1) $5^{\square}=\frac{1}{125}$　(2) $243^{\square}=3$　(3) $32^{\square}=64$　(4) $(\frac{32}{243})^{\square}=\frac{9}{4}$。

解 (1) $5^3=125$　$\therefore 5^{-3}=\frac{1}{125}$，$\square=-3$　(2) $243=3^5$　$\therefore 243^{\frac{1}{5}}=3$，$\square=\frac{1}{5}$

(3) $32^{\frac{1}{5}}=2$　$\therefore (32^{\frac{1}{5}})^6=2^6=64$，得 $32^{\frac{6}{5}}=64$，$\square=\frac{6}{5}$

(4) $(\frac{32}{243})^{\frac{1}{5}}=\frac{2}{3}$，而 $(\frac{2}{3})^{-2}=(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$　$\therefore (\frac{32}{243})^{-\frac{2}{5}}=\frac{9}{4}$，$\square=-\frac{2}{5}$

類題 4 由 $2^{3.14159}=8.824961\cdots$、$2^{3.1416}=8.825022\cdots$、$\pi=3.141592\cdots$，則 $2^{\pi}\approx$ $\underline{8.8250}$。（估計近似值到小數點後第四位）

解 $\because 3.14159<\pi<3.1416$　$\therefore 2^{3.14159}<2^{\pi}<2^{3.1416}$

得 $8.824961\cdots<2^{\pi}<8.825022\cdots$　$\therefore 2^{\pi}\approx 8.8250$

類題 5 下列哪些是有意義的數學符號？$\underline{\text{(B)(C)(D)}}$

(A) 0^0　(B) $(-2)^{-3}$　(C) $5^{\sqrt{2}}$

(D) π^{-2}　(E) $(-4)^{0.25}$　(F) $(-8)^{\pi}$

解 (A)無意義　(B) $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}$，合　(C) $5^{\sqrt{2}}\approx 5^{1.414}=5^{\frac{1414}{1000}}=\sqrt[1000]{5^{1414}}$，合

(D) $\pi^{-2}=\frac{1}{\pi^2}$，合　(E)次數為 $\frac{1}{4}$ 時，底數不可為負　$\therefore (-4)^{0.25}$ 無意義

(F)次數為無理數時，底數不可為負　$\therefore (-8)^{\pi}$ 無意義

類題 6 下列各選項的等式哪些為真？$\underline{\text{(A)(B)(C)}}$

(A) $(2^{-3})^{-1}=2^3$　(B) $[(-3)^2]^5=(-3)^{10}$　(C) $[(-2)^4]^{\frac{1}{2}}=(-2)^2$

(D) $[(-2)^{\frac{1}{2}}]^4=(-2)^2$　(E) $[(-2)^2]^{\sqrt{2}}=(-2)^{2\sqrt{2}}$

解 (D)不合，因 $(-2)^{\frac{1}{2}}$ 無意義　(E)不合，因 $(-2)^{2\sqrt{2}}$ 無意義

這題常考

範例 2 指數的化簡求值

高次根式化成指數符號，就可以用指數律化簡合併。

1. 設 $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[5]{16}=\sqrt[a]{2^b}$，其中 a 與 b 為互質的正整數，求數對 $(a,b)=$ ＿$(60,133)$＿。

解 即 $2^{\frac{2}{3}}\cdot2^{\frac{3}{4}}\cdot2^{\frac{4}{5}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}}=2^{\frac{40+45+48}{60}}=2^{\frac{133}{60}}=\sqrt[60]{2^{133}}$

$\therefore (a,b)=(60,133)$

加強演練

1.是非題：$\sqrt[6]{2}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ 。＿○＿

2.多選題：$\sqrt{2}=$ ？＿(C)(D)＿

(A) 2^{-2} (B) 1.414 (C) $\sqrt[4]{4}$ (D) $\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$

2. 設 $a>0$ 且 $a\neq1$，化簡 $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{-3}}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{a^4}{\sqrt{a^5}}}}=a^x$，則 $x=$ ＿$-\dfrac{9}{80}$＿ 。

解 $$左式=\sqrt[5]{a^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[8]{\frac{a^4}{a^{\frac{5}{2}}}}}=\sqrt[5]{a^{-\frac{3}{4}}\cdot(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{8}}}=\sqrt[5]{a^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{3}{16}}}=(a^{-\frac{9}{16}})^{\frac{1}{5}}=a^{-\frac{9}{80}}=a^x \Rightarrow x=-\frac{9}{80}$$

3. 設 $a=(2\frac{7}{9})^{0.5}$，$b=\dfrac{10^{1+\sqrt{2}}}{(0.1)^{1-\sqrt{2}}}$，$c=(3^{\sqrt{2}})^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$，$d=(\sqrt{5}+1)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$，求 $a+b+c+d$

$=$ ＿110＿ 。

解 $a=(\frac{25}{9})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$

$b=\dfrac{10^{1+\sqrt{2}}}{(10^{-1})^{1-\sqrt{2}}}=10^{(1+\sqrt{2})-(-1+\sqrt{2})}=10^2=100$

$c=3^{\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$d=[(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)]^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{4})^3=2^3=8$

$\therefore a+b+c+d=\frac{5}{3}+100+\frac{1}{3}+8=110$

小小叮嚀

1.化簡原則：

(1)小數化成分數 (2)帶分數化成假分數

2.這四項可獨立命題，算錯一項就 GG 了

類題 7 化簡 $(\frac{81}{16})^{-0.25}+(0.25)^{-2.5}=$ ＿$32\frac{2}{3}$＿ 。

解 原式 $=(\frac{81}{16})^{-\frac{1}{4}}+(\frac{1}{4})^{-\frac{5}{2}}=(\frac{16}{81})^{\frac{1}{4}}+4^{\frac{5}{2}}=\frac{2}{3}+32=32\frac{2}{3}$

類題 8 化簡 $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}+2^{\pi+1}\cdot2^{-\pi}+\dfrac{36^{\sqrt{5}}}{6^{\sqrt{20}}}+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\pi}=$ ＿13＿ 。

解 所求 $=3^2+2^1+\dfrac{6^{2\sqrt{5}}}{6^{2\sqrt{5}}}+[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^{\pi}=9+2+1+1=13$

類題 9　化簡 $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}(\sqrt{7}-\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}}=$ $\underline{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}$ 。

解 所求 $=(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}})^{\frac{3}{2}}=[\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}]^{\frac{3}{2}}=(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2})^3=\dfrac{7\sqrt{7}+21\sqrt{3}+9\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}$

$=2\sqrt{7}+3\sqrt{3}$

類題 10　設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，化簡 $\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\sqrt{a^{-3}}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^{-7}}\sqrt[6]{a^2}}=$ $\underline{1}$ 。

解 所求 $=\sqrt[3]{a^{\frac{9}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt{a^{-\frac{7}{3}}\cdot a^{\frac{2}{6}}}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt{a^{-2}}=a^1\cdot a^{-1}=a^0=1$

類題 11　設 $2^{0.3}=a$，$2^{0.04}=b$，請以 a、b 表示 $2^{-0.66}=$ $\underline{\dfrac{ab}{2}}$ ，$2^{1.38}=$ $\underline{2ab^2}$ 。

解 ① $2^{-0.66}=2^{0.34-1}=\dfrac{2^{0.3+0.04}}{2^1}=\dfrac{2^{0.3}\cdot 2^{0.04}}{2}=\dfrac{ab}{2}$（答案不唯一，$2^{-0.66}=\dfrac{1}{2^{0.66}}=\dfrac{1}{2^{0.3+0.36}}=\dfrac{1}{ab^9}$）

② $2^{1.38}=2^{1+0.3+0.08}=2^1\cdot 2^{0.3}\cdot(2^{0.04})^2=2ab^2$（答案不唯一，$2^{1.38}=2^{0.3+1.08}=ab^{27}$）

這題常考

範例 3　次數移項

利用次數的移項來解題，數字有配過，測驗卷必考。

1. 設 $2^x=5$，$3^y=25$，求 $5^{\frac{3}{x}+\frac{4}{y}}=$ $\underline{72}$ 。

解 由 $2^x=5$ 得 $2=5^{\frac{1}{x}}$　$\therefore 5^{\frac{3}{x}}=2^3=8$

由 $3^y=25$ 得 $3=25^{\frac{1}{y}}$　$\therefore 5^{\frac{4}{y}}=25^{\frac{2}{y}}=3^2=9$

則 $5^{\frac{3}{x}+\frac{4}{y}}=5^{\frac{3}{x}}\times 5^{\frac{4}{y}}=8\times 9=72$

2. 若 $67^x=27$，$603^y=81$，則 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=$ $\underline{-2}$ 。

解 $67^x=3^3 \Rightarrow 67=3^{\frac{3}{x}}\cdots$①

$603^y=3^4 \Rightarrow 603=3^{\frac{4}{y}}\cdots$②

$\dfrac{①}{②} \Rightarrow \dfrac{67}{603}=\dfrac{3^{\frac{3}{x}}}{3^{\frac{4}{y}}} \Rightarrow 3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$　$\therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-2$

小小叮嚀

次數移項：若 $a^x=b^y$，則

(1) $a=b^{\frac{y}{x}}$（同取 $\dfrac{1}{x}$ 次方）

(2) $a^{\frac{x}{y}}=b$（同取 $\dfrac{1}{y}$ 次方）

類題 12　設 $2^x=5^y=3$，則：(1) $3^{\frac{4}{x}}=$ $\underline{16}$　(2) $3^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=$ $\underline{\dfrac{4}{125}}$ 。

解 (1)由 $2^x=3$ 得 $2=3^{\frac{1}{x}}$　$\therefore 3^{\frac{4}{x}}=2^4=16$

(2)由 $5^y=3$ 得 $3^{\frac{1}{y}}=5$，則 $3^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}=\dfrac{3^{\frac{2}{x}}}{3^{\frac{3}{y}}}=\dfrac{2^2}{5^3}=\dfrac{4}{125}$

類題 13　若 $(11.2)^a=(0.0112)^b=10$，則 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=$ $\underline{3}$ 。

解 $(11.2)^a=10 \Rightarrow 11.2=10^{\frac{1}{a}}\cdots$①　$(0.0112)^b=10 \Rightarrow 0.0112=10^{\frac{1}{b}}\cdots$②

$\dfrac{①}{②} \Rightarrow \dfrac{11.2}{0.0112}=\dfrac{10^{\frac{1}{a}}}{10^{\frac{1}{b}}} \Rightarrow 10^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=1000$　$\therefore \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=3$

類題 14 設 $12^x=36$，$3^y=216$，求 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=$ __2__ 。

解 由 $12^x=36$ 得 $12=6^{\frac{2}{x}}$ …①，由 $3^y=216$ 得 $3=6^{\frac{3}{y}}$ …②

①×②得 $36=6^{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}$ $\therefore \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2$

類題 15 若 $2^x=9$，$3^y=16$，則 $xy=$ __8__ 。

解 由 $2^x=9$ 得 $2^{\frac{x}{2}}=3$，同取 y 次方得 $3^y=(2^{\frac{x}{2}})^y=2^{\frac{xy}{2}}=16$ $\therefore \dfrac{xy}{2}=4$，則 $xy=8$

這題常考

範例 4 指數的進階求值

玩數學式，利用擴分或乘法公式來解決問題。

1. 若 $a^{2x}=3$，則 $\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^{3x}+a^{-5x}}=$ __$\dfrac{9}{41}$__ 。

解

所求 $=\dfrac{a^x-\frac{1}{a^x}}{a^{3x}+\frac{1}{a^{5x}}}\xlongequal[\text{同乘 }a^x]{\text{分子分母}}\dfrac{a^{2x}-1}{a^{4x}+\frac{1}{a^{4x}}}=\dfrac{3-1}{9+\frac{1}{9}}=\dfrac{2}{\frac{82}{9}}=\dfrac{9}{41}$

傳授絕招

注意 x 的係數，給偶數但求的都是奇數，所以利用分子分母同乘的「擴分」技巧，化簡繁分式

2. 設 $x>0$，若 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，則 $x+x^{-1}=$ __7__ ，$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=$ __18__ 。

解

①兩邊平方 ⇒ $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2x^0=9$

⇒ $x+x^{-1}=9-2=7$

② $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x^1-x^0+x^{-1})=3(7-1)=18$

複習一下

1. $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab$
2. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
3. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
4. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

3. 設 $3^x-3^{-x}=4$，求 $27^x-27^{-x}=$ __76__ 。

解 把 $3^x-3^{-x}=4$ 平方得 $(3^x-3^{-x})^2=9^x-2\cdot 3^0+9^{-x}=16$

$\therefore 9^x+9^{-x}=16+2=18$

則 $27^x-27^{-x}=(3^x)^3-(3^{-x})^3=(3^x-3^{-x})(9^x+3^0+9^{-x})=4(18+1)=76$

類題 16 若 $a^{2x}=2$，則 $\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^{3x}-a^{-3x}}=$ __$\dfrac{6}{7}$__ 。

解 所求 $=\dfrac{a^x+\frac{1}{a^x}}{a^{3x}-\frac{1}{a^{3x}}}\xlongequal[\text{同乘 }a^x]{\text{分子分母}}\dfrac{a^{2x}+1}{a^{4x}-\frac{1}{a^{2x}}}=\dfrac{2+1}{2^2-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{\frac{7}{2}}=\dfrac{6}{7}$

類題 17 若 $4^x=2+\sqrt{3}$，則 $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=$ __$\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$__ 。

解 所求 $=\dfrac{2^{3x}-\frac{1}{2^{3x}}}{2^x+\frac{1}{2^x}}\xlongequal[\text{同乘 }2^x]{\text{分子分母}}\dfrac{2^{4x}-\frac{1}{2^{2x}}}{2^{2x}+1}=\dfrac{(4^x)^2-\frac{1}{4^x}}{4^x+1}=\dfrac{(2+\sqrt{3})^2-\frac{1}{2+\sqrt{3}}}{(2+\sqrt{3})+1}$

$=\dfrac{(7+4\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{(5+5\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\dfrac{15-5\sqrt{3}+15\sqrt{3}-15}{6}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

類題 18　若 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5$，請問：(1) $x+x^{-1}=$ __23__　(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=$ __110__。

解 (1)把 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5$ 平方得 $x+x^{-1}+2=25$　$\therefore x+x^{-1}=23$

(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}})^3+(x^{-\frac{1}{2}})^3=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x-1+x^{-1})=5(23-1)=110$

類題 19　若 $2^x+2^{-x}=10$，請問：(1) $4^x+4^{-x}=$ __98__　(2) $8^x+8^{-x}=$ __970__。

解 (1)把 $2^x+2^{-x}=10$ 兩邊平方，得 $4^x+4^{-x}+2=100$　$\therefore 4^x+4^{-x}=98$

(2) $8^x+8^{-x}=(2^x+2^{-x})(4^x-2^0+4^{-x})=10(98-1)=970$

2 科學記號與常用對數

1. 科學記號：在各科領域中，常會遇到很大或很小的正數，可表示成 $a\times10^n$ 的型態，其中 $1\le a<10$ 且 n 為整數，稱為科學記號表法。a 的各位數字即為有效數字，例 2.35×10^{16} 為三位有效數字。

2. 由科學記號判斷位數：觀察 $2\times10^4=20000$ 為五位數，$3\times10^{-6}=0.000003$ 在小數點後第 6 位開始不為 0，知：

(1) $1\le a<10$，n 為正整數，則 $a\times10^n$ 的整數部分有 $n+1$ 位。

(2) $1\le a<10$，n 為正整數，則 $a\times10^{-n}$ 在小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數字。

3. 常用對數：用計算機知 10 取 0.3010 次方的值會接近 2，再進一步發明符號，把這個次方的精確值記為 $\log 2$，稱為「對數」，其中 2 為「真數」。

(1) $10^k=a \Leftrightarrow k=\log a$，例 $10^3=1000 \Leftrightarrow 3=\log 1000$。

(2) $10^{\log a}=a$，$\log(10^a)=a$，例 $10^{\log 2}=2$，$\log(10^4)=4$。

注意 真數 a 必須為正數才可以取對數，如 $\log 0$、$\log(-10)$ 均為無意義的符號。而 $\log 1=0$、$\log 10=1$、$\log\frac{1}{10}=-1$、$\log 100=2$，這些對數值可以強化概念，請同學多加觀察確認。

4. 對數的大小關係：以 10 為底的指數，次數愈大則值愈大，所以：

(1) $x>y>0 \Leftrightarrow \log x>\log y$，即真數值愈大則對數值愈大。

(2)若 $\log x=\log y$，則 $x=y$。

5. 利用對數來估計指數：已知 $\log 2\approx0.3010$，即 $10^{0.3010}\approx2$，若想估計 2^{100} 的大小，可由指數律得 $2^{100}\approx(10^{0.3010})^{100}=10^{30.10}=10^{0.10}\times10^{30}\approx1.26\times10^{30}$，所以 2^{100} 乘開共 31 位，最高位數字為 1。

注意 (1)為了方便我們習慣把 $\log 2\approx0.3010$ 記為 $\log 2=0.3010$，其實我們所處理的對數值大多為無理數，所寫的等號大多都是近似值。

(2)雖然題目都會附對數值，但為了加快解題速度，請同學熟記：

$\log 2\approx0.3010$、$\log 3\approx0.4771$、$\log 7\approx0.8451$，可以用指數律推知

$\log 4\approx0.6020$、$\log 5\approx0.6990$、$\log 6\approx0.7781$、$\log 8\approx0.9030$、

$\log 9\approx0.9542$。

範例 5 科學記號

請同學觀察數字，培養科學記號的數感。

1. 設 $a=8\times10^{12}$、$b=9\times10^{10}$、$c=7.5\times10^{23}$，則 $ab+c=$ ___1.47×10^{24}___。（以科學記號表示）

解 $ab+c=(8\times10^{12}\times9\times10^{10})+7.5\times10^{23}$
$=7.2\times10^{23}+7.5\times10^{23}=14.7\times10^{23}=1.47\times10^{24}$

2. 有天文學家估計宇宙的年齡約 200 億年，請問 200 億年換算成秒為 ___6.31×10^{17}___ 秒（以科學記號表示，取三位有效數字，一年為 365 天），請問該數字是 ___18___ 位數字，最高位數字為 ___6___ 。

解 $\underbrace{60\times60\times24}_{\text{一天的秒數}}\times365\times2\underbrace{0000000000}_{8\text{ 個 }0}$
$=\underbrace{(3.1536\times10^{7})}_{\text{一年的秒數}}\times\underbrace{(2\times10^{10})}_{200\text{ 億}}=6.3072\times10^{17}\approx6.31\times10^{17}$
為 18 位數字，最高位為 6

觀察規律
$3\times10^{4}=30000$ 為 5 位數字
$2\times10^{6}=2000000$ 為 7 位數字
所以 8×10^{30} 是 ___31___ 位數字

3. 在顯微鏡下測得一個球菌的直徑是 0.6 微米（μm），已知 $1\mu\text{m}=10^{-6}\text{m}$，球體的體積公式是 $V=\frac{4}{3}\pi r^{3}$，其中 r 為球半徑，$\pi\approx3.14$。請問此球菌的體積為 ___1.130×10^{-19}___ 立方公尺（以科學記號表示，取四位有效數字），此數字在小數點後第 ___19___ 位開始出現不為 0 的數字，此數字為 ___1___ 。

解 球菌半徑為 $0.3\mu\text{m}=3\times10^{-7}\text{m}$
體積 $V=\frac{4}{3}\times3.14\times(3\times10^{-7})^{3}=4\times3.14\times9\times10^{-21}$
$=113.04\times10^{-21}\approx1.130\times10^{-19}\text{ m}^{3}$
在小數點後第 19 位始不為 0，此數字為 1

觀察規律
$3\times10^{-4}=0.0003$，小數點後第四位開始不為 0。所以 7×10^{-20} 在小數點後第 ___20___ 位開始不為 0

類題 20 已知 $a=6\times10^{-7}$、$b=9\times10^{-10}$、$c=3.2\times10^{-16}$，求 $ab-c=$ ___2.2×10^{-16}___，$abc=$ ___1.728×10^{-31}___。（均以科學記號表示）

解 ① $ab-c=(6\times10^{-7})\times(9\times10^{-10})-(3.2\times10^{-16})=5.4\times10^{-16}-3.2\times10^{-16}=2.2\times10^{-16}$
② $abc=(6\times10^{-7})\times(9\times10^{-10})\times(3.2\times10^{-16})=172.8\times10^{-33}=1.728\times10^{-31}$

類題 21 設 $a=50000\times10^{12}$、$b=0.002\times10^{-7}$，請以科學記號表示：
(1) $a^{3}b=$ ___2.5×10^{40}___，為 ___41___ 位數。
(2) $\frac{b}{a}=$ ___4×10^{-27}___，自小數點後第 ___27___ 位開始不為 0。

解 $a=5\times10^{16}$，$b=2\times10^{-10}$
(1) $a^{3}b=(5\times10^{16})^{3}\times(2\times10^{-10})=250\times10^{48}\times10^{-10}=2.5\times10^{40}$，為 41 位數
(2) $\frac{b}{a}=\frac{2\times10^{-10}}{5\times10^{16}}=0.4\times10^{-26}=4\times10^{-27}$，自小數點後第 27 位開始不為 0

類題 22 銀河系的直徑約為 150000 光年（光每秒走 3×10^{8} 公尺，一年約為 31536000 秒），請問銀河系的直徑換算成公尺為 $\underline{\ 1.42\times10^{21}\ }$ 公尺（以科學記號表示，取三位有效數字），此數字為 $\underline{\ 22\ }$ 位數字。

解 直徑 $=150000\times3\times10^{8}\times31536000=1.5\times3\times3.1536\times10^{5+8+7}$

$=14.1912\times10^{20}\approx1.42\times10^{21}$ 公尺，為 22 位數

類題 23 已知氫原子核的密度約為 2.31×10^{14} 克／立方公分，質量約為 1.67×10^{-24} 克，請問氫原子核的體積為 $\underline{\ 7.23\times10^{-39}\ }$ 立方公分（取三位有效數字），此數字自小數點後第 $\underline{\ 39\ }$ 位開始不為 0。

解 密度 $=\dfrac{質量}{體積}$，得體積 $=\dfrac{質量}{密度}=\dfrac{1.67\times10^{-24}}{2.31\times10^{14}}\approx0.723\times10^{-38}=7.23\times10^{-39}$ 立方公分

自小數點後第 39 位開始不為 0

這題常考

範例 6　認識對數符號

對數就是次數，先熟練指對數的符號互換，培養感覺。

1. 請將指數、對數的符號互換：

(1) $10^{3}=1000\ \Leftrightarrow\ \underline{\ 3=\log1000\ }$

(2) $10^{-2}=\dfrac{1}{100}\ \Leftrightarrow\ \underline{\ -2=\log\dfrac{1}{100}\ }$

(3) $10^{0}=1\ \Leftrightarrow\ \underline{\ 0=\log1\ }$

(4) $10^{1}=10\ \Leftrightarrow\ \underline{\ 1=\log10\ }$

(5)按計算機知 $\log2\approx0.3010$，即 $\underline{\ 10^{0.3010}\approx2\ }$

(6)按計算機知 $\log3\approx0.4771$，即 $\underline{\ 10^{0.4771}\approx3\ }$。

解

小小叮嚀

常有同學把 log 看成 109，請練習用書寫體來避免寫錯看錯

log

2. 求下列各對數值：

(1) $\log100000=\underline{\ 5\ }$

(2) $\log\dfrac{1}{10000}=\underline{\ -4\ }$

(3) $\log\sqrt[3]{10}=\underline{\ \dfrac{1}{3}\ }$

(4) $\log100\sqrt{10}=\underline{\ \dfrac{5}{2}\ }$。

解 (1) $\because\ 100000=10^{5}\quad\therefore\ \log100000=5$

(2) $\because\ \dfrac{1}{10000}=10^{-4}\quad\therefore\ \log\dfrac{1}{10000}=-4$

(3) $\because\ \sqrt[3]{10}=10^{\frac{1}{3}}\quad\therefore\ \log\sqrt[3]{10}=\dfrac{1}{3}$

(4) $\because\ 100\sqrt{10}=10^{2}\times10^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{5}{2}}\quad\therefore\ \log100\sqrt{10}=\dfrac{5}{2}$

3. 化簡下列各指數式：

(1) $10^{\log 234}=$ __234__ (2) $100^{\log 13}=$ __169__ (3) $(\sqrt{10})^{\log 64}=$ __8__ 。

解 (1) 設 $10^{\log 234}=a$，則次數 $\log 234=\log a$ $\therefore a=234$

(2) $100^{\log 13}=(10^2)^{\log 13}=(10^{\log 13})^2=13^2=169$

(3) $(\sqrt{10})^{\log 64}=(10^{\frac{1}{2}})^{\log 64}=(10^{\log 64})^{\frac{1}{2}}=64^{\frac{1}{2}}=8$

小小叮嚀

1. $a>0$，則 $10^{\log a}=a$
2. $(a^b)^c=(a^c)^b$

類題 24 請換成對數符號：

(1) $10^2=100$ $\Leftrightarrow$ __$2=\log 100$__ (2) $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$ $\Leftrightarrow$ __$\frac{1}{2}=\log\sqrt{10}$__

(3) $10^{-3}=\frac{1}{1000}$ $\Leftrightarrow$ __$-3=\log\frac{1}{1000}$__ (4) $10^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$ $\Leftrightarrow$ __$-\frac{2}{3}=\log\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$__ 。

解

類題 25 請換成指數符號：

(1) $\log 123=a$ $\Leftrightarrow$ __$10^a=123$__ (2) $\log k=\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ __$10^{\sqrt{2}}=k$__

(3) $\log 5\approx 0.6990$ $\Leftrightarrow$ __$10^{0.6990}\approx 5$__ (4) $\log 7\approx 0.8451$ $\Leftrightarrow$ __$10^{0.8451}\approx 7$__ 。

解

類題 26 求下列各對數值：

(1) $\log 10000=$ __4__ (2) $\log\frac{1}{100}=$ __-2__

(3) $\log(10^{12})=$ __12__ (4) $\log\sqrt[3]{100}=$ __$\frac{2}{3}$__

(5) $\log(10\sqrt{10})=$ __$\frac{3}{2}$__ (6) $\log(\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{10})=$ __$\frac{5}{6}$__ 。

解 (1) $10000=10^4$ $\therefore \log 10000=4$ (2) $\frac{1}{100}=10^{-2}$ $\therefore \log\frac{1}{100}=-2$

(4) $\sqrt[3]{100}=10^{\frac{2}{3}}$ $\therefore \log\sqrt[3]{100}=\frac{2}{3}$ (5) $10\sqrt{10}=10^{1+\frac{1}{2}}=10^{\frac{3}{2}}$ $\therefore \log(10\sqrt{10})=\frac{3}{2}$

(6) $\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{10}=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=10^{\frac{5}{6}}$ $\therefore \log(\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{10})=\frac{5}{6}$

類題 27 化簡下列各指數式：

(1) $10^{\log\sqrt{5}}=$ __$\sqrt{5}$__ (2) $10^{\log 888}=$ __888__ (3) $10^{\log 0.12}=$ __0.12__

(4) $10^{\log(3+\sqrt{2})}=$ __$3+\sqrt{2}$__ (5) $10^{\log(1-\sqrt{3})}=$ __無意義__ 。

解 (5) $\because 1-\sqrt{3}<0$ $\therefore \log(1-\sqrt{3})$ 無意義

類題 28 化簡下列各指數式：

(1) $1000^{\log 2}=$ __8__ (2) $100^{\log\sqrt{3}}=$ __3__ (3) $(\sqrt{10})^{\log 25}=$ __5__

(4) $(10\sqrt{10})^{\log 4}=$ __8__ (5) $(\sqrt[3]{100})^{\log\frac{64}{125}}=$ __$\frac{16}{25}$__ 。

解 (1) $1000^{\log 2}=(10^3)^{\log 2}=(10^{\log 2})^3=2^3=8$ (2) $100^{\log\sqrt{3}}=(10^2)^{\log\sqrt{3}}=(10^{\log\sqrt{3}})^2=(\sqrt{3})^2=3$

(3) $(\sqrt{10})^{\log 25}=(10^{\frac{1}{2}})^{\log 25}=(10^{\log 25})^{\frac{1}{2}}=25^{\frac{1}{2}}=5$ (4) $(10\sqrt{10})^{\log 4}=(10^{\frac{3}{2}})^{\log 4}=(10^{\log 4})^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}=2^3=8$

(5) $(\sqrt[3]{100})^{\log\frac{64}{125}}=(10^{\frac{2}{3}})^{\log\frac{64}{125}}=(10^{\log\frac{64}{125}})^{\frac{2}{3}}=(\frac{64}{125})^{\frac{2}{3}}=(\frac{4}{5})^2=\frac{16}{25}$

這題常考

範例 7　對數值的估計與比較

對數值隨真數遞增，可以估計大小。

1. 設 $\log 3456700$ 介於整數 n 與 $n+1$ 之間，請問 $n=$ ___6___。

解 $\because\ 3456700 = 3.4567\times 10^6$　$\therefore\ 10^6 < 3456700 < 10^7$

$\log(10^6) < \log 3456700 < \log(10^7)$，即 $6 < \log 3456700 < 7$

得 $n=6$

小小叮嚀

若 $a>b>0$，則 $\log a > \log b$

2. 設 $\log 0.0000049$ 介於整數 n 與 $n+1$ 之間，請問 $n=$ ___-6___。

解 $\because\ 0.0000049 = 4.9\times 10^{-6}$　$\therefore\ 10^{-6} < 0.0000049 < 10^{-5}$

$\therefore\ \log(10^{-6}) < \log 0.0000049 < \log(10^{-5})$

即 $-6 < \log 0.0000049 < -5$，得 $n=-6$

類題 29　下列敘述正確請畫「○」，錯誤請畫「×」。

(1) ___○___ $10 < \log(3\times 10^{10}) < 11$　(2) ___×___ $-11 < \log(5\times 10^{-10}) < -10$

(3) ___×___ $6 < \log 654321 < 7$　(4) ___○___ $-6 < \log 0.00000123 < -5$。

解 (1) $\because\ 10^{10} < 3\times 10^{10} < 10^{11}$　$\therefore\ 10 = \log(10^{10}) < \log(3\times 10^{10}) < \log(10^{11}) = 11$

(2) $\because\ 10^{-10} < 5\times 10^{-10} < 10^{-9}$　$\therefore\ -10 = \log(10^{-10}) < \log(5\times 10^{-10}) < \log(10^{-9}) = -9$

(3) $\because\ 654321 = 6.54321\times 10^5$，$5 = \log 10^5 < \log 654321 < \log 10^6 = 6$

(4) $\because\ 0.00000123 = 1.23\times 10^{-6}$，$-6 = \log 10^{-6} < \log 0.00000123 < \log 10^{-5} = -5$

類題 30　若整數 n 是六位數，則 $\log n$ 介於整數 k 與 $k+1$ 之間（含 k 但不含 $k+1$），則 $k=$ ___5___。

解 即 $100000 \le n < 1000000$

$\therefore\ 10^5 \le n < 10^6$，得 $\log(10^5) \le \log n < \log(10^6)$

即 $5 \le \log n < 6$，得 $k=5$

這題常考

範例 8　用指數律求對數值

先化成指數符號就可以用指數律求出對數值。

1. 已知 $\log 2 = 0.3010$、$\log 3 = 0.4771$，求 $\log 4 =$ ___0.6020___，$\log 5 =$ ___0.6990___，$\log 6 =$ ___0.7781___。

解 由 $\log 2 = 0.3010$ 得 $10^{0.3010} = 2$

由 $\log 3 = 0.4771$ 得 $10^{0.4771} = 3$

① $\log 4 = \log(2^2) = \log[(10^{0.3010})^2] = \log(10^{0.6020}) = 0.6020$

② $\log 5 = \log\dfrac{10}{2} = \log\dfrac{10^1}{10^{0.3010}} = \log(10^{0.6990}) = 0.6990$

③ $\log 6 = \log(2\times 3) = \log(10^{0.3010}\times 10^{0.4771}) = \log(10^{0.7781}) = 0.7781$

再講清楚

到高二才會介紹對數律：

(1) $\log(ab) = \log a + \log b$

(2) $\log\dfrac{a}{b} = \log a - \log b$

2. 設 $\log 2 = a$、$\log 7 = b$，請以 a、b 表示 $\log 28 =$ $\underline{2a+b}$，$\log\dfrac{2}{\sqrt{7}} =$ $\underline{a-\dfrac{b}{2}}$。

解 由 $\log 2 = a$ 得 $2 = 10^a$，由 $\log 7 = b$ 得 $7 = 10^b$

① $\log 28 = \log(2\times 2\times 7) = \log(10^a\times 10^a\times 10^b) = \log(10^{2a+b}) = 2a+b$

② $\log\dfrac{2}{\sqrt{7}} = \log(\dfrac{10^a}{\sqrt{10^b}}) = \log\dfrac{10^a}{10^{\frac{b}{2}}} = \log(10^{a-\frac{b}{2}}) = a-\dfrac{b}{2}$

3. 設 $\log p = 2.1$、$\log q = 3.5$，求 $\log(p^2q) =$ $\underline{7.7}$。

解 由 $\log p = 2.1$ 得 $p = 10^{2.1}$，由 $\log q = 3.5$ 得 $q = 10^{3.5}$

則 $\log(p^2q) = \log[(10^{2.1})^2\times 10^{3.5}] = \log(10^{4.2+3.5}) = \log(10^{7.7}) = 7.7$

類題 31 已知 $\log 2 = 0.3010$、$\log 3 = 0.4771$，求 $\log 8 =$ $\underline{0.9030}$，$\log 9 =$ $\underline{0.9542}$。

解 ①由 $\log 2 = 0.3010$ 得 $2 = 10^{0.3010}$

$\log 8 = \log(2^3) = \log[(10^{0.3010})^3] = \log(10^{0.9030}) = 0.9030$

②由 $\log 3 = 0.4771$ 得 $3 = 10^{0.4771}$

$\log 9 = \log(3^2) = \log[(10^{0.4771})^2] = \log(10^{0.9542}) = 0.9542$

類題 32 設 $\log 3 = a$、$\log 5 = b$，試以 a、b 表示 $\log\dfrac{1}{9} =$ $\underline{-2a}$，$\log 45 =$ $\underline{2a+b}$，$\log\dfrac{1}{\sqrt{75}} =$ $\underline{-\dfrac{a+2b}{2}}$。

解 已知 $10^a = 3$，$10^b = 5$　① $\log\dfrac{1}{9} = \log(3^{-2}) = \log[(10^a)^{-2}] = \log(10^{-2a}) = -2a$

② $\log 45 = \log(3\times 3\times 5) = \log(10^a\times 10^a\times 10^b) = \log(10^{2a+b}) = 2a+b$

③ $\log\dfrac{1}{\sqrt{75}} = \log[(3\times 5\times 5)^{-\frac{1}{2}}] = \log[(10^a\times 10^b\times 10^b)^{-\frac{1}{2}}] = \log(10^{-\frac{a+2b}{2}}) = -\dfrac{a+2b}{2}$

類題 33 設 $\log x = 1.3$、$\log y = 4.2$，求 $\log(xy) =$ $\underline{5.5}$，$\log\dfrac{10x}{\sqrt{y}} =$ $\underline{0.2}$。

解 已知 $10^{1.3} = x$，$10^{4.2} = y$

① $\log(xy) = \log(10^{1.3}\times 10^{4.2}) = \log(10^{5.5}) = 5.5$

② $\log\dfrac{10x}{\sqrt{y}} = \log(\dfrac{10\cdot 10^{1.3}}{\sqrt{10^{4.2}}}) = \log\dfrac{10^{2.3}}{10^{2.1}} = \log(10^{0.2}) = 0.2$

這題常考

範例 9　對數的化簡與合併

用指數律可以化簡對數，到高二使用對數律會更方便。

1. 若 $\log 12+\log 3-\log 4=\log k$，求 $k=$ ___9___ 。

解 $\because 10^{\log 12+\log 3-\log 4}=10^{\log 12}\times 10^{\log 3}\div 10^{\log 4}=12\times 3\div 4=9$

$\therefore \log 12+\log 3-\log 4=\log 9$，得 $k=9$

再講清楚

1.把整個式子看成次數，底數為 10，再用指數律拆項化簡，最後用對數表示次數即可

2.先偷學對數律，考填充可以用

$\left.\begin{array}{l}(1)\ \log a+\log b=\log(ab)\\(2)\ \log a-\log b=\log\dfrac{a}{b}\end{array}\right\}$ 分合公式

2. 化簡 $\dfrac{1}{2}\log 64+3\log 15-\log 27=$ ___3___ 。

解 $10^{\frac{1}{2}\log 64+3\log 15-\log 27}=10^{\frac{1}{2}\log 64}\times 10^{3\log 15}\div 10^{\log 27}$

$=(10^{\log 64})^{\frac{1}{2}}\times(10^{\log 15})^{3}\div 10^{\log 27}$

$=\sqrt{64}\times 15^{3}\div 27=\dfrac{8\times 15\times 15\times 15}{27}=8\times 5\times 5\times 5=1000$

$\therefore$所求 $=3$

傳授絕招

次係公式：$\log(a^{n})=n\log a$

以上分合、次係公式的證明請見資優挑戰園地

類題 34 若 $\log 21+\log 8-\log 6=\log k$，求 $k=$ ___28___ 。

解 $10^{\log 21+\log 8-\log 6}=10^{\log 21}\times 10^{\log 8}\div 10^{\log 6}=21\times 8\div 6=28$

$\therefore \log 21+\log 8-\log 6=\log 28$，得 $k=28$

類題 35 若 $3\log 2+4\log 3-\dfrac{1}{2}\log 36=\log k$，求 $k=$ ___108___ 。

解 $\because 10^{3\log 2+4\log 3-\frac{1}{2}\log 36}=10^{3\log 2}\times 10^{4\log 3}\div 10^{\frac{1}{2}\log 36}=\dfrac{(10^{\log 2})^{3}\times(10^{\log 3})^{4}}{(10^{\log 36})^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2^{3}\times 3^{4}}{36^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{8\times 81}{6}=4\times 27=108$

$\therefore 3\log 2+4\log 3-\dfrac{1}{2}\log 36=\log 108$，得 $k=108$

類題 36 化簡 $\log 40+\log 15-\log 6=$ ___2___ 。

解 $10^{\log 40+\log 15-\log 6}=10^{\log 40}\times 10^{\log 15}\div 10^{\log 6}=40\times 15\div 6=100$

$\therefore \log 40+\log 15-\log 6=2$

這題常考

範例 10　用對數解指數不等式

知道對數值，就可以幫助我們解決困難的指數問題。

1. 若正整數 n 滿足 $3^{n}>2^{100}$，求最小的 $n=$ ___64___ 。（$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$）

解 即 $(10^{0.4771})^{n}>(10^{0.3010})^{100}$，即 $10^{0.4771\times n}>10^{30.10}$

$\therefore 0.4771\times n>30.10$

得 $n>\dfrac{30.10}{0.4771}=\dfrac{301000}{4771}=63.08\cdots$，得 $n=64$

2. 滿足 $(\frac{6}{7})^n < 0.0002$ 的最小正整數 $n =$ __56__。（$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$）

解 即 $(\frac{10^{0.3010} \times 10^{0.4771}}{10^{0.8451}})^n < \frac{10^{0.3010}}{10^4}$

即 $(10^{0.7781-0.8451})^n < 10^{0.3010-4}$，即 $10^{-0.067\times n} < 10^{-3.699}$

得 $-0.067 \times n < -3.699$

$\therefore n > \frac{-3.699}{-0.067} = \frac{3699}{67} = 55.2\cdots$，得 $n = 56$

類題 37 滿足 $2^n > 10^{20}$ 的最小正整數 $n =$ __67__。（$\log 2 = 0.3010$）

解 即 $(10^{0.3010})^n > 10^{20}$，即 $10^{0.3010\times n} > 10^{20}$

$\therefore 0.3010 \times n > 20$，得 $n > \frac{20}{0.3010} = \frac{20000}{301} = 66.4\cdots$

故 $n = 67$

類題 38 滿足 $(\frac{2}{3})^n < \frac{1}{1000}$ 的最小正整數 $n =$ __18__。（$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$）

解 即 $(\frac{10^{0.3010}}{10^{0.4771}})^n < 10^{-3}$，即 $10^{-0.1761\times n} < 10^{-3}$

$\therefore -0.1761 \times n < -3$

得 $n > \frac{-3}{-0.1761} = \frac{30000}{1761} = 17.03\cdots$，故 $n = 18$

類題 39 若實數 α 滿足指數方程式 $(1.25)^x = 1000$，且 α 介於整數 n 與 $n+1$ 之間，求 $n =$ __30__。（$\log 2 = 0.3010$）

解 $1.25 = \frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{10}{2^3} = \frac{10}{(10^{0.3010})^3} = 10^{1-0.9030} = 10^{0.0970}$

$\therefore (1.25)^x = (10^{0.0970})^x = 10^{0.097x} = 10^3$，得 $0.097x = 3$

$x = \frac{3}{0.097} = \frac{3000}{97} = 30.9\cdots$，故 $n = 30$

這題常考

範例 11 由對數值求科學記號

指數式可以化成科學記號，就知道數值的大小。

1. 若 $\log a = 12.58$，請問 a 的科學記號為 $a =$ __$10^{0.58} \times 10^{12}$__，a 的整數部分為 __13__ 位數，最高位數字為 __3__。（$\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$）

解 由 $\log a = 12.58$，得 $a = 10^{12.58} = 10^{0.58} \times 10^{12}$ 即為科學記號

由 $3 \approx 10^{0.4771}$、$4 = 2^2 \approx (10^{0.3010})^2 = 10^{0.6020}$

得 $10^{0.4771} < 10^{0.58} < 10^{0.6020}$ $\therefore 3 < 10^{0.58} < 4$

$\therefore a$ 為 13 位數，最高位數字為 3

2. 若 $\log x=-16.61$，請問 x 的科學記號為 $x=$ $\underline{10^{0.39}\times 10^{-17}}$，$x$ 自小數點後第 $\underline{17}$ 位開始不為 0，此不為 0 的數字為 $\underline{2}$。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

解 由 $\log x=-16.61$，得 $x=10^{-16.61}=10^{-17+0.39}=10^{0.39}\times 10^{-17}$

由 $2\approx 10^{0.3010}$、$3\approx 10^{0.4771}$，得 $10^{0.3010}<10^{0.39}<10^{0.4771}$

故 $2<10^{0.39}<3$，知 x 自小數點後第 17 位開始不為 0，此不為 0 的數字為 2

3. 已知 $\log 2\approx 0.3010$、$\log 3\approx 0.4771$、$\log 7\approx 0.8451$，請將下列指數式化成科學記號：

(1) $6^{100}=$ $\underline{10^{0.81}\times 10^{77}}$，可知 6^{100} 乘開為 $\underline{78}$ 位數，最高位數字為 $\underline{6}$。

(2) $(\frac{2}{3})^{100}=$ $\underline{10^{0.39}\times 10^{-18}}$，可知 $(\frac{2}{3})^{100}$ 自小數點後第 $\underline{18}$ 位開始不為 0，此不為 0 的數字為 $\underline{2}$。

解 已知 $10^{0.3010}\approx 2$、$10^{0.4771}\approx 3$、$10^{0.8451}\approx 7$

(1) $6^{100}=(2\times 3)^{100}\approx(10^{0.3010}\times 10^{0.4771})^{100}=(10^{0.7781})^{100}=10^{77.81}=10^{0.81}\times 10^{77}$

由 $6\approx 10^{0.3010}\times 10^{0.4771}=10^{0.7781}$，知 $10^{0.7781}<10^{0.81}<10^{0.8451}$　$\therefore 6<10^{0.81}<7$

知 6^{100} 為 78 位數，最高位數字為 6

(2) $(\frac{2}{3})^{100}\approx(\frac{10^{0.3010}}{10^{0.4771}})^{100}=(10^{-0.1761})^{100}=10^{-17.61}=10^{-18+0.39}=10^{0.39}\times 10^{-18}$

由 $10^{0.3010}<10^{0.39}<10^{0.4771}$ 得 $2<10^{0.39}<3$

故 $(\frac{2}{3})^{100}$ 自小數點後第 18 位開始不為 0，此不為 0 的數字為 2

類題 40　若 $\log\sqrt{p}=11.32$，求 p 的科學記號為 $p=$ $\underline{10^{0.64}\times 10^{22}}$，$p$ 的整數部分為 $\underline{23}$ 位數，最高位數字為 $\underline{4}$。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

解 由 $\log\sqrt{p}=11.32$ 知 $10^{11.32}=\sqrt{p}$　$\therefore p=(10^{11.32})^2=10^{22.64}=10^{0.64}\times 10^{22}$

因 $4=2^2\approx(10^{0.3010})^2=10^{0.6020}$，$5=\frac{10}{2}\approx\frac{10}{10^{0.3010}}=10^{0.6990}$

$\therefore 4<10^{0.64}<5$，知 p 為 23 位數，最高位數字為 4

類題 41　若 $\log(a^3)=-69.72$，請問 a 的科學記號為 $a=$ $\underline{10^{0.76}\times 10^{-24}}$，$a$ 自小數點後第 $\underline{24}$ 位開始出現不為 0 的數字，此數字為 $\underline{5}$。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

解 由 $\log(a^3)=-69.72$ 得 $a^3=10^{-69.72}$　$\therefore a=(10^{-69.72})^{\frac{1}{3}}=10^{-23.24}=10^{-24+0.76}=10^{0.76}\times 10^{-24}$

$5=\frac{10}{2}\approx\frac{10}{10^{0.3010}}=10^{0.6990}$，$6=2\times 3\approx 10^{0.3010}\times 10^{0.4771}=10^{0.7781}$

$\therefore 10^{0.6990}<10^{0.76}<10^{0.7781}$，即 $5<10^{0.76}<6$

知 a 自小數點後第 24 位開始不為 0，此不為 0 的數字為 5

類題 42　化成科學記號 $18^{50}=$ $\underline{10^{0.76}\times 10^{62}}$，乘開為 $\underline{63}$ 位數字，最高位數字為 $\underline{5}$。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

解 $18^{50}=(2\times 3^2)^{50}=2^{50}\times 3^{100}\approx(10^{0.3010})^{50}\times(10^{0.4771})^{100}=10^{15.05}\times 10^{47.71}=10^{62.76}=10^{0.76}\times 10^{62}$

由 $5=\frac{10}{2}\approx\frac{10}{10^{0.3010}}=10^{0.6990}$，$6=2\times 3\approx 10^{0.3010}\times 10^{0.4771}=10^{0.7781}$，知 $5<10^{0.76}<6$

$\therefore 18^{50}$ 為 63 位數，最高位數字為 5

類題 43 化成科學記號 $(\frac{3}{5})^{100}=$ ___$10^{0.81}\times10^{-23}$___，自小數點後第___23___位開始不為 0，此不為 0 的數字為___6___。（$\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$，$\log7\approx0.8451$）

解 $(\frac{3}{5})^{100}=(\frac{2\times3}{10})^{100}\approx[\frac{10^{0.3010}\times10^{0.4771}}{10}]^{100}=(10^{0.7781-1})^{100}=(10^{-0.2219})^{100}=10^{-22.19}=10^{-23+0.81}=10^{0.81}\times10^{-23}$

由 $6\approx10^{0.7781}$、$7\approx10^{0.8451}$，得 $6<10^{0.81}<7$

故 $(\frac{3}{5})^{100}$ 自小數點後第 23 位開始不為 0，此不為 0 的數字為 6

類題 44 已知 $\log2\approx0.3010$、$\log3\approx0.4771$、$\log2.54\approx0.4048$，試求出 $\sqrt[12]{254000^{83}}$ 的整數部分有___38___位，最高位數字為___2___。

解 $\sqrt[12]{254000^{83}}=(2.54\times10^5)^{\frac{83}{12}}\approx(10^{0.4048}\times10^5)^{\frac{83}{12}}=10^{5.4048\times\frac{83}{12}}=10^{37.3832}=10^{0.3832}\times10^{37}$

而 $2<10^{0.3832}<3$

$\therefore$ $\sqrt[12]{254000^{83}}$ 為 38 位數，最高位數字為 2

範例 12 位數問題（進階補充）

範例 12 與 13 請依學校教學內容決定講授或跳過。

1. 請問 $3^{100}+2^{159}$ 是___49___位數，最高位數字為___1___。（$\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$，$\log7\approx0.8451$）

解 ① $3^{100}\approx(10^{0.4771})^{100}=10^{47.71}=10^{0.71}\times10^{47}$，由 $5=\frac{10}{2}\approx\frac{10}{10^{0.3010}}=10^{0.6990}$

$6=2\times3\approx10^{0.3010}\times10^{0.4771}=10^{0.7781}$，知 3^{100} 為 48 位數且最高位數字為 5

② $2^{159}\approx(10^{0.3010})^{159}=10^{47.859}=10^{0.859}\times10^{47}$，由 $7\approx10^{0.8451}$，$8=2^3\approx(10^{0.3010})^3=10^{0.9030}$

知 2^{159} 為 48 位數且最高位數字為 7

由①②得 $3^{100}+2^{159}$ 進位成為 49 位數，最高位為 1

2. 設 n 為正整數，若 2^n 為 10 位數字，請問最小的 $n=$ ___30___，最大的 $n=$ ___33___。（$\log2\approx0.3010$）

解 10^9 為 10 位數，10^{10} 為 11 位數

若 2^n 為 10 位數，則 $10^9\leq2^n<10^{10}$

即 $10^9\leq(10^{0.3010})^n<10^{10}$ $\therefore$ $9\leq0.3010\times n<10$

得 $\frac{9}{0.3010}\leq n<\frac{10}{0.3010}$，即 $\frac{9000}{301}\leq n<\frac{10000}{301}$

$29.9\leq n<33.2$，得 n 最小為 30，最大為 33

3. 已知 47^{100} 是 168 位數，請問 47^{17} 是___29___位數。

解 10^{167} 是 168 位數，10^{168} 是 169 位數

$\therefore$ $10^{167}\leq47^{100}<10^{168}$，同取 $\frac{1}{100}$ 次方，得 $10^{1.67}\leq47<10^{1.68}$

再同取 17 次方，得 $10^{1.67\times17}\leq47^{17}<10^{1.68\times17}$，即 $10^{28.39}\leq47^{17}<10^{28.56}$

$\therefore$ 47^{17} 的科學記號為 $k\times10^{28}$，$10^{0.39}\leq k<10^{0.56}$，知 47^{17} 為 29 位數

類題 45 請問 $12^{20}+18^{17}$ 是 <u>22</u> 位數。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

解 $12^{20}=(2^2\times 3)^{20}\approx[(10^{0.3010})^2\times 10^{0.4771}]^{20}=(10^{1.0791})^{20}=10^{21.582}$

$18^{17}=(2\times 3^2)^{17}\approx[10^{0.3010}\times(10^{0.4771})^2]^{17}=(10^{1.2552})^{17}=10^{21.3384}$

$\therefore$ 12^{20} 與 18^{17} 均為 22 位數，最高位數字分別是 3 與 2

$\therefore$ $12^{20}+18^{17}$ 仍為 22 位數，最高位數字可能是 5 或 6

類題 46 若 $(\frac{3}{2})^n$ 的整數部分為 6 位數，則正整數 n 最大為 <u>34</u>，最小為 <u>29</u>。（$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

解 即 $10^5\le(\frac{3}{2})^n<10^6$，即 $10^5\le(\frac{10^{0.4771}}{10^{0.3010}})^n<10^6$，得 $10^5\le 10^{0.1761\times n}<10^6$

$\therefore$ $5\le 0.1761\times n<6$，得 $\frac{50000}{1761}\le n<\frac{60000}{1761}$，即 $28.3\cdots\le n<34.07\cdots$

$\therefore$ n 最大為 34，最小為 29

類題 47 已知 53^{100} 是 173 位數，則 53^{53} 是 <u>92</u> 位數。

解 即 $10^{172}\le 53^{100}<10^{173}$，同取 $\frac{1}{100}$ 次方，得 $10^{1.72}\le 53<10^{1.73}$

同取 53 次方，得 $10^{1.72\times 53}\le 53^{53}<10^{1.73\times 53}$

即 $10^{91.16}\le 53^{53}<10^{91.69}$，知 53^{53} 為 92 位數

範例 13　指對數的應用問題

許多學科都用指對數來描述數量關係，太重要了！

1. 現有 1000 公克的人造放射線同位素銪 150（Eu），半衰期為 36.9 年，即 t 年後的銪質量衰變成 $1000(\frac{1}{2})^{\frac{t}{36.9}}$ 公克，請問若要衰變到低於 5 公克，至少需要經過 <u>283</u> 年。
（$\log 2\approx 0.3010$，小數點以下無條件進位）

解 即 $1000(\frac{1}{2})^{\frac{t}{36.9}}<5$，即 $200<2^{\frac{t}{36.9}}$，即 $(10^{0.3010}\times 10^2)<(10^{0.3010})^{\frac{t}{36.9}}$

$\therefore$ $10^{2.3010}<10^{\frac{0.3010}{36.9}\times t}$，即 $2.301<\frac{0.301}{36.9}t$

得 $t>\frac{2.301\times 36.9}{0.301}=\frac{2301\times 369}{3010}=\frac{849069}{3010}=282.08\cdots$，故需 283 年

再講清楚

意思就是「經過 36.9 年會衰變成原有質量的一半」，底數必為 $\frac{1}{2}$，半衰期為次數的分母

2. 我們利用水溶液中的氫離子濃度 $[H^+]$（單位為莫耳／升）來定義此溶液的「酸鹼 pH 值」，公式為 $pH=-\log[H^+]$。若某一水溶液的氫離子濃度為 $[H^+]=6\times 10^{-7}$ 莫耳／升，請問此溶液的 pH 值為 <u>6.2</u>。（$\log 2\approx 0.301$，$\log 3\approx 0.477$，四捨五入至小數點後第一位）

解 pH 值 $=-\log(6\times 10^{-7})=-\log(2\times 3\times 10^{-7})$

$\approx-\log(10^{0.301}\times 10^{0.477}\times 10^{-7})=-\log(10^{-6.222})=-(-6.222)=6.222\approx 6.2$

3. 目前國際使用芮氏規模來表示地震強度。設 $E(r)$ 為地震芮氏規模 r 時震央所釋放出來的能量，r 與 $E(r)$ 的關係為：$\log E(r)=5.24+1.44r$。試問芮氏規模 7.2 的地震，其震央所釋放出來的能量約為芮氏規模 6.7 時震央所釋放出來的能量的多少倍？試選出最接近的數值。__(C)__（已知 $\log 27.54\approx1.44$）

(A) 1.5 倍　(B) 3 倍　(C) 5 倍　(D) 8 倍　(E) 14 倍

解 由 $\log E(7.2)=5.24+1.44\times7.2$，得 $E(7.2)=10^{5.24+1.44\times7.2}\cdots$①

由 $\log E(6.7)=5.24+1.44\times6.7$，得 $E(6.7)=10^{5.24+1.44\times6.7}\cdots$②

①÷②得 $\dfrac{E(7.2)}{E(6.7)}=\dfrac{10^{5.24+1.44\times7.2}}{10^{5.24+1.44\times6.7}}=10^{1.44\times0.5}=(10^{1.44})^{0.5}\approx\sqrt{27.54}\approx5.25$

故選(C)

4. 聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（W/m^2）來衡量，一般人能感覺出聲音最小強度為 $I_0=10^{-12}$（W/m^2），若測得的聲音強度為 I（W/m^2）時，所產生的聲音分貝數 d 為 $d(I)=10\cdot\log\dfrac{I}{I_0}$。今棒球比賽場中，已知 1 支瓦斯汽笛獨鳴，測得的噪音為 70 分貝，則 200 支瓦斯汽笛同時同地合鳴，聲音強度增為 200 倍，請問被測得的噪音大約為__93__分貝。（$\log2\approx0.3010$，小數點以下四捨五入至整數）

解 設 1 支汽笛的聲音強度為 $k\ W/m^2$，則 $10\cdot\log\dfrac{k}{10^{-12}}=70$，即 $10^7=\dfrac{k}{10^{-12}}$

$\therefore k=10^{-5}\ W/m^2$

200 支汽笛的聲音強度為 $200k=200\times10^{-5}=2\times10^{-3}\ W/m^2$

則分貝數 $=10\times\log\dfrac{2\times10^{-3}}{10^{-12}}\approx10\times\log(10^{0.301}\times10^9)=10\times\log(10^{9.301})=10\times9.301=93.01\approx93$ 分貝

類題 48 已知農民對農作物灑下某農藥，經 t 日後，農藥的殘留量為 $20\cdot(0.18)^t$ 毫克，而此農藥的殘留量需低於 0.001 毫克對人體才無害，試問灑下此農藥後最少需__6__日後採收農作物，才能達到對人體無害的要求。（$\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$，小數點以下無條件進位）

解 希望 $20\cdot(\dfrac{18}{100})^t<\dfrac{1}{1000}$ 成立，即 $10^{0.3010}\times10\times[\dfrac{10^{0.3010}\times(10^{0.4771})^2}{10^2}]^t<10^{-3}$

即 $10^{1.3010}\times(10^{0.3010+0.9542-2})^t<10^{-3}$，即 $10^{1.3010-0.7448t}<10^{-3}$

得 $1.3010-0.7448t<-3$，得 $4.3010<0.7448\times t$

$\therefore t>\dfrac{43010}{7448}=5.7\cdots$，故 $t=6$

類題 49 已知某放射性物質的半衰期為 11 年，則現有 100 克的該物質，若要衰變到只剩下 1 克，需經過__73__年。（小數點以下四捨五入，$\log2\approx0.3010$）

解 t 年後的質量為 $100\cdot(\dfrac{1}{2})^{\frac{t}{11}}=1$，即 $10^2\cdot(10^{-0.3010})^{\frac{t}{11}}=1$

即 $10^{2-\frac{0.3010}{11}t}=1$，得 $2=\dfrac{0.3010}{11}t$

$\therefore t=\dfrac{22}{0.301}=\dfrac{22000}{301}=73.08\cdots\approx73$ 年

類題 50　水溶液的 pH 值為 $pH=-\log[H^+]$，其中 $[H^+]$ 為氫離子濃度（單位為莫耳／升）。若有甲、乙兩種水溶液混合，甲溶液有 2 公升，pH 為 2，乙溶液有 4 公升，pH 為 3，若混合後體積為 6 公升，請問混合後的水溶液 pH 值為 __2.4__ 。（四捨五入至小數點後第一位，$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$）

解 由 $2=-\log[H^+]$ 得甲的 $[H^+]=10^{-2}$ mol/L，所以甲溶液的 H^+ 有 $10^{-2}\times 2=0.02$ 莫耳
由 $3=-\log[H^+]$ 得乙的 $[H^+]=10^{-3}$ mol/L，所以乙溶液的 H^+ 有 $10^{-3}\times 4=0.004$ 莫耳
混合液的 H^+ 有 $0.02+0.004=0.024$ 莫耳，則 $[H^+]=\dfrac{0.024}{6}=0.004$ mol/L
pH 值 $=-\log 0.004=-\log\dfrac{2^2}{10^3}\approx-\log\dfrac{(10^{0.3010})^2}{10^3}=-\log(10^{-2.3980})=-(-2.3980)=2.3980\approx 2.4$

類題 51　聲音的強度是每平方公尺多少能量（單位：W/m^2，W 為瓦特），若某一發聲體的強度為 I（W/m^2），將它換算成分貝 d 表示時，其公式為 $d(I)=10\cdot\log(10^{12}\times I)$。若有一支 70 分貝的汽笛和二十支 60 分貝的汽笛齊響，測得的音量為 __74.8__ 分貝。（四捨五入至小數點後第一位，$\log 3\approx 0.4771$）

解 由 $70=10\log(10^{12}\cdot I_1)$ 得 $10^{12}\cdot I_1=10^7$，$I_1=10^{-5}\ W/m^2$
由 $60=10\log(10^{12}\cdot I_2)$ 得 $10^{12}\cdot I_2=10^6$，$I_2=10^{-6}\ W/m^2$
齊鳴的聲音強度為 $I_1+20I_2=10^{-5}+20\times 10^{-6}=3\times 10^{-5}\ W/m^2$
分貝數 $=10\times\log(10^{12}\times 3\times 10^{-5})\approx 10\times\log(10^{0.4771}\times 10^7)=10\times 7.4771=74.771\approx 74.8$ 分貝

歷年大考精選

1. 在 1999 年 6 月 1 日數學家利用超級電腦驗證出 $2^{6972593}-1$ 是一個質數。若想要列印出此質數至少需要多少張 $A4$ 紙？假定每張 $A4$ 紙，可列印出 3000 個數字。在下列選項中，選出最接近的張數。（$\log 2\approx 0.3010$）__(E)__
(A) 50　(B) 100　(C) 200　(D) 500　(E) 700

2. 設 x 為一正實數且滿足 $x\cdot 3^x=3^{18}$，若 x 落在連續正整數 k 與 $k+1$ 之間，則 $k=$ __15__ 。

3. 若正實數 x、y 滿足 $\log_{10}x=2.8$、$\log_{10}y=5.6$，則 $\log_{10}(x^2+y)$ 最接近下列哪一個選項的值？__(C)__
(A) 2.8　(B) 5.6　(C) 5.9　(D) 8.4　(E) 11.2
101 學測

4. 放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A、B，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？__(A)__
(A) 8 小時　(B) 10 小時　(C) 12 小時　(D) 15 小時　(E) 20 小時
105 學測

5. 設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b)+\log 100+\log b=7$。試選出正確的選項。 (D)

(A) $1\le b\le\sqrt{10}$　(B) $\sqrt{10}\le b\le 10$　(C) $10\le b\le 10\sqrt{10}$　(D) $10\sqrt{10}\le b\le 100$　(E) $100\le b\le 100\sqrt{10}$

108 學測

6. 設 a、b、c 為實數且滿足 $\log a=1.1$、$\log b=2.2$、$\log c=3.3$。試選出正確的選項。 (C)(E)

(A) $a+c=2b$　(B) $1<a<10$　(C) $1000<c<2000$　(D) $b=2a$　(E) a、b、c 成等比數列

109 學測

7. 五項實數數列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1=\log_{10}36$，則 a_5 有多少種可能的值？ (A)

(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 7　(E) 8

110 學測

8. 將 $(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號 $(\sqrt[3]{49})^{100}=a\times 10^n$，其中 $1\le a<10$，且 n 為正整數。若 a 的整數部分為 m，則數對 $(m,n)=$ $(2,56)$ 。($\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 7\approx 0.8451$)

110 學測

素養導向試題

地球上天然碳元素中，約 99% 是碳 12（每個碳原子有 6 個質子與 6 個中子），1% 是碳 13，只有 10^{12} 分之 1 是碳 14，相當於每公克的純碳內含有約 500 億個碳 14 原子。碳 14 是大氣中的氮原子被宇宙射線撞擊而成，具放射性，半衰期經測定為 5730 年，科學家發現，幾億年來地球各地的碳 14 含量始終維持穩定，當生物死亡後不再與環境進行碳交換，體內的碳 14 含量即開始降低，因此可偵測化石中碳 14 的含量來估計生成的年代。請回答下列問題：

一、是非題

○ 1. 若 A 化石每公克的碳有 250 億個碳 14 原子，而 B 化石每公克的碳有 125 億個碳 14 原子，則 B 距今的時間是 A 的兩倍。

解 由 500 億 → 250 億需 5730 年，再變成 125 億又需要 5730 年
所以 A 化石距今 5730 年，B 化石距今 11460 年

× 2. 若 A 化石每公克的碳有 400 億個碳 14 原子，而 B 化石每公克的碳有 200 億個碳 14 原子，則 B 距今的時間是 A 的兩倍。

解 A 化石由 500 億→ 400 億需 k 年 ($k<5730$)
B 化石再變成 200 億又需 5730 年
所以 B 化石距今 $k+5730$ 年，所以 B 距今的時間超過 A 的 2 倍

二、單選題

(A) 3. 考古學家在西班牙發現尼安德塔人的遺跡，請問若有一些尼安德塔人在 5 萬 7 千年前死去，則今日測其遺骨中每公克的碳約有幾個碳 14 原子？
(A) 5 千萬個　(B) 1 億個　(C) 2 億個
(D) 5 億個　(E) 10 億個

解 x 年後，每公克碳的碳 14 個數為 500 億 $\times (\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}$

$x = 57300$ 代入得 500 億 $\times (\frac{1}{2})^{10} \approx$ 500 億 $\times \frac{1}{1000} = 0.5$ 億 $= 5000$ 萬

(D) 4. 使用碳 14 年代偵測儀測量碳 14 的原子個數有其限度，若每公克的碳所含碳 14 原子的個數低於 50 萬個，則該儀器無法測出。請問該儀器所能偵測的年代限度最接近下列哪一個選項？（$\log 2 \approx 0.3$）
(A) 8 萬年　(B) 8 萬 5 千年　(C) 9 萬年
(D) 9 萬 5 千年　(E) 10 萬年

解 $500 \times 10^8 \times (\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}} = 500000$

即 $10^5 = 2^{\frac{x}{5730}} \approx (10^{0.3})^{\frac{x}{5730}}$

$\therefore 5 \approx \frac{0.3x}{5730}$，得 $x \approx \frac{5 \times 5730}{0.3} = 95500$ 年，故選(D)

三、非選題

5. 生物個體死亡 x 年後，測量遺體中每公克的碳，所含碳 14 原子的個數為 500 億 $\times (\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}$ 個。現有 A、B 兩個化石，假設 A 的年代比 B 早一萬年，而 A 每公克的碳所含碳 14 的原子個數恰比 B 少 10 億個。請問 B 化石的年代距今多少年？（$\log 2 \approx 0.30103$，請使用智慧手機的指對數計算功能，百位數以下四捨五入）

解 設 B 有 x 年，則 A 有 $x + 10000$ 年

所以 A 每公克的碳有 $500 \times 10^8 \times (\frac{1}{2})^{\frac{x+10000}{5730}}$ 個，B 每公克的碳有 $500 \times 10^8 \times (\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}$ 個

$\therefore 500 \times 10^8 \times (\frac{1}{2})^{\frac{x+10000}{5730}} + 10^9 = 500 \times 10^8 \times (\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}$

約去 10^8 得 $500 \times (\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}} \times (\frac{1}{2})^{\frac{10000}{5730}} + 10 = 500 \times (\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}}$

由計算機知 $(\frac{1}{2})^{\frac{10000}{5730}} \approx (\frac{1}{2})^{1.7452} \approx 0.29829$，代回得 $10 = 500 \times (\frac{1}{2})^{\frac{x}{5730}} \times (1 - 0.29829)$

即 $2^{\frac{x}{5730}} = 50 \times 0.70171 = 35.0855 \underset{\text{計算機}}{\approx} 10^{1.5451}$，即 $(10^{0.30103})^{\frac{x}{5730}} \approx 10^{1.5451}$

$\therefore 0.30103 \times \frac{x}{5730} \approx 1.5451$，得 $x \approx \frac{1.5451 \times 5730}{0.30103} \approx 29410 \approx 29400$ 年

資優挑戰園地

1. 設 n 為自然數，若 $x=\dfrac{5^{\frac{1}{n}}+5^{-\frac{1}{n}}}{2}$，則 $(x+\sqrt{x^2-1})^n=$ ___5___。

解 由內而外處理 $\because x^2=\dfrac{5^{\frac{2}{n}}+5^{-\frac{2}{n}}+2}{4}$ $\Rightarrow$ $x^2-1=\dfrac{5^{\frac{2}{n}}+5^{-\frac{2}{n}}-2}{4}=\left(\dfrac{5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow$ $\sqrt{x^2-1}=\left|\dfrac{5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}}}{2}\right|=\dfrac{5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}}}{2}$ $\Rightarrow$ $x+\sqrt{x^2-1}=\dfrac{5^{\frac{1}{n}}+5^{-\frac{1}{n}}}{2}+\dfrac{5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}}}{2}=5^{\frac{1}{n}}$

$\therefore (x+\sqrt{x^2-1})^n=(5^{\frac{1}{n}})^n=5$

2. 設正數 a、b 均不是 1，且 $a^x=b^{2y}=(ab)^{\frac{1}{5}}$，求 $\dfrac{xy}{x+2y}=$ ___$\dfrac{1}{10}$___。

解 $\because a^x=(ab)^{\frac{1}{5}}$ $\therefore a^5=(ab)^{\frac{1}{x}}\cdots$① $\because b^{2y}=(ab)^{\frac{1}{5}}$ $\therefore b^5=(ab)^{\frac{1}{2y}}\cdots$②

①×② $\Rightarrow$ $a^5\cdot b^5=(ab)^{\frac{1}{x}}\cdot(ab)^{\frac{1}{2y}}$ $\Rightarrow$ $(ab)^5=(ab)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=5$

$\Rightarrow$ $\dfrac{2y+x}{2xy}=5$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x+2y}{xy}=10$ $\Rightarrow$ $\dfrac{xy}{x+2y}=\dfrac{1}{10}$

3. 已知 $60^a=5$，$60^b=3$，求 $4^{\frac{a+b}{1-a-b}}=$ ___15___。

解 $60^a\cdot60^b=60^{a+b}=15$

$60^{1-a-b}=\dfrac{60}{60^{a+b}}=\dfrac{60}{15}=4$，則 $60=4^{\frac{1}{1-a-b}}$

兩邊同取 $(a+b)$ 次方得 $60^{a+b}=(4^{\frac{1}{1-a-b}})^{a+b}$，所以 $15=4^{\frac{a+b}{1-a-b}}$

4. 天上的星星明亮度不太相同，所以天文學家就以「星等」來區分。今以某一特定的星光強度 F_0 為基準，對於能發出星光強度為 F 的星體，定義 $k=-1.7\cdot\log\dfrac{F}{F_0}$，並稱該星體為「$k$ 等星」。已知月亮為 -1.4 等星，北極星為 2 等星，則月亮的星光強度是北極星的 ___100___ 倍。

解 已知 $-1.4=-1.7\log\dfrac{F_{月}}{F_0}$，得 $\log\dfrac{F_{月}}{F_0}=\dfrac{1.4}{1.7}$ $\therefore \dfrac{F_{月}}{F_0}=10^{\frac{1.4}{1.7}}\cdots$①

已知 $2=-1.7\log\dfrac{F_{北}}{F_0}$，得 $\log\dfrac{F_{北}}{F_0}=-\dfrac{2}{1.7}$ $\therefore \dfrac{F_{北}}{F_0}=10^{-\frac{2}{1.7}}\cdots$②

①÷②得 $\dfrac{F_{月}}{F_0}\div\dfrac{F_{北}}{F_0}=10^{\frac{1.4}{1.7}}\div10^{\frac{-2}{1.7}}$，即 $\dfrac{F_{月}}{F_{北}}=10^{\frac{1.4}{1.7}-(\frac{-2}{1.7})}=10^{\frac{3.4}{1.7}}=10^2=100$ 倍

5. 設 a、b 為正實數，證明下列公式：

(1) $\log a+\log b=\log(ab)$ (2) $\log a-\log b=\log\dfrac{a}{b}$

(3) $\log(a^n)=n\log a$，其中 n 為實數。

解 設 $\log a=p$，$\log b=q$，則 $a=10^p$，$b=10^q$

(1) $a\cdot b=10^p\cdot10^q=10^{p+q}$ $\therefore p+q=\log(ab)$，則 $\log a+\log b=\log(ab)$ 成立

(2) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{10^p}{10^q}=10^{p-q}$ $\therefore p-q=\log\dfrac{a}{b}$，則 $\log a-\log b=\log\dfrac{a}{b}$ 成立

(3)由 $a=10^p$，同取 n 次方得 $a^n=(10^p)^n=10^{np}$ $\therefore np=\log(a^n)$，則 $n\cdot\log a=\log(a^n)$ 成立